Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

María Jesús Quintero Álvarez

# *El conjunto y la función de Cantor*

The Cantor set and function

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2019

Dirigido por
*Antonio Bonilla Ramírez*

*Antonio Bonilla Ramírez*
*Departamento Análisis Matemático*
*Universidad de La Laguna*
*38200 La Laguna, Tenerife*

# Resumen · Abstract


## *Resumen*

*El objetivo de este trabajo es construir el conjunto y la función de Cantor y estudiar sus propiedades fundamentales.*



**Palabras clave:** *Conjunto de Cantor – Función de Cantor.*



## *Abstract*

*The objetive of this work is construct the Cantor set and function and study their fundamental properties.*



**Keywords:** *Cantor set – Cantor function.*

# Contenido

# Introducción

El conjunto de Cantor es uno de los ejemplos y contraejemplos más usados en el área de las Matemáticas.
Fue construido por primera vez a finales del siglo XIX por Georg Cantor para resolver un problema topológico en el cual se planteaba la existencia o no de un subconjunto compacto, no vacío de $\mathbb{R}$ que fuera totalmente disconexo y perfecto.

En el primer capítulo daremos la construcción del conjunto de Cantor y estudiaremos sus propiedades principales, tales como que es un cojunto no vacío, compacto, perfecto y totalmente disconexo. También veremos que es no numerable, simétrico y está formado por dos tipos de puntos: los visibles que forman un conjunto numerable y denso y está formado por números racionales, y los ocultos que forman un conjunto no numerable, pero que son difíciles de mostrar y de los cuales daremos algunos ejemplos. Además veremos que es un conjunto autosimilar con dimensión topológica cero y dimensión Hausdorff $ln2/ln3$, por tanto un ejemplo de fractal.

En el segundo capítulo definiremos la función de Cantor que nos da un ejemplo de función definida de [0,1] en [0,1], continua, creciente, no absolutamente continua y con derivada cero en casi todo punto. Además veremos que es Lipzchiziana de orden $ln2/ln3$, subaditiva y no débilmente derivable. Como aplicaciones obtendremos que el conjunto de funciones absolutamente continuas con la norma uniforme no es cerrado, que el conjunto de los conjuntos de Borel es un subconjunto propio de los conjuntos medibles Lebesgue, que ser de medida cero y ser medible no son propiedades topológicas y que existen funciones continuas y monótonas cuya longitud de su grafo es 2 mientras que las funciones diferenciables con continuidad siempre tienen longitud del grafo menor que 2.

En el tercer capítulo construiremos otras funciones en base al conjunto de Cantor o tipo Cantor, como funciones Riemann integrables con un conjunto no numerable de discontinuidades, funciones continuas con un conjunto no numerable de ceros, funciones de clase $C^1$ con una cantidad no-numerable de puntos críticos, funciones de Darboux con un conjunto no numerable de discontinuidades, funciones de la primera clase de Baire y funciones diferenciables con $F'$ acotada pero no Riemann integrables.

# 1

# Conjunto de Cantor

## 1.1. Construcción del conjunto de Cantor

En primer lugar, dividimos el intervalo $I = [0, 1]$ en tres intervalos de igual longitud y luego eliminamos el subintervalo abierto que se encuentra ubicado en el medio, esto es, $J(1)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, y dejamos los intervalos cerrados $[0,\frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3},1]$.

Definimos:

1. $J_1=J(1)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
2. $F_{11}=[0,\frac{1}{3}]$ y $F_{12}=[\frac{2}{3},1]$. La longitud de cada uno de estos intervalos cerrados es $\frac{1}{3}$.
3. $C_1=[0,1]\backslash J_1=[0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. Tenemos que $C_1$ es compacto y su longitud es $\frac{2}{3}$.

En segundo lugar se subdividen los intervalos cerrados $F_{11}$ y $F_{12}$ en tres partes iguales, eliminando, como en el paso anterior, los intervalos abiertos centrales $J_2(1)=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ y $J_2(2)=(\frac{6}{9},\frac{7}{9})$, y conservando los cuatro intervalos restantes.

Ahora definimos:

1. $J_2=J_2(1)\cup J_2(2)$
2. $F_{21}=[0,\frac{1}{3^2}]$, $F_{22}=[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}]$, $F_{23}=[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}]$, $F_{24}=[\frac{8}{3^2},1]$. La longitud de cada intervalo es $\frac{1}{3^2}$.
3. $C_2=[0,1]\backslash J_1 \cup J_2=$ $[0,1]\backslash(J_1(1)\cup J_2(1)\cup J_2(2))=$ $\cup_{j=1}^{2^2} F_{2j}$. $C_2$ es compacto y su longitud es $\frac{4}{3^2}$. Además $C_2\subset C_1$.

Continuando de este modo indefinidamente obtendremos dos sucesiones de conjuntos $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(C_n)_{n=1}^{\infty}$, con las siguientes propiedades. Para cada $n \geq 1$:

1. $J_n$ es la unión disjunta de $2^{n-1}$ intervalos abiertos: $J_n(1)$,...,$J_n(2^{n-1})$.
2. $C_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, donde cada $C_n$ es la unión disjunta de $2^n$ intervalos cerrados:

$$C_n = F_{n1} \cup ... \cup F_{n2^n} = [0, 1] \setminus (J_1 \cup ... \cup J_n).$$

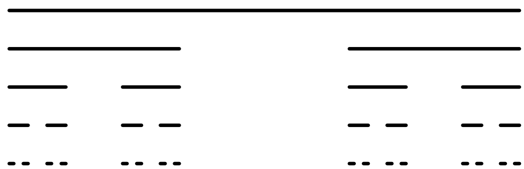


**Figura 1.1.** Conjunto de Cantor

3. Cada uno de los intervalos que definen a $J_{n+1}$ es el centro de alguno de los intervalos que componen $C_n$, $n = 1, 2, ...$
4. La longitud de cada una de las componentes, tanto de $J_n$ así como de $C_n$ es $\frac{1}{3^n}$. Por tanto, la suma total de todas las longitudes de los intervalos de $J_n$ y $C_n$ es, respectivamente:

$$l(J_n) = 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

$$l(C_n) = 2^n\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

Finalmente, sean

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$$

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus G.$$

Se observa que $G$ es un conjunto abierto no vacío, y como $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos, entonces $C$ es también no vacío. A este conjunto $C$ es al que llamaremos conjunto ternario de Cantor.

Otra manera de describir el conjunto de Cantor es considerar la función definida por

$$T(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \\ 3 - 3x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

entonces

$$C = \{x \in [0,1] : T^n(x) \in [0,1], \forall n \geq 0\}$$

## 1.2. Propiedades del conjunto de Cantor

### 1.2.1. C es compacto

*Demostración.* Al construir el conjunto de Cantor quitamos a [0,1] una colección numerable de intervalos abiertos, que a su vez forman un conjunto abierto de [0,1], luego $C$ es cerrado. Como $C$ está contenido en [0,1] es acotado. Por tanto, $C$ es compacto. □

### 1.2.2. C tiene medida de Lebesgue cero

*Demostración 1:* En la construcción de $C$ eliminamos el intervalo $J_1(1)$ de longitud $\frac{1}{3}$ en el primer paso. En el segundo paso eliminamos $J_2(1)$ y $J_2(2)$, donde cada uno tiene longitud $\frac{1}{3^2}$, Por tanto, en estos dos primeros pasos hemos eliminado en total una longitud de $\frac{1}{3}+2\frac{1}{3^2}$ del intervalo [0,1]. En el n-ésimo paso habremos eliminado $2^{n-1}$ intervalos $J_n(1)$,...,$J_n(2^{n-1})$ cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^n}$, luego la suma de todas las longitudes eliminadas hasta el paso $n$ es:

$$S_n = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3^2} + 2^2\frac{1}{3^3} + ... + 2^{n-1}\frac{1}{3^n}$$

Se observa así que la suma de las longitudes de los intervalos eliminados de [0,1] es el siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Como la longitud del intervalo [0,1] es 1, obtenemos así que $C$ debe medir cero.

*Demostración 2:* Tenemos que $\forall n$ $C \subset C_n$ y $C_n$ está formado por $2^n$ intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Por tanto $m(C) \leq \frac{2^n}{3^n}$, $\forall n$. Luego, $m(C) = 0$.

### 1.2.3. C no contiene intervalos

*Demostración 1:* Como $C$ tiene medida de Lebesgue cero, concluimos que $C$ no contiene intervalos.

*Demostración 2:* El conjunto de Cantor $C$ no contiene intervalos, esto quiere decir que, si $x, y \in C$ con $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R}\backslash C$ tal que $x < z < y$. Supongamos que el intervalo $(x, y) \subset C$. Tomamos $p \in (x, y)$ y sea $r > 0$ tal que $(p - r, p + r) \subset (x, y)$. Consideramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2\cdot 3^n} < r$. Teniendo en cuenta que:

*Sean $p \in C$, $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2\cdot 3^n} < r$, entonces $(p - r, p + r) \cap (\mathbb{R} \setminus C_n) \neq \emptyset$.*

Obtenemos así que existe $q \in (p-r, p+r)\cap(\mathbb{R}\backslash C_n)$. Luego $q \in (p-r, p+r) \subset C \subset C_n$ y $q \in \mathbb{R}\backslash C_n$, esto es una contradicción que viene de haber supuesto que hay un intervalo $(x, y) \subset C$.

### 1.2.4. C es totalmente disconexo

*Demostración.* Sabemos que los únicos subconjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos y los puntos. $C$ no contiene ningún intervalo por la propiedad anterior. Probaremos entonces que las componentes conexas de $C$ son sus puntos. Procedemos por reducción al absurdo.
Supongamos que existe una componente $A$ que no es unipuntual. Entonces $A$ es un conjunto conexo, $A \subset C$, con $x, y \in A$ y $x < y$. Como $C$ no tiene intervalos hay un punto $z \in \mathbb{R} \setminus C$ tal que $x < z < y$. Esto implica que

$$A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A).$$

Observemos que $x \in (-\infty, z) \cap A$ e $y \in (z, \infty) \cap A$. Luego hemos escrito $A$ como unión de dos conjuntos abiertos en $A$, disjuntos y no vacíos. Esto contradice la conexidad de $A$. □

### 1.2.5. C es nunca-denso

**Definición 1.1.** *Un conjunto es nunca-denso si el interior de su clausura es vacío.*

*Demostración.* $C$ es cerrado, luego coincide con su clausura. Además como no contiene ningún intervalo, por tanto su interior es vacío. □

### 1.2.6. C es perfecto

**Definición 1.2.** *Un conjunto es perfecto si es cerrado y no tiene puntos aislados.*

*Demostración.* Ya hemos visto que $C$ es cerrado. Para demostrar que $C$ no contiene puntos aislados probamos que dado $x \in C$ y $\varepsilon > 0$ existe $y \in C$, con $y \neq x$ tal que $|x - y| < \varepsilon$.
Sea $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{3})^n < \varepsilon$.
Dado $x \in C$ entonces $x \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
En particular, $x \in C_n$ entonces existe $k \in \{0,1,2,...,2^n - 1\}$ tal que $x \in [\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}]$. Sabemos que $\frac{a_k}{3^n}$ y $\frac{a_k+1}{3^n} \in C$. Eligiendo $y = \frac{a_k}{3^n}$ ó $y = \frac{a_k+1}{3^n}$ para que $y$ sea distinto de $x$. Entonces,

$$| x - y | \leq | \frac{a_k}{3^n} - \frac{a_k + 1}{3^n} | = (\frac{1}{3})^n < \varepsilon$$

□

### 1.2.7. Cada $x \in C$ admite una única representación ternaria sin usar el dígito 1

*Demostración.* Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, $a_n\{0,1,2\}$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ converge a un elemento $x \in \mathbb{R}$. En este caso a $x$ también lo representamos en la forma

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 ...)_3$$

y diremos que $(0, a_1 a_2 a_3 ...)_3$ es una representación ternaria de $x$. Los números 0,1 y 2 son los llamados dígitos ternarios.
Entonces tenemos que,

$$C = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0,2\}, \forall n \geq 1\}$$

Pongamos

$$C^* = \{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0,2\}, \forall n \geq 1\}.$$

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} \in C^*$, donde $c_n \in \{0,2\}$ para todo $n \geq 1$. Fijamos un $n \in \mathbb{N}$ y consideramos la suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{3^k}$.

Se sigue entonces de lo anterior que $s_n \in C$ para todo $n \geq 1$ y, además,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = x.$$

Como $C$ es un conjunto cerrado, resulta que $x \in C$. Esto prueba que $C^* \subseteq C$.
Para demostrar la otra inclusión, sea $x \in C$ y supongamos que $x \notin C^*$. Como $x \notin C^*$, al expresar dicho número en su representación ternaria resulta que algunos de sus coeficientes deben ser igual a 1, de modo que no se pierde generalidad en suponer que $x$ tiene la forma

$$x = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, \tag{1.1}$$

donde $c_1, ..., c_{m-1}, ... \in \{0,2\}$ y $m$ es el primer entero tal que $c_m = 1$. Observese que no todos los $c_{m+j}$ con $j \geq 1$ pueden ser iguales a 0, pues si todos ellos fuesen cero por (1.1) tendríamos que

$$x = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \in C^*$$

lo cual es absurdo. Si suponemos que $c_{m+j} = 2$ para todo $j \geq 1$ se obtiene como antes que $x \in C^*$. Luego, existe al menos $c_{m+j} \neq 0$ y al menos un $c_{m+j} \neq 2$. De esto concluímos que

$$0 < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^m}.$$

Por lo tanto, por las representaciones ternarias de un punto de [0,1] y la construcción del Conjunto de Cantor, vemos que

$$\begin{aligned} a_j^m = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} < x &= \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \\ &< \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^m} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{c_n}{3^n} + \frac{2}{3^m} = b_j^m \end{aligned}$$

es decir, $x \in J_m(j)$. Pero como $C_m \subset [0,1] \backslash (J_m(1) \cup ... \cup J_m(2^{m-1}))$, resulta que $x \notin C_m$ y, en consecuencia, $x \notin C$. Esta contradicción muestra que $x \in C^*$ y finalizamos así la prueba. □

### 1.2.8. C es no numerable

*Demostración 1:* Para ver que $C$ es no numerable basta con demostrar que todo conjunto perfecto es no numerable.
Primero demostraremos el siguiente lema:

**Lema 1.3.** *Si $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos compactos no vacíos en un espacio métrico $X$ tales que $K_{n+1} \subset K_n$ para n =1,2,3,..., entonces $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Veamos primero que si $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ entonces la intersección de alguna colección finita de $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es vacía. Como $K_n$ es compacto en un espacio métrico, entonces $K_n$ es cerrado y por consiguiente $K_n^c$ es abierto.
Dado $K_1$, al ser la $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, tenemos que $\cup_{n=1}^{\infty} K_n^c = (\cap_{n=1}^{\infty} K_n)^c = X$ y por lo tanto $\{K_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de abiertos de $K_1$. Ya que $K_1$ es compacto, existe una colección finita $\{K_{n_1}^c, K_{n_2}^c, ..., K_{n_k}^c\}$ tales que $K_1 \subset K_{n_1}^c \cup K_{n_2}^c \cup ... \cup K_{n_k}^c$, lo cual permite concluir que $K_1 \cap K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap ... \cap K_{n_k} = \emptyset$. Luego $K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap ... \cap K_{n_k} = \emptyset$. □

Veamos ahora que todo conjunto perfecto $P$ en $\mathbb{R}$ es no numerable. Observamos en primer lugar que como $P$ tiene puntos de acumulación, debe ser infinito. Supongamos que es numerable y representemos sus puntos por $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Construyamos la sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de entornos como sigue:

Sea $V_1$ en un entorno $x_1$. Supongamos que se ha construido $V_n$ entorno de cierto $x_n$, entonces $V_n \cap P \neq \emptyset$. Si $x_{n+1} \in V_n$, consideramos un entorno $V_{n+1}$ de este punto de manera que:

1. $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$.
2. $x_n \notin \overline{V_{n+1}}$.
3. $V_{n+1} \cap P$ es no vacío.

Si $x_{n+1} \notin V_n$ tomamos un conjunto $V_{n+1}$ que verifique las mismas propiedades de antes, esto lo podemos hacer puesto que todo punto $P$ es un punto de acumulación. Como $V_{n+1} \cap P$ es no vacío, $V_{n+1}$ es entorno de algún punto $p \in P$, como en un principio habíamos numerado los puntos de $P$, existiría un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = x_{n+1}$. Por verificarse que $V_{n+1} \cap P$ es no vacío se prosigue la construcción de la misma manera. Definimos $K_n = \overline{V_n} \cap P$. Como $\overline{V_n}$ es cerrado y acotado entonces $K_n$ es compacto. Por otro lado, $x_n \notin \overline{K_{n+1}}$ por 2., lo cual nos dice que ningún punto de $P$ pertenece a $\cap_{n=1}^{\infty} K_n$. Ádemas por construcción $K_n \subset P$, por lo tanto $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Es decir, $K_n \neq \emptyset$, $K_{n+1} \subset K_n$ y $\cap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$. Esto es absurdo por el lema anterior, concluimos entonces que $P$ es no numerable.

*Demostración 2:* Supongamos que $C$ es numerable y sea $\{x_1, x_2, ...\}$ una enumeración de dicho conjunto. Escribimos cada uno de los $x_i$ en su representación ternaria sin usar el dígito 1, esto es:

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, a_{11} a_{12} a_{13} ...)_3, \\ x_2 &= (0, a_{21} a_{22} a_{23} ...)_3, \\ x_3 &= (0, a_{31} a_{32} a_{33} ...)_3, \\ &\;\; ... \end{aligned}$$

donde los $a_{mn} \in \{0, 2\}$ para todo m,n$\in \mathbb{N}$. Definimos

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } a_{nn} = 2 \\ 2 \text{ si } a_{nn} = 0 \end{cases}$$

Observamos que la lista anterior no contiene al número $x = (0, a_1 a_2 a_3 ...)$, que sí pertenece a $C$. Luego, es absurdo, y concluimos que $C$ es no numerable.

### 1.2.9. C es simétrico: C=1-C

*Demostración.* Sea $x \in C$ veamos que $1 - x \in C$. Dado $x \in C$ existe una sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ con cada $c_n \in \{0, 2\}$ tal que x$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$.
Entonces,

$$1 - x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - c_n}{3^n}$$

Por tanto $1 - x \in C$ pues $2 - c_n \in$\{0,2\} para todo $n \geq 1$. □

### 1.2.10. El conjunto de puntos visibles es numerable y denso en C.

Los puntos visibles son los extremos de los intervalos eliminados en cada paso de su construcción más el 0 y el 1, es decir,

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, ...$$

**Proposición 1.4.** *El conjunto de números visibles es numerable y denso en $C$.*

*Demostración.* El conjunto de puntos visibles es numerable porque la unión numerable de conjuntos finitos es numerable.
Veamos ahora que es denso en $C$. Para ello dado $x \in C$, probaremos que existe un punto visible tan próximo a $x$ como queremos. Si $x$ es un punto visible ya lo tendríamos. Pero si $x$ no lo fuese, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $n$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ y $x \in C \subset \cup_{j=0}^{2^n-1}[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}]$. Luego $x \in [\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}]$ para algún $j$. Por tanto la distancia de $x$ al punto visible $\frac{a_j}{3^n}$ es menor que $\varepsilon$. □

**Definición 1.5.** *Un conjunto se dice separable si contiene un conjunto denso numerable.*

Por lo tanto como consecuencia de lo demostrado anteriormente obtenemos:

**Corolario 1.6.** *El conjunto de Cantor es separable.*

### 1.2.11. Existen racionales no visibles

*Demostración.* En el conjunto de Cantor existen colecciones de fracciones que están ocultas en él, entre ellas las que tienen la forma $\frac{1}{3^n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto,

$$(0,\underbrace{0...0}_{n}\underbrace{2...2}_{n}\underbrace{0...0}_{n}\underbrace{2...2}_{n}0...)_3 = (\frac{2}{3^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+2}}+...+\frac{2}{3^{2n}})+(\frac{2}{3^{3n+1}}+\frac{2}{3^{3n+2}}+...+\frac{2}{3^{4n}})+...$$

$$= (\frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + ... + \frac{2}{3^{2n}})(1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^{6n}} + ...)$$

$$= \frac{3^n - 1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^{2n}}} = \frac{3^n - 1}{3^{2n} - 1} = \frac{3^n - 1}{(3^n + 1)(3^n - 1)} = \frac{1}{3^n + 1} \in C$$

Además, como $C$ es simétrico

$$1 - \frac{1}{3^n + 1} = \frac{3^n}{3^n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

forman parte de $C$, y también todas las fracciones del tipo

$$\frac{1}{3^m}\frac{3^n}{3^n+1}, \forall m,n \in \mathbb{N}.$$

En particular, para $n=1$ obtenemos $\frac{1}{4}=\frac{1}{3+1}\in C$ y su numerosa familia:

$$\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{3\cdot 4},\frac{11}{3\cdot 4},\frac{1}{3^2\cdot 4},\frac{11}{3^2\cdot 4},\frac{25}{3^2\cdot 4},\frac{35}{3^2\cdot 4},\frac{1}{3^3\cdot 4},$$

$$\frac{11}{3^3\cdot 4},\frac{25}{3^3\cdot 4},\frac{35}{3^3\cdot 4},\frac{73}{3^3\cdot 4},\frac{83}{3^3\cdot 4},\frac{97}{3^3\cdot 4},\frac{107}{3^3\cdot 4},\ldots$$

están todos en $C$. Pero no solo los números de la forma $\frac{1}{3^n+1}$ y sus simétricos están en $C$, existen muchos otros racionales ocultos en $C$ que no son fáciles de visualizar, como por ejemplo, todas las fracciones del tipo $\frac{2}{3^n-1}$ están en $C$ ya que

$$(0,\underbrace{0...02}_{n}\underbrace{0...02}_{n}0...)_3 == \frac{2}{3^n}+\frac{2}{3^{2n}}+\frac{2}{3^{3n}}+...=\frac{2}{3^n}\cdot[1+\frac{1}{3^n}+(\frac{1}{3^n})^2+(\frac{1}{3^n})^3+..]$$

$$=\frac{2}{3^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}=\frac{2}{3^n-1}\in C,$$

y por simetría, $1-\frac{2}{3^n-1}\in C$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por supuesto, los múltiplos $\frac{1}{3^m}\cdot\frac{2}{3^n-1}$ y $\frac{1}{3^m}\cdot(1-\frac{2}{3^n-1})$ están en $C$ para todo $m,n\in\mathbb{N}$. □

### 1.2.12. Números de Liouville en el conjunto de Cantor

Como $C$ posee la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$, hay una cantidad infinita no numerable de números irracionales ocultos. Determinar los números irracionales de $[0,1]$ que habitan en $C$ es una tarea complicada, para ver algunos ejemplos, introduciremos los números de Liouville, que denotaremos por $\mathbb{L}$.

**Definición 1.7.** *Un número real $x$ se dice de Liouville si para todo $n$ entero positivo, existen enteros $p$ y $q$ con $q\geq 2$ tales que*

$$0<|x-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^n}$$

Los números de Liouville son números irracionales trascendentes.

**Teorema 1.8.** *Existen números de Liouville en $C$.*

*Demostración.* Veamos que el punto del conjunto de Cantor $x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k!}}$ es un número de Liouville. En efecto, para cualquier entero $n\geq 1$, definimos $q_n$ y $p_n$ como sigue

$$q_n=3^{n!} \quad y \quad p_n=q_n\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3^{k!}}.$$

Entonces,

$$0 < |x - \frac{p_n}{q_n}| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^{k!}} \leq \sum_{k=(n+1)!}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{(n+1)!}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} =$$

$$= \frac{2}{3^{(n+1)!}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{3^{(n+1)!}} \leq \frac{3^{n!}}{3^{(n+1)!}} = \frac{1}{q_n^n}$$

□

Por la simetría del conjunto de Cantor, obtenemos que $1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n!}}$ es otro número irracional trascendente en el conjunto de Cantor.
Hasta ahora hemos visto que todos los puntos visibles del conjunto de Cantor son racionales y que existen puntos ocultos racionales e irracionales trascendentes. Por tanto, ¿existen números irracionales algebraicos en $C$? Algunas conjeturas podrían sugerir que la respuesta fuera negativa.

### 1.2.13. C no es extremadamente disconexo

**Definición 1.9.** *Un conjunto se dice extremadamente disconexo si la clausura de cualquier abierto es abierta.*

*Demostración.* Tenemos que $C \cap [0, \frac{1}{4})$ es un abierto en $C$ y su clausura es $C \cap [0, \frac{1}{4}]$ puesto que $\frac{1}{4} \in C$ que no es abierto en $C$, luego $C$ no es extremadamente disconexo. □

### 1.2.14. C+C=[0,2]

*Demostración.* Observamos en primer lugar que:

$$\frac{1}{2}C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,1\}, \forall n \geq 1\}.$$

De esto tenemos que:

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{3^n} : a_n, b_n \in \{0,1\}, \forall n \geq 1\}$$
$$= \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} : a_n \in \{0,1,2\}, \forall n \geq 1\} = [0,1]$$

y, por lo tanto, $C + C$=[0,2]. □

### 1.2.15. C-C=[-1,1]

*Demostración 1:* Es claro que $C - C \subset$ [-1,1].
Para demostrar la otra inclusión definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$R_n = \{x \in [0,1] : x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k}, a_k \in \{0,1,2\}\}.$$

Primero demostraremos que

$$R_n \subseteq C - C, \forall n \geq 1.$$

Para ello utilizaremos la inducción sobre $n$. Obsérvese que si $x \in C$, entonces $x = x - 0 \in C - C$, por lo que solo es necesario analizar los elementos de $R_n$ que no forman parte de $C$. Para $n = 1$, se cumple

$$R_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\} \subseteq C$$

y, por lo tanto, $R_1 \subseteq C - C$. Para $n = 2$ el conjunto $R_2$ contiene nueve elementos:

$$R_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\}$$

Por definición de $C$ tenemos que todas las fracciones de $R_2$ pertenece a $C$ salvo $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}$ y $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}$ las cuales las podemos expresar en la forma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = (0,11000...)_3 = (0,2000...)_3 - (0,0200...)_3 \in C - C$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} = (0,12000...)_3 = (0,2200...)_3 - (0,0222...)_3 \in C - C.$$

Por lo tanto $R_2 \subseteq C - C$.

Supongamos ahora que se cumple que $R_{n-1} \subseteq C - C$ y sea $x = (0, a_1 ... a_n)_3$ cualquier elemento de $R_n$ con $a_n \neq 0$. Supondremos que $x \notin C$. Como

$$x = (0, a_1 ... a_{n-1})_3 + \frac{a_n}{3^n}$$

resulta de nuestra hipótesis que existen $r_{n-1}$ y $q_{n-1}$ en C tal que

$$(0, a_1 ... a_{n-1})_3 = r_{n-1} - q_{n-1}$$

Pongamos

$r_{n-1} = (0, b_1 ... b_{n-1} ...)_3$ y $q_{n-1} = (0, c_1 ... c_{n-1} ...)_3$,

donde los dígitos $b_1, c_1, b_2, c_2, ... \in \{0, 2\}$. Se puede escribir $r_{n-1}$ de la forma

$$(0, b_1 ... b_{n-1} 000...)_3.$$

Por eso, $(0, a_1 ... a_{n-1})_3$ se puede escribir como

1. $(0, a_1 ... a_{n-1})_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 000...)_3$ - $(0, c_1 ... c_{n-1} 000...)_3$ con $c_{n-1} \neq 0$, aunque $b_{n-1}$ puede ser 0, o
2. $(0, a_1 ... a_{n-1})_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 000...)_3$ - $(0, c_1 ... c_{n-1}, 0222...)_3$.

Si $a_n$=2, hacemos $b_n$=2 y así se tiene que

$$(0, a_1 ... a_{n-1} 2)_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 200...)_3 - (0, c_1 ... c_{n-1} 000...)_3$$

o

$$(0, a_1 ... a_{n-1} 2)_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 200...)_3 - (0, c_1 ... c_{n-1} 0222...)_3$$

pertenece a $C - C$. Si $a_n = 1$, podemos escribir

$$(0, a_1 ... a_{n-1} 1)_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 2000...)_3 - (0, c_1 ... c_{n-1} 0222...)_3$$

o

$$(0, a_1 ... a_{n-1} 1)_3 = (0, b_1 ... b_{n-1} 000...)_3 - (0, c_1 ... c_{n-1} c_n 000...)_3$$

Por tanto, hemos completado la prueba del paso inductivo. Para finalizar, sea $x \in [0, 1]$ y supongamos que su representación ternaria no es finita, es decir $x \notin R_n$ para todo $n \geq 1$. De la discusión anterior sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $r_n$ y $q_n$ en C tales que $p_n = r_n - q_n$. Como $C$ es compacto, se sigue del Teorema de Bolzano -Weierstrass que existe una subsucesión $(r_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a un único punto $r \in C$. La correspondiente subsucesión $(q_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ también posee una subsucesión $(q_{n_{j_i}})_{i=1}^{\infty}$ que converge a un punto $q \in C$. Puesto que toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo punto, se tiene que:

$$x = \lim_{i \to \infty} p_{n_{j_i}} = \lim_{i \to \infty} (r_{n_{j_i}} - q_{n_{j_i}}) = r - q \in C - C$$

Finalmente, si $x \in [-1, 0]$, entonces $-x \in [0, 1]$ y por lo anterior, existen $r, q \in C$ tal que $x = r - q$. Por eso, $-x = q - r \in C - C$ y, en consecuencia,

$$[-1, 1] \subseteq C - C$$

*Demostración 2:* Por definición tenemos que:

$$C - C := \{x - y : x, y \in C\}$$

Como $C$ es simétrico dado $y$ en $C$, existe $z$ en $C$ tal que $y = 1 - z$. Además sabemos que $C + C = [0, 2]$, restando 1, obtenemos el resultado. Es decir,

$$C - C := \{x - y : x, y \in C\} = \{x - (1 - z) : x, z, \in C\} = C + C - 1 = [-1, 1]$$

### 1.2.16. C tiene dimensión topológica cero

**Definición 1.10.** *Un subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica cero si todo punto de $S$ posee entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras no intersectan a $S$.*

Todo conjunto finito de puntos tiene dimensión topológica cero: si la distancia mínima entre dos puntos del conjunto es $d$, las bolas centradas en cada punto de radio arbitrariamente pequeño no contienen a ningún otro punto.
Todo conjunto numerable, como $\mathbb{Q}$, tiene dimensión topológica cero. La idea es observar que para cada racional $x_0$ existen incontables bolas centradas en $x_0$ cuya frontera son puntos irracionales.

**Teorema 1.11.** *El conjunto de Cantor tiene dimensión topológica cero.*

*Demostración.* Si $x$ es un punto del conjunto de Cantor, $x \in C$, entonces existen $a < x$ y $b > x$ no pertenecientes al conjunto, arbitrariamente cerca de $x$. Entonces el intervalo $[a, b]$ es un entorno de $x$ cuya frontera no intersecta a $C$. □

### 1.2.17. C tiene dimensión de Hausdorff *ln2/ln3*

Para introducir la dimensión de Hausdorff, primero debemos introducir algunas definiciones.

**Definición 1.12.** *Sea $U$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ no vacío. El diámetro de $U$, es el número*

$$|U| := sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Por ejemplo, si $U = [a, b]\text{x}[c, d]$ entonces $|U|$ corresponde a la longitud de la diagonal del rectángulo $U$.

**Definición 1.13.** *Sean $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Una colección numerable de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\{U_i\}_{i\geq 1}$, es un $\delta -$ recubrimiento de $F$, si para todo $i \geq 1$ se tiene que $0 \leq |U_i| \leq \delta$ y además*

$$F \subseteq \cup_{i\geq 1} U_i.$$

**Definición 1.14.** *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $s \geq 0$. Para cualquier $\delta > 0$ definimos*

$$H^s_\delta(F) := inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \quad es \quad un \quad \delta - recubrimiento \quad de \quad F\}.$$

Observamos que a medida que $\delta$ se hace más pequeño, la clase de recubrimientos permitidos de $F$ decrece, por lo tanto, la expresión $H^s_\delta$ crece y tiende a un límite cuando $\delta \longrightarrow 0$.

**Definición 1.15.** *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$, la medida s-dimensional de Hausdorff de $F$ es el número*

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F).$$

*El límite anterior existe para cualquier $F \subseteq \mathbb{R}$.*

*Existe un valor crítico $s$ en el cuál la función $H^s(F)$ salta de $\infty$ a 0. Este valor crítico recibe el nombre de Dimensión de Hausdorff de $F$.*

**Definición 1.16.** *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. La dimensión de Hausdorff de $F$, es el número*

$$dim_H(F) = inf\{s \geq 0 : H^s(F) = 0\} = sup\{s \geq 0 : H^s(F) = \infty\}.$$

De la definición anterior y que $sup\emptyset = 0$, tenemos:

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty \text{ si } 0 \leq s < dim_H(F) \\ 0 \quad \text{si } s > dim_H(F) \end{cases}$$

Si $s = dim_H(F)$, entonces $H^s(F)$ puede ser igual a 0, $\infty$, o $0 < H^s(F) < \infty$.

**Teorema 1.17.** $dim_H(C) = \frac{ln2}{ln3}$ *y* $\frac{1}{2} \leq H^{\frac{ln2}{ln3}}(C) \leq 1$.

*Demostración.* Consideramos los intervalos de la $k-$énesima etapa de la construcción del conjunto de Cantor como un $3^{-k}$-recubrimiento de este. Entonces,

$$H^s_{3^{-k}}(C) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$$

con $s = ln2/ln3$. Haciendo $k \to \infty$ se tiene que $3^{-k} \to 0$ y en consecuencia $H^s(C) \leq 1$.

Por otro lado, usando la compacidad de C, es suficiente verificar que

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}$$

para cualquier colección finita $\{U_i\}_{i \geq 1}$ de intervalos cerrados $[0, 1]$ que cubren a $C$. Para cada $U_i$, sea $k$ el entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Entonces $U_i$ intersecta a lo sumo un intervalo del $k-$nivel, ya que la separación de los intervalos de este nivel es al menos de $3^{-k}$. Si $j \geq k$, entonces $U_i$ intersecta a lo sumo

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s,$$

intervalos del $j-$nivel $C_j$. Ya que

$$2^j 3^{-(k+1)s} = 2^j 3^{-sk} 3^{-s} \leq 2^j |U_i|^s.$$

Si elegimos $j$ lo suficientemente grande tal que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo $U_i$, lo cual es posible ya que la colección es finita, y sumamos todos los intervalos de la $k-$ésima etapa, tenemos que

$$2^j \leq \sum_{i \geq 1} 2^j 3^s |U_i|^s,$$

ya que $\{U_i\}_{i \geq 1}$, intersecta a todos los $2^j$ intervalos básicos de largo $3^{-j}$. Así tenemos que

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Tomando ínfimos y haciendo tender el diámetro de los cubrimientos a cero, obtenemos $H^s(C) \geq \frac{1}{2}$.

Dado que $H^{ln2/ln3}(C)$ es finita distinta de cero, obtenemos que $dim_H(C) = \frac{ln2}{ln3}$. □

### 1.2.18. C es un fractal

**Definición 1.18.** *Un conjunto se dice autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo.*

**Definición 1.19.** *Un fractal es un conjunto autosimilar con dimensión de Hausdorff mayor que su dimensión topológica.*

*Demostración.* C es un fractal ya que es un conjunto autosimilar por construcción, con dimensión Hausdorff positiva y dimensión topológica nula. □

## 1.3. Generalizaciones del conjunto de Cantor

### 1.3.1. Conjuntos tipo-Cantor de medida cero

En esta sección construiremos conjuntos tipo-Cantor de medida cero. Para ello, fijamos un $\alpha \in (0,1)$ y sea $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$. Nótese que $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ ya que

$$0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < -\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}$$

La construcción de los conjuntos $C_\alpha$ la haremos de manera similar al conjunto de Cantor.
El conjunto $I_1$ se obtiene al eliminar del centro de [0,1] el intervalo abierto $(\beta, 1-\beta)$ de longitud $1-2\beta = \alpha$, quedando dos intervalos cerrados cada uno de longitud $\beta$, es decir,

$$I_1 = [0, \beta] \cup [1-\beta, 1].$$

Continuando con el proceso, tenemos que $I_2$ se obtiene de $I_1$ eliminando del centro de cada uno de los intervalos cerrados de $I_1$ un intervalo abierto de longitud $\alpha\beta$. Cada uno de los cuatro intervalos que define a $I_2$ tiene longitud $\beta^2$, por lo que la longitud de $I_2$ es $2^2\beta^2 = (1-\alpha)^2$.

$$I_2 = ([0, \beta^2] \cup [\beta(1-\beta), \beta]) \cup ([1-\beta, \beta^2 + (1-\beta)] \cup [(1-\beta) + \beta(1-\beta), 1])$$

En general, $I_n$ es la unión disjunta de $2^n$ intervalos cerrados cada uno de longitud $\beta^n$ y $I_{n+1}$ se obtiene eliminando del centro de cada intervalo de $I_n$ un intervalo abierto de longitud $\alpha\beta^n$. Por supuesto, la colección $(I_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de [0,1] que posee la propiedad de intersección finita y, en consecuencia, por la compacidad de [0,1], resulta que $C_\alpha$ es no vacío.

Sea por tanto

$$C_\alpha = \cap_{n=1}^\infty I_n,$$

que es un conjunto con características similares al conjunto ternario de Cantor al que llamaremos un conjunto tipo-Cantor de medida cero. Nótese que si $\alpha = 1/3$ obtenemos el conjunto ternario de Cantor, es decir, $C = C_{1/3}$.

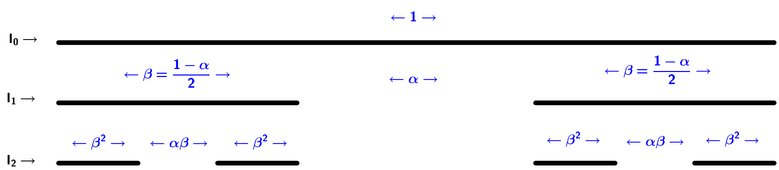



**Figura 1.2.** Conjunto tipo-Cantor de medida cero

**Teorema 1.20.** *El conjunto $C_\alpha$ tiene medida de Lebesgue cero.*

*Demostración 1:* Tenemos que en el $n-$ésimo paso de la construcción de $C_\alpha$, $I_n$ está formado por $2^n$ intervalos disjuntos, cada uno de ellos de longitud $\beta^n$, con $\beta < \frac{1}{2}$, Por tanto, $m(I_\alpha) = 2^n\beta^n$. Entonces, como $C_\alpha = \cap_{n=1}^\infty I_n$ donde $I_n$ es una sucesión de conjuntos encajados tenemos que

$$m(C_\alpha) = \lim_{n\to\infty} m(I_n) = \lim_{n\to\infty} 2^n\beta^n = 0.$$

*Demostración 2:* Observamos que en el primer paso eliminamos un intervalo de longitud $\alpha$, en el segundo quitamos dos intervalos de longitud $\alpha\cdot\beta$, en el tercero eliminamos cuatro intervalos de longitud $\alpha\cdot\beta^2$ y así sucesivamente. Entonces, usando que $\alpha = 1-2\beta$ obtenemos que

$$m(C_\alpha) = 1-(\alpha + 2(\alpha\beta) + ... + 2^n(\alpha\beta^n) + ...) = 1-\alpha\sum_{n=0}^{\infty} 2^k\beta^k = 1-\alpha\cdot\frac{1}{1-2\beta} = 0$$

de modo que la medida de $C_\alpha$ es cero.

Además es compacto, nunca-denso y perfecto.

### 1.3.2. Conjunto de Cantor n-ario

Existen otros procedimientos distintos al anterior para generar conjuntos tipo-Cantor de medida cero. Por ejemplo, si dividimos el intervalo [0,1] en 5 partes iguales y eliminamos los intervalos abiertos que ocupan el segundo y cuarto lugar. Repetimos el paso anterior en los 3 intervalos cerrados que permanecen y eliminamos de nuevo el segundo y el cuarto intervalos abiertos en cada uno de ellos.Continuando así sucesivamente, y obtenemos de este modo que la intersección de todos los intervalos cerrados que permanecen en cada etapa del proceso es otro conjunto tipo-Cantor que posee las mismas propiedades topológicas que el conjunto ternario de Cantor, y en particular, su medida también es nula.

El conjunto de Cantor $n-$ario es una generalización del conjunto de Cantor donde partimos de un número impar $n = 2m+1$ de divisiones con $m = 0, 1, 2, 3, ...$. Comenzamos con el intervalo $K_0 = [0, 1]$ y lo dividimos en $n$ subintervalos iguales. Eliminamos los intervalos abiertos $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$,$(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}), ..., (\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n})$ tal que $K_1 = [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}] \cup ... \cup [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}]$. A continuación subdividimos cada uno de estos $m+1$ intervalos restantes en $n$ subintervalos iguales, eliminamos de aquí el segundo, el cuarto,..., $2m-$ésimo subintervalo abierto y nos quedaríamos con el resto, que sería nuestro $K_2$. Procediendo de esta forma, obtendremos una sucesión $K_k$, donde cada $K_s$ está formado por $(m+1)^s$ intervalos cerrados disjuntos de longitud $(\frac{1}{n})^s$.
Luego el conjunto de Cantor $n-$ario se define por

$$K(n) = \cap_{k=0}^{\infty} K_k$$

**Teorema 1.21.** *El conjunto de Cantor $n-$ario tiene medida de Lebesgue cero.*

*Demostración 1:* En el $k-$ésimo paso de la construcción de $K(n)$,$K_k$ esta formado por $(m+1)^k$ intervalos disjuntos, cada uno de longitud $(\frac{1}{n})^k$. Por tanto,

$m(K_k) = (m+1)^k \cdot (\frac{1}{n})^k = (\frac{m+1}{n})^k$. Entonces, como $K(n) = \cap_{n=1}^{\infty} K_k$ donde $K_k$ es una sucesión de conjuntos encajados tenemos que

$$m(K(n)) = \lim_{k\to\infty} m(K_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m+1}{n}\right)^k = 0$$

*Demostración 2:* Observamos que en el primer paso eliminamos $m$ intervalos de longitud $\frac{1}{n}$, en el segundo quitamos $(m+1)\cdot m$ intervalos de longitud $(\frac{1}{n})^2$, en el tercero eliminamos $(m+1)^2 \cdot m$ intervalos de longitudes $(\frac{1}{n})^3$ y así sucesivamente. Entonces, usando propiedades de series geométricas obtenemos que

$$m(K(n)) = 1-(m\frac{1}{n}+(m+1)\cdot m\cdot(\frac{1}{n})^2+(m+1)^2\cdot m\cdot(\frac{1}{n})^3+...) = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(m+1)^{k-1}m}{n^k}$$

$$= 1 - \frac{m}{n}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{m+1}{n})^k = 1 - \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{m+1}{n}} = 1 - \frac{m}{n}\cdot\frac{n}{n-m-1} = 0$$

### 1.3.3. Conjunto tipo-Cantor de medida positiva

El conjunto ternario de Cantor fue construido eliminando, en cada etapa de sus construcción, $2^{n-1}$ intervalos abiertos, cada uno de ellos de longitud $3^{-n}$. Pero también podemos construir conjuntos tipo-Cantor con medida positiva. El proceso para lograrlo va a depender del tamaño de los intervalos abiertos que hay que eliminar en cada paso.
Fijamos un $\alpha \in (0,1)$. Eliminamos del centro de [0,1] un intervalo abierto de longitud $\alpha/2$, llamemos

$$J_1(1) = (\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2^2}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2^2})$$

y denotamos por $C_1(\alpha)$ la unión de los dos intervalos cerrados que permanencen, esto es,

$$S_1(\alpha) = F_{11} \cup F_{12} = [0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2^2}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2^2}, 1]$$

Eliminamos del centro de $F_{11}$ y de $F_{12}$ los intervalos abiertos

$$J_2(1) = (\frac{1}{2^2} - \frac{3\alpha}{2^4}, \frac{1}{2^2} - \frac{\alpha}{2^4}) \quad y \quad J_2(2) = (\frac{3}{2^2} + \frac{\alpha}{2^4}, \frac{3}{2^2} + \frac{3\alpha}{2^4}).$$

Nótese que la longitud de cada uno de ellos es $\alpha/2^3$. Denotamos $S_2(\alpha)$ la unión de los cuatro intervalos cerrados que quedan, luego, $S_2(\alpha) = F_{21} \cup F_{22} \cup F_{23} \cup F_{24}$, donde:

$$F_{21} = [0, \frac{1}{2^2} - \frac{3\alpha}{2^4}], \quad F_{22} = [\frac{1}{2^2} - \frac{\alpha}{2^4}, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2^2}],$$

$$F_{23} = [\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2^2}, \frac{3}{2^2} + \frac{\alpha}{2^4}] \quad y \quad F_{24} = [\frac{3}{2^2} + \frac{3\alpha}{2^4}, 1]$$

Observamos que la longitud de cada uno de estos intervalos cerrados es $\frac{1}{2^2}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2^2}\alpha)$. Continuando indefinidamente con este procedimiento se obtiene una sucesión decreciente de conjuntos compactos $(S_n(\alpha))_{n=1}^{\infty}$, donde cada $S_n(\alpha)$ es la unión disjunta de $2^n$ intervalos cerrados y acotados. Definimos entonces que

$$SVC(\alpha) = \cap_{n=1}^{\infty} S_n(\alpha).$$

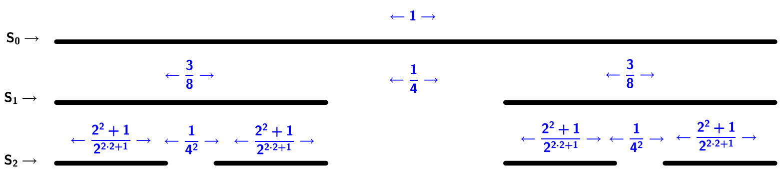



**Figura 1.3.** Conjunto Smith-Volterra-Cantor de medida 1/2

Las propiedades topológicas del conjunto $SVC(\alpha)$ son iguales a las del conjunto ternario de Cantor, sin embargo tienen medida positiva, esto es,

1. $SVC(\alpha)$ es compacto, nunca-denso, perfecto y totalmente disconexo
2. $SVC(\alpha)$ tiene medida positiva, concretamente, $m(SVC_\alpha) = 1 - \alpha > 0$. En efecto, observamos que

$$SVC(\alpha) = [0, 1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} J_n^\alpha$$

donde cada $J_n^\alpha$ es la unión disjunta de los $2^{n-1}$ intervalos abiertos eliminados en la etapa $n-$ésima, donde cada uno posee una longitud de $\alpha/2^{2n-1}$, obteniendo así que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(J_n^\alpha) = \frac{\alpha}{2} + 2\left(\frac{\alpha}{2^3}\right) + 2^2\left(\frac{\alpha}{2^5}\right) + \ldots + 2^{n-1}\left(\frac{\alpha}{2^{2n-1}}\right) + \ldots = \alpha \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \alpha.$$

De esto se sigue que $m(SVC(\alpha)) = 1 - \alpha > 0$.

# 2

# Función de Cantor

## 2.1. Construcción de la función de Cantor

El conjunto de Cantor, al igual que los conjuntos tipo-Cantor, son usados para construir funciones especiales.
Existen muchas formas de construir la llamada función de Cantor, también conocida como escalera del Diablo. A continuación expondremos cuatro maneras distintas de definir dicha función.

**Construcción 1:** Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y sean

$$C_n = F_{n1} \cup ... \cup F_{n2^n}$$

la unión de todos los intervalos cerrados que permanecen en la $n-$ésima etapa de la construcción de $C$ y

$$I_n = I_n(1) \cup ... \cup I_n(2^n - 1)$$

la unión de los intervalos eliminados hasta la $n-$ésima etapa en orden creciente. Observamos que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ... \subseteq I_n \subseteq ...$ y, además,

$$I_{n+1}(2k) = I_n(k), \quad k = 1, 2, ..., 2^n - 1.$$

**Definición 2.1.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función continua definida del modo siguiente:*

1. $\varphi_n(0) = 0$ *y* $\varphi_n(1) = 1$.
2. $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ *para todo* $x \in I_n(k)$*, donde* $k = 1, 2, ..., 2^n - 1$.
3. $\varphi_n$ *es lineal sobre cada uno de los intervalos cerrados* $F_{nk}$ *que conforman a* $C_n$.

Si nos fijamos podemos observar que $\varphi_n$ es constante sobre cada uno de los subintervalos abiertos $I_n(k)$ que definen a $I_n$, tomando el valor $\frac{1}{2^n}$ sobre $I_n(1)$, el valor $\frac{2}{2^n}$ sobre $I_n(2)$, hasta alcanzar el valor $\frac{(2^n-1)}{2^n}$ sobre $I_n(2^n-1)$.

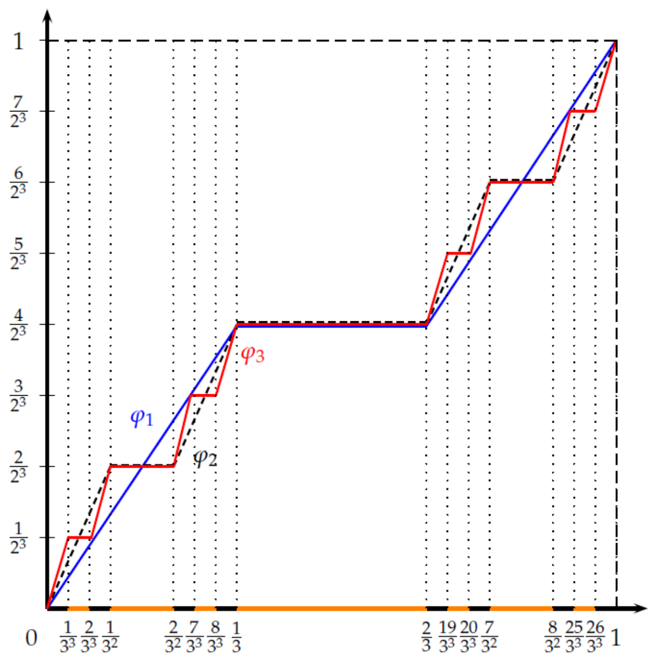
Las funciones $\varphi_n$ se pueden describir explicitamente describiendo primero la función identidad:

$$\varphi_0 = x, \forall x \in [0,1]$$

entonces,

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \varphi_n(3x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \varphi_n(3x-2) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.




Si observamos el gráfico superior podemos observar que en el intervalo $[0,1/3]$ la diferencia entre $\varphi_2$ y $\varphi_1$ no excede a $\frac{1}{2^2}$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ si $x \in (1/3, 2/3)$, y en el intervalo $[2/3, 1]$ el comportamiento es el mismo que en el intervalo $[0,1/3]$ menos porque sus gráficas son desplazadas hacia arriba por una misma constante, la cual se cancela cuando uno toma la diferencia $\varphi_2 - \varphi_1$. De forma similar vemos que la diferencia entre $\varphi_3$ y $\varphi_2$ en el intervalo $[0, 1/3^2]$ no excede a $\frac{1}{2^3}$, y de igual modo que en el caso anterior, su comportamiento sobre cada uno de los intervalos $[2/3^2, 1/3], [2/3, 7/3^2]$ y $[8/3^2, 1]$ son los mismos que en $[0, 1/3^2]$ y la igualdad $\varphi_3 = \varphi_2$ se cumple para todo $x \in J_3$. Con este razonamiento podemos deducir que para calcular la diferencia entre $\varphi_n$ y $\varphi_{n+1}$ basta con analizarla en cualquier intervalo de $[0, 1]\backslash J_n = C_n$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar el intervalo $[0, 1/3^n]$ para acotar la diferencia entre $\varphi_n - \varphi_{n+1}$. Nótese que sobre dicho intervalo se tiene que $\varphi_n(x) = \frac{3^n}{2^n}x$ para todo $x \in [0, 1/3^n]$, mientras que $\varphi_{n+1}$ viene dada por

$$\varphi_{n+1} = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3^{n+1}} \\ \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{1}{3^{n+1}} \leq x < \frac{2}{3^{n+1}} \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}x & \text{si } \frac{2}{3^{n+1}} \leq x \leq \frac{3}{3^{n+1}} \end{cases}$$

Puesto que la igualdad

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x)$$

se cumple para todo $x \in J_n$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\begin{aligned} ||\varphi_{n+1} - \varphi_n||_\infty &= sup\{|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| : 0 \leq x \leq 1\} \\ &= sup\{|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| : 0 \leq x \leq 1/3^n\} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

También se puede observar que $\varphi_n$ es inyectiva sobre $C_n$ y $\varphi_n(C_n) = [0, 1]$ para todo $n \geq 1$.

**Proposición 2.2.** *La sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre [0,1].*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Teniendo en cuenta que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ converge, se sigue del Criterio de Cauchy para Series que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq N$, entonces $\sum_{k=n+1}^{m-1} 1/2^k < \varepsilon$. De esto último se concluye que si $m > n \geq N$, entonces

$$||\varphi_m - \varphi_n||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m-1} ||\varphi_{k+1} - \varphi_k||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

luego, la sucesión $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre [0,1]. □

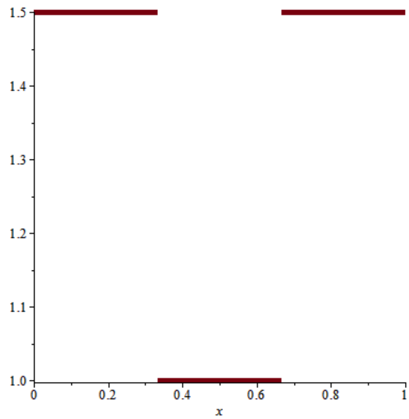
**Definición 2.3.** *La función $\varphi_C : [0, 1] \to [0, 1]$ definida por*

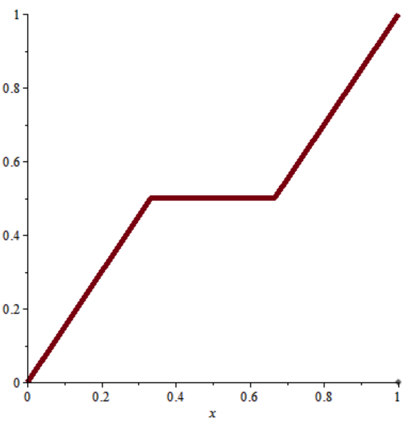
$$\varphi_C(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

*para todo $x \in [0, 1]$, es llamada la* ***función de Cantor****.*

**Construcción 2:** Para cada $n \geq 1$ consideramos el conjunto $C_n = \cup_{k=1}^{2^n} F_{nk}$ y definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

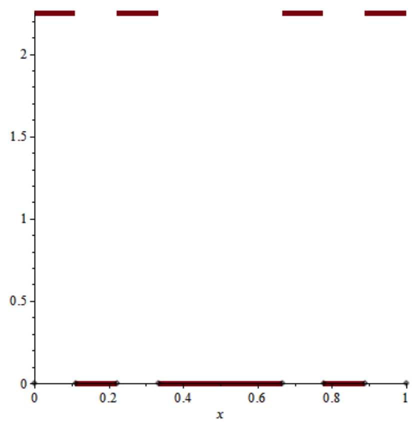
$$f_n(x) = (\frac{3}{2})^n \cdot \chi_{C_n}(x) = \begin{cases} (\frac{3}{2})^n & \text{si } x \in C_n \\ 0 & \text{si } x \notin C_n \end{cases}$$

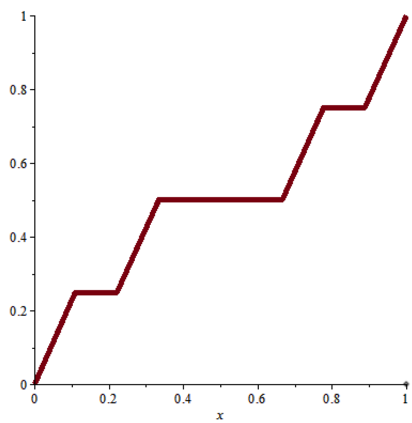



La función $f_n$ es discontinua en un conjunto finito de puntos, luego es de Riemann integrable. Podemos definir así la funcion $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$




Podemos asegurar, gracias al Teorema fundamental del Cálculo, que cada función $\varphi_n$ es Lipschitz y además continua. Observamos también que

$$\varphi_n(0) = 0 \text{ y } \varphi_n(1) = \int_0^1 f_n(t)dt = (\tfrac{3}{2})^n \int_0^1 \chi_{C_n}(t)dt = (\tfrac{3}{2})^n \cdot l(C_n) = 1.$$

Tenemos entonces que $\varphi_n$ es una función continua con $\varphi_n(0) = 0$ y $\varphi_n(1) = 1$ para cada $n \geq 1$. Además $\varphi_n$ es constante sobre [0,1]$\setminus C_n$ y lineal con pendiente $(\frac{3}{2})^n$ sobre cada $F_{nk} \subseteq C_n$. Esto nos indica que cada $\varphi_n$ es monótona creciente. Sobre cada conjunto $F_{nk} \subseteq C_n$ se tiene que $f_n(x) = (\frac{3}{2})^n$ para todo $x \in F_{nk}$, mientras que $f_{n+1}(x) = (\frac{3}{2})^{n+1} = (\frac{3}{2})^n f_n(x)$ para $x$ en el primer o último tercio de $F_{nk}$, e igual a cero en el tercio del medio. Se sigue entonces que

$$\int_{F_{nk}} f_n(t)dt = \int_{F_{nk}} f_{n+1}(t)dt = 2^{-n}$$

Puesto que $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ para todo $x \notin C_n$, resulta que si $\alpha$ es un punto extremo arbitrario en cualquiera de los intervalos que conforman a $C_n$, entonces

$$\int_0^\alpha f_n(t)dt = \int_0^\alpha f_{n+1}(t)dt,$$

de donde podemos obtener

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n+1}(x), \forall x \in C_n$$

y, por tanto,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)| < 2^{-n+1}, \forall x \in [0,1]$$

Luego, tenemos que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ es uniformemente de Cauchy y, en consecuencia, converge uniformemente a una función continua $\varphi_C$.

**Construcción 3:** Otra forma de definir $\varphi_C$ es usando la representación ternaria de los puntos [0,1]. Sea $x \in [0,1]$ y expresando dicho número en su representación ternaria habitual, es decir,

$$x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n(x)}{3^n},$$

donde $a_n(x) \in \{0,1,2\}$ para todo $n \geq 1$. Si $x \notin C$, entonces existe al menos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n(x) = 1$. Sea $n_x$ el entero positivo más pequeño para el cual $a_{n_x}(x) = 1$. Si $x \in C$, entonces todos los $a_n(x)$ son distintos de 1 y, por lo tanto, convenimos en tomar $n_x = +\infty$. Este análisis permite definir la función de Cantor $\varphi_C : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_C(x) = \frac{1}{2^{n_x}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_x-1} \frac{a_n(x)}{2^n}.$$

Podemos observar que si $x \in C$, la igualdad anterior toma la forma

$$\varphi_C(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty \frac{a_n(x)}{2^n},$$

donde $a_n(x) \in \{0, 2\}$ para todo $n \geq 1$.

**Construcción 4:** También podemos definir la función de Cantor de la siguiente manera: para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \in C$, donde $a_n \in \{0, 1\}$, defina

$$\varphi_C(x) = \varphi_C\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

y extienda a $\varphi_C$ a todo [0,1] poniendo

$$\varphi_C = sup\{\varphi_C(y) : y \in C, y \leq x\} = sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \leq x, a_n \in \{0, 1\}\},$$

para todo $x \in [0, 1]$.

## 2.2. Propiedades de la función de Cantor

### 2.2.1. La función de Cantor es singular

**Teorema 2.4.** *La función de Cantor es continua, creciente y sobreyectiva. Además $\varphi'_C(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]\backslash C$.*

*Demostración.* Como $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones crecientes, tenemos que, para cualquier $n$ y todo $x, y \in [0, 1]$, con $x < y$, $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(y)$. Tomando límites cuando $n \to \infty$ a ambos lados, llegamos a que $\varphi_C(x) \leq \varphi_C(y)$. Por tanto, $\varphi_C$ es creciente y sobreyectiva ya que cada $\varphi_n$ posee esas propiedades. Además como $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy y $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son funciones continuas, tenemos que $\varphi_C(x)$ es una función continua.
Veamos ahora que $\varphi'_C(x)$ para todo $x \in [0, 1]\backslash C$. Observamos que $\varphi_C$ es constante en cada uno de los intervalos abiertos eliminados en la construcción de $C$ y, por lo tanto, $\varphi'_C(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]\backslash C$. □

Además, por construcción de la función de Cantor, es fácil observar que:

- $\varphi_C(0) = 0$.
- $\varphi_C(1) = 1$.
- $\varphi_C$ es constante en cada intervalo del complementario del conjunto de Cantor. Por tanto, $\varphi'_C = 0$ en c.t.p.

**Definición 2.5.** *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice singular si satisface:*

- *$f$ es continua en $[a, b]$.*
- *$f$ es creciente.*
- *$f(a) < f(b)$.*
- *Existe un conjunto de medida nula $N$ tal que $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]\backslash N$.*

**Corolario 2.6.** *La función de Cantor es singular.*

### 2.2.2. La función de Cantor es Lipschitziana de orden $ln2/ln3$

**Definición 2.7.** *Se dice que una función $f$ es lipschitziana de orden $\alpha$ en [0,1] si $\exists C : |f(x) - f(y)| < C|x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in [0,1]$.*

**Teorema 2.8.** *La función de Cantor en [0,1] es Lipschitziana de orden $\alpha = ln2/ln3$.*

*Demostración.* Primero nótese que

$$|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)| = |\int_0^x (\frac{3}{2})^n \mathcal{X}_{C_n(t)}dt - \int_0^y (\frac{3}{2})^n \mathcal{X}_{C_n(t)}dt| = (\frac{3}{2})^n |\int_x^y \mathcal{X}_{C_n(t)}dt| \leq (\frac{3}{2})^n |x-y|$$

Así, se sigue que:

$$|\varphi_C(x)-\varphi_C(y)| \leq |\varphi_n(x)-\varphi_n(y)| + |\varphi_C(x)-\varphi_n(x)| + |\varphi_C(y)-\varphi_n(y)| \leq (\frac{3}{2})^n |x-y| + \frac{16}{2^n}.$$

Fijados $x$ e $y$, elegimos $n$ tal que $1 \leq 3^n|x-y| \leq 3$. Entonces se tiene:

$$|\varphi_C(x) - \varphi_C(y)| \leq \frac{19}{2^n} = \frac{19}{(3^n)^{\alpha}} \leq 19|x-y|^{\alpha}.$$

puesto que $3^{\alpha} = 2$ y $\frac{1}{3^n} \leq |x-y|$. □

**Corolario 2.9.** *La función de Cantor no es lipschitziana de orden $\alpha > ln2/ln3$.*

*Demostración.* La función de Cantor cumple que $\varphi_C(C) = [0,1]$. Si es lipschitziana de orden $\alpha$, entonces:

$$1 = dim_H([0,1]) = dim_H(\varphi_C(C)) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot dim_H(C).$$

Por tanto, $\alpha \leq ln2/ln3$. □

### 2.2.3. La función de Cantor no es absolutamente continua

**Definición 2.10.** *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que toda la familia $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tales que $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Se puede probar que la función $f$ es absolutamente continua en $[a,b]$, si y solo si, para todo $x \in [a,b]$, $f(x)$ se puede expresar de la siguiente manera

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

**Teorema 2.11.** *La función de Cantor no es absolutamente continua.*

*Demostración.* $\varphi_C$ no es absolutamente continua porque $\varphi_C'$ es igual 0 en casi todo punto y $\varphi_C$ no es constante. □

**Teorema 2.12.** *El conjunto de las funciones absolutamente continuas no es cerrado dentro de las funciones continuas con la norma uniforme.*

*Demostración.* Por definición, $\varphi_n(x) = \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \mathcal{X}_{C_n} dt$, luego es absolutamente continua. Además $\varphi_n \to \varphi_C$ uniformemente y $\varphi_C$ no es absolutamente continua. Por tanto, el conjunto de las funciones absolutamente continuas no es cerrado dentro de las funciones continuas con la norma uniforme. □

### 2.2.4. La función de Cantor no es débilmente derivable

**Definición 2.13.** *Una función $f \in L^1_{loc}(R)$ es débilmente derivable si existe una función $g \in L^1_{loc}(R)$ tal que*

$$\int_R f\phi' dx = -\int_R g\phi dx, \forall \phi \in C_c^\infty(R).$$

*La función $g$ es llamada derivada débil de $f$, y la denotamos por $f^{'w}$.*
*Por tanto, para derivadas débiles, la fórmula de integración por partes dice que*

$$\int_R f\phi' dx = -\int_R f^{'w}\phi dx, \forall \phi \in C_c^\infty(R).$$

*La derivada débil de la función, si existe, es única como función de $L^1_{loc}(R)$. Además la derivada débil de una función continuamente diferenciable es la derivada.*

**Teorema 2.14.** *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es débilmente derivable y $f^{'w} = 0$, entonces $f$ es una función constante.*

*Demostración.* La condición de que la derivada débil $f'$ sea cero significa que

$$\int f\phi' dx = 0, \forall \phi \in C_c^\infty(a,b).$$

Sea $\eta \in C_c^\infty(a,b)$ con integral igual a 1. Podemos representar una función arbirario $\phi \in C_c^\infty(a,b)$ como

$$\phi = A\eta + \varphi'$$

donde $A \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ y vienen dadas por

$$A = \int_a^b \phi dx, \qquad \varphi(x) = \int_a^x [\phi(t) - A\eta(t)]dt.$$

Esto implica que

$$\int f\phi dx = A\int f\eta dx = c\int \phi dx, \quad c = \int f\eta dx.$$

Por tanto,

$$\int (f-c)\phi dx = 0, \forall \phi \in C_c^{\infty}(a,b),$$

lo que implica que $f$ es una función constante. □

A continuación vemos que una función continua derivable en casi todo punto, no tiene porque ser débilmente derivable.

**Teorema 2.15.** *La función de Cantor no es débilmente derivable.*

*Demostración.* Supongamos $f^{'w} = g$ donde

$$\int g\phi dx = -\int f\phi' dx$$

para toda función $\phi \in C_c^{\infty}$. Sabemos que el complementario del conjunto de Cantor en [0,1] es la unión de intervalos abiertos

$$[0,1]\backslash C = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup ...$$

cuya medida es igual a 1. Tomando $\phi$ con soporte contenido en uno de los intervalos que llamaremos $I$, usando que $f = c_I$ es constante en $I$, tenemos que

$$\int g\phi dx = -\int_I f\phi' dx = -c_I\int_I \phi' dx = 0.$$

Luego $g = 0$ en casi todo punto de $[0,1]\backslash C$, y por tanto, si $f$ es débilmente derivable tenemos que $f^{'w} = 0$. Aplicando la proposición anterior llegamos a una contradicción. Por tanto, la función de Cantor no es débilmente derivable.

□

## 2.3. Caracterizaciones funcionales de la función de Cantor

Existen varias caracterizaciones funcionales de la función de Cantor. La primera que veremos se basará en una definición interactiva para $\varphi_C$.
Definimos una sucesión de funciones $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por recurrencia del siguiente modo:

$$\psi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{\psi_n(3x)}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\psi_n(3x-2)}{2} & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde $\psi_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Sea $\mathcal{M}[0,1]$ el espacio de Banach de todas las funciones reales uniformemente acotadas en $[0,1]$ con la norma infinito.

**Teorema 2.16.** *La función de Cantor $\varphi_C$ es el único elemento de $\mathcal{M}[0,1]$ que verifica*

$$G(x) = \begin{cases} \frac{G(3x)}{2} & si\ 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & si\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{G(3x-2)}{2} & si\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Además si $\psi_0 \in \mathcal{M}[0,1]$, entonces $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente a $\varphi_C$.*

*Demostración.* Definimos la aplicación $H : \mathcal{M}[0,1] \to \mathcal{M}$ como

$$H(f)(x) = \begin{cases} \frac{f(3x)}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{f(3x-2)}{2} & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Puesto que,

$$||H(f_1) - H(f_2)|| \leq \frac{1}{2}||f_1 - f_2||,$$

donde $f_1, f_2 \in \mathcal{M}[0,1]$ y $||\cdot||$ denota a la norma de este espacio, $H$ es una aplicación contractiva en un espacio completo y por el Teorema del punto fijo de Banach, obtenemos que $H$ tiene un único punto fijo $f_0$, es decir, $H(f_0) = f_0$ y que $\psi_n$ converge a $f_0$ uniformemente en $[0,1]$.
Veamos que si $\psi_0 = x$, entonces $\psi_n = \varphi_n$. Sea $\psi_0 = x$, llegamos a ver que $\psi_1 = \varphi_1$. Supongamos que $\psi_k = \varphi_k$ para todo $k \leq n$. Vamos a probarlo para el caso $n+1$,

- Si $x < \frac{1}{3}$,

$$\frac{\psi_n(3x)}{2} = \frac{\varphi_n(3x)}{3} = \frac{\int_0^{3x} \frac{3^n}{2}\mathcal{X}_{C_n}(t)dt}{2} = \int_0^x \frac{3^{n+1}}{2}\mathcal{X}_{C_n}(3t)dt =$$

$$\int_0^x \frac{3^{n+1}}{2}\mathcal{X}_{C_{n+1}}(t)dt = \varphi_{n+1}(x)$$

ya que $3t \in C_n$ si y solo si $t < \frac{1}{3}$, y $t \in C_{n+1}$.
- Dado $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ se observa que $\psi_{n+1} = \frac{1}{2} = \varphi_{n+1}$.
- Si $\frac{2}{3} < x \leq 1$ tenemos que $1 - x < \frac{1}{3}$, y por tanto

$$1-\varphi_{n+1}(x) = \varphi_{n+1}(1-x) = \psi_{n+1}(1-x) = \frac{\psi_n(3(1-x))}{2} = \frac{\psi_n(1-(3x-2))}{2} =$$

$$= \frac{\varphi_n(1-(3x-2))}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\varphi_n(3x-2)}{2}.$$

Por tanto,

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\varphi_n(3x-2)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\psi_n(3x-2)}{2} = \psi_{n+1}(x).$$

De donde concluimos que $f_0 = \varphi_C$ y por la unicidad $H(\varphi_C) = \varphi_C$.

□

**Teorema 2.17.** *La función de Cantor es la única función real sobre* $[0,1]$ *que es monótona creciente y satisface que:*

- $\varphi_C(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi_C(x)}{2}$.
- $\varphi_C(1-x) = 1 - \varphi_C(x)$.

*Demostración.* La función de Cantor es una función monótona creciente. Vamos a probar que satisface las dos condiciones:

- Se verifica que $\varphi_C(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi_C(x)}{2}$ puesto que si $x \in [0,1]$ entonces $\frac{x}{3} \leq \frac{1}{3}$ y por el resultado anterior tenemos que:

$$\varphi_C(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi_C(x)}{2}$$

- Para ver que se tiene $\varphi_C(1-x) = 1 - \varphi_C(x)$, observamos que

$$\varphi_C(1-x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(1-x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-x} (\frac{3}{2})^n \mathcal{X}_{C_n}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_x^1 (\frac{3}{2})^n \mathcal{X}_{C_n}(1-u)du =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \int_0^x (\frac{3}{2})^n \mathcal{X}_{C_n}(u)du = 1 - \varphi_C(x).$$

Ahora veremos que si una función real sobre $[0,1]$ es monótona creciente y satisface las propiedades $\varphi_C(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi_C(x)}{2}$ y $\varphi_C(1-x) = 1 - \varphi_C(x)$ también satisface que:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{G(3x)}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{G(3x-2)}{2} & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y por tanto es la función de Cantor.

- Como $\varphi_C(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi_C(x)}{2}$, si $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ entonces $G(x) = \frac{G(3x)}{2}$.
- $G(0) = 0$ porque $G(0) = G(\frac{0}{3}) = \frac{G(0)}{2}$. Además $G(1) = 1$ pue $G(1) = G(1-0) = 1 - G(0) = 1$. Luego, tenemos que $G(\frac{1}{3}) = \frac{G(1)}{2} = \frac{1}{2}$ y que $G(\frac{2}{3}) = G(1-\frac{1}{3}) = 1 - G(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$ y como $G$ es monótona creciente entonces $G(x) = \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$.

- Si $x \in (\frac{2}{3}, 1)$ entonces

$$1-G(x) = G(1-x) = G\left(\frac{1-(3x-2)}{3}\right) = \frac{1}{2}G(1-(3x-2)) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}G(3x-2).$$

Por tanto $G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}G(3x-2)$.

□

## 2.4. Otras propiedades de la función de Cantor

### 2.4.1. La función de Cantor es subaditiva

**Definición 2.18.** *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice subaditiva si satisface la desigualdad $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ cuando $x, y \in \mathbb{R}$.*

Consideramos la función de Cantor extendida definida como 0 si $x \leq 0$ y 1 si $x \geq 1$.

**Teorema 2.19.** *La función de Cantor extendida es subaditiva.*

*Demostración.* La función $\varphi$ es el límite puntual de las funciones $\varphi_n$ cuando $n \to +\infty$. Entonces para probar la subaditividad de $\varphi$, es suficiente con probar la subaditividad para todas las $\varphi_n$. Procedemos por inducción. El caso $n = 0$ es trivial, así suponemos cierto para $n$ y lo comprobaremos para $n+1$. Sean $x, y \in \mathbb{R}, x \geq y$. Consideramos diferentes casos.

- Caso 1: $y \leq 0$. Es trivial ya que $\varphi_{n+1}$ es monótona.
- Caso 2: $y \geq \frac{1}{3}$. En este caso

$$\varphi_{n+1}(x+y) \leq 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+1}(y).$$

- Caso 3: $x \leq \frac{1}{3}$. Como $x, y$ y $x+y$ son todas menores que $\leq \frac{2}{3}$, tenemos que

$$\varphi_{n+1}(x+y) = \frac{1}{2}\varphi_n(3x+3y) \leq \frac{1}{2}\varphi_n(3x) + \frac{1}{2}\varphi_n(3y) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+1}(y).$$

- Caso 4: $0 \leq y \leq \frac{1}{3} \leq x$. Como $x+y \geq \frac{1}{3}$, tenemos que

$$\varphi_{n+1}(x+y) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi_n(3x+3y-2) \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi_n(3x-2)+\frac{1}{2}\varphi_n(3y) = \varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+1}(y).$$

□

**Definición 2.20.** *Un módulo de continuidad es una función $f$ definida, continua, no decreciente y subaditiva en [0,1] con $f(0) = 0$.*

**Corolario 2.21.** *La función de Cantor es un módulo de continuidad.*

### 2.4.2. El grafo de la función de Cantor tiene longitud 2

**Definición 2.22.** *La longitud de un grafo $G_f$, $l(G_f)$, de una función continua y creciente, $f$, del intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[f(a), f(b)]$ viene dada por*

$$l(G_f) = sup\{\sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$$

Cuando $\alpha$ y $\beta$ son números reales $[\alpha^2 + \beta^2]^{\frac{1}{2}} \leqq |\alpha| + |\beta|$, y se obtiene la desigualdad estricta cuando $\alpha$ y $\beta$ son los dos distintos de cero. En consecuencia tenemos que,

$$\sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}} <$$

$$< \sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2] = (b - a) + (f(b) - f(a)).$$

Por tanto, $l(G_f)) \leqq (b - a) +)(f(b) - f(a))$.

**Teorema 2.23.** *Sea $f$ derivable con continuidad en $[0,1]$, entonces $l(G_f) < 2$.*

*Demostración.* Sea $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $l(G_f) = \sqrt{2}$. Sean $\gamma$ y $\delta$ números positivos y el intervalo $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$ tal que $0 < \gamma \leq f'(t) \leq \delta < 1$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Denotamos $l_1, l_2$ y $l_3$ las longitudes de las partes del grafo $G_f$, $[0,\alpha], [\alpha, \beta], [\beta, 1]$ respectivamente. Como $l(G_f) = l_1 + l_2 + l_3$ podemos estimar que $l_1 \leq \alpha + f(\alpha)$, $l_2 \leq (\beta - \alpha) + (f(\beta) - f(\alpha))$ y $l_3 \leq (1 - \beta) + (1 - f(\beta))$, obteniendo así que $l(G_f) \leq 2$.
Sin embargo, si tomamos $0 < A < 1$ tal que $l_2 \leq A(\beta - \alpha) + (f(\beta) - f(\alpha))$, tenemos que $l(G_f) < 2$. Si $\zeta \in [\gamma, \delta]$, implicaría que

$$(1 + \zeta) = [1 + \zeta]^{\frac{1}{2}}[1 + \zeta]^{\frac{1}{2}} \geq [1 + \gamma]^{\frac{1}{2}}[1 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}}.$$

$$[1 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}} \leq A(1 + \zeta), \text{ donde } 0 < A = [1 + \gamma]^{\frac{-1}{2}} < 1$$

Cuando $\alpha \leq u < v \leq \beta$, existe un punto $r \in (u, v)$ tal que $f(v) - v(u) = f'(r)(v - u)$, y $f'(r) \in [\gamma, \delta]$. Luego,

$$[(v - u)^2 + (f(v) - f(u))^2]^{\frac{1}{2}} = [1 + (f'(r))^2]^{\frac{1}{2}}(v - u)$$

$$\leq A[1 + f'(r)](v - u) = A[(v - u) + (f(v) - f(u)]$$

Aplicando esta desigualdad a cualquier par de elementos consecutivos de la partición $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$ de $[\alpha, \beta]$ y con $l_2 \leq A(\beta - \alpha) + (f(\beta) - f(\alpha))$, nos permite concluir que $l(G_f) < 2$. □

Además, si $f_n(x) = x^n$ para $0 \leq x \leq 1$, tenemos que para cada $p$ tal que $0 < p < 1$, se tiene que:

- $l(G_{f_n}) \geq (1-p) + 1 - f_n(p)$
- $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = 0$

Luego, $\lim_{n\to\infty} l(G_{f_n}) = 2$.

**Teorema 2.24.** *El grafo de la función de Cantor tiene longitud 2.*

*Demostración.* Sabemos que en el paso $k$ de la construcción de la función de Cantor tenemos que hay $2^{k+1}$ puntos finales de los intervalos continuos, que escribiremos como $\{0 = x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}} = 1\}$. La longitud de $\varphi_k$, en el paso $k$, es

$$l_k = \sum_{i=2}^{2^{k+1}} [(x_i - x_{i-1})^2 + (\varphi_k(x_i) - \varphi_k(x_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, en intervalos contiguos $x_{2i+1} - x_{2i} = (\frac{1}{3})^k$ mientras que $\varphi_k(x_{2i+1}) - \varphi_k(x_{2i}) = 0$. En los intervalos complementarios se tiene que $\varphi_k(x_{2i}) - \varphi_k(x_{2i+1}) = (\frac{1}{2})^k$. Esto quiere decir que $G(F_k)$ consiste en $2^k$ intervalos con una longitud total de $1 - (\frac{2}{3})^k$ y $2^k$ intervalos donde $\varphi_k$ incremente la longitud hasta $[(\frac{2}{3})^k + 1]^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, la longitud del grafo $G(\varphi_C)$ es al menos

$$\lim_{k\to\infty} 1 - (\frac{2}{3})^k + [(\frac{2}{3})^k + 1]^{\frac{1}{2}} = 2.$$

Por la definición de longitud del grafo, teníamos que

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} [(x_i - x_{i-1})^2 + (F_k(x_i) - F_k(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (b-a) + (f(b) - f(a)) = 2.$$

Por tanto, la longitud total de la función de Cantor será

$$sup \sum_{i=2}^{2^{k+1}} [(x_i - x_{i-1})^2 + (F_k(x_i) - F_k(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$$

donde el supremo en ninguna partición puede exceder de 2. □

## 2.5. Ejemplos y contraejemplos usando la función de Cantor

**Lema 2.25.** *Sea* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones a valores reales definidas sobre* $[a, b]$ *tal que*

- $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *es monótona.*

- $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *existe y es finita para cada* $x\in[a,b]$

*Entonces,*

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x).$$

*existe y es finita para casi-todo* $x\in[a,b]$.

*Demostración.* Asumiremos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente. Considerando la función $f_n-f_n(a)$, podemos suponer que $f_n\geq 0$ para todo $n\geq 1$. Suponemos entonces que $f_n\geq 0, \forall n\geq 1$. Por tanto, tenemos que $s=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función creciente y no-negativa y, en consecuencia, por el Teorema de Diferenciabilidad de Lebesgue tenemos que $s'(x)$ existe y es finita para casi-todo $x\in[a,b]$.
Consideramos las sumas parciales $s_n=f_1+...+f_n$ y el resto $r_n=s-s_n$ para cada $n\geq 1$. Cada una de estas funciones posee una derivada finita casi siempre y, por tanto, existe un conjunto medible $A\subseteq[a,b]$ tal que $m(A)=0$ y para todo $n\geq 1$, las derivadas

$$s_n'(x)=f_1'(x)+...+f_n'(x)$$

y $s'(x)$ existen y son finitas para cada $x\in E=[a,b]\backslash A$. Fijamos $x\in(a,b)$ y elegimos cualquier $h>0$ para el cual $x+h\in(a,b)$. Se sigue de la siguiente igualdad

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h}+\frac{r_n(x+h)-r_n(x)}{h}$$

que

$$\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h}\leq\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$$

y esta última desigualdad implica que $s_n'(x)\leq s'(x)$ para todo $x\in E$. Como se cumple además que $s_n'(x)\leq s_{n+1}'(x)$, tenemos entonces que

$$s_n'(x)\leq s_{n+1}'(x)\leq s'(x)$$

para cada $x\in E$ y todo $n\geq 1$. De aquí se sigue que

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{'}(x)=\lim_{n\to\infty} s_n'(x)\leq s'(x)$$

para cada $x\in E$. Demostraremos ahora que $\lim_{n\to\infty} s_n'(x)=s'(x)$ casi-siempre. Ya que la sucesión $(s_n')_{n=1}^{\infty}$ es creciente para cada $x\in E$, es suficiente probar que $(s_n')_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente casi siempre a $s'$. Sea $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(s(b)-s_{n_k}(b))<+\infty$$

Para cada $n_k$ y para cualquier $x \in (a,b)$ se tiene que

$$0 \leq s(x) - s_{n_k}(x) \leq s(b) - s_{n_k}(b)$$

lo cual nos muestra que el lado izquierdo de la desigualdad está acotado por los términos de una serie convergente y, por tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(s(x) - s_{n_k}(x))$ converge. Además, como los términos de esta serie son funciones monótonas, ella tiene derivada finita casi siempre, de manera que el argumento utilizado anteriormente nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x)$ converge casi siempre y también que $\sum_{k=1}^{\infty}(s'(x) - s'_{n_k}(x))$ converge casi siempre. Obtenemos así que $\lim_{n\to\infty} s'_{n_k}(x) = s'(x)$ casi siempre. □

**Teorema 2.26.** *Existe una función* $\widehat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que es estrictamente creciente y singular.*

*Demostración.* Extendemos la función de Cantor a todo $\mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi_C(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Sea $((a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de los intervalos abiertos con extremos racionales contenidos en [0,1] y definimos $\widehat{\varphi}(x)$ por

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_C\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right), \forall x \in [0,1].$$

Por el Teorema de Weierstrass tenemos que $\widehat{\varphi}(x)$ es continua. Veamos que es estrictamente creciente. Sean $x_1, x_2 \in [0,1]$ con $x_1 < x_2$, escogemos números racionales $a_n, b_n$ tales que $x_1 < a_n < b_n < x_2$. Puesto que $x_1 - a_n < 0$, tenemos que

$$0 = \varphi_C\left(\frac{x_1 - a_n}{b_n - a_n}\right) < \varphi_C\left(\frac{x_2 - a_n}{b_n - a_n}\right)$$

de donde se sigue que $\widehat{\varphi}(x_1) < \widehat{\varphi}(x_2)$. Finalmente, por el lema anterior,

$$\widehat{\varphi}^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n}{2^n(b_n - a_n)} \varphi_{\Gamma}^{'}\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) = 0$$

casi-siempre.

□

**Lema 2.27.** $\phi_C : [0,1] \to [0,2]$ *definida por*

$$\phi_C(x) = x + \varphi_C, \forall x \in [0,1].$$

*es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Puesto que $\phi_C(0) = 0$ y $\phi_C(1) = 2$ por la propiedad del Valor Intermedio tenemos que para cualquier $y \in (0,2)$, existe un $x \in (0,1)$ tal que $y = \phi_C(x)$. Esto prueba que $\phi_C([0,1]) = [0,2]$. Por otro lado, como $\varphi_C$ es creciente y la función identidad es estrictamente creciente, entonces $\phi_C$ también es estrictamente creciente. En particular, $\phi_C$ es una función continua y biyectiva. Por tanto, $\phi_C$ es un homeomorfismo. □

**Lema 2.28.** *Los homeomorfismos no preservan la medida de conjuntos medibles.*

*Demostración.* Veamos que $\phi_C(C)$ tiene medida de Lebesgue 1.
Recordemos que $\varphi_C$ es constante en cualquier intervalo de $[0,1]\backslash C$, por tanto para todo intervalo $(a,b) \subset [0,1]\backslash C$

$$m(\phi_C(a), \phi_C(b)) = \phi_C(b) - \phi_C(a) = \varphi_C(b) + b - \varphi_C(a) - a = b - a.$$

Sea $\{E_{n,k}\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ la colección de intervalos eliminados en el paso $n$ en la construcción del conjunto de Cantor. Entonces

$$m([0,2]\backslash\phi_C(C)) = m(\phi_C([0,1]\backslash C)) = m(\phi_C(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} E_{n,k})) = m(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \phi_C(E_{n,k})) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(\phi_C(E_{n,k})) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(E_{n,k}) = 1,$$

puesto que, la medida total de los intervalos eliminados es 1. Dado que [0,2] es una unión disjunta de $\phi_C(C)$ y de $[0,2]\backslash\phi_C(C)$, entonces

$$2 = m([0,2]) = m(\phi_C(C)) + m([0,2]\backslash\phi_C(C)) = m(\phi_C(C)) + 1$$

Luego la medidad de $\phi_C(C)$ es 1. □

**Lema 2.29.** *Los homeomorfismos no preservan los conjuntos medibles Lebesgue.*

*Demostración.* Como la medida de $\phi_C(C)$ es positiva tenemos un subconjunto no-medible $A^* \subseteq \phi_C(C)$. Por ser $\phi_C$ biyectiva,

$$\phi_C^{-1}(A^*) \subseteq \phi_C^{-1}(\phi_C(C)) = C$$

y puesto que la medida del conjunto de Cantor es cero y resulta que todos sus subconjuntos son medibles, en particular $\phi_C^{-1}(A^*)$ es medible. Finalmente, como $\phi_C$ es biyectiva, tenemos que $\phi_C(E) = A^*$, donde $E = \phi_C^{-1}(A^*)$. □

**Teorema 2.30.** *Existe un conjunto medible Lebesgue que no es medible Borel.*

*Demostración.* Recordemos que $\phi_C^{-1}(A^*) \subseteq C$ y, en consecuencia, es medible según Lebesgue. Por otro lado, como todo homeomorfismo trasforma conjuntos de Borel es conjuntos de Borel, resulta que si $\phi_C^{-1}(A^*)$ fuese de Borel, tendremos que $A^* = \phi_C(\phi_C^{-1}(A^*))$ sería un conjunto de Borel, en particular, medible según Lebesgue lo cual es imposible por nuestra hipótesis. Por esto, el conjunto $E = \phi_C^{-1}(A^*)$ no es un conjunto de Borel. □

**Teorema 2.31.** *La medida de Borel no es completa.*

*Demostración.* Como $\phi_C$ no preserva conjuntos medibles Lebesgue y existe un conjunto medible Lebesgue que no es medible Borel, sabemos que existe un conjunto no-medible Lebesgue $A^* \subseteq \phi_C(C)$ tal que

- $\phi_C^{-1}(A^*) \subseteq C$
- $\phi_C^{-1}(A^*) \in \mathfrak{M}_\mu(\mathbb{R}) \backslash \mathfrak{Bo}(\mathbb{R})$

Puesto que $m(C) = 0$ y $\phi_C^{-1}(A^*)$ no es boreliano, resulta que $m(\phi_C^{-1}(A^*))$ no está definido y, por tanto, no puede satisfacer la condición $m(\phi_C^{-1}(A^*)) = 0$. □

**Teorema 2.32.** *Existen funciones medibles Lebesgue cuya composición no es medible Lebesgue.*

*Demostración.* Sabemos que existe un conjunto $E = \phi_C^{-1}(A)$ medible según Lebesgue pero que no es medible según Borel, donde $A$ es un subconjunto no medible Lebesgue incluido en $\phi_C(C)$. Sea $f = \phi_C^{-1}$ y consideramos la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \mathcal{X}_E(x)$. Podemos observar que $f$ y $g$ son medibles ya que $f$ es continua y $E$ es medible. Sin embargo, $g \circ f$ no es medible Lebesgue. En efecto,

$$\{x \in [0,2] : (g \circ f)(x) > \frac{1}{2}\} = \{x \in [0,2] : f(x) \in E\} = f^{-1}(E) = \phi_C(E)$$

que no es medible Lebesgue.

□

Sin embargo, veamos que si $f$ fuera medible y $g$ continua, entonces $g \circ f$ siempre es medible.

**Proposición 2.33.** *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel. Entonces $g \circ f \in \mathcal{F}_\mu(E)$.*

*Demostración.* Para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in E : g(f(x)) < a\} = (g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(g^{-1}((a, +\infty))).$$

Así pues, gracias a que $g$ es medible Borel, el conjunto $g^{-1}((a, +\infty))$ es un conjunto medible Borel, y por tanto $f^{-1}(g^{-1}((a, +\infty)))$ es medible Lebesgue. □

## 2.6. La distribución de Cantor

Una función de distribución acumulada $F$ describe la probabilidad de que una variable aleatoria real $X$, sujeta a cierta ley de distribución de probabilidad $P$ se sitúe en la región de valores menores o iguales a $x$.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

**Definición 2.34.** *La distribución de Cantor es la medida probabilística cuya función de distribución acumulada es la función de Cantor.*

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la $\sigma-$álgebra de los conjuntos de Borel. Una distribución o medida probabilística $Q$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ es singular continua si satisface:

- $Q(\mathbb{R} \backslash C) + m(A) = 0$ para algún $a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- $Q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Teorema 2.35.** *La distribución de Cantor es una distribución singular continua.*

*Demostración.* Sea $Q$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ la medida probabilística asociada a $\varphi_C$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, dado un intervalo abierto $(a,b) \subseteq [0,1] \backslash C_n$,

$$Q((a,b)) = \varphi_C(b) - \varphi_C(a) = \lim_{n \to \infty} (\varphi_n(b) - \varphi_n(a)) = 0,$$

por lo tanto $Q([0,1] \backslash C_n) = 0$, y así $Q(C_n) = 1$.
Esto implica, puesto que $C_n$ es una sucesión decreciente de conjuntos tal que $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$, que

$$Q(C) = 1,$$

y por consiguiente tenemos que

$$Q(\mathbb{R} \backslash C) + m(C) = 0.$$

La continuidad de $\varphi_C$ permite probar que

$$Q(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

concluyendo que $Q$ es una distribución singular continua.

□

# 3

# Otras funciones definidas en base a conjuntos de Cantor

A continuación introduciremos algunas funciones definidas en base a conjuntos de Cantor.

## 3.1. Funciones Riemann integrables con un conjunto no numerable de discontinuidades

**Teorema 3.1.** *La función característica del conjunto de Cantor $\mathcal{X}_C : [0,1] \to \mathbb{R}$ es discontinua sobre $C$ y continua sobre $[0,1]\backslash C$.Lo mismo es cierto para $\mathcal{X}_{C_\alpha}$, donde $C_\alpha$ es cualquier conjunto tipo-Cantor en [0,1] de medida cero.*

*Demostración.* Sea $x \in C$. Como $C$ no contiene intervalos, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo $(x - 1/n, x + 1/n) \nsubseteq C$ y, por tanto, podemos elegir un $x_n \in (x - 1/n, x + 1/n)$ de modo que $x \notin C$. Luego, $x_n \to x$, pero

$$0 = \mathcal{X}_C(x_n) \nrightarrow \mathcal{X}_C(x) = 1.$$

Con esto hemos probado que $\mathcal{X}_C$ es discontinua en $x$ y como dicho punto era arbitrario, se concluye que $\mathcal{X}_C$ es discontinua sobre $C$.
Sea ahora $x \in [0,1]\backslash C$ y sea $\varepsilon > 0$. Recordemos que como $[0,1]\backslash C = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ donde $I_n$ donde $I_n = I_n(1) \cup ... \cup I_n(2^n - 1)$ es la unión de los $2^n - 1$ intervalos abiertos borrados en la $n-$ésima etapa de la construcción de $C$, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in I_n(k)$ para algún $k \in 1, ..., 2^{n-1}$. Si tomamos $\delta < 1/3^n$ resulta que cualquier $y$ que satisfaga $0 < |x - y| < \delta$ se tiene que $y \in I_n(k)$ y, en consecuencia

$$|\mathcal{X}_C(x) - \mathcal{X}_C(y)| = |0 - 0| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\mathcal{X}_C$ es continua en $x$ y termina la prueba. □

## 3.2. Funciones continuas con un conjunto no numerable de ceros

Sea $C$ el conjunto de Cantor en [0,1] y construyamos la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C[0,1]$. Sea $\{I_n(k) : n = 1, 2, ..., k = 1, 2, ..., 2^{n-1}\}$, en donde $I_n(k)$ denota los intervalos abiertos extraídos hasta el $n-$ésimo paso de la construcción de $C$ y sea $\{a_{nk} : n = 1, 2, ..., k = 1, ..., 2^{n-1}\}$ los puntos medios de cada uno de los intervalos en $\{I_n(k) : n = 1, 2, ..., k = 1, 2, ..., 2^{n-1}\}$. Puesto que $I_1(1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ es el primer intervalo extraído en la construcción de $C$, definimos $f_1(\frac{1}{2}) = 1$, y en el resto de $I_1(1)$, $f_1(x)$ esta formado por las ecuaciones de los dos segmentos que unen los extremos de $I_1(1)$ con el punto $(a_{11}, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$. Finalmente, $f_1(x) = 0$ si $x \notin I_1(1)$. Procediendo inductivamente, definimos $f_n$ como sigue: $f_n(x) = f_{n-1}(x)$ para todo $x \in \cup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{(n-1)}(k)$ y, como en el primer caso, $f_n(x)$ está formado por la ecuación de los dos segmentos que unen cada uno de los extremos de $I_n(k)$ con los puntos $(a_{nk}, \frac{1}{2^n})$. Para los puntos $x \notin \cup_{k=1}^{2^{n-1}} E_{n,k}$, $f_n(x) = 0$.
Se puede probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en [0,1] y definimos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Podemos comprobar que la convergencia es también uniforme por lo que $f \in C[0, 1]$ y, además, se cumple que $Z(f) = C$, siendo $Z(f) = \{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$. Esto nos dice que la cardinalidad de $Z(f)$ es no numerable.

## 3.3. Funciones de clase $C^1$ con una cantidad no-numerable de puntos críticos

**Teorema 3.2.** *Existe una función $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ con una cantidad no-numerable de puntos críticos.*

*Demostración.* Vamos a construir una función cuyos ceros sean exactamente los puntos de $C$. Como $C^c$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, existe una sucesión disjunta $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos tal que $C^c = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n$ un conjunto cerrado incluido en $I_n$, usaremos el Lema de Urysohn para determinar una función $f_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de clase $C^\infty$ tal que $f_n = 1$ sobre $K_n$ y $f_n = 0$ fuera de $I_n$.

En particular, para cada $n \geq 1$, $f_n(x) = 0$ para todo $x \in C$. Definimos $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}.$$

Veamos que $f$ es continua sobre $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, escogemos un $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq N.$$

Como cada $f_n$ tiene continuidad uniforme lo usaremos para determinar $\delta_n > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad |x - y| < \delta_n.$$

Si escogemos $\delta > 0$ de modo que $\delta < min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$, resultará que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{2^n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto, $f$ es continua. Definimos ahora $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Como $f > 0$, se tiene que $F$ es creciente y positiva. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F'(x) = f(x)$ y, así, los puntos críticos de $F$ son los ceros de $f$ el cual incluye al conjunto de Cantor. Nos faltaría verificar que si $x, y \in C$ con $x \neq y$, entonces $F(x) \neq F(y)$. En efecto, sean $x, y \in C$ con $x < y$. Como $C$ es totalmente disconexo, existe un $z \notin C$ tal que $x < z < y$. Por esto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(z) \neq 0$. La continuidad de $f_{n_0}(z)$ nos garantiza la existencia de un intervalo alrededor de $z$, $J_z \subseteq [x, y] \subseteq [0, 1]$ tal que $f_{n_0}(w) > 0$ para todo $w \in J_z$. De aquí se sigue que

$$\int_{J_z} \frac{f_{n_0}(t)}{2^{n_0}} dt > 0$$

y, por tanto,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt < \int_0^x f(t)dt + \int_{J_z} \frac{f_{n_0}(t)}{2^{n_0}} dt \leq \int_0^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt = F(y)$$

□

## 3.4. Funciones de Darboux con un conjunto no numerable de discontinuidades

**Definición 3.3.** *Una función real definida sobre un intervalo $I$ satisface la propiedad de los valores intermedios si para todo $a, b \in I$ y cualquier valor $y$ entre*

*$f(a)$ y $f(b)$, existe $x$ comprendido entre $a$ y $b$ tal que $y = f(x)$. Las funciones que tienen la propiedad de los valores intermedios se llaman funciones de Darboux.*

Como consecuencia del teorema de los valores intermedios toda función continua es de Darboux, pero existen funciones no continuas con la propiedad de Darboux.
Tenemos que la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es un ejemplo de función de Darboux que no es continua en 0. De hecho el número de discontinuidades no es significativo pues, existen funciones de Darboux con una cantidad no numerable de discontinuidades.
Sea $C$ el conjunto de Cantor. Si $(a, b)$ es uno de los intervalos eliminados en la construcción de $C$, se define

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $f$ es una función de Darboux que es discontinua para todo $x \in C$.

## 3.5. Funciones de la primera clase de Baire

Sea $X$ un espacio métrico. Un función $f : X \to \mathbb{R}$ es de la primera clase de Baire si existe una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continuas en $X$ tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Ejemplos de funciones de la primera clase de Baire son las funciones continuas salvo un número finito de discontinuidades y las derivadas de funciones continuas en $\mathbb{R}$, mientras que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ no es de la primera clase de Baire.
Es conocido que toda función de la primera clase de Baire tiene a lo sumo un conjunto de discontinuidades de primera categoría.
A continuación veremos que existen funciones con un conjunto nunca denso de discontinuidades que pertenecen a la primera clase de Baire y otras con la misma propiedad que no pertenecen.

Vamos a ver que no es necesario que dos funciones sean de primera clase de Baire aunque las dos estén definidas en el mismo dominio y tengan el mismo conjunto de puntos de continuidad. Sea $C$ el conjunto de Cantor, y definimos

$$f(x) = \mathcal{X}_C \quad \text{en } [0, 1]$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \text{números ocultos de } C \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Probaremos que $f$ y $g$ son continuas en todo punto de $[0,1]\backslash C$. Supongamos que $x_0 \in [0,1]\backslash C$. Luego, $x_0$ es un punto interior ya que $[0,1]\backslash C$ es abierto. Por tanto, existe un contorno $N_\delta(x_0)$ contenido en $[0,1]\backslash C$: Luego, para cada punto $x \in N_\delta(x_0)$ tendremos que $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$. Concluimos así que $f$ y $g$ son continuas en todo punto de $[0,1]\backslash C$.

Ahora probaremos que $f$ y $g$ son discontinuas en cada punto de $C$. Para cada $x \in C$ tenemos que todo entorno de $x$ contiene puntos de $C^c$, puntos visibles de $C$ y puntos ocultos de $C$. Luego, siempre existirá un punto $y$ en cada entorno de $x$, tal que $|f(x) - f(y)| = 1$ al igual que para $g$. Por tanto, $f$ y $g$ son discontinuas en $C$.

Veamos que $f$ es una función de primera clase. Definiremos una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ que tenga como límite puntual $f$ en $[0,1]$.Construiremos cada $f_n$ siguiendo los pasos de la construcción del conjunto de Cantor.

Sea $C_n^{1st} = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ el conjunto de los números visibles del conjunto de Cantor generado en el paso $n-$ésimo. Definimos $A_n$ tal que contenga todos estos puntos y los siguientes

$$(a_i + \frac{1}{3^{n+1}}), \forall i = 1, 3, ..., k$$

$$(a_i - \frac{1}{3^{n+1}}), \forall i = 2, 4, ..., k-1$$

Podemos ordenar los puntos en $A_n$ de la siguiente manera

$$a_{2i-2} < a_{2i-1} < a_{2i-1} + \frac{1}{3^{n+1}} < a_{2i} - \frac{1}{3^{n+1}} < a_{2i} < a_{2i+1}$$

para cada $i = 1, ...(k-1)/2$. Podemos ver que

$$a_{2i-2} \leq x \leq a_{2i-1} \Rightarrow f_n(x) = 1$$

$$a_{2i-1} + \frac{1}{3^{n+1}} \leq x \leq a_{2i} - \frac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow f_n(x) = 0.$$

Definimos $f_n$ linealmente y continua en el resto.

Veamos ahora que $f$ es el límite puntual de $f_n$. Si $x \in C$ entonces $f_n(x) = 1$ para cada $n$. Si por otro lado $x \notin C$ tenemos que para algún $i$, y un $n$ suficientemente grande,

$$a_{2i-1} + \frac{1}{3^{n+1}} < x < a_{2i} - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Por tanto, $f_n(x) = 0$, y $f$ es el límite puntual de $\{f_n\}$. Luego, $f$ es de primera clase.

Probaremos ahora que $g$ no es una función de primera clase. Asumimos que existe una sucesión de funciones $\{g_n\}$ tal que $g_n \to g$. Sea $x_1$ perteneciente al conjunto de los puntos visibles de $C$, luego existe un $n_1$ tal que

$$g_{n_1}(x_1) < 1/4,$$

y como $g_{n_1}$ es continua, existe un entorno cerrado $I_1$ de $x_1$ tal que

$$p \in I_1 \Rightarrow g_{n_1}(p) < 1/4.$$

Ahora, sea $x_2$ perteneciente a la intersección de $I_1$ y los puntos ocultos de $C$, luego existe un $n_2$ tal que

$$g_{n_2}(x_2) > 3/4,$$

y como $g_{n_2}$ es continua existe un entorno cerrado $I_2$ de $x_2$, tal que

$$p \in I_2 \Rightarrow g_{n_2}(p) > 3/4$$

y $I_2 \subset I_1$ y $|I_2| < \frac{1}{2}|I_1|$. Siguiendo de la misma forma obtendremos la sucesión $\{g_{n_i}\}$. Sea $x = \cap_{i=1}^{\infty} I_i$, luego,

$$g_{n_{2i}}(x) \to a \geq 3/4$$

y

$$g_{n_{2i+1}}(x) \to b \leq 1/4.$$

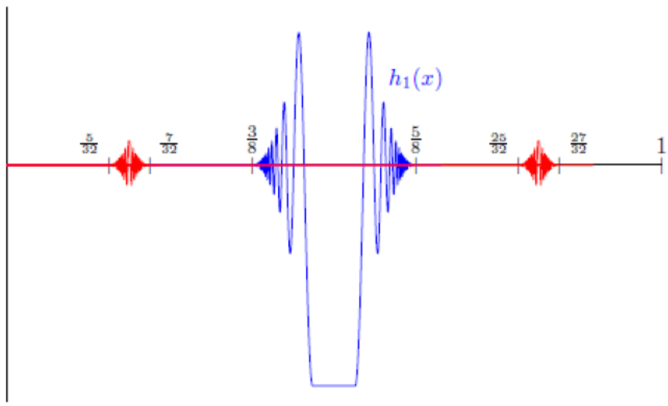
Obtenemos así dos sucesiones de $\{g_n(x)\}$ que convergen a diferentes valores. Por tanto $\{g_n(x)\}$ no tienen un único límite. Luego $g$ no es una función de primera clase.

## 3.6. Funciones diferenciables con $F'$ acotada pero no Riemann integrable

**Teorema 3.4.** *Existen funciones $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciables con $F'$ acotada sobre [0,1], pero $F'$ no es Riemann integrable sobre [0,1]*

*Demostración.* Sea $C_\alpha$ el conjunto de tipo-Cantor con $m(C_\alpha) > 0$ y sea $((a_n, b_n))_{n=1}^{\infty}$ la lista, disjunta, de todos los intervalos abiertos eliminados en su construcción. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función $G_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ definida por $G_n(x) = f(x - a_n)$, para todo $x \in [a_n, b_n]$, esto es

$$G_n(x) = \begin{cases} (x-a_n)^2 sen(\frac{1}{x-a_n}) & \text{si } a_n < x \leq b_n \\ 0 & \text{si } x = a_n \end{cases}$$




Luego,

$$G_n'(x) = \begin{cases} 2(x-a_n)sen(\frac{1}{x-a_n}) - cos(\frac{1}{x-a_n}) & \text{si } a_n < x \leq b_n \\ 0 & \text{si } x = a_n \end{cases}$$

Como el grafo de $G_n$ oscila indefinidamente cuando $x$ se aproxima a $a_n$, existen infinitos extremos relativos. Sea

$$E = \{x \in (a_n, b_n) : x \text{ es un extremo relativo de } G_n\}.$$

Entonces $G_n'(x) = 0$ para cada $x \in E$. Observamos que entre dos extremos relativos consecutivos siempre existe un $x$ tal que $|G'(x)| = 1$. Esto nos permite concluir que $G'$ no es continua en $x = a_n$. En efecto, la sucesión $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ definida por $t_j = a_n + 1/j\pi$ para $j \geq 1$ satisface

$$\lim_{j\to\infty} t_j = a_n \quad \text{pero} \quad \lim_{j\to\infty} |G_n'(t_j)| = 1 \neq 0 = |G_n'(a_n)|.$$

Sea $c$ el mayor número en $(a_n, (a_n + b_n)/2)$ para el cual $G_n'(c) = 0$ y escogemos un $d$ en $((a_n + b_n)/2, b_n)$ tal que $c - a_n = b_n - d$. En este caso $d = a_n + b_n - c$ y se cumple

$$(c-a_n)^2 sen(\frac{1}{c-a_n}) = -(b_n - d)^2 sen(\frac{1}{d-b_n}).$$

Definimos ahora $F_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \begin{cases} (x-a_n)^2 sen(\frac{1}{x-a_n}) & \text{si } a_n < x \leq c \\ \\ (c-a_n)^2 sen(\frac{1}{c-a_n}) & \text{si } c < x \leq d \\ \\ -(x-b_n)^2 sen(\frac{1}{x-b_n}) & \text{si } d < x < b_n \end{cases}$$

Vemos que $F_n$ tiene el mismo comportamiento oscilatorio que $G_n$ tanto en $a_n$ como en $b_n$. Además, $F_n$ es constante en el intervalo $(c, d)$, de modo que $F'_n$ existe en cualquier punto de $[a_n, b_n]$. Resulta que $F'_n$ es acotada sobre $[a_n, b_n]$, pero no es continua en $a_n$ ni tampoco en $b_n$. Más aún,

$$|F_n(x)| \leq |x-a_n|^2 \leq |x-b_n|^2 \quad \text{si } a_n \leq x < c,$$

$$|F_n(x)| \leq |c-a_n|^2 \leq |x-a_n|^2 \quad \text{si } c < x < d,$$
$$|F_n(x)| \leq |d-b_n|^2 \leq |x-b_n|^2 \quad \text{si } c < x < d,$$
$$|F_n(x)| \leq |x-b_n|^2 \leq |x-a_n|^2 \quad \text{si } d \leq x \leq b_n,$$

De aquí se sigue que $|F_n(x)|$ está acotada por ambas $|x-a_n|^2$ y $|x-b_n|^2$ para todo $x \in [a_n, b_n]$. Definimos $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \begin{cases} F_n(x) \text{ si } x \in (a_n, b_n) \subseteq \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j) \\ \\ 0 \qquad\quad \text{si } x \in [0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = C_\alpha \end{cases}$$

- Veamos que $F$ es diferenciable en cada punto de $[0,1]$.
  Fijamos cualquier $c \in [0,1]$. Si $c \in \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, entonces tenemos que $F'(c)$ existe. Supongamos ahora que $c \in C_\alpha$ y probaremos que

  $$F'_+(c) = \lim_{n \to c^+} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = 0.$$

  Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \in (c, c+\varepsilon)$. Si $x \in C_\alpha$, entonces $F(x) = F(c) = 0$ y, por tanto, $F'_+(c) = 0$. Supongamos entonces que $x \notin C_\alpha$. En este caso, $x \in \cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ y, en consecuencia, existe un único $n \geq 1$ tal que $x \in (a_n, b_n)$. Por esto,

  $$|\frac{F(x) - F(c)}{x - c}| \leq \frac{|F_n(x)|}{|x - a_n|} \leq \frac{|x-a_n|^2}{|x-a_n|} = |x - a_n| < \varepsilon$$

  Esto muestra que $F'_+(c) = 0$. Con un argumento similar se prueba que $F'_-(c) = 0$ y, por consiguiente, $F'(c)$ existe para todo $c \in [0,1]$.
- Veamos ahora que $F'$ es acotada sobre $[0,1]$.
  Esto sigue del hecho de que $|F'(x)| \leq |F'_n(x)| \leq 3$ para todo $x \in [0,1]$.

- Por último, veamos que $Disc(F') = C_\alpha$.
  Sea $c \in C_\alpha$. Existirá una subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(a_n)_{k=1}^{\infty}$ convergiendo a $c$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un entero $q_k > k$ tal que

$$|F'(x_k)| = |F'_{n_k}(x_k)| = 1 \quad \text{donde} \quad x_k = a_{n_k} + \frac{1}{q_k \pi}.$$

  La sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge a $c$, pero la sucesión $(F'(x_k))_{k=1}^{\infty}$ no converge al punto $F'(c) = 0$. Esto prueba que $F'$ no es continua en $c \in C_\alpha$ y como $c$ es arbitrario, tenemos que

$$Disc(F') = C_\alpha.$$

  Puesto que $m(C_\alpha) > 0$, se sigue del Teorema de Vitali-Lebesgue que la función $F'$ no es Riemann integrable.

$\square$

# Bibliografía


[1] W. Brito, *Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil,* http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf

[2] D R. Chalice, *A characterization of the Cantor function,* The Amer. Math. Montly, 98, No.3,(1991), 255-258.

[3] F. Chovanec, *Cantor sets,* Science and Military (2010),5-12.

[4] R.B. Darst, *Some Cantor sets and Cantor functions,* Math. Mag., 45 (1972), 2-7.

[5] J. Dobos, *The standard Cantor function is subadditive,* Proc. Amer. Math. Soc., 124, (1996), 3425-3426.

[6] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov and M. Vuorinen, *The Cantor function,* Expo. Math, 24 (2006), 1-37.

[7] K.J. Falconer, *The Geometry of fractal sets,* Cambridge University Press, 1985.

[8] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock,* American Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics, Vol.4, 1994.

[9] R. Hardman, *Pathological applications of Lebesgue measure to the Cantor set and nonintegrability functions,* http://www.whitman.edu/mathemathics/SenioProjectArchive/2012/Hardman.pdf

[10] J.K. Hunter, *Sobolev spaces,* https://www.math.ucdavis.edu/ hunter/pdes/ch3.pdf

[11] I. Mihaila, *The rationals of Cantor set,* The College Math. J., 35, No 4(2004), 251-255.

[12] D.R. Nelson, *The Cantor set-A brief introduction,* https://www.cfa.harvard.edu/dnelson/storage/dnelson.cantor-set.pdf

[13] S. Schiavone, *A Lebesgue measurable set that is not borel,* http://www.cems.uvm.edu/jwsands/333f12/nonborelmeasset.pdf

# *The Cantor set and function*

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

**María Jesús Quintero Álvarez**
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100949513@ull.edu.es

### Abstract

*The objetive of this work is construct the Cantor set and function and study their fundamental properties.*

### 1. Cantor set

The Cantor set is one of the most used examples and counter examples in the area of Mathematics.
It was made at the end of the 19th century by Georg Cantor to solve a topological problem in which set out the existence or not of a compact, non-empty subset of $\mathbb{R}$ that was totally disconnected and perfect.

**Figure 1:** *Cantor set*

To made the Cantor set first we must to divide the interval $I = [0,1]$ in three intervals of equal length and then we eliminate the open subinterval located in the middle, that is, $J(1) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, and we leave the closed intervals $[0,\frac{1}{3}]$ and $[\frac{2}{3},1]$.
We define:

- $J_1$=$J(1)$=$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$
- $F_{11}$=$[0,\frac{1}{3}]$ y $F_{12}$=$[\frac{2}{3},1]$. The length of each these closed intervals is $\frac{1}{3}$.
- $C_1$=$[0,1]\backslash J_1$=$[0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$. We have taht $C_1$ is compact and its length is $\frac{2}{3}$.

Then we subdivide the closed intervals $F_{11}$ and $F_{12}$ in three equal parts eliminating, as in the previous step, the central open intervals $J_2(1)$=$(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ and $J_2(2)$=$(\frac{6}{9},\frac{7}{9})$, and keeping the four remaining intervals.
We define:

- $J_2$=$J_2(1)\cup J_2(2)$
- $F_{21}$=$[0,\frac{1}{3^2}]$, $F_{22}$=$[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}]$, $F_{23}$=$[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}]$, $F_{24}$=$[\frac{8}{3^2},1]$. The length of each interval is $\frac{1}{3^2}$.
- $C_2$=$[0,1]\backslash J_1 \cup J_2$= $[0,1]\backslash(J_1(1)\cup J_2(1)\cup J_2(2))$= $\cup_{j=1}^{2^2} F_{2j}$. $C_2$ is compact and its length is $\frac{4}{3^2}$. Also, $C_2 \subset C_1$.

If we continue in this way indefinitely we will obtain two succession of sets $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ and $(C_n)_{n=1}^{\infty}$.
Finally, we define:

$$G = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$$
$$C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus G.$$

We call $C$ Cantor set.
In addiction, it has other interesting properties such as it is uncountable, symmetric, it has two type of points: the visible points that form a dense and countable set and they are made up by rational numbers, and the hidden points that are made up by uncountable set but that are difficult to show.
Also, it is a self-similary set and it has zero topological dimension and $ln2/ln3$ Hausdorff dimension, so the Cantor set is a fractal.

### 2. Cantor function

The Cantor function gives us an example of a function defined from [0,1] in [0,1], continuous, increasing, not absolutely continuous and with a zero derivative in almost every point.

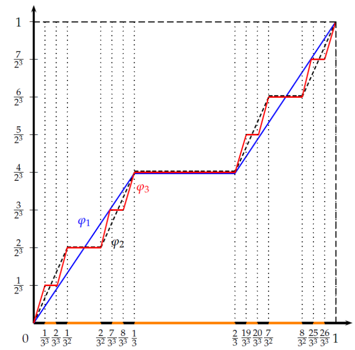



**Figure 2:** *Cantor function*

In addition we will see that it is Lipzchiziana of order $ln2/ln3$, subaddictive and not weakly derivable.
As applications we will obtain that the set of absolutely continuous functions with the uniform norm is not closed, that the set of the Borel sets is a proper subset of the Lebesgue measurable sets, that being of zero measurement and being measurable are not topological properties.
Moreover it show that there are continuous and monotone functions whose length of their graph is 2 while the functions that can be differentiated with continuity always have a graph length less than 2.

### 3. Other functions defined based on Cantor sets

Based on Cantor set and Cantor type sets we can make other functions such as:

- Riemann functions integrable with an uncountable set of discontinuities.
- Continuous functions with an uncountable set of zeros.
- Functions of $C^1$ class with an uncountable number of critical points.
- Darboux functions with an uncountable set of discontinuities.
- Functions of the first class of Baire.
- Differentiable functions with $F'$ bounded but not Riemann integrables.

### References

[1] W. Brito, *Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil,* http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/ wilman_brito/integral2222cambio.pdf

[2] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov and M. Vuorinen, *The Cantor function,* Expo. Math, 24 (2006), 1-37.

[3] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock,* American Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics, Vol.4, 1994.

[4] R. Hardman, *Pathological applications of Lebesgue measure to the Cantor set and nonintegrability functions,* http://www.whitman.edu/mathematics/SenioProjectArchive/ 2012/Hardman.pdf