

MEMORIA DEL TRABAJO FIN DE GRADO

ANÁLISIS DE CARTERAS EFICIENTES, UNA COMPARATIVA DEL IBEX 35 Y
EL DAX 30 EN EL PERIODO 2014-2019

EFFICIENT PORTFOLIO ANALYSIS, A COMPARISON OF IBEX 35 AND DAX 30 IN
THE PERIOD 2014-2019

Autora: D^a Carla Imma Lupa Bascones

Tutor: D. Domingo Israel Cruz Báez

Grado en ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS
FACULTAD DE ECONOMÍA, EMPRESA Y TURISMO
Curso Académico 2018 / 2019

San Cristóbal de La Laguna, 10 de Junio de 2019

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es construir, mediante la Teoría de Markowitz, la frontera de carteras eficientes a partir de muestras formadas por el IBEX 35 y el DAX 30 respectivamente, que consigan batir el mercado, y comparar los resultados obtenidos de ambas carteras en términos de riesgo y rentabilidad. Para ello, se realiza un análisis técnico de los activos seleccionados en el periodo de 2014-2019. A través del análisis de performance, se seleccionan los activos mejor valorados y se formula el problema de minimización del riesgo a una rentabilidad esperada.

En el trabajo, se verifica que las carteras conformadas por el DAX 30 generan rentabilidades superiores en comparación con las del IBEX 35. Aunque en términos de riesgo las carteras del IBEX 35 son más eficientes. Finalmente se logra batir al mercado utilizando la Teoría de Carteras de Markowitz.

Palabras clave: Rentabilidad, Riesgo, Diversificación de Carteras, Markowitz

ABSTRACT

The aim of this research project is to construct, through Markowitz Theory, an efficient frontier of optimal portfolios based on samples formed by the IBEX 35 and DAX 30 respectively, that manage to beat the market, and compare the outcomes obtained from both portfolios in terms of risk and return. Therefore, a technical analysis of the assets selected in the 2014-2019 period is carried out. Through the performance analysis, the best valued assets are selected, and the risk minimization problem is formulated at an expected return.

In this project, it is verified that portfolios composed by the DAX 30 create higher returns compared to those of the IBEX 35. Although in terms of risk, the portfolios of the IBEX 35 are more efficient. Finally, it is possible to beat the market using Markowitz's Theory of Portfolios.

Key words: Expected return, risk, Portfolio diversification, Markowitz

ÍNDICE

RESUMEN	2
I. INTRODUCCIÓN	5
II. PRIMERA PARTE: ANÁLISIS HISTÓRICO	6
1. TEORÍA DE VALORACIÓN DE ACTIVOS DE RENTA VARIABLE.....	6
2. EFICIENCIA DE LOS MERCADOS DE CAPITALES	7
3. EL MODELO DE MARKOWITZ	8
4. EL MODELO DE MERCADO DE SHARPE	12
5. RATIOS DE PERFORMANCE.....	15
5.1. RATIO SHARPE	16
5.2. ÍNDICE DE TREYNOR	17
III. APLICACIÓN PRÁCTICA	18
1. BASE DE DATOS	18
2. METODOLOGÍA.....	19
3. ESTUDIO DESCRIPTIVO	20
3.1. ANÁLISIS TÉCNICO DEL IBEX 35.....	20
3.2. ANÁLISIS TÉCNICO DEL DAX 30	22
4. FRONTERA EFICIENTE	25
IV. CONCLUSIONES.....	30
V. BIBLIOGRAFÍA.....	31
VI. ANEXOS	32

ÍNDICE DE GRÁFICOS

1. Gráfico de frontera eficiente de Markowitz.....	10
2. Gráfico: Curva de indiferencia de un inversor	11
3. Gráfico de determinación de la cartera óptima	12
4. Gráfico de títulos de acuerdo con el valor de sus betas	14
5. Gráfico: Riesgos de Cartera.....	15
6. Gráfico: Cartera eficiente del IBEX 35.....	26
7. Gráfico: Cartera eficiente del DAX 30.....	28
8. Gráfico: Frontera Eficiente IBEX 35	29
9. Gráfico: Frontera Eficiente DAX30	29

ÍNDICE DE TABLAS

1. Tabla: Análisis Técnico de las empresas del IBEX 35	21
2. Tabla de Rentabilidad, riesgo y ratios de performance IBEX 35	21
3. Tabla: Análisis Técnico de las empresas del DAX 30	23
4. Tabla de Rentabilidad, riesgo y ratios de performance DAX 30	23
5. Tabla: Ranking de empresas del IBEX 35	24
6. Tabla: Ranking de empresas del DAX 30	24
7. Tabla: Carteras eficientes por rentabilidad esperada IBEX 35	25
8. Tabla: Carteras eficientes por rentabilidad esperada DAX 30	27
9. Tabla: Rentabilidad-riesgo de los índices del IBEX 35 y el DAX 30	28

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de carteras de inversión de renta variable se basa en intentar maximizar los beneficios de la inversión, a través de la correcta combinación entre rendimiento y riesgo, así cada inversor decide el nivel de riesgo que está dispuesto a asumir.

El principal representante sobre el análisis de carteras es Harry Markowitz con su estudio sobre carteras eficientes y cómo minimizar el riesgo de la inversión. No obstante, es su discípulo Sharpe a través de su modelo mercado, quien simplificó las teorías de carteras y dividió el riesgo asociado en dos tipos, riesgo sistemático y no sistemático. Desarrollando consigo el concepto del estimador beta, que es el riesgo sistemático que cada activo lleva asociado a su rendimiento.

Por medio de la Teoría de Carteras de Markowitz es posible crear una frontera de carteras eficientes cuya rentabilidad sea superior a la del mercado. El IBEX 35 es el principal índice de referencia en las Bolsas Españolas, en cambio el DAX 30 (índice bursátil compuesto por las principales empresas alemanas) tiene una mayor reputación a nivel europeo. Las similitudes de ambos índices nos llevan a considerar cuál de estos dos nos podrían brindar una mayor rentabilidad a un mínimo riesgo.

El objetivo principal de este trabajo es construir la frontera de carteras eficientes seleccionando activos que conforman el IBEX 35 y el DAX 30 respectivamente, y así lograr batir al mercado. Además, estudiaremos los comportamientos obtenidos de los portafolios eficientes compuestos por estos índices mediante un análisis técnico y de performance, comparando los resultados de ambos en términos de rentabilidad y riesgo.

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma:

En primer lugar, se realiza una revisión de la literatura en el ámbito de Teorías de Carteras, explicando conceptos básicos, así como los modelos teóricos utilizados, como son el modelo de Markowitz, el modelo de mercado de Sharpe y los ratios de performance.

A continuación, se desarrolla la parte práctica de este trabajo, donde se aplican los conceptos teóricos anteriormente expuestos en los activos que conforman el IBEX 35 y el DAX 30 así como a los valores de los índices en sí mismos, el periodo de estudio seleccionado es 2014-2019.

A través del análisis técnico conseguimos definir la rentabilidad media, el riesgo general y el asociado al mercado. Asimismo, con los ratios de performance encontramos los activos mejor valorados que conformarán la cartera eficiente, y que disminuirán parte del riesgo por medio de una correcta diversificación.

Posteriormente, se optimizan esos títulos seleccionados y se construye la frontera de carteras de Markowitz para el IBEX 35 y el DAX 30. Esta frontera es donde el inversor obtendrá la mejor relación entre rentabilidad y riesgo.

Finalmente, se comparan los resultados obtenidos de ambas fronteras, analizando la composición de las carteras eficientes por rentabilidad esperada, riesgo y performance.

II. PRIMERA PARTE: ANÁLISIS HISTÓRICO

1. TEORÍA DE VALORACIÓN DE ACTIVOS DE RENTA VARIABLE

El mercado de renta variable está compuesto en su mayoría por acciones de empresas que se cotizan en Bolsa. Estas se consideran renta variable porque los valores no garantizan la obtención de un rendimiento en concreto. El mercado de renta variable según el Plan de Educación Financiera (2010): “refleja las expectativas empresariales y, por tanto, la situación económica general de los distintos países y del mundo entero, esto hace que los rendimientos que se esperen estén en función de la evolución de la empresa”.

Un inversor tiene la posibilidad de elegir entre distintas acciones, pero existe una gran incertidumbre con respecto a la rentabilidad y el riesgo asociado a cada activo financiero al cual tiene que hacer frente. Dependiendo del análisis que realice el inversor, este creará una combinación de títulos financieros a la que se denomina cartera o portafolio.

Para poder entender cómo analizar dichas carteras es bueno explicar algunos conceptos relacionados como:

Rentabilidad o rendimiento: “La rentabilidad de una inversión se define como la variación porcentual que experimenta el valor de un activo durante un periodo de tiempo” (FIKAI, 2013).

Cabe diferenciar dos tipos: la rentabilidad histórica, que se calcula a partir de los datos históricos que se han producido a lo largo de un periodo determinado. Y la rentabilidad esperada, que se estima a través de previsiones. En el caso de que los datos no son conocidos con certeza, aunque se utilicen datos históricos como referencia solo se puede realizar una estimación aproximada, y para ello se utiliza la esperanza matemática (FIKAI, 2013).

En el mercado de renta variable, rendimiento esperado es el costo de oportunidad de capital para inversores que comparten el mismo grado de riesgo. De acuerdo con Brealey, Myers y Allen (2015) para estimar el costo de capital con base en los rendimientos históricos o las primas de riesgo es mejor utilizar promedios aritméticos. El uso de rendimientos históricos se debe a que no se puede conocer con exactitud la tasa de rendimiento del portafolio de mercado debido a su composición:

$$r_m = r_f + \text{prima de riesgo}$$

La tasa de rendimiento del portafolio es la suma de la tasa de interés libre de riesgo y la prima de riesgo. La primera es lo que un inversor recibe si decide invertir en un activo con un riesgo mínimo y seguro como son las letras y bonos del Estado. La prima de riesgo es lo que espera recibir el inversor por el riesgo adicional que conduciría el invertir en dicho portafolio (Brealey, Myers , & Allen, 2015).

Debido a que las expectativas del mercado cambian con el paso del tiempo, la tasa de interés libre de riesgo y la prima de riesgo varían igualmente. “Si hay una disminución en el rendimiento que los inversionistas requieren, la prima de riesgo será sobrestimada a partir de los rendimientos pasados” (Brealey, Myers , & Allen, 2015, pág. 179).

Riesgo: se define riesgo como “la probabilidad de que el resultado de una operación sea diferente a la que ha sido prevista inicialmente” (Sánchez García, 2014). Esto es debido a que el rendimiento de la empresa está sujeto a distintos riesgos como pueden ser tipos de interés, renta familiar, etc. En consecuencia, si el inversor intenta eliminar el riesgo de la empresa, este irá disminuyendo hasta alcanzar la rentabilidad de un activo libre de riesgo¹, y por tanto intentará conseguir un equilibrio entre riesgo y rendimiento. Una forma de medir la variabilidad de los rendimientos futuros que se pueden obtener es a través de la varianza o la desviación estándar (Brealey, Myers , & Allen, 2015).

El binomio rentabilidad-riesgo se crea en el momento en que el inversor decide entre varias opciones. Cuanto mayor sea el riesgo que el inversor esté dispuesto a asumir, mayor tendrá que ser la rentabilidad esperada para que sea atractivo el invertir en dicha cartera.

Por último, cabe destacar que existen dos tipos de análisis del mercado, basados en la información del mismo (análisis técnico y fundamental), los cuales el inversor puede utilizar en su búsqueda por la cartera que más rentabilidad le proporcione. Sánchez García (2014) explicó que:

“El análisis técnico busca formas en las series históricas de precios que sean recurrentes y por consiguiente predecibles. Por otro lado, el análisis fundamental, trata las previsiones de beneficios, dividendos de la empresa, expectativas sobre los tipos de interés y la valoración del riesgo de la empresa, para determinar el precio intrínseco de la acción”.

2. EFICIENCIA DE LOS MERCADOS DE CAPITAL

La teoría de los mercados eficientes nace de la pregunta sobre cómo pueden crear valor los analistas financieros.

Esta teoría fue desarrollada por Eugene Fama en 1970, argumentó que, en un mercado eficiente, todos los títulos que se negocian son valorados de manera correcta y a su vez reflejan toda la información disponible.

Respecto a la información disponible, en un mercado eficiente, los precios de los títulos que se negocian deben de reflejar dicha información y a la vez ajustarse total y rápidamente a nueva información, que se da por supuesto es gratuita.

Por otro lado, un título está correctamente valorado cuando su valor actual neto es nulo, en otras palabras, no existen títulos infra o sobre valorados y los inversores obtendrán un rendimiento sobre su inversión que será apropiado para el nivel de riesgo asumido sin tener que gastar tiempo o dinero en el análisis del valor intrínseco de un título (FIKAI, 2013).

Cuando existe una disparidad entre el precio y el valor intrínseco de un título, esto es cuando están infra o sobrevalorados, se dice que existe una ineficiencia temporal.

Estas ineficiencias temporales, como su nombre lo indica son de corta duración, y solo los inversionistas más avisados podrán sacar un beneficio de ellas, antes de que se regule el mercado.

¹ Como activo libre de riesgo, se suele utilizar de referencia letras y bonos del Estado.

De acuerdo con Eugene Fama (1965):

- Los precios actuales cambian rápidamente para ajustarse al nuevo valor intrínseco derivado de nueva información.
- El tiempo que transcurre entre dos ajustes sucesivos de precios de un mismo título es una variable aleatoria independiente.

En FIKAI (2013), se explican 3 hipótesis sobre la eficiencia de los mercados:

- Hipótesis débil: cada título refleja totalmente la información contenida en la serie histórica de precios, es decir, toda la información pasada.

De acuerdo con esta hipótesis, ningún inversor podrá conseguir un rendimiento superior al promedio del mercado, analizando exclusivamente la información pasada.

- Hipótesis intermedia: cuando los precios reflejan no solo toda la información pasada sino también toda la información pública que existe acerca de la empresa y del entorno que pueda afectar a cada título en particular.

Según la hipótesis intermedia solo se podría lograr un rendimiento superior al promedio a través de la utilización de información privilegiada.

- Hipótesis fuerte: Los precios reflejan toda la información ya sea pasada pública o privada. Esta hipótesis es imposible de lograr, solo funcionaría en un mercado perfecto. Y obtener rendimientos superiores al mercado solo serían posibles por medio del azar.

3. EL MODELO DE MARKOWITZ

Harry Markowitz desarrollo el modelo de selección de carteras que consiste en encontrar la cartera óptima para cada inversor, en términos de rentabilidad y riesgo, en una situación de incertidumbre. (López, 2019). Markowitz postuló que el inversor, es un ser racional y averso al riesgo, por tanto, de optar entre dos carteras con el mismo rendimiento esperado, este elegirá el de menor riesgo. En consecuencia, sólo asumirá una cartera con más riesgo si tiene una rentabilidad esperada mayor, es decir, trata de maximizar su utilidad.

La Teoría de cartera desarrollada por Markowitz (1952, citado en Ruiz Campo y Mendoza Respo 2011), realizó una serie de hipótesis para simplificar la realidad, y en las que se basa su modelo media-varianza, entre las que cabe destacar:

- Los mercados se suponen son perfectos, donde la información es pública y accesible por todos los agentes.
- Se considera un único horizonte temporal idéntico para todos los agentes, estos tienen expectativas homogéneas respecto a la información disponible sobre el rendimiento y el riesgo de los activos.
- Existe además un tipo de interés sin riesgo al que los agentes pueden prestar y pedir prestado de manera ilimitada.

El objetivo del modelo de Markowitz es obtener una potencial o teórica cartera óptima, guiándose por los pesos asignados a los títulos de dicha cartera son los óptimos en cada momento del tiempo.

Markowitz se basó en 3 supuestos básicos para desarrollar el modelo:

- ✓ “La rentabilidad o rendimiento de los títulos que componen la cartera del inversor está representada por la esperanza matemática de sus rendimientos o la media aritmética, esta debe de ser conocida siempre por el inversor” (FIKAI,2013, pág. 40).

$$E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n$$

- ✓ “El riesgo estará medido por la dispersión, que vendrá definida por la varianza o desviación estándar de la variable aleatoria que describe el rendimiento, ya sea títulos individuales o de carteras” (FIKAI,2013, pág. 40):

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + \dots + x_n^2 \sigma_n^2 + 2 * \sum_{i=j}^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} ,$$

siendo σ_{ij} la matriz de covarianzas.

- ✓ La conducta racional del inversor hace que su función de utilidad este definida por dos variables, el rendimiento de la cartera y el riesgo de dicha cartera.

$$U = f(E_p, \sigma_p^2)$$

De acuerdo con Markowitz cada inversor tiene una actitud al riesgo distinta por lo que la cartera óptima podría variar entre distintos inversores. Por ello dividió en tres etapas la búsqueda de la cartera óptima, siendo estas:

1. Determinación del conjunto de carteras eficientes o frontera eficiente

Para hallar una cartera eficiente, es necesario optimizar la función de utilidad del inversor, maximizando la rentabilidad a un riesgo determinado o minimizando el riesgo a un determinado valor de rentabilidad:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximizar } E_p = \sum_{i=1}^n x_i E_i \\ \text{sujeto a:} \\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} = V^* \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{array} \right\}$$

La función rendimiento a maximizar, está compuesta por la suma producto de los pesos respectivos de inversión de cada título que forman parte de la cartera por el rendimiento, medido por su esperanza matemática, de cada uno de estos títulos.

La primera restricción que tiene esta función es el riesgo que va asociado siempre al rendimiento esperado de la cartera, este se denomina variable paramétrica, debido a que varía según el tipo

de inversor sea averso o no al riesgo. La siguiente restricción versa sobre el presupuesto que tiene el inversor para invertir, dado que la suma de los pesos de todos los títulos que tiene para invertir será igual al 100% de su inversión.

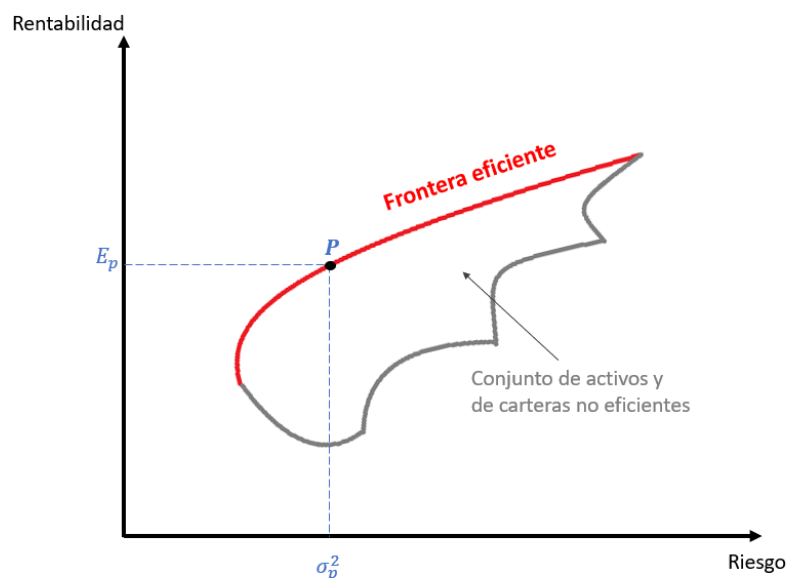
Por último, existe la condición de no negatividad de los pesos, esto es un peso de inversión de un título puede ser positivo, es decir invertir un cierto porcentaje del presupuesto en dicho activo o cero, no invertir en él.

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\
 & \text{sujeto a:} \\
 & E_p = \sum_{i=1}^n x_i E_i = E^* \\
 & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)
 \end{aligned} \right\}$$

El inversor puede decidir minimizar la función de riesgo, por lo que la función esperada de rendimiento se convierte en restricción paramétrica, es decir, E^* es el rendimiento que previamente a la minimización del riesgo espera el inversor cuando va a invertir en un determinado conjunto de activos. Las restricciones presupuestarias y de no negatividad son las mismas que en el problema de maximización.

En el gráfico 1, se representa la curva con todas las carteras posibles que se pueden formar con un cierto número de títulos.

1. Gráfico de frontera eficiente de Markowitz



Fuente: Elaboración propia

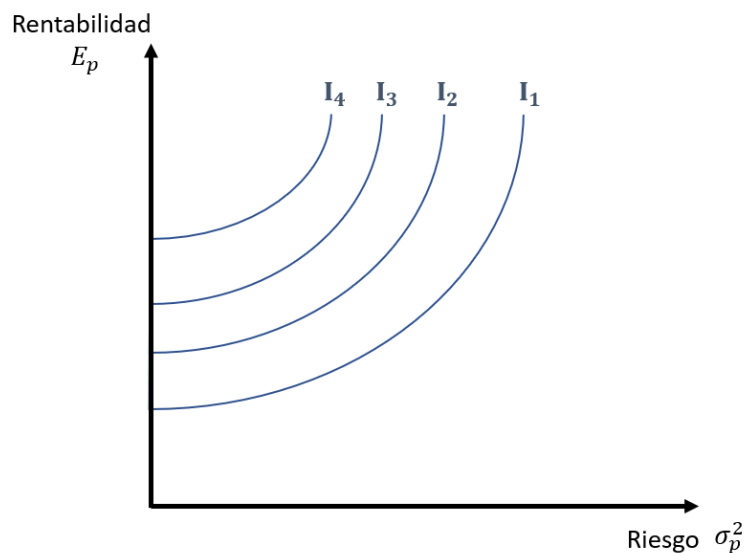
En el gráfico se refleja siempre en el eje de las abscisas el riesgo representado por la varianza y en el eje de las ordenadas el rendimiento de la cartera. La frontera eficiente está representada por la línea curva superior, es decir las carteras que caigan sobre esta curva son carteras eficientes, maximizando la rentabilidad o minimizando el riesgo según corresponda. En un nivel inferior se encuentran las carteras factibles, que no son eficientes debido a que existe una cartera que al mismo nivel de riesgo obtiene una mayor rentabilidad y viceversa.

Cabe destacar que la frontera eficiente construida es independiente del punto de vista que tenga el inversor (FIKAI,2013).

2. Especificación de la actitud del inversor frente al riesgo

De acuerdo con FIKAI (2013), esta etapa se define como etapa subjetiva debido a que la función de utilidad es independiente de cada tipo de inversor, y que responde a las preferencias de cada uno de ellos.

2. Gráfico: Curva de indiferencia de un inversor



Fuente: Elaboración propia

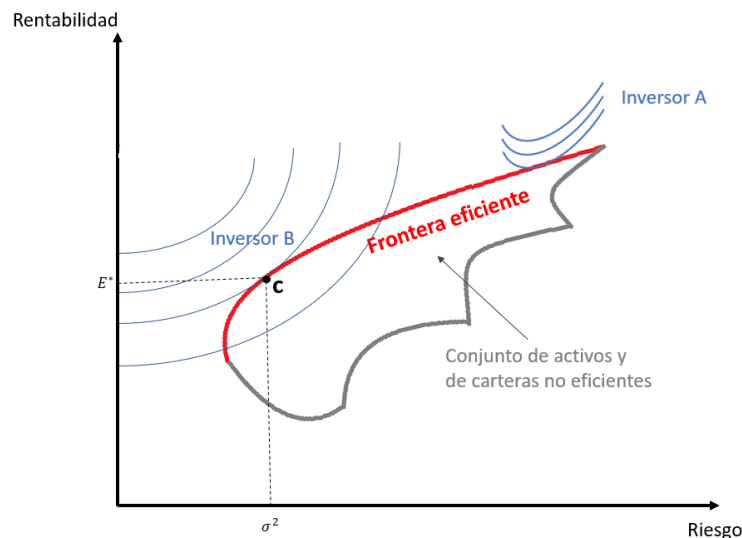
“La curva de indiferencia, combinación ganancia-riesgo que reportan la misma satisfacción, deberá ser creciente, siendo la más alejada del origen de coordenadas la que representan mayores niveles de satisfacción” (FIKAI, 2013, pág. 43).

3. Determinación de la cartera óptima

La cartera óptima de cada inversor se encuentra superponiendo las curvas de indiferencia y la de frontera eficiente, este punto varía en función al grado de aversión al riesgo que tenga el inversor, y a su vez en función de sus características personales como nivel de ahorro, patrimonio, forma de ser, etc.

En el gráfico 3, el punto C representa la cartera óptima para el inversor B, y cualquier otra cartera que se encuentre en la frontera eficiente se corresponde con una curva de indiferencia de un menor índice de satisfacción.

3. Gráfico de determinación de la cartera óptima



Fuente: Elaboración propia

Además como se explicó al inicio de este apartado la volatilidad de una cartera se mide a través de la varianza, donde queda reflejado el riesgo total de un portafolio, que no solo se encuentra en función de los títulos que componen dicha cartera, sino que también afecta la correlación entre las rentabilidades de todos los pares de títulos (FIKAI, 2013).

4. EL MODELO DE MERCADO DE SHARPE

William Sharpe desarrolló el modelo de mercado con el objetivo de simplificar la teoría de Markowitz en especial la matriz de varianzas-covarianzas, que conforme con Markowitz nos permite conocer la relación entre cada par de títulos de una cartera. Para ello introdujo dos hipótesis que simplifican dichos cálculos:

- ✓ Se presume que existe una relación entre el rendimiento de los títulos y el rendimiento del mercado, esto apunta a que la dependencia estadística entre los rendimientos de los diferentes títulos no es directa.
- ✓ Establece, que la relación entre el rendimiento de los distintos títulos y el rendimiento del mercado es lineal (FIKAI, 2013).

Dichas hipótesis simplifican el modelo de mercado el cual se basa en que los rendimientos de los títulos pueden calcularse en base a su relación con el rendimiento del mercado.

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + \varepsilon_{it}$$

Donde:

R_{it} = rentabilidad del título i en el momento t

R_{mt} = rentabilidad de la cartera de mercado en el momento t

α_i = ordenada en el origen

β_i = pendiente del ajuste

ε_{it} = perturbación aleatoria correspondiente al título i en el momento t

Una de las aportaciones del modelo de Sharpe es la distinción de dos tipos de riesgo el sistemático o de mercado y el diversificable, que componen el riesgo total de un activo.

- Riesgo diversificable que se define como el riesgo específico de cada título que puede ser eliminado mediante la diversificación de la cartera.
- Riesgo de mercado o sistemático (β_i) nace de la relación entre la rentabilidad del activo con la rentabilidad del mercado. Muestra la sensibilidad que tiene el rendimiento del activo frente a cambios que puede tener la rentabilidad del mercado (Sánchez García, 2014).

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

σ_{im} = covarianza entre la rentabilidad del título (R_i) y la de mercado (R_m)

σ_m^2 = varianza de la rentabilidad del mercado

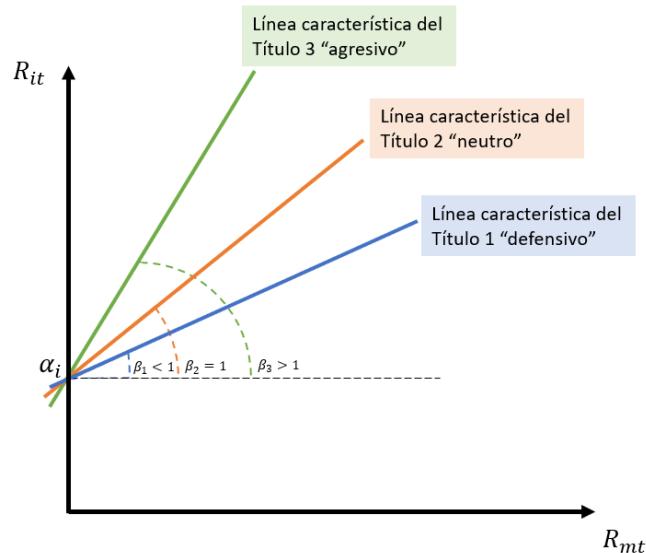
Por medio de la diversificación es posible reducir en cierta medida el riesgo no sistemático de una cartera. Dicho de otro modo, se pueden seleccionar los títulos de la cartera que tengan coeficientes de correlación muy pequeños o negativos.

De los valores obtenidos en función de su beta se pueden diferenciar:

- Títulos agresivos: cuando la beta > 1, estos activos son más arriesgados que el índice representativo del mercado, es decir son activos muy sensibles a las oscilaciones del mercado, y por ello los que más riesgo sistemático tienen.
- Títulos defensivos: cuando la beta es menor que 1, son los que menos varían con relación al movimiento del mercado, en otras palabras, cuando el índice del mercado aumenta en un punto, la variación de la rentabilidad del título será menor. Tienen un riesgo sistemático menor.

- Títulos neutros: cuando la beta es igual a 1, esto quiere decir que las oscilaciones de los títulos van en acorde con el mercado (FIKAI, 2013; Sánchez 2014).

4. Gráfico de títulos de acuerdo con el valor de sus betas



Fuente: Elaboración propia

La beta es de gran utilidad cuando se quiere gestionar el riesgo de la cartera además de poder predecir las rentabilidades futuras a través del modelo de mercado de Sharpe. Para poder hallar la Línea Característica de la cartera, es necesario hallar los coeficientes α y β de la misma. El coeficiente β de una cartera es el promedio ponderado de las betas de cada uno de los títulos, siendo las ponderaciones las proporciones que cada título tiene en la cartera.

$$\beta_p = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n$$

De la misma manera el coeficiente α se calcula como el promedio ponderado de las alfas de los títulos que forman las carteras:

$$\alpha_p = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$$

Por lo tanto, la Línea Característica de cartera sería:

$$R_{pt} = \alpha_p + \beta_p R_{mt} + \varepsilon_{pt}$$

Dada la ecuación anterior se puede diferenciar entre la rentabilidad y el riesgo de dicha cartera:

Rentabilidad esperada:
$$E_p = \alpha_p + \beta_p E_m$$

Donde α_p es la rentabilidad media de la cartera generada por las empresas y $\beta_p E_m$ es la rentabilidad media de la cartera generada por el mercado.

Para hallar el riesgo de la cartera es necesario calcular la varianza de R_p a partir del modelo de mercado:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{up}^2$$

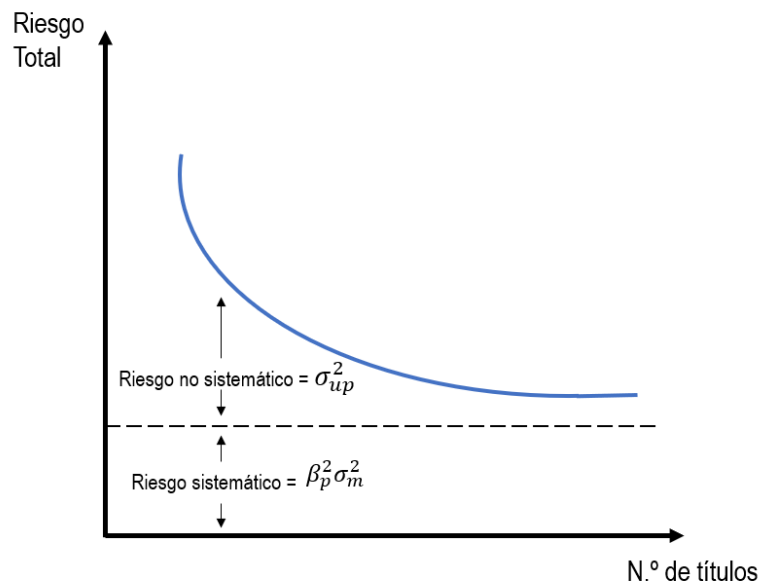
Donde $\beta_p^2 \sigma_m^2$ representa el riesgo que depende del mercado es decir el riesgo sistemático, al mismo tiempo σ_{up}^2 representa el riesgo específico o diversificable, y que se expresa como:

$$\sigma_{up}^2 = x_1^2 \sigma_{u1}^2 + x_2^2 \sigma_{u2}^2 + \dots + x_n^2 \sigma_{un}^2$$

De acuerdo con FIKAI (2013), un inversor puede reducir el riesgo no sistemático por medio de una adecuada diversificación de su cartera, una cartera con suficientes títulos, esto es, entre 20 o 25 títulos disminuye la varianza de la misma por lo que el riesgo diversificable es irrelevante.

El siguiente gráfico representa ambos riesgos de cartera:

5. Gráfico: Riesgos de Cartera



Fuente: Elaboración propia

5. RATIOS DE PERFORMANCE

Los ratios de performance o de comportamiento son utilizados normalmente en el estudio del desempeño de los títulos de una cartera en el mercado. Su fundamentación se basa en que no todas las rentabilidades obtenidas por los títulos de una cartera se pueden comparar debido a que cada una asume un riesgo distinto y, por tanto, es difícil compararlas directamente.

Estas diferencias estarían basadas en el riesgo que conlleva cada título y la estrategia que el inversionista realiza para batir el mercado.

“De acuerdo con la evidencia aportada por la literatura sobre el análisis de la gestión de carteras y fondos de inversión, para evaluar su calidad se pueden realizar dos grupos de índices” (Ruiz Campo & Mendoza Resco, 2011, pág. 46).

El primer grupo tiene en consideración los rendimientos históricos de las carteras, durante un periodo de tiempo determinado, en relación con el comportamiento del mercado o índice de referencia y en función del riesgo soportado (Ruiz Campo & Mendoza Resco, 2011). El ratio Sharpe utilizado en este trabajo se encuentra entre estas medidas.

El segundo grupo considera solo el riesgo sistemático de la cartera, el índice de Treynor, también utilizado en el análisis práctico realizado, es uno de ellos.

En nuestro caso, con ambas ratios se pueden realizar un ranking para elegir si una cartera es mejor que otra. Cabe destacar que, de diversificar correctamente una cartera, el ranking de la cartera aplicando el ratio de Sharpe debe ser el mismo que aplicando el Ratio de Treynor (FIKAI, 2013).

5.1. RATIO SHARPE

William Sharpe en 1966 desarrolló el ratio Sharpe también denominado índice premio-variabilidad, mide la relación entre la rentabilidad obtenida de un título por la unidad de riesgo total de una cartera de inversión. La prima de rentabilidad obtenida por el título refleja como el rendimiento obtenido por un título compensa el riesgo tomado.

De esta interpretación se puede extraer que, el título que tenga el mayor valor de ratio es el que mayor rentabilidad tiene con respecto al riesgo que el inversor está dispuesto a contraer.

Este índice al basarse en la Teoría de Carteras debe de ser utilizado solo para comparar el comportamiento de carteras bien diversificadas, y no para carteras basadas en la especialización que sólo tienen en cuenta el riesgo sistemático de las mismas.

$$RS_i = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i}$$

Donde:

RS_i = Ratio de Sharpe asociado al título o cartera “i”

R_i = Rentabilidad del activo “i”

R_f = Rentabilidad del activo libre de riesgo

σ_i = Riesgo total (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera “i”

Si el valor obtenido con este ratio es negativo, entonces es indicativo de que el rendimiento del activo es inferior al rendimiento del activo sin riesgo, en cambio si obtenemos un valor menor a uno, esto significa que el riesgo que asume el inversor es mayor al rendimiento. Por último, si el valor del índice es mayor a uno nos indica que el beneficio o prima obtenida es mayor al riesgo (Sánchez García, 2014).

5.2. ÍNDICE DE TREYNOR

El índice de Treynor creado en 1966 se basa en el modelo del CAPM² (Capital Asset Price Market), “este ratio mide la relación entre el riesgo y la diferencia del rendimiento del activo con el rendimiento del activo sin riesgo y el riesgo del activo o fondo” (Sánchez García, 2014, pág. 21), a diferencia del ratio Sharpe, Treynor solo tiene en cuenta el riesgo sistemático al asumir que la cartera se encuentra diversificada, y por ello que el único riesgo de relevancia es el riesgo de mercado o no diversificable (García, 2013).

$$T_i = \frac{R_i - R_f}{\beta_i}$$

Donde:

T_i = Índice de Treynor asociado al título o cartera “i”

R_i = Rentabilidad del activo “i”

R_f = Rentabilidad del activo libre de riesgo

β_i = Medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera “i”

² El CAPM describe la relación entre riesgo sistemático y el rendimiento esperado de un activo, en particular de acciones de una cartera. Este modelo basa sus cálculos en la sensibilidad al riesgo no diversificable, representado por el símbolo beta (Kenton, 2019).

III. APLICACIÓN PRÁCTICA

Para la realización de la parte práctica partimos del objetivo principal del trabajo, que es construir la frontera de carteras eficientes de Markowitz, seleccionando activos que forman parte del IBEX 35 y del DAX 30 respectivamente y así lograr que las carteras batan al mercado (los índices del DAX 30 e IBEX 35). Otro objetivo es estudiar los comportamientos obtenidos de los portafolios compuestos por dichos índices por medio de un análisis técnico, y así comparar su eficiencia en términos de rentabilidad y riesgo además de analizar los distintos valores conseguidos. El periodo de análisis que comprende este trabajo es de 5 años, desde enero de 2014 a enero de 2019, fecha en la que comienza este estudio.

Comenzamos este trabajo con una breve explicación de los datos que se ha utilizado, así como la fuente que ha sido necesaria para su obtención. A continuación, se detalla la metodología utilizada para posteriormente desarrollar la aplicación práctica.

En la aplicación práctica, primero se realiza un análisis técnico, de la rentabilidad y el riesgo de los títulos que conforman el DAX30 y el IBEX 35. Luego se hallan las covarianzas entre el mercado y los títulos, y por medio del modelo de Sharpe se computan la β y α . El cálculo de la β nos permite conocer el riesgo sistemático de la cartera, el cual se debe tener en cuenta debido a que no se puede eliminar por medio de la diversificación³.

Mediante los ratios de performance se realiza un ranking con los títulos que conforman ambos índices y así seleccionar los 20 títulos que mejor desempeño conllevan. Por último, por medio de la optimización calculamos los pesos y títulos que conforman las carteras eficientes de Markowitz.

1. BASE DE DATOS

Los datos utilizados son series históricas formadas por los precios⁴ de los índices IBEX 35 y DAX 30 y las empresas que las conforman. En total se recopiló 67 series, aunque a causa de insuficiencia de datos en el periodo de tiempo seleccionado⁵, se tuvieron que omitir del estudio 3 empresas del IBEX 35 (Aena, Cellnex Telecom y Merlín Properties) y dos del DAX 30 (Linde PLC y Covestro).

La serie de precios son mensuales y el periodo de la muestra elegida comprende desde el 31 de enero de 2014 al 31 de enero de 2019. El periodo de tiempo es suficiente para que los datos sean representativos y tengan validez, además de acuerdo con Damodaran (2012), al utilizar datos mensuales es posible reducir errores en la estimación de beta.

La serie de datos utilizados se obtuvieron de la fuente de acceso libre Investing.com de donde se descargaron todos los datos.

Se eligió el índice IBEX 35, porque es el principal índice bursátil de referencia en España, conformado por las 35 empresas con mayor liquidez que cotizan en las Bolsas españolas y en el

³ Como ya se explicó en la parte teórica del trabajo, existen dos tipos de riesgo, el sistemático y el no sistemático, por medio de una correcta diversificación es posible disminuir dicho riesgo, véase apartado 4.

⁴ Estos precios son de cierre y ya tienen descontando los dividendos y los Splits.

⁵ La composición de los índices IBEX 35 y DAX 30 es revisada anualmente, debido a esto existen algunas variaciones en el tiempo de las empresas que las componen.

SIBE⁶. Para poder contrastar los resultados en términos de rendimiento y riesgo se ha elegido el índice DAX 30, compuesto por 30 empresas alemanas consideradas blue Chips⁷, ambos índices comparten ciertas similitudes lo que facilita la comparación técnica. Conformadas por casi el mismo número de empresas, ambas son referente en los mercados internacionales, y además son índices ponderados de capitalización bursátil, es decir no todas las empresas que los componen tienen el mismo peso.

2. METODOLOGÍA

Debido al uso de series históricas como base de análisis de este estudio, se asume que el mercado cuenta con una eficiencia media, eso es que los precios reflejan toda la información disponible.

En primer lugar, en el estudio, se comienza con un análisis descriptivo para después aplicar las teorías de mercado de Markowitz y de Sharpe.

A partir de las series históricas de precios del IBEX35 y del DAX 30, se calculan los rendimientos de los activos que componen ambos índices, utilizando la siguiente fórmula:

$$R = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100$$

Por otro lado, con los rendimientos obtenidos se calculan, tanto para los índices como para las empresas que las conforman, las rentabilidades y el riesgo total (medido por la desviación estándar) tanto mensual como anual.

Aplicando la teoría del modelo de Sharpe a la serie de datos, nos permite separar el riesgo en sistemático como no sistemático. A continuación, con los resultados se realizan los cálculos para hallar los ratios de performance de Sharpe y Treynor, que nos ayudan a seleccionar las carteras que mejor se ha comportado en relación a su rentabilidad y riesgo.

En vista de la importancia de la diversificación en la reducción del riesgo de cartera, se decidió seleccionar 20 títulos (del DAX30 y del IBEX35) para crear las carteras eficientes.

El modelo de Markowitz nos brinda la fórmula para minimizar el riesgo de una cartera a una rentabilidad esperada, por lo que por medio del programa Mathematica hallamos la función objetivo para una cartera con 20 títulos. Previamente se calcula la tabla de covarianzas de los títulos⁸.

Empleamos el programa Lingo para hallar los porcentajes ponderados de los títulos de las carteras que conforman la frontera eficiente, asimismo podemos calcular el riesgo mínimo que conlleva cada cartera a una cierta rentabilidad esperada.

Por último, se construyen las fronteras eficientes tanto del IBEX 35 así como del DAX 30.

⁶ Sistema de Interconexión Bursátil Español

⁷ Este término se utiliza para referirse a las empresas que tienen una valoración alta, con gran liquidez y una volatilidad muy baja.

⁸ Ver anexo 1

3. ESTUDIO DESCRIPTIVO

3.1. ANÁLISIS TÉCNICO DEL IBEX 35

En este apartado analizamos los resultados obtenidos de calcular las rentabilidades y los ratios de performance, así como la correlación, la varianza del mercado y las betas correspondientes a los títulos que componen el índice IBEX 35.

En lo referente a las rentabilidades medias por títulos, sobresalen 12 empresas con rentabilidades medias anuales superiores al 10% (tabla N°1). El activo Colonial brinda el mayor rendimiento anual, un 28,04% si bien el riesgo que acarrea también es alto un 33,26%. La segunda empresa con un rendimiento superior es Cie Automotive (26,57%), el riesgo que asume un inversor de elegir este título es de 25,17% no obstante este título cuenta con el índice de Sharpe más alto del conjunto de activos, un 1,06, esto significa que su desempeño es el mejor de entre los demás títulos.

Por otro lado, sobresalen también aquellos títulos que cuentan con rentabilidades medias anuales negativas y que su riesgo está por encima del 20% en todos los casos.

De los resultados obtenidos al calcular la beta se puede observar que entre las empresas que conforman el IBEX 35, existen 5 empresas (Amadeus, Enagás, Grifols, Red Eléctrica y Viscofan) que cuentan con una beta menor a 0,6 lo cual indica que son títulos con menos sensibilidad ante los cambios del mercado, Viscofan es el que posee la beta más pequeña con 0,19. Estos títulos además tienen una menor correlación con el mercado, con excepción de Grifols, que tiene una correlación de 0,40 y se encuentra más en la media con el resto de activos de la cartera.

Por el contrario, dentro del conjunto de títulos del IBEX 35 son 12 las empresas que cuenta con betas superiores a 1, considerados como títulos agresivos según Sharpe⁹ puesto que son muy sensibles a las oscilaciones del mercado. Los activos con mayor valor de beta son el BBVA (1,55) y el Santander (1,44). En términos de correlación, los títulos agresivos tienen correlaciones altas todos por encima del 0,70, es importante este análisis debido a que, acorde con la teoría sobre diversificación es mejor seleccionar aquellos títulos que tengan una correlación pequeña o incluso negativa.

El cálculo de la β , que oscila entre 0,19 y 1,51, revela que los títulos que forman parte del IBEX 35 son dispares en relación al riesgo de mercado y su dependencia con él diverge significativamente dependiendo del activo.

Por último, en la tabla 2, se halla la rentabilidad media del IBEX 35 y su desviación típica tanto mensual como anual. Sobresale la rentabilidad del índice que es negativa, esto es posible que se deba a que existen títulos dentro de la cartera con rendimientos negativos y un riesgo alto a comparación de los que tienen un desempeño positivo. En cambio, el riesgo del índice del mercado (15,10%) es menor que el riesgo que asume cada título independientemente.

⁹ Véase punto 4 del marco teórico.

1. Tabla: Análisis Técnico de las empresas del IBEX 35

Activo Libre de Riesgo	
Letras del tesoro Español a 1 año	-0,345%

	EMPRESAS IBEX 35									
	R _i mensual	σ _i mensual	R _i anual	σ _i anual	Ratio Sharpe	Ratio de Treynor	Correlación	Varianza IBEX35	Beta (β)	Alfa (α)
Acciona	1,14%	7,38%	13,63%	25,56%	0,5469	0,0352	0,68325445	0,001900291	1,14670812	0,01417991
Acerinox	0,55%	8,96%	6,65%	31,03%	0,2253	0,0235	0,4214106	0,001900291	0,85877299	0,00765209
ACS	0,94%	7,04%	11,27%	24,39%	0,4761	0,0279	0,74940207	0,001900291	1,20016352	0,01234068
Amadeus	1,45%	5,60%	17,39%	19,42%	0,9134	0,1140	0,35228788	0,001900291	0,4491556	0,01559599
ArcelorMittal	0,17%	12,73%	2,02%	44,10%	0,0536	0,0052	0,45550806	0,001900291	1,31921407	0,00492546
Banco Sabadell	-0,78%	7,64%	-9,32%	26,46%	-0,3393	-0,0202	0,7388072	0,001900291	1,28382049	-0,0046125
Bankia	-0,88%	7,60%	-10,61%	26,31%	-0,3900	-0,0258	0,66538557	0,001900291	1,14974831	-0,0060125
Bankinter	0,51%	5,91%	6,11%	20,49%	0,3152	0,0220	0,62932312	0,001900291	0,84662036	0,00717516
BBVA	-0,42%	7,80%	-5,10%	27,02%	-0,1759	-0,0091	0,85180116	0,001900291	1,5111245	-0,0005305
CaixaBank	-0,09%	7,86%	-1,12%	27,24%	-0,0284	-0,0017	0,73987341	0,001900291	1,3234355	0,00232231
Cie Automotive	2,21%	7,27%	26,57%	25,17%	1,0695	0,0749	0,62786736	0,001900291	1,03778684	0,02469738
Colonial	2,34%	9,60%	28,04%	33,26%	0,8536	0,1072	0,35013527	0,001900291	0,76474788	0,02525139
Enagás	0,49%	4,80%	5,88%	16,64%	0,3738	0,0473	0,34759476	0,001900291	0,37979144	0,00582995
ENCE	2,20%	10,75%	26,40%	37,22%	0,7186	0,0878	0,35977338	0,001900291	0,87942745	0,02416502
Endesa	1,19%	4,92%	14,32%	17,05%	0,8604	0,0672	0,56291151	0,001900291	0,63018476	0,01348596
Ferrovial	0,83%	4,89%	10,01%	16,94%	0,6115	0,0472	0,56975262	0,001900291	0,63381247	0,00990403
Grifols	0,48%	6,42%	5,81%	22,25%	0,2767	0,0301	0,40418355	0,001900291	0,59043943	0,00629417
IAG	0,98%	8,02%	11,76%	27,77%	0,4361	0,0486	0,3948159	0,001900291	0,71990604	0,0115741
Iberdrola	1,08%	4,76%	12,95%	16,50%	0,8059	0,0583	0,60771765	0,001900291	0,65848822	0,01241294
Inditex	0,33%	5,87%	3,97%	20,35%	0,2120	0,0162	0,57490821	0,001900291	0,76810392	0,00519544
Indra	-0,30%	8,19%	-3,60%	28,37%	-0,1148	-0,0100	0,5029767	0,001900291	0,93701316	-0,0006975
Mapfre	-0,16%	6,85%	-1,88%	23,71%	-0,0649	-0,0037	0,76519393	0,001900291	1,19158624	0,00136098
Mediaset	-0,42%	6,82%	-5,05%	23,63%	-0,1989	-0,0162	0,54059757	0,001900291	0,83881995	-0,0021419
Meliá Hotels	0,02%	5,99%	0,25%	20,75%	0,0286	0,0024	0,53397125	0,001900291	0,7275103	0,00199528
Naturgy Energy	0,63%	5,70%	7,57%	19,74%	0,4011	0,0284	0,62120186	0,001900291	0,8052256	0,00829141
Red Eléctrica	0,84%	4,71%	10,10%	16,30%	0,6406	0,0632	0,4453092	0,001900291	0,47665552	0,0095868
Repsol	0,31%	6,66%	3,66%	23,06%	0,1738	0,0106	0,71819501	0,001900291	1,08765907	0,00572783
Santander	-0,22%	7,53%	-2,67%	26,09%	-0,0891	-0,0046	0,84324849	0,001900291	1,44451444	0,00132818
Siemens Gamesa	1,35%	10,31%	16,21%	35,72%	0,4634	0,0498	0,40913886	0,001900291	0,95974882	0,015868
Técnicas Reunidas	-0,67%	7,17%	-8,09%	24,84%	-0,3117	-0,0246	0,55593889	0,001900291	0,90692339	-0,0045095
Telefónica	-0,43%	6,33%	-5,21%	21,92%	-0,2221	-0,0131	0,7460923	0,001900291	1,07401278	-0,0017035
Viscofan	0,50%	5,44%	6,02%	18,84%	0,3377	0,0927	0,16011867	0,001900291	0,19805384	0,00550016

Fuente: Elaboración propia

2. Tabla de Rentabilidad, riesgo y ratios de performance IBEX 35

Rentabilidad media (mensual) IBEX 35	-0,25%
Desviación típica (mensual) IBEX 35	4,36%
Rentabilidad anual IBEX 35	-2,95%
Desviación típica anual IBEX 35	15,10%
Ratio Sharpe IBEX 35	-0,1726
Ratio de Treynor IBEX 35	-0,0261

Fuente: Elaboración propia

3.2. ANÁLISIS TÉCNICO DEL DAX 30

A continuación en la tabla 3 se detallan las rentabilidades medias de los activos que conforman el DAX 30, dentro de los cuales se distinguen 9 empresas con rentabilidades superiores a 10%, Wirecard AG mantiene el mayor rendimiento (35,09%) y su riesgo asociado es también uno de los más altos (31,37%), aunque solo un 0,65 pertenece al riesgo sistemático (de acuerdo a su β), debido a esto, es posible considerarlo para formar una cartera eficiente, eliminando parte del riesgo a través de una correcta diversificación. El resultado del ratio Sharpe parece apoyar esta conjetura, en vista a que posee un valor de 1,13.

La empresa Vonovia también se encuentra entre las mejores valoradas ($RS = 1,063$) además su rentabilidad y riesgo son de 19,48% y 18,81% respectivamente.

Las betas obtenidas del grupo de empresas que componen el DAX 30 son más altas comparadas con las del IBEX 35, esto nos revela que, a diferencia de estos activos, los que forman parte del DAX 30 acarrean un riesgo sistemático mayor y su desempeño depende más del comportamiento del mercado.

Existen 11 activos con betas mayores que 1, siendo la de Deutsche Bank relevante con una β de 1,969. En contraste, existen 4 títulos con betas menores a 0,60, Beiersdorf AG, Deutsche Boerse, Munich Re y Vonovia, este último con la menor beta del conjunto 0,46. Dichos resultados se pueden visualizar en la tabla N.º 3.

Es necesario comentar que los activos considerados libre de riesgo tanto para los cálculos del IBEX 35 como del DAX 30 (letras del tesoro a 1 año) poseen rendimientos negativos. Sin embargo, al ser considerados los activos más seguros, es de creer que el inversor averso al riesgo los adquiera con las expectativas de que en un futuro su precio suba.

Los datos que se visualizan en la tabla 4, corresponden a la rentabilidad anual media y el riesgo del índice DAX 30, que a diferencia del IBEX 35 cuenta con un rendimiento positivo de 4,85% pero con una desviación típica de 15,44% que es mayor en 0,3 puntos porcentuales. Los ratios de performance para el índice son positivos, no obstante, muy bajos, esto indica que su desempeño en general no es favorable.

En las tablas 5 y 6 se realizan los rankings con las 20 empresas mejor valoradas, de acuerdo a los ratios de performance de Sharpe y Treynor. Se puede observar que en ambos ratios coinciden las empresas seleccionadas, por tanto, al utilizarlas como base para el problema de minimización, reducimos el riesgo no sistemático y nos aseguramos de hallar la cartera óptima.

3. Tabla: Análisis Técnico de las empresas del DAX 30

Activo Libre de Riesgo	
Letras del tesoro Alemán a 1 año	-0,524%

	EMPRESAS DAX 30									
	R _i mensual	σ _i mensual	R _i anual	σ _i anual	Ratio Sharpe	Ratio de Treydor	Correlación	Varianza DAX 30	Beta (β)	Alfa (α)
Adidas	1,82%	7,60%	21,90%	26,33%	0,8516	0,0808	0,4735676	0,0019866	0,80077536	0,01501398
Allianz	0,81%	5,27%	9,70%	18,25%	0,5600	0,0334	0,7539498	0,0019866	0,8838093	0,00451113
BASF	-0,19%	5,93%	-2,32%	20,54%	-0,0873	-0,0047	0,8322120	0,0019866	1,09794904	-0,0063659
Bayer	-0,41%	6,54%	-4,91%	22,67%	-0,1936	-0,0114	0,7605870	0,0019866	1,10734697	-0,0085664
Beiersdorf AG	0,39%	4,59%	4,68%	15,91%	0,3273	0,0275	0,5355091	0,0019866	0,54712634	0,00169281
BMW ST	0,09%	7,16%	1,12%	24,81%	0,0664	0,0038	0,7903595	0,0019866	1,25947669	-0,0041503
Continental AG	0,00%	7,03%	-0,04%	24,36%	0,0200	0,0012	0,7651822	0,0019866	1,19739757	-0,0048668
Daimler	-0,04%	7,48%	-0,43%	25,91%	0,0036	0,0002	0,8678846	0,0019866	1,4441897	-0,0061922
Deutsche Bank AG	-0,25%	17,05%	-2,96%	59,08%	-0,0412	-0,0036	0,5190668	0,0019866	1,96946738	-0,0104204
Deutsche Boerse	1,31%	5,05%	15,78%	17,51%	0,9310	0,0798	0,5245928	0,0019866	0,58988083	0,01076454
Deutsche Post	0,19%	5,96%	2,23%	20,64%	0,1333	0,0084	0,7164231	0,0019866	0,94973143	-0,0019796
Deutsche Telekom AG	0,42%	5,40%	5,04%	18,72%	0,2974	0,0226	0,5922138	0,0019866	0,7118828	0,0013267
E.ON SE	-0,25%	7,74%	-2,99%	26,80%	-0,0920	-0,0087	0,4741983	0,0019866	0,8163582	-0,0057893
Fresenius SE	0,46%	6,28%	5,58%	21,76%	0,2803	0,0217	0,5807484	0,0019866	0,81167785	0,00136861
Fresenius ST	0,56%	6,38%	6,70%	22,09%	0,3272	0,0278	0,5293218	0,0019866	0,75082941	0,00255324
Heidelbergcement	0,35%	6,43%	4,19%	22,28%	0,2117	0,0123	0,7737291	0,0019866	1,10734265	-0,000978
Henkel VZO	0,23%	5,32%	2,76%	18,41%	0,1783	0,0133	0,6011937	0,0019866	0,71100511	-0,0005726
Infineon	1,84%	7,61%	22,05%	26,36%	0,8565	0,0596	0,6458393	0,0019866	1,0932897	0,01396074
Lufthansa	0,85%	9,93%	10,21%	34,42%	0,3118	0,0332	0,4224463	0,0019866	0,93376008	0,00473598
Merck	0,96%	6,21%	11,56%	21,50%	0,5622	0,0390	0,6485660	0,0019866	0,89536673	0,00601837
Munich Re	0,51%	4,64%	6,08%	16,08%	0,4107	0,0324	0,5698686	0,0019866	0,58854879	0,00268956
RWE AG ST	0,26%	11,45%	3,16%	39,68%	0,0929	0,0132	0,3156640	0,0019866	0,80438367	-0,0006142
SAP	0,93%	5,61%	11,12%	19,45%	0,5986	0,0381	0,7056904	0,0019866	0,88155956	0,00570558
Siemens AG	0,19%	5,62%	2,23%	19,45%	0,1417	0,0080	0,8009141	0,0019866	1,00066064	-0,002181
Thyssenkrupp AG	0,0021%	8,34%	0,03%	28,87%	0,0190	0,0012	0,7322602	0,0019866	1,35790856	-0,0054629
Volkswagen VZO	0,17%	10,05%	2,00%	34,82%	0,0724	0,0050	0,6492392	0,0019866	1,45199151	-0,0041993
Vonovia	1,62%	5,43%	19,48%	18,81%	1,0639	0,1254	0,3814074	0,0019866	0,4606694	0,01437547
Wirecard AG	2,92%	9,06%	35,09%	31,37%	1,1353	0,1569	0,3251329	0,0019866	0,6550346	0,02659409

Fuente: Elaboración propia

4. Tabla de Rentabilidad, riesgo y ratios de performance DAX 30

Rentabilidad media (mensual) DAX	0,40%
Desviación típica (mensual) DAX	4,46%
Rentabilidad anual DAX	4,85%
Desviación típica anual DAX	15,44%
Ratio Sharpe DAX	0,3478
Ratio de Treynor DAX	0,0537

Fuente: Elaboración propia

5. Tabla: Ranking de empresas del IBEX 35

EMPRESAS IBEX 35				
	Ratio Sharpe		Ratio de Treynor	
1	Cie Automotive	1,0695	Amadeus	0,1140
2	Amadeus	0,9134	Colonial	0,1072
3	Endesa	0,8604	Viscofan	0,0927
4	Colonial	0,8536	ENCE	0,0878
5	Iberdrola	0,8059	Cie Automotive	0,0749
6	ENCE	0,7186	Endesa	0,0672
7	Red Eléctrica	0,6406	Red Eléctrica	0,0632
8	Ferrovial	0,6115	Iberdrola	0,0583
9	Acciona	0,5469	Siemens Gamesa	0,0498
10	ACS	0,4761	IAG	0,0486
11	Siemens Gamesa	0,4634	Enagás	0,0473
12	IAG	0,4361	Ferrovial	0,0472
13	Naturgy Energy	0,4011	Acciona	0,0352
14	Enagás	0,3738	Grifols	0,0301
15	Viscofan	0,3377	Naturgy Energy	0,0284
16	Bankinter	0,3152	ACS	0,0279
17	Grifols	0,2767	Acerinox	0,0235
18	Acerinox	0,2253	Bankinter	0,0220
19	Inditex	0,2120	Inditex	0,0162
20	Repsol	0,1738	Repsol	0,0106

Fuente: Elaboración propia

6. Tabla: Ranking de empresas del DAX 30

EMPRESAS DAX 30				
	Ratio Sharpe		Ratio de Treynor	
1	Wirecard AG	1,1353	Wirecard AG	0,1569
2	Vonovia	1,0639	Vonovia	0,1254
3	Deutsche Boerse	0,9310	Adidas	0,0808
4	Infineon	0,8565	Deutsche Boerse	0,0798
5	Adidas	0,8516	Infineon	0,0596
6	SAP	0,5986	Merck	0,0390
7	Merck	0,5622	SAP	0,0381
8	Allianz	0,5600	Allianz	0,0334
9	Munich Re	0,4107	Lufthansa	0,0332
10	Beiersdorf AG	0,3273	Munich Re	0,0324
11	Fresenius ST	0,3272	Fresenius ST	0,0278
12	Lufthansa	0,3118	Beiersdorf AG	0,0275
13	Deutsche Telekom AG	0,2974	Deutsche Telekom AG	0,0226
14	Fresenius SE	0,2803	Fresenius SE	0,0217
15	Heidelbergcement	0,2117	Henkel VZO	0,0133
16	Henkel VZO	0,1783	RWE AG ST	0,0132
17	Siemens AG	0,1417	Heidelbergcement	0,0123
18	Deutsche Post	0,1333	Deutsche Post	0,0084
19	RWE AG ST	0,0929	Siemens AG	0,0080
20	Volkswagen VZO	0,0724	Volkswagen VZO	0,0050

Fuente: Elaboración propia

4. FRONTERA EFICIENTE

De acuerdo a lo explicado en la metodología, empleamos el programa Lingo para resolver el problema de optimización¹⁰, los resultados obtenidos se pueden observar en las tablas 7 y 8 para las empresas del IBEX 35 y para las del DAX 30 en las tablas 9 y 10.

La tabla 7, muestra las ponderaciones que debe tener cada título para poder formar una cartera eficiente a una cierta rentabilidad mensual esperada.

7. Tabla: Carteras eficientes por rentabilidad esperada IBEX 35

TÍTULOS	RENTABILIDAD / CARTERA ÓPTIMA IBEX 35				
	0,50%	1,00%	1,50%	2,00%	2,30%
Acciona	-	-	-	-	-
Acerinox	3,49%	-	-	-	-
ACS	-	-	-	-	-
Amadeus	9,50%	16,11%	20,26%	14,97%	-
Bankinter	20,36%	12,75%	0,00002%	-	-
Cie Automotive	-	4,89%	14,12%	33,25%	16,62%
Colonial	0,97%	6,30%	12,81%	25,14%	71,17%
Enagás	25,12%	14,32%	0,08%	-	-
ENCE	-	0,00001%	5,17%	13,61%	12,20%
Endesa	9,03%	14,30%	18,95%	10,42%	-
Ferrovial	0,00001%	-	-	-	-
Grifols	2,11%	-	-	-	-
IAG	0,000001%	-	-	-	-
Iberdrola	0,000003%	3,65%	15,37%	-	-
Inditex	-	-	-	-	-
Naturgy Energy	-	-	-	-	-
Red Eléctrica	7,42%	7,99%	2,16%	-	-
Repsol	-	-	-	-	-
Siemens Gamesa	-	0,000002%	1,68%	2,61%	-
Viscofan	22,00%	19,69%	9,40%	-	-

Fuente: Elaboración propia

Para alcanzar una cartera óptima de 0,50% de rentabilidad, se debe de diversificar invirtiendo en 12 carteras, de las cuales Enagás (25,12%), Bankinter (20,36%) y Viscofan (22 %) obtienen el mayor peso dentro de la cartera. Estas empresas no predominan especialmente por tener una alta rentabilidad, pero si son las que cuentan con el menor riesgo sistemático de entre todas¹¹. Por otro lado, recomienda invertir en Amadeus, Endesa y Red eléctrica alrededor de un 10%, dado que son títulos con rendimientos medios, pero bajo riesgo.

¹⁰ Ver anexo 2

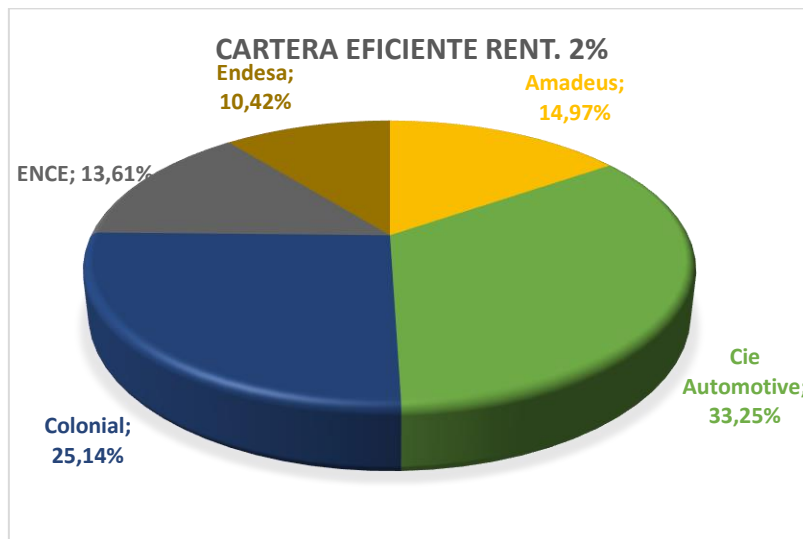
¹¹ Véase tabla 1

En el caso de querer obtener una cartera con una rentabilidad de 1%, las empresas con pesos más altos son Amadeus (16,11%), Bankinter (12,75%), Enagás (14,32%), Endesa (14,30%) y Viscofan (19,69%). Como en el caso anterior los títulos seleccionados no cuentan con una rentabilidad superior, pero en contraste comienza a aumentar el peso de los títulos como Cie Automotive y Colonial, ambos poseen la mayor rentabilidad del mercado. Se observa una tendencia de invertir más en las empresas que menor β tienen.

Para obtener una rentabilidad de 1,50%, es necesario invertir en 11 empresas, acaparando Amadeus un 20,26% de la cartera. Amadeus cuenta con una β de 0,44 y brinda una rentabilidad media a comparación de los demás títulos de la cartera. Endesa acumula un 18,95% del portafolio, Cie Automotive y Colonial aumentan su porcentaje a 14,12% y 12,81% respectivamente.

Conforme aumenta el nivel de rentabilidad esperada, se aprecia que disminuye el número de empresas que conforman la cartera eficiente, como en el caso de querer obtener un 2% de rentabilidad (ver gráfico 6). Se escogen sólo 6 empresas, de las cuales 5 cuentan con pesos altos en la cartera. Cie Automotive y Colonia aumentan de manera considerable su porcentaje a 33,25% y 25,14%. Para compensar el riesgo alto que ambas empresas tienen asociado, el resto del portafolio está compuesto por activos con rentabilidades medias y betas con valores bajos.

6. Gráfico: Cartera eficiente del IBEX 35



Fuente: Elaboración propia

Por último, debido a que para los cálculos del presente trabajo se utilizaron series históricas, es imposible obtener rentabilidades superiores a la media de estas, por lo que el programa Lingo estima como máximo una rentabilidad de 2,3%. Para alcanzar este rendimiento, es necesario concentrar los pesos de la cartera en solo 3 empresas, brindando un 71,17% al activo Colonial, seguida de Cie Automotive con un 16,62% y Ence con un 12,20%. Como es un caso extremo se

seleccionan aquellos títulos que brindan el mayor rendimiento pese a que los riesgos sean mucho mayores.

8. Tabla: Carteras eficientes por rentabilidad esperada DAX 30

TÍTULOS	RENTABILIDAD/CARTERA ÓPTIMA DAX 30					
	0,50%	1,00%	1,50%	2,00%	2,50%	2,90%
Adidas	0,000002%	1,15%	6,57%	11,17%	0,410956%	0,000087%
Allianz	0,000302%	2,86%	0,000142%	0,000001%	-	-
Beiersdorf AG	22,80%	16,48%	-	-	-	-
Deutsche Boerse	20,57%	20,91%	20,39%	14,42%	0,000002%	0,000015%
Deutsche Post	3,53%	0,00001%	-	-	-	-
Deutsche Telekom AG	-	-	-	-	-	-
Fresenius SE	1,46%	0,00012%	-	-	-	-
Fresenius ST	0,000006%	0,00002%	-	-	-	-
Heidelbergcement	0,000001%	-	-	-	-	-
Henkel VZO	0,000002%	0,00001%	-	-	-	-
Infineon	0,000001%	-	-	-	-	-
Lufthansa	0,000000%	-	-	-	-	-
Merck	0,419128%	2,89%	4,47%	0,000002%	-	-
Munich Re	32,04%	30,30%	21,67%	-	-	-
RWE AG ST	2,78%	1,59%	-	-	-	-
SAP	0,000018%	0,00215%	0,000003%	-	-	-
Siemens AG	2,51%	0,37410%	-	-	-	-
Volkswagen VZO	-	-	-	-	-	-
Vonovia	13,55%	19,55%	31,51%	43,46%	31,96%	1,54%
Wirecard AG	0,343458%	3,90%	15,39%	30,95%	67,63%	98,46%

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 8, se observan las carteras eficientes que conforman los títulos pertenecientes al DAX 30. A diferencia de las rentabilidades esperadas del índice del IBEX 35, con el DAX 30 se pueden obtener rendimientos superiores.

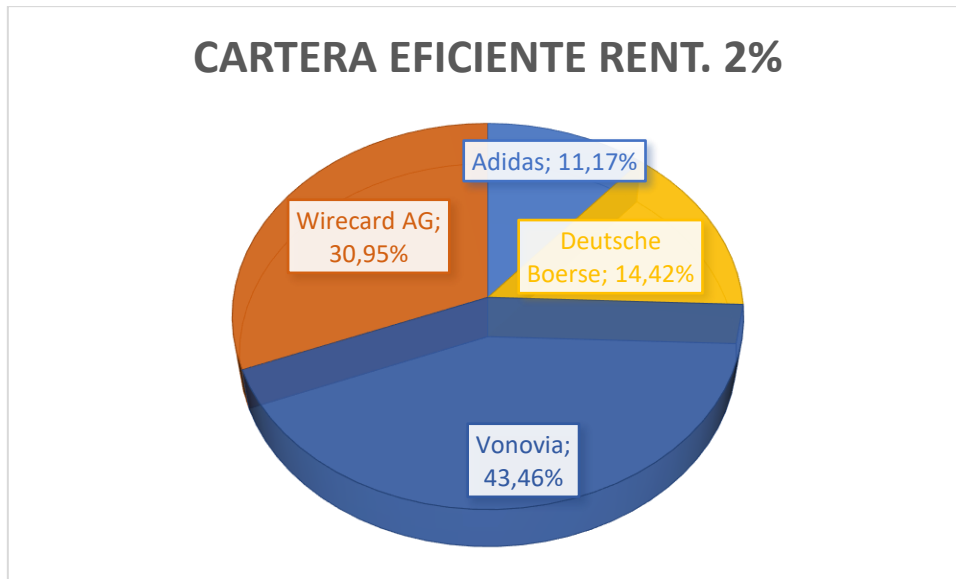
La cartera eficiente para una rentabilidad de 0,50% está compuesta por 18 activos, de entre ellos sobresalen Munich Re con un 32,04% de peso seguido de Beiersdorf AG y Deutsche Boerse con 22,80% y 20,57% respectivamente. Por otro lado, Vonovia, el título con mayor ratio Sharpe de entre todos, cuenta con un peso del 13,55%. Un portafolio con una rentabilidad de 1% se forma con 15 empresas, nuevamente Munich Re repite como el activo con mayor ponderación (30,30%), se considera que es debido a su beta (0,58) y al mismo tiempo porque su correlación con el mercado es 0,56 que en comparación con resto de títulos es menor.

Vonovia sigue aumentando su participación en este caso a un 19,55%.

En el gráfico 7¹², se observa la composición de una cartera con una rentabilidad de 2% mensual. Entre Vonovia y Wirecard AG abarcan el 74% del peso de la cartera aproximadamente. Se puede apreciar la misma tendencia a concentrar a los títulos que más rentabilidad media brindan en el mercado.

¹² Se obvió en el gráfico los porcentajes de las empresas de Allianz y Merck debido a que son mínimos.

7. Gráfico: Cartera eficiente del DAX 30



Fuente: Elaboración propia

En el caso de que el inversor esté interesado en alcanzar una rentabilidad de 2,50%, será necesario que invierta un 31,96% en Vonovia y en Wirecard un 67,63. Pese a que Vonovia no cuenta con una de las rentabilidades más altas como es el caso de títulos como Adidas o Infineon (21,90% y 22,05%) cuenta con un riesgo asociado menor. Se distingue adicionalmente el tipo de riesgo al cual se enfrentan, por medio de la beta es posible identificar que Vonovia tiene un riesgo mucho menor que Adidas o Infineon.

La máxima rentabilidad que se obtiene es un 2,90%, cartera en la que Wirecard AG obtiene un 98,46% de peso, Vonovia un 1,54% y el resto se divide entre Adidas y Deutsche Boerse. Es importante resaltar que, aunque el mayor porcentaje recae en Wirecard AG, es necesario el resto de los activos para disminuir el riesgo no sistemático, este es el no diversificable. Podemos verificar que se escogieron títulos que cuentan con covarianzas muy pequeñas, estos resultados sustentan la teoría de carteras.

9. Tabla: Rentabilidad-riesgo de los índices del IBEX 35 y el DAX 30

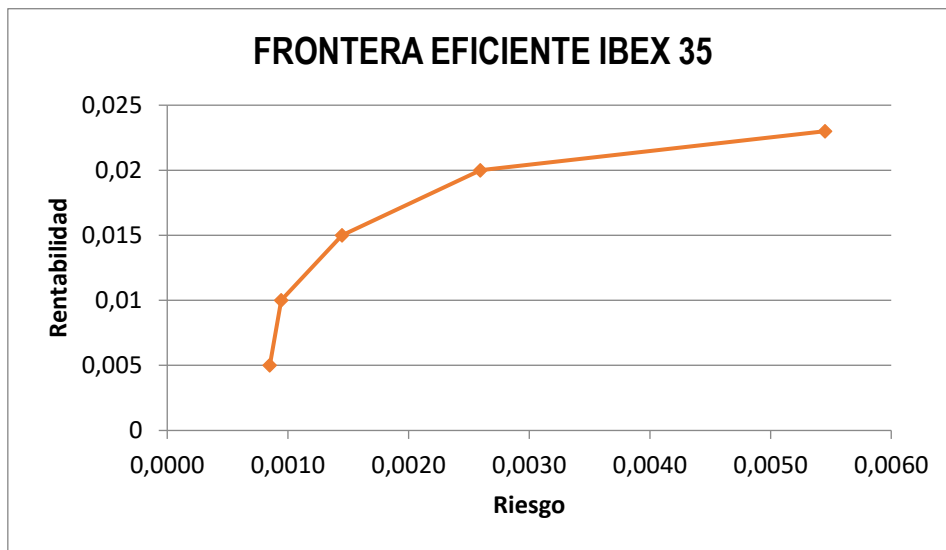
IBEX 35		DAX 30	
Rentabilidad	Riesgo	Rentabilidad	Riesgo
0,50%	0,0008504	0,50%	2,00110
1,00%	0,0009434	1,00%	2,00112
1,50%	0,0014493	1,50%	2,00137
2,00%	0,0025937	2,00%	2,00219
2,30%	0,0054517	2,50%	2,00431
-	-	2,90%	2,00784

Fuente: Elaboración propia

Las distintas combinaciones de rentabilidad-riesgo que forman las fronteras de carteras eficientes del IBEX 35 y el DAX 30 se detallan en la tabla 9, se observa que DAX 30 ofrece rendimientos superiores a 2,30% que es la máxima rentabilidad para las carteras del IBEX 35, no obstante, el riesgo asociado a dichas rentabilidades es mayor. Es importante destacar que los portafolios creados con títulos de IBEX 35 son más eficientes que los formados por el DAX 30, esto es debido a que el riesgo asociado a dichas carteras es casi un 2% más bajo. En consecuencia, un inversor estará más interesado en las carteras creadas con activos del IBEX 35.

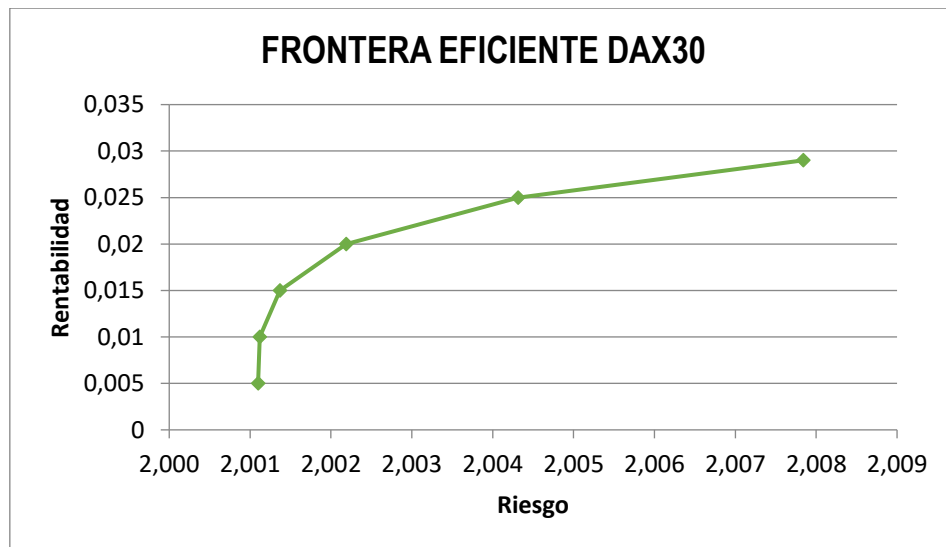
Finalmente se construyen gráficamente ambas fronteras eficientes:

8. Gráfico: Frontera Eficiente IBEX 35



Fuente: Elaboración propia

9. Gráfico: Frontera Eficiente DAX30



Fuente: Elaboración propia

IV. CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo era crear la frontera de carteras eficientes de Markowitz para los índices IBEX 35 y DAX 30 que venzan a sus respectivos mercados. Por otro lado, comparar la composición de las carteras resultantes nos brinda información sobre su desempeño y nivel de competitividad en el mercado. En base a los resultados obtenidos podemos extraer las siguientes conclusiones:

En primer lugar, las carteras eficientes creadas baten a sus respectivos mercados. En el caso del IBEX 35, es importante debido a que el índice ofrecía un rendimiento medio negativo¹³, en cambio todos los portafolios creados por medio de la Teoría de Markowitz ofrecen rentabilidades positivas y el riesgo que acarrearán también es mínimo comparado con el mercado. De la misma manera las carteras formadas con activos del DAX 30 generan un rendimiento superior a la media del mercado¹⁴ minimizando su exposición al riesgo.

Si un inversor desea obtener una rentabilidad superior al 2,30% es mejor utilizar activos compuestos por el DAX 30. En términos de eficiencia de cartera, las carteras del IBEX 35 que ofrecen rentabilidades entre 0,50% y 2% demuestran una mayor eficiencia en contraste con las del DAX 30, esto debido a que al mismo nivel de rendimiento el riesgo asociado es menor.

Respecto a las carteras eficientes del DAX 30, en todos los casos se debe de invertir en la empresa Wirecard AG, puesto que es el activo que más rendimientos genera y conforme va aumentando la rentabilidad esperada su porcentaje de participación en la cartera también aumenta. De la misma manera, es la empresa Colonial la que brinda mayor rendimiento entre los títulos de IBEX 35 por lo que también se observa el aumento de participación en la cartera.

En segundo lugar, se obtuvo el valor de beta que representa el riesgo de mercado, aplicando el modelo de mercado de Sharpe. Se observó que las carteras eficientes están compuestas por los títulos con el valor de beta más pequeño y que brindan una rentabilidad media. En el caso del IBEX 35, conforme aumenta la rentabilidad esperada, el inversor deberá invertir en títulos más riesgosos para lograr dicha rentabilidad. Al comparar una rentabilidad esperada del 2%, la cartera compuesta por activos del IBEX 35 son títulos con betas altas en cambio el portafolio del DAX 30 mantiene porcentajes en los títulos con menor beta.

Es importante enfatizar que en todas las combinaciones factibles siempre se intenta invertir en las empresas que menor beta posean.

Por último, los ratios de performance, no sólo nos ayudan a seleccionar los mejores activos para diversificar la cartera, sino que también nos indican aquellos títulos que tendrán un peso mayor dentro de la misma de acuerdo a su beta y rentabilidad.

¹³ Véase tabla 2

¹⁴ Véase tabla 4

V. BIBLIOGRAFÍA

- Brealey, R., Myers, S., & Allen, F. (2015). *Principios de Finanzas Corporativas*. Mexico D.F.: McGraw-Hill.
- Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. New York : Jhon Wiley & Sons Inc. .
- FIKAI. (2013). *Programa de asesor financiero Nivel II*. Bilbao: European Financial Planning Association .
- García, J. (13 de Marzo de 2013). *¿Qué es el ratio Treynor?* Obtenido de *Ámbito Financiero*: <https://ambito-financiero.com/que-es-ratio-treynor/>
- Kenton, W. (2 de Abril de 2019). *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*. Obtenido de Investopedia: <https://www.investopedia.com/terms/c/capm.asp>
- López, J. (2019). *Modelo de Markowitz* . Obtenido de Economipedia: <https://economipedia.com/definiciones/modelo-de-markowitz.html>
- Plan de Educación Financiera. (2010). *El mercado de renta variable*. Obtenido de Finanzas para todos : <http://www.finanzasparatodos.es/es/productosyservicios/productosinversionrentavariaable/introduccion.html>
- Ruiz Campo, S., & Mendoza Resco, C. (2011). *Los Fondos de Inversión en España: Análisis de la Tipología, Técnicas de Gestión y Métodos de Inversión*. Madrid : Universidad Autónoma de Madrid.
- Sánchez García, R. (2014). *Análisis descriptivo y aplicación de la Teoría de carteras a los valores de EUROSTOXX 50 en el período 2008-2013*. La Coruña: Universidad Da Coruña.

VI. ANEXOS

1. ANEXO: MATRIZ DE COVARIANZAS DE LAS CARTERAS EFICIENTES DEL IBEX 35 Y EL DAX 30

	Acciona	Acerinox	ACS	Amadeus	Bankinter	Cie Automotive	Colonial	Enagás	ENCE	Endesa	Ferrovial	Grifols	IAG	Iberdrola	Inditex	Naturgy Energy	Red Eléctrica	Repsol	Siemens Gamesa	Viscofan
Acciona	0,00535255	0,00259601	0,00258123	0,00116535	0,0014738	0,00266894	0,00227773	0,001681719	0,00151738	0,001847127	0,00202505	0,00225818	0,00176559	0,00238325	0,00218285	0,00226658	0,00179677	0,00226415	0,00381542	0,000432617
Acerinox	0,00259601	0,00789162	0,00296317	0,00131984	0,00070062	0,00367193	0,00245769	-0,000115684	0,00290727	0,000863282	0,00075924	0,00104915	0,00185852	0,00082657	0,00110363	0,00140796	0,00074821	0,00239345	0,00208535	0,000712441
ACS	0,00258123	0,00296317	0,00487384	0,00107148	0,00115629	0,00287779	0,00209728	0,001159871	0,00266026	0,002066326	0,0017022	0,00162789	0,00228395	0,00155455	0,00207472	0,0020903	0,00144087	0,00254264	0,00218094	0,000806849
Amadeus	0,00116535	0,00131984	0,00107148	0,003089	0,00077496	0,00158639	0,00082161	1,46497E-05	0,00266493	0,000650805	0,00108841	0,00141429	0,00215343	0,0005516	0,0007302	0,00037986	0,00053129	0,00092892	0,00053718	0,000969745
Bankinter	0,0014738	0,00070062	0,00115629	0,00077496	0,00343914	0,00141445	0,00077392	-0,00010012	0,00027812	0,000730986	0,0004442	0,0015847	0,00117255	0,00075144	0,00067058	0,00060415	7,2711E-05	0,00151208	0,00137231	-2,26273E-05
Cie Automotive	0,00266894	0,00367193	0,00287779	0,00158639	0,00141445	0,00519159	0,00175879	0,000499736	0,00276594	0,001101203	0,00132465	0,00149396	0,00222029	0,00128944	0,00168206	0,00161004	0,00100475	0,00214618	0,00262719	0,000716517
Colonial	0,00227773	0,00245769	0,00209728	0,00082161	0,00077392	0,00175879	0,000906536	0,000930989	0,00010755	0,001642196	0,00178024	0,00130458	0,00149249	0,00098314	0,00077559	0,00113454	0,00097722	0,00173085	0,0015221	-0,000186779
Enagás	0,00168172	-0,0001157	0,00115987	1,465E-05	-0,0001001	0,00049974	0,00093099	0,002268632	0,00034253	0,001147461	0,00123996	0,00060746	3,2542E-05	0,00141746	0,00118014	0,00171861	0,00162108	0,00078679	0,00094834	0,000262362
ENCE	0,00168172	0,00290727	0,00266026	0,00266493	0,00027812	0,00276594	0,00010755	0,000342533	0,01135435	0,000320321	0,00109534	0,00246007	0,00416248	0,00051553	0,00219252	0,00122625	0,00058094	0,00185731	0,00057928	0,002753401
Endesa	0,00184713	0,00086328	0,00206633	0,0006508	0,00073099	0,0011012	0,0016422	0,001147461	0,00032032	0,002381638	0,00134092	0,00061795	0,00090704	0,00134092	0,0011819	0,0011807	0,00131357	0,00098054	0,00122217	-9,13315E-05
Ferrovial	0,00202505	0,00075924	0,0017022	0,00108841	0,0004442	0,00132465	0,00178024	0,001239959	0,00109534	0,001340918	0,00235163	0,00121569	0,00184215	0,00118206	0,00142299	0,00137046	0,00110016	0,00082139	0,00182548	0,000572298
Grifols	0,00225818	0,00104915	0,00162789	0,00141429	0,00015847	0,00149396	0,00130458	0,00060746	0,00246007	0,000617954	0,00121569	0,00405521	0,00199415	0,0009973	0,00198152	0,00042548	0,00077939	0,00135562	0,00183611	0,001285174
IAG	0,00176559	0,00185852	0,00228395	0,00215343	0,00117255	0,00149249	3,2542E-05	0,00416248	0,00090704	0,00184215	0,0012569	0,00199415	0,000631804	0,00069714	0,0015423	0,00011206	0,0006223	0,00013868	0,00165516	0,001342249
Iberdrola	0,00238325	0,00082657	0,00155455	0,0005516	0,00075144	0,00128944	0,00098314	0,001417461	0,00051553	0,001447494	0,00118206	0,00093725	0,00069714	0,00223107	0,00105822	0,00166278	0,00155203	0,00116734	0,00170333	0,000210266
Inditex	0,00218285	0,00110363	0,00207472	0,0007302	0,00067058	0,00168206	0,00077559	0,00118014	0,00219252	0,00111817	0,00142299	0,00198152	0,0015423	0,00105822	0,00339206	0,00125407	0,00097791	0,00110567	0,0023633	0,001149809
Naturgy Energy	0,00226658	0,00140796	0,0020903	0,00037986	0,00060415	0,00161004	0,00113454	0,001718614	0,00122625	0,0011807	0,00137046	0,00042548	0,00011206	0,00166278	0,00125407	0,00319293	0,0016807	0,00199274	0,00167064	0,000495428
Red Eléctrica	0,00179677	0,00074821	0,00144087	0,00053129	7,2711E-05	0,00100475	0,00097722	0,001621084	0,00058094	0,001313572	0,00110016	0,00077939	0,0006223	0,00155203	0,00097791	0,0016807	0,0021724	0,0007487	0,00092654	0,000207489
Repsol	0,00226415	0,00239345	0,00254264	0,00092892	0,00151208	0,00214618	0,00173085	0,00078678	0,00185731	0,000980537	0,00082139	0,00135562	0,00013868	0,00116734	0,00110567	0,00199274	0,0007487	0,00435834	0,00172951	0,000562997
Siemens Gamesa	0,00381542	0,00208535	0,00218094	0,00053718	0,00137231	0,00262719	0,00115221	0,000948337	0,00057928	0,00122217	0,00182548	0,00183611	0,00165516	0,00170333	0,0023633	0,00167064	0,00092654	0,00172951	0,01045668	0,001308358
Viscofan	0,00043262	0,00071244	0,00080685	0,00096974	-2,263E-05	0,00071652	-0,0001868	0,000262362	0,0027534	-9,13315E-05	0,0005723	0,00128517	0,00134225	0,00021027	0,00114981	0,00049543	0,00020749	0,000563	0,00130836	0,002907387

	Adidas	Allianz	Beiersdorf AG	Deutsche Boerse	Deutsche Post	Deutsche Telekom AG	Fresenius SE	Fresenius ST	Heidelbergc ement	Henkel VZO	Infineon	Lufthansa	Merck	Munich Re	RWE AG ST	SAP	Siemens AG	Volkswagen VZO	Vonovia	Wirecard AG
Adidas	0,00568015	0,00123015	0,0013829	0,000953807	0,00183198	0,00126897	0,00135738	0,00135138	0,00166731	0,00171304	0,00163078	0,00078948	0,00131247	0,00100644	0,00276122	0,00144791	0,00144797	0,00141806	0,00088522	0,00261672
Allianz	0,00123015	0,00272983	0,0007497	0,000955613	0,00189875	0,00137948	0,00119249	0,00113564	0,00192315	0,00101577	0,00133328	0,0022403	0,00136071	0,0015947	0,0007295	0,00149628	0,00167254	0,00275452	0,00047518	0,00132778
Beiersdorf AG	0,0013829	0,0007497	0,00207369	0,00078187	0,00079925	0,00139773	0,00106523	0,00107841	0,00082808	0,00174523	0,00143455	0,00177431	0,00131503	0,00072354	0,00138425	0,00100355	0,00098545	0,00042165	0,00084693	0,00197816
Deutsche Boerse	0,00095381	0,00095561	0,00078187	0,002511809	0,00109867	0,0009834	0,0013362	0,00140056	0,00112635	0,00071734	0,00110443	0,00135655	0,00130896	0,00052509	0,00051802	0,00098939	0,00083464	0,00142091	0,00097116	0,00146037
Deutsche Post	0,00183198	0,00189875	0,00079925	0,001098673	0,00349112	0,00135879	0,00108117	0,00149864	0,00238886	0,00114029	0,00196699	0,00308826	0,00136424	0,00083475	0,00144428	0,00132535	0,00168833	0,00260781	0,00140806	0,00148329
Deutsche Telekom AG	0,00126897	0,00137948	0,00139773	0,000983403	0,00135879	0,00287053	0,00105039	0,00081193	0,00108219	0,00158832	0,00080565	0,00122295	0,00163596	0,00129464	0,00097446	0,00101377	0,0012198	0,00118991	0,00108434	0,00100558
Fresenius SE	0,00135738	0,00119249	0,00106523	0,001336201	0,00108117	0,00105039	0,00388056	0,00227376	0,00167315	0,00158319	0,00179324	0,00056739	0,00184789	0,00093144	0,00031124	0,0015468	0,00159591	0,00112883	0,00094532	0,00101848
Fresenius ST	0,00135138	0,00113564	0,00107841	0,001400558	0,00149864	0,00081193	0,00227376	0,00399711	0,00151148	0,00104443	0,0015543	0,0013469	0,00119442	0,00061933	0,00185257	0,00210299	0,00150543	0,00102759	0,00153029	0,00113366
Heidelbergc ement	0,00166731	0,00192315	0,00082808	0,001126351	0,00238886	0,00108219	0,00167315	0,00151148	0,00406901	0,00128082	0,00300297	0,00254634	0,00143745	0,00133648	0,00088348	0,00172801	0,00195958	0,00427859	0,00102861	0,00071261
Henkel VZO	0,00171304	0,00101577	0,00174523	0,000717335	0,00114029	0,00158832	0,00158319	0,00104443	0,00128082	0,00277856	0,00176842	0,00106695	0,00176941	0,00096994	0,00116054	0,00162504	0,00133519	0,00130776	0,0009716	0,00106046
Infineon	0,00163078	0,00133328	0,00143455	0,00110443	0,00196699	0,00080565	0,00179324	0,0015543	0,00300297	0,00176842	0,00569278	0,00290107	0,00185983	0,00095843	0,00160935	0,00202884	0,00213174	0,00315062	0,0008067	0,00197751
Lufthansa	0,00078948	0,0022403	0,00177431	0,001356548	0,00308826	0,00122295	0,00056739	0,0013469	0,00254634	0,00106695	0,00290107	0,00970578	0,00096362	0,00136321	0,00225062	0,00094371	0,001409	0,00164854	0,00129508	0,0014692
Merck	0,00131247	0,00136071	0,00131503	0,001308964	0,00136424	0,00163596	0,00184789	0,00119442	0,00143745	0,00176941	0,00185983	0,00096362	0,00378614	0,00082346	0,0012216	0,00157932	0,00158599	0,00281562	0,00071722	0,00117507
Munich Re	0,00100644	0,0015947	0,00072354	0,000525092	0,00083475	0,00129464	0,00093144	0,00061933	0,00133648	0,00096994	0,00095843	0,00136321	0,00082346	0,00211894	-0,0001888	0,00103899	0,00116997	0,00159704	0,00053655	0,00032669
RWE AG ST	0,00276122	0,0007295	0,00138425	0,000518015	0,00144428	0,00097446	0,00031124	0,00185257	0,00088348	0,00133519	0,00160935	0,00225062	0,0012216	-0,0001888	0,001289969	0,				

2. ANEXO: PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN EN EL PROGRAMA LINGO

Lingo 18.0 - Lingo Model - Minimizar Riesgo IBEX35

File Edit Solver Window Help

```

Lingo Model - Minimizar Riesgo IBEX35
[[RIESGO]Min= 0.00535255399951753*X1^2+2*0.00184712675598156*X1*X10+0.00238163801803255*X10^2+2*0.00202504789472034*X1*X11+2*0.001340918415·
2*0.00170219716787357*X11*X3+2*0.00162789426515648*X12*X3+2*0.00228395369447249*X13*X3+2*0.00155454514783665*X14*X3+2*0.00207471842821062*
0.000499735601195135*X6*X8+2*0.000930988570242324*X7*X8+0.00226863245063105*X8^2+0.00151738425051454*X1*X9+0.00168171883754581*X1*X9+2*0.00
[RENTABILIDAD]0.01136*X1+0.00554*X2+0.00939*X3+0.01449*X4+0.00509*X5+0.02215*X6+0.02337*X7+0.00490*X8+
0.02200*X9+0.01194*X10+0.00835*X11+0.00484*X12+0.00980*X13+0.01079*X14+0.00331*X15+0.00631*X16+
0.00841*X17+0.00305*X18+0.01351*X19+0.00501*X20>=0.02 ;
[TOTALINVERTIDO]X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19+X20=1;
  
```

Lingo 18.0 - Lingo Model - Minimizar Riesgo DAX

File Edit Solver Window Help

```

Lingo Model - Minimizar Riesgo DAX
[[RIESGO]Min= 0.00568015409478679*X1^2+2*0.00171303860587238*X1*X10+0.00277855697494926*X10^2+2*0.00163078189916585*X1*X11+2*0.00176842090
*X3+2*0.00143455284771213*X11*X3+2*0.00177431119456512*X12*X3+2*0.00131503184772201*X13*X3+2*0.000723543403796098*X14*X3+2*0.0013842549713·
2*0.00227375740107395*X7*X8+0.00399710663328016*X8^2+2*0.00166730676727606*X1*X9+2*0.00128081527273363*X10*X9+2*0.00300297321016037*X11*X9-
[RENTABILIDAD]0.0182*X1+0.0081*X2+0.0039*X3+0.0131*X4+0.0019*X5+0.0042*X6+0.0046*X7+0.0056*X8+0.0035*X9+0.0023*X10+0.000184*X11+0.0085*X12-
>=0.01 ;
[TOTALINVERTIDO]X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19+X20=1;
  
```