

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

LA CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y  
CÓMO TRABAJAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS  
MATEMÁTICOS EN UN AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA

AUTOR: RAICO ROBERTO BÁEZ PÉREZ

TUTOR: ISRAEL GARCÍA ALONSO

CURSO ACADÉMICO 2018/2019

CONVOCATORIA: JULIO

## **Resumen**

Este Trabajo de Fin de Grado está centrado en la resolución de problemas matemáticos en el aula de Educación Primaria. Se muestran las investigaciones de matemáticos en la resolución de problemas matemáticos, se analiza la grabación de una sesión puesta en práctica sobre la resolución de problemas matemáticos en un aula de Educación Primaria, donde resaltamos los puntos fuertes y los puntos a mejorar, y también, se presenta una propuesta de mejora contextualizada y ejemplificada para el mismo nivel, donde se trabaja la estrategia de resolución de problema denominada modelización. Por tanto, podemos clasificarlo como un trabajo de innovación

### **Palabras claves:**

Resolución de problemas, estrategias, propuesta, análisis, matemáticas, modelización.

### **Abstract:**

This end-of-degree project is focused on solving math problems in Primary Education classroom. Showing investigations of mathematicians about how to solve math problems, we analyze a recording of a session on solving math problems in a Primary Education classroom, where we stand out positives points and points to improve, and also, we present a contextualized and exemplified improvement proposal, where we work the modeling and a conclusion. This improvement proposal is designed for Primary Year 3, level at which a recording of a session was done, where we working modeling, a strategies to solve math problems. Therefore, we can classify it as an innovation project.

### **Keywords:**

Problem resolution, strategies, proposal, analysis, math, modeling.

## ÍNDICE

Portada.....	Pag 1
Resumen.....	Pag 2
Índice.....	Pag 3
1. Introducción.....	Pag 4
2. Justificación.....	Pag 4
2.1 Objetivos.....	Pag 7
3. Marco teórico.....	Pag 7
3.1 Problema matemático.....	Pag 7
3.2 Resolución de problemas matemáticos.....	Pag 9
3.3 Fases de resolución de problemas matemáticos.....	Pag 10
3.4 Análisis de vídeo de sesiones de clase.....	Pag 12
4. Metodología.....	Pag 12
5. Estudio y descripción general del vídeo.....	Pag 13
5.1 Episodio 1: comprender y pensar.....	Pag 14
5.1.1 Antecedentes al Episodio 1.....	Pag 14
5.1.2 Análisis Episodio 1: actuación de la profesora.....	Pag 15
5.1.2.1 Comprender.....	Pag 15
5.1.2.2 Pensar.....	Pag 16
5.2 Episodio 2: ejecutar.....	Pag 19
5.2.1 Análisis Episodio 2.....	Pag 20
5.3 Episodio 3: responder y comprobar.....	Pag 22
5.3.1 Análisis Episodio 3.....	Pag 22
6. Propuesta de mejora.....	Pag 24
7. Conclusiones.....	Pag 27
8. Bibliografía.....	Pag 29
9. Anexos.....	Pag 31

## **1. Introducción.**

Este Trabajo Fin de Grado se enmarca en la categoría de trabajos de innovación, pues después de localizar la necesidad de trabajar la resolución de problemas matemáticos, se ha analizado una posible línea de actuación y se ofrece una propuesta mejorada.

La resolución de problemas en la Educación Primaria está orientada a desarrollar destrezas en el alumnado que les ayude a familiarizarse con la resolución de problemas cotidianos. Los problemas que se propongan en el aula deben estar conectados con las experiencias y el contexto cercano al alumnado, permitiendo a este relacionar las matemáticas aprendidas en el aula con su entorno.

El Decreto de Ordenación y Currículo de la Educación Primaria (Decreto 89/2014), que regula la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria señala que es importante que el proceso de enseñanza-aprendizaje esté enfocado al análisis, a la reflexión, a la identificación de los distintos procesos en la resolución de un problema, etc. El alumnado debe ser consciente de los pasos que va realizando, por qué los hace, qué consigue, si ese paso le ayuda a lograr el objetivo, etc. En definitiva, toma mayor relevancia que el alumnado sea consciente del proceso que sigue para resolver el problema frente al resultado final.

Podemos afrontar la resolución de problemas con distintas estrategias. Partiendo de las aportaciones de distintos investigadores en resolución de problemas matemáticos, seleccionamos algunas estrategias de resolución de problemas matemáticos para observar cómo se desarrollan en el aula.

Como objetivo principal nos marcamos ofrecer una propuesta de mejora a una recomendación que planteó una profesora en un aula de 3º de Primaria en un centro de Educación Primaria. Dicha propuesta se realiza tras un estudio de la sesión puesta en práctica por la docente. Las conclusiones extraídas de esa sesión ayudarán a crear la citada propuesta de mejora.

## **2. Justificación.**

En el currículo de Educación Primaria (Decreto 89/2014), la resolución de problemas está presente en los criterios de cada nivel. Este decreto establece que en el

curso de 3º de Primaria, la resolución de problemas matemáticos se trabaja en el criterio de evaluación número 1.

Formular o resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando estrategias y procesos de razonamiento, realizando los cálculos necesarios y comprobando la validez de las soluciones obtenidas.  
Expresar verbalmente o por escrito el proceso seguido.

Los contenidos curriculares (Decreto 89/2014) que se trabajan dentro de la resolución de problemas matemáticos son:

1. Planificación del proceso de resolución.
2. Desarrollo de estrategias y procedimientos.
5. Resolución y expresión oral de situaciones problemáticas cercanas, empleando distintas estrategias y representaciones o lenguajes.

Dentro de los estándares de aprendizaje evaluables (Decreto 89/2014) podemos destacar, igual que en los contenidos, a algunos:

1. Comunica verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema de matemáticas o en contextos de la realidad.
2. Analiza y comprende el enunciado de los problemas.
3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas.
4. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas.
21. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

Por otro lado, la resolución de problemas es parte importante en las pruebas de diagnóstico, las cuales son creadas a partir de los estándares evaluables de aprendizaje. En el Marco General de Evaluación de 3º de Educación Primaria (MEC<sup>1</sup>, 2014) donde se describen dichas pruebas se define la competencia matemática como “la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos

---

<sup>1</sup> Ministerio de Educación y Cultura

problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña, en distintos grados, la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)", (p.35).

Para el desarrollo de este trabajo hemos asistido a la formación desarrollada en "ProyectaMates", proyecto colaborativo entre la Universidad de La Laguna, Fundación General de la Universidad de La Laguna y el servicio de educación del Cabildo Insular de Tenerife que ofrece una formación al profesorado de Primaria y Secundaria sobre la resolución de problemas matemáticos. En él estudian diferentes estrategias y fases para la resolución de problemas matemáticos.

La formación que ofrece el proyecto es base para la resolución de problemas matemáticos. El proyecto cuenta con formadores especializados en la resolución de problemas matemáticos que desarrollan sesiones de formación con profesorado de Primaria y Secundaria en diferentes zonas y centros educativos de la isla de Tenerife.

Las sesiones están divididas en tres partes, una de explicación teórica de las estrategias, una segunda parte donde se resuelven ejercicios con la estrategia explicada y una tercera parte en la que se elaboran propuestas de intervención para el aula, contextualizadas con el entorno del centro educativo y desarrollando lo trabajado en el proyecto.

Del mismo modo, una parte importante del proyecto es la grabación de la sesión en la que se pone en práctica lo aprendido en el proyecto. Revistas científicas como *Visual Sociology*, *Visual Anthropology* y *Visual Anthropology Review*, han destacado la importancia de este instrumento para extraer y analizar información. Aunque cuando se analiza e interpreta datos, pesa más la visión particular del investigador que el vídeo (Lerman, 2001).

Además, se ofrece a los centros educativos recursos materiales con los que poner en práctica lo aprendido en el proyecto. En la formación se facilita una gran cantidad de problemas para presentarlos a los alumnos y muchos se resuelven en las sesiones, que tienen un gran componente práctico para entender mejor las diferentes estrategias.

Existen estrategias básicas que podemos seguir para la resolución de problemas matemáticos: modelización, ensayo-error y organización de la información.

La estrategia de modelización consiste en transformar la información que da un problema en un modelo (utilizando materiales manipulativos que ayudan a seguir el proceso operacional). Es decir, representar la información que nos ofrece el problema con material manipulativo, como tapas, garbanzos, trabas, etc. Esta fue la estrategia que desarrolló la docente en la sesión grabada.

Ensayo-error se basa en crear hipótesis que deben ser comprobadas y que nos llevan a la resolución del problema. Los problemas más típicos para usar esta estrategia son aquellos en los que se conoce el final, pero no un elemento principal, al cual pueden llegar mediante las conexiones que ofrece el problema.

Organización de la información, se desarrolla mediante la clasificación de la información en tablas, con las que llegamos a la solución del problema.

El informe PISA (OCDE<sup>2</sup>, 2015) da mucha importancia a la resolución de problemas, y en él encontramos que España está por debajo de la media de los resultados obtenidos del resto de países de la OCDE.

## **2.1 Objetivos:**

En este trabajo nos planteamos los siguientes objetivos:

- Conocer las distintas clasificaciones de problemas matemáticos y su función en la Educación Primaria.
- Analizar la estrategia de modelización en la resolución de problemas matemáticos.
- Comprender cómo actúa el profesor ante el alumnado para enseñar un problema matemático.
- Extraer ideas para desarrollar y presentar una propuesta de trabajo en la resolución de problemas matemáticos mejorada.

## **3. Marco teórico.**

### **3.1 Problema matemático.**

Consideramos necesario comenzar definiendo problema matemático. Podríamos definirlo como una situación en la que se formula una tarea a ser desarrollada, en la cual en un ambiente de discusión, de incertidumbre y de comunicación se intenta alcanzar un

---

<sup>2</sup> Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

objetivo. Se requiere en todo caso una voluntad de atacar el problema planteado, por la necesidad de la solución o bien por algún tipo de motivación (Blanco, 1993, p.23).

Si esto último no se cumple, no podríamos calificar la situación como problema, por tanto, lo que para unos puede ser un problema, para otros no. Entre el problema y el sujeto hay una relación, empezando porque el resolutor quiere resolver dicho problema (Blanco y Pino, 2015).

En matemáticas no hay consenso sobre la definición de problema matemático (Pino, 2013), pero podemos enunciar que una de las definiciones que se ofrece de problema matemático hace referencia a una situación a la que hay que buscarle solución en un contexto bien diferenciado. Un ejercicio, por el contrario, es cuando se reconoce el resultado, a través, por ejemplo, de una fórmula a seguir (Blanco y Pino, 2015).

Ejercicio se relaciona con pensamiento reproductivo (poner en práctica lo ya conocido, fórmulas, etc.) mientras que el pensamiento productivo (reflexionar, conjeturar, modelizar, etc.) se relaciona con los problemas, lo que puede aclarar mejor el significado de cada concepto (Blanco y Pino, 2015).

En líneas generales se ha observado que los problemas que vienen dados por los libros de textos (Blanco y Pino, 2008), son de corte tradicional, es decir, implican un pensamiento reproductivo, aplicando una fórmula o estrategia a seguir, sin necesidad de que haya una reflexión.

Blanco (1997) muestra que los futuros maestros de Primaria tienen una mente muy tradicional con relación a la definición de problemas matemáticos, pues formulan problemas en los que tratan de esconder bajo el enunciado una operación que ya vienen practicando como ejercicio. Esto pone de manifiesto la visión tradicional de las matemáticas en la que el alumno no debe pensar, sino aplicar una fórmula, donde se le pide que resuelva ejercicios y no problemas, en contradicción con la necesidad de realizar este tipo de trabajos.

Muchos investigadores han hecho una clasificación de problema matemático, aunque hay que tener en cuenta que un problema puede pertenecer a varias clasificaciones al mismo tiempo, porque cada uno ofrece sus propias matizaciones.

En este trabajo, recogemos la clasificación de Fan y Zhu (2006), la que consideramos más clara y que recoge las clasificaciones de otros autores y autoras (anexo 1).

Acorde a esta clasificación destacamos que en las propuestas didácticas sería recomendable añadir problemas como los trabajados en la formación, es decir, problemas no rutinarios en los que el alumnado no tenga que aplicar únicamente una fórmula; no tradicionales, para que así reflexionen sobre el proceso a seguir; abiertos, con múltiples soluciones; aplicados, como establece el marco normativo (Decreto 89/2014), relacionados con el entorno más cercano a los alumnos y a las alumnas; de múltiples pasos; con datos extraños e insuficientes, para que el alumnado aprenda a comprender la información del problema, a descartar datos y a establecer relaciones entre ellos, etc.; y presentados de las distintas formas posibles, por escrito, de forma visual o con una combinación de formas.

En el Anexo 2 representamos una comparación de la clasificación de Fan y Zhu con las clasificaciones de otros autores.

En definitiva, encontramos que muchas clasificaciones son similares en cuanto a los criterios de clasificación, lo único que cambia es la denominación de las categorías en las que se clasifican los problemas o ejercicios matemáticos.

Destacar que Fan y Zhu (2006) utilizan el concepto “Problema No Rutinario” dándole un significado, similar, aunque con matices al que Díaz y Poblete (2001) le dieron años antes. Es un ejemplo de un problema con dos definiciones. Esto puede ser resultado de que Fan y Zhu hicieran una clasificación tan exhaustiva, donde diferenciaron “Problemas No Rutinarios” y “Problemas Tradicionales”.

### **3.2 Resolución de problemas matemáticos en el currículo.**

El decreto que regula el currículo del área de matemáticas en la Educación Primaria de la Comunidad Autónoma de Canarias (Decreto 89/2014) afirma que la enseñanza de esta área debe ir más allá de la enseñanza de los símbolos matemáticos, debe contribuir al desarrollo del razonamiento lógico-matemático, cumpliendo así sus aportaciones al desarrollo cognitivo, posibilitando la comprensión y la resolución de problemas matemáticos que guarden relación con las experiencias del alumno.

El razonamiento, la abstracción, el análisis, la capacidad de síntesis, deducción o inducción, etc., ayudan al alumnado a desarrollar el proceso de investigación,

imaginación y creatividad. Todo esto, además, fomentando el trabajo individual, el esfuerzo, el trabajo en equipo, la curiosidad, la iniciativa personal, el sentido crítico, el espíritu emprendedor, el uso de las nuevas tecnologías de la información, etc.

Dentro de los contenidos de cada nivel y bloque aparece un criterio dedicado a la resolución de problemas, lo que refleja la importancia de este contenido dentro de la Educación Primaria. El currículo (Decreto 89/2014) expresa la necesidad de que esos problemas estén contextualizados, relacionados con el entorno cercano a los discentes, sin olvidar que debe ser parte del proceso de aprendizaje el uso de materiales manipulativos, la estimación, la investigación, etc. Calcular también forma parte del proceso, pero no únicamente.

### **3.3 Fases de resolución de problemas matemáticos.**

Debemos, pues, realizar como objetivo principal que el alumnado sea consciente de su proceso en la resolución de problemas. Para ello, el profesor deberá orientar el proceso, haciendo que sea el alumno el que construya su propio conocimiento.

Partiendo de las ideas de Polya (Alfaro, 2006), las fases para la resolución de los problemas (se trabajaron el proyecto) son: comprender, pensar, ejecutar y responder.

1. Comprender: en esta fase es donde está implicada directamente la comprensión lectora, el alumnado ha de entender el problema globalmente, para posteriormente empezar a organizar la información en datos, objetivos y relaciones, y finalmente, realizar una representación gráfica.

El primer paso es importante, porque tiene que definirse bien el objetivo y los datos. Para poder comenzar a armar el resto de los procesos con seguridad. En esta parte, es fundamental realizar preguntas al alumnado: ¿qué información nos da el problema?, ¿qué datos tenemos?, ¿cuál es el objetivo?, ¿qué tenemos que averiguar?, ¿hay algo muy importante que debemos tener en cuenta?, ¿hay datos relacionados?, ¿hay relaciones?, etc.

En la representación gráfica que se realice de la situación o problema es importante que esté presente todo el proceso del problema (si lo hay) y los datos. Si no es posible una representación gráfica, podemos sustituirla por algún otro proceso que nos refleje que el alumno o la alumna ha comprendido el enunciado del problema. Por ejemplo, escribir con palabras lo que le suscita el problema, o manipular material para entender mejor los elementos de este y así poder plantear un plan a seguir.

2. Pensar: en esta fase es donde se elige la estrategia a seguir para resolver el problema.

Para ello, los discentes deben tener claro las diferentes estrategias que existen, en qué consisten, por qué la eligen, cómo funciona y qué diagrama es mejor para desarrollar esa estrategia.

Sería recomendable hacer preguntas también al alumnado como pueden ser: ¿por qué eliges esa estrategia?, ¿crees que te permitirá llegar al resultado?, ¿qué diagrama vas a usar?, ¿es ese el diagrama más adecuado para la estrategia que elegiste?

3. Ejecución: en esta fase se pone en práctica el plan pensado en el punto anterior. Aquí pueden surgir numerosas dificultades, el profesor debe recordar a los alumnos que deben ser flexibles, es decir, variar el plan si ven que no funciona, o cambiarlo al completo volviendo a los puntos anteriores si es necesario.

Lo más importante es que sean conscientes de que todo lo que realizan. Para ello, el profesor les puede ayudar con preguntas como: ¿por qué la estrategia no te permite llegar a la solución?, ¿hay algo nuevo que no hayas tenido en cuenta anteriormente?, ¿las operaciones que estás haciendo te van a llevar a una posible solución?, etc.

4. Responder: esta última fase la podemos dividir en tres pasos.

A) Comprobar. El o la estudiante, teniendo en cuenta los datos y la información que le dio el problema, debe cerciorarse si el resultado es correcto. Esta parte muchas veces la da por obvia, pero es necesaria, ya que en ocasiones los estudiantes no saben demostrar si el resultado es correcto o no. Por ello el profesor debe hacer preguntas como: ¿están seguros de que las respuestas son correctas?, ¿qué información nos daba el problema?, ¿la solución es lógica?, ¿se cumplen las relaciones que nos ofrecía el problema?, etc.

B) Verificar. Confirmar que el problema solo tiene una solución, porque en la mayoría de las ocasiones, cuando llegan a un resultado no buscan si puede haber alguno más. Aquí el profesor puede ir observando si los alumnos llegan al mismo resultado o si hay resultados distintos que son correctos, para luego sacarlos a la pizarra, etc. Pero también lo puede hacer con preguntas como: ¿no hay más resultados?, ¿por qué creen que no hay más resultados?, ¿han considerado el 0 como opción?, etc.

C) Responder, ¿hay una solución o puede haber más?, ¿cómo tenemos que responder? Puesto que es importante que respondan al problema con una oración y que busquen si el problema tiene varias soluciones posibles.

Este proceso se sigue independientemente de la estrategia que se elija. Si la elección resulta ser la modelización, a la hora de seleccionar el material que se va a usar para manipular la información que nos ofrece el problema matemático, debemos tener en cuenta que el material (ProyectaMates, 2018b) puede ser estructurado o no estructurado. Cuando decimos estructurado, hablamos de materiales creados con un fin educativo matemático, por ejemplo, las regletas, los bloques multibase, cubos multilink, geoplanos, etc. Y cuando hablamos de materiales no estructurados nos referimos a tapas, boliches, palillos, trabas, tarjetas, etc., material que no ha sido creado para tener un fin educativo matemático. En la sesión puesta en práctica que se grabó se observa como el material es claramente no estructurado (tapas).

### **3.4 Análisis de vídeo de sesiones de clases.**

La estructura que se ha seguido para analizar el vídeo se basa en el trabajo de Planas (2006), porque el planteamiento que ofrece es sencillo de seguir y compatible con este trabajo.

1. Estudio y descripción general del vídeo: en esta fase se observa lo presenciado en la grabación y se elabora un informe general de lo observado.

2. Identificación de episodios de revisión de significados matemáticos: este segundo punto recoge los episodios analizados de donde se extraen los significados matemáticos. Además, se añade la transcripción de cada episodio.

3. Búsqueda de procesos de reelaboración de estos significados: esta última parte del análisis se corresponde con los momentos del vídeo en los que se analiza la actuación de la profesora.

La grabación de la sesión supuso tener una prueba evidente de lo que ocurrió en el aula y cómo se trabajó la resolución de problemas matemático.

## **4. Metodología**

El análisis de la sesión de resolución de problemas matemáticos en el aula estará realizado sobre 3º de Primaria. Este curso fue elegido porque es en este nivel (3º y 4º de Primaria) en el que “ProyectaMates” se centra para el desarrollo de las estrategias de resolución de problemas matemáticos.

Analizaremos la actuación de la docente en su propuesta de trabajo, teniendo en cuenta el desarrollo de la estrategia elegida y que se trabajó en las sesiones de formación del proyecto. También analizaremos el problema seleccionado comparándolo con las investigaciones en resolución de problemas de los matemáticos citados en el marco teórico.

El fin de este análisis es extraer ideas sobre cómo trabajar la resolución de problemas matemáticos en el aula con la estrategia de modelización para realizar una propuesta mejorada.

Para ello tenemos como evidencias las grabaciones, las anotaciones de los observadores que estuvieron presentes, una entrevista a la docente (anexo 3), y las respuestas de los alumnos/as en la ficha que entregó la profesora para resolver los problemas.

En este trabajo no analizamos la sesión en su totalidad, sino que elegimos tres episodios del desarrollo de la sesión, aquellos que consideramos más importantes. Esos tres episodios fueron seleccionados ya que evidencian las cuatro fases de Polya (Alfaro, 2006) ya nombradas. El primer episodio corresponde con la fase de comprensión, el segundo con la fase de pensar, y el tercero con las fases de ejecutar y resolver.

## **5. Estudio y descripción general del vídeo.**

El análisis se centra en la grabación de la primera de las dos sesiones de 45 minutos desarrolladas en la clase de 3º de Educación Primaria del CEIP César Manrique del Puerto de la Cruz.

La clase estaba dividida en 4 grupos de 4 alumnos cada uno, excepto en un grupo donde había 3 niños que contaban con una auxiliar que atendía a sus necesidades específicas de atención educativa. Dos niños tenían problemas de audición y otro tenía déficit de atención. Consideramos importante destacar que en la clase había alumnado de la otra clase de 3º.

El desarrollo de la sesión se estructuró con la ficha que se muestra en el anexo 4 y que se le entregó al alumnado, coincidiendo, en parte, con las fases que se trabajaron en el proyecto: comprender (el enunciado del problema), pensar (extraer los datos, las relaciones y establecer un camino a seguir), ejecutar (poner en práctica lo planteado), resolver (resolver el problema), comprobar (asegurarse de que la solución es correcta). Estas tres últimas fases pueden repetirse hasta encontrar la solución.

En la ficha que repartió la profesora, junto al enunciado del problema, viene una estructura bien definida con los pasos que hay que seguir para resolver el problema, ajustándose bastante a lo visto en las sesiones de formación.

La sesión, siguiendo la formación que se ofreció en el proyecto, estuvo estructurada con las siguientes partes:

- Comprender: leen en alto el problema tantas veces como sea necesario para comprenderlo.
- Extracción de datos y objetivos: organizamos la información del problema.
- Representación: representación del problema mediante dibujos.
- Pensar: reflexión sobre los pasos a seguir para resolver el problema.
- Ejecución: poner en práctica el plan pensado.
- Comprobación: se comprueba que el resultado sea correcto.
- Solución: se da la solución.

Para la grabación en el aula se situaron dos cámaras. La primera enfocando la pizarra. La segunda enfocando al grupo.

La profesora, al comienzo de la clase, recuerda qué es lo que van a realizar, lo que tienen que responder ( nombra a los datos, problemas y solución) y que pueden utilizar material manipulativo como apoyo para resolverlo.

Al final de la sesión, la profesora elige a una alumna para salir a la pizarra para resolver el problema ante todos/as, elige a una niña que, según la profesora, muestra dificultades en la resolución de problemas matemáticos y para ver si esta sesión le ha ayudado a superar esas dificultades.

### **5.1 Episodio 1: comprender y pensar.**

A continuación, vamos a analizar el episodio 1, el cual conlleva el trabajo de varias fases para asegurar la comprensión del problema matemático. Todas esas fases se recogen en la ficha que entregó la profesora al alumnado. Además, este episodio nos permite contrastar lo que se observa en el vídeo con las evidencias recogidas en las respuestas de la ficha que dieron los alumnos. En el anexo 5 pueden encontrar la transcripción del episodio.

#### **5.1.1 Antecedentes al Episodio 1.**

Al comienzo de la sesión la profesora comenta que ya habían hablado de este proyecto, esto puede llevar a pensar a que los problemas fueran resueltos con anterioridad

o que estuvieran preparándose con problemas similares. Sin embargo, el desarrollo de la sesión y las evidencias obtenidas no lo reflejan. La formación que se da en el proyecto solo se ha puesto en práctica en esta sesión, la profesora no tiene experiencia previa en este tipo de sesiones de resolución de problema matemáticos.

La profesora nos comentó que la elección de tan sencillos problemas viene dada por el bajo nivel de la clase. Consideramos que la elección del problema no ha sido la mejor. La formación le ofreció una gran cantidad de problemas para llevar al aula. Estos problemas que ofrece el proyecto van en una línea innovadora, alejándose de los problemas tradicionales, con varias soluciones posibles, etc.

Sin embargo, el problema que eligió la profesora, aunque podemos categorizarlo como no rutinario, porque el alumno no tiene directamente la fórmula a seguir, sí que sería un problema tradicional. Teniendo en cuenta a Fan y Zhu (2006), lo podemos clasificar como tradicional porque el problema esconde bajo el texto las operaciones a realizar. El alumno no tiene que pensar qué operaciones realizar, ya que vienen dadas en el propio enunciado del problema.

Continuando con la clasificación podemos decir que el problema sería cerrado (ofrece una única solución), aplicado (puede ser una situación real), de múltiples pasos (necesitan una suma y una resta, o dos restas), con datos suficientes (ni hay datos sobrantes, ni datos que falten), y está expresado de forma verbal (escrito).

La profesora, antes de que la clase comenzara a resolver el problema, comentó sin dejar a los alumnos razonar el proceso, las posibles operaciones a realizar y los materiales que podían usar. No lo consideramos oportuno, porque todo lo que diga la profesora en este momento puede condicionar la actuación de los niños y niñas.

### **5.1.2 Análisis Episodio 1: Actuación de la profesora.**

#### **5.1.2.1 Comprender**

##### **¿Qué hizo la profesora?**

Como podemos observar en la ficha (anexo 4) se contemplan las cuatro fases trabajadas en el proyecto, la que corresponde al episodio que estamos analizando es la primera de ellas, comprensión.

El primer punto de la ficha “Leo el problema varias veces”, corresponde a la fase de comprensión. Esta parte se realizó con la profesora leyendo el problema en voz alta. Después de leerlo preguntó si lo habían comprendido o si era necesario volverlo a leer, el alumnado decidió volverlo a leer y, de nuevo la profesora, lo leyó en voz alta, pero esta

vez no lo leyó tal cual aparecía en la ficha, pues mientras iba leyendo el problema, fue incorporando preguntas como “¿cuántos alumnos hay en la clase?” O, “¿qué es lo que nos pide el problema?”.

Según Polya (Alfaro, 2006) para resolver un problema lo primero que tenemos que hacer es “Comprender el Problema”.

### **¿Qué sugerimos?**

Como reflexión proponemos desarrollar esta fase de otra manera para que el alumnado sea más protagonista y reflexivo en su proceso. Por ejemplo, introducir una parte de lectura silenciosa e individual.

Del mismo modo, creemos que no se dio el tiempo suficiente a los alumnos para contestar y reflexionar a sus dudas. Consideramos que la fase de comprensión se desarrolló de manera repetitiva a lo que decía la profesora sin buscar un pensamiento reflexivo del alumnado.

Por otro lado, es muy positivo introducir preguntas mientras se lee el problema, pues ayuda a ir extrayendo la información que nos ofrece el problema poco a poco y a que los alumnos sean más conscientes de los pasos que van completando. Este es el proceso que nos aconseja seguir Polya (Alfaro, 2006) durante la primera fase, la de comprensión, para resolver un problema.

La ficha que se entregó puede ser una buena opción, sobre todo, en las sesiones iniciales como esta, para orientar el proceso al alumno, pero podríamos decir que a esta estructura faltaría añadirle una parte para escribir las relaciones que se observan en el enunciado, lo que ayudaría al alumnado a pensar los pasos que tiene que seguir y las operaciones que necesita realizar para llegar a resolver el ejercicio.

### **5.1.2.2 Pensar**

#### **¿Qué hizo la profesora?**

La segunda fase, pensar, que correspondería a los puntos 2, 3, 4 y 5 de la ficha se dio en voz alta, esta fase corresponde con la elección de la estrategia y con el desarrollo de los pasos a seguir.

Para el punto 2 de la ficha “Escribo los datos”, la profesora no dio indicación alguna, fue el propio alumnado el que contestó ese apartado de manera autónoma. Por el contrario, para el punto 3 sí dio indicaciones claras sobre lo que tenían que hacer.

La representación gráfica fue un trabajo autónomo y la profesora no hizo comentarios al respecto.

Para terminar con esta fase, según Polya (Alfaro, 2006), se debe elegir una estrategia (en este caso ya venía dada y era la modelización), pero en la sesión solo se centró en establecer unos pasos a seguir, la estrategia se desarrollaría más tarde, como comprobación de las operaciones.

### **¿Qué muestran las evidencias escritas?**

Con las evidencias que hemos obtenido podemos ver el grado de adquisición de los conocimientos que han alcanzado los alumnos y donde están los puntos a mejorar.

La gran mayoría de los alumnos esquematiza los datos, un tercio de la clase los copia literalmente y solo una alumna no los copia todos (anexo 6). Esta última alumna comenzó a copiar el enunciado como si todo fuera datos, pero solo copió hasta el dato “5 [alumnos] han ido al patio”, luego da la sensación de que borró lo demás por un error gramatical y no volvió a escribirlo.

En el tercer paso, “Escriba la pregunta” (anexo 7), solo observamos dos grupos, uno que reinterpreta (solo dos alumnos) y otro que copia la pregunta (13 alumnos).

En el punto 4, sobre la representación gráfica (anexo 8), hay una diversidad de respuestas mayor que resumimos así:

Esquemática: representa todo el proceso en un mismo dibujo.

Incompleta: en la representación faltan escenas del problema.

Literal: representa todo el proceso, diferenciando las escenas.

Errónea: no representa el proceso adecuadamente.

Sin sentido: la representación no guarda relación con el problema.

En general, hacen una representación con sentido, bien sea esquemática, incompleta o literal.

Y el último punto referente a este episodio sería, “Paso a paso” (anexo 9), aquí encontramos cuatro tipos de respuestas:

Correcto: el alumno escribe de manera adecuada los pasos a seguir.

Exceso: el alumno escribe más pasos de los necesarios.

Incompleto: faltan pasos.

Sin sentido: los pasos que escribe el alumno no tienen relación con el problema.

Hubo un problema cuando los alumnos observaron que en el punto 5 (“Paso a paso”) había 3 numeraciones, ellos entendieron que, por tanto, tenía que haber tres pasos, y a pesar de que la profesora comentó en clase que no necesariamente había tres pasos a seguir, ellos se vieron condicionados por esa estructura y algunos se inventaron un paso más del necesario. De aquí la importancia de que, si se da una ficha a seguir, esta esté bien estructurada. Tres alumnos escribieron más pasos de los debidos. El hecho de que hubiera tres puntos en ese apartado condicionó a los alumnos a pensar que forzosamente había tres pasos.

Lo llamativo con relación a las respuestas del alumnado es que casi la mitad de la clase, 7 de 15, no realizó adecuadamente la representación gráfica del problema, esto puede ser debido a que no están acostumbrados a realizar este tipo de ejercicios. Este puede ser un punto para tomar en cuenta como futuras mejoras.

A modo de resumen del episodio, consideramos que la profesora tuvo un papel directivo más que orientador, así como que hubo pequeños errores durante el desarrollo de los distintos puntos de la ficha, pero al final, y como muestran las evidencias, la mayoría de la clase fue capaz de seguir el ritmo de la sesión.

### **¿Qué sugerimos?**

Esta fase creemos que no se desarrolló acorde a lo establecido por los investigadores, pues se expuso como comprensión del enunciado y no como un camino para resolver el problema. A continuación, explicamos el procedimiento en cada punto.

Así, al punto 2 de la ficha “Escribo los datos” la profesora no le dio importancia, pues no comentó nada al respecto. Lo mejor habría sido orientar este proceso, pues para poder pensar un plan a seguir es fundamental tener claro los datos y las relaciones de los problemas.

Sería conveniente elegir una estrategia a seguir como las dadas en la formación. Esta fase, tampoco se desarrolló, pues no eligieron una estrategia a seguir, ni hubo un proceso reflexivo sobre qué pasos seguir y en qué orden. Se trabajó como un añadido al problema, el cual resolvieron ejecutando las operaciones tradicionales.

La profesora no tuvo un papel orientativo, sino que les daba a los alumnos/as directrices muy claras de lo que tenían que hacer. No les daba tiempo para pensar y sacar sus propias conclusiones, lo que condiciona el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Compartimos la afirmación de Polya (Alfaro, 2006), quién señalaba que el papel del profesor era muy importante, pues este no debe actuar como un resolutor de problemas, sino dar las herramientas necesarias al alumnado para que este, por sí solo, resuelva los problemas matemáticos. Para realizar esto es fundamental hacer preguntas para que reflexionando el alumnado llegue a encontrar el camino correcto. Comenzar por una pregunta general para llegar así a lo particular.

A continuación, ejemplificamos este proceso: comenzar con ¿cuál es el objetivo del problema?, continuar con, ¿qué tenemos que saber para llegar a la solución?, y terminar con ¿qué tenemos que hacer con los datos de los alumnos que han salido de la clase?, ¿por qué sumar?

También apuntaba que en ocasiones la labor principal del profesor es la de motivar al alumnado, el cual muchas veces se encuentra desmotivado. Para ello creemos que la mejor manera es proponer problemas cercanos a ellos, que puedan vivenciar en su entorno y que se adapten a sus gustos.

El problema que les entregó quizás no es lo suficientemente motivador, si es cercano a su entorno, pero no está conectado con el gusto del alumnado y la temática.

En definitiva, y en concordancia con el documento de Alfaro (2006) ya mencionado, es importante ver el problema como un todo, para así comprender mejor el problema. Para ello puede ser bueno conectarlo con experiencias cercanas y verlo desde distintas perspectivas, aquí es donde el alumnado puede participar activamente, construyendo así su pensamiento matemático.

## **5.2 Episodio 2: ejecutar**

En este segundo episodio describimos y analizamos cómo fue el proceso de manipulación del problema.

Elegimos este episodio (anexo 10) porque es donde se observa el desarrollo de la estrategia de modelización que estamos analizando. Es fundamental que en este trabajo que trata de la resolución de problemas con diferentes estrategias haya un análisis de la puesta en práctica de una estrategia que desarrolla la formación.

### 5.2.1 Análisis Episodio 2.

#### ¿Qué hizo la maestra?

Fue en esta fase donde se dio el proceso manipulativo para desarrollar la estrategia denominada “modelización”. Consiste en convertir la información de un problema en un patrón (estructura matemática que es manipulable) (ProyectaMates, 2018b).

La elección de la estrategia es fundamental, ya que nos ayuda a poder organizar y comprender mejor la información, así como a resolver, con seguridad, el problema.

Para esta estrategia es muy importante el material que se va a utilizar. Primero hay que tener el material suficiente (en este caso, tapas) para representar a cada uno de los elementos del problema. Si aparecen elementos distintos, sería recomendable tener materiales diversos, o el mismo material, pero con variaciones (tamaño, color, altura, etc.). En este caso el alumnado disponía de las tapas y recipientes suficientes.

Según Alfaro (2006), Polya afirmó que en la ejecución del plan, etapa que podríamos relacionar con la que estamos analizando, es importante hacer entender a los discentes la diferencia entre ver un paso correcto (problema por resolver) y demostrar que es correcto (problema por demostrar). Esto es que cuando llevamos a cabo la ejecución de unos pasos establecidos debemos estar seguros de que nos llevarán a la solución del problema y a resolver todos los objetivos.

#### ¿Qué muestran las evidencias escritas?

En las evidencias, en el punto “Operaciones” (anexo 11), podemos observar si los alumnos eligieron correctamente las operaciones, si las entendieron y si las ejecutaron correctamente, o no.

- Correctas: las operaciones realizadas son las necesarias y están ejecutadas de manera adecuada.
- Incompletas: las operaciones realizadas no son suficientes para llegar a la solución del problema. Falta una operación. Por ejemplo, suma los niños que se van del aula ( $5+7=12$ ), pero no los resta al total ( $28-12$ ) para saber cuántos quedan en clase.
- Sin sentido: la operación no guarda relación con el problema.  $28+7+5$  y le da 16.

- Errónea: las operaciones realizadas no están bien ejecutadas, hay fallos en la suma o resta.

El trabajo en grupo influyó en los resultados, pues muchos hacían lo mismo que sus compañeros y las indicaciones de la profesora, la cual dijo que tenían que saber cuántos alumnos salían del aula. Lo que entendieron como que había que sumar los que salían del aula y, por consiguiente, restarlos al total.

La modelización les pudo haber ayudado a entender mejor el proceso y a resolver el ejercicio de otra manera, pero como la hicieron después de la ejecución no llegaron a la conclusión de que tanto los que se iban al patio, como los que se iban a la biblioteca, eran los que se iban del aula, por tanto, al total podían restarle un grupo primero y luego el otro. Esa era la relación (los que había, menos los que se van), pero como la profesora entendía que no había relaciones, no la extrajeron.

### **¿Qué sugerimos?**

En primer lugar, consideramos que el proceso manipulativo podría haberse dado antes, no después de que los estudiantes resolvieran el ejercicio en papel con las operaciones de adición y sustracción. Sin embargo, consideramos positivo que se incorporara este elemento manipulativo para que ayudara al alumnado, por si tenían dudas o se habían copiado, a asimilar mejor el problema.

Destacamos que aunque la elección del material no tenía gran dificultad, ya que todos los elementos coincidían, fue una elección adecuada, pues se ajustaba a los datos del problema, había material suficiente, es un material fácil de manejar y con él, podían diferenciar los diferentes grupos (alumnos en la clase, alumnos en el patio y alumnos en la biblioteca) con recipientes distintos.

Echamos en falta que la profesora hiciera a los discentes nombrar la unidad en cada respuesta numérica que daban, por ejemplo, vemos cómo al final dicen:

- Profesora: ¿cuántas quedan en la clase?
- Estudiantes: 16
- P: pues muy bien

La profesora en su pregunta hacía referencia a las tapas que representaban a los niños, pero realiza la pregunta sin nombrarlas y los estudiantes responden un número (16), sin unidad. Debió decirles cuando decían 16 que a qué se referían (tapas, estudiantes, etc.). Esto es importante para que el alumnado no pierda la unidad de referencia, lo que les ayuda a seguir el proceso con mayor facilidad.

Podemos resumir este segundo episodio con una valoración positiva, ya que la manipulación se desarrolló correctamente y las intervenciones de la docente fueron adecuadas, aunque la sesión pudo ser estructurada de otra manera (trabajar la manipulación antes) y las expresiones de la docente pudieron ser más cuidadosas.

### **5.3 Episodio 3: Responder y comprobar.**

El tercer, y último episodio (anexo 12), está relacionado con la resolución y comprobación del problema, la cual se dio en la pizarra donde salió una niña como voluntaria, escribió lo que había hecho e intentó explicarlo.

Seleccionamos este episodio ya que es la parte donde más claramente podemos ver el proceso de comprobación, pues vemos la actuación de la profesora, la actuación de la alumna y cómo sirve de ejemplo para que los demás comprueben si el proceso que ellos han realizado era el correcto para resolver el problema.

#### **5.3.1 Análisis Episodio 3.**

##### **¿Qué hizo la profesora?**

El episodio comienza con la alumna realizando la representación gráfica, la profesora le dice que haga una clase rectangular, sin dejar a la alumna que ella realice la representación que ella crea conveniente. De nuevo, la profesora guía el proceso de aprendizaje de alumna.

A continuación, surge el siguiente diálogo:

- Profesora: ¿qué dice el problema?
- Alumna: de 28 alumnos, 5 han ido al patio.

Aquí vemos como esta alumna hace una reinterpretación de los datos. Luego, la profesora vuelve a intervenir.

- Profesora: pues coge 5 alumnos y los mandas para el patio.

Siendo este otro ejemplo de lo guiada que estaba la alumna. Sin embargo, hubo momentos donde la profesora tuvo un papel de orientadora, por ejemplo, cuando dice:

- Profesora: pero mira, vamos a marcarlo bien (...)
- P: 5 ya se fueron para el patio, y ¿cuántos se fueron para la biblioteca?
- Alumna: 12
- P: ¿cuántos se van a la biblioteca?
- A: ah, 7.

Hemos de destacar que, cuando le pregunta por segunda vez a la estudiante el número de alumnos que se fueron a la biblioteca, esta se da cuenta de que se había equivocado y rectifica.

La profesora pregunta en alto si el resto está de acuerdo con la respuesta que dio la alumna. De nuevo, orienta a la alumna con preguntas como: ¿qué operaciones tenemos que hacer?

Al terminar con la operación, recuerda a la alumna responder al primer paso, pero de nuevo le dice la respuesta “12 alumnos han salido de la clase”.

Cuando comprobaron el proceso, la actuación de la docente, fue correcta, preguntó a la alumna qué había hecho y esta respondió correctamente.

### **¿Qué sugerimos?**

Principalmente, destacamos que la profesora, como ya comentamos y como sucedió a lo largo de toda la sesión, pero de manera más evidente en este proceso, tuvo un papel muy directivo, dejando a un lado la orientación y el proceso reflexivo de la alumna. Un ejemplo es el comienzo del episodio, cuando se ve cómo la alumna realiza una representación gráfica correcta, influenciada por el comentario de la profesora, que le dijo que dibujara una clase rectangular. Destacamos que esta alumna, en la ficha, la representación que realiza no tiene sentido. Por tanto, podemos decir que, o bien, la reinterpretación que hizo de los datos, o bien, los comentarios de la profesora hicieron que su visión del problema, y por tanto, la representación, fuera completamente distinta en la ficha respecto a la pizarra.

Creemos que hubiese sido mejor dejar a la alumna sola y ver lo que dibuja. Y después, preguntar: ¿está representada ahí la clase de 28 alumnos?, ¿los cinco que se van al patio?, ¿los 7 que se van a la biblioteca?, etc.

La intervención de la profesora fue muy positiva en algunos momentos, porque hizo que en la alumna hubiera un proceso de reflexión, tanto en la representación gráfica como en los datos. Del mismo modo, hubo momentos donde la actuación de la docente fue clave para el buen discurrir de la sesión, donde vemos cómo una simple pregunta de orientación puede ayudar a los alumnos a llegar a la conclusión del problema. Por ejemplo, cuando pregunta a toda la clase si está de acuerdo con el resultado que ha dicho la alumna, esto es importante para ver si el proceso lo ha sido seguido toda la clase y quién se ha equivocado.

Para concluir, hay que puntualizar que este episodio resume a los dos anteriores, pues se ve un esfuerzo por parte de la docente por poner en práctica lo aprendido en la

formación, aunque su papel se acerca más a la enseñanza directiva que a una figura orientativa en el proceso de aprendizaje del alumnado. Consideramos que la docente ha sido muy directiva en la sesión porque durante el desarrollo de esta daba órdenes claras de lo que tenían que hacer los alumnos, sin dar tiempo para que hubiese una reflexión del alumnado.

## 6. Propuesta de mejora.

*“Si un niño no puede aprender de la manera en que le enseñamos, quizás debemos enseñarles de la manera en qué aprender” - Rita Dunn*

A continuación, planteamos una propuesta mejorada centrada en la estrategia de modelización, pero entendiendo que para la resolución de problemas matemáticos no existe una estrategia mejor que otra, sino que todas forman un grupo de posibilidades que ofrece a los alumnos diferentes caminos para lograr la solución. De hecho, el problema que proponemos también se puede resolver trabajando otras estrategias como organización de la información.

Partiendo de los mismos contenidos, utilizando la estrategia que trabajó la docente, y teniendo en cuenta el curso (3º de Educación Primaria) para el que se planteó la sesión, proponemos un problema que para llegar a resolverlo ofrece varios caminos. En definitiva, proponemos un problema que tiene una riqueza mayor y que supone un reto para el alumnado.

Hay 23 alumnos y alumnas en la clase de Juan. 15 de ellos y ellas practican esquí y 10 natación. Solamente hay tres alumnos/as que no practican ningún deporte. ¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?

El problema que proponemos lo podemos clasificar según Fan y Zhu (2006) como un ejercicio no rutinario, pues no tiene una fórmula a seguir; no tradicional, ya que el alumnado necesita reflexionar sobre los datos y el proceso de resolución del problema para llegar a la solución; de final cerrado, pues solo ofrece una solución; aplicado, el problema puede darse en el contexto cercano del alumnado; de múltiples pasos, ya que necesitan de varios pasos para resolver el problema; con datos suficientes: tiene los datos y las relaciones necesarias para resolverlo; y se presenta de forma verbal.

En esta propuesta consideramos que es importante la motivación. Tener unos alumnos motivados ayuda a la resolución de problemas, porque lejos de crear malas

experiencias en ellos que les supone mostrar una actitud poco adecuada hacia la resolución de problemas, los lleva a afrontar con curiosidad y optimismo lo mismo.

La sesión comenzaría trabajando la comprensión. Se reparte la ficha individual a los alumnos para que les ayude a resolver mejor el problema (anexo 13). Sin dar indicaciones, evitando condicionar sus acciones. Después de repartir la ficha diríamos que van a trabajar en pequeños grupos y que tienen que desarrollar la estrategia de modelización. Luego repasaríamos entre todos el concepto de modelización con preguntas como:

- Pregunta: ¿qué es la modelización?
- Respuesta esperada: una estrategia para la resolución de problemas matemáticos.
- P: ¿para qué sirve la modelización?
- R.E.: para ayudarnos a resolver los problemas matemáticos.
- P: ¿cómo funciona?
- R.E.: representando con materiales toda la información que nos da el problema.
- P: ¿qué material conocemos con el que podemos trabajar la modelización?
- R.E.: tapas, fichas, trabas, etc.

Después de esto, pasarían a escribir el problema en la ficha y a leerlo en voz baja hasta que todos terminen. Una vez hayan terminado todos, leeremos el problema en voz alta.

A continuación, individualmente manipularán con el material que decidan (tapas, clips, trabas, etc.) la información que les ofrece el problema, en esta parte es importante comprobar si el alumnado es capaz de pasar la información del problema al material manipulativo, por ejemplo, ver si cogen 23 trabas, clips, fichas, etc., transformando así el dato 23 alumnos al material manipulativo. Para que luego, haciendo una puesta en común en pequeño grupo el alumnado extraiga los datos. El profesor puede orientar con preguntas como: ¿qué han estado manipulando?, ¿qué información nos da el problema?, ¿qué podemos considerar dato y qué no?, ¿hay datos que podemos considerarlos como relación?, ¿todo el enunciado es un dato? En negrita resaltamos los datos del problema.

**Hay 23 alumnos y alumnas** en la clase de Juan. 15 de ellos y ellas practican esquí y 10 natación. Solamente hay **tres alumnos/as** que **no practican ningún deporte**. ¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?

Luego, repetiremos el mismo proceso para el objetivo, teniendo en cuenta que nos puede ofrecer información importante: ¿qué nos pide el problema?, ¿hay alguna pregunta en el enunciado del problema?, ¿nos nombra algún dato el objetivo del problema?, etc. Señalamos en negrita el objetivo del problema. Ver hasta la figura 6 del anexo 14.

Hay 23 alumnos y alumnas en la clase de Juan. 15 de ellos y ellas practican esquí y 10 natación. Solamente hay tres alumnos/as que no practican ningún deporte. **¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?**

Y repetimos el proceso para señalar las relaciones, si el alumnado tiene problemas podemos orientarlos con preguntas como: ¿cuántos alumnos hay en la clase?, ¿cuántos alumnos practican deporte?, ¿qué conclusiones puedes sacar con esa información? etc. En negrita resaltamos las relaciones del problema

Hay 23 alumnos y alumnas en la clase de Juan. **15 de ellos y ellas practican esquí y 10 natación.** Solamente hay tres alumnos/as que no practican ningún deporte. ¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?

El alumnado irá vaciando la información en la ficha, ejemplificado en el anexo 15. Para la representación gráfica, (trabajo individual), el profesorado deberá ir fijándose en el trabajo de cada niño/a y cuando vea algo que pueda llevar a un error de comprensión, preguntar: ¿están presentes todos los datos del problema?, ¿son adecuados los dibujos que están haciendo? ¿estás representando todas las partes del problema?, etc.

El último paso de la comprensión sería la elección de la estrategia y plantear unos pasos a seguir. Como la estrategia ya está elegida, pasarán a plantear los pasos que van a seguir. Primero lo harán individualmente. Luego, ponen las ideas en común y cada pequeño grupo trazará un plan a ejecutar. El profesor puede ayudar con preguntas como:

- Pregunta: ¿qué datos tenemos?
- Respuesta esperada: había 23 alumnos y 3 no practican ningún deporte.
- P: ¿cuántos practican deporte?
- R.E.: 20
- P: ¿qué más datos o relaciones tenemos?
- R.E.: 15 practican esquí y 10 natación.
- P: ¿Qué dice la pregunta?

- R.E.: ¿Cuántos practican esquí y natación a la vez?
- P: ¿y eso qué significa?
- R.E.: que puede haber alumnos que practican los dos deportes a la vez.
- P: ¿Han usado todos los datos y es necesario usarlos todos?
- R.E.: sí.

En la segunda fase, ejecución, se desarrolla de nuevo la modelización (ver a partir de la figura 6 del anexo 14). Antes de que cada alumno o alumna realice las operaciones de la manera tradicional, sumando y restando en el papel, cada grupo con el material elegido resolverá el problema. En esta parte el profesor sólo observará el desarrollo de cada grupo y las valoraciones que da cada uno de los miembros, para ver, si después de 5-10 minutos todos los grupos han llegado a la solución. Una vez hayan desarrollado la estrategia, podrán resolver el ejercicio en el papel, pero no será un traspaso de información, sino que las operaciones que hagan en el papel deben ratificar el resultado que dio la estrategia.

Esta es una de las partes más importantes, pues el profesor tiene que estar atento para ver los distintos caminos con los que el alumnado resuelve el ejercicio, algunos pueden hacer un diagrama de Venn con las trabas, otros simplemente clasificar dos grupos (con distintos materiales) e ir separando las trabas hasta que lleguen a la solución, etc. Después, pondrán en común para toda la clase el plan que han trazado.

Terminaremos con la fase de comprobación y solución. Una vez hayan resuelto el problema y escrito las operaciones en el papel, deberán comprobar, mediante un argumento razonado, que no hay más posibilidades de respuesta. En este caso no puede haber otro resultado distinto a 5, porque si hay más o menos alumnos que practican los dos deportes a la vez, los datos y las relaciones del problema no se cumplen. Para dar la solución, individualmente, lo harán con una oración o frase, en este caso, la respuesta sería: 5 alumnos practican a la vez esquí y natación.

## **7. Conclusiones**

El desarrollo de este trabajo nos ha permitido adquirir conocimientos sobre la resolución de problemas, sus fases y estrategias; los tipos de problemas matemáticos; cómo actuar ante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas; y sobre cómo afrontan los estudiantes la resolución de problemas, todo esto a través del

análisis de una sesión de resolución de problemas y la presentación de una propuesta de mejora.

Conocer los distintos tipos de problemas existentes y cómo podemos clasificarlos nos permite hacer una selección adecuada de problemas matemáticos. La importancia de este punto es evidente en el análisis de la sesión, ya que el problema propuesto era tan sencillo que no suponía un reto para el alumnado. La actitud con la que los estudiantes afrontaron el problema lo demuestra. Para ellos no fue un problema, ya que sabían las operaciones que tenían que hacer con solo leer el enunciado. Y así se observa en las evidencias.

El desarrollo de la estrategia de modelización nos ha mostrado diversos materiales que podemos usar, cómo podemos desarrollar esta estrategia y las dificultades que pueden surgir en el estudiantado. Por ello damos recomendaciones a seguir en cada una de las fases de resolución de problemas. Siendo conscientes de la importancia que tiene respetar las mismas y los pasos a seguir para ayudar al alumnado a resolver el problema. Aunque en la sesión analizada el desarrollo de la estrategia fue correcto, exceptuando la manipulación, que debió hacerse antes.

La actuación del profesor es otro de los puntos más importantes. A través del análisis de la propuesta de la docente, hemos observado que no es conveniente ser tan directivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Lo mejor es hacer reflexionar al alumnado sobre el plan que están siguiendo en la resolución de problema, con una metodología más orientativa, pues se dan cuenta de sus errores, los corrigen y se sienten más seguros para afrontar la resolución del problema.

La propuesta de mejora es fruto del análisis y de los comentarios realizados a lo largo de todo este trabajo. Con ella y gracias a la formación recibida en ProyectoMates, hemos podido desarrollar una propuesta que busca ofrecer una enseñanza en la resolución de problemas matemáticos. De ahí, la importancia de desarrollar este tipo de proyectos y de continuar investigando y formando en la resolución de problemas matemáticos.

## 8. Bibliografía.

- Alfaro, C. (2006). *Las ideas de Pólya en la resolución de problemas* [Ebook] (1st ed.). *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.
- Barrantes, H., Meta-Matemáticas, U. C. R., & de Ciencias Exactas, E. (2006). Resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.
- Blanco, L. J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, (25), 49-60. Sevilla, España.
- Blanco, L. J. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quadrante, Revista Teórica e de Investigacao*, 6(2), 45-65.
- Blanco, J.L. y Pino, J. A. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, (38), 63-88.
- Blanco, L.J. y Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En Manuales UEX (Ed.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 81-92). Cáceres, España: Universidad de Extremadura. Servicio de publicaciones.
- Bruno, A., Hernández, J., Palarea, M., Socas, M.M. & Universidad de La Laguna [Sin fecha]. Juegos de estrategias y resolución de problemas en los diseños curriculares base en matemáticas. *Universidad de Las Palmas de Gran Canarias. Servicio de publicaciones*.
- Decreto 89/2014 de 1 de agosto por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias*, N°89, Las Palmas de Gran Canaria, España, 13 de agosto de 2014.
- Díaz, M.V., y Poblete, A. (2001). Categorizando tipos de problemas en álgebra. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (27), 93-104.
- Fan, L., & Zhu, Y. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.
- Lerman, S. (2001), "Accounting for Accounts of Learning Mathematics: Reading the ZPD in Videos and Transcripts", en D. Clarke (ed.), *Perspectives on Practice and Meaning in Mathematics and Science Classrooms*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.
- Ministerio de Educación y Cultura. (2014). Marco General Evaluación de Tercer Curso de Educación Primaria. Recuperado de [http://www.gobiernodecanarias.org/cmsgobcan/export/sites/accuee/.content/pdf/marcogeneral/marco\\_eval\\_3EP\\_Canarias.pdf](http://www.gobiernodecanarias.org/cmsgobcan/export/sites/accuee/.content/pdf/marcogeneral/marco_eval_3EP_Canarias.pdf)
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2015) PISA 2015 Resultados claves. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf>
- Pino, J. A. (2013). La resolución de problemas y el dominio afectivo: un estudio con futuros profesores de matemáticas de secundaria. In *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas* (pp. 117-148). Grupo de investigación DEPROFE.
- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, 18(1), 37-72.

- ProyectaMates. (2018a). Sesión de Formación 1. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: [http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S01-Formaci%C3%B3n-a-docentes-22\\_nov\\_18-pdf.pdf](http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S01-Formaci%C3%B3n-a-docentes-22_nov_18-pdf.pdf)
- ProyectaMates. (2018b). Sesión de Formación 2. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: [http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S02-Formaci%C3%B3n-a-docentes-dic\\_18-pdf-v2.pdf](http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S02-Formaci%C3%B3n-a-docentes-dic_18-pdf-v2.pdf)
- ProyectaMates. (2019a). Sesión de Formación 3. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: [http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S03-Formaci%C3%B3n-a-docentes-ene\\_19-pdf.pdf](http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/01/S03-Formaci%C3%B3n-a-docentes-ene_19-pdf.pdf)
- ProyectaMates. (2019b). Sesión de Formación 4. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: [http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/02/S04-Formaci%C3%B3n-a-docentes-feb\\_19-pdf.pdf](http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/02/S04-Formaci%C3%B3n-a-docentes-feb_19-pdf.pdf)
- ProyectaMates. (2019c). Sesión de Formación 5. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: <http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/04/S05-Formaci%C3%B3n-a-docentes-gen%C3%A9rica-abril-pdf.pdf>
- ProyectaMates. (2019d). Sesión de Formación 6. Santa Cruz de Tenerife, España: proyectamates.webs.ull.es. Recuperado de: [http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/04/S06-Formaci%C3%B3n-a-docentes-abr\\_19-pdf.pdf](http://proyectamates.webs.ull.es/wp-content/uploads/2019/04/S06-Formaci%C3%B3n-a-docentes-abr_19-pdf.pdf)

## 9. Anexos

### Anexo 1

La siguiente tabla resume la clasificación de los problemas matemáticos según Fan y Zhu (2006).

Clasificación según	Fan y Zhu
Rutina	Rutinarios: aplicar una fórmula.
	No rutinarios: no pueden ser resueltos con una simple fórmula.
Visión	Tradicional: no hay reflexión.
	No tradicional: necesitan de una reflexión.
Final	Abierto: ofrece varias soluciones.
	Cerrado: tiene una única solución.
Aplicación	Aplicados: están relacionados con el contexto y con la vida real.
	No aplicados: no están relacionados ni con el contexto ni con la vida real.
Número de pasos	Un paso: resolver el problema con un único paso.
	Múltiples pasos: para resolver el problema necesitas hacer múltiples pasos.
Datos	Con datos suficientes: tiene los datos y las condiciones necesarias para resolverlo.
	Con datos extraños: hay más datos y condiciones de las necesarias para resolverlo.
	Con datos insuficientes: faltan datos o condiciones para resolver el problema.
Forma	Formato puramente matemático: en el problema solo hay expresiones matemáticas.
	Forma verbal: el problema está presentado de forma escrita.
	Forma visual: el problema está presentado de forma gráfica (imagen, tabla, gráfico, etc.).
	Combinación de formas: el problema está presentado con varias expresiones.

## Anexo 2

Esta tabla compara la clasificación de problema matemático de varios autores y autoras.

Figura 2. Elaboración propia.

Fan y Zhu (2006)	Polya (1986)	Blum y Niss (1991)	Puig (1996)	Borasi (1986)	Blanco (1991)	Díaz Poblete y (2001)
Rutinarios	Por resolver		Ejercicio algorítmico	Ejercicio	Ejercicio algorítmico	
No rutinarios	Por demostrar		Problema de aplicación		Problema de traducción simple o compleja	
Tradicional	Por resolver		Ejercicio de reconocimiento	Ejercicio	Ejercicio de reconocimiento	
No tradicional	Por demostrar		Problema de búsqueda	Puzle, prueba de conjetura, situación problemática y situación	Puzle, investigación matemática y problema de procesos	No rutinario
Abierto						
Cerrado						
Aplicados		Aplicados		Problema de la vida real	Problema de traducción simple o compleja	Problema de contexto real y problema realista
No aplicados		Puros				Fantasma
De un paso						
De múltiples pasos						
Datos suficientes						
Datos extraños						
Datos insuficientes						
Puramente matemático		Puros				Puramente matemático
Forma verbal				Problema con texto	Historias matemáticas	
Forma visual						
Combinaciones de forma						

### Anexo 3

A continuación, presentamos la transcripción de la entrevista realizada a la docente después de la grabación de la sesión.

Entrevistador: ¿por qué eligió estas actividades? Usted me había comentado que era por el nivel de la clase....

Profesora: sí, yo, como los niños tienen un nivel bajito, pues utilicé este tipo de problemas más sencillos que suelen y que tuvieran una o dos operaciones y que las operaciones empleadas, pues que fueran sumas y restas llevando y multiplicación que es lo que hemos trabajado hasta ahora y, también, pues trabajar la comprensión lectora, el razonamiento, ese tipo de problemas.

E: ¿Y de dónde sacó esas actividades? O sea, de la formación no.

P: no, de la formación no, porque los de la formación los veo un poco complicados con ellos. Yo los he trabajado en clase, he trabajado un par en clase, de problemas, pero no, no los elegí de ahí.

E: los creó usted, ¿no?

P: no, los busqué por internet buscando e hice una selección más o menos de lo que vi e hice una selección.

E: vale, o sea, utilizó esos porque eran los que veía los que más a nivel estaban con la clase. ¿Y cuál era el objetivo?, ¿qué quería usted que ellos aprendieran?

P: el objetivo es, pues, aprender a resolver problemas utilizando los contenidos que hemos trabajado de matemáticas y que ellos valoren que tienen una utilidad las matemáticas, que pueden resolver esos problemas para llegar a la solución.

E: con el material manipulativo, ¿no?

P: sí, con la modelización.

E: vale, ¿cuál fue la estrategia que usó? Bueno, modelización, ¿no?, lo acaba de decir

P: sí.

E: ¿Por qué?, ¿por qué esa y no que otra?

P: pues porque por el tipo de problema era como la que más...

E: sencilla.

P: sí, la más sencilla para ellos.

E: vale, y, bueno, tenía en la clase tres niños con adaptación curricular o...

P: en la clase tengo dos niños de adaptación, pero de acceso, son niños que tienen déficit de audición, estaba la profesora de audición y lenguaje que les ayuda a resolver problemas, ellos no tienen... ellos la única adaptación que tienen es la ayuda de la maestra de audición y lenguaje, pero siguen todo al ritmo de la clase.

E: siempre está con ellos, la profesora de apoyo.

P: sí.

E: vale.

P: bueno, siempre no, de lunes a miércoles, luego los jueves tienen una auxiliar de lenguaje de signos y los viernes, pues, no tienen a nadie.

E: pero bueno, tienen bastante ayuda.

P: luego también hay niños que tienen las matemáticas pendientes de 2º y había dos cursos mezclados, había alumnos de dos cursos.

E: sí, nos comentaron, y ya la última es, ¿en qué consistió su papel? Si en un papel como orientación o más como más directivo. Como orientar su proceso o más directivo, más....

P: sí, entiendo lo que me quieres decir, bueno, la idea era de orientación, pero en algunos momentos tuve que hacer más de directiva.

E: vale, sí.

P: tuve que dirigir un poquito más o menos.

E: sí, porque hay niños que tienen más problemas.

P: sí.

E: vale, perfecto, gracias.

## **Anexo 4**

Este anexo recoge la ficha que repartió la profesora al alumnado.

La ficha tenía en la parte superior el enunciado del problema y estaba estructurada en los siguientes pasos:

1. Leer el problema tantas veces sea necesario hasta que se comprenda.
2. Extraer y escribir los datos.
3. Escribir la pregunta del problema, el objetivo que tenemos que conseguir.
4. Realizar un dibujo que represente el problema.
5. Escribir los pasos que tenemos que seguir.
6. Hacer las operaciones que necesitamos.
7. Comprobar si la solución es correcta.
8. Dar la solución al problema.

**RESUELVO PROBLEMAS**

En la clase somos 28 alumnos, 5 han ido al patio y otros 7 a la biblioteca. ¿Cuántos alumnos quedan en clase?

1	LEO el problema VARIAS VECES	
2	Escribo los DATOS	3 Escribo la PREGUNTA
4	Hago el DIBUJO del problema	
5	PASO a PASO	6 OPERACIONES
	1-	
	2-	
	3-	8. COMPROBAMOS .
7	SOLUCIÓN	



<input type="checkbox"/>	He realizado bien las operaciones
<input type="checkbox"/>	La solución responde a la pregunta

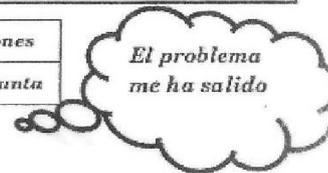


Figura 3.

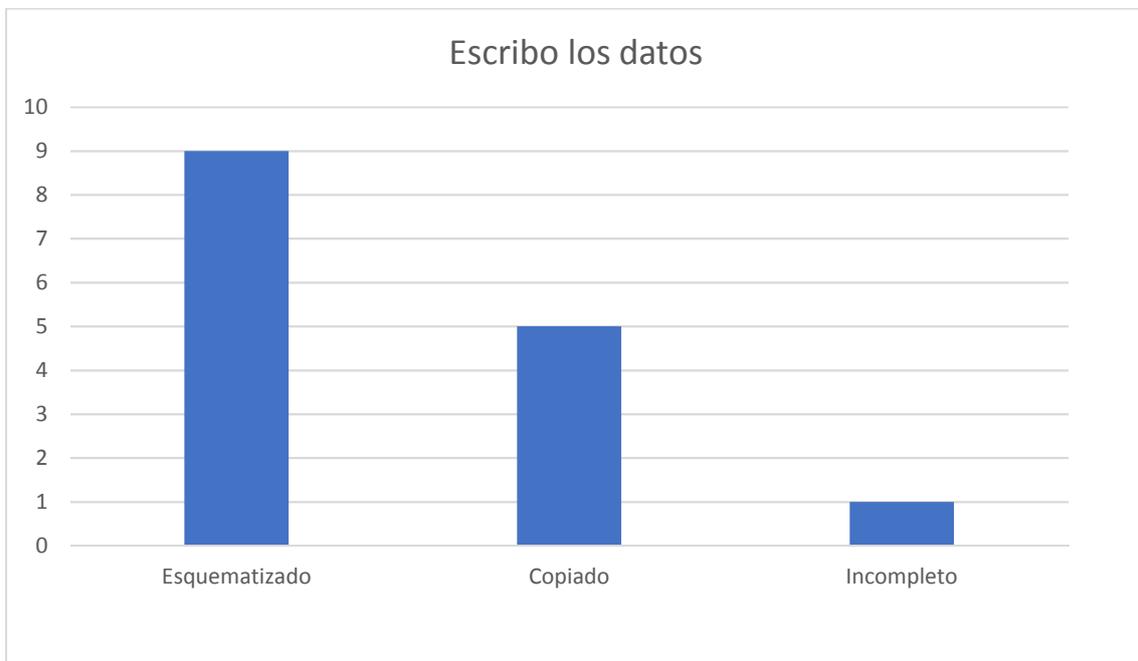
## Anexo 5

### Transcripción del episodio 1.

<b>Intervalo</b>	<b>Descripción</b>
<b>09:55-09:58</b>	Presentación del proyecto y de las actividades. Recuerda los conocimientos dados y los posibles materiales a usar.
<b>09:58-09:59</b>	Se reparte la ficha con la que van a trabajar, la cual está dividida en varios pasos. Enunciado del problema, leer, extraer datos, objetivo, hacer una representación gráfica, que pasos hemos seguido, operaciones que hemos necesitamos y la comprobación final. Recuerda el material del que pueden hacer uso.
<b>09:59-10:01</b>	Lee el problema en voz alta. Pregunta si han entendido o vuelve a leer, le responden “vuelve a leer”. Así que vuelve a leer. Pregunta el objetivo del problema y termina por nombrar los datos. Pueden volver a leer el problema si es necesario.
<b>10:01-10:03</b>	Los alumnos apuntan los datos y la profesora comienza a decirles cuál es el objetivo del problema, comprueba que le responden bien a la pregunta y presenta a la clase el tiempo para desarrollar la representación gráfica.
<b>10:03-10:07</b>	Realizan la representación gráfica del problema. La profesora da importancia al trabajo en grupo.
<b>10:07-10:13</b>	La profesora presenta a la clase el apartado de paso a paso. Comenta en voz alta el proceso a seguir. Centra el pensamiento de los alumnos/as en los pasos y no en el resultado.
<b>10:13-10:14</b>	La profesora reparte el material manipulativo con el fin de que después de haber realizado las operaciones, comprueben si las han hecho bien.

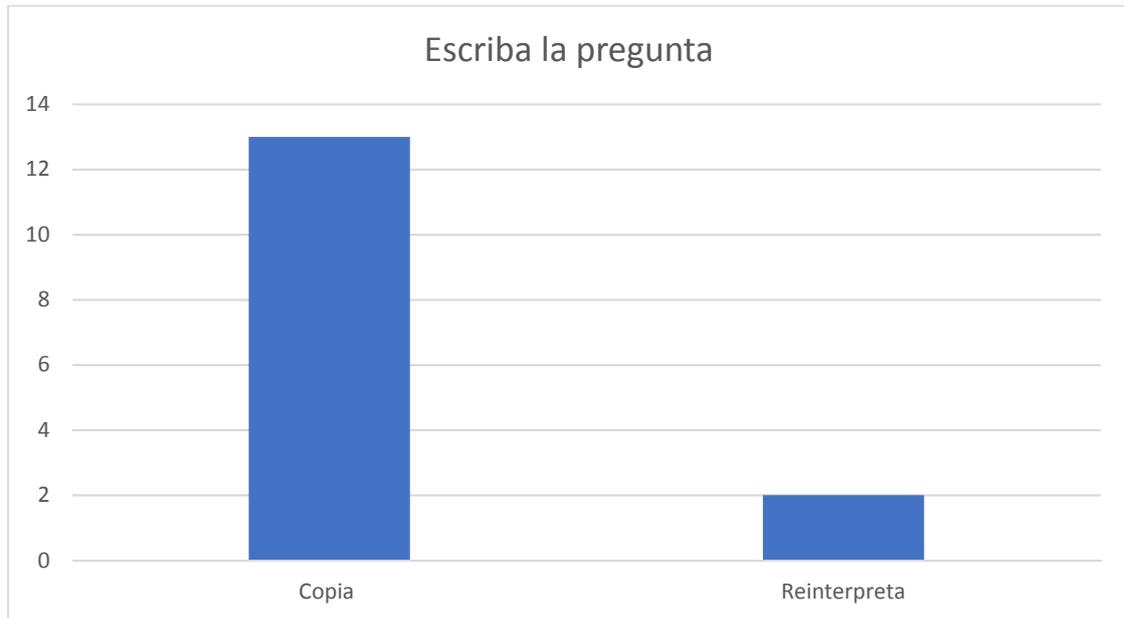
## Anexo 6

Gráfico sobre el segundo punto de la ficha “Escribo los datos”.



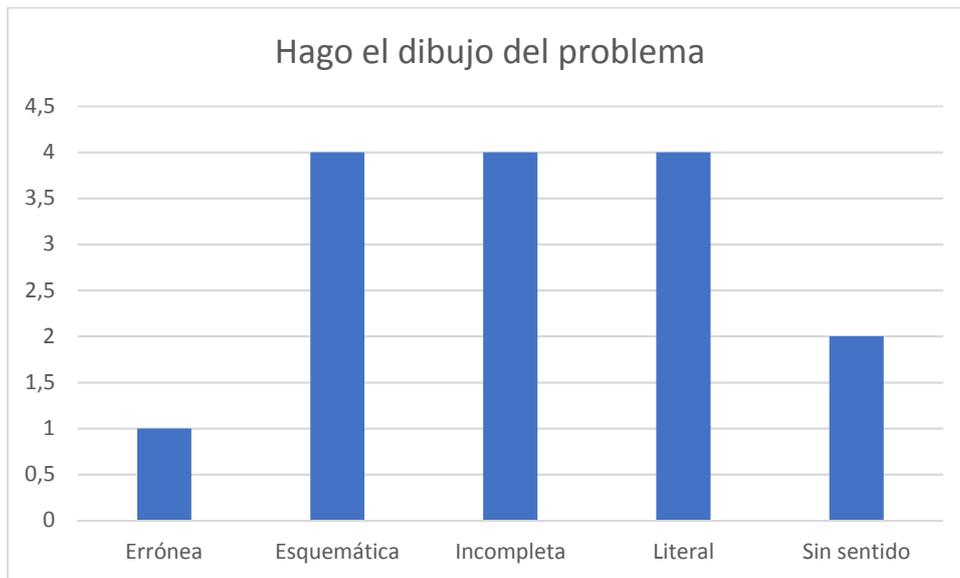
## Anexo 7

Gráfico sobre el tercer punto de la ficha “Escriba la pregunta”



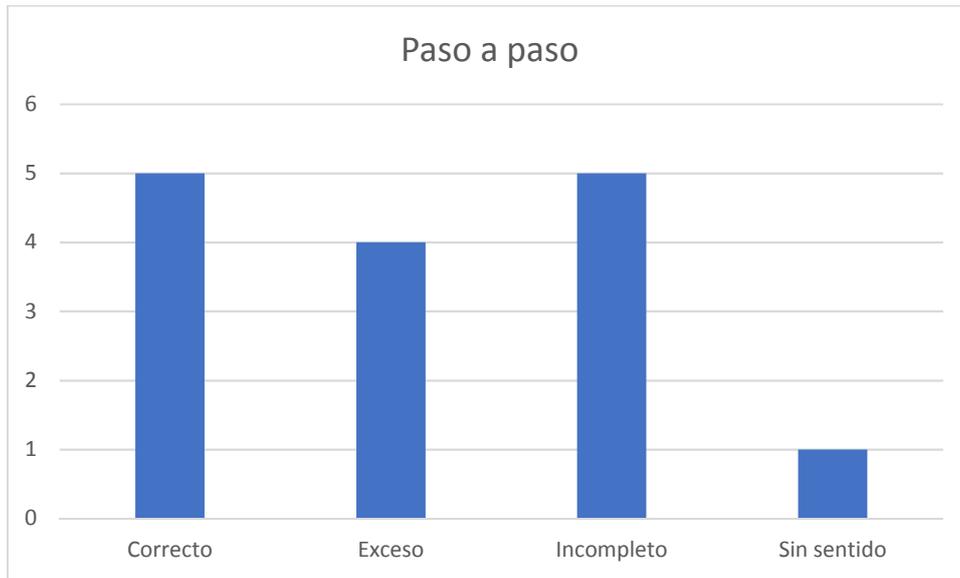
## Anexo 8

Gráfico sobre el cuarto punto de la ficha “Hago el dibujo del problema”.



## Anexo 9

Gráfico sobre el quinto punto de la ficha “Paso a paso”



## Anexo 10

Transcripción del episodio 2.

Intervalo	Descripción
10:16-10:20	Los alumnos manipulan por sí solos las tapas intentando encontrar una solución al problema.
10:20-10:22	<p>La profesora se acerca a un grupo. Toma la parte de debajo de una botella recortada donde el alumnado introduce las tapas para manipular el problema.</p> <p>Profesora: ¿esto es la clase? ¿verdad?</p> <p>Señala hacia las tapas que representan a cada alumno de la clase.</p> <p>Profesora: ¿cuántos hay ahí?</p> <p>Estudiante: 28</p> <p>La profesora señala otro recipiente de otra botella.</p> <p>P: vamos a hacer como si esto fuera el parque.</p> <p>La profesora repite el proceso anterior.</p> <p>P: y esto, la biblioteca. Y vamos a mover a los alumnos a ver qué pasa.</p> <p>La profesora señala el recipiente que representa al parque.</p> <p>P: ¿cuántos alumnos hay ahí?</p> <p>A: 7 alumnos.</p> <p>Los alumnos repiten el proceso con lo que representarían a los que se van a la biblioteca y la profesora dice:</p> <p>P: ¿cuántas quedan en la clase?</p> <p>A: 16.</p> <p>P: pues muy bien.</p>
10:22-10:23	Pasan al siguiente paso y para ello pide un voluntario.

**Anexo 11**

Gráfico sobre el sexto paso de la ficha “Operaciones”.



## Anexo 12

A continuación, presentamos la transcripción el episodio 3.

INTERVALO DESCRIPCIÓN

<b>10:25-10:27</b>	Sale una alumna a la pizarra y empieza a escribir lo que ella ha realizado.
<b>10:27-10:29</b>	En esta fase la alumna pasa a calcular los alumnos que han salido de clase.
<b>10:29-10:31</b>	La alumna calcula cuántos alumnos quedan en la clase.
<b>10:31-10:33</b>	La alumna realiza la comprobación.
<b>10:33-10:35</b>	Dan una solución al problema.

### **Anexo 13**

El siguiente anexo recoge la ficha que realizamos para la propuesta de mejora. Como observan es muy similar a la que realizó la profesora, pues consideramos que recoge todos los pasos. Los cambios son: la introducción de un espacio dedicado a la escritura del enunciado, otro para las relaciones y que en el apartado que la profesora llamó “Paso a paso”, no enumeramos los pasos que tienen que seguir, porque serán ellos los que escriban el proceso que van a seguir.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS *Figura 4. Elaboración propia.*

1º. Escribe el enunciado del problema.

2º. Leo el problema tantas veces sea necesario hasta que lo entienda.

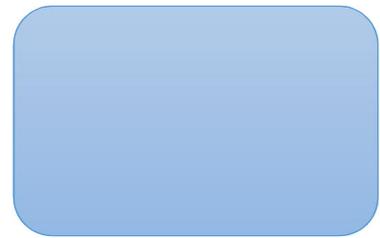
**3º DATOS**



**4º OBJETIVOS**

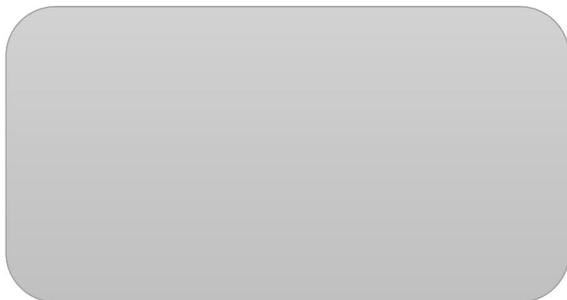


**5º RELACIONES**



Haz el dibujo del problema

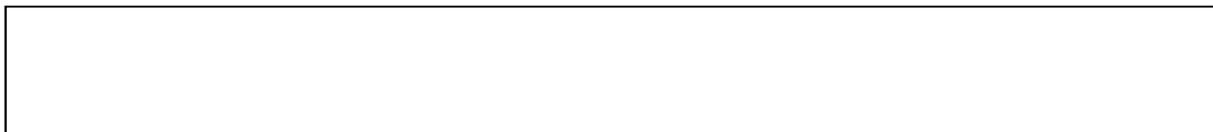
Enumera lo que tienes que hacer para resolver el problema.



Resuelve las operaciones



Comprueba y da la solución



## Anexo 14

En este anexo presentamos un ejemplo de cómo podría resolverse el ejercicio.

En esta foto, representamos el primer paso, representar todos los elementos (23 alumnos) con un material manipulativo (trabas).

Figura 5. Elaboración propia.



El segundo paso sería interpretar el dato: tres alumnos no practican ningún deporte. Por eso separamos en la esquina superior izquierda tres trabas.

Figura 6. Elaboración propia.



A continuación, pasamos a representar la relación: 15 de ellos practican esquí (trabas verdes y amarillas).

Figura 7. Elaboración propia.



Este punto es muy importante, pues aquí nos daríamos cuenta de que entonces faltarían 5 alumnos para el grupo de natación (trabas rojas). ¿Qué pasaría si representamos primero el grupo de natación?

Figura 8. Elaboración propia.



Pues nos daríamos cuenta de que pasaría exactamente lo mismo que en el caso anterior, tendríamos completo el grupo de practicante de natación (trabas rojas y amarillas), pero nos faltan para el grupo de esquí (trabas verdes).

¿Cómo podemos añadir a un grupo sin quitar del otro? Pues teniendo en cuenta que hay un grupo más, el de los alumnos que practican ambos deportes a la vez. Así que podríamos hacer un grupo intermedio con las trabas amarillas, si ponemos una traba amarilla en el grupo intermedio, ¿qué pasa?

*Figura 9. Elaboración propia.*



En este caso vemos como el grupo de natación se queda con el mismo número de componentes, 10. Pues tiene 9 trabas rojas y amarillas en su grupo, más la traba amarilla del grupo intermedio, lo que hace un total de 10. Mientras que el grupo de esquí (trabas verdes), gana 1 componente, porque tiene las 10 trabas verdes de su grupo, más la traba amarilla del grupo intermedio, lo que hace un total de 11.

Este es precisamente el proceso que se tiene que seguir, añadir al grupo de esquí (trabas verdes) sin quitar del grupo de natación. Por tanto, solo habrá que repetir este proceso tantas veces sea necesario hasta cumplir con los datos y las relaciones del problema.

La situación final sería la siguiente:

*Figura 10. Elaboración propia.*



Aquí podemos ver como los datos y las relaciones se cumplen se cumplen. 23 alumnos (23 trabas), 3 de ellos no practican ningún deporte (3 trabas azules), 15 de ellos practican esquí (10 trabas verdes del grupo verde más las 5 trabas amarillas del grupo que practican tanto esquí como natación, lo que hace un total de 15), 10 de ellos practican natación (5 trabas rojas del grupo de los que solo practican natación, más las cinco amarillas del grupo de alumnos/as que practican tanto esquí como natación, lo que hace un total de 10).

Y con esa información podemos responder al problema, 5 alumnos/as practican ambos deportes a la vez.

En definitiva, es muy importante ver como la propia pregunta del problema te ofrece una información valiosa, cuántos alumnos practican a la vez ambos deportes.

## Anexo 15

En este anexo presentamos un ejemplo de la ficha con el problema resuelto.

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Figura 4. Elaboración propia.

1º. Escribe el enunciado del problema.

Hay 23 alumnos/as en la clase de Juan. 15 de ellos y ellas practican esquí y 10 natación. Solamente hay 3 alumnos/as que no practican ningún deporte. ¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?

2º. Leo el problema tantas veces sea necesario hasta que lo entienda.

#### 3º DATOS

- 23 alumnos/as  
- 3 alumnos/as no practican ningún deporte

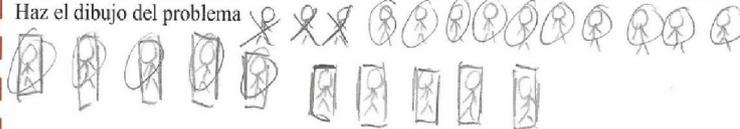
#### 4º OBJETIVOS

¿Cuántos alumnos/as practican a la vez esquí y natación?

#### 5º RELACIONES

- 15 practican esquí.  
- 10 practican natación.

Haz el dibujo del problema



Enumera lo que tienes que hacer para resolver el problema.

- Calcular cuántos alumnos/as de la clase practican deporte.  
- Calcular cuántos alumnos/as practican deporte en total.  
- Calcular cuántos practican los dos deportes a la vez.

Resuelve las operaciones

$$\begin{array}{r} 1^\circ \quad 23 \\ \quad - 3 \\ \hline \quad 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2^\circ \quad 15 \\ \quad + 10 \\ \hline \quad 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3^\circ \quad 25 \\ \quad - 20 \\ \hline \quad 5 \end{array}$$

Comprueba y da la solución

Comprobación: solo puede ser 5 alumnos porque si no, no se cumplen los datos y relaciones.  
Solución: 5 alumnos/as practican a la vez los dos deportes.