



**Sección de Matemáticas**  
Universidad de La Laguna

Sara Santana Romero

# *La Geometría del Indicador del Sur*

The Geometry of  
the Chinese south seeking chariot

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Marzo de 2019

DIRIGIDO POR

*Juan Carlos Marrero González*  
*Edith Padrón Fernández*

*Juan Carlos Marrero González*  
*Departamento de Matemáticas,*  
*Estadística e I.O.*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

*Edith Padrón Fernández*  
*Departamento de Matemáticas,*  
*Estadística e I.O.*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

A los que se cruzaron en mi camino y me alentaron a seguirlo, especialmente a mi familia y amigos. Gracias, también, a Edith y Juan Carlos, por la paciencia y dedicación manifestada. Así como al profesor Carmelo Militello por sus explicaciones acerca de la mecánica del Indicador del Sur.



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*Presentaremos un mecanismo, llamado Indicador del Sur, capaz de realizar de manera aproximada el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva contenida en una superficie. Para ello dividiremos el trabajo en dos partes. En la primera, trabajaremos de forma teórica con los conceptos matemáticos básicos sobre los que se sostiene el funcionamiento del mecanismo, conceptos como curvatura geodésica, transporte paralelo o curvatura de Gauss. En la segunda parte, explicaremos el diseño del mecanismo y trabajaremos experimentalmente con estas nociones.*

**Palabras clave:** *Curvatura geodésica – Transporte paralelo – Curvatura de Gauss – Geometría experimental – Indicador del Sur.*

### *Abstract*

---

*The main aim of this work is to introduce a mechanical device called the Chinese south seeking chariot, which is able to approximate the parallel transport of a vector along a curve on a surface. The structure of this work is divided in two parts. Firstly, we focus the work in the theoretical mathematical concepts needed to understand the performance of the gadget, for example, the geodesic curvature, the parallel transport or the Gauss curvature of a surface. The second part is to explain its design and to work experimentally with the previously mentioned notions.*

**Keywords:** *Geodesic curvature – Parallel transport – Gauss curvature – Experimental geometry – Chinese south seeking chariot.*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Curvas geodésicas sobre una superficie</b> .....	1
1.1. Curvatura geodésica .....	1
1.2. Geodésicas .....	6
<b>2. Transporte paralelo sobre una superficie</b> .....	15
2.1. Transporte paralelo .....	15
2.2. Transporte paralelo y curvatura de Gauss .....	19
2.3. Transporte paralelo y curvatura geodésica .....	21
<b>3. Teorema de Gauss-Bonnet</b> .....	23
<b>4. Geometría experimental: El Indicador del Sur</b> .....	31
4.1. El mecanismo del Indicador del Sur .....	31
4.2. Diseño del Indicador del Sur .....	32
4.3. Experimentación con el Indicador del Sur .....	36
<b>A. Apéndice: El tensor curvatura de Riemann</b> .....	39
<b>Bibliografía</b> .....	43
<b>Poster</b> .....	45





---

## Introducción

La Geometría Diferencial de curvas y superficies es, y ha sido siempre, una de las ramas de las matemáticas con mayor impulso en el ámbito de las aplicaciones.

En 1827 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publica *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [2], publicación que podría considerarse el origen de la Geometría Diferencial en un amplio sentido. Motivado por el cuestionamiento del axioma de las paralelas, Gauss plantea que son posibles nuevas geometrías en donde este axioma no se satisfaga.

Ya previamente Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), en sus respectivos desarrollos del Cálculo infinitesimal, habían usado estas técnicas en los estudios de curvas.

Posteriormente, Euler (1707-1783) y Monge (1746- 1818) extendieron algunas de estas ideas al análisis matemático de las superficies.

Uno de los conceptos claves en la Geometría Diferencial de superficies es la curvatura de Gauss. Si  $p$  es un punto de una superficie  $S$ , consideramos las curvas sobre  $S$  que pasan por  $p$  y están contenidas en los planos que pasan por  $p$  y que están determinados por la dirección normal a  $S$  en  $p$  y por cada una de las direcciones del plano tangente. Si elegimos de la colección de curvaturas de estas curvas el mínimo y el máximo (las curvaturas principales) ninguna de ellas nos permite capturar la geometría intrínseca de la superficie (la geometría que se conserva por isometrías). Sin embargo, el producto de ellas, la curvatura de Gauss, sí posee esta propiedad (véase por ejemplo [4]).

Otra noción importante en Geometría Diferencial, es el transporte paralelo. Este concepto fue introducido para superficies por Tulio Levi-Civita (1873-1941). Este investigador italiano, ayudó a Albert Einstein a comprender cómo en el espacio-tiempo curvo se pueden relacionar magnitudes vectoriales medidas en diferentes puntos del universo. El transporte paralelo es la herramienta fundamental para entender este proceso.

En el plano, la noción de transporte paralelo, es sencilla: si tenemos un vector con origen en el punto  $p$ , trasladar este vector a otro punto  $q$  paralelamente es preservar la dirección, el módulo y el sentido del vector y sólo cambiar el origen. Si este vector lo trasladamos a través de una curva, lo que hacemos en todo momento es mantener el vector apuntando hacia el mismo lugar. Por lo que es claro que, en el plano, el transporte paralelo no depende de la curva elegida. Este no es el caso de una superficie arbitraria.

En una superficie arbitraria procedemos de la siguiente forma. Supongamos que  $p$  es un punto de la superficie  $S$  y queremos trasladar paralelamente un vector  $\vec{v}$  tangente a  $S$  en  $p$  a través de la curva  $\gamma$  hasta el punto  $q$ . Intuitivamente, lo que hacemos es colocar sobre la superficie una tira de papel que incluye la curva que une  $p$  y  $q$  y al vector  $\vec{v}$ . Luego la retiramos y realizamos el transporte paralelo euclídeo sobre la tira. Finalmente volvemos a colocar la tira de papel sobre  $S$  en la misma posición inicial. Ahora podemos observar cómo sobre la superficie se desplaza el vector a lo largo de  $\gamma$  (véase por ejemplo [1]).

Este proceso es más exacto cuanto más cerca estén los puntos  $p$  y  $q$ . Como se puede observar por la experiencia, esta noción de transporte paralelo sobre superficies depende de la curva elegida. Además, si consideramos una curva cerrada, el vector inicial y el final (tras el transporte paralelo) no tienen por qué coincidir. Nótese que en el caso del transporte paralelo en el plano estos vectores coinciden.

En el caso de una superficie, el ángulo  $\psi$  que determinan estos dos vectores depende de la curvatura de Gauss de la superficie. Esta relación se explicita en la fórmula

$$\psi = \int_D K dA,$$

donde  $D$  es el dominio determinado por la curva cerrada y  $dA$  es el elemento de área en  $S$ .

Esta fórmula nos permite obtener uno de los resultados más significativos de la teoría de superficies regulares: el primer teorema de Gauss-Bonnet. La importancia del mismo reside en establecer una relación entre la curvatura de Gauss de la superficie  $S$  y la curvatura geodésica de una curva cerrada sobre  $S$ .

Recordamos que la aceleración en un punto  $p$  de  $S$  de una curva  $\sigma$  (respecto del parámetro arco) tiene dos componentes: una tangente a la superficie y otra en la dirección de la normal a la superficie. La componente tangente es proporcional al vector perpendicular a la normal y al vector velocidad. Esta constante de proporcionalidad define la curvatura geodésica de  $\sigma$ .

El objetivo de este trabajo es presentar un mecanismo capaz de realizar de manera aproximada el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva contenida en una superficie. Este mecanismo es el *Indicador del Sur* y nos permite, además, medir (también aproximadamente) la curvatura geodésica y la curvatura de Gauss de una curva sobre una superficie.

El Indicador del Sur es un mecanismo envuelto en un cierto misterio. Su origen se relaciona con la necesidad de recorrer largas extensiones sin ninguna referencia de localización.



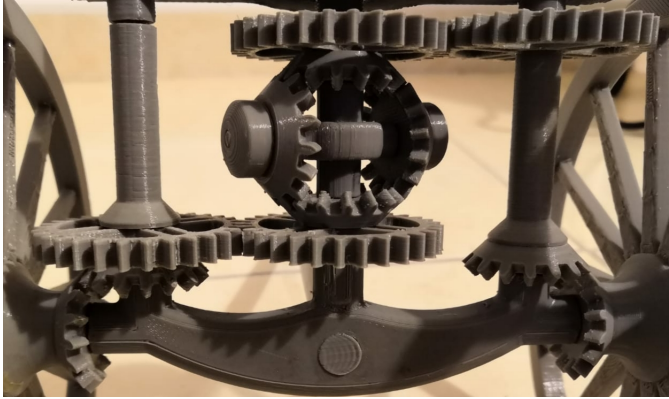
**Figura 0.1.** En la figura, el Indicador del Sur impreso en 3D.

Las leyendas sobre este mecanismo de origen chino lo presentan como un carro rojo tirado por caballos, coronado por una figura humana de jade rojo (el emperador) que tiene el brazo extendido (señalando hacia el Sur). Contrariamente a la tradición occidental, la cultura china utiliza el Sur como referente.

Existen algunas referencias históricas (Shung Shu +500, Shung Shih 1027-1107, véase referencia [8]) que hacen alusión a diferentes modelos del mecanismo. En las más verosímiles, parece que el carro funcionaba de tal manera que la mano del emperador siempre señalaba hacia el Sur. El carro podía girar un ángulo  $\theta$ , pero la figura humana realizaba un giro que compensaba este movimiento, consiguiendo que la mano siempre estuviera señalando hacia la misma dirección.

A principios del siglo XX se intentaron varias reconstrucciones del mecanismo (Moule (1925), Wang Chento (1937), Lanchester (1947), Pao Ssu-ho (1948), Sleswyk (1977) y Liu Ten-yi (1980)). La pregunta era clara: ¿es posible construir una máquina que realice este movimiento? La primera aproximación fue pensar que el Indicador del Sur era como una brújula y que, por tanto, el movimiento se activaba por un proceso magnético. Sin embargo, las fuentes parecían descartar esta situación. El Indicador del Sur era un artilugio puramente mecánico. Pero, ¿era esto posible?

George Lanchester (1874-1970) [3], famoso ingeniero mecánico inglés, propone una solución al problema; el uso de un diferencial que permitiera realizar las semidiferencias de las velocidades angulares de las ruedas.



**Figura 0.2.** En la figura, los engranajes del mecanismo.

George Lanchester fue el hermano de Fredrick Lanchester, fundador de la fábrica de coches que lleva su apellido (actualmente es parte de Jaguar Land Rover). El diferencial de nuestro Indicador del Sur tiene mucho que ver con los diferenciales de los coches, responsables de que las ruedas de un coche tengan diferente velocidad cuando el coche gira. De esta manera los coches no pierden la tracción en las ruedas. El diferencial del Indicador del Sur, sin embargo, hace el proceso inverso al del coche.

Con esta idea fue posible reconstruir el Indicador del Sur utilizando, únicamente, ingredientes mecánicos. Una de estas reproducciones se encuentra en el museo nacional de Ciencias de China. Otra fue incluida en la Expo de 2005 de Japón.

El Indicador del Sur puede considerarse como el primer autómatas de la Historia (la primera máquina con un sistema de autorregulación).

Este trabajo de fin de grado está inspirado en el artículo de Mariano Santander [8] (véase también [5, 6, 7]). La estructura del trabajo es la siguiente. Comenzamos introduciendo la noción de curvatura geodésica de una curva sobre una superficie y el concepto de geodésica como aquellas curvas que tienen curvatura geodésica nula. Vemos cómo para cada punto de la superficie y por cada dirección del plano tangente en el punto, existe siempre una única geodésica que pase por dicho punto y cuya velocidad inicial sea justamente el vector prefijado.

Con el fin de facilitar algunos cálculos al trabajar con geodésicas, introducimos unas coordenadas especiales (las coordenadas semigeodésicas). Y haciendo uso de ellas, probamos que una geodésica entre dos puntos suficientemente próximos es el camino más corto entre ellos. Aquí, entendemos que dos puntos están próximos si están en un entorno coordenado suficientemente pequeño de la superficie.

El segundo capítulo está dedicado a presentar la noción de transporte paralelo sobre una superficie. Analizamos su dependencia de la curva sobre la que se realiza y la relación con la curvatura de Gauss de la superficie.

En el tercer capítulo, presentamos la primera versión del Teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la curvatura geodésica y la curvatura de Gauss de la superficie. Este resultado será muy útil en el último capítulo para comprender el uso del Indicador del Sur como medidor de la curvatura de Gauss.

Con todas estas herramientas matemáticas, procedemos en el cuarto capítulo a usar el Indicador del Sur como una herramienta experimental que nos permitirá:

- Obtener aproximadamente el transporte paralelo de un vector sobre una superficie arbitraria.
- Medir la curvatura geodésica y la curvatura de Gauss en un entorno suficientemente pequeño de la superficie.
- Discutir si una curva es o no una geodésica sobre una superficie.



## Curvas geodésicas sobre una superficie

En lo que sigue, supondremos que  $S$  es una superficie contenida en  $\mathbb{R}^3$  de clase  $C^\infty$ . Además, a no ser que se indique lo contrario, los puntos de la superficie serán todos regulares, es decir, admitirán plano tangente.

Este primer capítulo está dedicado al estudio de las curvas geodésicas sobre  $S$ . Para ello, recordaremos previamente algunos conceptos conocidos.

El término *curva geodésica* proviene de la palabra *geodesia*, que significa *división de la Tierra* y representaba el camino más corto entre dos puntos de la Tierra. Así, de alguna manera, podría decirse que este tipo de curvas juega sobre la superficie el mismo papel que las rectas en el plano.

Las curvas que conectan dos puntos entre una superficie minimizando la distancia son, en efecto, curvas geodésicas.

### 1.1. Curvatura geodésica

Para poder introducir algunos conceptos relacionados con la noción de curva geodésica, es necesario recordar primero la ecuación de Gauss para una superficie.

Consideremos, sobre una superficie  $S$ , un punto  $p$  y un vector tangente a  $S$  en  $p$ ,  $\vec{v} \in T_p S$ . Tomemos asimismo, un campo de vectores  $Y$  en  $V$ , un entorno abierto de  $p$  en  $S$ . Esto es, una aplicación  $Y : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que para cada punto  $q \in V \subseteq S$ , y cualquier parametrización  $\vec{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V$  de  $S$  con  $q \in \vec{x}(U)$ , entonces  $Y \circ \vec{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable.

Denotamos por  $D_{\vec{v}}Y$  la *derivada direccional del campo  $Y$  respecto del vector  $\vec{v}$* , en  $\mathbb{R}^3$ , esto es,

$$D_{\vec{v}}Y = \frac{dY(\alpha(t))}{dt}(0),$$

donde  $\alpha$  es una curva en  $V$  que satisface  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \vec{v}$ .

Recordemos que  $D_{\vec{v}}Y$  no depende de la curva elegida  $\alpha$  y que, respecto del producto escalar, se comporta como sigue

$$\vec{v}(X \cdot Y) = (D_{\vec{v}}X) \cdot Y_p + X_p \cdot (D_{\vec{v}}Y), \quad (1.1)$$

para cualesquiera  $X, Y : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  (ver [4]).

Supongamos ahora que  $Y : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un campo tangente a  $S$ , esto es  $Y(p) \in T_p S$  para todo  $p \in S$ . La derivada direccional de  $Y$  respecto de  $\vec{v}$  es un vector que se puede descomponer de forma única en la suma de su parte normal y su parte tangente con respecto a la superficie

$$D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + \lambda N_p, \quad \text{con } \nabla_{\vec{v}}Y \in T_p S, \quad (1.2)$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $N$  es el campo normal a la superficie en un entorno de  $p$ . Al vector  $\nabla_{\vec{v}}Y$  se le denomina *derivada covariante de  $Y$  respecto de  $\vec{v}$* .

De (1.1) se deduce que

$$0 = \vec{v}(N \cdot Y) = (D_{\vec{v}}N) \cdot Y_p + N_p \cdot (D_{\vec{v}}Y),$$

o lo que es lo mismo,

$$-(D_{\vec{v}}N) \cdot Y_p = N_p \cdot (D_{\vec{v}}Y). \quad (1.3)$$

Multiplicando ahora (1.2) por  $N_p$  obtenemos el valor de  $\lambda$

$$\lambda = N_p \cdot (D_{\vec{v}}Y). \quad (1.4)$$

Por otro lado, la segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$  es la aplicación bilineal  $II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$II(\vec{v}, \vec{w}) = -(D_{\vec{v}}N) \cdot \vec{w}.$$

Usando (1.3), podemos entonces reescribir (1.4) en términos de la segunda forma fundamental

$$\lambda = N_p \cdot (D_{\vec{v}}Y) = -(D_{\vec{v}}N) \cdot Y_p = II(\vec{v}, Y_p),$$

de donde (véase (1.2)) obtenemos la *ecuación de Gauss*

$$D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + II(\vec{v}, Y_p) \cdot N_p. \quad (1.5)$$

Esta ecuación puede ser extendida a campos de vectores  $X$  e  $Y$  tangentes a  $S$  por la ecuación

$$D_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y) N. \quad (1.6)$$

$D_X Y$  (respectivamente,  $\nabla_X Y$ ) denota el campo  $(D_X Y)_p = D_{X_p} Y$  (respectivamente,  $(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$ ) y  $II(X, Y)$  es la función sobre  $S$  dada por  $II(X, Y)(p) = II(X_p, Y_p)$ .



Sea ahora  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada con parámetro arco  $s$  sobre una superficie  $S$ . Sabemos que el vector aceleración  $\ddot{\alpha}(s)$  se descompone en un vector  $\vec{k}_g$  tangente a la superficie y en un vector  $\vec{k}_n$  en la dirección de la normal

$$\ddot{\alpha}(s) = \vec{k}_g(s) + \vec{k}_n(s) = \vec{k}_g(s) + k_n(s)N_{\alpha(s)}, \text{ donde } k_n(s) \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Para calcular  $\vec{k}_g$ , consideraremos el vector  $\vec{u}(s) \in T_{\alpha(s)}S$ , definido por  $\vec{u}(s) = N_{\alpha(s)} \times \dot{\alpha}(s)$  al que llamaremos *normal geodésica*.

$\{\dot{\alpha}(s), \vec{u}(s), N_{\alpha(s)}\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  ordenada positivamente. Nótese que, al haber considerado sobre  $\alpha$  la parametrización natural,  $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$ . Derivando esta última expresión tenemos que

$$\dot{\alpha}(s) \cdot \ddot{\alpha}(s) = 0. \quad (1.8)$$

Si multiplicamos (1.7) por  $\dot{\alpha}(s)$ , y usamos (1.8), podemos deducir que  $\vec{k}_g(s)$  y  $\dot{\alpha}(s)$  son ortogonales.

Por lo tanto, como  $\vec{k}_g(s)$  es ortogonal a  $N_{\alpha(s)}$ , se tiene que

$$\vec{k}_g(s) = k_g(s)\vec{u}(s). \quad (1.9)$$

*Observación 1.1.* De análoga manera a como definimos la derivada direccional de un campo respecto de un campo, podemos considerar la misma noción para campos definidos solo a lo largo de la curva  $\alpha$ . Este es el caso del campo velocidad

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\rightarrow \dot{\alpha}(s) \in T_{\alpha(s)}S \end{aligned}$$

a partir del cual podemos construir el campo aceleración  $D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}$ .

**Definición 1.2.** Al campo  $\vec{k}_g$  a lo largo de la curva  $\alpha$ , se le denomina *campo curvatura geodésica de  $\alpha$  sobre la superficie  $S$* . La función  $k_g$  es la *curvatura geodésica de  $\alpha$* .

*Observación 1.3.* Si la curva es plana, es claro por (1.7) que  $\vec{k}_g = \ddot{\alpha}$  y, por tanto,  $k_g = \|\ddot{\alpha}\|$  es justamente la curvatura de la curva.

De la ecuación de Gauss, se sigue,

$$D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})N \circ \alpha. \quad (1.10)$$

Con lo que, comparando (1.7) con (1.10), tenemos

$$\vec{k}_g = \nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} \quad (1.11)$$

y

$$\vec{k}_n = II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})N \circ \alpha. \quad (1.12)$$

A continuación, daremos las expresiones locales de los campos  $\vec{k}_g$  y  $\vec{k}_n$  a lo largo de  $\alpha$ . Supongamos que la curva está sobre un entorno coordinado de la superficie con representación paramétrica  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ . Entonces, si  $s$  es el parámetro arco y  $\alpha(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$  tenemos que

$$\dot{\alpha}(s) = \frac{du^1}{ds}(s)\vec{x}_1(u^1(s), u^2(s)) + \frac{du^2}{ds}(s)\vec{x}_2(u^1(s), u^2(s)),$$

donde

$$\vec{x}_i(u^1(s), u^2(s)) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i}(u^1(s), u^2(s)), \text{ para } i = 1, 2.$$

Por tanto,

$$\ddot{\alpha}(s) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{du^i}{ds}(s) \frac{du^j}{ds}(s) \vec{x}_{ij}(u^1(s), u^2(s)) + \sum_{k=1}^2 \frac{d^2 u^k}{ds^2}(s) \vec{x}_k(u^1(s), u^2(s)), \quad (1.13)$$

donde

$$\vec{x}_{ij}(u^1(s), u^2(s)) = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial u^j}(u^1(s), u^2(s)).$$

Recordemos que los vectores  $\vec{x}_{ij}$  se descomponen en una parte tangente, y una parte normal

$$\vec{x}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} N \quad (1.14)$$

donde los términos  $L_{ij}$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental, esto es,

$$L_{ij}(u^1, u^2) = II(\vec{x}_i(u^1, u^2), \vec{x}_j(u^1, u^2))$$

y  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel.

Sustituyendo (1.14) en (1.13) se tiene que

$$\ddot{\alpha} = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \vec{x}_k + \left( \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) (N \circ \alpha).$$

Así, podemos escribir

$$\vec{k}_g = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \vec{x}_k \quad (1.15)$$

y

$$\vec{k}_n = \left( \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) N \circ \alpha. \quad (1.16)$$

Si recordamos que los términos de la primera forma fundamental son  $g_{ij} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ , tenemos que

**Proposición 1.4.** *La curvatura geodésica de una curva parametrizada con la longitud de arco sobre una superficie está dada por:*

$$k_g = \sqrt{g} \left| \begin{array}{cc} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \frac{d^2u^1}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} & \frac{d^2u^2}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \end{array} \right|,$$

siendo  $g$  el determinante de la primera forma fundamental.

*Demostración.* Para determinar el coeficiente de la curvatura geodésica, multiplicamos (1.9) por la normal geodésica  $\vec{u}$

$$k_g = \vec{u} \cdot \vec{k}_g.$$

De (1.15) deducimos

$$k_g = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d^2u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \vec{x}_k \cdot \vec{u}. \quad (1.17)$$

Recordemos que

$$N = \frac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\sqrt{g}}. \quad (1.18)$$

Calculemos ahora los productos  $\vec{x}_k \cdot \vec{u}$ , para  $k= 1, 2$ ,

$$\vec{x}_k \cdot \vec{u} = \vec{x}_k \cdot (\vec{N} \times \dot{\alpha}) = \vec{N} \cdot \left( \left( \sum_{l=1}^2 \frac{du^l}{ds} \vec{x}_l \right) \times \vec{x}_k \right).$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 \cdot \vec{u} &= \vec{N} \cdot \left( \frac{du^1}{ds} \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 \right) = \sqrt{g} \frac{du^1}{ds} \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{u} &= \vec{N} \cdot \left( \frac{du^2}{ds} \vec{x}_2 \times \vec{x}_1 \right) = -\sqrt{g} \frac{du^2}{ds} \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo estas expresiones en (1.17) obtenemos el resultado requerido.  $\square$

A continuación obtendremos la expresión de la curvatura geodésica para una parametrización arbitraria cualquiera  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$ .

Sea  $\alpha(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$ . Entonces, si  $s$  es el parámetro natural

$$\frac{du^k}{ds} = \frac{du^k}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (1.19)$$

Además,

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt}(t) \frac{du^j}{dt}(t)}. \quad (1.20)$$

Por otro lado, derivando (1.19) nuevamente, obtenemos

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} = \frac{d^2 u^k}{dt^2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{d^2 u^k}{dt^2} \frac{1}{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} + \frac{du^k}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2}.$$

Usando estas expresiones, (1.19) y (1.20), y operando en el determinante de la fórmula de la Proposición 1.4 resulta

$$k_g = \frac{\sqrt{g}}{\left( \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right)^{3/2}} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{dt} & \frac{du^2}{dt} \\ \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} & \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{vmatrix}.$$

## 1.2. Geodésicas

En esta sección introduciremos la noción de geodésica y veremos algunas propiedades de este tipo de curvas.

**Definición 1.5.** *Una geodésica es una curva sobre la superficie cuya curvatura geodésica es cero en todos sus puntos.*

Si fijamos una parametrización  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  de la superficie, una geodésica es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (véase (1.15))

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad \text{con } k = 1, 2, \quad (1.21)$$

cuando consideramos la curva  $\alpha(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$  y  $s$  es su parámetro natural.

Como  $\|\dot{\alpha}(s)\| = 1$ , además, se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1. \quad (1.22)$$

En el siguiente resultado veremos que, fijado un punto  $p$  de la superficie  $S$  y un vector tangente  $\vec{a}$  a  $S$  en  $p$ , existe la única geodésica cuyo punto y velocidad inicial son  $p$  y  $\vec{v}$ , respectivamente.

**Proposición 1.6.** *Por todo punto  $p$  de una superficie  $S$  y por cada vector  $\vec{a}$  en el plano tangente a  $p$ , pasa exactamente una geodésica tal que su vector tangente en  $p$  es justamente  $\vec{a}$ .*

*Demostración.* Sea  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  una parametrización local en el punto  $p = \vec{x}(u_0^1, u_0^2)$  de la superficie. Entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $\vec{a} = \sum_{i=1}^2 a^i \vec{x}_i(u_0^1, u_0^2)$  es un vector unitario. Esto es,

$$\sum_{i=1}^2 a^i a^j g_{ij}(u_0^1, u_0^2) = 1. \quad (1.23)$$

Una geodésica que pasa por  $p$  en la dirección  $\vec{a}$  es una solución de (1.21) con valores iniciales  $\frac{du^i}{ds}(0) = a^i$  y  $u^i(0) = u_0^i$ . Usando el teorema de existencia y unicidad de la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales, sabemos que esta solución existe y es única.

Veamos que la solución de esta ecuación con valores iniciales  $u^i(0) = u_0^i$  y  $\frac{du^i}{ds}(0) = a^i$  satisface  $\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 1$ .

Para ello diferenciamos el lado izquierdo de (1.22), y obtenemos

$$\sum_{i,j=1}^2 \left( \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \right) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2g_{ij} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \frac{du^j}{ds} \right).$$

Sustituyendo  $u^i$  por una solución del sistema (1.21), tenemos que esta expresión es equivalente a

$$\sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} - \sum_{i,j,k=1}^2 2g_{ij} \Gamma_{lk}^i \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds}$$

Haciendo uso de las relaciones de  $\Gamma_{ij}^k$  con los términos de la primera forma fundamental, esto es,

$$\Gamma_{lk}^i = \sum_{h=1}^2 \frac{1}{2} g^{ih} \left( \frac{\partial g_{hl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^h} \right),$$

donde  $g^{ih}$  son los términos de la matriz inversa de la primera forma fundamental. Permutando los subíndices, deducimos que  $\frac{d}{ds} \left( \sum g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) = 0$ . De donde se sigue que  $\sum_{i,j=1}^2 g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}$  es constante. Imponiendo las condiciones iniciales y teniendo en cuenta (1.23), se deduce que el valor de esta constante es exactamente 1.  $\square$

En lo que sigue, introduciremos un tipo especial de parametrizaciones sobre la superficie que nos permita analizar de forma simple algunas propiedades interesantes de las geodésicas.

**Definición 1.7.** Una parametrización local  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  de una superficie  $S$  se denomina parametrización semigeodésica si los coeficientes de la primera forma fundamental satisfacen  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$  con respecto a esta parametrización.

A continuación, veremos un resultado que nos permite garantizar la existencia de parametrizaciones semigeodésicas una vez fijado un arco geodésico (imagen de un intervalo de una geodésica) suficientemente pequeño sobre una superficie  $S$ .

Para ello, demostraremos previamente los siguientes lemas. Estos lemas nos permiten rectificar, en un cierto sentido, uno o dos campos de vectores.

**Lema 1.8.** Sean  $X$  un campo de vectores sobre la superficie  $S$  y  $p$  un punto en  $S$  tal que  $X_p$  sea distinto de cero. Entonces, existe  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \rightarrow \vec{x}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  una parametrización local de  $S$  alrededor de  $p$  tal que

$$X = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^1}.$$

*Demostración.* Sea  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  una parametrización de  $S$  en un entorno  $U$  de  $p$ . Entonces,

$$p = \vec{x}(u_0^1, u_0^2)$$

y

$$X(u^1, u^2) = \sum_{i=1}^2 X^i(u^1, u^2) \frac{\partial}{\partial u^i}(u^1, u^2)$$

siendo  $X^i$  funciones diferenciables en el entorno  $U$ .

Como  $X(u_0^1, u_0^2)$  es distinto de cero por hipótesis, supongamos sin pérdida de generalidad, que  $X^1(u_0^1, u_0^2)$  también es distinto de cero. Por tanto, en un entorno del punto  $p$  tenemos  $X^1(u^1, u^2) \neq 0$ .

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\frac{du^1}{dt} = X^1(u^1, u^2), \quad \frac{du^2}{dt} = X^2(u^1, u^2) \quad (1.24)$$

con condiciones iniciales

$$u^1(0) = u_0^1 \quad u^2(0) = x, \quad \text{para } (u_0^1, x) \in U. \quad (1.25)$$

Sabemos que para cada  $x$  fijo este sistema tiene solución, que denotamos por  $H_x(t) = (H_x^1(t), H_x^2(t))$ .

Tomamos ahora la función  $H(t, x) = H_x(t)$ . De (1.24) deducimos que  $\frac{\partial H^i}{\partial t}(t, x) = X^i(H^1(t, x), H^2(t, x))$ , para  $i = 1, 2$ .

Por otro lado, usando (1.25), resulta

$$\frac{\partial H^1}{\partial x}(0, x) = 0, \quad \frac{\partial H^2}{\partial x}(0, x) = 1.$$

Por tanto, la matriz Jacobiana de  $H$  en  $(0, x)$  es

$$JH(0, x) = \begin{pmatrix} X^1(u_0^1, x) & X^2(u_0^1, x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, se sigue que  $H$  es un difeomorfismo local en un entorno del punto  $p$ .

Consideramos entonces  $\bar{U} \subset U$  un entorno de  $p$  en el que podemos trabajar con las nuevas coordenadas  $(t, x)$ . Para estas coordenadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(H^1(t, x), H^2(t, x)) &= \frac{\partial H^1}{\partial t}(t, x) \frac{\partial}{\partial u^1}(H^1(t, x), H^2(t, x)) + \\ &\quad + \frac{\partial H^2}{\partial t}(t, x) \frac{\partial}{\partial u^2}(H^1(t, x), H^2(t, x)) \\ &= \sum_{i=1}^2 X^i(H^1(t, x), H^2(t, x)) \frac{\partial}{\partial u^i}(H^1(t, x), H^2(t, x)) \\ &= X(H^1(t, x), H^2(t, x)). \end{aligned}$$

Como  $H$  es un difeomorfismo local, concluimos

$$\frac{\partial}{\partial t} = X.$$

□

A continuación, usando el lema previo, demostraremos el siguiente resultado.

**Lema 1.9.** Sean  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores tangentes a  $S$  no colineales definidos en un entorno abierto  $U \subset S$ . Entonces, para todo  $p_0 \in U$  existe una parametrización  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  tal que

$$X = a\vec{x}_1 \quad e \quad Y = b\vec{x}_2$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones no nulas sobre  $U$ .

*Demostración.* Apliquemos a  $X$  e  $Y$  el Lema 1.8. Entonces, existen coordenadas  $(t, x)$  y  $(s, y)$  alrededor del punto  $p$  tal que

$$X = \frac{\partial}{\partial t} \quad e \quad Y = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Si probamos que  $(x, y)$  definen coordenadas locales en  $p$ , entonces ya que  $X(x) = \frac{\partial x}{\partial t} = 0$  e  $Y(y) = \frac{\partial y}{\partial s} = 0$ , tendríamos

$$X = a \frac{\partial}{\partial y} \quad e \quad Y = b \frac{\partial}{\partial x},$$

con  $a$  y  $b$  funciones no nulas en  $U$ . Para comprobar que  $(x, y)$  define un sistema de coordenadas, razonamos como sigue.

Como  $(s, y)$  son coordenadas locales en  $p$ , entonces  $x = x(s, y)$ . Tomemos la función

$$F : (s, y) \rightarrow (x(s, y), y).$$

El determinante de la matriz jacobiana es no nulo si  $\frac{\partial x}{\partial s} \neq 0$ . En tal caso,  $F$  es un difeomorfismo local y  $(x, y)$  son coordenadas locales.

Supongamos  $\frac{\partial x}{\partial s} = 0$ . Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Esto es,

$$Y = \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s} X$$

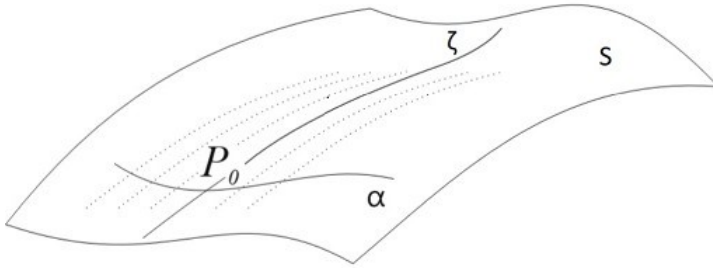
Luego  $X$  e  $Y$  son colineales, lo que es contradictorio con las hipótesis. Esta contradicción procede de suponer  $\frac{\partial x}{\partial s} = 0$ . □

Estamos ahora en condiciones de demostrar la existencia de parametrizaciones geodésicas.



**Proposición 1.10.** *Para todo punto  $p_0 \in S$  y para todo arco geodésico  $\zeta$  que pase por  $p_0$ , existe una parametrización semigeodésica  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  de  $S$  alrededor de  $p_0$  tal que  $\zeta$  es la línea paramétrica  $u^1 \rightarrow \vec{x}(u^1, 0)$  y  $u^1$  es el parámetro arco de  $\zeta$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  una curva en  $S$  pasando por  $p_0$  y ortogonal a  $\zeta$  en  $p_0$  (por ejemplo,  $\alpha$  puede ser la geodésica con punto y velocidad inicial  $p_0$  y la dirección ortogonal a  $\zeta$  en el plano tangente a  $S$ ).



**Figura 1.1.** En la figura,  $\alpha$  y  $\zeta$  son geodésicas en  $S$ .

Consideremos la familia  $F$  de geodésicas definidas por los puntos de  $\alpha$  y por la dirección ortogonal a  $\alpha$  en el plano tangente a  $S$  en dichos puntos.

Tomemos el campo de vectores tangentes a lo largo de las curvas de  $F$ , y un campo de vectores ortogonal en el plano tangente en cada punto. Por el Lema 1.9, construimos una parametrización  $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \rightarrow \vec{x}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  cuyas líneas paramétricas son tangentes a estos dos campos de vectores. Estas líneas están bien definidas en un entorno de  $p_0$ , y además, podemos escogerlas tal que las curvas de  $F$  sean  $\tilde{u}^2 = cte$ . Particularmente, podemos suponer que  $\zeta$  es la curva  $\tilde{u}^2 = 0$ .

Como las líneas paramétricas son ortogonales,  $\tilde{g}_{12} = 0$ .

Por otro lado, ya que las curvas  $\tilde{u}^2 = cte$  son geodésicas, entonces, usando (1.21), se sigue que  $\tilde{\Gamma}_{11}^2 \left( \frac{d\tilde{u}^1}{ds} \right)^2 = 0$ . Así, como  $\tilde{u}^1$  no es constante,  $\tilde{\Gamma}_{11}^2 = 0$ .

Recordemos que,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^2 = \sum_{m=1,2}^2 \frac{1}{2} \tilde{g}^{2m} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{m1}}{\partial \tilde{u}^1} + \frac{\partial \tilde{g}_{m1}}{\partial \tilde{u}^1} - \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \tilde{u}^m} \right) = -\frac{1}{2\tilde{g}} \tilde{g}_{11} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \tilde{u}^2} = 0$$

donde el término  $\tilde{g}^{ik}$  corresponde al inverso de la matriz de la primera forma fundamental en la posición  $ik$ . Sabemos que  $\tilde{g}_{11} > 0$ , por tanto,  $\tilde{g}_{11}$  sólo es función de  $\tilde{u}^1$ . Con lo cual, podemos elegir

$$u^1 = \int \sqrt{\tilde{g}_{11}} d\tilde{u}^1, \quad u^2 = \tilde{u}^2 \quad (1.26)$$

De esta forma, encontramos una nueva parametrización de  $S$  alrededor de  $p_0$

$$(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2) = \vec{x}(\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2)).$$

Veamos ahora que ésta parametrización es semigeodésica. Teniendo en cuenta (1.26),

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_{11}}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \tilde{u}^1}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \tilde{u}^2}$$

Así tenemos que  $g_{12} = 0$  y  $g_{11} = 1$ .

En consecuencia,  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(\tilde{u}^1(u^1, u^2), \tilde{u}^2(u^1, u^2))$  es una parametrización semigeodésica y  $\zeta(s) = \vec{x}(s, 0)$ . Nótese que  $|\zeta'(s)| = g_{11}(s, 0) = 1$ .  $\square$

Como indicábamos al inicio del capítulo, la noción de geodésica está muy relacionada con la búsqueda de los caminos más cortos entre dos puntos.

**Proposición 1.11.** *Para un abierto suficientemente pequeño en la superficie, una curva geodésica minimiza la distancia entre puntos.*

*Demostración.* Haciendo uso de la geodésica  $\zeta$  y procediendo como en la prueba de la Proposición 1.10, podemos construir una parametrización semigeodésica

$$(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$$

tal que  $\zeta$  es una curva  $u^2 = 0$  y  $u^1$  es el parámetro arco para  $\zeta$ .

Sea  $t \rightarrow \alpha(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$  una curva que une dos puntos  $p$  y  $q$  en el entorno semigeodésico, esto es,  $p = \alpha(t_1) = \vec{x}(u^1(t_1), u^2(t_1))$  y  $q = \alpha(t_2) = \vec{x}(u^1(t_2), u^2(t_2))$ . Su longitud está dada por

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt}(t) \frac{du^j}{dt}(t)} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \frac{du^1}{dt}(t) \right)^2 + g_{22}(u^1(t), u^2(t)) \left( \frac{du^2}{dt}(t) \right)^2 \right)^{1/2} dt \geq \\ &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{du^1}{dt} dt = u^1(t_2) - u^1(t_1) = L(\zeta). \end{aligned}$$

$\square$

Finalizaremos el capítulo obteniendo las geodésicas en algunas superficies.

En primer lugar, consideramos el plano. Si usamos coordenadas cartesianas  $(u^1, u^2)$ , los símbolos de Christoffel son todos nulos y las geodésicas son las curvas  $s \rightarrow \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$  que satisfacen  $\frac{d^2 u^i}{dt^2} = 0$ , para  $i = 1, 2$ . Esto es,

$$u^1(t) = v^1 t + u_0^1, \quad u^2(t) = v^2 t + u_0^2$$

con  $(v^1, v^2), (u_0^1, u_0^2) \in \mathbb{R}^2$ . Así, las geodésicas en el plano son curvas constantes o rectas.

A continuación calcularemos las geodésicas en la esfera.

Sea la esfera  $S^2$  parametrizada como sigue

$$\vec{x}(\Phi, \theta) = (\cos\Phi\cos\theta, \sin\Phi\cos\theta, \sin\theta)$$

Se tiene que

$$\vec{x}_1 = (-\sin\Phi\cos\theta, \cos\Phi\cos\theta, 0)$$

$$\vec{x}_2 = (-\sin\theta\cos\Phi, -\sin\theta\sin\Phi, \cos\theta)$$

$$\vec{x}_{11} = (-\cos\Phi\cos\theta, -\cos\theta\sin\Phi, 0)$$

$$\vec{x}_{12} = (\sin\Phi\sin\theta, -\sin\theta\cos\Phi, 0)$$

$$\vec{x}_{22} = (-\cos\theta\cos\Phi, -\sin\theta\sin\Phi, -\sin\theta)$$

La matriz asociada a la segunda forma fundamental de esta parametrización es

$$II(\Phi, \theta) = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea  $\alpha(t) = (\cos\Phi(t)\cos\theta(t), \sin\Phi(t)\cos\theta(t), \sin\theta(t))$  una geodésica. Entonces

$$\alpha' = \vec{x}_1 \frac{d\Phi}{dt} + \vec{x}_2 \frac{d\theta}{dt}$$

y

$$\alpha'' = \vec{x}_{11} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 + \vec{x}_1 \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\vec{x}_{21} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\Phi}{dt} + \vec{x}_{22} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \vec{x}_2 \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Por lo tanto,  $II(\alpha', \alpha') = -\cos^2\theta \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ .

De la ecuación de Gauss 1.5

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = D_{\alpha'} \alpha' - II(\alpha', \alpha') \cdot N \circ \alpha.$$

En nuestro caso, al encontrarnos en la esfera,  $N \circ \alpha = \alpha$ . Por lo tanto, tendríamos  $\nabla_{\alpha'} \alpha' = \alpha'' - (\alpha'' \cdot \alpha)\alpha$ . Como  $\alpha$  es una geodésica, entonces

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$$

De lo que se sigue que  $\alpha'' = (\alpha'' \cdot \alpha)\alpha$ . Con lo cual,  $\alpha'' = -\|\alpha'\|^2 \alpha$ .

Nota que, en la esfera  $\alpha' \cdot \alpha = 0$ , y por tanto,  $\alpha'' \cdot \alpha = -\alpha' \cdot \alpha'$ . De lo que se deduce que las geodésicas satisfacen la siguiente ecuación

$$\alpha'' + \|\alpha'\|^2 \alpha = 0. \quad (1.27)$$

Resolvemos el sistema imponiendo que  $\alpha(0) = p$  y que  $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \vec{v}$ . Los círculos máximos que pasan por  $p = (x_1, x_2, x_3)$  y con vector tangente  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  definidos por

$$c(t) = \cos(\|\vec{v}\| t)p + \operatorname{sen}(\|\vec{v}\| t) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

satisfacen la ecuación diferencial dada en (1.27).

## Transporte paralelo sobre una superficie

A lo largo de este capítulo introduciremos la noción de transporte paralelo de Levi-Civita, que nos permitirá trasladar vectores y campos de vectores a lo largo de la superficie.

### 2.1. Transporte paralelo

Un campo de vectores paralelo en  $\mathbb{R}^2$  a lo largo de una curva es un campo cuyas componentes respecto de la base canónica son constantes. Sin embargo, esta definición no es extendible a una superficie. Cuando estamos en el plano, es equivalente a decir que la derivada direccional del campo  $Y$  respecto al vector tangente a la curva  $\alpha$  es nula, esto es

$$D_{\dot{\alpha}}(Y \circ \alpha) = \frac{d(Y \circ \alpha)}{dt} = 0.$$

Para el caso de una superficie, nos interesa únicamente la proyección de la variación del campo sobre el espacio tangente, es decir, la derivada covariante. En el caso del plano, ambas definiciones coinciden.

**Definición 2.1.** *Sea  $Y$  un campo de vectores tangente a la superficie a lo largo de la curva  $\alpha$ . Se dice que  $Y$  es un campo de vectores paralelo a lo largo de  $\alpha$  si  $\nabla_{\dot{\alpha}} Y = \vec{0}$ .*

Si la superficie que consideramos es un plano, los campos paralelos son, como ya comentamos anteriormente, los campos constantes. Veamos qué significa localmente que  $Y$  sea paralelo a lo largo de  $\alpha$ . Sean  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  una parametrización local de la superficie  $S$  y  $\alpha(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$  con  $t \in I$  ( $I$  un intervalo en  $\mathbb{R}$ ) la parametrización de  $\alpha$  sobre  $S$ . Si  $Y$  es un campo de vectores tangente a lo largo de  $\alpha$  a una superficie  $S$ , entonces

$$Y \circ \alpha = \sum_{i=1}^2 Y^i(\vec{x}_i \circ \alpha),$$

donde  $Y^i$  son funciones diferenciables sobre  $I$ .

Sabemos que un campo de vectores puede descomponerse en la suma de su parte normal y la parte tangente. Ahora,

$$D_{\dot{\alpha}}Y = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{dY^i}{dt}(\vec{x}_i \circ \alpha) + Y^i \sum_{i=1}^2 \frac{d(\vec{x}_i \circ \alpha)}{dt} \right). \quad (2.1)$$

Recordemos que

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d(\vec{x}_i \circ \alpha)}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{du^i}{dt}(\vec{x}_{ij} \circ \alpha) = \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{du^i}{dt} \left( \Gamma_{ij}^k(\vec{x}_k \circ \alpha) + L_{ij}(\vec{N} \circ \alpha) \right). \quad (2.2)$$

Supongamos que  $Y$  es paralelo. Sustituyendo (2.2) en (2.1) y teniendo en cuenta que la proyección tangente de  $D_{\dot{\alpha}}Y$  es  $\nabla_{\dot{\alpha}}Y$ , deducimos que  $Y$  debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d(Y^k \circ \alpha)}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(Y^i \circ \alpha) \frac{du^j}{dt} = 0, \quad k=1,2. \quad (2.3)$$

Un ejemplo de campo de vectores a lo largo de una curva es el campo tangente unitario a la curva. Nos preguntamos si este campo es paralelo a lo largo de la curva. El siguiente resultado da respuesta a dicha pregunta.

**Proposición 2.2.** *Una curva  $\alpha$  sobre una superficie  $S$  es geodésica sobre  $S$  si y sólo si su campo de vectores tangente unitario es paralelo.*

*Demostración.* Sabemos, por el capítulo anterior, que

$$\ddot{\alpha} = D_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = \nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} + II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})\vec{N} \circ \alpha = \vec{k}_g + \vec{k}_n$$

Entonces,  $\nabla_{\dot{\alpha}}\dot{\alpha} = \vec{k}_g$ . De esta igualdad se deduce la proposición.  $\square$

Los campos de vectores paralelos sirven para transportar un vector *paralelamente* a lo largo de una curva prefijada. Esto implica que el vector transportado mantiene constante el ángulo con los vectores tangentes a la curva en cada punto. A continuación seremos más explícitos en esta construcción.

**Proposición 2.3.** *Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  una curva sobre  $S$ . Para cada vector  $\vec{v} \in T_{\alpha(0)}S$  existe un único campo de vectores tangente  $Y$  a  $S$  a lo largo de  $\alpha$  tal que  $Y_{\alpha(0)} = \vec{v}$  e  $Y$  es paralelo. La aplicación  $P_{\alpha}^t : T_{\alpha(0)}S \rightarrow T_{\alpha(t)}S$ , para cada  $t \in [0, 1]$ , definida por  $P_{\alpha}(t)(\vec{v}) = Y_{\alpha(t)}$ , es un isomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $(u^1, u^2) \rightarrow \bar{x}(u^1, u^2)$  una parametrización local de la superficie  $S$  alrededor de  $\alpha(0)$  y  $\alpha(t) = \bar{x}(u^1(t), u^2(t))$  una parametrización de la curva alrededor de  $t = 0$ . Para que el campo  $Y$  sea paralelo a lo largo de  $\alpha$  se debe satisfacer (2.3) y, además, debe darse la condición inicial

$Y^i(0) = v^i$  donde  $\vec{v} = \sum_{i=1}^2 v^i \vec{x}_i(p)$ . Entonces, por el Teorema de existencia y

unicidad de la teoría de ecuaciones diferenciales, la solución existe y es única. Con ese proceso garantizamos construir  $Y$  en un intervalo  $[0, a]$  con  $a \leq 1$ . Realizando el mismo proceso, sustituyendo el vector  $\vec{v}$  por  $Y_{\alpha(a)}$ , y considerando una parametrización de la superficie alrededor del punto  $\alpha(a)$ , construimos el campo en  $\alpha([a, b])$  con  $b \leq 1$ . Además, por ser  $\alpha([0, 1])$  compacto, podemos escoger una partición finita de la curva en cada una de las cuales consideramos una parametrización de la superficie donde construir el campo  $Y$ .

Veamos ahora que  $P_\alpha^t$  es un isomorfismo. Trivialmente,  $P_\alpha^t$  es lineal por cómo está definida (linealidad de las ecuaciones diferenciales). Asimismo, los espacios vectoriales de salida y de llegada de la aplicación tienen la misma dimensión, por lo que para ver que  $P_\alpha^t$  es biyectiva, basta con probar que es inyectiva. En efecto, sea  $\vec{v} \in T_p S$  tal que  $P_\alpha^t(\vec{v}) = 0$ . Entonces  $\vec{v} = \vec{0}$ , ya que si un campo paralelo a lo largo de una curva es nulo, necesariamente es nulo en todo punto. Esto se deduce usando (2.3). Así,  $P_\alpha^t$  es isomorfismo.  $\square$

**Definición 2.4.** La aplicación  $P_\alpha^t : T_{\alpha(0)} S \rightarrow T_{\alpha(t)} S$ , se denomina transporte paralelo de Levi-Civita a lo largo de  $\alpha$ . En tal caso,  $P_\alpha^t(\vec{v}) \in T_{\alpha(t)} S$  es el resultado del transporte paralelo de  $\vec{v}$  a lo largo de  $\alpha$  hasta el punto  $\alpha(t)$ .

Veamos a continuación una importante propiedad del transporte paralelo.

**Proposición 2.5.** El transporte paralelo a lo largo de una curva conserva el producto escalar de dos vectores. En consecuencia, conserva también la longitud de los vectores y el ángulo entre ellos.

*Demostración.* Sean  $\vec{u}, \vec{v} \in T_{\alpha(0)} S$ . Veamos que

$$\frac{d(P_\alpha^t(\vec{v}) \cdot P_\alpha^t(\vec{u}))}{dt} = 0.$$

Para ello usaremos la ecuación de Gauss (??) y la definición 2.1 de campo paralelo a lo largo de  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d(P_\alpha^t(\vec{v}) \cdot P_\alpha^t(\vec{u}))}{dt} &= \frac{dP_\alpha^t(\vec{v})}{dt} \cdot P_\alpha^t(\vec{u}) + \frac{dP_\alpha^t(\vec{u})}{dt} \cdot P_\alpha^t(\vec{v}) = \\ &= (\nabla_{\dot{\alpha}} P_\alpha^t(\vec{v}) + II(\dot{\alpha}, P_\alpha^t(\vec{v}))N) \cdot P_\alpha^t(\vec{u}) + P_\alpha^t(\vec{v}) \cdot (\nabla_{\dot{\alpha}} P_\alpha^t(\vec{u}) + II(\dot{\alpha}, P_\alpha^t(\vec{u}))N) = \end{aligned}$$

$$= \nabla_{\dot{\alpha}} P_{\alpha}^t(\vec{v}) \cdot P_{\alpha}^t(\vec{u}) + \nabla_{\dot{\alpha}} P_{\alpha}^t(\vec{u}) \cdot P_{\alpha}^t(\vec{v}) = 0$$

Así,  $P_{\alpha}^t(\vec{u}) \cdot P_{\alpha}^t(\vec{v}) = P_{\alpha}^0(\vec{u}) \cdot P_{\alpha}^0(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ .

Por lo tanto, se conserva el producto escalar.

De lo que se deduce claramente, que el transporte paralelo también conserva la longitud de los vectores, pues  $L_{\vec{v}} = \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ .

El ángulo entre vectores también se conserva, pues viene dado por  $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$ .  $\square$

El siguiente resultado muestra que el hecho de que un campo de vectores sea paralelo no depende de la superficie a la que sea tangente.

**Proposición 2.6.** *Si dos superficies son mutuamente tangentes a lo largo de una curva, entonces las derivadas covariantes de un campo de vectores tangente a ambas superficies a lo largo de la curva, coinciden. Por tanto, si el campo es paralelo respecto de una superficie también lo es respecto de la otra.*

*Demostración.* Sean  $S$  y  $\bar{S}$  superficies mutuamente tangentes a lo largo de la curva  $\alpha$  parametrizada con parámetro natural  $s$  e  $Y$  un campo de vectores tangente a ambas superficies a lo largo de  $\alpha$ .

Al diferenciar  $Y$  a lo largo de  $\alpha$  sobre cada una de las superficies, debemos obtener el mismo resultado. Valiéndonos de la ecuación de Gauss (1.5),

$$\frac{dY}{dt} = D_{\dot{\alpha}} Y = \nabla_{\dot{\alpha}} Y + \lambda N \circ \alpha = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} Y + \bar{\lambda} \bar{N} \circ \alpha \quad (2.4)$$

donde  $N$  (respectivamente,  $\bar{N}$ ) es el campo normal unitario sobre  $S$  (respectivamente,  $\bar{S}$ ) y  $\nabla$  (respectivamente,  $\bar{\nabla}$ ) la derivada covariante en  $S$  (respectivamente,  $\bar{S}$ ).

Así, tenemos que

$$\lambda = (D_{\dot{\alpha}} Y) \cdot (N \circ \alpha) \quad \bar{\lambda} = (D_{\dot{\alpha}} Y) \cdot (\bar{N} \circ \alpha). \quad (2.5)$$

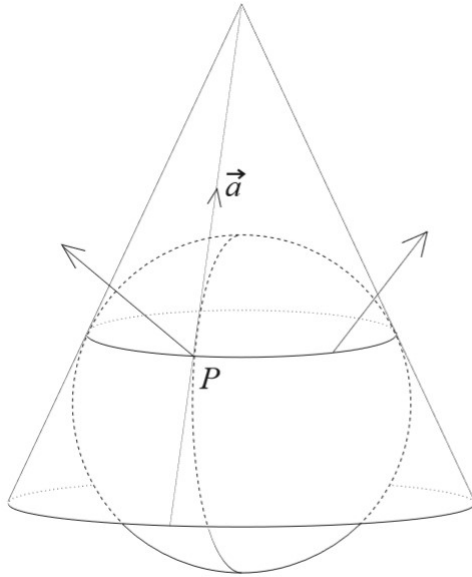
Además, como ambas superficies son tangentes a lo largo de  $\alpha$ , sucede que

$$\bar{N} \circ \alpha = N \circ \alpha \quad o \quad \bar{N} \circ \alpha = -(N \circ \alpha).$$

En el primer caso, usando (2.5), se deduce que  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Esto, por (2.4), implica que  $\nabla_{\dot{\alpha}} Y = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} Y$ . En el segundo caso, usando de nuevo (2.5), se sigue que  $\bar{\lambda} = -\lambda$  y, por tanto,  $\lambda(N \circ \alpha) = \bar{\lambda}(\bar{N} \circ \alpha)$ . Así, por (2.4), concluimos que  $\nabla_{\dot{\alpha}} Y = \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} Y$ .  $\square$

Pongamos como ejemplo un cono circunscrito en una esfera. Es claro que la intersección de ambas figuras es un círculo. Tomemos ahora un vector  $\vec{a}$  en un punto  $p$  tangente al meridiano que pasa por  $p$ .





**Figura 2.1.** Ejemplo de la dependencia del transporte paralelo a la curva considerada

Tal y como se aprecia en la figura (2.1), el vector  $\vec{a}$  está en una generatriz del cono. Cortando el cono a lo largo de dicha generatriz, obtenemos que la circunferencia intersección de la esfera y el cono, se transforma en un arco de circunferencia a lo largo del cual realizamos el transporte paralelo de  $\vec{a}$ , como si estuviéramos en el plano.

Realicemos ahora el proceso inverso. Procedemos a pegar de nuevo por la generatriz donde anteriormente cortamos, y observamos que el vector trasladado no coincide con el inicial, a menos que la circunferencia tomada sea el ecuador de la esfera.

Las superficies son tangentes en la curva considerada, luego usando la Proposición 2.6 hemos realizado el transporte paralelo sobre la esfera.

*Observación 2.7.* El ejemplo anterior muestra que, si hacemos transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada, el vector final no tiene por qué coincidir con el vector inicial.

## 2.2. Transporte paralelo y curvatura de Gauss

Analizaremos la dependencia del transporte paralelo de la curva por donde se desplaza. Veremos que está relacionado con la curvatura de Gauss de la superficie.

**Definición 2.8.** *Se dice que el transporte paralelo sobre la superficie  $S$  es integrable cuando es independiente de la curva sobre la cual se efectúa.*

En el caso del plano es claro que el transporte paralelo no depende de la curva: los campos paralelos son campos constantes. Por tanto, en el plano el transporte paralelo es integrable.

Seguidamente veremos que esta noción depende realmente de la geometría de la superficie en cuestión.

**Proposición 2.9.** *El transporte paralelo sobre una superficie  $S$  es integrable si y sólo si su curvatura de Gauss es igual a cero en todo punto de la superficie.*

*Demostración.* Para caracterizar la integrabilidad del transporte paralelo, consideraremos un campo paralelo arbitrario  $Y = \sum_{i=1}^2 Y^i \vec{x}_i$ , cuyas componentes  $Y^i$  son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales lineales dado en (2.3). Así, ver la integrabilidad del transporte paralelo es equivalente a ver que las funciones  $Y^i$  son funciones que tan sólo dependen del punto (de  $u^1$  y  $u^2$ ) y no de la curva  $t \rightarrow \alpha(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$  sobre la que se desplaza. Ahora,

$$\frac{dY^k}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt}. \tag{2.6}$$

Renombrando índices en (2.3), tenemos que

$$\sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^2 Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{du^i}{dt} = 0, \quad k=1, 2.$$

Para que las soluciones de este sistema sean independientes de la curva  $\alpha$ , el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \sum_{j=1}^2 Y^j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad i, k=1, 2, \tag{2.7}$$

ha de ser integrable. Pero como sabemos, esto sucede si y sólo si

$$\frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^k \partial u^i}, \quad i, k, l=1, 2.$$

O equivalentemente, usando (2.7), si

$$\frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^i \partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^i} \left( - \sum_{j=1}^2 Y^j \Gamma_{kj}^l \right) = \frac{\partial}{\partial u^k} \left( - \sum_{j=1}^2 Y^j \Gamma_{ij}^l \right) = \frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^k \partial u^i}.$$

Ahora, usando (2.7) de nuevo, se sigue que

$$\frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^k \partial u^i} = - \left( \sum_{j=1}^2 Y^j \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^l - \sum_{j=1}^2 \sum_{h=1}^2 \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kh}^j Y^h \right).$$

De la misma forma,

$$\frac{\partial^2 Y^l}{\partial u^i \partial u^k} = - \left( \sum_{j=1}^2 Y^j \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{kj}^l - \sum_{j=1}^2 \sum_{h=1}^2 \Gamma_{kj}^l \Gamma_{ih}^j Y^h \right).$$

Igualando ambas derivadas y teniendo en cuenta que  $\Gamma_{mn}^p = \Gamma_{nm}^p$  resulta

$$\sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{kj}^l - \sum_{h=1}^2 (\Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^l - \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^l) \right) Y^j = 0.$$

Esta relación debe darse para todo campo de vectores a lo largo de  $\alpha$  en  $S$ . De forma que el transporte paralelo es integrable si y sólo si

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ij}^l - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{kj}^l - \sum_{h=1}^2 (\Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^l - \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^l) = 0.$$

Por tanto, usando los resultados del Apéndice A.2 (véase Proposición (final2)), deducimos que  $R_{ijk}^l = 0$ , donde  $R_{ijk}^l$  son las componentes del tensor curvatura de la superficie.

Finalmente, si  $K$  es la curvatura de Gauss de  $S$ , entonces (véase Anexo A.2, Proposición (A.2)),

$$K = - \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\sum_{l=1}^2 g_{2l} R_{121}^l}{g} = 0.$$

Y en consecuencia, concluimos que el transporte paralelo es integrable si y sólo si la curvatura de Gauss es 0. □

### 2.3. Transporte paralelo y curvatura geodésica

En esta sección probaremos una interesante relación entre el transporte paralelo y la curvatura geodésica.

**Proposición 2.10.** Sea  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  una representación paramétrica de una superficie orientada  $S$ ,  $\alpha$  una curva sobre  $S$  de ecuaciones paramétricas  $u^i = u^i(s)$  (siendo  $s$  el parámetro arco),  $Y$  un campo de vectores tangente a  $S$  a lo largo de  $\alpha$  unitario y paralelo, y  $\theta(s)$  el ángulo orientado entre  $Y(s)$  y  $\dot{\alpha}(s)$ . Entonces,

$$\frac{d\theta}{ds} = k_g,$$

donde  $k_g$  denota la curvatura geodésica de  $\alpha$ .

*Demostración.* Como el transporte paralelo conserva el ángulo entre vectores (Proposición 2.5), que consideremos un campo de vectores paralelo  $Y$  u otro no es fundamental. Pues si cambiamos de campo de vectores paralelo a lo largo de  $\alpha$ , lo que hacemos es cambiar  $\theta$ , aumentando un ángulo constante (que será el ángulo entre ambos campos paralelos). Esto, no afecta a la derivada de  $\theta$ .

Ahora, tenemos claramente que  $Y(s) \cdot \dot{\alpha}(s) = \cos\theta(s)$ .

Derivando la expresión anterior en función de  $s$ , y teniendo en cuenta que  $Y(s)$  y  $\dot{\alpha}(s)$  son tangentes a  $S$  deducimos que

$$\nabla_{\dot{\alpha}} Y \cdot \dot{\alpha} + \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} \cdot Y = -\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{ds}.$$

Ahora, por ser  $Y$  campo paralelo a lo largo de  $\alpha$  y  $s$  parámetro arco (haciendo uso de (1.9) y (1.11)), tenemos que,

$$-\sin\theta \cdot \frac{d\theta}{ds} = k_g(s) \vec{u}(s) \cdot Y(s),$$

donde  $\vec{u} = (N \circ \alpha) \times \dot{\alpha}$ . Fijando arbitrariamente un punto  $s_0$  de la curva, podemos elegir el campo  $Y$  de tal forma que  $Y(s_0) = \vec{u}(s_0)$ . Así,  $\theta(s_0) = -\frac{\pi}{2}$  y  $\frac{d\theta}{ds}(s_0) = k_g(s_0)$ .

Como  $s_0$  es arbitrario, la igualdad es válida para todo campo de vectores  $Y$  paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $S$ .  $\square$

## Teorema de Gauss-Bonnet

A lo largo de este capítulo, presentaremos un resultado relacionado con uno de los teoremas más importantes de la Geometría Diferencial de superficies: el Teorema de Gauss-Bonnet. Veremos una versión local del mismo, que nos permite abordar nuestros propósitos con el Indicador del Sur en el último capítulo.

Una primera versión del teorema fue dada por Gauss en su famoso artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, publicado en 1827.

Para introducir el teorema necesitaremos una serie de definiciones previas.

**Definición 3.1.** Sea  $\alpha : [0, b] \rightarrow S$  una aplicación continua de un intervalo cerrado  $[0, b]$  en una superficie  $S$ . Diremos que  $\alpha$  es una curva regular a trozos, cerrada y simple si

1. Existe una subdivisión  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ , de  $[0, b]$  tal que  $\alpha$  es diferenciable y regular en cada  $[t_i, t_{i+1}]$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ .
2.  $\alpha(0) = \alpha(b)$ .
3. La restricción de  $\alpha$  a  $[0, b]$  es inyectiva.

Los puntos  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , se llaman vértices de  $\alpha$ .

Por las condiciones de regularidad, para cada vértice  $\alpha(t_i)$ , existe límite tanto por la izquierda como por la derecha. Es decir,

$$\alpha'(t_i - 0) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) \neq 0$$

$$\alpha'(t_i + 0) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) \neq 0$$

Llamaremos *ángulo exterior de  $\alpha$  en el vértice  $\alpha(t_i)$*  al ángulo  $\theta_i$ ,  $-\pi \leq \theta_i \leq \pi$ , que forman  $\alpha'(t_i - 0)$  y  $\alpha'(t_i + 0)$ . Supongamos que  $S$  admite normal unitaria  $N$  (esto es, que la superficie esté orientada) y que el signo de  $\theta_i$  está dado por el signo del determinante  $[\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), N(\alpha(t_i))]$ .

A continuación, introducimos la definición de dominio de una superficie.

**Definición 3.2.** *Un dominio  $D$  sobre una superficie  $S$  es un subconjunto  $D \subset S$  abierto y conexo.*

Un dominio sobre una superficie se dice que es *simplemente conexo* si toda curva cerrada, o curva que una dos puntos de su borde, divide el dominio en dos o más partes disjuntas.

Se denomina *dominio con borde regular* sobre  $S$  a un dominio  $D \subset S$  tal que el borde  $\partial D = \bar{D} - D$  es la imagen de una curva  $\alpha : I \rightarrow S$  regular a trozos, cerrada y simple.

Decimos que el borde  $\partial D$  de un dominio  $D$  en una superficie orientada está *positivamente orientado* si para toda curva  $\beta : I \rightarrow D$  tal que  $\beta(0) = \alpha(t)$  y  $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$  tenemos que  $\beta'(0) \cdot \alpha'(t) > 0$ . Intuitivamente, esto significa que si se recorre la curva  $\alpha$  en la dirección positiva y mirando hacia la normal unitaria  $N$ , entonces el dominio  $D$  queda a la izquierda.

Ahora, podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.** *Sea  $\vec{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una representación paramétrica de  $S$  compatible con la orientación y  $D$  un dominio en  $S$  tal que  $\bar{D} = D \cup \partial D \subset \vec{x}(U)$ . Si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, entonces, la integral*

$$\int \int_{\vec{x}^{-1}(D)} f(u^1, u^2) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2$$

*no depende de la parametrización  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  elegida en la clase de la orientación de  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ , donde  $g$  es el discriminante de la primera forma fundamental.*

*Demostración.* Escojamos otra parametrización  $\vec{y} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \rightarrow \vec{y}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  de  $S$  compatible con la orientación y tal que  $D \subseteq \vec{y}(\bar{U})$ . Ambas parametrizaciones se relacionan mediante la aplicación  $\varphi : \vec{y}^{-1} \circ \vec{x} : (u^1, u^2) \rightarrow (\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2))$ . Recordemos que

$$|J(\varphi)| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{array} \right| = \sqrt{g}.$$

Por lo tanto, utilizando el Teorema de cambio de variables para integrales dobles y, teniendo en cuenta que  $J(\varphi) > 0$ , tenemos

$$\int \int_{\vec{y}^{-1}(D)} f(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \sqrt{g(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int_{\bar{x}^{-1}(D)} f(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) |J(\varphi)| \sqrt{\bar{g}(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2))} du^1 du^2 = \\
&= \int \int_{\bar{x}^{-1}(D)} f(u^1, u^2) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2 \quad (3.1)
\end{aligned}$$

donde  $\bar{g}$  es el discriminante de la primera forma fundamental asociada a la representación  $\bar{y}$ . □

**Definición 3.4.** A la integral anterior se le denomina integral de  $f$  sobre  $D$ , y se denota por  $\int \int_D f dA$ .

Tal y como vimos en la Sección 2.2, al realizar transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada, obtenemos un vector, en general, distinto del inicial. Nos proponemos ahora, calcular el incremento de este ángulo,  $\Delta_\theta$ . Es decir, veremos cuánto ha girado el vector como consecuencia del transporte paralelo.

Para ello, recordemos que el operador forma para cada punto  $p$  de  $S$ , se define como la aplicación lineal  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , caracterizada por

$$S_p(\bar{x}_i) = -D_{\bar{x}_i} N = -N_i = -\frac{\partial N}{\partial u^i}, \text{ con } i=1, 2.$$

Veamos una propiedad interesante del mismo, que nos será útil en lo que sigue.

**Proposición 3.5.** Sea  $p \in S$  y  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$  vectores tangentes linealmente independientes. Entonces  $S_p(\vec{v}) \times S_p(\vec{w}) = K_p(\vec{v} \times \vec{w})$ , donde  $K_p$  es la curvatura de Gauss en  $p$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\vec{v}, \vec{w}$  forman una base del plano tangente en  $p$  sobre  $S$ . Por tanto, podemos escribir  $S_p(\vec{v}) = \lambda \vec{v} + \varsigma \vec{w}$  y  $S_p(\vec{w}) = \eta \vec{v} + \nu \vec{w}$ , con  $\lambda, \varsigma, \eta, \nu \in \mathbb{R}$ . Por definición

$$K_p = |S_p| = \lambda \cdot \nu - \varsigma \cdot \eta$$

Así, haciendo uso de las propiedades del producto vectorial, se sigue que  $S_p(\vec{v}) \times S_p(\vec{w}) = K_p(\vec{v} \times \vec{w})$ . □

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

**Proposición 3.6.** Sea  $\partial D$  el borde diferenciable a trozos de un dominio  $D$  simplemente conexo sobre una superficie  $S$  tal que la clausura de  $D$  esté contenida en un abierto imagen de una representación paramétrica regular  $\bar{x} : U \rightarrow S$ . Entonces el ángulo de rotación  $\Delta_\theta$  resultante del transporte paralelo de un vector a lo largo del borde de  $D$  está dado por

$$\Delta_\theta = \int \int_{\bar{x}^{-1}(D)} K(u^1, u^2) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2 = \int \int_D K dA,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss y  $g$  el discriminante de la primera forma fundamental.

*Demostración.* Sea  $p$  un punto arbitrario de  $\partial D$  y  $\vec{v}$  un vector tangente a  $S$  en dicho punto. Tomemos  $\alpha : [0, l] \rightarrow \partial D$  una parametrización natural de  $\partial D$  tal que  $\alpha(0) = \alpha(l) = p$ . La curva  $\alpha$  está orientada positivamente. Consideramos  $Y$  el campo paralelo unitario a lo largo de  $\alpha$  tal que  $Y(0) = \vec{v}$ .

Para estudiar el ángulo de rotación de  $\vec{v} \in T_p S$  al aplicar el transporte paralelo tomaremos un campo de referencia  $X$  unitario y tangente a la superficie. Es claro que el ángulo de rotación que buscamos es

$$\Delta_\theta = \theta(l) - \theta(0),$$

donde  $\theta(s)$  es el ángulo  $(X(\alpha(s)), \widehat{Y}(s))$  determinado por  $X(\alpha(s))$  e  $Y(s)$ . Nótese que  $\theta(0) = (\widehat{X(p)}, \vec{v})$ ,  $\theta(l) = (X(\alpha(l)), Y(l))$  y que  $X(p) = X(\alpha(l))$ .

Sea  $s \rightarrow \bar{Y}(s)$  el campo paralelo a lo largo de  $\alpha$  con condición inicial

$$\bar{Y}(0) = N(p) \times X(p),$$

donde  $N$  es el campo normal unitario a  $S$ .

Ya que  $Y$  e  $\bar{Y}$  son campos paralelos se tiene que el ángulo  $\phi(s) = (Y(s), \widehat{\bar{Y}(s)})$  es constante,  $\phi(s) = \phi(0)$  y, por tanto, si  $\Phi(s) = (X(s), \widehat{\bar{Y}(s)})$ , concluimos que  $\Phi(s) = \phi(0) + \theta(s)$  y  $\Delta_\Phi = \Delta_\theta$ .

Por tanto, en lo que sigue, calcularemos  $\Delta_\Phi$ .

Tenemos  $\cos \Phi = X \cdot \bar{Y}$ , con lo que si derivamos con respecto a  $s$  (y teniendo en cuenta que  $\bar{Y}$  es paralelo)

$$-\sin \Phi \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d}{ds} (\cos \Phi) = \bar{Y} \cdot \nabla_{\dot{\alpha}} X.$$

Particularizando en  $s = 0$  tenemos

$$-\frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=0} = \bar{Y}(0) \cdot (\nabla_{\dot{\alpha}} X)(0) = (N(\alpha(0)) \times X(\alpha(0))) \cdot (\nabla_{\dot{\alpha}} X)(0).$$

Ahora consideramos otro punto  $\bar{p} = \alpha(s_0) \in \partial D$  y la parametrización  $s \rightarrow \beta(s) = \alpha(s + s_0)$ . Procediendo de forma análoga, deducimos que

$$-\frac{d\Phi}{ds} \Big|_{s=s_0} = (N(\beta(0)) \times X(\beta(0))) \cdot \nabla_{\dot{\beta}} X(0) = (N(\alpha(s_0)) \times X(\alpha(s_0))) \cdot \nabla_{\dot{\alpha}} X(s_0).$$

Por tanto,

$$-\frac{d\Phi}{ds} = [(N \circ \alpha) \times (X \circ \alpha)] \cdot \nabla_{\dot{\alpha}} X.$$



Denotamos por  $Z$  el campo a lo largo de  $\alpha$  dado por  $Z = (N \circ \alpha) \times (X \circ \alpha)$ .

Usando la ecuación de Gauss (1.5) tenemos

$$\frac{d\Phi}{ds} = -Z \cdot \frac{dX}{ds}. \quad (3.2)$$

Y por tanto, si  $\vec{x}^{-1}(D) = \tilde{D}$  y  $\vec{x}^{-1}(\partial D) = \partial \tilde{D}$ , integrando (3.2) en función de  $s$ , tenemos que

$$\Delta_\Phi = - \int_0^l Z \frac{dX}{ds} ds = - \int_{\partial \tilde{D}} \left( Z \frac{\partial X}{\partial u^1} du^1 + Z \frac{\partial X}{\partial u^2} du^2 \right).$$

Aplicando la fórmula de Green en el plano<sup>1</sup>, tenemos

$$\Delta_\Phi = \int \int_{\tilde{D}} \left( \frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2} \frac{\partial Z}{\partial u^1} \right) du^1 du^2.$$

Además, como  $\{X, Z, N\}$  es una base ortonormal, podemos escribir

$$\frac{\partial X}{\partial u^i} = \lambda_i Z + \mu_i N,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u^i} = -\lambda_i X + \nu_i N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = -\mu_i X - \nu_i Z,$$

para  $i = 1, 2$ , con  $\lambda_i, \mu_i$  y  $\nu_i$  funciones sobre el correspondiente entorno coordinado.

Con lo cual,

$$\frac{\partial X}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial Z}{\partial u^1} = \mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial u^1} \times \frac{\partial N}{\partial u^2} = (\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1) N. \quad (3.4)$$

De ambas relaciones y de la definición del operador forma, resulta

$$\frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2} \frac{\partial Z}{\partial u^1} = (S(\vec{x}_1) \times S(\vec{x}_2)) \cdot N.$$

<sup>1</sup> Recordemos ahora la fórmula de Green en el plano,

$$\oint_{\partial C} M dx + N dy = \int \int_C \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

donde  $M$  y  $N$  son funciones definidas sobre el dominio  $C$ .

Ahora, usando (1.18) y la Proposición 3.5 se sigue que

$$\frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{\partial Z}{\partial u^2} - \frac{\partial X}{\partial u^2} \frac{\partial Z}{\partial u^1} = K\sqrt{g}.$$

Concluyendo así que

$$\Delta_\theta = \int \int_{\tilde{D}} K\sqrt{g} du^1 du^2.$$

□

Ahora podemos presentar una versión del Teorema de Gauss-Bonnet.

**Teorema 3.7.** *Si  $D$  es un dominio simplemente conexo sobre una superficie  $S$  y el borde  $\partial D$  es una curva regular a trozos, cerrada y simple, de forma que  $D \cup \partial D$  está contenida en la imagen  $\vec{x}(U)$  de una representación paramétrica  $\vec{x} : U \rightarrow S$ , entonces se tiene la siguiente fórmula de Gauss-Bonnet*

$$\int \int_{\vec{x}(D)} K\sqrt{g} du^1 du^2 + \int_{\vec{x}(\partial D)} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss,  $k_g$  la curvatura geodésica de  $\partial D$  y  $\theta_i$  los ángulos exteriores de los vértices del borde.

*Demostración.* Sea  $X$  un campo de vectores unitario y tangente a  $S$  sobre  $\vec{x}(U)$ .

Supongamos que  $\partial D$  está parametrizada por la curva  $s \rightarrow \alpha(s)$  donde  $s$  es el parámetro arco, y sea  $\dot{\alpha}$  el campo de vectores unitario del borde, que está definido en todos los puntos de la curva salvo en los vértices. Lo mismo ocurre con la función  $\psi$  que determina el ángulo entre  $X$  y  $\dot{\alpha}$  en cada punto.

Así, al recorrer el borde  $\partial D$ , la función  $\psi$  cambia y su valor salta el ángulo  $\theta_i$  cuando se pasa por el vértice  $i$ -ésimo. Con lo que al dar una vuelta completa a lo largo de  $\partial D$  el incremento de este ángulo será exactamente  $2\pi$ .

Consideremos ahora un campo de vectores auxiliar  $Y$  obtenido por transporte paralelo a lo largo de todo  $\partial D$ , se tiene que

$$\widehat{(X, \dot{\alpha})} = \widehat{(X, Y)} + \widehat{(Y, \dot{\alpha})}$$

O lo que es lo mismo, si  $\psi = \widehat{(X, \dot{\alpha})}$ ,  $\Phi = \widehat{(X, Y)}$  y  $\theta = \widehat{(Y, \dot{\alpha})}$ ,

$$\psi = \Phi + \theta.$$

De forma que las variaciones de estos ángulos están relacionadas tal que

$$\Delta_\psi = \Delta_\Phi + \Delta_\theta.$$

Recordemos que según la Proposición 2.10

$$\frac{d\theta}{ds} = k_g,$$

y dado que los saltos en los vértices suman  $\sum_{i=1}^n \theta_i$ ,

$$\Delta_\theta = \int_{\partial D} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Por otra parte, usando la Proposición 3.6,

$$\Delta_\phi = \int \int_D K dA.$$

Con lo que finalmente tenemos

$$\Delta_\phi + \Delta_\theta + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$$

O equivalentemente,

$$\int \int_D K dA + \int_{\partial D} k_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi.$$

□



## Geometría experimental: El Indicador del Sur

Presentaremos a continuación un mecanismo capaz de medir, de forma aproximada, la curvatura geodésica de una curva sobre una superficie  $S$  y la curvatura de Gauss de  $S$ . Así, a través de dicho mecanismo podremos comprobar experimentalmente algunas características de la curvatura geodésica y del transporte paralelo. Este instrumento, es el Indicador del Sur, y puede considerarse una herramienta de la Geometría experimental.

### 4.1. El mecanismo del Indicador del Sur

El Indicador del Sur, es un dispositivo mecánico muy antiguo envuelto en leyendas y mitos de la Historia de China. Alrededor del cual ha habido siempre cierta controversia a la hora de precisar la fecha de su creación y de determinar cómo fue construido. Según J. Needham [5], este dispositivo data del siglo III y su inventor fue, muy probablemente, Ma Chün. Se trata de un carro de un solo eje y dos ruedas, sobre el que descansan una serie de engranajes, y en su tope, la figura de un emperador.

Este puntero tiene la característica de indicar siempre la misma dirección en el horizonte, independientemente del movimiento del carro (siempre y cuando el carro se mueva en una superficie plana, sin deslizarse). Es decir, el ángulo de rotación del puntero en relación con el carro es exactamente opuesto al ángulo de rotación del carro en relación al suelo. Así, cuando el dispositivo completa una vuelta al moverse a lo largo de un circuito cerrado, el puntero regresa a su posición original con respecto al carro.

El Indicador del Sur es, realmente, un precursor de las máquinas cibernéticas, pues el mecanismo tiene un engranaje diferencial como un elemento básico. Algunos historiadores afirman que el carro realmente se usaba como una especie



**Figura 4.1.** Indicador del Sur impreso en 3D.

de brújula no magnética. Sin embargo, esto es bastante dudoso ya que el rendimiento correcto se basa en ajustes sensibles del ancho entre las ruedas y un contacto perfecto de las ruedas con el suelo, sin deslizamiento o saltos.

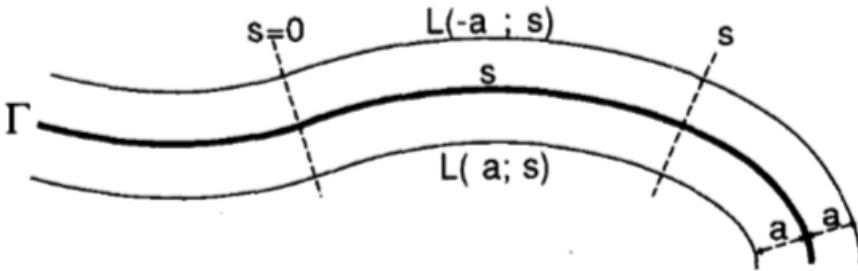
## 4.2. Diseño del Indicador del Sur

El Indicador del Sur es un mecanismo diseñado sobre dos ruedas, con una serie de engranajes que transmiten el movimiento desde las ruedas a la figura del emperador. Dicha figura señala con su brazo extendido a un punto fijo.

Lo interesante para nuestro propósito es que la rotación (que no el sentido) del Indicador del Sur respecto del eje del carro es la misma que la del carro en relación con el suelo. Hecho que nos permite estudiar el transporte paralelo haciendo uso del Indicador del Sur en el plano. Curiosamente esto también es válido para otras superficies.

A partir de ahora, con *camino* nos referiremos al camino que señala al punto medio del eje que une las dos ruedas. Consideramos  $2a$  unidades la distancia que hay de una rueda a la otra. Cada rueda seguirá un *carril* que será paralelo al camino y al carril marcado por la otra rueda, siendo ambos carriles equidistantes (curvas paralelas) al camino, con distancias  $a$  y  $-a$  respectivamente. Denotemos por  $L(c, s)$  la longitud de la curva paralela al camino con distancia  $c$  y  $\bar{\theta}(s)$  el ángulo entre el puntero y una dirección de referencia previamente fijada en

el carro (por ejemplo, el eje donde está engarzado el emperador). Ambas son funciones de la longitud de arco  $s$  en el camino.



**Figura 4.2.** En la figura,  $\Gamma$  es el camino y a ambos lados están los carriles que siguen las ruedas cuando el carro se mueve sobre un plano.

Queremos diseñar el Indicador del Sur de forma que el puntero realice, en su movimiento a lo largo de una curva, el transporte paralelo asociado a una dirección prefijada (la del puntero en su posición inicial). En el caso del plano, los campos paralelos son constantes. Por lo que al desplazarse, el Indicador del Sur siempre señala hacia la misma dirección. No ocurre lo mismo cuando hablamos de moverlo en una superficie arbitraria.

Para poder encontrar las condiciones que garanticen su funcionamiento sobre cualquier superficie, necesitamos demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\Gamma$  la curva que describe el Indicador del Sur cuando se mueve sobre una superficie  $S$ . Denotemos por  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_{-a}$  las curvas que describen las ruedas del Indicador del Sur (separadas a una distancia  $2a$ ), cuando el mecanismo se mueve por  $\Gamma$ . Entonces*

$$\frac{\partial L(a, s_0)}{\partial a} \Big|_{a=0} = \int_0^{s_0} k_g(s) ds, \text{ para todo } s_0, \tag{4.1}$$

donde  $L(a, s)$  es la longitud de  $\Gamma_a$  desde  $\Gamma_a(0)$  hasta  $\Gamma_a(s)$ ,  $s$  es el parámetro arco de  $\Gamma$  y  $s \rightarrow k_g(s)$  la curvatura geodésica de  $\Gamma$ .

*Demostración.* Comenzaremos tomando coordenadas semigeodésicas  $(u^1, u^2)$  sobre  $S$  (véase Proposición 1.10) tal que  $u^2$  sea la longitud sobre la geodésica perpendicular a  $\Gamma$  que pasa por el punto  $\Gamma(u^1)$ . La curva  $u^2 = 0$  es precisamente  $\Gamma$ .

Las geodésicas perpendiculares a  $\Gamma$  en  $\Gamma(s)$  tienen por ecuaciones  $u^1 = s$ .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $g_{22}(0, u^1) = 1$  para toda coordenada  $u^1$ . Como  $g_{12} = g_{21} = 0$  y  $g_{11} = 1$ , se deduce que (véase (A.3) en el Apéndice)

$$\Gamma_{22}^1(u^1, u^2) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}(u^1, u^2)}{\partial u^1}.$$

Por otro lado, la longitud de  $L(a, s_0)$  está dada por

$$L(a, s_0) = \int_0^{s_0} \sqrt{g_{22}(s, a)} ds.$$

Así,

$$\frac{\partial L(a, s_0)}{\partial a} \Big|_{a=0} = \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \frac{\partial g_{22}(s, 0)}{\partial a} ds. \quad (4.2)$$

Ahora, sabemos por (A.3) y la Proposición 1.4 que

$$k_g(s) = \Gamma_{22}^1(s, 0) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}(s, 0)}{\partial a}. \quad (4.3)$$

De forma que usando (4.2) y (4.3) concluimos que

$$\frac{\partial L(a, s_0)}{\partial a} \Big|_{a=0} = \int_0^{s_0} k_g(s) ds.$$

□

Derivando la igualdad en la Proposición 4.1 respecto de  $s$  obtenemos que

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L(a, s)}{\partial a} \Big|_{a=0} \right) = k_g(s).$$

Por tanto, deducimos la siguiente aproximación

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{L(a, s) - L(-a, s)}{2a} \right) \approx k_g(s). \quad (4.4)$$

Esta aproximación es más exacta a medida que la distancia  $a$  sea cada vez menor, es decir, cuando  $a$  tiende a cero.

Ahora,  $\theta$  denota el ángulo entre el vector tangente en cada punto de la curva y el campo  $Y$  paralelo a la curva tal que  $Y(0)$  es el vector unitario que determina el puntero en  $s = 0$  y  $\bar{\theta}$  denota el ángulo entre el puntero y el eje del carro. Debemos construir el carro de tal manera que

$$\frac{d\bar{\theta}}{ds} \approx \frac{d\theta}{ds}.$$



Por otro lado, usando la Proposición 2.10, se tiene que

$$\frac{d\bar{\theta}}{ds} \approx \frac{d\theta}{ds} = k_g. \quad (4.5)$$

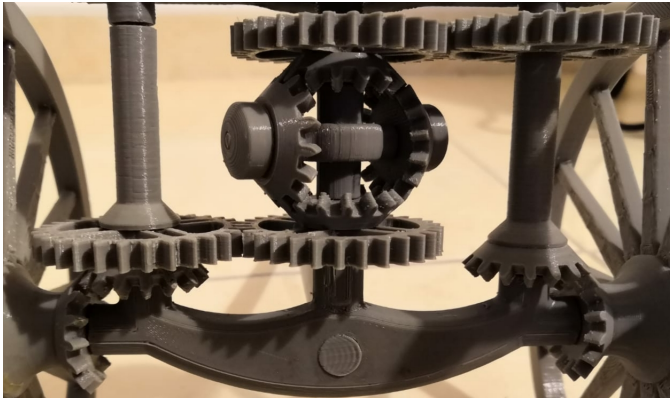
Comparando estas últimas ecuaciones con (4.4) parece razonable imponer al mecanismo del Indicador del Sur que cumpla la ligadura

$$\bar{\theta}(s) = \frac{1}{2a} (L(a, s) - L(-a, s)).$$

En consecuencia, el Indicador del Sur debe ser construido de acuerdo a esta ecuación.

Como  $L(c, s) = R\beta(c, s)$ , donde  $\beta(c, s)$  es el ángulo de la rotación de la rueda del carro respecto del suelo y  $R$  el radio de la rueda, entonces

$$\bar{\theta}(s) = \frac{R}{2a} (\beta(a, s) - \beta(-a, s)). \quad (4.6)$$



**Figura 4.3.** En la figura, los engranajes del mecanismo.

En la imagen se pueden observar los engranajes cercanos a las ruedas, cuya función es multiplicar las velocidades angulares de las ruedas por el factor  $\frac{R}{a}$ . El diferencial, que es el engranaje que se aprecia bajo la figura del emperador, se encarga de hacer la semi-diferencia entre las velocidades angulares  $\frac{R}{a}\beta(a, s)$  y  $\frac{R}{a}\beta(-a, s)$ .

Finalmente, esta velocidad hace que el emperador rote un ángulo de  $\bar{\theta}$  que viene dado por (4.6).

### 4.3. Experimentación con el Indicador del Sur

El Indicador del Sur nos permite calcular aproximadamente:

1. *La curvatura geodésica de una curva.*

Para ello, basta calcular la diferencia del ángulo del puntero respecto del carro en el punto inicial y final del camino, y dividirlo por la longitud de la curva entre estos puntos.

2. *El transporte paralelo de un vector  $\vec{v}$  tangente a la superficie en un punto a lo largo de una curva  $\Gamma$ .*

Éste, puede ser determinado sin más que colocar en el origen de la curva el puntero en la dirección prefijada  $\vec{v}$  y luego mover el Indicador del Sur a lo largo de  $\Gamma$ . El puntero en el punto final de la curva señala el transporte paralelo de  $\vec{v}$  a lo largo de  $\Gamma$ .

3. *Las geodésicas.*

Basta con mover sobre una curva el Indicador del Sur. Si el puntero rota respecto del eje del carro, entonces no se trata de una geodésica. En caso contrario, tenemos una geodésica. Así, para calcular el camino más corto entre dos puntos de la superficie suficientemente próximos entre sí, tenemos que considerar un camino de forma que el puntero no rote en relación al eje del carro.

4. *La curvatura de Gauss en un punto.*

En efecto, supongamos que el Indicador del Sur se mueve sobre una superficie  $S$  describiendo una curva simple y cerrada  $\alpha : [0, s_1] \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = \alpha(s_1)$ , que encierre un dominio  $D$ . El transporte paralelo de un vector tangente a la superficie tras recorrer el circuito cerrado, no coincide, en general, con el vector inicial. Estos dos vectores determinan un ángulo  $\Delta_{\bar{\theta}}$  diferente, en general, de  $2\pi$ .

Recordando el Teorema de Gauss-Bonnet (Teorema 3.7)

$$\int \int_D K(u^1, u^2) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2 + \int_0^{s_1} k_g(s) ds = 2\pi,$$

donde  $\Gamma(s_1) = \Gamma(0)$ ,  $g$  es el discriminante de la primera forma fundamental y  $K$  es la curvatura de Gauss de la superficie.

Por otra parte, si  $s \rightarrow \bar{\theta}(s)$  es el ángulo entre el puntero y el eje del carro, entonces ya que el puntero describe aproximadamente el transporte paralelo, se tiene que  $\Delta_{\bar{\theta}} \approx \int_0^{s_1} k_g(s) ds$ .

Así  $\int \int_D K(u^1, u^2) \sqrt{g(u^1, u^2)} du^1 du^2 \approx 2\pi - \Delta_{\bar{\theta}}$ .

Ahora, en un entorno pequeño, la curvatura de Gauss es aproximadamente constante  $K$  (véase Observación 4.2). De lo que deducimos que en este

entorno

$$K \cdot \text{Área } D = 2\pi - \Delta_{\bar{\theta}}$$

Por lo tanto, el Indicador del Sur nos permite calcular la curvatura de Gauss. Sólo es necesario calcular previamente la variación de los ángulos del mecanismo al recorrer el circuito, y el área del domino que encierra la curva simple. Así, eligiendo un circuito de área simple de calcular, podemos obtener fácilmente la curvatura de Gauss.

*Observación 4.2.* Toda superficie  $S$  puede aproximarse localmente a una superficie de curvatura de Gauss constante. En efecto, sea  $p$  un punto de la superficie. Consideremos una referencia donde  $p$  es el centro, y las direcciones que fijan los ejes sean las direcciones principales y la dirección del vector normal en  $p$  a  $S$ . En tal caso, la ecuación que define aproximadamente la superficie en un entorno del punto  $p$  es

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas principales en  $p$ .

Nótese que la curvatura de Gauss definida por esta ecuación es constante, concretamente

$$K = k_1 \cdot k_2.$$



# A

---

## Apéndice: El tensor curvatura de Riemann

Sean  $X, Y$  dos campos de vectores sobre  $S$ . Si  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  es una parametrización de  $S$ , entonces

$$X = \sum_{i=1}^2 X^i \vec{x}_i \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^2 Y^j \vec{x}_j.$$

El corchete de Lie de  $X$  e  $Y$  viene dado por

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^2 \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \vec{x}_j.$$

Nota que  $[\vec{x}_i, \vec{x}_j] = 0$ , para todo  $i, j = 1, 2$ .

Sean  $S$  una superficie y  $p \in S$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}(S)$  el conjunto de campos tangentes sobre  $S$ . Definimos el tensor curvatura  $R$  de  $S$  como sigue

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) &\rightarrow \mathfrak{X}(S) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

donde  $X, Y, Z$  son campos de vectores sobre  $S$ .

A continuación, obtendremos la expresión de las componentes del tensor curvatura de Riemann de una superficie en términos de los símbolos de Christoffel. Recordemos que

$$X(Y \cdot Z) = (\nabla_X Y)Z + (\nabla_X Z)Y,$$

$$Y(Z \cdot X) = (\nabla_Y Z)X + (\nabla_Y X)Z,$$

$$Z(X \cdot Y) = (\nabla_Z X)Y + (\nabla_Z Y)X.$$

Entonces, restando la segunda igualdad de la suma de las otras dos, obtenemos

$$X(Y \cdot Z) - Y(Z \cdot X) + Z(X \cdot Y) = (\nabla_X Y - \nabla_Y X)Z + 2(\nabla_X Z)Y + (\nabla_Z Y - \nabla_Y Z)X \quad (\text{A.1})$$

Además,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Así, para una representación paramétrica  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  de  $S$ , usando que  $[\vec{x}_i, \vec{x}_j] = 0$ , se deduce que

$$\nabla_{\vec{x}_i} \vec{x}_j = \nabla_{\vec{x}_j} \vec{x}_i. \quad (\text{A.2})$$

Ahora, aplicando (A.2) en (A.1), se sigue la fórmula de Koszul para campos coordenados

$$2(\nabla_{\vec{x}_k} \vec{x}_i) \vec{x}_j = \vec{x}_i(\vec{x}_j \cdot \vec{x}_k) - \vec{x}_j(\vec{x}_k \cdot \vec{x}_i) + \vec{x}_k(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j).$$

Usando los símbolos de Christoffel, esta fórmula implica que

$$2 \left( \sum_{h=1}^2 \Gamma_{ik}^h \vec{x}_h \right) \vec{x}_j = \vec{x}_i(g_{jk}) - \vec{x}_j(g_{ki}) + \vec{x}_k(g_{ij}).$$

O lo que es lo mismo,

$$2 \sum_{h=1}^2 \Gamma_{ik}^h g_{hj} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} := \Gamma_{kij}.$$

En consecuencia,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^2 \Gamma_{ijh}^k g^{hk} = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^2 g^{hk} \left( \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} \right). \quad (\text{A.3})$$

Por tanto, la derivada covariante en la superficie  $S$  está completamente determinada por la primera forma fundamental. Veamos que lo mismo sucede con el tensor curvatura de Riemann  $R$ . En efecto,

$$R(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \vec{x}_k := R_{ijk}^h \vec{x}_h = \nabla_{\vec{x}_i} \left( \sum_{h=1}^2 \Gamma_{jk}^h \vec{x}_h \right) - \nabla_{\vec{x}_j} \left( \sum_{h=1}^2 \Gamma_{ik}^h \vec{x}_h \right).$$

Entonces, derivando y permutando los superíndices obtenemos finalmente la siguiente proposición.

**Proposición A.1.** *Las componentes  $R_{ijk}^h$  del tensor curvatura de Riemann  $R$  sobre una superficie  $S$ , respecto de una representación paramétrica  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  son*

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{jk}^h}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^j} + \sum_{l=1}^2 (\Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^h) - \sum_{l=1}^2 (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^h). \quad (\text{A.4})$$

A continuación, recordamos que el operador forma de una superficie  $S$  con normal unitaria  $N$  viene dado por

$$S_p : T_p S \rightarrow T_p S, \quad S_p(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}N.$$

Nótese que si  $II$  es la segunda forma fundamental de  $S$  entonces

$$II(X, Y) = S(X) \cdot Y \tag{A.5}$$

para  $X, Y$  campos tangentes a  $S$ . De esta relación y de la ecuación de Gauss (1.5), se sigue que

$$D_X(D_Y Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - II(Y, Z)S(X) + (X(S(Y) \cdot Z) + (S(X) \cdot \nabla_Y Z)) N$$

y

$$D_Y(D_X Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - II(X, Z)S(Y) + (Y(S(X) \cdot Z) + (S(Y) \cdot \nabla_X Z)) N.$$

Por otra parte,

$$D_{[X, Y]}Z = \nabla_{[X, Y]}Z + (S([X, Y]) \cdot Z) N.$$

Así utilizando que  $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z = 0$  y  $X(S(Y) \cdot Z) = (\nabla_X S(Y)) \cdot Z + S(Y) \cdot \nabla_X Z$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z - (II(Y, Z)S(X) - II(X, Z)S(Y)) + \\ + ((\nabla_X S(Y) - \nabla_Y S(X) - S([X, Y])) \cdot Z) N = 0. \end{aligned} \tag{A.6}$$

De forma que, tanto la componente normal como la tangente han de ser nulas.

Por otro lado, sabemos que  $S(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^2 L_i^j \vec{x}_j$ , con  $L_i^j = \sum_{k=1}^2 g^{jk} L_{ki}$ . De esta forma, tomando  $X = \vec{x}_1$  e  $Y = \vec{x}_2$ , en la parte normal de la ecuación (A.6), se deduce

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{x}_1}(S(\vec{x}_2)) - \nabla_{\vec{x}_2}(S(\vec{x}_1)) - S([\vec{x}_1, \vec{x}_2]) = \sum_{j=1}^2 \left( L_2^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{1j}^k \vec{x}_k + \frac{\partial L_2^j}{\partial u^1} \vec{x}_j - \right. \\ \left. - L_1^j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2j}^k \vec{x}_k - \frac{\partial L_1^j}{\partial u^2} \vec{x}_j \right) = 0. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Con lo que es claro que debe darse

$$\frac{\partial L_1^j}{\partial u^2} - \frac{\partial L_2^j}{\partial u^1} = \sum_{k=1}^2 (L_2^k \Gamma_{1k}^j - L_1^k \Gamma_{2k}^j), \quad \text{para } j = 1, 2.$$

Recordemos que la componente tangente de (A.6) es nula, así que

$$R(X, Y)Z = II(Y, Z) \cdot S(X) - II(X, Z) \cdot S(Y).$$

A continuación, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) &\rightarrow C^\infty(S) \\ (X, Y, Z, V) &\rightarrow R(X, Y, Z, V) = (R(X, Y)Z) \cdot V \end{aligned}$$

Usando (A.5) y (A.6), se sigue que

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, V) &= (R(X, Y)Z)V = II(Y, Z)S(X) \cdot V - II(X, Z)S(Y) \cdot V \\ &= II(Y, Z)II(X, V) - II(X, Z)II(Y, V). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

para  $X, Y, Z, V$  campos tangentes a  $S$ .

Particularizando la fórmula previa para  $X = \vec{x}_1, Y = \vec{x}_2, Z = \vec{x}_1$  y  $V = \vec{x}_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (R(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\vec{x}_1) \vec{x}_2 &= R(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1, \vec{x}_2) = II(\vec{x}_2, \vec{x}_1)II(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - II(\vec{x}_1, \vec{x}_1)II(\vec{x}_2, \vec{x}_2) \\ &= L_{21}^2 - L_{11}L_{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, ya que la curvatura de Gauss es dada por  $K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ , concluimos el siguiente resultado.

**Proposición A.2.** Sean  $R$  el tensor curvatura de una superficie  $S$  y  $K$  la curvatura de Gauss. Si  $(u^1, u^2) \rightarrow \vec{x}(u^1, u^2)$  es una representación paramétrica de  $S$ , y  $g$  el discriminante de la primera forma fundamental respecto de tal parametrización, entonces

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}.$$

□



---

## Bibliografía

- [1] GARCÍA RÍO E. *Una introducción a la curvatura Unha andaina po la Matemática*, curso 2002 - 2003 Santiago de Compostela <https://bit.ly/2TzhB6G>
- [2] GAUSS C.F. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores. Volume VI, pp. 99-146 (1827). *General Investigations of Curved Surfaces* (edición de 1965) Raven Press, New York, trad. A. M. Hildebeitel and J. C. Morehead.
- [3] LANCHESTER G. *The yellow emperor's south pointing chariot*. China Society, London (1947).
- [4] MONTESDEOCA A. *Apuntes de Geometría Diferencial de curvas y superficies*. <http://webpages.ull.es/users/amontes> (2004).
- [5] NEEDHAM J. The south-pointing chariot. *Science and civilization in China*. Vol IV(2), pp 286-303, Cambridge Univ. Press. (1965).
- [6] SANTANDER M. The chinese south seeking chariot: a simple mechanical device for visualizing curvature and parallel transport. *Am. J. Phys*, 60, 782- 787 (1992).
- [7] SANTANDER M. *Parallel transport before the 20th century: the chinese south-pointing chariot*. XIX International Congress of the History of Sciences, Zaragoza (1993).
- [8] SANTANDER M. *La magia del emperador: el primer autómatas de la Historia*. Conferencia en el Seminario Interdisciplinar de la Universidad de Zaragoza (1994).



# The Geometry of the Chinese south seeking chariot

## Abstract

The main aim of this poster is to introduce a mechanical device called the Chinese south seeking chariot, which is able to approximate the parallel transport of a vector along a curve on a surface. The mathematical notions of geodesic curvature, parallel transport or Gauss curvature of a surface are analyzed using this mechanism.

## 1. The Chinese south seeking chariot (CSCC)

The Chinese south seeking chariot is a ancient mechanical device really difficult to date; it is involved in such a long list of legends. J Needham dated it around the III century.

The device has two wheels and one axis, where some gears rest. On the top of this gadget there is a Chinese figure pointing to a fixed direction, which regardless of the motion of the chariot at any moment, the rate of rotation of the pointer relative to the chariot itself is exactly the opposite of the rate of rotation of the chariot relative to the ground.



## 2. Mathematical notions

From now on, we will use the following notation:

- $\alpha$  := a curve on a surface  $S$ .
- $s$  := arc length parameter of  $\alpha$ .
- $\dot{\alpha}$  := speed of  $\alpha$ .
- $\ddot{\alpha}$  := acceleration of  $\alpha$ .

### 2.1 Geodesic curvature $k_g$ of $\alpha$

If  $N$  is the normal vector field on  $S$ , the geodesic curvature  $k_g$  is characterized by

$$\ddot{\alpha} = k_g(N \circ \alpha \times \dot{\alpha}).$$

If  $k_g = 0$  then we have found  $\alpha$  geodesic on the surface. On a sufficiently small open set, if  $\alpha$  is geodesic, then  $\alpha$  minimizes the distance between points.

### 2.2 Parallel transport $P'_\alpha$ along $\alpha$

Let  $Y$  be a vector field along  $\alpha$ . We can say  $Y$  is parallel along  $\alpha$ , if the tangent component of the derivative of  $Y$  with respect to  $\dot{\alpha}$  is zero, i.e.  $\nabla_{\dot{\alpha}} Y = 0$ .

For any tangent vector  $\vec{v}$  on  $S$  at  $\alpha(0)$  there is a unique field  $Y$  parallel to the surface  $S$  along  $\alpha$  such that  $Y_{\alpha(0)} = \vec{v}$ .

$$P'_\alpha : T_{\alpha(0)}S \rightarrow T_{\alpha(t)}S, \quad \vec{v} \mapsto Y_{\alpha(t)}$$

## 3. Mathematical relations

### 3.1 Relation between $k_g$ and $P'_\alpha$

$$\frac{d\theta}{ds} = k_g \quad (1)$$

$\theta$  is the angle between  $Y(s)$  and  $\dot{\alpha}(s)$ .

### 3.2 Relation between $k_g$ and the Gauss curvature $K$ of $S$ (Gauss-Bonnet Theorem)

$$\int_D K dA + \int_{\partial D} k_g = 2\pi \quad (2)$$

Now,  $\alpha$  represents a closed loop which encloses a domain  $D$ .

## 4. The design of the CSCC

- $\tilde{\theta}$  := angle between the pointer and the chariot.
- $\theta$  := angle between the tangent vector to the curve  $\alpha$  and the parallel transport along  $\alpha$ .

The aim of this design is  $\frac{d\tilde{\theta}}{ds} = \frac{d\theta}{ds}$ .

- $L(a, s)$  := length of  $\Gamma_a$  from  $\Gamma_{\alpha(0)}$  to  $\Gamma_{\alpha(s)}$ .

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{\dot{\alpha}=0} = k_g$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{L(a, s) - L(-a, s)}{2a} \right) \approx k_g = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\tilde{\theta}}{ds}$$

We can build the CSCC with this constraint

$$\tilde{\theta}(s) = \frac{L(a, s) - L(-a, s)}{2a}.$$

## 5. The CSCC and the geodesic curvature

$$\frac{d\tilde{\theta}}{ds} \approx k_g$$

### ■ Experimental computation

The geodesic curvature of a curve  $\alpha$  is the difference between the angles of the pointer relative to the chariot at the initial point and at the final point of  $\alpha$  divided by the length of the curve between these two points.

## 6. The CSCC and the parallel transport

$$\frac{d\tilde{\theta}}{ds} \approx \frac{d\theta}{ds}$$

### ■ Experimental computation

Firstly we set the pointer in the direction of the vector  $\vec{v}$ . Then we move the CSCC along the curve  $\alpha$ . The direction of the pointer at the end of the curve is the parallel transport of  $\vec{v}$ .

## 7. The CSCC and the geodesics

$$\frac{d\tilde{\theta}}{ds} \approx k_g = 0$$

### ■ Experimental computation

In that case, we must move the chariot along the curve  $\alpha$ , if the pointer does not rotate relative to the chariot, then  $\alpha$  is a geodesic. In other case, it is not.

## 8. The CSCC and the Gauss curvature

Let choose now a closed loop  $\alpha$  which encloses a domain  $D$ . Using (1) and (2), we have

$$\iint_D K dA + (\tilde{\theta}(s_1) - \tilde{\theta}(0)) = 2\pi.$$

If  $K = cte$ , then

$$K \cdot \text{Area } D = 2\pi - (\tilde{\theta}(s_1) - \tilde{\theta}(0)).$$

### ■ Experimental computation

The Gauss curvature in a small neighborhood is calculated by determining the difference between the angle  $\tilde{\theta}$  at the beginning (with  $s = 0$ ) and at the end (with  $s = s_1$ ) of the path (we may remind that we chose a closed loop), calculating its complementary (respect of  $2\pi$ ) and dividing it by the area of the path.

In order to ease the computation, it is quite better to choose a path where the enclosed area is easy to determinate.

## References

- [1] MONTESDEOCA A. *Apuntes de Geometría Diferencial de curvas y superficies*.
- [2] SANTANDER M. The chinese south seeking chariot: a simple mechanical device for visualizing curvature and parallel transport. *Am. J. Phys.*, 60, 782- 787 (1992).