Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jorge Juli Gil

Estudio de estrategias óptimas en financiación

Study of optimal strategies in financing

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Marzo de 2019

Dirigido por
Carlos González Alcón

Carlos González Alcón
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Gracias a todos aquellos profesores de los cuales he podido aprender algo a lo largo de estos años.

Jorge Juli Gil
La Laguna, March 15, 2019

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo trataremos primero con la toma de decisiones óptimas en modelos deterministas para después adentrarnos en otros probabilísticos. En el primer caso, fijado un horizonte temporal, nuestro objetivo será tomar decisiones óptimas sobre determinadas variables en las que podemos influir en cada instante, para así, maximizar la utilidad agregada con el paso del tiempo. Para ello, partiremos de nociones teóricas en cada caso, para a continuación reflejar la aplicación de estos resultados a situaciones que podrían darse en la realidad. Así, podemos destacar el Principio del Máximo *y la* representación numérica *de una* relación de preferencia *como los principales elementos de esta memoria. De este modo, la primera parte pertenece a la rama de la teoría de control óptimo, y la segunda a la de la decisión.*

Palabras clave: *Optimización – Teoría del Control Óptimo – Principio del Máximo – Función Hamiltoniana – Teoría de Juegos -Preferencias.*

Abstract

In this work we will firstly deal with optimal decision making over deterministic models, so we can later go on to probabilistic ones. In the first case, having a fixed time horizon, our first goal will be to find optimal controls over certain variables which can be influenced by us at any moment in time, in order to maximize the aggregate utility through time. In order to reach those goals, we will proceed by analizing the theoretical side of each case, so that later we will be able to apply those results to real world problems. Thus, we can highlight the Maximum Principle *and the* numerical representation *of a* preference relation *as the main elements of this work. Thereby, the first part fits in the branch of optimal control theory, and the second one in the one of decision.*

Keywords: *Optimization - Optimal Control Theory - Maximum Principle - Hamiltonian Function - Game Theory - Preferences.*

Contenido

Introducción

En la vida continuamente hemos de tomar decisiones. Cuando nos encontramos ante situaciones en las que la obtención o pérdida de algo, que nosotros consideremos valioso, depende de la decisión que tomemos, tratar de encontrar un modelo matemático que pueda ayudarnos a escoger, puede ser muy interesante. Así, se han ido desarrollando la teoría de control y la teoría de juegos, para, bajo distintos supuestos, ayudarnos a tomar decisiones óptimas.

En los modelos de programación matemática, se suele asumir que tenemos que encontrar valores para un número finito de variables que deben hallarse en un rango determinado, para así maximizar o minimizar una determinada función objetivo. Nosotros estudiaremos modelos donde el número de variables sobre las que tenemos que decidir es infinito, ya que las decisiones se producirán en cada instante de tiempo. Las ideas que aplicaremos a la hora de desarrollar estos modelos, tendrán ciertos paralelismos a las que aparecen en el caso discreto. Será este tipo de problemas los que estudiaremos durante la parte dedicada a la teoría de control de esta memoria, introduciendo primero el modelo, para más tarde llegar al *principio del máximo,* el principal resultado teórico dentro de dicha sección. Más adelante, en el último capítulo de este trabajo, trataremos de buscar una forma que nos permita valorar situaciones, cuyos modelos probabilísticos nos impiden actuar análogamente, a como lo haríamos ante los primeros escenarios tratados en esta memoria. Así es como introduciremos el concepto de *preferencia*, con el cual trataremos de abordar el aspecto referente a la toma de decisiones óptima.

Con el objetivo de añadir un enfoque práctico a esta memoria, aplicaremos los aspectos teóricos de los primeros capítulos a problemas relacionados con encontrar una estrategia de gestión de recursos óptima cuando estos son limitados. En este caso es importante saber cómo administrarlos, qué porcentaje se desea invertir para en un futuro poder generar más, o cuánto se quiere tener como beneficio en un momento dado. La dificultad en estas cuestiones depende mucho de cada caso particular, y en este trabajo se han abordado algunas de ellas desde un marco más general, aunque admitiendo que los modelos resultan poco realistas en algunos sentidos. Se han incluido ejemplos concretos con cierta frecuencia, para no perder de vista las consecuencias de los resultados teóricos que se vayan obteniendo.

Por último es necesario aclarar, que gran parte de los cálculos realizados durante este trabajo para obtener elementos como la *función Hamiltoniana*, o la mayoría del planteamiento en el tercer capítulo han sido sacados de las dos obras bibliográficas más usadas durante este trabajo, [3] y [1]. Además, [2] también aportó muchas ideas, que aunque probablemente no puedan verse reflejadas directamente en esta memoria, al menos indirectamente han tenido algún tipo de influencia.

1

Planteamiento del problema

Tratemos de introducir el planteamiento del problema que nos ocupará durante este primer capítulo, mediante el uso de modelos básicos que iremos ampliando, hasta llegar a uno que se adapte mejor al problema que realmente queremos estudiar. Para ello haremos uso de algunos resultados teóricos, que iremos obteniendo según vayamos profundizando en la materia.

1.1 Planteamiento básico

Definimos una función real $f_0(u)$, a la cual, en general, y salvo que digamos lo contrario, vamos a exigirle que sea continuamente diferenciable. Uno de los problemas de teoría de control óptimo más sencillos de plantear podría ser:

$$\begin{array}{rl} \text{maximice} & f_0(u) \\ \text{sujeto a:} & u \in I = [u_0, u_1]. \end{array} \tag{1.1}$$

Una posible forma de interpretar este modelo sería contemplando f_0 como una función que mide el rendimiento o beneficio obtenido, y cuya variable u refleja los recursos disponibles. Podemos observar que la elección del valor de u afectará al valor de la función objetivo. Al ser nosotros quienes determinamos la variable u, llamaremos a esta *variable de control*. La restricción expresaría el hecho de que los mencionados recursos son limitados. En este caso, la forma de resolverlo sería escogiendo $u^* \in I$ que maximizase $f_0(u)$ y la solución del problema u^* recibiría el nombre de *control óptimo*.

Podemos observar que una condición necesaria para que $u^* \in I$ sea solución de (1.1) es:

$$\max_{u \in U} \frac{df_0(u^*)}{du} \cdot u = \frac{df_0(u^*)}{du} \cdot u^*,$$

que es equivalente a:

$$\max_{u \in U} \frac{df_0(u^*)}{du} \cdot (u - u^*) \leq 0. \tag{1.2}$$

Observamos que esta condición (1.2) se va a satisfacer en cualquier caso:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } u^* \in Int(I) & \Longrightarrow \frac{df_0(u^*)}{du} = 0. \\ \text{Si } u^* = u_0 & \Longrightarrow \frac{df_0(u^*)}{du} \leq 0. \\ \text{Si } u^* = u_1 & \Longrightarrow \frac{df_0(u^*)}{du} \geq 0. \end{array} \tag{1.3}$$

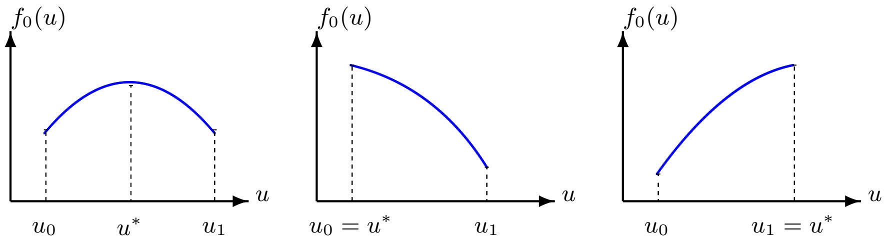


Fig. 1.1. Gráfica de los tres casos posibles que podrían presentarse.

Considerando que puede haber puntos no óptimos satisfaciendo (1.2), definimos el conjunto C, que lo conforman aquellos puntos de I que cumplen la condición necesaria para la optimalidad de (1.1):

$$C = \{u \in I / u \text{ verifica } (1.2)\}.$$

Podemos evaluar f_0 en todo $u \in C$, y resulta $O \subseteq D$, con

$$O = \{u^* \in C / f_0(u^*) \geq f_0(u), \quad \forall u \in C\}.$$

En este caso, por medio del Teorema de Weierstrass, sabemos que (1.1) tiene al menos una solución, por lo que O sería el conjunto de soluciones óptimas.

Para resolver el problema (1.1) hemos utilizado condiciones necesarias y un teorema de existencia, pero cabe mencionar que esta forma de proceder no es la única. Veamos un método alternativo que también puede aplicarse siempre que la función f_0 sea cóncava. A modo de aclaración, es importante señalar que esta exigencia que le imponemos a f_0 podemos justificarla argumentando que, aquellas funciones que sirven para expresar el rendimiento o utilidad obtenidos mediante la gestión de ciertos recursos —las llamadas *funciones de utilidad* o también *funciones de rendimiento*—, y con las cuales trataremos más adelante, son siempre cóncavas. Veamos:

$$f_0(u) - f_0(u^*) \leq \frac{df_0(u^*)}{du} \cdot (u - u^*). \tag{1.4}$$

Dado $u^* \in I$ que satisface (1.2), por (1.4) tenemos que

$$f_0(u) - f_0(u^*) \leq 0 \quad \forall u \in I.$$

Así, para f_0 cóncava (1.2) es una condición suficiente, incluso cuando I es no acotado, abierto o semiabierto.

Consideremos ahora un problema similar al anterior, aunque con un planteamiento algo más complejo. En este caso el control consiste en una función $u(t)$ continua a trozos, definida en un horizonte 'temporal' $[t_0, t_1]$, y el objetivo es maximizar la integral de f_0 en un horizonte. Es importante aclarar que a $u(t)$ le exigimos continuidad a trozos porque una forma de entender esta función es como aquella que indica cuál es la proporción de recursos invertidos, de este modo, las posibles discontinuidades de $u(t)$ podrían ser interpretadas como aquellos momentos en los cuales se decide cambiar la distribución de dichos recursos. Además, al valor objetivo de esta integral lo llamaremos J, por lo que tendríamos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} &\max_{u(t)} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(u(t), t)dt \\ &\text{sujeto a: } u(t) \in [u_0, u_1] = U, \\ &\qquad\qquad u(t) \text{ continua a trozos para cada } t \in [t_0, t_1] = T. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si encontrásemos un $u^*(t)$ óptimo, entonces se cumpliría que

$$\max_{u \in U} f_0(u, s) = f_0(u^*(s), s) \quad \forall s \in [t_0, t_1]. \tag{1.6}$$

Por lo tanto, si para cada $s \in T$ tomásemos $u^*(s) \in U$ que maximizase $f_0(u, s)$, maximizaríamos también

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(u(t), t)dt.$$

Sea un $u \in U$ arbitrario, y $s \in (t_0, t_1]$ un punto donde $u^*(t)$ es continua. Eligiendo $\delta > 0$, siendo δ pequeño, se define la siguiente "variación fuerte" de $u^*(t)$:

$$u_\delta(t) = \begin{cases} u, & t \in [s-\delta, s] = I \\ u^*(t), & t \in T \setminus I. \end{cases} \tag{1.7}$$

Así, podemos llegar a la diferencia entre una variación del valor óptimo $u^*(t)$ en $[s-\delta, s]$, a la que hemos llamado $u_\delta(t)$, y el propio valor óptimo:

$$\begin{aligned} \Delta J(\delta) &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(u_\delta(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0(u^*(t), t)dt \\ &= \int_{s-\delta}^{s} [f_0(u_\delta, t) - f_0(u^*(t), t)]dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Al estar asumiendo que $u^*(t)$ es óptimo, se cumple

$$\Delta J(\delta) \leq 0 \quad (= \Delta J(0)) \quad \forall \delta > 0.$$

Para valores pequeños de δ tenemos la siguiente aproximación de primer orden:

$$\Delta J(\delta) = \Delta J(\delta) - \Delta J(0) \approx \Delta J'(0) \cdot \delta.$$

Si derivamos (1.8) respecto de δ resulta,

$$\Delta J'(0) = \frac{dJ(0)}{d\delta} = f_0(u_\delta, s) - f_0(u^*(s), s),$$

por lo que, si tenemos en cuenta que $\Delta J(\delta) \leq 0$, sigue que:

$$f_0(u_\delta, s) - f_0(u^*(s), s) \leq 0.$$

1.2 Variable de estado

Consideremos ahora un modelo parecido a (1.5), aunque en este caso la influencia de nuestra variable de decisión u será indirecta, ya que esta va a determinar la evolución en el tiempo de un nuevo tipo de variable x, que recibe el nombre de *variable de estado*, y es una variable más de nuestra función f_0.

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \quad & J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \\ \text{sujeto a: } & \dot{x}(t) = u(t), \\ & x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) \text{ libre}, \\ & u(t) \in [u_0, u_1] = U \quad \forall t \in [t_0, t_1] = T. \end{aligned} \tag{1.9}$$

De entrada podemos apreciar que

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + x^0.$$

Buscamos ahora $(x^*(t), u^*(t))$ que maximice (1.9). Hemos de considerar que la elección de valores para $u^*(t)$ influye en los que tomará $x^*(t)$. Además, si $u^*(t)$ es el control óptimo, $x^*(t)$ será su estado asociado.

Con el objetivo de obtener condiciones necesarias para la optimalidad, procederemos como en el ejemplo anterior:

Sea un $u \in U$ arbitrario, y $s \in (t_0, t_1]$ un punto en el cual $u^*(t)$ sea continuo. Una vez más, definimos la variación fuerte de $u^*(t)$:

$$u_\delta(t) = \begin{cases} u, & t \in [s-\delta, s] = I, \\ u^*(t), & t \in T \setminus I, \end{cases} \tag{1.10}$$

y como *variable de estado* asociada a la recién definida función de control $u_\delta(t)$ tenemos:

$$x_\delta(t) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t} u^*(\tau)d\tau + x^0, & \text{si} \quad t_0 \le t < s-\delta \\ \\ \int_{t_0}^{s-\delta} u^*(\tau)d\tau + u \cdot (t-s+\delta) + x^0, & \text{si} \quad s-\delta \le t < s \\ \\ \int_{t_0}^{s-\delta} u^*(\tau)d\tau + u \cdot \delta + \int_{s}^{t} u^*(\tau)d\tau + x^0, & \text{si} \quad s \le t \le t_1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Como antes definimos,

$$\Delta J(\delta) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_\delta(t), u_\delta(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0(x^*(t), u^*(t), t)dt$$

y escribiremos

$$\begin{aligned} f_{0\delta} &= f_0(x_\delta(t), u_\delta(t), t), \\ f_0^* &= f_0(x^*(t), u^*(t), t), \end{aligned}$$

por lo que tendremos:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} f_{0\delta}dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0^* dt = \int_{s-\delta}^{s} (f_{0\delta} - f_0^*)dt.$$

Además, en caso de tener $t > s$, podemos aproximar la diferencia mediante:

$$f_0(x(t), u^*(t), t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t) \simeq f_{0x}'^*(t)\Delta x(t),$$

con δ pequeña.

Tenemos también:

$$
\begin{aligned}
\Delta x(t) =& x_\delta(t) - x^*(t) = \int_{t_0}^{t} (u_\delta(\tau) - u^*(\tau))d\tau = \int_{s-\delta}^{s} (u_\delta - u^*(\tau))d\tau \\
\approx& [u - u^*(s)] \cdot \delta.
\end{aligned}
$$

Así, para cualquier δ pequeño:

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 J =& \int_{s}^{t_1} (f_0 - f_0^*)dt \approx \int_{s}^{t_1} f_{0x}'^*(t)\Delta x(t)dt, \\
\Delta_1 J =& \int_{I=[s-\delta,s]} (f_0 - f_0^*)dt = \int_I (f_0 - f_0(x^*(t), u(t), t)dt + \int_I (f_0(x^*(t), u(t), t) - f_0^*)dt \\
\approx& [f_0(x^*(s), u, s) - f_0^*(s)] \cdot \delta,
\end{aligned}
$$

lo que implica:

$$
\Delta J = \Delta_1 J + \Delta_2 J \approx [f_0(x^*(s), u, s) - f_0^*(s)] \cdot \delta + [u - u^*(s)] \cdot \delta \cdot \int_{s}^{t_1} f_{0x}'^*(t)dt.
$$

Para garantizar la optimalidad de $u^*(t)$ ha de cumplirse:

$$
\Delta J \leq 0.
$$

Si definimos

$$
p(s) = \int_{s}^{t_1} f_{0x}'^*(t)dt, \quad \text{obtenemos,}
$$

$$
f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s) + p(s) \cdot [u - u^*(s)] \leq 0. \tag{1.12}
$$

Finalmente, podemos definir,

$$
H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + p \cdot u, \tag{1.13}
$$

y, así, (1.12) es equivalente a

$$
H(x^*(s), u, p(s), s) \leq H(x^*(s), u^*(s), p(s), s),
$$

que es equivalente a afirmar que,

$$
\max_{u \in U} H(x^*(s), u, p(s), s) = H(x^*(s), u^*(s), p(s), s).
$$

Además, observamos que $p(s)$ satisface:

$$
\dot{p} = -f_{0x}'(x^*(s), u^*(s), s) = -H_x'(x^*(s), u^*(s), p(s), s), \tag{1.14}
$$

con, $p(t_1) = 0$.

Llamaremos *función hamiltoniana* a H y *función de coestado* a p. Antes de enunciar los mayores resultados teóricos que nos permitirán resolver el problema principal del capítulo, ampliaremos un poco más el modelo (1.9). El motivo por el cual estamos interesados en obtener más propiedades sobre estas funciones, es el hecho de que, de este modo, dispondremos de un modo concreto con el cual podremos calcular H y p explícitamente, cosa que nos resultará útil más adelante.

1.3 Un caso más general

Consideremos ahora el problema siguiente, en el cual, además de las funciones ya conocidas, añadiremos una función real f mediante la cual generalizamos el modelo (1.9) anteriormente tratado, ya que ahora, nuestra variable de estado $x(t)$ depende, no solo de $u(t)$, si no también de sí misma:

$$\begin{aligned} \max_{u(t)\in[u_0,u_1]=U} J =& \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t),t)dt \\ \text{sujeto a: } \dot{x}(t) =& f(x(t),u(t),t), \\ x(t_0) =& x^0, \quad x(t_1) \text{ libre.} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Asumimos que para cualquier función de control $u(t)$ continua a trozos que tomemos, la ecuación diferencial que define a la variable de estado $x(t)$ tiene una solución continua verificando la condición $x(t_0) = x^0$. En ese caso diremos que el par $(x(t), u(t))$ es admisible, y observamos que nuestro objetivo es encontrar un par admisible que maximice J. Al igual que antes, denotaremos al par óptimo $(x^*(t), u^*(t))$.

Para encontrar condiciones necesarias que nos conduzcan a la solución del problema, razonamos análogamente al ejemplo anterior:

En primer lugar, definimos ΔJ, ΔJ_1 y ΔJ_2 de forma idéntica al caso previo.

Sin embargo, a la hora de obtener $\Delta x(t) = x(t) - x^*(t)$, varía el cálculo. Escribiendo $f = f(x(t), u(t), t)$, se tiene que $x^*(t) = \int_{t_0}^{t} f^* d\tau + x^0$, de lo que sigue que, para $t > s$:

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} f d\tau - \int_{t_0}^{t} f^* d\tau = \int_{s-\delta}^{s} (f - f^*) d\tau + \int_{s}^{t} (f - f^*) d\tau.$$

En $(s, t_1]$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(\tau) - f^*(\tau) =& f(x(\tau), u^*(\tau), \tau) - f(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau) \\ \simeq& f_x'^*(\tau)\Delta x(\tau), \end{aligned}$$

por lo que, para $t > s$:

$$\Delta x(t) \approx \int_{s-\delta}^{s} (f - f^*) d\tau + \int_{s}^{t} f_x'^*(\tau)\Delta x(\tau) d\tau.$$

De esta aproximación sigue para $t > s$:

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = f_s'^*(t)\Delta x(t), \quad \Delta x(s) = \int_{s-\delta}^{s} (f - f^*) d\tau \approx C \cdot \delta, \tag{1.16}$$

donde $C = f(x^*(s), u, s) - f^*(s)$. Observamos que (1.16) es una ecuación diferencial lineal. Ajustando la ecuación a la condición inicial $\Delta x(s) = C \cdot \delta$, obtenemos la solución:

$$\Delta x(t) = C \cdot \delta \cdot \exp\left(\int_{s}^{t} f_x'^*(\tau) d\tau\right).$$

Aplicando esta expresión en ΔJ_2, vemos que:

$$\begin{aligned} \Delta J =& \Delta_1 J + \Delta_2 J \\ \approx& [f_0(x^*(s), u, s) - f_0^*(s)] \cdot \delta + \int_{s}^{t_1} f_{0x}'^*(t) \cdot C \cdot \delta \cdot \exp\left(\int_{s}^{t} f_x'^*(\tau) d\tau\right) dt, \\ =& [f_0(x^*(s), u, s) - f_0^*(s)] \cdot \delta + p(s) \cdot [f(x^*(s), u, s) - f^*(s)] \cdot \delta \end{aligned}$$

donde,

$$p(s) = \int_{s}^{t_1} f_{0x}'^*(t) \exp\left(\int_{s}^{t} f_x'^*(\tau) d\tau\right) dt. \tag{1.17}$$

Concluimos aquí este capítulo pudiendo destacar como los resultados más relevantes las propiedades (1.13), (1.14) y (1.17), que serán fundamentales en el siguiente apartado.

2

Teoría del control óptimo

A partir de las cuestiones simples recientemente planteadas, vamos a poder continuar con modelos más complejos que se irán asemejando más a aquellos que queríamos estudiar inicialmente. Además, habiendo introducido ya la teoría de control óptimo, podremos presentar algunas nociones teóricas interesantes cuyas aplicaciones veremos más adelante.

2.1 Caso multidimensional y Principio del Máximo

Consideramos un sistema que evoluciona en el tiempo, y cuyo estado puede ser descrito en cualquier instante t por medio de un número finito de variables de estado,

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t).$$

Estas variables de estado pueden reflejar el nivel de infraestructura que tiene el sistema económico, la aptitud de sus trabajadores y más características propias del mismo.

Supongamos también que contamos con un número finito de *funciones de control* o también *variables de decisión*:

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t).$$

Estas funciones de control pueden representar qué porcentaje de los salarios quiere recaudar un país o cuánto dinero quiere invertir una empresa en mejorar su infraestructura. En este apartado de la Teoría de Control nos centraremos exclusivamente en sistemas económicos cuya evolución en el tiempo pueda ser representada por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t), t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t), t).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Las funciones $f_1, \ldots, f_n$ pueden llegar a depender tanto de las variables de estado, como de las funciones de control y también del instante t en el que nos encontremos.

El uso de notación vectorial nos simplificará la labor de expresar el sistema, de modo que en adelante, usaremos:

$$
\begin{gathered}
x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\
u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)) \\
f = (f_1, \ldots, f_n)
\end{gathered}
$$

de modo que (2.1) lo escribimos como

$$
\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t). \tag{2.2}
$$

Supongamos ahora que dado un instante t_0 en el tiempo, nuestra economía presenta un estado $x(t_0) = x^0$. En ese caso, obtenemos un problema de valor inicial con la ecuación (2.2) y valor inicial $x(t_0) = x^0$.

Este sistema está definido para todo $t \geq t_0$, y se tiene que las soluciones dependerán en particular de la función de control $u(t)$. Como el comportamiento de la economía puede variar dependiendo de la elección de estas variables de control, para cada $(u_1(t), \ldots, u_r(t)) \in U \subseteq \mathbb{R}^r$ (tomando el conjunto de variables de decisión como vector de un conjunto fijo U) tendremos evoluciones distintas del sistema. Llamaremos *decisor* a quien tenga poder sobre la función de control $u(t)$. $[t_0, T]$ será nuestro horizonte temporal, hasta el cual habremos de considerar la evolución de la economía, y f_0 una función dada que dependerá del sistema en sí. El estado del sistema nos produce una utilidad a la cual le asociaremos un valor J que formularemos como:

$$
J = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt. \tag{2.3}
$$

Nuestro problema será encontrar unos controles $(u_1(t), \ldots, u_r(t))$ que maximicen nuestro objetivo J. En nuestro modelo, no le pondremos ninguna condición al estado final $x(T)$ que deba alcanzarse.

Antes de estudiar este problema veamos el caso particular ya analizado en (1.15), que resulta más sencillo, para luego regresar al problema general original. Aquí tendremos solo una variable de estado y una variable de decisión, por lo que se trata de encontrar una función continua a trozos $u(t)$ definida sobre el intervalo temporal $[t_0, T]$ con su respectiva función de estado $x(t)$ que resuelva el problema:

$$\begin{aligned} \text{maximice} \quad & J = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ & x(t_0) = x^0, \quad (x^0 \in \mathbb{R}), \\ & u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}, \\ & \text{y una de las siguientes condiciones terminales:} \\ & \text{a) } x(T) = x^T; \quad \text{b) } x(T) \geq x^T; \quad \text{c) } x(T) \text{ libre.} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observamos que en este modelo, una de las restricciones es la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \tag{2.5}$$

que podemos considerar como una cantidad infinita de restricciones, una para cada $t \in [t_0, T]$.

Siguiendo un principio parecido al del método de los multiplicadores de Lagrange en problemas de optimización, donde cada restricción puede ser sustituida por una variable que se le añade a la función objetivo, aquí, de manera análoga, podremos usar la ya definida *función de coestado* $p(t)$ sobre $[t_0, T]$, que cumple las mismas condiciones planteadas en (1.14), que será asociada a la ecuación (2.5) y desempeñará un papel parecido al de multiplicador de Lagrange pero para este caso continuo particular. De unas cuentas análogas a las realizadas en el segundo apartado del primer capítulo de este trabajo obtenemos también la *función Hamiltoniana* $H(x, u, p, t)$, que ya apareció en (1.13) y que se define como:

$$H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + p \cdot f(x, u, t). \tag{2.6}$$

El siguiente teorema nos permite convertir el problema (2.4) de encontrar una función de control $u(t)$ que maximice J en un problema en el cual igualmente tenemos que encontrar una función de control $u(t)$ y una función de coestado $p(t)$, pero en este caso, que maximicen al hamiltoniano H de la expresión (2.6).

Teorema 1 (Principio del Máximo) *Sea $u^*(t)$ una función continua a trozos definida sobre el intervalo $[t_0, T]$, que resuelve el modelo (2.4) para el caso de que se tenga una sola variable de estado ($n = 1$), y sea $x^*(t)$ su variable de* *estado asociada a ese control óptimo. Entonces, existe una función $p(t)$ continua y diferenciable a trozos definida sobre $[t_0, T]$, que cumple:*

$$(p_0, p(t)) \neq (0,0) \quad \forall t \in [t_0, T],$$

$$H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) \geq H(x^*(t), u, p(t), t), \quad \forall u \in U. \tag{2.7}$$

Excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x}, \quad \text{donde} \quad \frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Además, $p_0 = 1$ o $p_0 = 0$, y la función $p(t)$ tiene que verificar, en función de la condición terminal impuesta en (2.4):

a) $p(T)$ libre;
b) $p(T) > 0 (= 0$ si $x^*(T) > x^T)$;
c) $p(T) = 0$.

2.2 Ejemplos para el caso unidimensional

Veamos ahora dos ejemplos donde se aplican los resultados de este teorema para resolver un problema como el de (2.4).

Ejemplo 1 *Se considera el problema:*

$$\begin{aligned} &\text{maximice} \int_0^1 x(t)dt \\ &\text{sujeto a: } \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ &\qquad\qquad x(0) = 0, \quad x(1) \text{ libre}, \\ &\qquad\qquad u(t) \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

En primer lugar, creamos el hamiltoniano H:

$$H(x, u, p, t) = x + p(x + u).$$

Por el teorema 1 sabemos que la función de coestado debe verificar

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x},$$

lo que, en nuestro caso resulta

$$\dot{p}(t) = -1 - p(t),$$

cuya solución es

$$p(t) = -1 - c\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Puesto que no hay restricción sobre el valor final del estado, el teorema (1) nos afirma que $p(1) = 0$, *de modo que* $c = -\mathrm{e}$. *Sigue que la función de coestado tiene la expresión*

$$p(t) = -1 + \mathrm{e}^{1-t},$$

y el hamiltoniano H

$$H(x, u, p, t) = x(t) + (-1 + \mathrm{e}^{1-t})(x(t) + u(t)).$$

Teniendo en cuenta que $p(t) > 0$, *para* $t \in (0, 1)$, *el control que maximice el hamiltoniano* H *será* $u^*(t) = 1, \quad t \in [0, 1]$. *Así, podemos obtener la variable de estado* $x^*(t)$ *asociada al control óptimo* $u^*(t)$, *que resulta de resolver la ecuación diferencial*

$$\dot{x^*}(t) = x^*(t) + u^*(t).$$

Así, tenemos $x^*(t) = -1 + c\,\mathrm{e}^t$, *y ajustando al dato inicial* $x^*(0) = 0$ *hallamos la constante* $c = 1$, *con* $\dot{x^*}(t) = -1 + \mathrm{e}^t$. *Por último, aplicamos esta función a la integral objetivo y resolvemos:*

$$\int_0^1 -1 + \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e} - 2 \approx 0'718.$$

Si tomásemos otras funciones de control $u(t)$ *diferentes a la hallada pero cumpliendo la restricción* $u(t) \in [-1, 1]$, *por ejemplo* $u(t) = \frac{1}{2}$, *o* $u(t) = \mathrm{sen}(t)$, *obtendríamos otras variables de estado* $x(t)$ *asociadas a estos controles. Para estos ejemplos tendríamos* $x(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - 1)$, *y* $x(t) = -\frac{1}{2}(\mathrm{sen}(t) + \cos(t) - 1)$ *respectivamente y nos darían como valor de la integral*

$$\int_0^1 x(t)dt,$$

$\approx 0'359 (= \frac{0'718}{2})$, *y alternativamente* $\approx -0'151$. □

Este ejemplo, aunque ilustrativo en cuanto a la forma de aplicar el teorema 1, realmente se podía resolver de manera directa. Es por ello que analizaremos ahora un problema que igualmente se resuelve mediante (1) y que sin embargo requiere más atención a la hora de estudiarlo. Además aprovechamos para introducir la *función de utilidad,* que usaremos más adelante en el tercer capítulo a la hora de ver cómo maximizar la esperanza del rendimiento mediante la elección de una estrategia de gestión óptima:

Ejemplo 2 (Función de utilidad) *Supongamos que* $U \in C^2([0,1])$ *es una función que mide la utilidad que le puede sacar un país al dinero que recibe como ayuda externa. A esta función le exigiremos que sea estrictamente creciente y cóncava, para que en efecto, podamos considerar a esta una función de utilidad. Conviene aclarar que a* U *le imponemos estas condiciones debido a que esta función debe reflejar el rendimiento que se puede obtener a partir de determinados recursos, de modo que, cuanto mayor sea la inversión, mayor será el provecho obtenido; y también lleva implícito el hecho de que, el aumento de la utilidad que se le puede sacar a un beneficio debe ser proporcional a la cantidad de beneficio que ya se tenga. Además, una función de utilidad puede incluir parámetros que sirven, por ejemplo, para expresar el grado de aversión al riesgo cuando hay variables aleatorias de por medio, aunque eso lo trataremos con más detalle a lo largo del último capítulo.*

Sean $x(t)$ *una variable de estado,* $u(t)$ *una variable de control y* T, x_0, x_T *valores reales, estrictamente positivos. Se plantea ahora un problema como (2.4):*

$$
\begin{aligned}
\text{maximice} &\int_0^T U(1-u(t))dt \\
\text{sujeto a: } &\dot{x}(t) = u(t), \\
&x(0) = x^0, \\
&x(T) \geq x^T, \\
&x^0 < x^T < x^0 + T, \\
&u(t) \in [0,1].
\end{aligned}
$$

(La interpretación que se le puede dar a este ejemplo es la siguiente: Un país va recibiendo cierta cantidad de dinero de manera constante a modo de ayuda. La variable de estado $x(t)$ *describe el nivel de infraestructura del país en el instante* t*, y la variable de control* $u(t)$ *denota la proporción de la ayuda económica recibida destinada a ser invertida en mejorar la infraestructura en el instante* t*.* U *es la función de utilidad y* $1-u(t)$ *es la parte de la ayuda destinada al consumo. El periodo de planificación es* $[0,T]$*, y el imponer* $x(T) \geq x^T$ *significa que el país planea terminar el periodo de planificación llegando a alcanzar un nivel mínimo en su infraestructura. El objetivo de este problema es encontrar la forma óptima de invertir, maximizando así la utilidad total.)*

En primer lugar construimos el hamiltoniano H:

$$H(x,u,p,t) = p_0 U(1-u) + pu.$$

Por el teorema 1 sabemos que si $(u^*(t), x^*(t))$ *es el control óptimo con su estado asociado para resolver el problema, entonces existen una constante* p_0 *y una función continua* $p = p(t)$ *tales que*

$$(p_0, p(t)) \neq (0,0), \forall t \in [0,T], \quad p_0 \in \{0,1\}.$$

Además, $u^*(t) \in [0,1]$ *maximiza*

$$H(x^*(t), u, p(t), t) = p_0 U(1-u) + p(t)u. \tag{2.9}$$

Por otro lado, la función de coestado $p(t)$ *satisface:*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x},$$

excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$ *si los hubiera.*

Finalmente, también ha de cumplirse que $p(T) \geq 0$, *con* $p(T) = 0$ *en caso de que* $x^*(T) > x^T$.

El teorema 1 nos ha dado mucha información acerca de la resolución del problema y a partir de ahora nos toca ir analizando casos para encontrar el control óptimo buscado.

Empezamos observando que $\dot{p}(t) = 0$ *y* $p(T) \geq 0$, *y también recordamos que* $p(t)$ *ha de ser continua, de modo que*

$$p(t) = C \geq 0.$$

Por (2.9) se tiene que $H''_{uu} \leq 0$, *con*

$$H'_u = -p_0 B'(1-u) + C, \quad H''_{uu} = p_0 B''(1-u).$$

Para cada t, *estudiamos los tres comportamientos posibles en función de* $u^*(t)$ *para que maximice el hamiltoniano como se indica en (2.7)*

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \Longrightarrow \; C \leq p_0 U'(1) \\ \in (0,1) & \Longrightarrow \; p_0 U'(1-u^*(t)) = C \\ 1 & \Longrightarrow \; p_0 U'(0) \leq C. \end{cases} \tag{2.10}$$

Ahora, deducimos que $p_0 = 1$, *ya que en caso contrario, si* $p_0 = 0$ *se tiene que respetar* $(p_0, p(t)) \neq (0,0), \forall t \in [0,T]$, *y teniendo en cuenta que* $p(t) = C \geq 0$ *observamos que* $C > 0$. *Así,* $u^*(t) = 1$ *maximiza la expresión (2.9), por lo que, teniendo en cuenta la condición inicial* $\dot{x}(t) = u(t)$, *llegamos a la conclusión de que* $x(t) = x^0 + t$, *pero esto implicaría que*

$$x(T) = x^0 + T > x^T \implies p(T) = 0.$$

Como $p_0 = 1$, *nuestro hamiltoniano* H *tiene la forma:*

$$H = U(1-u) + Cu,$$

con

$$H'_u = -U'(1-u) + C y H''_{uu} = U''(1-u).$$

Ahora tenemos que encontrar el control óptimo $u^*(t) \in [0,1]$ que resuelva nuestro problema.

Empezamos deduciendo que $u^*(t) \neq 0$, debido a que tendríamos:

$$x(t) = x_0, \quad x(T) = x^0 \geq x^T, \text{ pero } x^0 < x^0 + T < x^0 + T \text{ no puede ser.}$$

Esto implica que $u^*(t) \in (0,1]$. Si $p(t) = C = 0$, tendríamos una contradicción con (2.10), de modo que $x^*(T) = x^T$.

El caso $u^*(t) = 1$ también podemos descartarlo debido a que esto llevaría a $x^*(t) = t + x^0$, con $x^*(T) = T + x^0$ (por las condiciones iniciales del problema).

Así, podemos concluir que $u^*(t) \in (0,1)$, por lo que $x^*(t) = x^0 + u^* t$, y $x(T) = x^0 + u^* T$. Si imponemos la condición: $x^*(T) = x^T$ observamos que:

$$u^*(t) = u^* = \frac{x^T - x^0}{T} \qquad \Longrightarrow \; x^*(t) = x^0 + \frac{x^T - x^0}{T}.$$

Atendiendo a la condición (2.10) vemos que nuestra función de coestado es:

$$p(t) = C = U'\left(1 - \frac{x^T - x^0}{T}\right).$$

Finalmente, podemos usar este resultado para sustituirlo en nuestra integral original y de este modo tenemos:

$$J = \int_0^T U\left(1 - \frac{x^T - x^0}{T}\right) dt = U\left(1 - \frac{x^T - x^0}{T}\right),$$

que depende únicamente de los parámetros T, x^T, x^0, por lo que podemos escribir $J = J(x^0, x^T, T)$ observando que:

$$\frac{\partial J}{\partial x^0} = U'\left(1 - \frac{x^T - x^0}{T}\right) = p(0), \qquad \frac{\partial J}{\partial x^T} = -U'\left(1 - \frac{x^T - x^0}{T}\right) = -p(T).$$

Así hemos podido comprobar que la solución de este problema depende directamente de todos los elementos que lo componen: los estados iniciales y finales que tiene que presentar el sistema, la longitud del intervalo de tiempo $[0,T]$ en el cual vamos a trabajar, y la propia función de utilidad U. □

Este último ejemplo está muy relacionado con el tipo de problema (2.4) que pretendemos resolver. Con estos ejemplos hemos visto cómo hacer uso del teorema 1. Veamos ahora cómo tratar con sistemas con más variables de estado, pero primero estudiaremos la generalización del mencionado teorema 1.

2.3 Principio del Máximo generalizado

Veamos ahora la generalización del teorema visto anteriormente para problemas con n variables de estado y r variables de control.

$$
\begin{aligned}
&\text{maximice} \int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt \\
&\text{sujeto a: } \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t), \\
&\qquad x(t_0) = x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0), (x^0 \in \mathbb{R}^n), \\
&\qquad u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^r. \\
&\qquad \text{y las siguientes condiciones terminales:} \\
&\qquad x_i(T) = x^T, \quad i = 1,\dots,l \\
&\qquad x_i(T) \geq x_i^T, \quad i = l+1,\dots,m \\
&\qquad x_i(T) \text{ libre}, \quad i = m+1,\dots n.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Teorema 2 (Principio del Máximo generalizado) *Sea $u^*(t)$ una función continua a trozos definida sobre el intervalo $[t_0,T]$, que resuelve el modelo (2.11), y sea $x^*(t)$ su variable de estado asociada a ese control óptimo. En ese caso, existen una constante p_0 y unas funciones continuas y diferenciables a trozos $(p_1(t),\dots,p_n(t)) = p(t)$ definidas sobre $[t_0,T]$, que cumplen que para cada t:*

$$(p_0,p_1(t),\dots,p_n(t)) \neq (0,0,\dots,0)$$

$$H(x^*(t),u^*(t),p(t),t) \geq H(x^*(t),u(t),p(t),t), \quad \forall u \in U \subseteq \mathbb{R}^r. \tag{2.12}$$

Excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se verifica la ecuación diferencial:

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, \quad \textit{donde} \quad \frac{\partial H^*}{\partial x_i} = \frac{\partial H(x^*(t),u^*(t),p(t),t)}{\partial x_i}. \tag{2.13}$$

Además, $p_0 = 1$ o $p_0 = 0$, y las funciones $p_1(t),\dots,p_n(t)$ tienen que verificar, según las condiciones terminales de los estados a los cuales están asociadas:

$$
\begin{aligned}
&p_i(T) \ \textit{libre} \qquad \textit{para } i = 1,\dots,l, \\
&p_i(T) \geq 0 (= 0 \ \textit{si } x_i^*(T) > x_i^T) \qquad \textit{para } i = l+1,\dots,m, \\
&p_i(T) = 0 \qquad \textit{para } i = m+1,\dots,n.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Hemos visto el resultado teórico más importante del capítulo, y antes de pasar a resolver algunos ejemplos haciendo uso del mismo, veamos primero algunas observaciones interesantes.

- En algunos problemas de una variable, podemos tomar $p_0 = 0$. Estos son problemas degenerados, ya que las condiciones que nos proporciona el principio del máximo son las mismas para cualquier función f_0 que defina nuestro objetivo a maximizar.
- El principio del máximo resulta un poco complicado, pero aporta condiciones necesarias para garantizar la optimalidad de un problema de optimización muy general. Es difícil aplicarlo, maximizar el hamiltoniano H en función de $u_1, \ldots, u_r$ y resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen en (2.1) y (2.13).
- Si estamos ante un problema donde una de las variables de estado no tiene una condición terminal impuesta, podemos deducir inmediatamente que $p_0 = 1$. Esto se obtiene combinando las condiciones del *Principio del Máximo* que nos dicen que $(p_0, p_1(t), \ldots, p_n(t)) \neq (0, 0, \ldots, 0) \forall t \in [t_0, T]$, y además que (2.14) tiene que cumplirse en función de las condiciones terminales de las variables de estado del problema.
- Históricamente, el principio del máximo ha servido para obtener propiedades cualitativas de problemas teóricos sobre economía, aunque sin conducir a soluciones explícitas de estos.

Cabe mencionar que hay otros métodos de aplicar el teorema 2. Supongamos que tenemos un problema como el planteado en (2.11). Atendiendo al principio del máximo tendríamos, en función de las condiciones terminales impuestas a las n variables de estado, n condiciones terminales para las funciones de coestado $(p_1(t), \ldots, p_n(t))$.

Si para maximizar el hamiltoniano asociado al problema obtuviésemos un único control u para cada (x, p, t), tendríamos el control $u = u(x, p, t)$, que sería una función continua a trozos. Una vez hecho esto, podríamos evaluar el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) en u, y también el hamiltoniano, para así obtener (2.13).

De este modo resultaría un sistema con $2n$ ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas en el problema original $x_0^1, \ldots, x_0^n$ y también las proporcionadas por las funciones de coestado $p(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0))$, siendo estas últimas desconocidas.

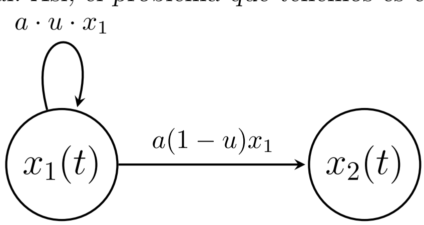
Resolviendo el sistema obtendríamos como soluciones los estados $x(t, p(0))$, asociados a los controles óptimos, y sus funciones de coestado $p(t, p(0))$, que en ambos casos dependerían de $p(0)$, con todos sus n parámetros dependiendo de las n condiciones iniciales del problema.

Este es el método heurístico, y si bien no vamos a profundizar más en él, puede resultar de gran utilidad. Esto se debe a que en muchos casos, el principio del máximo es difícil de aplicar en la realidad. Por ello, puede implementarse este método alternativo en algún ordenador, arrojando unos controles muy próximos al óptimo.

2.4 Ejemplos del caso general

Ejemplo 3 (Consumo vs inversión con dos estados) *Suponemos un sistema económico cuyo estado puede ser descrito mediante la cantidad de capital financiero del cual se dispone y el consumo del mismo. De este modo podemos definir las variables de estado:*
$x_1(t)$*, que representa la cantidad de capital financiero en un instante* t*.*
$x_2(t)$*, que se corresponde con el consumo del capital en un instante* t*.*

La variable de decisión la definimos como $u(t)$ *y expresa la proporción de capital financiero que se quiera invertir en aumentar aumentar la producción de capital. Así, el problema que tenemos es el siguiente:*



$$
\begin{aligned}
\text{maximice } J = &\int_0^T x_2(t)dt \\
\text{sujeto a: } &\dot{x}_1(t) = au(t)x_1(t), \\
&x_1(0) = x_1^0, \\
&x_1(T) \quad \text{libre}, \\
&\dot{x}_2(t) = a(1-u(t))x_1(t), \\
&x_2(0) = x_2^0, \\
&x_2(T) \quad \text{libre}, \\
&0 \le u(t) \le 1, \\
&a, x_0^1, x_0^2 > 0.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Podemos observar que si hacemos uso del principio del máximo, $p_0 = 1$*, y aquí el hamiltoniano sería:*

$$
\begin{aligned}
H((x_1,x_2),u,(p_1,p_2),t) =& x_2 + p_1 a u x_1 + p_2 a(1-u)x_1 \\
=& x_2 + p_2 a x_1 + au(p_1 - p_2)x_1,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

de donde deducimos que nuestro control óptimo será:

$$
u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } p_1 > p_2, \\ 0, & \text{si } p_2 > p_1, \end{cases}
\tag{2.17}
$$

de modo que nuestro hamiltoniano optimizado sería:

$$H((x_1^*, x_2^*), u^*, (p_1, p_2), t) = \begin{cases} x_2^* + p_1 a x_1^*, & si\ p_1 > p_2, \\ x_2^* + p_2 a x_1^*, & si\ p_2 > p_1. \end{cases} \quad (2.18)$$

Así, estamos en condiciones de plantear las ecuaciones diferenciales que definen las funciones de coestado:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1} = \begin{cases} -ap_1, & si\ p_1 > p_2, \\ -ap_2, & si\ p_2 > p_1, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H^*}{\partial x_2} = \begin{cases} -1, & si\ p_1 > p_2, \\ -1, & si\ p_2 > p_1. \end{cases} \quad (2.20)$$

Observamos que $\dot{p}_2 = -1$*, por lo que, si también tenemos en cuenta que ha de verificarse que* $p_1(T) = p_2(T) = 0$*, obtenemos la expresión explícita:*

$$p_2(t) = T - t.$$

Ahora, podemos ir deduciendo las dos expresiones de la función $p_1(t)$ *definida a trozos, y además comprobamos que* p_1 *y* p_2 *no se pueden cortar en más de dos puntos distintos, siendo uno de ellos* $t = T$*, y al otro lo llamamos* $t_* \in [0, T)$*. Con esta idea general sobre las funciones* p_1 *y* p_2*, podemos obtener sus expresiones completas:*

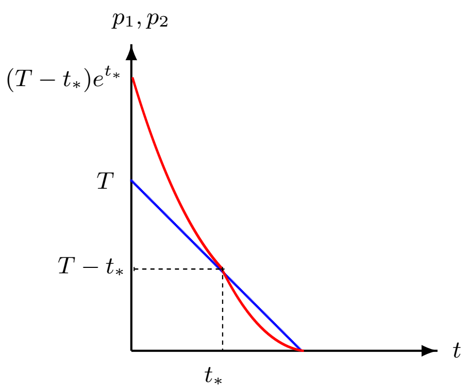


Fig. 2.1. Gráfica de las funciones de coestado.

$$p_1 = \begin{cases} (T - t_*)e^{t_* - t}, & si\ p_1 > p_2, \\ \frac{a}{2}(T - t)^2, & si\ p_2 > p_1, \end{cases} \quad (2.21)$$

con $t_* = T - \frac{2}{a}$*, por lo que podemos definir* $p_1(t)$ *en función de* t*:*

$$p_1 = \begin{cases} \frac{a}{2} e^{aT-2-at}, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ \frac{a}{2}(T-t)^2, & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T. \end{cases} \tag{2.22}$$

Veamos ahora cómo quedarían los estados asociados al control óptimo que acabamos de deducir:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ 0, & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\dot{x_1^*}(t) = \begin{cases} ax_1^*, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ 0, & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\dot{x_2^*}1(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ ax_1^*, & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T. \end{cases} \tag{2.25}$$

Recordando que los datos iniciales del problema dados eran: $x_1(0) = x_1^0$*, y* $x_2(0) = x_2^0$*, quedaría:*

$$x_1^*(t) = \begin{cases} x_1^0 e^{at}, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ x_1^0 e^{aT-2}, & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T, \end{cases} \tag{2.26}$$

y

$$x_2^*(t) = \begin{cases} x_2^0, & \text{si } 0 \leq t < T - \frac{2}{a}, \\ x_2^0 + ax_1^0 e^{aT-2}(t - T + \frac{2}{a}), & \text{si } T - \frac{2}{a} < t \leq T. \end{cases} \tag{2.27}$$

Esta última expresión es la de la variable de estado x_2 *asociada al control óptimo* u^* *deducido anteriormente en (2.23). Nos falta evaluar la función objetivo* J*, la integral de* x_2^* *en* $[0,T]$*:*

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T x_2^*(t)dt \\ &= \int_0^{T-\frac{2}{a}} x_2^0 dt + \int_{T-\frac{2}{a}}^T x_2^0 + ax_1^0 e^{aT-2}\left(t - T + \frac{2}{a}\right) dt \\ &= Tx_2^0 + \frac{2}{a} x_1^0 e^{aT-2}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

De este modo observamos que el valor objetivo, análogamente a lo que concluimos en el ejemplo 2, depende de todas las características del sistema. En este caso, tales características vienen reflejadas mediante los estados iniciales *de capital financiero y consumo del mismo, el coeficiente de crecimiento a y la longitud del intervalo durante el cual se ha de maximizar J. Por último, comprobamos que*

$$\frac{\partial J}{\partial x_1^0} = \frac{2}{a}e^{aT-2} = p_1(0),$$

y

$$\frac{\partial J}{\partial x_2^0} = T = p_2(0).$$

También cabe señalar que en caso de que $\frac{a}{2} > T$, tendríamos que $u^*(t) = 0$, de modo que $J = x_2^0 T$.

$\square$

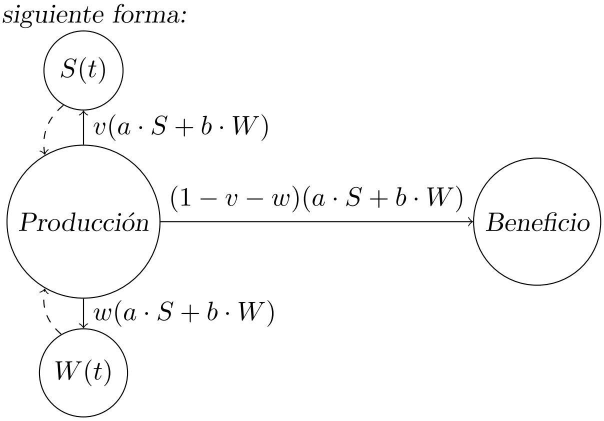
Ejemplo 4 *Infraestructura, trabajadores y ganancias*

Tenemos un sistema económico cuya producción puede aprovecharse de dos modos diferentes. En primer lugar, puede invertirse en mejorar el propio sistema, para así aumentar la producción. En segundo lugar, puede no invertirse, generando así ganancias reales que podrán destinarse al consumo. En este caso, la producción será determinada por dos elementos distintos, que pueden ser interpretados como el nivel de infraestructura del sistema, y por otro lado, la aptitud de los trabajadores del mismo. Llamaremos $S(t)$ a la variable que mide el estado de la infraestructura en un instante t y $W(t)$ a la de los trabajadores. Por otro lado, definimos las variables de decisión:

v *, proporción de la producción destinada a ser invertida en la infraestructura.*

w *, proporción de la producción destinada a ser invertidas en los trabajadores.*

Así, y suponiendo que tanto el estado de la infraestructura como el de los trabajadores contribuyen linealmente a la producción, nuestro modelo quedaría de la siguiente forma:



$$\begin{aligned}
&\text{maximice: } J = \int_0^T (1 - v(t) - w(t))(aS(t) + bW(t))dt \\
&\text{sujeto a: } \dot{S}(t) = v(t)(aS(t) + bW(t)), \quad S(0) = S_0, \quad S(T) \text{ libre}, \\
&\qquad \dot{W}(t) = w(t)(aS(t) + bW(t)), \quad W(0) = W_0, \quad W(T) \text{ libre}, \\
&\qquad v(t) + w(t), v(t), w(t) \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Debido a que no hay impuestas condiciones terminales para las variables de estado S y W, enseguida observamos que $p_0 = 1$, quedando el hamiltoniano de este problema particular de la siguiente manera:

$$H((S,W),(v,w),(p_1,p_2),t) = (1-v-w)(aS+bW)+p_1 v(aS+bW)+p_2 w(aS+bW). \tag{2.30}$$

Podemos agrupar términos para ver con mayor claridad el control óptimo:

$$H((S,W),(v,w),(p_1,p_2),t) = (aS + bW)(1 + v(p_1 - 1) + w(p_2 - 1)), \tag{2.31}$$

y de donde podemos afirmar que:

$$(v^*, w^*) = \begin{cases} (0,0), & \text{si } p_1 < 1 \text{ y } p_2 < 1, \\ (1,0), & \text{si } p_1 > 1 \text{ y } p_1 > p_2, \\ (0,1), & \text{si } p_2 > 1 \text{ y } p_2 > p_1. \end{cases} \tag{2.32}$$

Por otro lado, sabemos que las funciones de coestado $p_1(t)$, $p_2(t)$ cumplen

$$p_1(T) = p_2(T) = 0,$$

de modo que en un entorno de $t = T$ tendremos como control óptimo $(v^*, w^*) = (0,0)$. En ese mismo entorno tendremos por tanto:

$$H((S^*, W^*), (0,0), (p_1, p_2), t) = (aS^* + bW^*),$$

y así, obtendremos las siguientes ecuaciones diferenciales para p_1 y p_2:

$$\dot{p}_1(t) = -a, \quad \dot{p}_2(t) = -b.$$

De donde se sigue:

$$p_1(t) = a(T - t), \quad p_2(t) = b(T - t),$$

Si en todo momento tuviésemos que $p_1, p_2 < 1$ las ecuaciones diferenciales se aplicarían en todo el intervalo $[0, T]$ y así los estados óptimos asociados serían

$$S^* = S_0, \quad W^* = W_0,$$

por lo que tendríamos como valor objetivo:

$$J = \int_0^T (aS_0 + bW_0)dt = (aS_0 + bW_0)T.$$

En caso de que esto no sea así, y tengamos un punto en el intervalo $[0, T]$ *donde suceda que* $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ *o ambos a la vez, la solución al problema cambia. Veamos:*

Caso 1: *existe* $t_A \in [0, T)$ *de manera que* $p_1(t_A) = a(T - t_A) = 1$ *y* $p_2(t_A) < 1$.

Entonces, existe un entorno a la izquierda de t_A *en el cual tenemos el control óptimo* $(v^*, w^*) = (1, 0)$, *de modo que:*

$$H((S, W)^*, (1, 0), (p_1, p_2), t) = (aS^* + bW^*)p_1,$$

de donde obtendríamos:

$$\dot{p}_1(t) = -ap_1(t), \quad \dot{p}_2(t) = -bp_1(t).$$

Argumentando que las funciones de coestado p_1, p_2 *tienen que ser continuas deducimos que:*

$$p_1(t) = a(T - t_A)e^{a(t_A - t)}, \quad p_2(t) = b(T - t_A)e^{a(t_A - t)}.$$

En este caso nuestra hipótesis es que $p_1(t_A) = 1$, *donde* $p_2(t_A) < 1$, *lo que implica que* $a > b$, *por lo que ya no ocurriría que* $p_2 > p_1$ *en* $[0, t_a)$. *Así, nuestros estados asociados a ese control óptimo en el intervalo* $[0, t_A)$ *tendrían las ecuaciones diferenciales:*

$$\dot{S}^*(t) = aS^*(t) + bW^*(t), \quad \dot{W}^*(t) = 0,$$

de lo que podríamos deducir, teniendo en cuenta la continuidad de $S^*(t)$, *que*

$$S^*(t) = \left(S_0 + \frac{bW_0}{a}\right)e^{at} - \frac{bW_0}{a}, \quad W^*(t) = W_0.$$

El valor objetivo quedaría entonces:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T (1 - v^*(t) - w^*(t))(aS^*(t) + bW^*(t))dt \\ &= \int_0^{t_A} 0dt + \int_{t_A}^T \left(\left(S_0 + \frac{bW_0}{a}\right)e^{at_A} - \frac{bW_0}{a} + bW_0\right)dt \\ &= (T - t_A)\left(\left(S_0 + \frac{bW_0}{a}\right)e^{at_A} - \frac{a-1}{a}bW_0\right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Si tenemos en cuenta que el instante t_A *depende de* T *y de* a, *podemos decir que*

$$J = J(a, b, T, S_0, W_0).$$

Caso 2: *existe* $t_B \in [0, T)$ *tal que* $p_2(t_B) = b(T - t_B) = 1$ *y* $p_1(t_B) < 1$.

Análogamente al caso anterior, tenemos ahora que nuestro control óptimo a la izquierda de t_B *sería* $(v^*, w^*) = (0, 1)$, *y así:*

$$H((S^*, W^*), (0, 1), (p_1, p_2), t) = (aS^* + bW^*)p_2,$$

de lo que seguiría:

$$\dot{p}_1(t) = -ap_2(t), \quad \dot{p}_2(t) = -bp_2(t).$$

Siguiendo un razonamiento idéntico al del caso anterior, obtenemos:

$$p_1(t) = a(T - t_B)e^{b(t_B - t)}, \quad p_2(t) = b(T - t_B)e^{b(t_B - t)}.$$

Seguimos razonando análogamente al caso anterior y tenemos que nuestra hipótesis implicaría que $b > a$, *de lo que seguiría que nuestro control óptimo se mantendría igual a la derecha de* t_B. *Así:*

$$\dot{S}^*(t) = 0, \quad \dot{W}^*(t) = aS^*(t) + bW^*(t),$$

y seguiría:

$$S^*(t) = S_0, \quad W^*(t) = \left(W_0 + \frac{aS_0}{b}\right)e^{bt} - \frac{aS_0}{b}.$$

Tendríamos entonces:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T (1 - v^*(t) - w^*(t))(aS^*(t) + bW^*(t))dt \\ &= \int_0^{t_B} 0dt + \int_{t_B}^T \left(\left(W_0 + \frac{aS_0}{b}\right)e^{bt_B} - \frac{aS_0}{b} + aS_0\right)dt \\ &= (T - t_B)\left(\left(W_0 + \frac{aS_0}{b}\right)e^{bt_B} - \frac{b-1}{b}aS_0\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Una vez más, notamos que t_B *depende únicamente de* T *y de* b *por lo que podemos escribir:*

$$J = J(a, b, T, S_0, W_0).$$

Caso 3: *existe un* $t_* \in [0, T)$, *donde* $p_1(t_*) = p_2(t_*) = 1$

Esto significaría que $a = b$, *de modo que podríamos pensar que nuestro control óptimo solamente debería verificar* $v^* + w^* = 1$. *Sin embargo esto no es así. Al tener* $a = b$, *obtendríamos el hamiltoniano:*

$$H((S^*, W^*), (v^*, w^*), (p_1, p_2), t) = a(S^* + W^*)(1 + v^*(p_1 - 1) + w^*(p_2 - 1)),$$

que definiría las ecuaciones diferenciales de las funciones de coestado p_1, p_2 de la siguiente manera:

$$\dot{p}_1 = -a(1 + v^*(p_1 - 1) + w^*(p_2 - 1)), \quad \dot{p}_2 = -a(1 + v^*(p_1 - 1) + w^*(p_2 - 1)),$$

que implicaría que ambas funciones de coestado son idénticas, por lo que $p_1(t) = p_2(t)$, y la expresión del hamiltoniano podríamos plantearla como:

$$H((S^*, W^*), (v^*, w^*), (p_1, p_1), t) = a(S^* + W^*)(1 + (v^* + w^*)(p_1 - 1)).$$

Para encontrar unos controles (v^*, w^*) que maximizasen a H tendríamos que ver de qué modo hacemos que $(S^* + W^*)$ sea lo mayor posible, teniendo en cuenta que las ecuaciones diferenciales de estos estados son:

$$\dot{S}^*(t) = av^*(t)(S^*(t) + W^*(t)), \quad \dot{W}^*(t) = aw^*(t)(S^*(t) + W^*(t)).$$

Aquí también observamos mucha similitud entre ambas ecuaciones diferenciales, por lo que para decidir qué variable podría tomar valores más altos, habría que mirar S_0 y W_0. Donde viésemos el valor más alto deberíamos concentrar toda la inversión hasta llegar al instante t_*, ya que las ecuaciones diferenciales nos dicen que ambos estados tienen un crecimiento exponencial, por lo que este valor inicial sería determinante a la hora de elegir por cuál de los dos apostar. Ahora, ya sabemos que el control óptimo sería:

$$(v, w)^* = \begin{cases} (1, 0), & \text{si, } S_0 > W_0, \\ (0, 1), & \text{si, } W_0 > S_0, \end{cases} \tag{2.35}$$

en cuyo caso obtendríamos:

$$(\dot{S}^*(t), \dot{W}^*(t)) = \begin{cases} (a(S^*(t) + W^*(t)), 0), & \text{si, } S_0 > W_0, \\ (0, a(S^*(t) + W^*(t))), & \text{si, } W_0 > S_0, \end{cases} \tag{2.36}$$

por lo que, los estados óptimos serían:

$$(S^*(t), W^*(t)) = \begin{cases} ((S_0 + W_0)\, e^{at} - W_0, W_0)\,, & \text{si, } S_0 > W_0, \\ \big(S_0, (W_0 + S_0)\, e^{bt} - S_0\big) & \text{si, } W_0 > S_0. \end{cases} \tag{2.37}$$

De este modo obtendríamos el valor para la integral J:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (1 - v^*(t) - w^*(t))(a(S^*(t) + W^*(t))dt \\
&= \int_0^{t_*} 0dt + \int_{t_*}^T a(S^*(t) + W^*(t))dt,
\end{aligned} \tag{2.38}$$

que en cualquier caso sería:

$$J(a, T, S_0, W_0) = \int_{t_*}^T a(S_0 + W_0)e^{at}dt = (S_0 + W_0)e^{a(T-t_*)}.$$

Aunque la conclusión pueda resultar bastante evidente —invertirlo al principio para no invertir nada al final— con este ejemplo vamos aproximándonos al objetivo de este trabajo, si bien con un modelo bastante peculiar y poco realista debido a la linealidad de las funciones de producción.

3

Preferencias

Hasta ahora, simplemente nos hemos dedicado a optimizar el rendimiento de un proceso determinista, aplicando herramientas concretas y sin atender a conceptos más abstractos como la utilidad que se puede obtener a través de los beneficios logrados. Salvo en el ejemplo (2), donde de forma implícita se pueden ver reflejadas determinadas preferencias sobre el valor práctico de las ganancias, a través de la imposición de condiciones para la función de utilidad U, no hemos hecho hincapié en este aspecto, que merece ser tratado con más detenimiento.

En este capítulo trataremos de averiguar cómo actuará un decisor racional, sean cuales sean sus preferencias, pudiendo ser estas distintas a únicamente maximizar un determinado beneficio. De este modo nace de forma más rigurosa el concepto de utilidad, que mide las ganancias en unidades *útiles*. Para ello será importante garantizar la consistencia y estabilidad del decisor a la hora de decantarse por una estrategia u otra.

3.1 Función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern

En primer lugar, definimos lo que es una relación de preferencia $\succeq$ sobre un conjunto no vacío de posibles escenarios Ω. De este modo, si un posible escenario a de Ω nos resulta al menos tan preferible como otro escenario b, decimos que $a \succeq b$.

Definición 1 *Un* orden de preferencia —o relación de orden— *en Ω es una relación binaria $\succeq$ que cumple las siguientes dos propiedades para todos los elementos $a, b, c \in \Omega$:*

1. $a \succeq b \vee b \succeq a$ (Totalidad).
2. $a \succeq b, b \succeq c \implies a \succeq c$ (Transitividad).

A raíz de estas propiedades podemos definir la siguiente relación de indiferencia $\sim$.

Definición 2 *Dados dos elementos $a, b \in \Omega$ tales que , $a \succeq b \wedge b \succeq a$ decimos que $a \sim b$.*

En muchas ocasiones un decisor racional debe identificar primero cuál es el conjunto de decisiones factibles, dadas las circunstancias de cada caso, para luego poder escoger la óptima. En adelante llamaremos S al subconjunto de Ω de decisiones factibles, y definiremos como estrategia óptima aquella decisión con la cual podamos aumentar la esperanza de alguna función de utilidad que hayamos definido previamente. Hay que tener en cuenta que expresar la relación de preferencia $\succeq$ no siempre es fácil, y puede llegar a ser muy complicado aplicar este concepto en la práctica, sobre todo ante conjuntos de escenarios posibles Ω complejos. Pasamos ahora a definir la representación numérica de un orden de preferencia mediante una función de utilidad.

Definición 3 *Dada una función de utilidad $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que esta representa numéricamente la relación de preferencia $\succeq$, si, y solo si:*

$$u(a) \geq u(b) \Leftrightarrow a \succeq b.$$

Notamos que la representación numérica u del orden de preferencia $\succeq$ no es única: basta con tomar una función f estrictamente creciente y obtenemos $\tilde{u}(a) := f(u(a))$, que también es una representación numérica de $\succeq$. Además, observamos que encontrar una decisión óptima se reduce a resolver el siguiente problema de maximización:

$$u(\omega) = \max_{s \in S} u(s).$$

Antes de pasar a la definición de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, conviene subrayar que es necesario aceptar el hecho de que las preferencias de cada decisor son atributos personales del mismo, que pueden variar entre distintos decisores.

Dado que en muchas ocasiones no tenemos como objetivo maximizar la esperanza del beneficio mediante la elección de estrategias, resulta interesante estudiar la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, que como veremos, es aquella que refleja la preferencia de alguien indiferente a la aversión o preferencia por el riesgo. Para ello vamos a considerar ciertos postulados que garantizan la consistencia de las preferencias cuando estemos ante casos que conllevan riesgos, para así evitar paradojas en las decisiones.

Postulado 1 *De entre dos loterías, un decisor racional prefiere aquella que posea la mayor probabilidad de ganar.*

Así, dado el conjunto de posibles escenarios $\Omega = \{\mathcal{L}, \mathcal{W}\}$, y una función de utilidad $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa la preferencia $\mathcal{L} \succeq \mathcal{W}$, u ha de verificar

$$a = u(\mathcal{L}) \leq u(\mathcal{W}) = b.$$

Llamaremos $lot(\Omega)$ al conjunto de loterías definidas sobre Ω. De este modo, teniendo una lotería $\mathbf{p} \in lot(\Omega)$, cuya probabilidad de ganar es p, tendrá la utilidad

$$\mathbb{E}u(\mathbf{p}) = pu(\mathcal{W}) + (1-p)u(\mathcal{L}) = a + p(b-a),$$

que aumenta proporcionalmente a p, siempre que $b-a > 0$, es decir, siempre que, además de tener $\mathcal{L} \succeq \mathcal{W}$, se cumpla que $u(\mathcal{L}) > u(\mathcal{W})$. Esto último garantiza que no se admite indiferencia entre los sucesos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{W}$.

Cuando tenemos más escenarios $\omega \in \Omega$ tales que $u(\mathcal{L}) < u(\omega) < u(\mathcal{W})$, la función de utilidad $\mathbb{E}u$ puede no representar las preferencias del decisor. De este modo la elección de una función de utilidad u apropiada puede convertirse en un problema difícil de resolver. Llamaremos loterías compuestas a aquellas que tengan al menos un escenario $\omega \in \Omega$ como el recientemente mencionado.

Postulado 2 *Cualquier escenario ω entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{W}$ con el orden de preferencia $\succeq$, es equivalente a alguna lotería $\boldsymbol{p} \in lot(\{\mathcal{L}, \mathcal{W}\})$.*

De este modo, para cada $\omega \in \Omega$ existe una lotería $\mathbf{q}$ con probabilidad de ganar q tal que $\omega \sim \mathbf{q}$. A partir de este postulado podemos definir una función de utilidad, que más adelante veremos que es de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $q = u(\mathcal{W})$ expresaría la indiferencia del decisor entre la garantía de obtener lo que resultaría del escenario ω o una lotería en la cual $\mathcal{W}$ y $\mathcal{L}$ aparecerán con probabilidades q y $1-q$, respectivamente.

Postulado 3 *Un jugador racional muestra indiferencia cuando en una lotería se reemplaza un escenario por otro equivalente, según su preferencia.*

Antes de pasar al cuarto y último postulado, supongamos que tenemos una lotería $\mathbf{L}$ compuesta por los escenarios $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega$. Apoyándonos en el segundo postulado, podemos observar que para cada $\omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$, podemos contemplar una lotería $\mathbf{q}_k \in lot(\{\mathcal{W}, \mathcal{L}\})$, donde $\mathbf{q}_k \sim \omega_k$. Gracias al tercer postulado, podemos sustituir cada uno de esos ω_k por sus equivalentes loterías $\mathbf{q}_k$, de modo que la probabilidad total de $\mathcal{W}$ vendría dada por

$$r = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n.$$

Postulado 4 *A un decisor racional solo le importa la probabilidad total que tiene de ganar con cada escenario de una lotería compuesta.*

Sigue que, la mencionada lotería **L** puede ser sustituida por una lotería equivalente **r**. Por último, observamos que, atendiendo al primer postulado, un decisor racional se decantará por aquella lotería definida análogamente a la lotería **L**, que maximice el valor de r. Así, el objetivo será maximizar

$$\begin{aligned} r &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n \\ &= p_1 u(\omega_1) + p_2 u(\omega_2) + \cdots + p_n u(\omega_n) \\ &= \mathbb{E}u(\mathbf{L}). \end{aligned}$$

Para concluir, podemos destacar que, mediante la combinación de estos postulados, estamos evitando cualquier tipo de inconsistencia en las preferencias de un decisor racional. Alguien que pueda ver reflejadas sus preferencias por medio de una función de utilidad $\mathbb{E}u : lot(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ como la desarrollada en el párrafo anterior, representa precisamente la indiferencia absoluta frente al riesgo, preocupándole solamente aumentar la esperanza de dicha función. Es así como llegamos a la siguiente definición.

Definición 4 *Decimos que, dada una representación numérica de un orden de preferencia $\succeq$, esta es de Von Neumann y Morgenstern si expresa indiferencia absoluta frente al riesgo.*

Estas funciones de utilidad, si bien son muy interesantes, son bastante concretas, ya que existen bastantes perfiles ante la presencia de riesgo. Habrá quien valore más la opción de apostar, aún con el riesgo a la pérdida que esto conlleva, y habrá quien, incluso cuando objetivamente los números estarían de su lado a la hora de hacer una apuesta, simplemente por su rechazo a ese tipo de incertidumbre, descartaría participar. Es por ello que las funciones de utilidad tienen en cuenta estos conceptos, y así, el grado de aversión al riesgo que tiene cada decisor, podrá reflejarse de varias maneras en tales funciones. Una forma de expresar este aspecto sería el de incluir un parámetro $\alpha \in [0, 1]$, donde $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ podrían implicar una aversión o preferencia absolutas por el riesgo respectivamente, y $\alpha = \frac{1}{2}$ indiferencia frente al mismo.

Esto podría no darse en situaciones reales, por ejemplo, si intentásemos analizar estrategias óptimas en casinos, ya que, según qué persona fuese objeto de nuestro estudio, esta podría llegar a sentirse bien o mal por el hecho de estar apostando dinero, independientemente de su aversión o falta de la misma por el riesgo.

3.2 Escalas de utilidad y paradoja de Allais

Recordamos que la condición que le imponemos a u, para que esta sea una función de utilidad que represente la relación de preferencia $\succeq$, es que

$$a \succeq b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b).$$

Además, sabemos que $\succeq$ admite más representaciones. De hecho, en caso de admitir una, también admite infinitas, y contrariamente a lo que sucede con las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern, cualquier función f estrictamente creciente induce una nueva función de utilidad definida como $\tilde{u} := u \circ f$.

El siguiente teorema nos da un modo de encontrar todas las funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern definidas sobre una determinada relación de preferencia $\succeq$.

Teorema 3 *Dadas dos funciones de utilidad de Von Neumann y Morgenstern alternativas $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ sobre una determinada relación de preferencia $\succeq$ definida sobre $lot(\Omega)$, existen $A, B \in \mathbb{R}, A > 0$, tales que*

$$u_2 = Au_1 + b.$$

Una importante consecuencia de este teorema es que podemos definir una unidad de utilidad como nosotros queramos. Así, dada una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern $u : \Omega \to \mathbb{R}$, bastaría con fijar primero $\omega_0 \in \Omega$, a quien le asignaremos el origen de nuestra nueva escala de utilidad, para más adelante escoger otro $\omega_1 \in \Omega$ tal que $\omega_0 \succeq \omega_1$, con lo que estaremos estableciendo la unidad de la nueva escala. Llegados a este punto, únicamente nos quedaría elegir una función de utilidad de Von Neumann y Morgenstern nueva $U : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que $U(\omega_0) = 0$ y $U(\omega_1) = 1$, y por el teorema anterior, debido a que tenemos que $U = Au + B$, solamente queda ajustar los valores de A y B para que el siguiente sistema lineal se cumpla:

$$0 = Au(\omega_0) + B;$$
$$1 = Au(\omega_1) + B.$$

Antes de concluir este último capítulo, veamos un ejemplo que resalta la diferencia entre consistencia de las preferencias y percepción de la realidad. Para ello, definiremos primero el orden de *preferencía fuerte* y a continuación analizaremos el mencionado ejemplo.

Definición 5 *Decimos que $\succeq$ induce una relación de preferencia fuerte $\succ$ si, para cualquier par de elementos ω_1, ω_2 del conjunto Ω se verifica*

$$\omega_0 \succ \omega_1 \Leftrightarrow \omega_1 \not\succeq \omega_0.$$

En tal caso, una función de utilidad $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que represente esta relación de preferencia fuerte, debe verificar, para cada $\omega_0, \omega_1 \in \Omega$:

$$\omega_0 \succ \omega_1 \Leftrightarrow u(\omega_0) > u(\omega_1).$$

J=

0\$	1\$	5\$
0	1	0

K=

0\$	1\$	5\$
0.01	0.89	0.10

L=

0\$	1\$	5\$
0.89	0.11	0

M=

0\$	1\$	5\$
0.9	1	0.1

Tabla 3.1. Loterías de la paradoja de Allais.

Ejemplo 5 (Paradoja de Allais) *Supongamos que tenemos cuatro loterías diferentes, definidas como se indica en la figura 3.1.*

Podemos deducir que en general, la mayoría de personas mostrarían la preferencia $\boldsymbol{J} \succ \boldsymbol{K}$*, debido a que* $\boldsymbol{J}$ *garantiza la ganancia de una unidad de beneficio, mientras que en la lotería* $\boldsymbol{K}$ *existe una probabilidad real de no ganar nada. Además, probablemente la gente tendría la preferencia* $\boldsymbol{M} \succ \boldsymbol{L}$*, sobre dos loterías en las cuales sería inevitable evitar el riesgo de no obtener nada.*

Sin embargo, alguien que simultáneamente tenga las preferencias $\boldsymbol{J} \succ \boldsymbol{K}$ *y* $\boldsymbol{M} \succ \boldsymbol{L}$ *estará ignorando los postulados de Von Neumann y Morgenstern, ya que de lo contrario sería posible definir una función de utilidad* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *como la que obtuvimos en la sección anterior, y a continuación veremos que no hay modo de hacerlo.*

En primer lugar recordamos la necesidad de fijar dos puntos en nuestra escala de utilidad, aunque estos son arbitrarios. Así, en este caso nos conviene asignar $u(0) = 0$*, y* $u(5) = 1$*. Cabe preguntarse ahora cuál será el valor* x *correspondiente a* $u(1)$*, observando que*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}u(J) &= u(0) \times 0.00 + u(1) \times 1.00 + u(5) \times 0.0 = x \\
\mathbb{E}u(K) &= u(0) \times 0.01 + u(1) \times 0.89 + u(5) \times 0.1 = 0.89x + 0.1 \\
\mathbb{E}u(L) &= u(0) \times 0.89 + u(1) \times 0.11 + u(5) \times 0.0 = 0.11x \\
\mathbb{E}u(M) &= u(0) \times 0.90 + u(1) \times 0.00 + u(5) \times 0.1 = 0.1.
\end{aligned}$$

Recordamos que $\boldsymbol{J} \succ \boldsymbol{K}$*, de modo que* $x > 0.89x + 0.10$*, y así,* $x > \frac{10}{11}$*. Como también teníamos* $\boldsymbol{M} \succ \boldsymbol{L}$*, es necesario imponer la condición* $0.11x < 0.10$*, y de este modo seguiría que* $x < \frac{10}{11}$*, que sería una contradicción.*

Conclusiones

En este trabajo hemos empezado por estudiar la forma de maximizar una función real cuando tenemos control sobre una variable que influye en ella. A partir de ahí hemos ido desarrollando el modelo, incluyendo variables de estado que pueden afectar a la función objetivo que queríamos maximizar, y cuya evolución depende de los controles que hayamos ido tomando a lo largo del tiempo.

Más adelante vimos cómo se obtienen los elementos que conforman la función hamiltoniana y cómo emplear la misma mediante el principio del máximo. También generalizamos estas nociones para poder aplicar estos resultados en el caso multidimensional.

Por último, tras haber visto con unos cuantos ejemplos el modo de aplicar estas herramientas, modelizamos una situación en la que se debía encontrar un control óptimo para un sistema económico que contase con dos estados y dos variables de decisión.

Atendiendo a la teoría desarrollada por Von Neumann y Morgenstern, no podemos concluir si la aversión al riesgo es mejor o peor que la ausencia de la misma, debido a que decisores con diferentes preferencias pueden llegar a obtener idéntica utilidad ante los mismos escenarios.

Resulta conveniente señalar que, una vez hemos fijado nuestros gustos y hemos encontrado un modelo que refleje con realismo la situación que estamos tratando, tenemos que confiar en los resultados que arroje la función de utilidad, y no dejarnos engañar por nuestra percepción de la realidad.

Hemos tratado ambos enfoques al problema de encontrar una estrategia óptima de gestión de un modo algo independiente, aunque también es cierto que esto se debe a que tanto la teoría de control, como la teoría de juegos son campos ya de por sí muy amplios.

A pesar de ello, se podría dejar como objetivo pendiente tratar de conciliar las dos secciones para que podamos llegar a desarrollar un modelo que necesite apoyarse en ambas materias. De entre todos los diversos ámbitos en los cuales podríamos buscar algún problema que mereciese la pena resolver, uno de los más atractivos podría resultar el financiero.

Se podría, por ejemplo, intentar desarrollar una estrategia de gestión óptima para una empresa dedicada a los seguros. Esto se debe a que en principio podría parecernos una tarea demasiado compleja, al poder haber demasiadas variables aleatorias de por medio. Sin embargo, muchas veces veremos cómo estas se reparten de manera independiente y con idénticas distribuciones, y eso, en combinación con la ley de los grandes números, puede llegar a permitirnos que nuestros modelos sean deterministas y no por ello pierdan realismo.

Los juegos de mesa también podrían ser objeto de estudio en el futuro, sobre todo mediante la aplicación de lo desarrollado durante el último capítulo, que podría ser una sólida base para este propósito. Así, la obtención de estrategias ganadoras se basaría en el cálculo probabilístico aplicado a funciones de utilidad.

References

[1] Binmore, K. (2007) *Playing for Real.* Oxford University Press
[2] Föllmer, H., & Schied, A. (2016) *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG
[3] Seierstad, A., & Sydsæter, K. (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North Holland Publishing Company

Estudio de estrategias óptimas en financiación

Jorge Juli Gil
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100889949@ull.edu.es

Abstract

In this work we will firstly deal with optimal decision making over deterministic models, so we can later go on to probabilistic ones. In the first case, having a fixed time horizon, our first goal will be to find optimal controls over certain variables which can be influenced by us at any moment in time, in order to maximize the aggregate utility through time. In order to reach those goals, we will proceed by analizing the theoretical side of each case, so that later we will be able to apply those results to real world problems. Thus, we can highlight the Maximum Principle *and the* numerical representation *of a* preference relation *as the main elements of this work. Thereby, the first part fits in the branch of optimal control theory, and the second one in the one of decision.*

1. Introduction

A first approach to the way of modelling some optimization model would be, given a real valued function f_0:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f_0(u) \\ &\text{with the restriction:} && u \in I = [u_0, u_1]. \end{aligned}$$

Later on, we will add new elements to it, such as state variables $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ which will be influenced by our controls $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$ and thus, we will be able to express this behaviour as

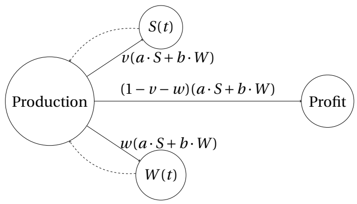
$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t), t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t), t). \end{aligned}$$

Our principal theoretical model to solve will look as follows:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && J = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\,dt \\ &\text{under the constraints:} && \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ & && x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ & && u(t) \in U \subseteq \mathbb{R}^r, \\ &\text{and the following terminal conditions:} && \\ & && x_i(T) = x^T, \quad i = 1, \ldots, l \\ & && x_i(T) \geq x_i^T, \quad i = l+1, \ldots, m \\ & && x_i(T) \text{ libre}, \quad i = m+1, \ldots n. \end{aligned}$$

2. Describing the problem

It is important for an organization with limited resources to know how to manage them, which percentage it wants to invert, so that in the future the production increases, or how much interest should present at a certain moment. The level of difficulty in these matters depends very much on each particular case, and in this report we have tried to address some of them from a theoretical perspective. Here, how modelled the situation where one has to decide how to invest.



$$\begin{aligned} &\text{maximize:} && J = \int_0^T (1 - v(t) - w(t))(aS(t) + bW(t))\,dt \\ &\text{with the constraints:} && \dot{S}(t) = v(t)(aS(t) + bW(t)), \\ & && S(0) = S_0, \quad S(T) \text{ free}, \\ & && \dot{W}(t) = w(t)(aS(t) + bW(t)), \\ & && W(0) = W_0, \quad W(T) \text{ free}, \\ & && v(t) + w(t), v(t), w(t) \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{1}$$

We could underline the importance of *Maximum Principle*, which needs the help of a *Hamiltonian function* which we will define inductively by developing some optimization problems, which is defined as $H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + p \cdot f(x, u, t)$

3. Preferences

In this chapter we will discuss more abstract matters like personal preferences for risk. Thus, there will be people who will try to avoid risk at any cost, while on the other hand we will find risk seeking attitudes in other decision-makers. This whole concept will be based on the *Von Neumann* and *Morgenstern utility representation function.*

4. Conclusions

In the first place, we conclude that, once one has solved the problem of modeling deterministic processes, it is not very difficult to find ways of reaching optimal controls. On the other hand, if we are dealing with probabilistic ones, it can get out of hand pretty quickly, so that one has to be very clear about his premises and then consequently stick to his model, without caring about his personal feelings towards certain decisions.
Finally, we can regard this work as the theoretical corner stone of further investigations applied to real world problems, such as finding winning strategies on board games, or even optimal accounting.

References

[1] BINMORE, K. (2007) *Playing for Real.* Oxford University Press

[2] FÖLLMER, H., & SCHIED, A. (2016) *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.* Walter de Gruyter GmbH & Co KG

[3] SEIERSTAD, A., & SYDSÆTER, K. (1987) *Optimal Control Theory with Economic Applications.* North Holland Publishing Company Later on, we have moved to more abstract models which might not be necessarily deterministic.