



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Elena Alcover Jorge

Semigrupos y aplicaciones

Semigroups and applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2019

DIRIGIDO POR
Evelia Rosa García Barroso

Evelia Rosa García Barroso
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A Evelia, por saber compaginar exigencia con cercanía. Por aconsejarme y guiarme.

A mi familia, por creer en mí. En especial, a mis padres, hermana y abuelos por ser el perfecto ejemplo de constancia, trabajo y humildad.

A mis amigas. “Las de siempre”. Por ser el pilar que nunca falla. Por ser y estar.

A todas las amistades que me ha dado la carrera. Dentro y fuera de Tenerife. Porque se han convertido en mi sonrisa del día a día durante estos cuatro años.

A aquellos profesores que han colaborado en la realización de este trabajo. En especial, a Antonio Sedeño, J. Ignacio García García, Daniel Marín Aragón y Alberto Vigneron Tenorio.

En definitiva, gracias a todas aquellas personas que durante estos cuatro años me han convertido en mejor matemática y persona.

Elena Alcover Jorge
La Laguna, 11 de junio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

Este trabajo abordará la aplicación de los semigrupos para la resolución de dos problemas. El primero de ellos, lo llamaremos “Problema de la boda” y nos dirá el número mínimo de invitados así como el número de mesas de cada tipo que debe tener una boda para garantizar beneficio a la empresa organizadora. El segundo será un problema clásico de transporte. Para resolver ambos utilizaremos herramientas propias de los semigrupos, de las bases de Gröbner y resolución de inecuaciones diofánticas. Una vez finalizado nuestro estudio algebraico, hemos comparado el mismo con la resolución vía la programación lineal entera.

Palabras clave: *Semigrupos – Bases de Gröbner – Inecuaciones diofánticas.*

Abstract

In this project we will apply semigroups in order to solve two problems. The first one is called “the problem of the wedding” and our goal will be to find the number of guests as well as the number of each type of tables are needed to achieve the maximum profit of the organizing company. The second one is a classic transportation problem. To solve them, we will use semigroups, Gröbner basis and the resolution of diophantine inequalities. Once we have the result, we will verify the algebraic method with the solution applying integer lineal programming.

Keywords: *Semigroups – Gröbner basis – Diophantine inequalities*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Primer Capítulo: Primeras definiciones	1
1.1. Semigrupos y monoides	1
1.2. Soluciones de una ecuación diofántica homogénea	6
2. Segundo Capítulo: Problema de la Boda	11
2.1. Introducción	11
2.2. Primeros resultados en el caso $(\alpha, \beta) = (0, 0)$	13
2.3. El caso $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$	15
2.4. Semigrupos Numéricos	21
2.5. Implementación en Gusek	23
3. Tercer Capítulo: Bases de Gröbner	25
3.1. Introducción a las bases de Gröbner	25
3.2. Órdenes monomiales	26
3.3. Teorema de la División	26
3.4. Bases de Gröbner	29
4. Cuarto Capítulo: Problema de Transporte	31
4.1. Introducción	31
4.2. Planteamiento del problema	33
4.3. Resolución del problema	38
4.4. Implementación en Gusek	39

A. Apéndice	41
A.1. Códigos del Problema de la Boda	41
A.1.1. Código Gusek para maximizar el beneficio	41
A.1.2. Código Gusek para calcular el número de mesas	42
A.2. Códigos del Problema de Transporte	42
A.2.1. Código de Python para calcular una base de Gröbner	42
A.2.2. Código de Python para calcular el ideal asociado a un semigrupo	42
A.2.3. Código Gusek para el Problema de Transporte	44
Bibliografía	45
Poster	49

Introducción

En este trabajo hablaremos sobre *Semigrupos*. Los semigrupos son estructuras algebraicas cuya simplicidad ha permitido formular diferentes problemas en distintos ámbitos que son fáciles de entender pero cuya solución está muy lejos de ser trivial. Este hecho atrajo a muchos matemáticos como Fröbenius o Sylvester a finales del siglo XIX. Históricamente los semigrupos han estado relacionados con el estudio de *ecuaciones diofánticas*.

Retomamos esta relación en esta memoria, pretendiendo dar una visión aplicada de las matemáticas y en concreto, para el estudio dos problemas: *el problema de la boda* y *el problema de transporte*.

Ambos problemas se resolverán a través de la aplicación de los semigrupos en el campo de la resolución de ecuaciones diofánticas. El primero de los problemas tratará con semigrupos de \mathbb{N} y el segundo, con semigrupos de $\mathbb{N}^{n \times m}$.

Hemos estructurado la memoria en cuatro capítulos. Presentamos un primer capítulo con definiciones y conceptos básicos sobre semigrupos, monoides y ecuaciones diofánticas y finalizamos el mismo con un algoritmo para calcular las soluciones de una ecuación diofántica homogénea.

En el capítulo 2 planteamos el problema de cómo distribuir a los invitados de una boda de manera óptima. Obtendremos un algoritmo algebraico para su resolución.

El segundo de los problemas será un problema clásico de transporte en el que tendremos una serie de clientes y una lista de almacenes y debemos distribuir la mercancía pertinente de forma óptima. Para llevarlo a cabo nos hemos basado en la combinación de *Bases de Gröbner* y semigrupos en $\mathbb{N}^{n \times m}$. Las ba-

ses de Gröbner solo las usamos como herramienta y presentamos su definición y las propiedades necesarias en el capítulo 3.

En el capítulo 4 hacemos el estudio teórico del problema de transporte. En cuanto a la resolución numérica, hemos necesitado de un algoritmo implementado en el lenguaje de programación *Python*.

Dado que los dos problemas que estudiamos en esta memoria son objeto de estudio con programación lineal entera se incluirá en cada problema una breve comparación del método algebraico con los códigos que hemos elaborado haciendo uso de *Gusek* usado en programación lineal. El lenguaje elegido ha sido *GMPL*. Intentamos por tanto combinar dos ramas diferentes de las Matemáticas y obtener una nueva visión de cada uno de los problemas.

Primer Capítulo: Primeras definiciones

Comenzaremos definiendo algunos conceptos básicos acerca de los semigrupos numéricos, los monoides y las ecuaciones diofánticas que necesitaremos para el desarrollo del trabajo.

1.1. Semigrupos y monoides

Definición 1.1 (Semigrupo). *Un semigrupo es un conjunto no vacío G que cuenta con una operación binaria $*$ que satisface las siguientes propiedades:*

- *Clausura: Si $a \in G$ y $b \in G$, luego $a * b \in G$.*
- *Asociatividad: Para todo $a, b, c \in G$, se sigue que $a * (b * c) = (a * b) * c$.*

Definición 1.2 (Monoide). *Un semigrupo G es un monoide $(G, *)$ si tiene elemento neutro e , esto es, $e * a = a * e = a$ para todo $a \in G$.*

Definición 1.3 (Submonoide). *Un subconjunto N de un monoide $(G, *)$ (con neutro e) es un submonoide de G si es un subsemigrupo de G y $e \in N$.*

Consideramos monoides de \mathbb{N}^p , $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donde la operación será la suma y el neutro el 0. En particular, para $p = 1$ tenemos la siguiente definición:

Definición 1.4 (Semigrupo Numérico). *Un semigrupo numérico es un monoide $(S, +)$ de números enteros no negativos cuyo complementario en \mathbb{N} es finito.*

Sean $a = (a_1, \dots, a_p), b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto:

$$S(a, b, \alpha, \beta) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} a_1x_1 + \dots + a_px_p + \alpha \leq n \leq b_1x_1 + \dots + b_px_p - \beta \\ \text{para algún } (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \end{array} \right\}. \quad (1.1)$$

Lema 1.5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m, n \in S(a, b, \alpha, \beta)$, entonces $m+n \in S(a, b, \alpha, \beta)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que S es cerrado para la suma. Si m y $n \in S(a, b, \alpha, \beta)$ esto quiere decir que existen $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{N}^p$ tales que:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \dots + a_px_p + \alpha &\leq m \leq b_1x_1 + \dots + b_px_p - \beta, \\ a_1x_1 + \dots + a_px_p + \alpha &\leq n \leq b_1x_1 + \dots + b_px_p - \beta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Sumamos ambas inecuaciones, sacamos factor común y obtenemos:

$$a_1(x_1 + y_1) + \dots + a_p(x_p + y_p) + 2\alpha \leq m + n \leq b_1(x_1 + y_1) + \dots + b_p(x_p + y_p) - 2\beta. \quad (1.3)$$

Por tanto, $m + n \in S(a, b, \alpha, \beta)$, pues $(x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \in \mathbb{N}^p$. \square

Proposición 1.6. El conjunto $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$. Para ello, verificaremos la Definición 1.3. De la definición de $S(a, b, \alpha, \beta)$ recogida en (1.1) concluimos que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ está contenido en \mathbb{N} . A continuación demostraremos que el conjunto es un semigrupo. Sabemos, por el Lema 1.5, que $S(a, b, \alpha, \beta)$ es cerrado para la suma. Además, $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ verifica la propiedad asociativa y tiene al 0 como neutro. \square

Lema 1.7. Sean $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y X un conjunto no vacío de \mathbb{N}^k . Entonces, el conjunto

$$\langle X \rangle = \{ \lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, \dots, x_n \in X, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \} \quad (1.4)$$

es un submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que $\langle X \rangle$ es un submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$. Para ello, verificaremos la Definición 1.3. De la definición de $\langle X \rangle$ recogida en (1.4) concluimos que $\langle X \rangle$ está contenido en \mathbb{N}^k . A continuación demostraremos que el conjunto es un semigrupo. Sabemos que $\langle X \rangle$ es cerrado para la suma, verifica la propiedad asociativa y tiene al 0 como neutro. \square

Definición 1.8 (Submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$ generado por X). Sean $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y X un conjunto no vacío de \mathbb{N}^k . Denotamos $\langle X \rangle$ el submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$ generado por X y definido en (1.4).

Definición 1.9 (Submonoide finitamente generado). Un submonoide M de $(\mathbb{N}^k, +)$ está finitamente generado si existe un conjunto finito $X \subset \mathbb{N}^k$ tal que $M = \langle X \rangle$. En tal caso, al conjunto X lo denominamos sistema de generadores de X .

Definición 1.10 (Sistema Minimal de Generadores). Sean M un submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$ y X un sistema de generadores de M . Decimos que X es un sistema minimal de generadores de M si ningún subconjunto propio de X genera M .

Denotamos $S^* := S \setminus \{0\}$.

Lema 1.11. Sea S un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$. Entonces $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores de S . Además, todo sistema de generadores de S contiene a $S^* \setminus (S^* + S^*)$.

Demostración. Sea s un elemento de S^* . Si $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, entonces existen $x, y \in S^*$ tales que $s = x + y$. Si $x, y \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ hemos terminado. En caso contrario, repetimos el procedimiento para x e y y después de un número finito de pasos ($x, y < s$) encontramos $s_1, \dots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tales que $s = s_1 + \dots + s_n$. Esto prueba que dado $s \in S^*$ siempre podremos expresar dicho elemento como suma finita de elementos de $S^* \setminus (S^* + S^*)$, y por tanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema de generadores de S . Nos falta demostrar que todo sistema de generadores de S contiene a $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Sea A un sistema de generadores de S . Tomamos $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Como $x \notin S^* + S^*$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq i$. Deducimos que $x = a_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Corolario 1.12. Si S es un submonoide de \mathbb{N} , entonces $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es un sistema minimal de generadores.

Definición 1.13 (Conjunto de Apéry). Sean S un semigrupo numérico y n uno de sus elementos distinto del cero. Se define el conjunto de Apéry de S con respecto a n como:

$$\text{Ap}(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}. \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.14. Sea S un semigrupo numérico definido de la siguiente manera: $S = \{0, 19, 22, \rightarrow\}$ (donde el símbolo \rightarrow denota que todo elemento mayor que 22 pertenece a S). Calcularemos el conjunto de Apéry de S con respecto a 19 y 22.

$$\begin{aligned} \text{Ap}(S, 19) &= \{s \in S : s - 19 \notin S\} = \{0, 22, \dots, 37, 39, 40\}. \\ \text{Ap}(S, 22) &= \{s \in S : s - 22 \notin S\} = \{0, 19, 23, \dots, 40, 42, 43\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Lema 1.15. Sean S un semigrupo numérico y n un elemento de S distinto de cero. Entonces, $\text{Ap}(S, n) = \{0 = \omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\}$, donde $w(i)$ es el elemento más pequeño de S congruente con i módulo n , para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Demostración. Como S es un semigrupo numérico sabemos que existe $c \in S$ tal que para todo $n \geq c, n \in S$. Sea $\alpha := \min\{s \in S : s \geq c : s \equiv 0 \pmod n\}$. Entonces $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + n - 1 \in S$ y $\alpha + i \equiv i \pmod n$ con $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Por tanto, para todo $i \in \{0, \dots, n - 1\}$, definimos $S(i) := \{s \in S : s \equiv i \pmod n\}$ que es un conjunto distinto de vacío y tiene infinitos elementos. Sea $\omega(0) = 0$ y $\omega(i) := \min\{s \in S(i) \setminus \{0\}\}$ para $1 \leq i \leq n - 1$. Tenemos que $\omega(i) \in \text{Ap}(S, n)$ ya que en caso contrario, $\omega(i) - n \in S$ y obtendríamos $\omega(i) - n \equiv \omega(i) \pmod n$. Esto es una contradicción ya que $0 < \omega(i) - n < \omega(i)$ y habríamos encontrado un elemento mayor que el cero, menor que $\omega(i)$ y congruente con $i \pmod n$. Concluimos entonces que $\{0 = \omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n - 1)\} \subseteq \text{Ap}(S, n)$ para algún $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Sea $s \in \text{Ap}(S, n)$, $s \equiv i \pmod n$. Supongamos que $s \neq \omega(i)$ y lleguemos a una contradicción. Si $s \neq \omega(i)$, entonces $s > \omega(i)$. Aplicando la división euclídea, reescribimos $s = qn + i$. Además, $\omega(i) = kn + i \in S$ con $k, q, n \in \mathbb{N}$, y $q > k$. Como $s \in \text{Ap}(S, n)$ sabemos que $s - n = (q - 1)n + i \notin S$; pero tenemos que $s - n = (kn + i) + (q - k)n - n = (kn + i) + (q - k - 1)n$, donde ambos sumatorios pertenecen a S , y por tanto, la suma pertenece y llegamos a una contradicción. \square

Lema 1.16. Sean S un semigrupo numérico y $n \in S^*$. Entonces, para todo $s \in S$, existe un único $(k, w) \in \mathbb{N} \times \text{Ap}(S, n)$ tal que:

$$s = kn + w. \quad (1.7)$$

Demostración. Atendiendo al Lema 1.15 sabemos que todo elemento $s \in S$ es congruente módulo n con algún $\omega(i), i \in \{0, \dots, n - 1\}$, esto es, $s \equiv \omega(i) \pmod n, i \in \{1, \dots, n - 1\}$. Por tanto, $s = kn + \omega$ siendo $k \in \mathbb{N}$ y ω un elemento del $\text{Ap}(S, n)$. \square

Proposición 1.17. Todo semigrupo numérico S admite un único sistema minimal de generadores. Además, ese sistema es finito.

Demostración. Sabemos por el Corolario 1.12 que un sistema minimal de generadores de S es $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Tenemos que demostrar que dicho sistema es finito y único. El Lema 1.16 nos dice que para cualquier $n \in S^*$, y, para todo $s \in S$ existe un único $(k, w) \in \mathbb{N} \times \text{Ap}(S, n)$ tal que $s = kn + w$. Por tanto, reescribimos: $S = \langle \text{Ap}(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Como $\text{Ap}(S, n) \cup \{n\}$ es finito, cualquier subconjunto también es finito y en particular, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es finito. Para la unicidad, suponemos que existe otro sistema minimal de generadores y llegamos a una contradicción. Sea S' un sistema minimal de generadores de S , por el Lema 1.11 sabemos que $S' \subsetneq S^* \setminus (S^* + S^*)$. Esto es absurdo ya que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ es minimal. \square

Lema 1.18. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{N} . Entonces, $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico si y solo si $\text{mcd}(A) = 1$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\langle X \rangle$ es un semigrupo numérico. Tenemos que demostrar que $\text{mcd}(A) = 1$. Sean $d = \text{mcd}(A)$ y $s \in \langle A \rangle$, se sigue que d divide a s . Si $\langle A \rangle$ es un semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito, por tanto, existe un entero positivo x tal que d divide a x y d divide a $x+1$. Esto fuerza a que d sea 1 pues dos números naturales consecutivos son coprimos. Para demostrar el recíproco, es suficiente probar que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ es finito. Como $1 = \text{mcd}(A)$, aplicando la identidad de Bézout, existen enteros z_1, \dots, z_n y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = 1$. Moviendo los términos negativos al miembro de la derecha, encontramos $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tales que $z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$. Por tanto, existe $s \in \langle A \rangle$ tal que $s+1$ también pertenece a $\langle A \rangle$. Vamos a probar que si $n \geq (s-1)s + (s-1)$, entonces $n \in \langle A \rangle$. Sean q y r enteros tales que $n = qs + r$ con $0 \leq r < s$. Tenemos que $q \geq s-1 \geq r$. Concluimos que $n = (rs + r) + (q-r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$. \square

Proposición 1.19. *Todo submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ admite un único sistema minimal de generadores. Además, ese sistema es finito.*

Demostración. Tenemos que demostrar que todo submonoide M de $(\mathbb{N}, +)$ admite un único sistema minimal de generadores que es finito.

Definimos $d := \text{mcd}(M)$ y el conjunto T tal que:

$$T = \left\{ \frac{x}{d} : x \in M \right\}. \quad (1.8)$$

Es claro que $T \subseteq \mathbb{N}$ debido a que $x \in M \subseteq \mathbb{N}$ y sabemos que d divide a x . Como los elementos de T son elementos de \mathbb{N} entonces, se verifica la clausura y la asociatividad. Además, el 0 es elemento neutro de T . Concluimos entonces que T es un submonoide de \mathbb{N} , y, $\text{mcd}(T) = 1$. Aplicando el Lema 1.18 tenemos que $\langle T \rangle$ es un semigrupo numérico, como $\langle T \rangle = T$, entonces T es semigrupo numérico. Asimismo, en la Proposición 1.17 se demuestra que cada semigrupo numérico admite un sistema de generadores único y finito. Por tanto, T admite un sistema minimal de generadores único y finito que denotaremos como A .

Concluimos que $W = \{da : a \in A\}$ es el sistema minimal de generadores de M . Por tanto, hemos demostrado que M admite un sistema minimal único y finito de generadores W , propiedades que hereda de A . \square

Definición 1.20 (D -monoide). *Sean $D, M \subseteq \mathbb{N}$. Decimos que M es un D -monoide si M es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ que satisface $M \setminus \{0\} + D \subseteq M$.*

Proposición 1.21. *Sea M un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ y sea $A = \{a_1, \dots, a_p\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un sistema de generadores de M . Entonces, M es un D -monoide si y sólo si $A + D \subseteq M$.*

Demostración. Suponemos que M es un D -monoide y $M = \langle a_1, \dots, a_p \rangle$. Aplicando la Definición 1.20 sabemos que: $(M \setminus \{0\}) + D \subseteq M$. Además, $A =$

$\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq M \setminus \{0\}$, por tanto, $A + D \subseteq M$. Por otro lado, si $A + D \subseteq M$ tenemos que demostrar que M es un D -monoide, es decir que, $(M \setminus \{0\}) + D \subseteq M$. Tomamos $z \in (M \setminus \{0\}) + D \subseteq M$, entonces $z = m + d$, con $m \in M \setminus \{0\}$ y $d \in D$. Como A es un sistema de generadores de M , entonces existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{N}$ tales que $m = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$. Aplicaremos inducción sobre $\lambda_1 + \dots + \lambda_p$. Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$, existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, p\}$. Por tanto, $z = m + d = a_i + d \in A + D$ y aplicando hipótesis $z \in M$. Vamos a demostrarlo para $\lambda_1 + \dots + \lambda_p > 1$ suponiéndolo cierto para el caso anterior por hipótesis de inducción. Existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\lambda_i \neq 0$. Por hipótesis de inducción $(m - a_i) + d \in M$, por tanto, $z = (m - a_i) + d + a_i \in M$. \square

Algoritmo 1. Construiremos un algoritmo al que le facilitaremos dos conjuntos finitos C y D de enteros positivos y nos dará como resultado el sistema minimal de generadores del D -monoide más pequeño que contiene a C . Sea M un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$, denotaremos por $\text{msg}(M)$ al sistema minimal de generadores de M .

1. $X = \text{msg}(\langle C \rangle)$.
2. $Y = X \cup (X + D)$.
3. Si $\text{msg}(\langle Y \rangle) = X$, devuelve X .
4. $X = \text{msg}(\langle Y \rangle)$ y vuelve al segundo paso.

1.2. Soluciones de una ecuación diofántica homogénea

En esta sección estudiaremos el conjunto de soluciones de una ecuación diofántica homogénea que será necesario para el Capítulo 2.

Definición 1.22 (Ecuaciones (inecuaciones) Diofánticas). *Se llama ecuación (inecuación) diofántica a toda ecuación (inecuación) algebraica, de dos o más incógnitas, con coeficientes enteros, cuyas soluciones tienen coordenadas en el conjunto de los números enteros.*

En el siguiente capítulo estudiaremos el *problema de la boda*. La solución al mismo conlleva la resolución de un sistema de ecuaciones e inecuaciones diofánticas. En particular, será necesario conocer las soluciones de una ecuación diofántica homogénea, que es lo que estudiaremos en esta sección.

Sean $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$ y

$$S = \{s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p : a_1 s_1 + \dots + a_p s_p = 0\}. \quad (1.9)$$

Obsérvese que $(0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^p$ es un elemento de S y además si $s, s' \in S$ entonces $s + s' \in S$. Por tanto S es un semigrupo. Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que S es un semigrupo finitamente generado.

Definición 1.23 (Vértice de S). Sea S como en (1.9) y $s \in S \setminus \{0\}$. Decimos que s es un vértice de S si de tener $\gamma, \delta \in S$ tales que $s = \gamma + \delta$ entonces $s = \gamma$ o $s = \delta$.

Denotemos por $V(S)$ al conjunto de vértices de S .

Lema 1.24. El conjunto $V(S)$ genera a S .

Demostración. Es claro de la Definición 1.23. □

Definimos en \mathbb{N}^p la siguiente relación de orden parcial: $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^p$, $\gamma \leq \delta$ si y solo si $\delta - \gamma \in \mathbb{N}^p$.

Lema 1.25. $V(S)$ es el conjunto de elementos no nulos de S que son minimales para la relación \leq .

Demostración. Sea $s \in V(S)$ y supongamos que existe $\delta \in S$ tal que $\delta < s$. Entonces $s - \delta \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$ y existe $\delta' \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\} : s = \delta + \delta'$, lo que es un absurdo pues es un vértice. Recíprocamente, supongamos que $s \in S$ es elemento minimal para la relación \leq y que no sea vértice. Entonces existen $\gamma, \delta \in S \setminus \{0\} : s = \gamma + \delta$ y tendríamos $\gamma, \delta < s$, lo que de nuevo es un absurdo pues s es minimal. □

Mostraremos a continuación que si $H \subseteq \mathbb{N}^p$, su conjunto de minimales para la relación \leq , que denotaremos $M(H)$, es un conjunto finito y aplicando dicho resultado a S concluiremos que S es un semigrupo finitamente generado.

Sean $H \subseteq \mathbb{N}^p$, $1 \leq i \leq p$ y $\alpha \in \mathbb{N}$. Denotamos

$$H(i, \alpha) = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \in H : \gamma_i = \alpha\}. \tag{1.10}$$

Si $H \neq \{0\}$ definimos $V(H) := \{\gamma \in H \setminus \{0\} : \gamma \text{ es minimal para la relación } \leq\}$. Si $H = \{0\}$ definimos $V(H) := \{0\}$.

Lema 1.26. Sean $H \subseteq \mathbb{N}^p$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in H \setminus \{0\}$ y

$$F := \{s\} \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{\alpha=0}^{s_i-1} V(H(i, \alpha)). \tag{1.11}$$

Entonces $V(H) = V(F)$.

Demostración. Obsérvese que $F \subseteq H$. Por tanto para demostrar el lema es suficiente demostrar que para todo $\delta \in H$ existe $\gamma \in F$ tal que $\gamma \leq \delta$. Sea $\delta \in H$. Si $s \leq \delta$ tomando $\gamma = s$ hemos acabado. Supongamos $s = (s_1, \dots, s_p) > \delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$. Entonces existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que $s_i > \delta_i$. Por tanto $\delta \in H(i, \delta_i)$ y existe $\gamma \in V(H(i, \delta_i))$ con $\gamma \leq \delta$. □

Ejemplo 1.27. Calculemos el conjunto de minimales de

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + 2y - z = 0\}. \quad (1.12)$$

Fijamos $s = (1, 0, 1) \in H \setminus \{(0, 0, 0)\}$, entonces el conjunto F definido en (1.11) es:

$$F = \{(1, 0, 1)\} \bigcup_{i=1}^3 \bigcup_{\alpha=0}^{s_i-1} V(H(i, \alpha)).$$

Para $i = 1$ se tiene $\bigcup_{\alpha=0}^0 V(H(1, \alpha)) = V(H(1, 0)) = \{(0, 1, 2)\}$ donde $H(1, 0) = \{(x, y, z) \in H : x = 0\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{N}^3 : 2y = z\}$.

Para $i = 2$ tenemos $\bigcup_{\alpha=0}^{-1} V(H(1, \alpha)) = \emptyset$.

Para $i = 3$ se tiene $\bigcup_{\alpha=0}^0 V(H(3, \alpha)) = V(H(3, 0)) = \{(0, 0, 0)\}$ ya que $H(3, 0) = \{(x, y, z) \in H : z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x = -2y\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Aplicando Lema 1.26, $V(H) = V(F) = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$.

Sea la proyección

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{N}^p &\longrightarrow \mathbb{N}^{p-1} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p). \end{aligned} \quad (1.13)$$

con $1 \leq i \leq p$.

Podemos identificar $H(i, \alpha)$ con $\pi_i(H(i, \alpha)) \subseteq \mathbb{N}^{p-1}$ y aplicar el Lema 1.26 a $\pi_i(H(i, \alpha))$ para calcular $V(H(i, \alpha))$. Por tanto, aplicando recurrencia, para determinar el conjunto de minimales de H basta responder, para $H' := H(i_1, \alpha_1)(i_2, \alpha_2) \dots (i_r, \alpha_r)$, $1 \leq i_j \leq p$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq r$, las siguientes preguntas:

1. Determinar si H' es el conjunto vacío, y en caso contrario encontrar $s' \in H'$.
2. Obtener $V(H')$ para $H' \subseteq \mathbb{N}$.

Corolario 1.28. (*Lema de Dickson*) *El conjunto $V(H)$ es finito.*

Demostración. Si $H' \subseteq \mathbb{N}$, como \mathbb{N} está bien ordenado entonces $V(H') = \emptyset$ o $V(H')$ tiene un único elemento. Aplicando recursivamente el Lema 1.26 deducimos que $V(H)$ es finito. \square

Corolario 1.29. *El conjunto S definido en (1.9) es un semigrupo finitamente generado.*

Demostración. Es consecuencia de los Lemas 1.24 y 1.26 y Corolario 1.28. \square

Corolario 1.30. *El conjunto de las soluciones enteras no negativas de una ecuación diofántica homogénea $a_1x_1 + \dots + a_px_p = 0$ es un semigrupo numérico finitamente generado.*

La referencia seguida para el contenido de esta sección es [5]. En dicho artículo se explicita un algoritmo para calcular las soluciones enteras no negativas de un sistema de ecuaciones diofánticas general (no necesariamente homogéneo). Nosotros en esta sección presentamos el caso particular de una ecuación diofántica homogénea, pero si sustituimos el S definido en (1.9) por $S = \{s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p : As = 0\}$, siendo A una matriz de p columnas con coeficientes en \mathbb{Z} , los resultados aquí presentados siguen siendo ciertos.

Segundo Capítulo: Problema de la Boda

En este capítulo estudiaremos el problema de cómo distribuir de forma óptima los invitados de una boda. Esto nos conducirá al estudio del conjunto T formado por los enteros n tales que el sistema de inecuaciones (2.1) con coeficientes enteros no negativos,

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p + \alpha \leq n \leq b_1x_1 + \cdots + b_px_p - \beta \quad (2.1)$$

tiene al menos una solución en \mathbb{N}^p . Probaremos que $T \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ y describiremos un algoritmo para calcular T . Al final del capítulo, resolveremos el problema de programación lineal con computación y compararemos resultados. Para ello, utilizaremos el lenguaje *Gusek*.

La referencia seguida mayormente para el desarrollo de este capítulo, en lo relativo a semigrupos, es [8].

2.1. Introducción

Nos interesa resolver el siguiente problema:

Un catering se encarga de organizar eventos y necesita saber cómo distribuir los invitados de una boda en las mesas. Hay mesas pequeñas y grandes, con capacidad para cuatro y seis invitados respectivamente. Se deben cumplir las siguientes restricciones:

- El coste que le supone al catering cada mesa es 600 euros las pequeñas y 800 euros las grandes. En dicho presupuesto se incluye la comida, decoración y el servicio.
- Los clientes pagan 200 euros por invitado.
- Además de los invitados previstos, el catering añade uno más para cubrir posibles cambios de última hora.

Si la compañía considera que un servicio es rentable si tiene una ganancia mínima de 16000 euros, ¿cómo debemos distribuir a los invitados?

Para poder responder la pregunta, plantearemos un sistema de ecuaciones. Definimos x como el número de mesas pequeñas e y como el número de mesas grandes. Sea n el número de invitados al evento, obtenemos el siguiente planteamiento:

$$\begin{aligned} 200n &\geq 600x + 800y + 16000 \\ n + 1 &\leq 4x + 6y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Simplificando las inecuaciones (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} n &\geq 3x + 4y + 80, \\ n &\leq 4x + 6y - 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por tanto, la solución a nuestro problema sería el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : (2.3) \text{ tiene solución en } \mathbb{N}^2\}$. Llamaremos *región factible* del problema (2.3), para n fijado, a los pares $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ verificando ambas inecuaciones. Gráficamente la representamos en la Figura 4.2.

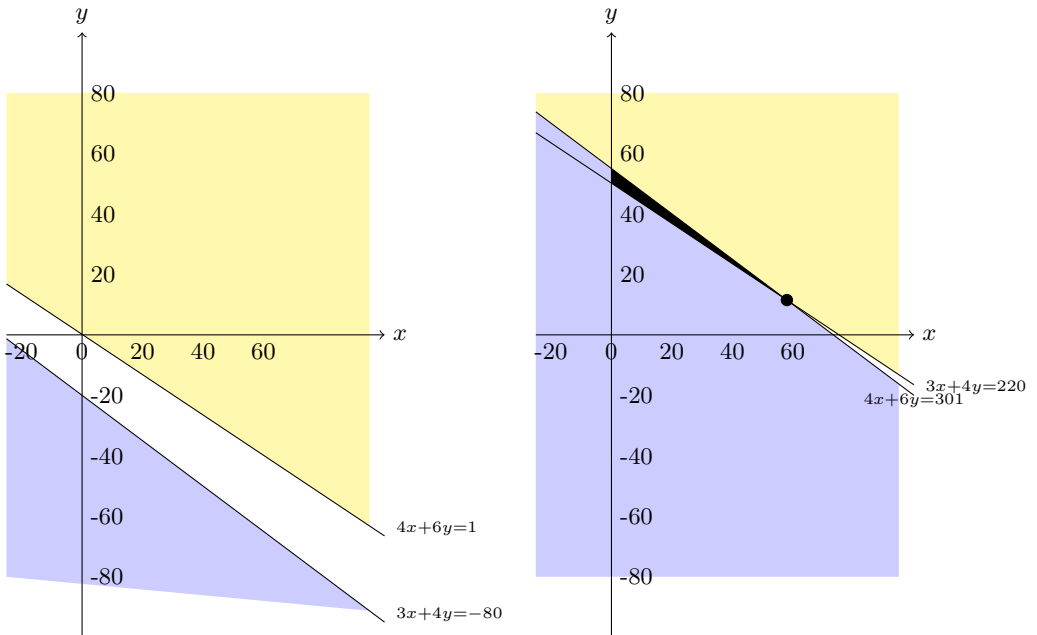


Figura 2.1. Región factible con $n = 0$ y $n = 300$.

Observamos en la primera gráfica de la Figura 4.2, que cuando n es cero, es decir, la boda no tiene invitados, no hay región factible del problema. En la segunda gráfica, hemos representado el caso de que hayan 300 invitados, y como podemos apreciar, existe región factible, es decir, la empresa de catering consigue beneficio. Para ser más precisos, la región factible serían las soluciones enteras dentro de la zona negra.

Modelicemos el problema en dimensión p arbitraria. Sean $a = (a_1, \dots, a_p)$, $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, y consideramos el conjunto $S(a, b, \alpha, \beta)$ descrito en (1.1).

Usando la Proposición 1.6 sabemos que $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$. Además, la Proposición 1.19 nos dice que todo submonoide admite un único sistema minimal de generadores finito. Por tanto, nuestro principal objetivo en este capítulo será encontrar un algoritmo para calcular el sistema minimal de generadores de $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$. También caracterizaremos cuándo $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico.

2.2. Primeros resultados en el caso $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

En esta sección vamos a suponer que $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Ya sabemos que $S(a, b, 0, 0)$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ que admite un sistema minimal de generadores. Nuestro objetivo en esta sección será determinar un sistema minimal de generadores de dicho conjunto. Recordemos que $a = (a_1, \dots, a_p)$, $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Para $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{Z}^p$, definimos:

$$A(z) := \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p : z_1x_1 + \dots + z_px_p \geq 0\}. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1. $A(z)$ es un submonoide finitamente generado de $(\mathbb{N}^p, +)$.

Demostración. Comprobaremos que $A(z)$ verifica la Definición 1.3. Es claro que $A(z) \subseteq \mathbb{N}^p$. Además $A(z)$ contiene al 0 y es cerrado para la suma. Para verificar que $A(z)$ está finitamente generado, contruimos el conjunto:

$$\bar{A}(z) := \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} : z_1x_1 + \dots + z_px_p - x_{p+1} = 0\}. \quad (2.5)$$

$\bar{A}(z)$ es el conjunto de las soluciones de la ecuación diofántica $z_1x_1 + \dots + z_px_p - x_{p+1} = 0$ y aplicando el Corolario 1.30 tenemos que $\bar{A}(z)$ está finitamente generado. Sean b_1, \dots, b_q un sistema de generadores de $\bar{A}(z)$. Entonces $\pi(b_1), \dots, \pi(b_q)$ es un sistema de generadores de $A(z)$ donde

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{N}^{p+1} &\longrightarrow \mathbb{N}^p \\ (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ya que $\pi(\bar{A}(z)) = A(z)$. \square

La prueba del Teorema 2.1 nos proporciona el siguiente algoritmo para la búsqueda de un sistema generador de $A(z)$.

Algoritmo 2. Para calcular un sistema de generadores de $A(z)$ debemos de seguir los siguientes pasos:

1. Definimos $\bar{A}(z) := \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1} : z_1x_1 + \dots + z_px_p + \dots + z_px_p - x_{p+1} = 0\}$. $\bar{A}(z)$ es un submonoide finitamente generado de $(\mathbb{N}^{p+1}, +)$.
2. Calcular el sistema de generadores, $\{b_1, \dots, b_q\}$, de $\bar{A}(z) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ ya que coincide con el sistema de generadores de $\bar{A}(z)$.
3. Calcular $\{\pi(b_1), \dots, \pi(b_q)\}$ donde $\pi(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) = (x_1, \dots, x_p)$.
4. $A(z) = \langle \{\pi(b_1), \dots, \pi(b_q)\} \rangle$.

Describiremos a continuación un sistema de generadores de $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$.

Denotamos $[-, -]_{\mathbb{N}}$ la intersección del intervalo real $[-, -]$ con el conjunto de los números naturales.

Teorema 2.2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y $\{m_1, \dots, m_q\}$ un sistema de generadores de $A(b-a)$, donde $m_i = (m_{i1}, \dots, m_{ip})$ para todo $i \in \{1, \dots, q\}$. Entonces $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$ es el submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ generado por:

$$L = \bigcup_{i=1}^q [a_1m_{i1} + \dots + a_pm_{ip}, b_1m_{i1} + \dots + b_pm_{ip}]_{\mathbb{N}}. \quad (2.7)$$

Demostración. Sabemos que $\{m_1, \dots, m_p\}$ es un sistema de generadores de $A(b-a)$ y tenemos que demostrar que $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$ es el submonoide generado por L . Aplicando la Proposición 1.6 con $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ queda demostrado que $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$.

Reescribiremos $S(a, b, 0, 0)$ de la siguiente manera:

$$S(a, b, 0, 0) = \bigcup_{(x_1, \dots, x_p) \in A(b-a)} [a_1x_1 + \dots + a_px_p, b_1x_1 + \dots + b_px_p]_{\mathbb{N}}. \quad (2.8)$$

Por construcción, es evidente que $S(a, b, 0, 0) \subseteq L$, siendo L como en (2.7).

Para finalizar la demostración, probaremos que si T es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ que contiene a L , entonces $S(a, b, 0, 0) \subseteq T$. Para ello comprobaremos que si $(x_1, \dots, x_p) \in A(b-a)$, entonces

$$[a_1x_1 + \dots + a_px_p, b_1x_1 + \dots + b_px_p]_{\mathbb{N}} \subseteq T. \quad (2.9)$$

Si $(x_1, \dots, x_p) \in A(b-a)$, aplicando la hipótesis sabemos que:

$$(x_1, \dots, x_p) = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_q m_q \text{ para ciertos } \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Para demostrar (2.9) haremos inducción sobre $\lambda_1 + \dots + \lambda_q$. Si $\lambda_1 + \dots + \lambda_q = 0$, entonces $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, q\}$, por tanto, el resultado es trivial. Vamos a suponer que se cumple para todos los $\lambda_1 + \dots + \lambda_q < 1$ para todo $i \in \{1, \dots, q\}$ y vamos a demostrarlo para $\lambda_1 + \dots + \lambda_q \geq 1$. Sea $\lambda_i \neq 0$. Tomamos $(y_1, \dots, y_p) = \lambda_1 m_1 + \dots + (\lambda_i - 1)m_i + \dots + \lambda_q m_q$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $[a_1 y_1 + \dots + a_p y_p, b_1 y_1 + \dots + b_p y_p]_{\mathbb{N}} \subseteq T$. Sabemos que $(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_p) + m_i$. Por tanto, como $[a_1 y_1 + \dots + a_p y_p, b_1 y_1 + \dots + b_p y_p]_{\mathbb{N}} \subseteq T$ y T monoide, $[a_1 y_1 + \dots + a_p y_p, b_1 y_1 + \dots + b_p y_p] + [a_1 m_i + \dots + a_p m_i, b_1 m_i + \dots + b_p m_i]_{\mathbb{N}} \subseteq T$, esto es, $[a_1(y_1 + m_i) + \dots + a_p(y_p + m_i), b_1(y_1 + m_i) + \dots + b_p(y_p + m_i)]_{\mathbb{N}} \subseteq T$, y por tanto, (2.9) queda demostrado. \square

El Teorema 2.2 determina los generadores de $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$ a partir de los generadores de $A(z)$, y estos últimos los podemos obtener mediante el Algoritmo 2 que se encuentra en la página 14.

Ejemplo 2.3. Retomando el ejemplo determinado por (2.3), vamos a encontrar un sistema minimal de generadores para el conjunto $S = S((3, 4), (4, 6), 0, 0) \cup \{0\}$. Primero buscaremos un sistema de generadores para $A(1, 2) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + 2y \geq 0\}$. Para ello, estudiaremos los elementos minimales de $\bar{A}(1, 2) \setminus \{(0, 0)\}$ donde $\bar{A}(1, 2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x + 2y - z = 0\}$. Para calcular sus minimales, nos percatamos de que el conjunto \bar{A} coincide con el conjunto H definido en (1.12). Así, por el Ejemplo 1.27 tenemos que sus elementos minimales son $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$ y por tanto, aplicando el Algoritmo 2, $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es un sistema de generadores de $A(1, 2)$. Del Teorema 2.2, concluimos que $[3, 4]_{\mathbb{N}} \cup [4, 6]_{\mathbb{N}} = \{3, 4, 5, 6\}$ son generadores de $S(a, b, 0, 0) \cup \{0\}$. Y por tanto, $S = \{0, 3, 4, 5, \rightarrow\}$, donde $a = (3, 4)$ y $b = (4, 6)$.

2.3. El caso $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

Hemos demostrado en la Proposición 1.6 que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ y en la Proposición 1.19 que posee un sistema minimal de generadores único y finito. Por tanto, solo nos queda hallar un algoritmo para encontrar dicho sistema de generadores.

Fijamos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Para esta sección definiremos el conjunto:

$$\mathcal{A}(b - a) := \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p : (b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_p - a_p)x_p \geq \alpha + \beta\}. \quad (2.11)$$

Entonces, podemos expresar el conjunto $S(a, b, \alpha, \beta)$ como:

$$S(a, b, \alpha, \beta) = \bigcup_{(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}(b-a)} [a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + \alpha, b_1 x_1 + \dots + b_p x_p - \beta]_{\mathbb{N}}. \quad (2.12)$$

Vamos a definir la relación binaria $\leq_{A(b-a)}$ en $\mathcal{A}(b-a)$ como sigue:

$$x \leq_{A(b-a)} y \text{ si y solo si } y - x \in A(b-a). \quad (2.13)$$

Proposición 2.4. *La relación $\leq_{A(b-a)}$ es una relación de orden en $\mathcal{A}(b-a)$.*

Demostración. Para comprobar que $\leq_{A(b-a)}$ es una relación de orden en $\mathcal{A}(b-a)$ debemos de verificar tres condiciones. La relación $\leq_{A(b-a)}$ será reflexiva si x está relacionado con x , esto es, si $x - x \in A(b-a)$. Dicha diferencia es 0 y $0 \in A(b-a)$. Asimismo, también es antisimétrica ya que, si $x \leq_{A(b-a)} y$ e $y \leq_{A(b-a)} x$, entonces $y - x \in A(b-a)$ y $x - y \in A(b-a)$, por lo que $x = y$. Por último, la relación es transitiva ya que si $x \leq_{A(b-a)} y$ e $y \leq_{A(b-a)} z$, entonces, $y - x \in A(b-a)$ y $z - y \in A(b-a)$. Queremos demostrar que $z - x \in A(b-a)$, pero $z - x = z - y + y - x$. Por tanto, como ambas diferencias pertenecen a $A(b-a)$, la suma permanece en $A(b-a)$ y concluimos que $x \leq_{A(b-a)} z$. \square

Para el estudio que haremos a continuación, necesitamos considerar las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

$$(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_p - a_p)x_p \geq \alpha + \beta, \quad (2.14)$$

$$(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_p - a_p)x_p - x_{p+1} = \alpha + \beta, \quad (2.15)$$

$$(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_p - a_p)x_p - x_{p+1} - (\alpha + \beta)x_{p+2} = 0, \quad (2.16)$$

$$(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_p - a_p)x_p = 0, \quad (2.17)$$

$$(b_1 - a_1)x_1 + \cdots + (b_p - a_p)x_p \geq 0. \quad (2.18)$$

Con el fin de ayudar al lector, también definiremos a continuación las aplicaciones que utilizaremos para la demostración de los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{N}^{p+1} &\longrightarrow \mathbb{N}^p \\ (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_p), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{N}^{p+2} &\longrightarrow \mathbb{N}^{p+1} \\ (x_1, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{N}^{p+2} &\longrightarrow \mathbb{N}^p \\ (x_1, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}) &\longrightarrow (x_1, \dots, x_p). \end{aligned} \quad (2.21)$$

La referencia seguida para el desarrollo de esta sección es [6, Section 2].

Lema 2.5. *El elemento $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p$ es una solución de (2.14) si y solo si existe $s_{p+1} \in \mathbb{N}$ tal que $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1})$ es una solución de (2.15).*

Demostración. Como $(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{N}^p$ es solución de (2.14) existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $(b_1 - a_1)s_1 + \cdots + (b_p - a_p)s_p - r = \alpha + \beta$. Por tanto, (s_1, \dots, s_p, r) es una solución de (2.15). Por otra parte, si $(b_1 - a_1)s_1 + \cdots + (b_p - a_p)s_p - s_{p+1} = \alpha + \beta$ con $s_{p+1} \in \mathbb{N}$, entonces $(b_1 - a_1)s_1 + \cdots + (b_p - a_p)s_p \geq \alpha + \beta$, lo que finaliza la demostración. \square

Lema 2.6. Sea $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ con $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{p+2}})$ un sistema de generadores del conjunto de soluciones no negativas de (2.16). Asumimos que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ son los elementos de B con la última coordenada igual a cero y $\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_g$ son los elementos en B con la última coordenada igual a uno, donde $g \leq t$. Sea $\pi_1 : \mathbb{N}^{p+2} \rightarrow \mathbb{N}^{p+1}$ la proyección de las $p+1$ primeras coordenadas, definida en (2.20). Entonces, el conjunto de soluciones no negativas de (2.15) es $\{\pi_1(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_1(\alpha_g)\} + \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$.

Demostración. Si (s_1, \dots, s_{p+1}) es solución no negativa de (2.15), entonces $(b_1 - a_1)s_1 + \dots + (b_p - a_p)s_p - s_{p+1} = \alpha + \beta$, lo que implica que $(b_1 - a_1)s_1 + \dots + (b_p - a_p)s_p - s_{p+1} - (\alpha + \beta) = 0$. Por tanto, $(s_1, \dots, s_{p+1}, 1)$ es solución no negativa de (2.16). Existen $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{N}$ tales que $(s_1, \dots, s_{p+1}, 1) = a_1\alpha_1 + \dots + a_d\alpha_d + a_{d+1}\alpha_{d+1} + \dots + a_g\alpha_g + a_{g+1}\alpha_{g+1} + \dots + a_t\alpha_t$. Como la última coordenada de $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, 1)$ es uno, sabemos que existe un único $a_i = 1$ con $i \in \{d+1, \dots, g\}$ y que $a_k = 0$ para todo $k \geq g+1$. Luego, $(s_1, \dots, s_{p+1}, 1) = a_1\alpha_1 + \dots + a_d\alpha_d + \alpha_i$. Por tanto, $(s_1, \dots, s_{p+1}) = a_1\pi_1(\alpha_1) + \dots + a_d\pi_1(\alpha_d) + \pi_1(\alpha_i) \in \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle + \pi_1(\alpha_i)$, con $i \in \{d+1, \dots, g\}$. Ahora debemos demostrar que todo elemento del conjunto $\{\pi_1(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_1(\alpha_g)\} + \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$ es solución no negativa de (2.15). Como $\{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_g\}$ son soluciones enteras no negativas de (2.16) con $\alpha_{i_{p+2}} = 1$ entonces $\pi_1(\alpha_i)$ son soluciones enteras no negativas de (2.15) para todo $i \in \{d+1, \dots, g\}$, es decir $(b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot \pi_1(\alpha_i) = \alpha + \beta$, donde \cdot denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^{p+1} . Por otra parte, como $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ son soluciones enteras no negativas de (2.16) con $\alpha_{i_{p+2}} = 0$ entonces son soluciones no negativas de la ecuación homogénea asociada a (2.15), es decir, $(b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot \pi_1(\alpha_i) = 0$, $1 \leq i \leq d$ y por tanto, $(b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot w = 0$ para todo $w \in \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$. Sea ahora z elemento de $\{\pi_1(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_1(\alpha_g)\} + \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$. Entonces $z = \pi_1(\alpha_i) + w$ para cierto $i \in \{d+1, \dots, g\}$ y $w \in \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$. Entonces $(b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot z = (b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot \pi_1(\alpha_i) + (b_1 - a_1, \dots, b_p - a_p, -1) \cdot w = \alpha + \beta + 0 = \alpha + \beta$. \square

Proposición 2.7. Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ y $\{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_g\}$ como en el Lema 2.6 y sea $\pi_2 : \mathbb{N}^{p+2} \rightarrow \mathbb{N}^p$ la proyección de las primeras p coordenadas definida en (2.21). Entonces, el conjunto de soluciones enteras no negativas de (2.14) es:

$$\mathcal{A}(b - a) = \{\pi_2(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_2(\alpha_g)\} + \langle \pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \rangle. \quad (2.22)$$

Demostración. Sabemos por el Lema 2.6 que el conjunto de soluciones de (2.15) es $\{\pi_1(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_1(\alpha_g)\} + \langle \pi_1(\alpha_1), \dots, \pi_1(\alpha_d) \rangle$. Además, el Lema 2.5 nos caracteriza el conjunto de soluciones de (2.14) a partir del de (2.15) mediante la proyección $\pi : \mathbb{N}^{p+1} \rightarrow \mathbb{N}^p$ sobre las p primeras coordenadas. Concluimos la demostración teniendo en cuenta que $\pi_2 = \pi \circ \pi_1$ y π_2 preserva la suma y el producto por números naturales. \square

Lema 2.8. Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ y $\{\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_g\}$ como en el Lema 2.6. Entonces $A(b-a) = \langle \pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \rangle$, donde $\pi_2 : \mathbb{N}^{p+2} \rightarrow \mathbb{N}$ es la proyección sobre las p primeras coordenadas.

Demostración. Tenemos que demostrar que el conjunto $\langle \pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \rangle$ son soluciones enteras no negativas de (2.18). Los elementos $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ son las soluciones enteras no negativas de (2.16) con su última coordenada igual a cero, por lo tanto, $\pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \in A(b-a)$ y $\langle \pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \rangle \subseteq A(b-a)$. Recíprocamente, si $(s_1, \dots, s_p) \in A(b-a)$, entonces existe $s_{p+1} \in \mathbb{N}$ tal que $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, 0)$ es una solución de (2.16). Como $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ es un sistema generador del conjunto de soluciones no negativas de (2.16), existen $a_1, \dots, a_t \in \mathbb{N}$ tales que $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, 0) = a_1\alpha_1 + \dots + a_t\alpha_t$. Sabemos que $\alpha_{i_{p+2}}$ es cero para todo $i \in \{1, \dots, d\}$. Como la última coordenada de $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, 0)$ es cero, necesitamos que a_k sea cero para todo $k > d$. Luego, $(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, 0) = a_1\alpha_1 + \dots + a_d\alpha_d$. Por tanto, $(s_1, \dots, s_p) = a_1\pi_2(\alpha_1) + \dots + a_d\pi_2(\alpha_d) \in \langle \pi_2(\alpha_1), \dots, \pi_2(\alpha_d) \rangle$. \square

Denotaremos $M_{\leq A(b-a)}(\mathcal{A}(b-a))$ al conjunto de elementos minimales de $\mathcal{A}(b-a)$ respecto de $\leq_{A(b-a)}$.

Teorema 2.9. Sean $\mathcal{A}(b-a)$ el conjunto de soluciones enteras no negativas de (2.14) y \mathcal{D} un sistema de generadores del conjunto de las soluciones no negativas de (2.18). Entonces, $\mathcal{A}(b-a) = \mathcal{C} + \langle \mathcal{D} \rangle$, siendo $\mathcal{C} = M_{\leq A(b-a)}(\mathcal{A}(b-a))$.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.7 y por el Lema 2.8 que $\mathcal{A}(b-a) = \langle \mathcal{D} \rangle + \{\pi_2(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_2(\alpha_g)\}$. Luego, tenemos que demostrar que $\mathcal{C} = M_{\leq A(b-a)}\mathcal{A}(b-a) = \{\pi_2(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_2(\alpha_g)\}$. Sea $x \in M_{\leq A(b-a)}(\mathcal{A}(b-a))$, en particular, $x \in \mathcal{A}(b-a)$. Por tanto, por la Proposición 2.6 existen $j \in \{d+1, \dots, g\}$ y $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$ tales que $x = \pi_2(\alpha_j) + a_1\pi_2(\alpha_1) + \dots + a_d\pi_2(\alpha_d)$. Concluimos $x = \pi_2(\alpha_j)$ para algún $j \in \{d+1, \dots, g\}$, ya que si algún a_i con $i \in \{1, \dots, d\}$ es distinto de cero, entonces x no pertenece a $M_{\leq A(b-a)}\mathcal{A}(b-a)$. \square

Observación 2.10. Observamos de la demostración del Teorema 2.9 que el conjunto de minimales de $\mathcal{A}(b-a)$ con respecto al orden $\leq_{A(b-a)}$ es $M_{\leq A(b-a)}(\mathcal{A}(b-a)) = \{\pi_2(\alpha_{d+1}), \dots, \pi_2(\alpha_g)\}$, donde $\pi_2 : \mathbb{N}^{p+2} \rightarrow \mathbb{N}^p$ es la proyección de las p primeras coordenadas y $\alpha_{d+1}, \dots, \alpha_g$ están definidos en el Lema 2.6.

Teorema 2.11. Sean

$$C = \bigcup_{(c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{C}} [a_1c_1 + \dots + a_pc_p + \alpha, b_1c_1 + \dots + b_pc_p - \beta]_{\mathbb{N}} \quad (2.23)$$

y

$$D = \bigcup_{(d_1, \dots, d_p) \in \mathcal{D}} [a_1 d_1 + \dots + a_p d_p, b_1 d_1 + \dots + b_p d_p]_{\mathbb{N}}. \quad (2.24)$$

Entonces, $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es el D -monoide más pequeño que contiene a C .

Demostración. Por definición, sabemos que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un D -monoide que contiene a C . Solo nos falta demostrar que es el más pequeño. Para ello, probaremos que si T es un D -monoide que contiene a C , entonces $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\} \subseteq T$. Es equivalente a probar que:

$$[a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + \alpha, b_1 x_1 + \dots + b_p x_p - \beta]_{\mathbb{N}} \subseteq T, (x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}(b - a). \quad (2.25)$$

Sabemos por el Teorema 2.9 que $\mathcal{A}(b - a) = C + \langle \mathcal{D} \rangle$; aplicando Proposición 2.7, $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_q\}$ para ciertos $d_1, \dots, d_q \in \mathbb{N}^n$. Si $(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{A}(b - a)$, entonces existen $c \in C$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{N}$ tales que $(x_1, \dots, x_p) = c + \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_q d_q$. Finalizamos la demostración procediendo por inducción de la misma manera que en la demostración del Teorema 2.2. \square

Aplicando el Teorema 2.11 y el Algoritmo 1, que se encuentra en la página 6, podemos encontrar el sistema minimal de $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$. No obstante, para el Algoritmo 1 necesitamos conocer C y D . Todo ello nos permite describir un nuevo algoritmo donde también calcularemos C y D .

Algoritmo 3. Serán conocidos $a, b \in \mathbb{N}^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tal que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. El algoritmo nos proporcionará el sistema de generadores de $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ y los pasos a seguir son los siguientes:

1. Calcular \mathcal{D} , es decir el sistema de generadores de $A(b - a)$. Para ello, aplicaremos el Algoritmo 2.
2. Calcular \mathcal{C} .
3. Calcular C y D .
4. Devolver el sistema de generadores del D -monoide más pequeño que contiene a C . Para ello, aplicaremos el Algoritmo 1, explicado en la página 6.

Observación 2.12. Para aplicar la Proposición 2.6 necesitamos el sistema de generadores del conjunto de soluciones enteras no negativas de (2.15). Explicaremos una manera fácil de obtenerlo. Definimos el conjunto $\mathcal{F} = \{(x_1, \dots, x_{p+2}) \in \mathbb{N}^{p+2} : (b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_p - a_p)x_p - x_{p+1} - (\alpha + \beta)x_{p+2} = 0\}$. Sabemos, aplicando el Corolario 1.30, que \mathcal{F} es un monoide finitamente generado de $(\mathbb{N}^{p+2}, +)$. Además, de los Lemas 1.24 y 1.25 tenemos que el sistema de generadores de \mathcal{F} coincide con los elementos minimales de $\mathcal{F} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Ejemplo 2.13. Vamos a encontrar el sistema minimal de generadores de $S = S((3, 4), (4, 6), 80, 1) \cup \{0\}$ usando el Algoritmo 3.

1. El sistema de generadores \mathcal{D} de $A(b - a)$ es $\mathcal{D} = \{(1, 0), (0, 1)\}$, según calculamos en el Ejemplo 2.3.

2. Calculamos los elementos minimales de $\mathcal{F} \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ haciendo uso de la Observación 2.10.

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 : x_1 + 2x_2 - x_3 - 81x_4 = 0\}. \quad (2.26)$$

Como solo nos interesan el conjunto de minimales de \mathcal{F} cuya última coordenada sea igual a 1, tenemos que $x_4 = 1$ y obtenemos:

$$\mathcal{F}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 81\}. \quad (2.27)$$

Para encontrar los minimales de $\mathcal{F}_1 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ podríamos aplicar el Lema 1.26, pero la realización de los cálculos resulta muy tediosa. Es por ello que decimos acudir a la resolución clásica de ecuaciones diofánticas fijando x_3 como un parámetro, en este caso $x_3 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ obteniendo así una ecuación diofántica de dos variables:

$$x + 2y = 81 + \lambda. \quad (2.28)$$

Es claro que (2.28) tiene solución ya que $\text{mcd}(1, 2) = 1$ y 1 divide a $81 + \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$. Tras su resolución obtenemos que las soluciones de (2.28) son $\{(-81 - \lambda + 2t, 81 + \lambda - t) : \lambda, t \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto los elementos de \mathcal{F} con $x_4 = 1$ son de la forma $(-81 - \lambda + 2t, 81 + \lambda - t, \lambda, 1)$ y los minimales de $\mathcal{F} \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ con última coordenada igual a 1 son:

$$\text{minimales}(\mathcal{F} \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}) = \{(1, 40, 0, 1), (0, 41, 1, 1)\}. \quad (2.29)$$

Aplicando el Teorema 2.9, $C = \{(1, 40), (0, 41)\}$.

3. Calculamos C definido en (2.23) y D definido en (2.24).

$$C = [243, 243]_{\mathbb{N}} \cup [244, 245]_{\mathbb{N}} = \{243, 244, 245\} \quad (2.30)$$

y

$$D = [3, 4]_{\mathbb{N}} \cup [4, 6]_{\mathbb{N}} = \{3, 4, 5, 6\}. \quad (2.31)$$

4. Finalmente, usando el Algoritmo 2, el $\{3, 4, 5, 6\}$ -monoide más pequeño que contiene a $\{243, 244, 245\}$ es

$$S = \{0, 243, 244, \rightarrow\}, \quad (2.32)$$

donde $a = (3, 4)$, $b = (4, 6)$, $\alpha = 80$ y $\beta = 1$.

Los elementos no nulos del conjunto S dado en (2.32) constituye el conjunto de soluciones al problema (2.3) que planteamos al inicio de este capítulo.

Esto significa que a partir de $n = 243$, esto es, 243 invitados la empresa de catering va a conseguir beneficio, por tanto, a partir de dicho valor obtenemos

región factible.

Procedemos a calcular ahora el número de mesas de cada tipo que necesitaríamos con los 243 invitados. Para ello, representaremos nuestro sistema de inecuaciones que sería el siguiente:

$$\begin{aligned} 243 &\geq 3x + 4y + 80, \\ 243 &\leq 4x + 6y - 1. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como podemos ver en la Figura 2.3, dentro de nuestra región factible solo tenemos una solución entera, el punto $(1, 40)$. Es por ello que finalmente la solución óptima para nuestro problema, esto es, la que menos gastos le produzca a la empresa de catering es una mesa pequeña y 40 mesas grandes. Recordemos que nos encontramos en el caso de $n = 243$ invitados.

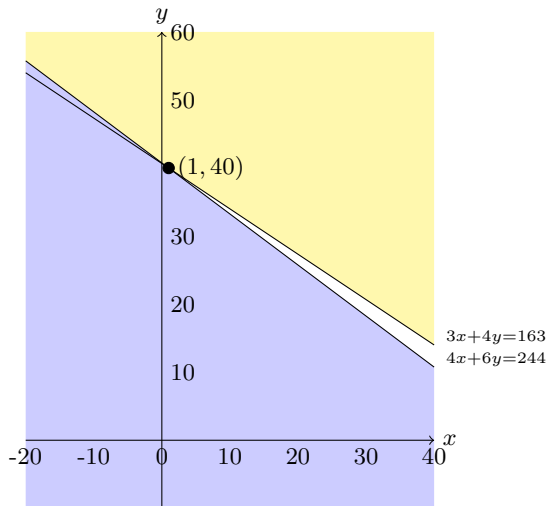


Figura 2.2. Región factible con $n = 243$.

2.4. Semigrupos Numéricos

Por la Proposición 1.6 sabemos que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un submonoide de $(\mathbb{N}, +)$. Para que un submonoide S de $(\mathbb{N}, +)$ sea semigrupo numérico es necesario que $\mathbb{N} \setminus S$ sea finito y esto no siempre ocurre. Vamos a estudiar los casos en los que $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico.

Teorema 2.14. Sean $a = (a_1, \dots, a_p), b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{N}^p$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Además, sean $I_l = \{i \in \{1, \dots, p\} : a_i < b_i\}, E = \{i \in \{1, \dots, p\} : a_i = b_i\}$, y $A = \{a_i : i \in E\}$. Entonces el submonoide $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ de $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo numérico si y solo si $(I_l \neq \emptyset)$ o $(I_l = \emptyset, E \neq \emptyset, \text{mcd}(A) = 1, (\alpha, \beta) = (0, 0))$.

Demostración. Vamos a distinguir tres casos.

Caso 1. Sean $a_i > b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ o sean $a_i \geq b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Entonces, es obvio que $a_1x_1 + \dots + a_px_p + \alpha > b_1x_1 + \dots + b_px_p - \beta$ para todo $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$. Por lo tanto, $S(a, b, \alpha, \beta) = \emptyset$, $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\} = \{0\}$ y $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ no es semigrupo numérico.

Caso 2. Sean $a_i \geq b_i$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, existe $i^* \in \{1, \dots, p\}$ tal que $a_{i^*} = b_{i^*}$, y $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Si $E = \{i \in \{1, \dots, p\} : a_i = b_i\}$ y $I_g = \{i \in \{1, \dots, p\} : a_i > b_i\}$, entonces podemos decir que $E \cup I_g = \{1, \dots, p\}$ y $E \cap I_g = \emptyset$. Por otro lado,

$$a_1x_1 + \dots + a_px_p \leq b_1x_1 + \dots + b_px_p \text{ si y solo si } 0 \leq \sum_{i=1}^p (b_i - a_i)x_i = \sum_{i \in I_g} (b_i - a_i)x_i. \quad (2.34)$$

Como $b_i - a_i < 0$ para todo $i \in I_g$ y $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$, tenemos que (2.34) se verifica si y solo si $x_i = 0$ para todo $i \in I_g$. Por lo tanto,

$$S(a, b, 0, 0) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{i \in E} a_i x_i \leq n \leq \sum_{i \in E} b_i x_i \text{ para algún } (x_i)_{i \in E} \in \mathbb{N}^r \right\} \quad (2.35)$$

donde r es la cardinalidad de E . Ahora, como $\sum_{i \in E} a_i x_i = \sum_{i \in E} b_i x_i$ para todo $(x_i)_{i \in E} \in \mathbb{N}^p$, concluimos que $S(a, b, 0, 0)$ es el submonoide generado por el conjunto $A = \{a_i : i \in E\}$. Además, del Lema 1.18 tenemos que, $S(a, b, 0, 0)$ es un semigrupo numérico si y solo si $\text{mcd}(A) = 1$.

Caso 3. Existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $a_j < b_j$. Está claro que $(b_j - a_j)x_j - \beta - \alpha > 0$ para un adecuado x_j . Entonces $a_jx_j + \alpha < b_jx_j - \beta$ y $a_jx_j + \alpha + 1 \leq b_jx_j - \beta$. Por lo tanto, $a_jx_j + \alpha$ y $a_jx_j + \alpha + 1 \in S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ (considerando $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_p) = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$). Entonces $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ contiene dos enteros consecutivos y por tanto, dos enteros coprimos. Como consecuencia del Lema 1.18, $S(a, b, \alpha, \beta) \cup \{0\}$ es un semigrupo numérico. \square

Retomemos el Ejemplo 2.13. El conjunto solución S es un semigrupo numérico, puesto que $S = \{0, 243, 244, \rightarrow\}$, y su complementario en \mathbb{N} es

$$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, \dots, 241, 242\} \quad (2.36)$$

que es finito.

2.5. Implementación en Gusek

Podemos estudiar el problema de la boda desde el punto de vista de programación lineal entera. Para ello, vamos a implementar en *Gusek* un problema de programación lineal entera cuya función objetivo será maximizar el beneficio del catering. *Gusek* es un interfaz gráfico libre para windows que utiliza el motor de optimización de *GLPK*. *GLPK* (GNU Linear Programming Kit) está desarrollado para la resolución de problemas de programación lineal de gran escala, problemas de programación entera mixta y otros problemas relacionados. En concreto, emplearemos el lenguaje de programación *GMPL*. El código utilizado se incluye en el Apéndice.

El resultado que obtenemos por pantalla se muestra en la Figura 2.3. Como podemos observar, el problema es no acotado. Esto se debe a que, igual que obteníamos con el método algebraico, a partir de un n , en concreto, $n = 243$, la empresa siempre obtendrá beneficio. A más invitados, más beneficio obtendrá por tanto no existe una solución óptima. Esto no significa que el problema no sea factible sino que siempre podremos maximizarlo.

```

Generating ...
Model has been successfully generated
GLPK Integer Optimizer, v4.65
5 rows, 3 columns, 9 non-zeros
3 integer variables, none of which are binary
Preprocessing...
1 row, 3 columns, 3 non-zeros
3 integer variables, none of which are binary
Scaling...
A: min|aij| = 1.000e+00 max|aij| = 6.000e+00 ratio =
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part is 1
Solving LP relaxation...
GLPK Simplex Optimizer, v4.65
1 row, 3 columns, 3 non-zeros
0: obj = -0.000000000e+00 inf = 1.000e+00 (1)
1: obj = -1.333333333e+02 inf = 0.000e+00 (0)
LP HAS UNBOUNDED PRIMAL SOLUTION
Time used: 0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (96600 bytes)
>Exit code: 0 Time: 0.238

```

Figura 2.3. Resultado por pantalla utilizando el Gusek

Paralelamente al método algebraico, ahora calcularemos con programación lineal el número de mesas que harían falta de cada tipo con $n = 243$ invitados, en el sistema de inecuaciones (2.3). Recordemos que x era el número de mesas pequeñas e y el número de mesas grandes.

Como podemos observar en la Figura 2.4, el modelo ha sido procesado con éxito. Debemos destacar que el tiempo de computación, como se puede apreciar

```
Time used: 0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (88578 bytes)
Display statement at line 17
z.val = 32600
Display statement at line 18
x.val = 1
y.val = 40
Model has been successfully processed
>Exit code: 0 Time: 0.231
```

Figura 2.4. Resultado por pantalla utilizando el Gusek

en la imagen, es prácticamente despreciable. Efectivamente la solución obtenida es la misma que en el desarrollo anterior, esto es, con $n = 243$ invitados, necesitaríamos una mesa pequeña y 40 mesas grandes. El gasto total por parte del catering sería la variable z , en este caso, 32600 euros. El beneficio para la empresa son 16000 euros. Este último algoritmo, en código Gusek para calcular el número de mesas, también se incluye en el Apéndice.

Aunque con ambos procesos obtenemos los mismos resultados debemos destacar que con los semigrupos numéricos somos capaces de obtener el conjunto de invitados a partir del cual tenemos beneficio. No obstante, debemos destacar la rapidez de respuesta que nos ofrece la programación lineal. Como trabajo futuro se podría comparar computacionalmente ambos métodos.

Tercer Capítulo: Bases de Gröbner

En este capítulo estudiaremos los conceptos necesarios que luego aplicaremos para resolver un problema de transporte. Para ello, tendremos que buscar las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales, las cuales serán encontradas a través de *bases de Gröbner*. Dado un ideal I de un anillo de polinomios, una base de Gröbner es un sistema de generadores de I que satisface algunas propiedades, que detallaremos más adelante.

Cabe destacar que los conocimientos plasmados en este capítulo fueron aprendidos en el curso [3] y [10].

3.1. Introducción a las bases de Gröbner

Denotaremos $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ al conjunto de polinomios en las variables x_1, \dots, x_n con coeficientes en \mathbb{C} . Sea F el conjunto de polinomios $\{f_1, \dots, f_t\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ denotaremos por X^a al monomio $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$.

Definición 3.1 (Ideal de Polinomios). *Dado un conjunto de polinomios $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, I es un ideal si verifica:*

- $0 \in I$.
- Si $f, g \in I$, entonces $f + g \in I$.
- Si $f \in I$ y $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, entonces $hf \in I$.

Lema 3.2. *Sea $F = \{f_1, \dots, f_t\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. El conjunto*

$$\{h_1 f_1 + \dots + h_t f_t : h_1, \dots, h_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\} \quad (3.1)$$

es un ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ que llamaremos ideal generado por F y denotaremos por $\langle f_1, \dots, f_t \rangle$.

Demostración. Para demostrar que el conjunto (3.1) es un ideal de polinomios basta comprobar que verifica la Definición 3.1. Si fijamos $h_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, entonces $0 \in I$. Si $f, g \in I$, entonces $f = h_1 f_1 + \dots + h_t f_t$ tales que, $h_1, \dots, h_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $g = h'_1 f_1 + \dots + h'_t f_t$ tales que, $h'_1, \dots, h'_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Por tanto, $f + g = (h_1 + h'_1) f_1 + \dots + (h_t + h'_t) f_t$ tales que, $h_1 + h'_1, \dots, h_t + h'_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $f + g \in I$. Si $f \in I$ y $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, entonces $hf = hh_1 f_1 + \dots + hh_t f_t \in I$ con $hh_1, \dots, hh_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y por tanto, $hf \in I$. \square

3.2. Órdenes monomiales

En esta sección estudiaremos los órdenes monomiales que serán necesarios para introducir las bases de Gröbner.

Definición 3.3 (Orden monomial). *Un orden monomial en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es una relación \prec en \mathbb{N}^n que satisface:*

1. \prec es un orden total en \mathbb{N}^n .
2. Si $\alpha \prec \beta$ y $\gamma \in \mathbb{N}^n$, entonces $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$.
3. \prec es un buen orden en \mathbb{N}^n , esto es, todo subconjunto no vacío de \mathbb{N}^n tiene un primer elemento.

Podemos definir una biyección entre el conjunto de monomios de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y sus exponentes de la siguiente manera:

$$X^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \longleftrightarrow a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Esto nos permitirá definir un orden monomial con respecto a los exponentes de los términos de los polinomios. Denotamos por \prec el siguiente orden en \mathbb{N}^n : sean $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$, decimos que $a \prec b$ si existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_j = b_j$, si $j < i$ y $a_i < b_i$. En otras palabras, $a \prec b$ si la primera coordenada no nula de $b - a$, leída de izquierda a derecha, es positiva. El orden monomial más utilizado es el lexicográfico, el cual definiremos a continuación.

Definición 3.4 (Orden lexicográfico). *Decimos que X^a es menor que X^b y lo denotamos $X^a \prec_{lex} X^b$, si $a \prec b$.*

Ejemplo 3.5. Tenemos que $x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^5 \prec_{lex} x_1 x_2^5 x_3^3 x_4$ ya que, $(1, 2, 3, 5) \prec (1, 5, 3, 1)$.

3.3. Teorema de la División

En esta sección presentaremos la división de polinomios en varias variables. Para conseguir cierta unicidad, debemos fijar un orden monomial.

Definición 3.6 (Monomio líder). *El monomio líder de un polinomio f será el mayor de los monomios con respecto al orden monomial fijado \prec y lo denotaremos $in_{\prec}(f)$.*

Teorema 3.7 (Teorema de la división). *Fijaremos un orden monomial en \mathbb{N}^n . Sean $F = \{f_1, \dots, f_t\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$. Para todo $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ existen $q_1, \dots, q_t, r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, tales que:*

- (a) $f = \sum_{i=1}^t q_i f_i + r$.
- (b) *El resto de la división r es 0 o bien, ningún monomio de r es divisible por ningún monomio líder de $f_i, 1 \leq i \leq t$.*
- (c) *Además, si $q_i f_i \neq 0$, el monomio líder de cada producto $q_i f_i$ es menor o igual que el monomio líder de f .*

Demostración. Sea \prec el orden monomial fijado. Si $f = 0$ hemos terminado tomando $q_1 = \dots = q_t = r = 0$. Supongamos $f \neq 0$; y consideramos $q_1 = \dots = q_t = r = 0$ y $p = f$. Ahora consideramos $1 \leq i \leq t$.

1. Si $in_{\prec}(f_i)$ divide a $in_{\prec}(p)$ tomamos $q_i = q_i + \frac{in_{\prec}(p)}{in_{\prec}(f_i)}$ y $p = p - \frac{in_{\prec}(p)}{in_{\prec}(f_i)} f_i$, es decir, procedemos como dividimos polinomios en una variable.
2. Si ningún $in_{\prec}(f_i)$ divide a $in_{\prec}(p)$ entonces $r = r + in_{\prec}(p)$ y $p = p - in_{\prec}(p)$.

Para demostrar que el algoritmo funciona hay que verificar que tenemos la igualdad:

$$f = q_1 f_1 + \dots + q_t f_t + p + r \quad (3.2)$$

en cada paso del mismo. La igualdad (3.2) es obvia en el paso inicial del algoritmo, es decir, cuando $q_1 = \dots = q_t = r = 0$ y $p = f$. Supongamos ahora que (3.2) es cierta en determinado paso del algoritmo y demostremos que sigue siendo cierta en el siguiente paso. Si el siguiente paso es del tipo 1, entonces algún $in_{\prec}(f_i)$ divide a $in_{\prec}(p)$ y la igualdad:

$$q_i f_i + p = q_i + \frac{in_{\prec}(p)}{in_{\prec}(f_i)} f_i + p - \frac{in_{\prec}(p)}{in_{\prec}(f_i)} f_i \quad (3.3)$$

demuestra que $q_i f_i + p$ no ha cambiado en este paso y como los restantes sumandos de (3.2) no se han visto afectados entonces la igualdad (3.2) sigue siendo cierta en este caso. Supongamos ahora que el siguiente paso es del tipo 2, entonces p y r son modificados pero su suma $p + r = p - in_{\prec}(p) + r + in_{\prec}(p)$ no cambia, y como los restantes sumandos de (3.2) no se han cambiado, la igualdad (3.2) sigue siendo cierta. El algoritmo finalizará si $p = 0$ y la igualdad (3.2) será entonces:

$$f = q_1 f_1 + \dots + q_t f_t + r. \quad (3.4)$$

Demostramos que en efecto el algoritmo termina. Observamos que en cada paso redefinimos el polinomio p . Si estamos en un paso del tipo 1 se tiene que

$$\text{in}_{\prec} \left(\frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)} f_i \right) = \frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)} \text{in}_{\prec}(f_i) = \text{in}_{\prec}(p) \quad (3.5)$$

y por tanto p y $\frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)} f_i$ tienen el mismo monomio líder, por tanto la diferencia $p - \frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)} f_i$ es el polinomio nulo si p tiene un único término o bien si dicha diferencia no es nula, su término líder es menor que el de p . Si estamos en un paso del tipo 2 la diferencia $p - \text{in}_{\prec}(p)$ es cero cuando p solo tenga un término o bien su término líder será menor que el de p . En todo caso, o bien llegamos a un paso donde el polinomio $p = 0$ o bien tiene término líder de menor grado que el de su precedente p , y dado que el orden monomial es un buen orden el algoritmo debe devolver tras un número finito de pasos el valor $p = 0$ y la igualdad (3.2) pasa a ser $f = q_1 f_1 + \dots + q_t f_t + r$, y obtenemos el punto (a) del teorema.

Durante el algoritmo solo añadimos términos a r cuando los mismos no son divisibles por ningún $\text{in}_{\prec}(f_i)$, por tanto el polinomio r verifica las propiedades requeridas en el punto (b). Para finalizar la prueba demostraremos que, cuando $q_i f_i \neq 0$, entonces

$$\text{in}_{\prec}(q_i f_i) \prec \text{in}_{\prec}(f). \quad (3.6)$$

Deducimos del algoritmo que hemos definido que todo término q_i es de la forma $\frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_i)}$ para cierto valor del polinomio p . El algoritmo comienza con $p = f$ y hemos demostrado que su término líder decrece a lo largo del algoritmo. Por tanto $\text{in}_{\prec}(p) \prec \text{in}_{\prec}(f)$ y por ser \prec un orden monomial, y de la construcción de los q_i , si $q_i f_i \neq 0$ entonces $\text{in}_{\prec}(q_i f_i) \prec \text{in}_{\prec}(f)$. \square

Ejemplo 3.8. Vamos a mostrar el algoritmo de división de polinomios en un ejemplo. Dividiremos $f = x^3 y + x y^2 + 1$ entre $F = \{f_1 = x^2 + 1, f_2 = x y - 3\}$ usando el orden lexicográfico y como orden de variables, $x > y$ en $\mathbb{C}[x, y]$. Partimos de $p = f$ y $q_1 = q_2 = r = 0$. Como $\text{in}_{\prec}(f_1) = x^2$ divide a $\text{in}_{\prec}(f) = x^3 y$ entonces $q_1 = 0 + \frac{\text{in}_{\prec}(p)}{\text{in}_{\prec}(f_1)} = x y$ y $p = f - x y \cdot f_1 = x^3 y + x y^2 + 1 - x^3 y - x y = x y^2 - x y + 1$. Por tanto, en este paso del algoritmo la igualdad (3.2) es

$$f = x y \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + x y^2 - x y + 1 + 0.$$

Ahora $p = x y^2 - x y + 1$ y $\text{in}_{\prec}(f_1)$ no divide a $\text{in}_{\prec}(p) = x y^2$ pero $\text{in}_{\prec}(f_2) = x y$ sí lo divide. Entonces $q_2 = 0 + \frac{x y^2}{x y} = y$ y $p = p - y f_2 = x y^2 - x y + 1 - y(x y - 3) = -x y + 1 + 3 y$. En este nuevo paso del algoritmo la igualdad (3.2) es

$$f = x y f_1 + y f_2 + (-x y + 3 y + 1) + 0.$$

Continuamos con $p = -x y + 3 y + 1$ y $\text{in}_{\prec}(p) = -x y$ no es divisible por $\text{in}_{\prec}(f_1)$ pero sí por $\text{in}_{\prec}(f_2)$. En este paso $q_2 = y + \frac{-x y}{x y} = y - 1$ y $p = -x y + 1 + 3 y + 1 \cdot f_2 = -2 + 3 y$. La igualdad (3.2) se transforma en

$$f = x y f_1 + (y - 1) f_2 + (3 y - 2) + 0,$$

y $p = 3y - 2$ donde su forma inicial no es divisible ni por $\text{in}_{\prec}(f_1)$ ni por $\text{in}_{\prec}(f_2)$. Por tanto en este paso $r = 0 + \text{in}_{\prec}(p) = 0 + 3y = 3y$ y $p = 3y - 2 - 3y = -2$, y la igualdad (3.2) pasa a ser

$$f = xyf_1 + (y - 1)f_2 + (-2) + 3y.$$

Como $p = \text{in}_{\prec}(p) = -2$ no es divisible ni por $\text{in}_{\prec}(f_1)$ ni por $\text{in}_{\prec}(f_2)$ en esta iteración obtenemos $p = 0, r = 3y - 2$ y los q_1, q_2 no varían con respecto al paso anterior. Hemos finalizado el algoritmo y la igualdad (3.2) es finalmente $f = q_1f_1 + q_2f_2 + r$ donde $q_1 = xy, q_2 = (y - 1)$ y $r = 3y - 2$.

Hay diferencias entre la división de polinomios en una variable y en varias variables. En particular, en varias variables el resto de la división no tiene por qué ser único como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. Si dividimos $f = x^2y + y - 3$ entre $F = \{f_1 = x^2y - 1, f_2 = x^2y + 1\}$ obtenemos $f = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + y - 2$ si comenzamos dividiendo por f_1 o $f = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + y - 4$ si empezamos dividiendo por f_2 . Por tanto, el resto en la primera división es $y - 2$ pero en la segunda es $y - 4$.

Si queremos obtener unicidad en el resto, la respuesta pasa por las llamadas bases de Gröbner.

3.4. Bases de Gröbner

Dado un ideal I de un anillo de polinomios, una base de Gröbner es un sistema de generadores de I que satisface algunas propiedades interesantes que comentaremos a continuación.

Sean I un ideal en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y \prec un orden monomial fijado. Recordemos que $\text{in}_{\prec}(f)$ se define como el monomio líder del polinomio f . Tenemos que el conjunto

$$\text{in}_{\prec}(I) := \langle \text{in}_{\prec}(f) : f \in I \rangle \quad (3.7)$$

es el ideal generado por los monomios líderes de todos los polinomios del ideal I .

Definición 3.10 (Base de Gröbner). Sean \mathcal{G} un subconjunto finito de I y \prec un orden monomial fijado. Entonces \mathcal{G} es una base de Gröbner con respecto al orden \prec si los monomios líderes de los elementos en \mathcal{G} generan el ideal $\text{in}_{\prec}(I)$, es decir,

$$\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathcal{G} \rangle. \quad (3.8)$$

La definición no nos garantiza que la base de Gröbner sea minimal. Es por ello que surgen las *bases de Gröbner reducidas*.

Definición 3.11 (Base de Gröbner reducida). Diremos que una base de Gröbner \mathcal{G} es reducida si:

- para cada $g \in \mathcal{G}$, el coeficiente de $\text{in}_<(g)$ en g es 1,
- el conjunto $\{\text{in}_<(g) : g \in \mathcal{G}\}$ es un sistema minimal de generadores de $\text{in}_<(I)$,
- para cualquier $g \in \mathcal{G}$ ningún término de $g - \text{in}_<(g)$ se encuentra en $\text{in}_<(I)$.

Teorema 3.12. Fijado un orden monomial $<$, entonces todo ideal I en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tiene una única base de Gröbner reducida.

Demostración. Ver ([2, Proposition 6, Chapter 2]). □

Para calcular una base de Gröbner de un ideal I recurriremos al álgebra computacional. El primer algoritmo para ello fue dado por Bruno Buchberger en 1995. En este trabajo, el lenguaje de programación escogido para calcular una base de Gröbner ha sido Python. El código que nos proporciona la base de Gröbner reducida se encuentra en el Apéndice.

Ejemplo 3.13. La base de Gröbner del ideal generado por x^2 e $x + y + z + t \in \mathbb{C}[x, y, z, t]$ es:

$$\mathcal{G} = \langle t + x + y + z, t^2 + 2ty + 2tz + y^2 + 2yz + z^2 \rangle.$$

Para calcularla, hemos utilizado el código nombrado anteriormente.

Las propiedades de bases de Gröbner que necesitaremos se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 3.14. Sean \mathcal{G} una base de Gröbner del ideal $I \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

1. El resto de dividir f entre \mathcal{G} es único.
2. El polinomio f pertenece a I si y solo si el resto de dividir f entre \mathcal{G} es cero.
3. La base de Gröbner \mathcal{G} es un sistema generador de I .

Demostración. Ver ([2, Proposition 1, Chapter 2]), ([2, Corollary 2, Chapter 2]) y ([2, Corollary 6, Chapter 2]). □

Todo lo presentado en este capítulo sigue siendo cierto para cualquier anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$ con K cuerpo arbitrario.

Cuarto Capítulo: Problema de Transporte

En este capítulo utilizaremos los conceptos aprendidos en el capítulo anterior para resolver un problema de transporte, el cual presentaremos a continuación.

Las referencias seguidas para el desarrollo de este capítulo han sido [5] y [3].

4.1. Introducción

Un problema de transporte es un caso particular de problema de programación lineal en el cual se debe minimizar el costo del abastecimiento a una serie de puntos de demanda a partir de un grupo de puntos de oferta (posiblemente de distinto número al de demandas), teniendo en cuenta los distintos precios de envío de cada punto de oferta a cada punto de demanda.

En particular desarrollaremos un problema de programación lineal entera ya que consideraremos que nuestra mercancía a transportar son unidades enteras. Nuestro objetivo será minimizar una *función objetivo* conocida como *función de costo* sujeta a una serie de restricciones. Las restricciones que consideraremos serán sistemas de ecuaciones lineales donde los coeficientes y los términos independientes son números enteros no negativos. Las soluciones a dichos sistemas de ecuaciones se denominará *región factible* del problema. Además la suma total de ofertas coincide con la suma total de demandas.

Interesa diseñar una política de transporte que minimice los costos globales atendiendo las demandas de los clientes y respetando las ofertas de los distribuidores.

Supongamos que tenemos n almacenes y m clientes. Expresaremos ahora el problema en formato matricial y extraeremos el sistema de ecuaciones que representa las restricciones al mismo. Denotaremos como $C = (c_{ij})$ a la *matriz de costos*, esto es, C es una matriz de n filas y m columnas donde $c_{ij} \in \mathbb{N}$ es el costo que supone trasladar una unidad del almacén i al cliente j . Asimismo denotaremos como u_{ij} el número de unidades que trasladaremos del almacén i al cliente j .

Sabemos que, fijado un almacén i , el sumatorio del número de unidades que se trasladan de dicho almacén a todos los clientes debe ser igual a la oferta del almacén, que denotaremos a_i . Por otro lado, fijado un cliente j , el sumatorio de las unidades que recibe de los distintos almacenes debe ser igual a la demanda que necesitaba dicho cliente, que denotaremos b_j .

Por ello, el planteamiento general del problema que queremos estudiar es de la siguiente manera:

Función objetivo:

$$\min z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} u_{ij},$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m u_{ij} &= a_i, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n u_{ij} &= b_j, j = 1, \dots, m, \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Mostraremos un ejemplo del tipo de problemas que queremos resolver: tres almacenes ofertan un producto que demandan tres clientes. Las cantidades ofertadas en origen, las demandas de los destinos y los costos de transporte (euros por unidad de producto) entre cada almacén y cada cliente, aparecen en la [Tabla 4.1](#).

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Ofertas
Almacén 1	20	16	24	300
Almacén 2	10	10	8	500
Almacén 3	12	18	10	100
Demandas	200	400	300	

Tabla 4.1. Datos del ejemplo

La matriz de costos es,

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

y el sistema de ecuaciones cuyas soluciones conforma la región factible del problema es:

$$\begin{cases} u_{11} + u_{12} + u_{13} = 300 \\ u_{21} + u_{22} + u_{23} = 500 \\ u_{31} + u_{32} + u_{33} = 100 \\ u_{11} + u_{21} + u_{31} = 200 \\ u_{12} + u_{22} + u_{32} = 400 \\ u_{13} + u_{23} + u_{33} = 300 \end{cases}, \text{ con } u_{ij} \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

4.2. Planteamiento del problema

La estrategia que seguiremos para resolver este problema de programación lineal entera usará grafos y álgebra computacional. Necesitamos introducir nueva notación que explicaremos a continuación. Recordemos que el problema involucra n almacenes y m clientes. Denotemos $\mathbb{N}^{n \times m}$ al conjunto de matrices de n filas y m columnas con coeficientes enteros no negativos.

Definimos la aplicación π como:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{N}^{n \times m} &\longrightarrow \mathbb{N}^{n+m} \\ u = (u_{ij}) &\longrightarrow \left(\sum_{j=1}^m u_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^m u_{nj}; \sum_{i=1}^n u_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n u_{im} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

La aplicación π parte del conjunto $\mathbb{N}^{n \times m}$ que identificamos con todas las posibles combinaciones que se podrían hacer en una tabla del tipo m clientes y n almacenes. La imagen de π son los vectores de \mathbb{N}^{n+m} cuyas n primeras coordenadas son las sumas de las componentes de cada una de las filas de la matriz u y las siguientes m coordenadas son la suma de las componentes de cada una de sus columnas. Es claro entonces que

Lema 4.1. *La región factible del problema (4.1) es $\pi^{-1}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{N}^{n \times m}$.*

A continuación, utilizando todas estas distribuciones como vértices vamos a definir un grafo. Para ello necesitamos la siguiente definición.

Denotemos $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$. Asociamos a la aplicación π el siguiente conjunto,

$$\ker_{\mathbb{Z}}(\pi) = \{u \in \mathbb{Z}^{n \times m} : \pi(u) = (0, \dots, 0)\},$$

que nos permite definir el siguiente grafo: para cualquier $F \subset \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$, denotamos por $\pi^{-1}(a; b)_F$ el grafo donde los nodos son los elementos de $\pi^{-1}(a; b)$ y dos nodos, u, v , formarán un arco si $u - v \in F$ o $v - u \in F$.

Ejemplo 4.2. Sean $n = m = 2$, $a = (2, 3)$ y $b = (3, 2)$. Entonces

$$\pi : \mathbb{N}^{2 \times 2} \longrightarrow \mathbb{N}^{2+2=4} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow (a + b, c + d, a + c, b + d), \quad (4.5)$$

y

$$\pi^{-1}((2, 3); (3, 2)) = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.6)$$

Calculamos el $\ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$:

$$\ker_{\mathbb{Z}}(\pi) = \left\{ u \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} : \pi(u) = (0, 0, 0, 0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t & -t \\ -t & t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.7)$$

Si consideramos $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, entonces $u_1 - u_2 \in F_1$ y $u_1 - u_3, u_2 - u_3 \notin F_1$. Si ahora tomamos $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, entonces $u_1 - u_2, u_1 - u_3 \in F_2$ y $u_2 - u_3 \notin F_2$. Por último, fijamos $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$, entonces $u_1 - u_2, u_1 - u_3, u_2 - u_3 \in F_3$.

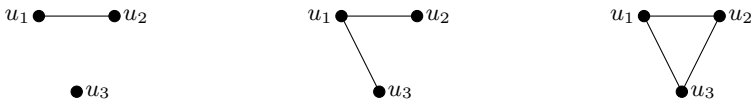


Figura 4.1. Grafos resultantes con F_1, F_2 y F_3 respectivamente

Por otra parte, podemos identificar $\mathbb{N}^{n \times m}$ con $\mathbb{N}^{n \cdot m}$ de la forma siguiente:

$$u = (u_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times m} \longrightarrow (u_{11}, \dots, u_{1m}, u_{21}, \dots, u_{2m}, \dots, u_{n1}, \dots, u_{nm}) \in \mathbb{N}^{n \cdot m}. \quad (4.8)$$

Para poder evaluar todas las posibles soluciones del problema en cuestión y encontrar la óptima, necesitaremos que el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ sea conexo, es decir, que cualesquiera dos nodos estén unidos por un camino (sucesión de nodos

adyacentes distintos). Para ello, debemos escoger el conjunto F *suficientemente grande*, como muestra el Ejemplo 4.2.

Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $j \in \{1, \dots, m\}$. Sean $e_i \in \mathbb{N}^n$ cuya i -ésima coordenada es igual a 1 y las restantes son nulas; y $\bar{e}_j \in \mathbb{N}^m$ cuya j -ésima coordenada es igual a 1 y las restantes son nulas. Denotamos $e_i \oplus \bar{e}_j$ al vector de \mathbb{N}^{n+m} cuyas primeras n coordenadas coinciden con las de e_i y las m últimas coordenadas coinciden con las de \bar{e}_j . Así por ejemplo si $n = 2$ y $m = 3$ entonces $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$, $e_1 \oplus \bar{e}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $e_1 \oplus \bar{e}_2 = (1, 0, 0, 1, 0)$, $e_1 \oplus \bar{e}_3 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $e_2 \oplus \bar{e}_1 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $e_2 \oplus \bar{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 1)$ y $e_2 \oplus \bar{e}_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$.

Observamos que las columnas de la matriz del sistema de ecuaciones (4.1) son $e_1 \oplus \bar{e}_1, e_1 \oplus \bar{e}_2, \dots, e_1 \oplus \bar{e}_m, \dots, e_n \oplus \bar{e}_1, e_n \oplus \bar{e}_2, \dots, e_n \oplus \bar{e}_m$. Además si $u = (u_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times m}$ entonces

$$\pi(u) = u_{11}e_1 \oplus \bar{e}_1 + \dots + u_{1m}e_1 \oplus \bar{e}_m + \dots + u_{n1}e_n \oplus \bar{e}_1 + \dots + u_{nm}e_n \oplus \bar{e}_m. \quad (4.9)$$

Sea \mathcal{A} el semigrupo generado por $\{e_i \oplus \bar{e}_j\}_{ij}$. De (4.9) tenemos que \mathcal{A} coincide con el conjunto imagen de π .

Se llama *ideal asociado* al semigrupo \mathcal{A} a

$$I_{\mathcal{A}} = \langle X^u - X^v : \sum_{i,j} u_{ij}e_i \oplus \bar{e}_j = \sum_{i,j} v_{ij}e_i \oplus \bar{e}_j \rangle,$$

donde $u = (u_{ij}), v = (v_{ij}) \in \mathbb{N}^{n \times m}$ pero mirados como vectores de $\mathbb{N}^{n \cdot m}$ según la identificación (4.8).

Sea $d = (d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{Z}^r$, definimos: $d^+ := (\max\{d_1, 0\}, \dots, \max\{d_r, 0\})$ y $d^- := d^+ - d$.

Ejemplo 4.3. Si $d = (-1, 3, 4, -5, -6, 8)$ entonces $d^+ = (0, 3, 4, 0, 0, 8)$ y $d^- = (1, 0, 0, 5, 6, 0)$.

El ideal $I_{\mathcal{A}}$ se puede reescribir

$$\langle X^{v^+} - X^{v^-} : v \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi) \rangle. \quad (4.10)$$

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos F para los cuales el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ es conexo, donde $(a; b) \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.4. *Sean \mathcal{A} el semigrupo generado por $\{e_i \oplus \bar{e}_j\}_{ij}$, $I_{\mathcal{A}}$ el ideal del semigrupo \mathcal{A} y $F \subseteq \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$. Entonces, el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$, para todo $(a; b) \in \mathcal{A}$, es conexo si y solo si, el conjunto $\{X^{u^+} - X^{u^-} : u = u^+ - u^- \in F\}$ es un sistema generador del conjunto $I_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Sea F' el ideal generado por $\{X^{v^+} - X^{v^-} : v \in F\}$. De (4.10) tenemos que $I_{\mathcal{A}} = \langle X^{v^+} - X^{v^-} : v \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi) \rangle$. Puesto que $F \subseteq \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$, entonces, $F' \subseteq I_{\mathcal{A}}$. Nos queda demostrar que la igualdad se cumple si y solo si el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ es conexo para todo $(a; b) \in \mathcal{A}$. Comenzaremos suponiendo que el grafo es conexo y probaremos que el conjunto $\{X^{u^+} - X^{u^-} : u = u^+ - u^- \in F\}$ es un sistema generador del ideal $I_{\mathcal{A}}$. Dado cualquier $u \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$, tenemos que demostrar que $X^{u^+} - X^{u^-} \in F'$. Sea $(a; b) = \pi(u^+)$. Como $u \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$ entonces $0 = \pi(u) = \pi(u^+ - u^-) = \pi(u^+) - \pi(u^-)$ y concluimos $(a; b) := \pi(u^+) = \pi(u^-)$. Como $\pi^{-1}(a; b)_F$ es un grafo conexo, existe un camino que une, u^+ con u^- , esto es, $u^+ = u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(r-1)}, u^{(r)} = u^-$. Esto que implica que $X^{u^{(i-1)}} - X^{u^{(i)}} \in F'$, de la definición del grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$. Por tanto,

$$X^{u^+} - X^{u^-} = \sum_{i=1}^r \left(X^{u^{(i-1)}} - X^{u^{(i)}} \right) \in F'.$$

Ahora vamos a suponer que el conjunto $F' = I_{\mathcal{A}}$ y demostrar que en ese caso, $\pi^{-1}(a; b)_F$ es conexo para cualquier $(a; b) \in \mathcal{A}$. Sean u y u' dos nodos cualesquiera del grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ (para $(a; b)$ fijado). Entonces $\pi(u) = \pi(u')$, es decir, $u - u' \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$. Por tanto $X^u - X^{u'} \in I_{\mathcal{A}} = F'$ por hipótesis. Entonces existen $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}[X]$:

$$X^u - X^{u'} = \sum_{i=1}^M h_i \cdot \left(X^{v_i^+} - X^{v_i^-} \right) \in F', \quad (4.11)$$

que podemos reescribir como

$$X^u - X^{u'} = \sum_{i,k} X^{w_{i,k}} \cdot \left(X^{v_i^+} - X^{v_i^-} \right) \in F', \quad (4.12)$$

para ciertos $v_i = v_i^+ - v_i^- \in F$ y $w_{i,k} \in \mathbb{N}^{n \cdot m}$ y donde quizás haya binomios $X^{v_i^+} - X^{v_i^-}$ que se repitan. Ahora vamos a proceder por inducción sobre el número de sumandos de (4.12) que denotaremos N . Si $N = 1$, entonces $u - u' \in F$ y u y u' están conectados por un camino. Si $N > 1$, el monomio X^u debe ser igual a uno de estos dos términos: $X^{w_{i,k}} X^{v_i^+}$ o $X^{w_{i,k}} X^{v_i^-}$ para ciertos $k, i, 1 \leq i \leq M$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $u = w_{1,1} + v_1^+$. Esto implica que u y $w_{1,1} + v_1^-$ están conectados por un arco en el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$. Simplificando X^u en (4.12), obtenemos $X^{w_{1,1} + v_1^-} - X^{u'} = \sum_{i,k \neq 1} X^{w_{i,k}} \cdot \left(X^{v_i^+} - X^{v_i^-} \right)$ que tiene $N - 1$ sumandos. Por tanto, aplicando inducción, $w_{1,1} + v_1^-$ y u' están conectados por un camino en $\pi^{-1}(a; b)_F$ y consecuentemente u y u' también están conectados. Esto nos lleva a concluir que el grafo en cuestión es conexo. \square

Observación 4.5. Para calcular F de tal forma que el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ sea conexo debemos calcular un sistema de generadores del ideal asociado al semigrupo generado por $\{e_i \oplus \bar{e}_j\}_{i,j}$. Para ello emplearemos el Código de Python para el cálculo del ideal asociado a un semigrupo que se detalla en el Apéndice.

A partir de la matriz de costos C definimos el siguiente orden en $\mathbb{N}^{n \times m}$: sean $u, v \in \mathbb{N}^{n \times m}$, diremos que $u \prec_C v$ si $Cu \leq Cv$ donde Cu denota el producto escalar $C \cdot u$ entendidos como vectores de $\mathbb{N}^{n \cdot m}$ y \leq es el orden usual en \mathbb{N} , o bien si $Cu = Cv$ entonces $u \prec_C v$ si $u \prec_{lex} v$. Para responder al problema de transporte debemos minimizar dicho producto escalar.

Ejemplo 4.6. Sean $u = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 8 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz de costos $C = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \end{pmatrix}$. Tenemos que: $u = (2, 6, 1, 1, 1, 8, 2, 5, 1)$, $v = (3, 2, 5, 8, 3, 7, 1, 8, 4)$ y $C = (20, 16, 24, 10, 10, 8, 12, 18, 10)$. Obtenemos $Cu = 368$ y $Cv = 574$. Luego, $Cu \prec_C Cv$.

Podemos orientar el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ de la siguiente manera: el arco (u, v) estará dirigido de u a v si $v \prec_C u$.

Denotaremos por $\pi^{-1}(a; b)_{F, \prec_C}$ al grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ cuando lo consideramos orientado con respecto al orden \prec_C .

Además de necesitar que el grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ sea conexo, necesitamos que tenga un único *punto final*, es decir, que indistintamente del nodo que partamos, todo los caminos lleguen al mismo nodo, que será la solución óptima del problema.

Recordemos que partimos de un grafo $\pi^{-1}(a; b)_F$ cuyos nodos representan todas las soluciones factibles del problema y dos nodos u y v formarán un arco si $u - v \in F$.

Teorema 4.7. *Sea $F \subseteq \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$ un conjunto finito. El grafo $\pi^{-1}(a; b)_{F, \prec_C}$ tiene un único punto final si y solo si el conjunto $\mathcal{G} := \{X^{u^+} - X^{u^-} : u = u^+ - u^- \in F\}$ es una base de Gröbner de I_A con respecto al orden \prec_C .*

Demostración. En primer lugar observamos que si u, v son nodos del grafo $\pi^{-1}(a; b)_{F, \prec_C}$, entonces $u - v \in \ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$ y $X^u - X^v \in I_A$. Supongamos que \mathcal{G} es una base de Gröbner. Aplicando el segundo apartado de la Proposición 3.14

obtenemos que el resto de dividir $X^u - X^v$ es cero. Por tanto, cualesquiera dos nodos u, v de la fibra $\pi^{-1}(a; b)_{F, \prec_C}$ verifican que X^u y X^v tienen el mismo resto al dividir entre \mathcal{G} y que denotaremos X^r . Además si \mathcal{G} es una base de Gröbner de $I_{\mathcal{A}}$, entonces por el tercer apartado de la Proposición 3.14, \mathcal{G} genera el ideal $I_{\mathcal{A}}$. Por el Teorema 4.4 tenemos que $\pi^{-1}(a; b)_{F, \prec_C}$ es conexo. Además el punto final del mismo coincide con el nodo r . Obsérvese que la unicidad del punto final solo se puede garantizar si \mathcal{G} es base de Gröbner. \square

4.3. Resolución del problema

Para la resolución del problema debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calculamos una solución inicial, esto es, algún $v \in \pi^{-1}(a; b)$.
2. Calculamos una base de Gröbner \mathcal{G} reducida de $I_{\mathcal{A}}$ con respecto al orden \prec_C .
3. Calculamos la forma normal (resto) de X^v con respecto a la base \mathcal{G} calculada en el punto 2.

Pasaremos ahora a la resolución del ejemplo planteado al inicio del capítulo cuya matriz de costos es (4.2). Nuestro objetivo será minimizar $Cu =$

$$\sum_{i,j=1,2,3} C_{ij} u_{ij} \text{ con } C = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que las restricciones en este problema eran las siguientes:

$$\begin{cases} u_{11} + u_{12} + u_{13} = 300 \\ u_{21} + u_{22} + u_{23} = 500 \\ u_{31} + u_{32} + u_{33} = 100 \\ u_{11} + u_{21} + u_{31} = 200 \\ u_{12} + u_{22} + u_{32} = 400 \\ u_{13} + u_{23} + u_{33} = 300 \end{cases}, \text{ con } u_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Como hemos explicado anteriormente, consideramos el semigrupo \mathcal{A} generado por las columnas de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Calculamos la base de Gröbner del ideal del semigrupo \mathcal{A} con respecto al orden \prec_C . Aplicando el Código de Python para el cálculo del ideal asociado a un semigrupo que se detalla en el Apéndice obtenemos:

$$I_{\mathcal{A}} = \langle x_{11}x_{33} - x_{13}x_{31}, x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21}, x_{11}x_{32} - x_{12}x_{31}, \\ x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}, x_{12}x_{33} - x_{13}x_{32}, x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22}, \\ x_{21}x_{33} - x_{23}x_{31}, x_{21}x_{32} - x_{22}x_{31}, x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32} \rangle. \tag{4.14}$$

Tenemos que buscar una solución factible inicial. Para ello, hemos recurrido a la programación lineal entera, en concreto al *método del costo mínimo* y obtenemos $v = (100, 200, 0, 0, 200, 300, 100, 0, 0)$ como solución factible inicial a la que asociamos el monomio:

$$X^v = x_{11}^{100} x_{12}^{200} x_{22}^{200} x_{23}^{300} x_{31}^{100}, \tag{4.15}$$

cuya forma normal respecto a la base de Gröbner calculada es

$$X^u = x_{12}^{300} x_{21}^{100} x_{22}^{100} x_{23}^{300} x_{31}^{100}, \tag{4.16}$$

que a su vez determina la solución óptima $(0, 300, 0, 100, 100, 300, 100, 0, 0)$ que supondría un costo de 10.400 euros.

Representamos la solución en el grafo de la Figura 4.3.

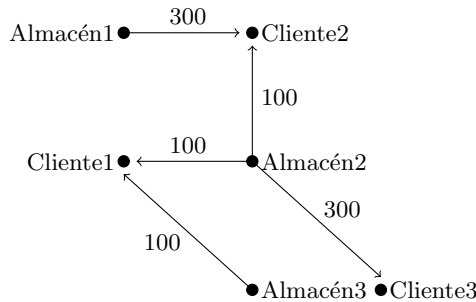


Figura 4.2. Solución óptima

4.4. Implementación en Gusek

En esta sección usaremos conocimientos de Programación Combinatoria para resolver el problema. Aplicando el programa Gusek con el lenguaje de programación *GMPL*, obtenemos los resultados de la Figura 4.3, que efectivamente

```

El coste total de transporte es 10400
Origin Destination Trans. Cost/u. Total
  1           2     300     16  4800
  2           1     100     10  1000
  2           2     100     10  1000
  2           3     300     8   2400
  3           1     100     12  1200
-----
Total:                               10400
Model has been successfully processed
>Exit code: 0   Time: 0.234

```

Figura 4.3. Resultado por pantalla utilizando el Gusek

coinciden con nuestra solución óptima.

Como se puede observar en la Figura 4.3, el tiempo de compilación ha sido solamente 0.234 segundos. Asimismo, para implementar este método no hemos necesitado darle al programa ninguna solución factible inicial. Un posible trabajo futuro podría ser intentar optimizar el método algebraico para compilar la solución de una manera más rápida y sin necesitar un cálculo previo.

No obstante, el problema de transporte dentro de la programación lineal es un problema con complejidad polinomial, esto es, de resolución en tiempo polinomial, lo que nos indica que no es complicado. La facilidad de su resolución se debe a que como se puede comprobar en el código del Apéndice, la variable x no es necesaria definirla como entera. Es por ello, que lo óptimo sería intentar aplicar Bases de Gröbner a problemas que sí que tengan restricciones enteras y que esto les convierta en problemas de complejidad no polinomiales. Puede ser que utilizando herramientas algebraicas consigamos reducir la complejidad de dichos problemas.

A

Apéndice

Incluimos en esta sección los códigos que hemos elaborado en Gusek así como los códigos en Python estudiados en [3].

A.1. Códigos del Problema de la Boda

A.1.1. Código Gusek para maximizar el beneficio

```
/* Problema de la Boda */  
  
#Definimos variables  
var x integer;  
var y integer;  
var n integer;  
  
#Función objetivo  
maximize z: 200*n-600*x-800*y;  
  
#Restricciones  
r1: n+1<=4*x+6*y;  
r2: x>=0;  
r3: y>=0;  
r4: n>=0;  
  
solve;  
data;  
end;
```

A.1.2. Código Gusek para calcular el número de mesas

```

/* Problema de la Boda */

#Definimos variables
var x integer;
var y integer;
param n, integer, >= 0;

#Función objetivo
minimize z: 600*x+800*y;

#Restricciones
r1: 600*x+800*y+16000<=200*n;
r2: n+1<=4*x+6*y;
r3: x>=0;
r4: y>=0;

solve;
end;

```

A.2. Códigos del Problema de Transporte

A.2.1. Código de Python para calcular una base de Gröbner

```

import sympy
from sympy import symbols, groebner

groebner(fam, var, order=orden)

```

A.2.2. Código de Python para calcular el ideal asociado a un semigrupo

```

import numpy
from numpy import *
import sympy
from sympy import *
import integerSmithNormalFormAndApplications
from integerSmithNormalFormAndApplications import *

def vMas(v):

```

```

vv = []
for w in v:
    if w>0:
        vv.append(w)
    else:
        vv.append(0)
return vv

def vMenos(v):
    vv = []
    for w in v:
        if w<0:
            vv.append(-w)
        else:
            vv.append(0)
    return vv

def exp(var,exp):
    n = len(var)
    f = 1
    for i in range(n):
        f = f * var[i]**exp[i]
    return f

def GeneradorIdeal(generadores):
    ngen = len(generadores)
    genT = generadores.transpose()
    kernel = equationsToGeneratorsHomogeneousCase(Matrix(
        numpyArray2sympyMatrix(genT)))
    X = symbols('x0:%d'%ngen)
    y = symbols('y')
    nfil = kernel.rows
    anillo = []
    for i in range(nfil):
        vm = vMenos(kernel.row(i))
        vM = vMas(kernel.row(i))
        anillo.append(exp(X,vM)-exp(X,vm))
    uno = [1 for x in X]
    anillo.append(1-exp(X,uno)*y)
    var = [x for x in X]
    var.insert(0,y)
    bg = groebner(anillo, var, order='lex')
    ideal = []
    for x in bg:
        aux = str(x).find('y')
        if aux < 0:

```

```
ideal.append(x)
return ideal
```

A.2.3. Código Gusek para el Problema de Transporte

```
/* Problema de Transporte */
#Parámetros del problema:
param m, integer, > 0; # número de almacenes
param n, integer, > 0; # número de clientes
set I := 1..m; # conjunto de almacenes
set J := 1..n; # conjunto de clientes
param a{i in I}, >= 0; # suministro de los almacenes
param b{j in J}, >= 0; # demanda de los clientes
param c{i in I, j in J}, >= 0; # costo de transportar una
    unidad de producto del almacén i al cliente j

#Variables:
var x{i in I, j in J}, >= 0; # x[i,j] = cantidad de producto
    que se transporta desde el almacén i al clientes j

# var x{i in I, j in J}, >= 0, <= 30;

#Modelo:
minimize obj: sum{i in I, j in J} c[i,j] * x[i,j];
s.t. suministro{i in I}: sum{j in J} x[i,j] = a[i];
s.t. demanda{j in J}: sum{i in I} x[i,j] = b[j];
/* The demand of destination j is b[j] */

solve;
end;
```

Bibliografía

- [1] AJILI, F., CONTEJEAN, E. *Avoiding slack variables in the solving of linear diophantine equations and inequations*. Theor. Comput. Sci. 173(1), (1997), 183-208.
- [2] COX, D., LITTLE, J., O'SHEA D. *Ideals, varieties, and algorithms*. Second Edition, Springer, 1996.
- [3] GARCÍA GARCÍA, J.I., MARÍN ARAGÓN, D., VIGNERON-TENORIO A. *MOOC Practical Approaching to Computational Algebra (Computation with Python)* 2º Edición, Universidad de Cádiz, 2019.
- [4] GARCÍA-SÁNCHEZ, P.A., ROSALES, J.C. *Numerical Semigroups*. Developments in Mathematics, volume 20, 2009.
- [5] PISÓN-CASARES, P., VIGNERON-TENORIO, A. \mathbb{N} -solutions to linear systems over \mathbb{Z}^* . 384 (2004), 135-154.
- [6] POTTIER, L. *Bornes et algorithme de calcul des générateurs des solutions de systèmes diophantiens linéaires*. C. R. Acad. Sci. Paris 331, (1990), 813-816.
- [7] ROBLES-PÉREZ, A.M., ROSALES, J.C. *Numerical semigroups in a problem about cost-effective transport*. Forum Math. 29(2), (2017), 329-345.
- [8] ROBLES-PÉRES, A.M., ROSALES, J.C. *On transport problem and monoids of non-negative integers*. Aequat. Math. 92(2018), 661-670.
- [9] STURMFELS, B. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. University Lecture Series, Volume 8, AMS, 1995.
- [10] STURMFELS, B. *What is...Gröbner Basis?*. Notices AMS. Volume 52, Number 10, (2005), 1199-1200.

Índice

- D*-monoide, 5
- Base de Gröbner, 29
- Base de Gröbner reducida, 30
- Conjunto Apéry, 3
- Ecuaciones Diofánticas, 6
- Ideal de Polinomios, 25
- Monoide, 1
- Monomio líder, 27
- Orden lexicográfico, 26
- Orden monomial, 26
- Semigrupo, 1
- Semigrupo Numérico, 1
- Sistema Minimal de Generadores, 3
- Submonoide, 1
- Submonoide de $(\mathbb{N}^k, +)$ generado por X , 2
- Submonoide finitamente generado, 2
- Vértice de S , 7

Semigroups and applications



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Elena Alcover Jorge
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100966442@ull.edu.es

Abstract

In this project we will apply semigroups in order to solve two problems. The first one is called “the problem of the wedding” and our goal will be to find the number of guests as well as the number of each type of tables are needed to achieve the maximum profit of the organizing company. The second one is a classic transportation problem. To solve them, we will use semigroups, Gröbner basis and the resolution of diophantine inequities. Once we have the result, we will verify the algebraic method with the solution applying integer lineal programming.

1. Semigroups of \mathbb{N} and the problem of the wedding

A **semigroup** is a nonempty subset S of \mathbb{N}^n that is closed under addition and contains the zero element. Moreover, if $n = 1$ and the complement of S in \mathbb{N} is finite, we will say that S is a **numerical semigroup**. Numerical semigroups live in the world of **monoids**. A semigroup S is a monoid if it has an identity element, that is, there is an element in S , denoted by 0 , such that $0 + a = a + 0 = 0$ for all $a \in M$.

Let be $a, b \in \mathbb{N}$. We will study the set:

$$S(a, b, \alpha, \beta) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + \alpha \leq n \leq b_1 x_1 + \dots + b_p x_p - \beta \\ \text{for some } (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p \end{array} \right\}, \quad (1)$$

formed by the integers n such that the system of inequalities, with non-negative integer coefficients,

$$a_1 x_1 + \dots + a_p x_p + \alpha \leq n \leq b_1 x_1 + \dots + b_p x_p - \beta \quad (2)$$

has at least one solution in \mathbb{N}^p . The set $S(a, b, \alpha, \beta)$ is a submonoid of $(\mathbb{N}, +)$ and moreover, we present an algorithmic process to compute it. We also characterize when the set $S(a, b, \alpha, \beta)$ is a numerical semigroup.

The answer of the problem of the wedding will be a subset of type (1).

We present this problem with the following example.

“The problem of the wedding”

In this problem we will pretend to maximize the profit. We have a catering that needs to know how many tables of each type (4 – 6 guests) are needed for a wedding. Each type of table has a different price (600 – 800 euros) and we have n guests but we have to be ready for $n + 1$. At the end, we will have to solve the following system of inequations:

$$\begin{array}{l} n \geq 3x + 4y + 80, \\ n \leq 4x + 6y - 1, \end{array} \quad (3)$$

where we want to obtain a profit of at least 16000 euros. So our goal will be to find the set formed by the non-negative integers such that the system (3) will be feasible.

2. Semigroups of $\mathbb{N}^{n \times m}$ and the transportation problem

A finite subset \mathcal{G} of an ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ is a **Gröbner basis** of I with respect to a fixed monomial order $<$ if the monomial leaders, $in_{<}(g)$, of the elements $g \in \mathcal{G}$ are enough to generate the initial ideal:

$$in_{<}(I) := (in_{<}(g) : g \in \mathcal{G}). \quad (4)$$

We present the transportation problem with the following example.

“The transportation problem”

We will have three costumers and three factories. Each of the costumers will have a particularity demand and each factory will

have a capacity of production represented in the following table:

	Costumer 1	Costumer 2	Costumer 3	Offer
Factory 1	20	16	24	300
Factory 2	10	10	8	500
Factory 3	12	18	10	100
Demand	200	400	300	

Besides, we will have a cost matrix that indicates how much it will cost to transport one unit from the factory to each costumers:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 24 \\ 10 & 10 & 8 \\ 12 & 18 & 10 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

In general, we will have to solve the following problem:

$$\min z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} u_{ij},$$

subject to:

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n u_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m u_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \end{array} \quad (6)$$

where c_{ij} will be the unit cost of transport per unit from the factory i to the destination j , u_{ij} will be the units to transport to the factory i to the costumers j , a_i will be the production of i and b_j will be the demand of the costumers j .

To solve the problem, we will build a map π such that

$$\begin{array}{l} \pi : \mathbb{N}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{N}^{n \times m} \\ u = (u_{ij}) \rightarrow \left(\sum_{j=1}^n u_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^n u_{mj}; \sum_{i=1}^m u_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m u_{im} \right), \end{array} \quad (7)$$

where image of π is a **semigroup** of $\mathbb{N}^{n \times m}$. The set of the solutions of system (6) is $\pi^{-1}(a; b)$. So, in order to solve the problem, we define a directed graph $\pi^{-1}(a; b)_{F, <_c}$, where:

- F is a finite subset of $\ker_{\mathbb{Z}}(\pi)$.
- The nodes of the graph will be the elements of $\pi^{-1}(a; b)$.
- Two nodes u and u' will be connected if $u - u' \in F$ or $u' - u \in F$.
- The arrow (u, v) is directed from u to v if $v <_c u$, where $<_c$ is a order defined using the cost matrix C .

The graph $\pi^{-1}(a; b)_{F, <_c}$ is connected and has a unique sink if and only if the set $\{ X^u - X^v : u, v \in F \}$ is a Gröbner basis \mathcal{G} of the ideal associated with the semigroup $Im(\pi)$.

The sink of the graph $\pi^{-1}(a; b)_{F, <_c}$ will be the optimal solution of the transportation problem given in (6).

References

- [1] GARCÍA GARCÍA, J.I., MARÍN ARAGÓN, D., VIGNERON-TENORIO A. *MOOC Practical Approaching to Computational Algebra (Computation with Python)* 2ª Edición, Universidad de Cádiz, 2019.
- [2] GARCÍA-SÁNCHEZ, P.A., ROSALES, J.C. *Numerical Semigroups*. Developments in Mathematics, volume 20, 2009.
- [3] ROBLES-PÉREZ, A.M., ROSALES, J.C. *On transport problem and monoids of non-negative integers*. Aequat. Math. 92(2018), 661-670.
- [4] STURMFELS, B. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. University Lecture Series, Volume 8, AMS, 1995.