



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Lourdes Falcón Betancort

Teoría de Nudos

Knot Theory

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2019

DIRIGIDO POR

David Baldomero Iglesias Ponte

David Baldomero Iglesias Ponte
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi familia y a mis tíos por todo el apoyo y cariño que me han dado.

Lourdes Falcón Betancort
La Laguna, 8 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

El propósito de este trabajo consiste en una pequeña introducción a la teoría de nudos. Se establecerá cuándo dos nudos son equivalentes, y se estudiarán las distintas características topológicas de las superficies. A través de lo anterior, se procederá al análisis de invariantes de nudos. Para su proceso, será empleado el algoritmo de Seifert que permitirá la construcción de la matriz del mismo nombre y a partir de esta, se podrá definir el polinomio de Alexander. Pudiendo de esta manera, ofrecer una breve panorámica de la clasificación de los nudos.

Palabras clave: *Nudo – Movimientos de Reidemeister – Suma conexa – Superficie de Seifert – Matriz de Seifert – Polinomio de Alexander.*

Abstract

The objective of this work is a brief introduction to knot theory, establishing when two knots are equivalent. Using different topological characteristics of surfaces, we will proceed to the analysis of knot invariants. For this we will use Seifert's algorithm that will allow the construction of the matrix of the same name and from it, we can define the Alexander polynomial and offer a short overview of the classification of the knots.

Keywords: *Knot – Reidemeister moves – Connected sum – Seifert Surfaces – Seifert matrix – Alexander polynomial.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción a la Teoría de nudos	1
1.1. Nudos. Equivalencia de nudos	2
1.2. Proyecciones y diagramas	5
1.3. Movimientos de Reidemeister	7
1.4. Nudos orientados	9
2. Superficies	11
2.1. Variedades Topológicas. Suma conexa	11
2.2. Complejos simpliciales	15
2.3. Grupo de homología para un complejo simplicial	20
3. Superficies de Seifert. Polinomio de Alexander	23
3.1. Construcción de la superficie de Seifert	23
3.2. Construcción de la matriz de Seifert	27
3.3. Matrices de Seifert S -equivalentes	31
3.4. Polinomio de Alexander via Matrices de Seifert	40
Bibliografía	45
Poster	47

Introducción

*La curiosidad es la llave que
abre las ventanas de la atención,
y con ella el aprendizaje y la memoria,
y con lo aprendido y su clasificación,
la adquisición de nuevos conocimientos.*
Francisco Mora

Desde los tiempos de Demócrito de Abdera (460 al 370 a.C.) se han ido sucediendo distintos modelos que tratan de esclarecer la estructura de la materia. Desde teorías puramente filosóficas, sin ningún sustento científico, hasta la reciente observación en 2012 de una nueva partícula elemental que se ha dado en llamar el bosón de Higgs, el camino ha sido largo y lleno de ramificaciones.

Fue a finales del siglo XIX, concretamente en 1867, cuando William Thomson conocido como Lord Kelvin, propuso que los diferentes tipos de materia se correspondían con vórtices tubulares anudados en el éter. Durante alrededor de 20 años esta teoría fue tomada seriamente, incluso J. C. Maxwell llegó a decir “satisface más condiciones que cualquier otro modelo del átomo hasta entonces considerado”. Este contexto hizo que uno de los más cercanos colaboradores de Lord Kelvin, Peter Guthrie Tait, con quien ya había escrito en 1867 el Tratado de Filosofía Natural, abordó, con el fin de facilitar la tarea de decidir cuándo dos átomos eran diferentes, el estudio extensivo y el problema de clasificación de los nudos. Tait quiso dar respuesta a este último problema con sus primeras tablas de nudos que elaboró enumerando a los nudos en términos del número de cruces de sus proyecciones planas, denominadas diagramas. Sus estudios en este campo le llevaron a algunos descubrimientos empíricos que no pudo demostrar y que pasaron a la historia siendo conocidos como las “Conjeturas de Tait”.

Después de que la teoría de Kelvin fuese descartada como teoría atómica, la comunidad física perdió el interés previo en los nudos y su estudio quedó en manos tanto de matemáticos puros como expertos aficionados.

Durante el siglo XX la teoría ganó mayor impulso debido a los aportes de los matemáticos K. W. F. Reidemeister y J. W. Alexander. Por su parte Reidemeister demostró que dos diagramas de un mismo nudo estaban relacionados por una secuencia finita de solo tres tipos de movimientos, mientras que la aportación más notoria de Alexander fue el descubrimiento del primer invariante polinomial asociado a un nudo, conocido como polinomio de Alexander. A pesar de que este polinomio no ayudó a probar las conjeturas de Tait, sí demostró su validez para simplificar grandemente la clasificación de los nudos.

Hoy en día, el alcance de la Teoría de Nudos se extiende fuera del campo de la matemática. En los últimas décadas, se han encontrado ejemplos y aplicaciones concretas en ramas como la física, en teoría de cuerdas y gravedad cuántica; y en la biología, en el estudio de replicación y recombinación del ADN. Los desafíos de clasificar nudos y de establecer un sistema de invariantes completo de forma efectiva, junto con el de extender estas conexiones con otras áreas de la ciencia, son los ejes que mantienen activo a día de hoy el estudio de los nudos dentro de la comunidad científica.

El objeto de estudio de este trabajo se basa en la clasificación de los nudos. Para ello es preciso matizar en primer lugar cuando se establece la diferencia entre dos nudos distintos.

Este trabajo está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo se va a proporcionar la definición de nudo y cómo es su representación a través de diagramas. A partir de estos se darán las deformaciones elementales que permiten estudiar la equivalencia de nudos sencillos, además de los conocidos movimientos de Reidemeister que son fundamentales para justificar la validez de otras herramientas más potentes, que serán vistas en el capítulo tres, a la hora de diferenciar nudos.

En el segundo capítulo se van a introducir algunas herramientas que serán útiles en la construcción de la superficies y el estudio de invariantes de nudos. Se proporcionarán distintas características topológicas de las superficies a través de la construcción del primer grupo de homología para llegar a la conclusión de que la Característica de Euler de una superficie es un invariante topológico. Así los resultados aquí descritos servirán para fundamentar el tercer capítulo.

Finalmente, el tercer capítulo abordará el camino que relaciona a cada nudo con un polinomio, conocido como polinomio de Alexander. Este se inicia a partir del diagrama de un nudo y de la construcción a partir de él de la Superficie

de Seifert asociada. Para ello se utilizará el algoritmo de Seifert, del que se da la descripción. A partir de esta superficie se obtendrá la matriz de Seifert asociada a un nudo. Estas matrices permitirán estudiar la equivalencia de dos nudos al poderse definir una relación de equivalencia entre ellas basada en dos operaciones propias del estudio de nudos. Por último, se verá como se obtiene el polinomio de Alexander a través de esta matriz.

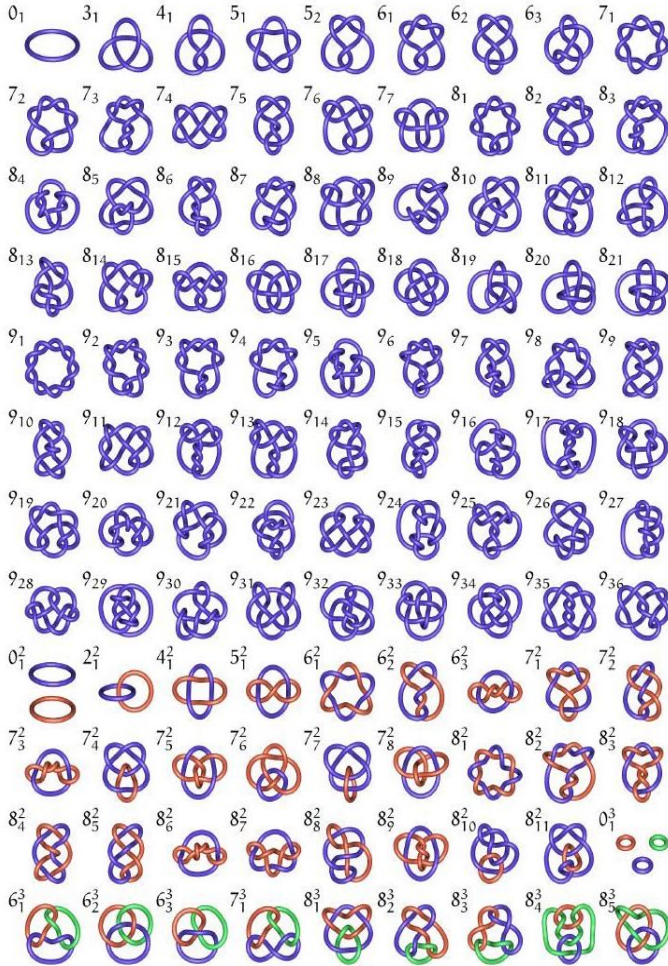


Figura 0.1. Tabla de nudos de P. G. Tait

Introducción a la Teoría de nudos

Se quiere definir matemáticamente la idea de un nudo corriente. Se trata del objeto resultante de la anudación de una cuerda determinada de cualquier forma posible más la unión de sus extremos, de tal forma que se crea una “circunferencia entrelazada” en el espacio tridimensional. Inicialmente se podría pensar que una definición matemática sería la siguiente:

Definición intuitiva. *Se define nudo a toda curva cerrada y simple en \mathbb{R}^3 , esto es, una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$ y α es inyectiva en el intervalo abierto $(0, 1)$.*

Lamentablemente esta definición es demasiado general, ya que permite situaciones como la de la Figura 1.1, en la que puede existir un número infinito de bucles que se van cruzando convergiendo en un único punto. Estos nudos son conocidos como *salvajes* y quedan fuera del ámbito de este trabajo.

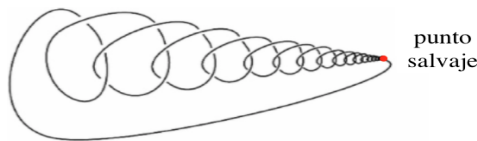


Figura 1.1. Nudo salvaje.

Por lo tanto, la definición que se busca debe descartar tales casos patológicos. Este problema quedaría solucionado al introducir el concepto de diferenciable, es decir, suponer que un nudo es una aplicación diferenciable. De esta manera se evitan situaciones como la que se muestra en la Figura 1.1, en la que la tangente varía rápidamente cerca del punto salvaje en torno al que convergen los pequeños bucles agrupados y no hay forma continua de definir la tangente en ese punto. Para evitar una situación tan restrictiva, se considera una noción

intermedia. Para profundizar más en las definiciones y conceptos básicos de la Teoría de nudos se pueden consultar los primeros capítulos de [1], [5] y [8].

1.1. Nudos. Equivalencia de nudos

Definición 1.1. Un **nudo** es una curva poligonal simple y cerrada en \mathbb{R}^3 ; es decir, es una unión finita de segmentos, denominados aristas,

$$[p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n] \cup [p_n, p_1]$$

disjuntos dos a dos excepto cuando sean consecutivos, $[p_{i-1}, p_i]$ y $[p_i, p_{i+1}]$, en cuyo caso se intersecan en un solo punto p_i , llamado vértice.

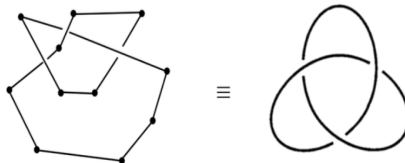
Nota. Un nudo diferenciable se puede representar como un nudo, es decir, existe un nudo poligonal equivalente a un nudo poligonal. La prueba se puede encontrar en el apéndice de [4].

Notación. Se denotará al nudo $[p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n] \cup [p_n, p_1]$ como el conjunto ordenado (p_1, p_2, \dots, p_n) , siendo los elementos p_i los vértices del nudo.

Ejemplo 1.2. La circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ es un nudo. De hecho, dado un triángulo con vértices $\{p_0, p_1, p_2\}$, se tiene que (p_0, p_1, p_2) es una representación poligonal de S^1 . Este nudo se denomina nudo trivial.



Ejemplo 1.3. El nudo trébol denotado por $3_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / x^2 + y^3 = 0 \wedge |x|^2 + |y|^2 = \epsilon^2 \text{ con } \epsilon \in \mathbb{Z}\}$ es un nudo. Una representación poligonal del nudo trébol en el plano es la siguiente.



Nota. En el trabajo, se representan los nudos algunas veces como curvas diferenciables por motivos estéticos.

Un problema fundamental de la teoría de nudos es determinar si dos nudos son equivalentes. En particular, si puede ser desanudado, es decir, si es equivalente al nudo trivial. Para definir dicha equivalencia, se introduce el concepto de *deformación elemental*.

Definición 1.4. Dado un nudo K determinado por (p_1, p_2, \dots, p_n) , se define **deformación elemental** o **movimiento elemental** de K al nudo J que se ha obtenido realizando alguna de las siguientes operaciones:

- (1) Dada la arista $[p_i, p_{i+1}]$ y $q \in [p_i, p_{i+1}]$, entonces J viene determinado por $(p_1, \dots, p_i, q, p_{i+1}, \dots, p_n)$.
- (1') Si p_i es colineal a p_{i-1} y p_{i+1} , entonces J está determinado por $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$.
- (2) Sea q un punto que no pertenece al nudo, tal que si el triángulo de vértices $T = p_i q p_{i+1}$ interseca a K solo en $[p_i, p_{i+1}]$. Entonces J está determinado por $(p_1, \dots, p_i, q, p_{i+1}, \dots, p_n)$.
- (2') Si p_{i-1}, p_i, p_{i+1} son vértices consecutivos de K y el triángulo formado por ellos interseca a K solo en $[p_{i-1}, p_i]$ y $[p_i, p_{i+1}]$, entonces J está determinado por $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$.

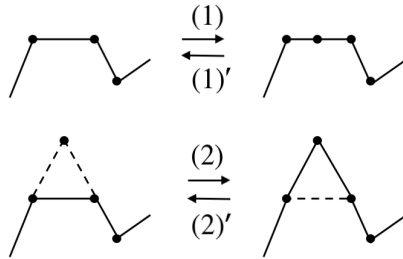


Figura 1.2. Deformaciones elementales.

Nota. En algunos textos, se considera movimiento elemental solo a (2) y (2'). Se ha optado por esta definición por simplicidad en la exposición.

Definición 1.5. Dos nudos K y J son equivalentes si existe una secuencia de nudos $K = K_0, K_1, K_2, \dots, K_n = J$, tal que K_{i+1} es una deformación elemental de K_i , para $i \geq 0$.

Esta relación es efectivamente de equivalencia, ya que satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, las cuales son fáciles de probar. De esta manera, dos nudos son diferentes si se encuentran en distintas clases de equivalencia.

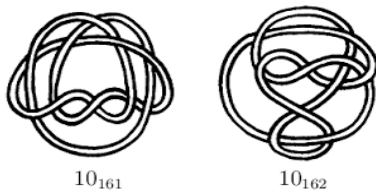


Figura 1.3. La pareja de nudos descubierta por Perko.

Como se puede ver en la Figura 1.3, los nudos parecen completamente diferentes. Sin embargo, es posible cambiar de un nudo a otro realizando un número significativo de deformaciones elementales.

Definición 1.6. Un nudo K es trivial si es equivalente a S^1 (Ejemplo 1.2).

Proposición 1.7. Dado un nudo $K = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y un vértice p_i , existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $q \notin K$ con $d(p_i, q) < \epsilon$, el nudo J determinado por $(p_1, \dots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \dots, p_n)$, denominado la ϵ -perturbación del vértice p_i , es equivalente a K .

Demostración. Sea $K = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ un nudo y un vértice $p_i \in K$, existe un $\epsilon > 0$ tal que la bola $B(p_i, \epsilon)$ no corta a las demás aristas de K que no incluyen a p_i . Luego, se toma un punto $q \in B(p_i, \epsilon)$ y $q \notin K$ tal que a partir de una serie de deformaciones elementales el vértice p_i se cambia a un punto q que dista menos de una distancia ϵ , como se puede ver en la Figura 1.4. Se ha de tener en cuenta que el punto q no necesariamente tiene que ser coplanario a $p_{i-1}p_i p_{i+1}$, ya que para realizar un movimiento elemental primero se fija el plano y luego se modifica el nudo. Por lo tanto, se cambia el vértice p_i por q , de tal manera que se forma un nuevo nudo $J = (p_1, \dots, p_{i-1}, q, p_{i+1}, \dots, p_n)$, denominado ϵ -perturbación del vértice p_i .

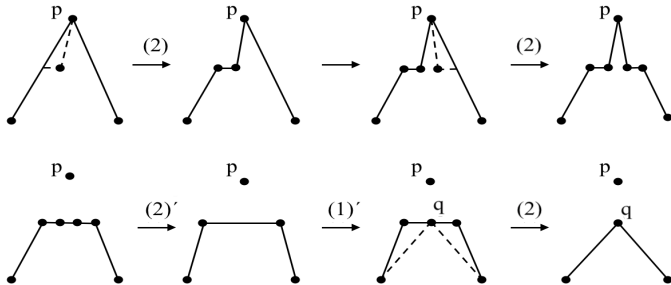


Figura 1.4. Una ϵ -perturbación usando movimientos elementales.

□

1.2. Proyecciones y diagramas

Con la finalidad de estudiar los nudos se utilizan representaciones planas, a través del uso de la proyección $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x, y)$ sobre el plano. Dado un nudo K , un punto $P \in p(K) \subset \mathbb{R}^2$ es un punto *múltiple* si $p^{-1}(P)$ contiene más de un punto de K . A cada punto doble, donde el cardinal de $p^{-1}(P)$ es 2, se le llamará *cruce*.

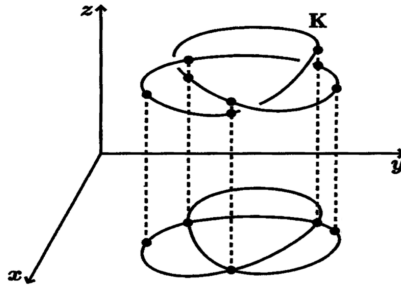


Figura 1.5. Proyección de un nudo.

Dado un nudo, la imagen de su proyección sobre el plano puede no dar toda la información sobre el mismo, debido a la superposición de elementos del nudo (ver figura 1.6). Las proyecciones que interesan son las siguientes.

Definición 1.8. Una proyección de un nudo se denomina **proyección regular** si:

- (1) Existe un número finito de puntos múltiples.
- (2) Los puntos múltiples son dobles.
- (3) Ningún punto doble es la imagen de ningún vértice de K .

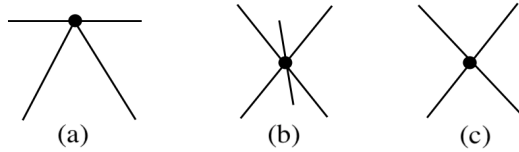


Figura 1.6. Casos prohibidos de una proyección regular.

Definición 1.9. Un **diagrama** de un nudo K es la imagen de K mediante una proyección regular, donde las componentes conexas del diagrama se denominan **arcos**.

Con el objetivo de encontrar una proyección regular, se harán deformaciones elementales en el nudo para que la proyección lo sea.

Teorema 1.10. *Todo nudo K tiene un nudo equivalente que admite una proyección regular.*

Demostración. Sea un nudo $K \subset \mathbb{R}^3$ con una proyección no regular, entonces se tienen los siguientes casos:

- (a) Existe un número infinito de puntos múltiples. Esto ocurre si:
 - (a1) Hay una arista perpendicular al plano (x, y) , en este caso basta con hacer un ϵ -perturbación de un vértice de dicha arista.
 - (a2) Hay dos aristas a_1 y a_2 paralelas al plano (x, y) , es decir, $p(a_1) \subset p(a_2)$. En este caso se hace una ϵ -perturbación a uno de los vértices, llegando a una situación como la descrita en el caso (b1).
- (b) Existe un número finito de puntos múltiples. Los casos a estudiar son los indicados en la Figura 1.6.
 - (b1) Si p_1 es un vértice y a_1 una arista de K con $p_1 \notin a_1$, tal que $p(p_1) \in p(a_1)$, se realiza una ϵ -perturbación de p_1 (en una dirección ortogonal a $p(a_1)$).
 - (b2) Si existe un punto múltiple $q \in p(K)$ tal que $p(a_1) \cap p(a_2) \cap p(a_3) = q$, se realiza una ϵ -perturbación de un vértice de alguna de las aristas.
 - (b3) Si p_1 y p_2 son vértices tal que $p(p_1) = p(p_2)$, entonces se realiza una ϵ -perturbación de p_1 .

En caso de tener más de dos vértices o más de tres aristas tales que sus proyecciones se intersecan, se repiten los pasos anteriores las veces necesarias. Por lo tanto, como J es el resultado de un conjunto de ϵ -perturbaciones, entonces J es equivalente a K y $p(J)$ es una proyección regular. \square

Teorema 1.11. *Si los nudos K y J tienen diagramas idénticos, entonces K y J son equivalentes.*

Demostración. Sean los nudos K y J determinados por los conjuntos ordenados (p_1, \dots, p_n) y (q_1, \dots, q_n) respectivamente. Si fuera necesario, se pueden introducir nuevos vértices para garantizar que ambos nudos tengan el mismo número de vértices. Por lo tanto, ya que se tienen dos nudos representantes del mismo diagrama, se pueden conectar sus aristas mediante una serie de movimientos elementales que transforman (p_1, \dots, p_n) en (q_1, \dots, q_n) , como se puede observar en la Figura 1.7. Estos movimientos se aplican primero a todos los vértices que delimitan aristas cuya proyección no contenga cruces. A continuación se van transformando mediante ϵ -perturbaciones el resto de vértices, primero los que pertenezcan a aristas que pasen por encima en todos los cruces que tenga su proyección y después los vértices que pertenezcan a aristas que pasen por debajo en algún cruce pero la superior haya sido ya transformada, luego nunca

habrá problema en la intersección con el nudo al realizar los movimientos elementales o ϵ -perturbaciones. Es decir, siempre es posible reconstruir el nudo salvo equivalencias, siendo de esta manera K y J equivalentes.

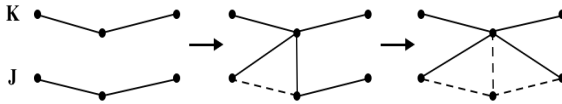


Figura 1.7.

□

1.3. Movimientos de Reidemeister

Dados dos nudos, sus diagramas sirven para estudiar la posible equivalencia de los mismos. De hecho, K. Reidemeister introdujo en 1927 una serie de movimientos en un diagrama que permiten caracterizar la equivalencia.

Definición 1.12. *Los movimientos de Reidemeister en un diagrama son los cambios que se muestran en la Figura 1.8, junto a sus inversos.*

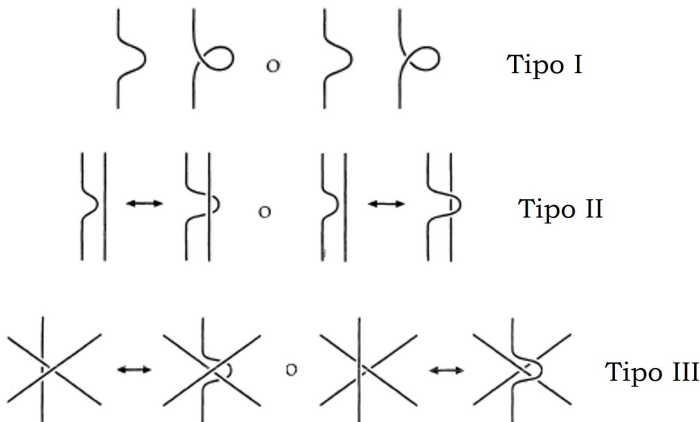
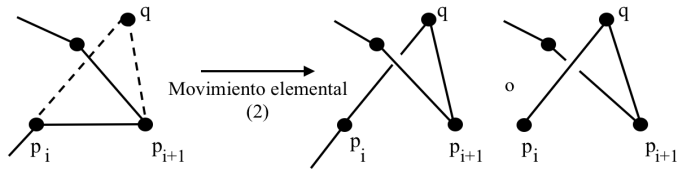


Figura 1.8. Movimientos de Reidemeister.

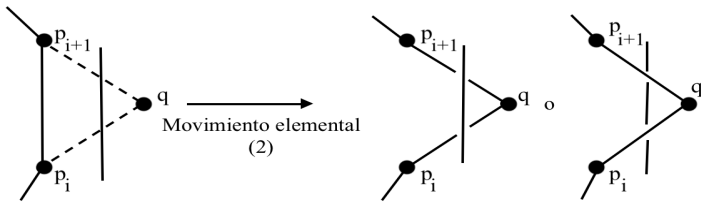
Teorema 1.13 (Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si, y solo si, sus diagramas están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.*

Demostración. Sean K y J nudos equivalentes, entonces existe una sucesión de nudos $K = K_0, K_1, \dots, K_n = J$, donde K_{i+1} es una deformación elemental de K_i . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada nudo K_i tiene una proyección regular, y cada diagrama de la sucesión finita de diagramas difiere del anterior en una proyección de un movimiento elemental. Por lo tanto, basta hacer una relación entre movimientos elementales en un nudo y los movimientos de Reidemeister en un diagrama.

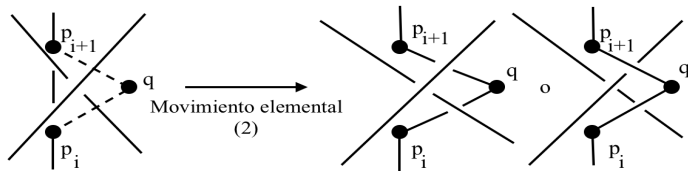
(1) Relación entre movimiento elemental (2) y movimiento de Reidemeister de Tipo I, donde se reemplaza $[p_i, p_{i+1}]$ por $[p_i, q]$ y $[qp_{i+1}]$.



(2) Relación entre movimiento elemental (2) y movimiento de Reidemeister de Tipo II, donde se reemplaza $[p_i, p_{i+1}]$ por $[p_i, q]$ y $[q, p_{i+1}]$.

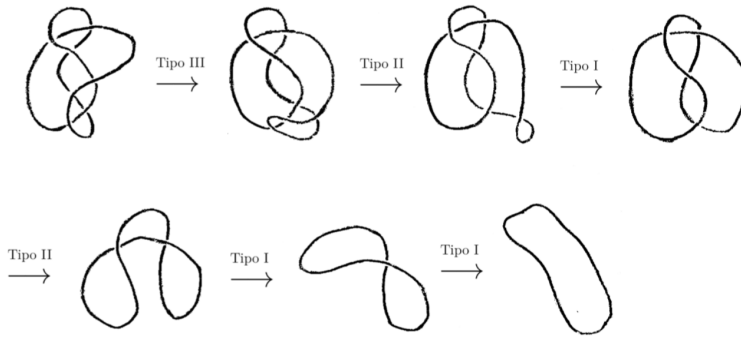


(3) Relación entre movimiento elemental (2) y movimiento de Reidemeister de Tipo III, donde se reemplaza $[p_i, p_{i+1}]$ por $[p_i, q]$ y $[q, p_{i+1}]$.



□

Ejemplo 1.14. Obtención del nudo trivial a partir de movimientos de Reidemeister.



1.4. Nudos orientados

Para terminar este capítulo introductorio, se dará una propiedad en los nudos que será interesante en los próximos capítulos.

Definición 1.15. La *orientación* de un nudo K es la dirección en la que se recorren los vértices del nudo. Dos orientaciones se dicen equivalentes si difieren en una permutación cíclica.

Definición 1.16. Si dos nudos orientados K y J se pueden alterar entre sí por medio de movimientos elementales de nudos orientados, entonces decimos que K y J son *equivalentes orientados*.

Definición 1.17. Sea K un nudo orientado con proyección regular, entonces su diagrama está orientado, donde sus cruces pueden ser *positivos* o *negativos*, como se puede ver en la Figura 1.9.

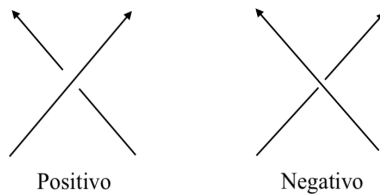


Figura 1.9. Cruces de un diagrama orientado.

Superficies

Las referencias seguidas para el desarrollo de este capítulo han sido los capítulos 6 de [6], 2 de [4] y mayoritariamente el capítulo 1 de [7].

2.1. Variedades Topológicas. Suma conexa

Las propiedades topológicas de los nudos están directamente relacionadas con las propiedades de las superficies que se pueden generar a partir de ellos. Por este motivo se tratarán en este capítulo algunas nociones y resultados asociados al concepto de superficie que más tarde se aplicarán a la teoría de nudos. Para definir una superficie, primero se debe definir el concepto de *variedad topológica*.

Definición 2.1. Una n -*variedad* (con borde) es un espacio topológico M que satisface:

- (1) M es un espacio Hausdorff.
- (2) M es segundo contable.
- (3) Es localmente euclídeo, es decir, para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$ tal que $x \in U$ y U es homeomorfo a \mathbb{R}^n o bien a \mathbb{R}_+^n , donde \mathbb{R}_+^n denota al hiperespacio superior, es decir el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_n \geq 0$.

El conjunto los puntos $\partial M = \{p \in M \mid \exists U \subseteq \text{Ent}(p), h : U \rightarrow h(U) \subseteq \mathbb{R}_+^n \text{ y } h(p) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\}$ se denomina **borde** de la variedad. El interior de M , $\text{Int}(M)$, es el conjunto de puntos con un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n . Si M es compacta y $\partial M = \emptyset$ se dice que M es **cerrada**. Una **superficie** es una 2-variedad compacta y conexa.

Nota. El borde de una n -variedad M está bien definido. De hecho, dado $p \in M$ tal que existe un abierto U , $p \in U$, y un homeomorfismo $h : U \rightarrow U'$,

con $U' \subset \mathbb{R}_+^n$, y $h(p) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Suponiendo ahora que existe un abierto V , $p \in V$, con $g : V \rightarrow V'$, $V' \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $W = U \cap V$ es un abierto en M y, por tanto, $A = g(W)$ es un abierto en \mathbb{R}^n y $B = h(W)$ es un abierto de \mathbb{R}_+^n . Pero $f = h \circ g^{-1} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un aplicación continua e inyectiva, y el teorema de invarianza del dominio implica que $f(A)$ es un abierto de \mathbb{R}^n , lo que es un absurdo porque $f(A) = B$, y este último es un abierto de \mathbb{R}_+^n .

Teorema 2.2. *Sea M una n -variedad con borde. Entonces, su borde ∂M es una $(n-1)$ -variedad sin borde y su interior $\text{Int}(M)$ es una n -variedad sin borde. Además $\text{Int}(M)$ es abierto en M .*

Demostración. Dada una n -variedad con borde M , su borde es localmente euclídeo porque por la Nota anterior existe un abierto $U \cap \partial M \cong \mathbb{R}^{n-1}$, a través de la composición del homeomorfismo $h|_{U \cap \partial M}$ y $h : U \rightarrow U'$, anteriormente descrita. Por otra parte, sea $x \in \text{Int}(M)$, entonces existe V abierto de M tal que $x \in V \subseteq M$ y como M es n -variedad se tiene que existe un abierto U de M tal que U es homeomorfo a \mathbb{R}^n , es decir, existe un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considerando el abierto $U \cap V$ se tiene que $x \in U \cap V$, donde $U \cap V$ es un abierto en M , y por tanto incluido en $\text{Int}(M)$. Tomando el homeomorfismo $\varphi|_{U \cap V}$, se tiene que $U \cap V$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n , por lo que, $\text{Int}(M)$ es una n -variedad. \square

Ejemplo 2.3. Un nudo K es una 1-variedad sin borde cerrada y conexa. Para ver que es localmente euclídeo, viendo el nudo como un nudo poligonal se van a tomar dos tipos de homeomorfismos, uno para los segmentos y otro para los vértices, viéndola como unión disjunta de bolas o discos. Para cada segmento $[p_i, p_{i+1}]$, se toma un abierto U con la topología inducida (una banda o rectángulo) tal que la intersección con el nudo sea solamente el segmento sin los vértices. Entonces se toma el homeomorfismo $\alpha_i : (0, 1) \rightarrow K \cap U$, $\alpha_i(t) = (1-t)p_i + tp_{i+1}$, en el que $(0, 1)$ es homeomorfo a \mathbb{R} . Y en el caso de los vértices se toma, una bola $U' = B(p_i, \epsilon)$ lo suficientemente pequeña y de centro el vértice p_i , tal que se denota por a_i y b_i a los dos puntos en los que el borde de la bola interseca con los segmentos que unen en p_i . Por lo tanto, se toma el homeomorfismo $\alpha'_i : (0, 1) \rightarrow K \cap U'$, $\alpha'_i(t) = \begin{cases} (1-2t)a_i + 2tp_i & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-t)p_i + (2t-1)b_i & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$, donde $(0, 1)$ es homeomorfo a \mathbb{R} . Finalmente, como la topología inducida es hereditaria, se tiene que es K es Hausdorff y segundo contable, entonces K es 1-variedad.

Ejemplo 2.4. La esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una n -variedad cerrada y conexa, además por la topología inducida es un espacio Hausdorff y segundo contable. Para verificar que es localmente euclídeo, se necesitan tomar dos homeomorfismos para poder recubrir la esfera n -dimensional. En la que los abiertos son $S^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}$ y $S^n - \{(0, 0, \dots, -1)\}$ y los homeomorfismos con \mathbb{R}^n son las proyecciones estereográficas del polo norte $(0, 0, \dots, 1)$ y el polo sur $(0, 0, \dots, -1)$, $h : S^n - (0, 0, \dots, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$ y $h' : S^n - (0, 0, \dots, 0, -1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $h'(x) = -h(x)$.

Ejemplo 2.5. El espacio euclideo \mathbb{R}^n es una n -variedad. Como todo abierto de \mathbb{R}^n es una n -variedad, en particular, la n -bola denotada por B^n , es una n -variedad.

Ejemplo 2.6. El disco $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ es una 2-variedad, con borde $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} = S^1$. Claramente, D es un espacio Hausdorff y segundo contable. Para verificar que es localmente euclideo se diferencian dos casos: si $\|x\| < 1$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap \partial D = \emptyset$ y así $B(x, \epsilon)$ es homeomorfa a una bola abierta a través de la identidad. Pero si $x \in \partial D$, se tiene el homeomorfismo $\varphi : (0, \alpha) \times [0, \frac{1}{2}) \rightarrow U \subseteq D$, $\varphi(t, r) = ((1-r) \sin t, (1-r) \cos t)$.

Ejemplo 2.7. Si S_1 es una n -variedad y S_2 es una m -variedad, el producto $S_1 \times S_2$, con la topología producto es una variedad de dimensión $n + m$. En particular, usando el Ejemplo 2.4, el toro denotado por T^2 es una 2-variedad.

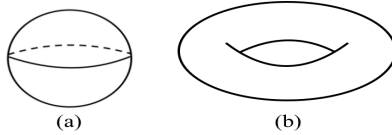


Figura 2.1. (a) Esfera S^2 y (b) toro T^2 .

Definición 2.8. La **suma conexa** de dos superficies sin borde S_1 y S_2 conexas, denotada por $S_1 \# S_2$, se define de la siguiente manera. Se eliminan dos discos cerrados $D_1 \subset S_1$ y $D_2 \subset S_2$ y tomando el homeomorfismo $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ se define

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$$

donde $S'_i = S_i \setminus D_i$ para $i = 1, 2$ y $x \sim f(x)$ para todo $x \in \partial D_1$.

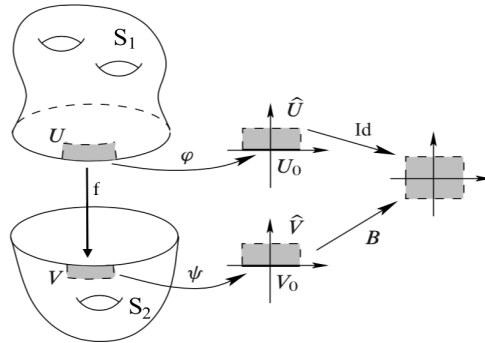
Teorema 2.9. La suma conexa de dos superficies S_1 y S_2 conexas es una superficie conexa.

Demostración. Para probar que $S_1 \# S_2$ es una 2 variedad, se necesita verificar que es localmente euclideo. Sea $q : S_1 \sqcup S_2 \rightarrow S_1 \# S_2$ (con la unión disjunta) la aplicación cociente y tomando $S = q(\partial S_1 \sqcup \partial S_2)$ se tiene el homeomorfismo $q : \text{Int} S'_1 \sqcup \text{Int} S'_2 \rightarrow S_1 \# S_2 \setminus S$, de manera que $S_1 \# S_2 \setminus S$ es localmente euclideo de dimensión 2. Por tanto, solo quedaría considerar los puntos de S . Sean $x \in S_1$ e $y \in \partial S_2$ con $f(x) = y$. Se toman las cartas (U, φ) para S_1 y (V, ψ) para S_2 tal que $x \in U$ y $y \in V$, se tiene que $\varphi : U \rightarrow \hat{U} \subseteq \mathbb{R}_+^2$ y $\psi : V \rightarrow \hat{V} \subseteq \mathbb{R}_+^2$, de tal forma que $f(U \cap \partial S_1) = V \cap \partial S_2$ y que $\hat{U} = U_0 \times [0, \epsilon)$ y $\hat{V} = V_0 \times [0, \epsilon)$ para $\epsilon > 0$ y subconjuntos abiertos $U_0, V_0 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, teniendo

así $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x))$ y $\psi(y) = (\psi_0(y), \psi_1(y))$, tal que si x, y son puntos del borde entonces $\varphi_1(x) = \psi_1(y) = 0$. La idea es unir \hat{U} y \hat{V} identificando los puntos de borde correspondientes de U_0 con V_0 . Sin embargo puede que φ y ψ no tomen los puntos de límite correspondientes para el mismo punto de imagen. Por la demostración del Teorema 2.2 $\varphi_0|_{U \cap \partial S_1} : U \cap \partial S_1 \rightarrow U_0$ y $\psi_0|_{V \cap \partial S_2} : V \cap \partial S_2 \rightarrow V_0$ son homeomorfismos. Por tanto, $\beta : U_0 \rightarrow V_0$ tal que $\beta = (\psi_0|_{V \cap \partial S_2}) \circ f \circ (\varphi_0|_{U \cap \partial S_1})^{-1}$ es homeomorfismo. Ahora sea $B : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = (\beta(x), -y)$, que geoméricamente reorganiza los puntos del borde de acuerdo con la aplicación β , y luego “gira” cada segmento vertical encima de un punto del borde a un segmento de debajo del punto de imagen. Por lo tanto, esta construcción garantiza que para $x \in U \cap \partial S_1$

$$(B \circ \varphi)(x) = (\beta(\varphi_0(x)), -\varphi_1(x)) = ((\psi_0 \circ f)(x), 0) = (\psi \circ f)(x). \tag{2.1}$$

Ahora se va a definir $\tilde{\phi} : U \sqcup V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tilde{\phi}(y) = \begin{cases} \psi(x), & \text{si } x \in V \\ (B \circ \varphi)(x), & \text{si } x \in U \end{cases}$. Tomando los puntos de borde $q(U \sqcup V)$ y por (2.1) que prueba que $\tilde{\phi}$ pasa por la aplicación cociente q , se puede definir la aplicación inyectiva y continua $\phi : q(U \sqcup V) \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que a través de los homomorfismos φ, ψ y B en sus imágenes, el inverso de ϕ es $\phi^{-1}(x) = \begin{cases} (q \circ \psi^{-1})(x), & \text{si } x^2 \geq 0 \\ (q \circ \varphi^{-1} \circ B^{-1})(x), & \text{si } x^2 \leq 0 \end{cases}$. Por lo tanto, ϕ y ϕ^{-1} coinciden donde se superponen, es decir cuando se pega U_0 y V_0 , por ello es una aplicación continua, teniendo así que ϕ es un homeomorfismo, entonces $S_1 \# S_2$ es localmente euclídeo. Por la topología cociente se tiene que es segundo contable. El hecho de ser un espacio Hausdorff se prueba de manera análoga a probar que es localmente euclídeo, ya que donde único puede haber problemas es en los puntos del borde. Para más detalle acudir a [6].



□

Nota. $S_1 \# S_2$ no depende de los discos D_1 y D_2 , ni del homeomorfismo tomado, por ello en la construcción de la suma conexa se tiene total libertad en cómo hacer los agujeros y cómo pegarlos por los bordes de las superficies, resultando en superficies homeomorfas. Además, la suma conexa es conmutativa, asociativa y tiene como elemento neutro S^2 , es decir, $S \# S^2$ es homeomorfa a S .

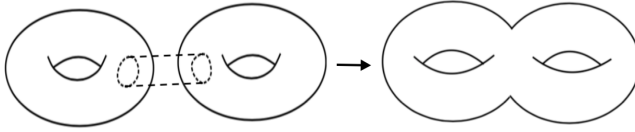


Figura 2.2. La suma conexa de dos toros es un toro de 2 agujeros.

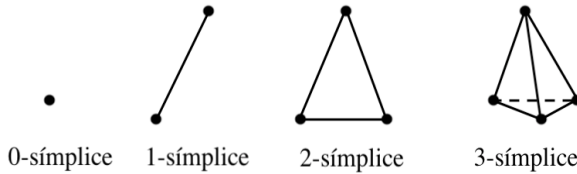
2.2. Complejos simpliciales

En esta sección se va a definir y estudiar un tipo particular de espacios topológicos denominados complejos simpliciales. Los conceptos y resultados que se estudiarán se necesitan para introducir la triangulación y la orientación de superficies, además de la característica de Euler.

Definición 2.10. *Dados $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ puntos afínmente independientes, se llama n -símplice generado por dichos puntos al conjunto convexo*

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \text{ para todo } i\}.$$

Donde se denota a $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ para indicar que σ es el símplice generado por los puntos $a_i, 0 \leq i \leq n$, denominados **vértices**. Un n -símplice tiene dimensión n , denotado por $\dim(\sigma) = n$.



Definición 2.11. *Sean σ y τ dos símplices en \mathbb{R}^n , todo símplice $\tau \subset \sigma$ se llama **cara** de σ denotado por $\tau \leq \sigma$ si los vértices de τ son vértices a su vez de σ . Si $\tau < \sigma$, es decir, $\tau \leq \sigma$ y $\tau \neq \sigma$, entonces se dice que τ es **cara propia** de σ .*

Definición 2.12. *Un **complejo simplicial** en \mathbb{R}^n consiste en un conjunto finito K de símplices en \mathbb{R}^n verificando*

- (1) Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, o bien $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2 .
- (2) Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.

La dimensión de K es el número

$$\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) : \sigma \in K\}.$$

Definición 2.13. Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^n . La **realización geométrica** de K se define como el espacio topológico formado por la unión de todos los símlices de K y se denota por $|K|$.

Nota. En el contexto de este trabajo, todos los objetos a estudiar son compactos, por lo tanto la compacidad implica que la definición de complejo simplicial tenga un número finito de símlices.

Definición 2.14. Sea K y L complejos simpliciales y la aplicación $\varphi : K \rightarrow L$ definida entre los vértices de K y L . Se dice que φ es **aplicación simplicial** si dado un n -símlice $\sigma \in K$, los vértices $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_n)$ están en un mismo símlice de L .

Definición 2.15. Un **isomorfismo simplicial** entre dos complejos simpliciales K y L es una biyección φ entre los vértices tal que (a_0, \dots, a_n) es un símlice de K si y solo si $(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_n))$ es un símlice de L .

Definición 2.16. Un espacio topológico X se dice que es **triangulable** si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$. El par (K, h) se llama **triangulación** de X .

Si X es triangulable se define la dimensión de X como la dimensión de un complejo simplicial K tal que (K, h) es una triangulación de X , además la dimensión de X no depende de la triangulación escogida. La triangulación es una herramienta conveniente para estudiar algunas propiedades de superficies.

Teorema 2.17. (Radó) Toda superficie es **triangulable** por un complejo simplicial K , donde $\dim(K) = 2$.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [2, Página 107].

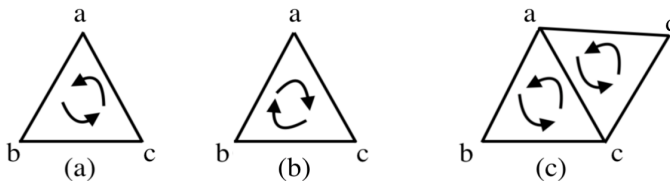


Figura 2.3.

Dada una triangulación T de una superficie S , existe una partición $S = \bigcup_i T_i$, donde cada T_i es un 2-símlice (triángulo), tal que dos triángulos distintos T_i y T_j deben ser disjuntos, tener un vértice común o tener una arista común. Además, cada triángulo admite dos posibles orientaciones como se puede ver en la Figura 2.3 ((a) y (b)). Por lo tanto, si T_i y T_j son dos triángulos

adyacentes (con una arista común) inducen orientaciones opuestas en la arista común (tienen una orientación compatible cuando ambos “giran en la misma dirección”), como se observa en la Figura 2.3 (c).

Definición 2.18. *Sea S una 2-variedad conexa compacta, se dice que S es orientable cuando tiene una triangulación T en la que todos los triángulos adyacentes están orientados de forma compatible.*

Ejemplo 2.19. La esfera S^2 y el toro T^2 son orientables.

Nota. Esta es una posible definición de orientabilidad. En el contexto diferenciable, una definición en términos de campos normales a la superficie se puede consultar, por ejemplo, en [9].

Una consecuencia del Teorema de Radó es la clasificación de superficies cerradas.

Teorema 2.20. *[Teorema de clasificación de superficies cerradas y orientables] Toda superficie cerrada (compacta, conexa y sin borde) y orientable es homeomorfa a*

- (1) La esfera, o,
- (2) la suma conexa de g toros, donde $g \geq 1$.

La demostración de este Teorema se puede encontrar en [6, Proposición 6.20]

Definición 2.21. *La superficie S obtenido por la suma conexa de g toros se le conoce como superficie de género g .*

Nota. Como la esfera puede verse como la suma conexa de 0 toros, se considera que tiene género 0.

Definición 2.22. *La característica de Euler de un complejo simplicial K , en el que c_i son la cantidad de i -símplices que lo conforman, está dada por:*

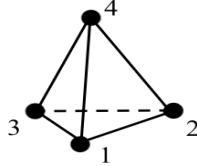
$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i.$$

Por el Teorema de triangulación, cualquier superficie orientable puede ser triangulada, esto es, que puede ser representada como una colección finita de discos triangulares a lo largo de sus aristas. Luego, si S una superficie triangulada, su característica de Euler es

$$\chi(S) = p - a + f$$

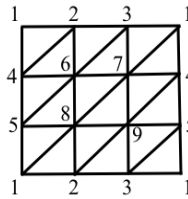
donde p es el número de vértices (0-símplice), a el número de aristas (1-símplice) y f el número de triángulos o caras (2-símplice) en la triangulación.

Ejemplo 2.23. En el caso particular de cualquier poliedro homeomorfo a la esfera S^2 , se tiene que la característica de Euler es $\chi(S^2) = 2$, también conocida como la fórmula de Euler de un poliedro convexo.



$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

Ejemplo 2.24. Para el caso del toro $T^2 = S^1 \times S^1$ visto anteriormente como el espacio producto, también puede ser obtenido como espacio cociente. Sea el cuadrado unidad $[0, 1]^2$ en el plano con la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$, si $0 \leq t \leq 1$, se tiene que $[0, 1]^2 / \sim = T^2$. A partir de la triangulación siguiente, se tiene que la característica de Euler es

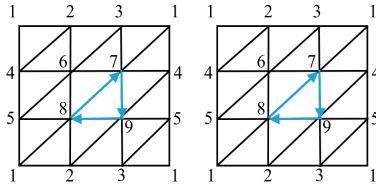


$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0$$

Teorema 2.25. *Sea la suma conexa de S_1 y S_2 superficies cerradas y orientables, $S = S_1 \# S_2$, entonces $\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.*

Demostración. Considerando las superficies trianguladas cerradas y orientables S_1 y S_2 , se toman dos triángulos de cada triangulación, los cuales son homeomorfos a discos cerrados luego se pueden usar como los discos que se quitan en la definición de suma conexa.

Suponiendo que se tiene S_1 y S_2 dos superficies trianguladas cerradas y orientables, y su suma conexa denotada por $S = S_1 \# S_2$. Se toman dos triángulos de cada superficie, los cuales son homeomorfos a discos cerrados, luego por la definición de suma conexa se elimina un triángulo de cada una de ellas y se identifican las arista y los vértices de los bordes de los triángulos que se eliminan. Por lo tanto, se eliminan 3 vértices, 3 aristas y 2 caras como se puede observar intuitivamente en la siguiente figura.



Entonces, se obtiene una triangulación de $S = S_1 \# S_2$ tal que $p(S)$ es el número de vértices, $a(S)$ es el número de aristas y $f(S)$ es el número de caras de S .

$$\begin{aligned} \chi(S) &= p(S) - a(S) + f(S) = p(S_1 \# S_2) - a(S_1 \# S_2) + f(S_1 \# S_2) = \\ &= (p(S_1) + p(S_2) - 3) - (a(S_1) + a(S_2) - 3) + (f(S_1) + f(S_2) - 2) = \\ &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \end{aligned} \quad \square$$

Corolario 2.26. *Sea $S = S_1 \# S_2 \# \dots \# S_n$ entonces $\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2) \dots + \chi(S_n) - 2(n - 1)$.*

Corolario 2.27. *Sea S una superficie cerrada y orientable se cumple que*

$$2g(S) = 2 - \chi(S)$$

donde $g(S)$ es el género de S .

Demostración. Por el Teorema de Clasificación se tienen dos casos:

- (1) S es la esfera y por el Ejemplo 2.23 la característica de Euler es $\chi(S) = 2 = 2 - 2g(S^2)$.
- (2) S es la suma conexas de g toros. Por el Ejemplo 2.24 y el Corolario 2.26, $\chi(S) = \chi(T^2) + \dots + \chi(T^2) - 2(g(S) - 1) = -2g(S) + 2$.

□

En el caso de superficies con borde, la relación es la siguiente.

Proposición 2.28. *Si S es una superficie con borde compacta, conexa y orientable se cumple que*

$$2g(S) = 2 - \chi(S) - |\partial S|,$$

donde $|\partial S|$ es el número de componentes borde de S .

Demostración. Por el Teorema 2.2 se tiene que el borde de S , ∂S , es una 1-variedad compacta, y por tanto es la unión finita disjunta de S^1 , una por cada agujero ([6, Capítulo 6]). Considerando que $|\partial S|$ es el número de agujeros de S , sea S' la superficie obtenida de teparle a S las $|\partial S|$ circunferencias que componen su borde adjuntando $|\partial S|$ discos. Resultando S' en una superficie

orientable sin borde, la cual se puede clasificar según su género. Por el resultado de Radó, las superficies S y S' están trianguladas, y se puede suponer que cada agujero tapado es un triángulo de S' , por tanto $\chi(S) = \chi(S') - |\partial S|$. Y por el Corolario 2.26 se tiene que si S (o S') es orientable de género g , entonces se cumple $\chi(S) = 2 - 2g(S) - |\partial S|$. \square

2.3. Grupo de homología para un complejo simplicial

En esta sección se van a describir unos objetos algebraicos asociados a los complejos simpliciales. Para ello se necesita orientar los n -símplices.

Definición 2.29. *Sea σ un símplice generado por $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, se define una orientación para el conjunto $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ como una permutación de este. Además se dice que dos orientaciones son equivalentes si estos difieren de una permutación par.*

Si $\dim \sigma > 0$, los ordenamientos se dividen en dos clases de equivalencia y cada una de ellas se llamará una orientación de σ y si dos órdenes pertenecen a clases de equivalencia distintas simplemente se dirá que estos son opuestos. Si σ es un 0-símplice entonces solo hay una clase de equivalencia de sus órdenes y una única orientación para σ .

Definición 2.30. *Un símplice orientado es un símplice σ en el que se ha elegido una orientación.*

Notación. Se denota por $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ al símplice generado por $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ junto con la clase de equivalencia a la que pertenece el orden particular (a_0, a_1, \dots, a_n) .

Dado que $(a_0, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$ y $(a_0, \dots, a_{j+1}, a_j, \dots, a_n)$ son representantes de distintas clases de equivalencia, es decir, son opuestos, se puede decir que $-[a_0, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_{j+1}, a_j, \dots, a_n]$. Finalmente, si no se especifica el conjunto de vértices que genera a σ , se puede denotar a σ junto con una clase de equivalencia por $[\sigma]$ y al opuesto por $[-\sigma]$.

Definición 2.31. *Dado un complejo simplicial K , se denota por K_p al conjunto de los p -símplices de K orientados. Entonces una p -cadena sobre K es una función $c : K_p \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisface:*

- (1) $c([\sigma]) = -c([-\sigma])$ para $[\sigma] \in K_p$
- (2) $c([\sigma]) = 0$ salvo en un número finito de p -símplices orientados $[\sigma]$.

Definición 2.32. *Dado $[\sigma] \in K_p$, se define la p -cadena elemental de $[\sigma]$ y se denota por $[\sigma]_c$ como la función que satisface:*

- (1) $[\sigma]_c([\sigma]) = 1$
- (2) $[\sigma]_c([-σ]) = -1$
- (3) $[\sigma]_c([\varphi]) = 0$ para todo p -símplice orientado $[\varphi]$ tal que $[\varphi] \neq [\sigma], [-\sigma]$.

Definición 2.33. $C_p(K)$ es el grupo de las p -cadenas en K con la suma usual de funciones.

Lema 2.34. $C_p(K)$ es un grupo abeliano libre, ya que cualquier p -cadena se puede escribir como $\sum_i n_i [\sigma_i]_c$, donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y $[\sigma_i]_c$ es una p -cadena elemental.

Definición 2.35. Se define el **operador borde** como el homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$, tal que si $\sigma = [a_0, \dots, a_p]$ es un símplice orientado con $p > 0$, se define como $\partial_p(\sigma) = \partial_p([a_0, \dots, a_p]_c) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p]_c$ donde \hat{a}_i significa el vértice a_i que se elimina. Para $p = 0$ se tiene que ∂_p es el homomorfismo trivial.

Definición 2.36. Sea c una p -cadena, se llamará a $\partial_p(c)$ borde de c .

Lema 2.37. Sea $c \in C_p(K)$ entonces el operador borde es nilpotente, es decir, $\partial_{p-1}(\partial_p(c)) = 0$.

Ya se está en disposición de dar la definición del primer grupo de homología para un complejo simplicial.

Definición 2.38. [**P -ésimo grupo de homología**] Dado el operador $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ se denomina al núcleo de este como el grupo de los p -ciclos y se denota por $Z_p(K)$. La imagen del operador $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$ se denomina grupo de p -frontera y se denota por $B_p(K)$. Entonces se define el **p -ésimo grupo de homología** de K , denotado por $H_p(K)$, como sigue

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

Nota. Si $c \in C_p(K)$ tal que $c \in B_p(K)$ entonces $c = \partial_{p+1}(d)$ para alguna $(p + 1)$ -cadena d , por el lema anterior, $\partial_p(c) = \partial_p(\partial_{p+1}(d)) = 0$, por lo tanto $B_p(K) \subseteq Z_p(K)$ y además los grupos $C_p(K)$ y $C_{p+1}(K)$ son abelianos, por lo que tiene sentido la definición de $H_p(K)$.

Si f es una aplicación simplicial de $|K|$ en $|L|$, entonces f lleva cada p -símplice i de K en un símplice i de L de igual o menor dimensión. Así se puede definir un homomorfismo de p -cadenas que lleva la suma formal $\sum m_i \sigma_i$ de p -símplices orientados de K en la suma formal $\sum m_i \tau_i$ de sus imágenes (se borrarán de esta última suma aquellos símplices i cuya dimensión sea menor de p). Esta aplicación induce un homomorfismo entre grupos de homología como se verá a continuación. A partir de aquí se usará la expresión “ $f : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial”.

Definición 2.39. Sea $f : |K| \rightarrow |L|$ una aplicación simplicial. Si (v_0, \dots, v_p) es un símplice de K , entonces $(f(v_0), \dots, f(v_p))$ es un símplice de L . Así se puede definir el homomorfismo $f_{\#} : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ sobre símplices orientados de la siguiente forma:

$$f_{\#}([v_0, \dots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), \dots, f(v_p)] & \text{si } f(v_0) \neq \dots \neq f(v_p) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Claramente esta aplicación está bien definida. La familia de homomorfismos $f_{\#}$, uno por cada dimensión, se denomina la aplicación de cadena inducida por la aplicación simplicial f . Rigurosamente, se debería usar un subíndice adicional para indicar la dimensión y así poder distinguir cada uno de estos homomorfismos, denotando la aplicación de dimensión p por $(f_{\#})_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$. Normalmente se omitirá este subíndice cuando el contexto no de lugar a dudas.

Lema 2.40. El homomorfismo $f_{\#}$ conmuta con el operador borde ∂ , es decir, $\partial \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial$.

Así $f_{\#}$ induce un homomorfismo entre grupos de homología,

$$\begin{aligned} f_* : H_p(K) &\rightarrow H_p(L) \\ [z] &\rightarrow f_*([z]) = [f_{\#}(z)]. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $f : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial entonces induce una aplicación continua $|f| : |K| \rightarrow |L|$. Recíprocamente, si $\varphi : |K| \rightarrow |L|$ es una aplicación continua, tomando subdivisiones baricéntricas se puede construir $\varphi_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$, con lo que se tiene el siguiente teorema. Para más información acudir a [7].

Teorema 2.41. Sea K y L complejos simpliciales, si $h : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo, entonces $h_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ es un isomorfismo.

Usando este resultado se tiene que si K_1 y K_2 son triangulaciones de S , esto es, existen homeomorfismos $h_1 : |K_1| \rightarrow S$ y $h_2 : |K_2| \rightarrow S$, entonces $(h_2)^{-1} \circ h_1 : |K_1| \rightarrow |K_2|$, es un homeomorfismo, con lo que $H_p(K_1)$ es homomorfo a $H_p(K_2)$

Luego, se puede dar la siguiente definición

Definición 2.42. Sea X un espacio triangulable, se puede definir $H_p(X) := H_p(K)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, siendo K una triangulación con $h : |K| \rightarrow X$.

Por lo tanto, del razonamiento anterior se tiene que la característica de Euler es independiente de la triangulación, debido a la siguiente caracterización.

Proposición 2.43. Si K es un complejo simplicial se cumple que

$$\chi(K) = \sum_{k \leq 0} (-1)^k \text{rg}(H_k(K)/T_k(K))$$

donde rg denota la dimensión de la parte libre y $T_k(K)$ es la torsión.

Superficies de Seifert. Polinomio de Alexander

3.1. Construcción de la superficie de Seifert

En esta sección se va a definir una clase de superficies especiales que tienen relación con nudos. Las referencias seguidas para el desarrollo de este capítulo han sido [8] y [10].

Definición 3.1. *Dado un nudo orientado K , una superficie orientable, conexa y compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie de Seifert** para K si $\partial S = K$.*

Un nudo puede tener diferentes superficies de Seifert asociadas. En 1934 H. Seifert desarrolló un algoritmo explícito para crear una *superficie asociada a un nudo* a partir de su diagrama, a la superficie así obtenida se le denomina “superficie canónica” del nudo K .

Teorema 3.2. [*Algoritmo de Seifert*] *Todo nudo K admite una superficie de Seifert.*

Demostración. Dado un nudo orientado K , a partir de su diagrama se construirá una colección finita de superficies compactas y orientables cuya “unión” proporcionará la superficie de Seifert.

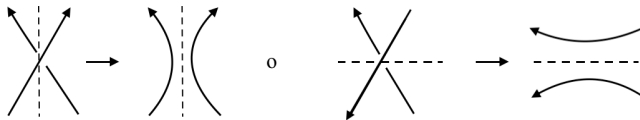


Figura 3.1. Modificación de los cruces de un diagrama.

Primer Paso. Suponiendo que hay n cruces, denotados por c_1, c_2, \dots, c_n , se va a transformar el diagrama en un conjunto de curvas cerradas denominadas

círculos de Seifert y denotadas por S_i . Más precisamente, en cada entorno del cruce, este se elimina y se conectan los extremos de forma compatible para preservar la orientación, como se puede observar en la Figura 3.1. Notar que los círculos de Seifert pueden estar anidados.

Un ejemplo de este primer paso se puede ver en la siguiente Figura 3.2.

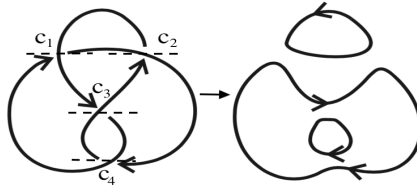


Figura 3.2. Círculos de Seifert del nudo ocho.

Segundo Paso. A cada círculo de Seifert se le asigna un disco en el plano $z = h(S_i)$ con $h(S_i) =$ número de círculos de Seifert que contienen a S_i . En el caso de que S_i esté contenido en $S_j, h(S_i) = h(S_j) + 1$.

El Teorema de la curva de Jordan garantiza que toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas, por lo que este proceso se repetirá tantas veces como discos tengan en su componente conexa del interior otro disco. De esta forma, vistos desde arriba el borde de cada disco será visible, es decir, se ha asignado mayor altura cuanto más anidado está el círculo de Seifert. Estos discos forman una colección de superficies compactas y orientadas, ya que heredan la orientación del diagrama del nudo K .

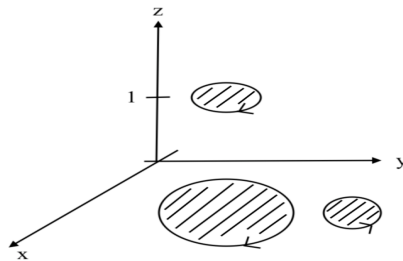


Figura 3.3. Círculos anidados en el plano z .

Tercer Paso. Por cada cruce c_i se toma una banda rectangular denotada por R_i . Dicha banda se conecta a los discos de S_j y S_k de tal manera que preserve la orientación de cada disco. Para ello se tuerce el rectángulo, como se puede ver en la Figura 3.4.

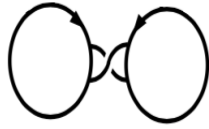


Figura 3.4. Discos conectados por una banda.

Para el pegado de discos y bandas, se va a hacer uso de una variación de la definición de la suma conexa, debido a que las superficies involucradas en este algoritmo tienen borde. Para ello, en vez de elegir bolas abiertas, se va a elegir un arco M en el borde del disco S y una arista N de la banda R , es decir, existen $f : (0, 1) \rightarrow M$ y $g : (0, 1) \rightarrow N$ y un homeomorfismo $h : Im(f) \rightarrow Im(g)$. De tal manera que se identifican los puntos del arco con los de la arista, pegándolos de una forma compatible con la orientación, es decir, el arco y la arista tienen la misma orientación, tal que se crea una superficie orientable $M \# R$. Esta suma conexa está bien definida, la prueba es análoga a la demostración 2.1 de suma conexa con la única diferencia que en este caso los puntos problemáticos son únicamente los puntos del arco y de la arista.

Este procedimiento da lugar a una superficie cuyo borde es K . De hecho, al eliminar un cruce c_i quedan dos segmentos enfrentados, en los que se pegarán los lados opuestos del rectángulo torcido R_i , de manera que los otros dos lados de R_i pasan a formar parte de la frontera de S . El giro que se le proporciona al rectángulo será la necesaria para que al cruzarse estos dos últimos lados, uno por encima del otro se corresponda con el diagrama de K , tal y como se puede observar en la Figura 3.5.

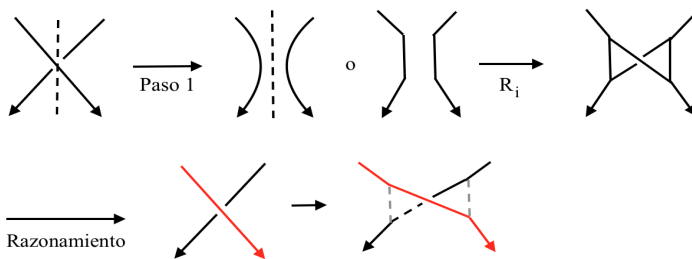
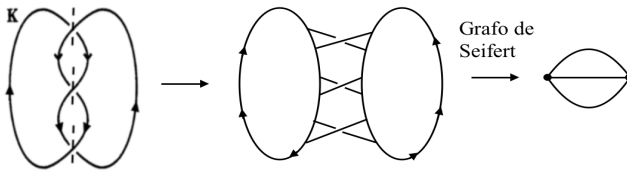


Figura 3.5.

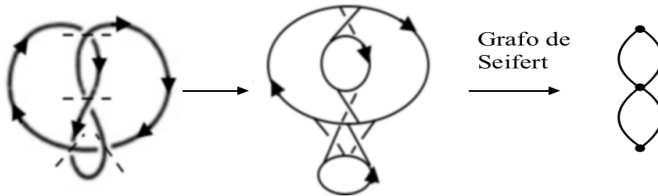
A partir de un número finitos de pasos, se obtiene la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ que verifica ser orientable, compacta y tal que $\partial S = K$. □

A toda superficie de Seifert obtenida a partir del algoritmo de Seifert se le puede asignar un grafo, donde cada vértice corresponde a cada disco y 2 vértices están unidos por una arista si existe una banda que una a los respectivos discos. Este grafo se denomina **grafo de Seifert** de K asociada a la superficie S y se denota por $\Gamma(S)$. Dicho grafo es equivalente homotópicamente a la superficie de Seifert S , es decir, existe una forma de deformar S de manera continua hasta que se convierta en $\Gamma(S)$. Cada círculo de Seifert es contráctil a un punto y una banda al estar pegada por sus extremos es homótopa a una arista en el grafo.

Ejemplo 3.3. La superficie de Seifert y el grafo de Seifert del nudo trébol, obtenido a partir del algoritmo anteriormente descrito.



Ejemplo 3.4. La superficie de Seifert y el grafo de Seifert del nudo ocho, obtenido a partir del algoritmo anteriormente descrito.



La ventaja de las superficies de Seifert resulta en el cálculo de su género, ya que el género de una superficie arbitraria puede ser muy difícil de calcular.

Teorema 3.5. *La característica de Euler de una superficie de Seifert S construida a partir del algoritmo de Seifert es*

$$\chi(S) = c(S) - b(S),$$

tal que $c(S)$ es el número de círculos de Seifert y $b(S)$ el número de bandas.

Demostración. Sea K un nudo orientado por el algoritmo de Seifert admite una superficie de Seifert S formada por discos y bandas, por la Proposición 2.17 estos se pueden dividir en triángulos como se muestra en la Figura 3.6. Luego si un disco está en contacto con n rectángulos, este se divide en $2n$ triángulos con un vértice en el interior y cada banda es dividida en 2 triángulos. Sea J el número

total de uniones donde una banda se pega a un disco, como por cada cruce una banda se une a dos disco entonces $J = 2b(S)$. Además, por cada banda que se une a un disco hay 2 triángulos, por lo tanto hay $2J$ triángulos en los discos y 2 en cada banda. Por lo que, el número de triángulos es $f = 2J + 2b(S) = 3J$. Para conocer el número de vértices, basta con contar los que encuentran en cada disco, ya que en estos se incluyen los de las bandas. Dado que en cada disco hay un vértice interior, el número de vértices es $p = 2J + c(S)$. Finalmente, como cada disco tiene el doble de aristas que de triángulos y cada banda tiene 3 aristas, entonces el número de aristas es $a = 4J + 3b(S) = 5J + b(S)$. Por lo tanto, la característica de Euler es $\chi(S) = p - a + f = c(S) - b(S)$.

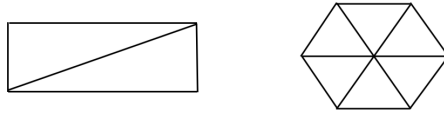


Figura 3.6. Triangulación de una banda y un disco.

□

Como consecuencia del Teorema 3.5 y la Proposición 2.17.

Corolario 3.6. *El género de una superficie de Seifert S , construida a partir del algoritmo de Seifert, satisface que*

$$2g(S) = 1 - \chi(S) = 1 - c(S) + b(S).$$

El algoritmo de Seifert y el Teorema de clasificación de superficies del capítulo anterior, aseguran que el género de un nudo está bien definido.

Definición 3.7. *El género de un nudo K , denotado por $g(K)$, es el mínimo género sobre todas las superficies de Seifert para K . Una superficie de Seifert S para el nudo K es de género mínimo si $g(S) = g(K)$.*

3.2. Construcción de la matriz de Seifert

De aquí en adelante se usarán las superficies de Seifert para calcular una serie de invariantes topológicos de los nudos. Para ello es necesario considerar la matriz de Seifert, cuya construcción involucra a las curvas que forman las fronteras de las regiones finitas definidas por el grafo de Seifert $\Gamma(S)$. Las cuales forman una base del primer grupo de homología $H_1(S)$ de la superficie S , tal y como se desprende de la equivalencia homotopica entre la superficie de Seifert y su correspondiente grafo.

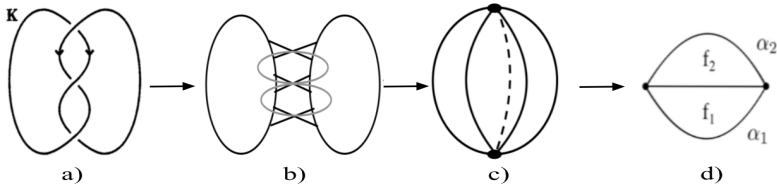


Figura 3.7.

Todo nudo admite una superficie de Seifert S con $c(S)$ discos y $b(S)$ bandas, y un grafo de Seifert $\Gamma(S)$. Dicho grafo es plano debido a que la construcción del algoritmo no permite que haya dos aristas intersecadas. El número de aristas se corresponde con el número de bandas y el número de vértices con el número de discos. Notar que, a partir de una proyección estereográfica se puede llevar el grafo en el plano a un complejo simplicial en la esfera como se puede observar en la Figura 3.7. Recordando que la característica de la esfera es 2, se tiene;

$$\chi(S) = 2 = p - a + f \implies f - 1 = 1 + a - p$$

Al observar $\Gamma(S)$ en el plano se tiene hay $f - 1$ caras acotadas y una cara exterior, y por la fórmula del género de una superficie de Seifert se obtiene

$$2g(S) = 1 + a - p = f - 1,$$

es decir, la cantidad de caras siempre es par.

Para calcular la matriz de Seifert, se necesitan varias definiciones previas que relacionan dos curvas en un mismo espacio.

Definición 3.8. Un *enlace* $L \subset \mathbb{R}^3$ es una colección finita de nudos que no se intersecan, donde cada nudo del enlace es conocido como la componente conexa del enlace.

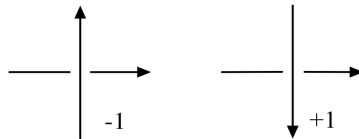


Figura 3.8. Los dos tipos de cruce en un enlace.

Dado un enlace orientado L de dos componentes, se va a buscar una forma de medir qué tan enlazadas están sus componentes. Para ello, se asigna un signo

a cada cruce entre ambas componentes, como se indica en la Figura 3.8. Se escoge un punto de K del diagrama y se recorre en la orientación del nudo de tal manera que a cada cruce se le asigna $+1$ o -1 .

Definición 3.9. Sea $L = \{L_1, L_2\}$ un enlace con dos componentes conexas y $L_1 \cap L_2$ el conjunto de puntos de cruce del diagrama en el que las proyecciones de L_1 y L_2 se intersecan y tal que no contenga las autointersecciones de las componentes del nudo. Entonces el **número de enlace** de L_1 y L_2 está definido por

$$lk(L) = lk(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \sum_{q \in L_1 \cap L_2} sign(q)$$

donde $sign(q) = +1$ o $sign(q) = -1$.

Proposición 3.10. El número de enlace es un invariante de enlaces orientados.

Demostración. Sean L y L' dos enlaces tal que $lk(L) \neq lk(L')$, entonces L y L' no son equivalentes. Para ello, bastaría con ver que el número $lk(L)$ es invariante a través de los movimientos de Reidemeister.

- (a) Para el movimiento de Tipo I, el número de enlace no cambia ya que el cruce que se agrega o se quita es de una misma componente.
- (b) Para el movimiento de Tipo II, se agregan un enlace $+1$ y un enlace -1 . Por lo tanto, el número de enlace no cambia. Y en el caso del inverso ocurre lo mismo, debido a que se quita un enlace $+1$ y un enlace -1 , luego tampoco varía.
- (c) Para el movimiento de Tipo III, los tres enlaces involucrados en el movimiento no cambian, debido a que los dos enlaces que se modifican siguen teniendo el mismo valor. □

Una vez entendidas estas definiciones, la forma de construir la matriz de Seifert se basa en el cálculo del número de enlace entre parejas de las curvas α_i y α_j , pero estas curvas pueden tener aristas en común, por lo que un remedio sería “ensanchar” la superficie de Seifert S del nudo K .

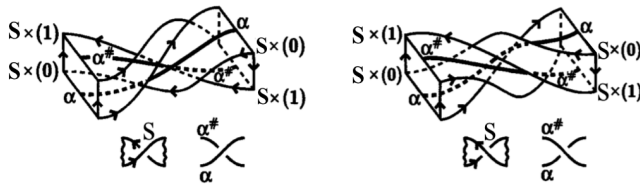


Figura 3.9.

Considerando el homeomorfismo $\beta : S \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\beta(S \times \{0\}) = S$ y $\beta(S \times \{1\})$ cae en el lado positivo de S , se tiene que para cualquier $X \subset S$, se llamará $X^+ = \beta(S \times \{1\})$, cuando se “empuja” hacia el lado positivo y $X^- = \beta(S \times \{-1\})$ hacia el negativo, como se puede observar en la Figura 3.9. Por lo tanto, teniendo que cada curva α_i es la frontera de cada cara f_i , de tal manera que tenga la dirección de la superficie de Seifert. Luego, al tener una curva α_i en la superficie de Seifert S , se pueden tomar dos curvas paralelas, una en la superficie $S \times \{1\}$ y otra en $S \times \{-1\}$. Para un notación clara, se llamará α_i a la curva que pertenece a la parte negativa y α_i^\sharp a la curva que pertenece a la parte positiva. Y dado que β es inyectiva y no se interseca la parte positiva con la negativa, ninguna curva α_i se interseca con ninguna curva α_j^\sharp para cualquier i y j .

Considerando el primer grupo de homología de S , $H_1(S)$, se define la función

$$\begin{aligned} \theta : H_1(S) \times H_1(S) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ ([a], [b]) &\longrightarrow lk(a, b^\sharp) \end{aligned}$$

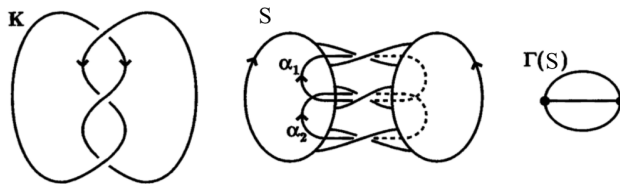
donde $lk(a, b^\sharp)$ es el número de enlace entre las curvas cerradas a y b^\sharp de S . Tomando una base $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ de $H_1(S)$, de tal manera que la **matriz de Seifert** se puede representar como

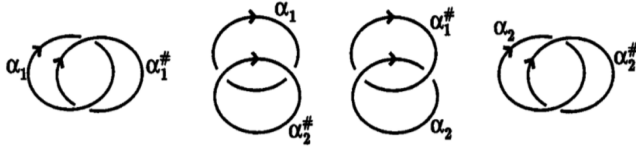
$$M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^\sharp)]_{i,j=1,2,\dots,2g}.$$

obteniendo así una matriz de dimensión $2g \times 2g$, donde g es el género mínimo de la superficie S . Además, las entradas de la matriz son los valores de la función θ en los generadores, donde $\{\alpha_i, \alpha_j^\sharp\}$ y $\{\alpha_j, \alpha_i^\sharp\}$ son enlaces, y las curvas α_i y α_i^\sharp tienen una orientación, la cual se hereda de la superficie de Seifert.

Ejemplo 3.11. Sea un nudo K con $g(S) = 0$, es decir, el nudo trivial, donde S es la superficie de Seifert entonces la matriz de Seifert de K se define como la matriz vacía.

Ejemplo 3.12. Para el nudo del trébol 3_1 con género $g = 1$ en la superficie de Seifert S entonces se tienen dos generadores $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ para la homología $H_1(S)$ con $\{\alpha_1^\sharp, \alpha_2^\sharp\}$ para la homología $H_1(S)$. Por lo tanto, induce un grafo de Seifert con 2 caras y la dimensión de la matriz de Seifert es 2×2 .





De los diagramas anteriores se puede ver que $lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) = -1$, $lk(\alpha_1, \alpha_2^\#) = 0$, $lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) = 1$, $lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) = -1$.

Obteniendo la matriz de Seifert asociada al nudo 3_1

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nota. Procediendo de la misma manera pero con el nudo trébol con orientación contraria, la matriz de Seifert sería:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. Matrices de Seifert S -equivalentes

El estudio de la matriz de Seifert es importante en la teoría de nudos, debido que a partir de ella se obtendrá un invariante para clasificar los nudos. Dicha matriz no es única para un nudo K , pues se puede tomar otro diagrama, numerar en otro orden las curvas α_i o incluso darles otra orientación. A continuación, se va a presentar una relación para definir cuando dos matrices de Seifert son equivalentes, de manera que dos matrices sean equivalentes si vienen del mismo nudo.

Teorema 3.13. *Dos matrices de Seifert, obtenidas a partir de dos nudos equivalentes pueden transformarse una en otra aplicando un número finito de veces las siguientes operaciones, A_1 y A_2 , y sus inversas:*

$$A_1 : M_1 \rightarrow PM_1P^T$$

donde P es una matriz invertible con $\det(P) = \pm 1$ y P^T denota a la matriz transpuesta de P .

$$A_2 : M_1 \rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} * & 0 \\ M_1 & \vdots \\ * & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_1 & \vdots \\ 0 & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $*$ denotando a un entero arbitrario.

Nota. La operación A_1 intercambia dos filas y después dos columnas de M , o suma a una fila j una fila $i \neq j$ multiplicada por k y luego se repite el proceso con las columnas. Esta operación se corresponde con un cambio de orden o de orientación de las curvas cerradas α_i .

Las matrices P asociadas a la operación A_1 se obtienen a partir de la matriz identidad de las siguiente forma.

- (a) Intercambiando la fila i -ésima por la j -ésima si se quiere que A_1 intercambie en la matriz M la fila i por la fila j , y después la columna i por la columna j .
- (b) Sustituyendo por k el 0 que ocupa el lugar (j, i) si se quiere que A_1 multiplique la fila i por k y la sume a la j primero, y después realice lo mismo con las columnas.

La operación A_2 es una operación de matrices propia de la teoría de nudos. Se ha definido de manera que se corresponde con un cambio de género de la superficie de Seifert debido a movimientos de Reidemeister, es decir, esta hace que la matriz de Seifert sea más pequeña o más grande.

Previo a la demostración del Teorema 3.13 se va a enunciar una definición y dos proposiciones que harán que la prueba sea más sencilla.

Definición 3.14. *Dos matrices cuadradas M y M' obtenida una de la otra aplicando las operaciones A_1 y A_2 y sus inversas un número finito de veces, entonces M y M' se denominan S -equivalentes y se denota por $M \stackrel{S}{\sim} M'$.*

Nota. Ser S -equivalente es una relación de equivalencia. Es reflexiva, para lo que basta utilizar la matriz identidad como P al aplicar A_1 , es simétrica puesto que A_1 y A_2 tienen inversas y es transitiva al utilizar la composición de las operaciones involucradas.

Una superficie de Seifert por definición es conexa, pero al aplicarle movimientos de Reidemeister algún diagrama intermedio puede que no sea conexo. Para ello, se va a redefinir la matriz de Seifert para que sea independiente de tener una superficie de Seifert conexa o no conexa. Por lo tanto, sea D un diagrama con p componentes conexas $D(1), D(2), \dots, D(p)$, ($p \geq 1$). A partir del algoritmo de Seifert se tiene para cada $D(i)$ admite una superficie de Seifert $S(i)$ con la matriz asociada $M(i)$ para $i = 1, 2, \dots, p$.

Definición 3.15. *La matriz de Seifert M de una superficie de Seifert $S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(p)$ tal que $S(i) \cap S(j) = \emptyset$; para todo i y j , se define como la suma directa de $M(1), \dots, M(p)$ y la matriz de ceros O_{p-1} de orden $p - 1$, es decir,*

$$M = \begin{bmatrix} M(1) & & & & \\ & M(2) & & O & \\ & & \ddots & & \\ & & & O & M(p) \\ & & & & & O_{p-1} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La siguiente proposición es una consecuencia directa de la definición 3.15.

Proposición 3.16. *Sea S' la superficie de Seifert obtenida al conectar $S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(p)$ al añadir dos bandas giradas entre $S(i)$ y $S(i + 1)$, para $i = 1, 2, \dots, p - 1$, (ver la Figura 3.10). Entonces, la matriz M' asociada a S' es Λ_1 -equivalente a la matriz definida por la ecuación 3.1. Así, $M \stackrel{S}{\sim} M'$.*

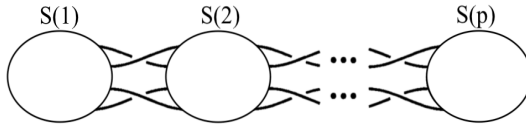
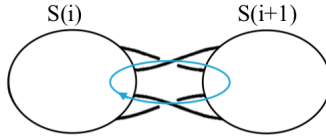


Figura 3.10.

Demostración. Sea $S = S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(p)$ y S' la superficie obtenida al añadir un par de bandas giradas para unir de esta manera a $S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(p)$. En cada par de estas bandas, se va a colocar una curva cerrada simple α_i , $i = 1, 2, \dots, p - 1$, como se muestra en la siguiente figura.



De lo que se deduce que para cada curva cerrada simple $\alpha_{j,k}$ construida en $S(j)$, se tendrá que $lk(\alpha_{j,k}, \alpha_i^\#) = 0$, $lk(\alpha_i, \alpha_{j,k}^\#) = 0$ y $lk(\alpha_i, \alpha_i^\#) = 0$ debido a que dichas curvas cerradas no producen un enlace no entrelazarse. Por lo tanto, la matriz de Seifert M' es Λ_1 -equivalente a M . \square

La siguiente proposición indicará cómo cambia la superficie de Seifert cuando se aplican movimientos de Reidemeister a su diagrama asociado, y como consecuencia, se verá también cómo afectan a la matriz de Seifert. Esto hará que se pueda restringir la prueba del Teorema 3.13, considerando solo los cambios locales de la superficie.

Proposición 3.17. *Sea D el diagrama del nudo K y D' el diagrama obtenido de D aplicando un único movimiento de Reidemeister. Adicionalmente, sean S y S' las superficies de Seifert asociadas a D y D' respectivamente, de tal manera que S y S' difieran solo en las partes que están afectadas por el movimiento de Reidemeister. Entonces, las matrices de Seifert M y M' obtenidas de S y S' respectivamente, son S -equivalentes.*

Demostración. La idea de la demostración es bastante sencilla, solo requiere comprobar cómo afecta localmente cada uno de los movimientos de Reidemeister a la matriz de Seifert asociada a un nudo, a partir de los cambios en el diagrama.

Sea S la superficie de Seifert y M la matriz de Seifert del nudo K , entonces se van a considerar los siguientes casos:

- (1) El movimiento de Reidemeister aplicado es de Tipo I.

Este incrementa la superficie de Seifert en una banda y un disco, como se puede ver en la Figura 3.11(b). De esta manera, el género de la superficie no cambia y el grafo de Seifert incrementa solo en un vértice y una arista, como se puede observar en la Figura 3.11(c). Por lo tanto, los cambios efectuados no afectan a la matriz de Seifert, ya que en el grafo no se ha creado ninguna nueva cara.

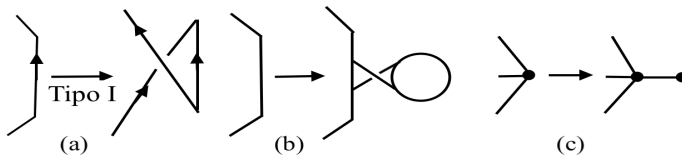


Figura 3.11.

- (2) El movimiento de Reidemeister aplicado es de Tipo II.

Dependiendo de la orientación asignada a cada segmento habría bastantes casos a considerar, solo se va a estudiar el siguiente caso, ya que los demás se harán de manera análoga. Atendiendo a la Figura 3.12, se puede observar como el número de discos no cambia mientras el número de bandas incrementa en dos al eliminar los dos cruces creados por el movimiento de Tipo II.

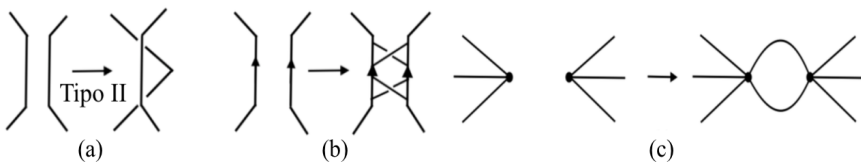


Figura 3.12.

Como se ve en el grafo, el género de S' está dado por $g(S') = g(S) + 1$, entonces al comparar S' con S se tienen dos curvas cerradas adicionales denotadas por α' y α'' , como se puede ver en la Figura 3.13. Por lo tanto, la nueva matriz M' en comparación con M , debe tener dos filas y dos columnas extras.

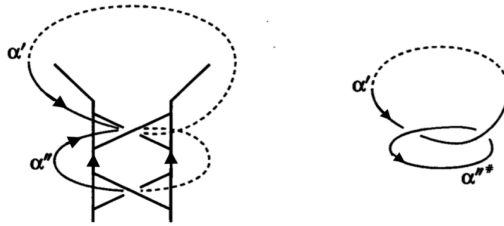


Figura 3.13.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que las dos bandas nuevas son las última en ser elegidas. Teniendo esto en cuenta, la matriz M' tendrá la siguiente forma:

$$M' = \begin{bmatrix} & b_1 & 0 \\ & M & \vdots \\ & & b_m & 0 \\ b'_1 & \dots & b'_m & b & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con $b_i = lk(\alpha_i, \alpha_i^\#)$, $b'_i = lk(\alpha'_i, \alpha_i^\#)$, $b = lk(\alpha', \alpha_i^\#)$.

Al observar la Figura 3.13 se tiene que $lk(\alpha', \alpha''^\#) = 1$, y a partir de la Figura 3.12(c) se puede deducir que $lk(\alpha'', \alpha_i^\#) = 0$, $lk(\alpha_i, \alpha''^\#) = 0$, $lk(\alpha', \alpha_i^\#) = 0$, $lk(\alpha'', \alpha_i^\#) = 0$, $lk(\alpha'', \alpha''^\#) = 0$, ya que son curvas que no forman un enlace como se puede observar en la parte que está conectada del grafo.

Para obtener M' a partir de M basta aplicar primero Λ_2 obteniendo la siguiente matriz:

$$M'' = \begin{bmatrix} & b_1 & 0 \\ & M & \vdots \\ & & b_m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se tendría que aplicar Λ_1 $m + 1$ veces, siendo las matrices P de la siguiente forma:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots, P_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b'_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P_{m+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, M' construida a partir de S' puede obtenerse aplicando operaciones A_2 y A_1 sucesivas veces a M , por lo que, M' y M son S -equivalentes.

(3) El movimiento de Reidemeister aplicado es de Tipo III.

Solo se va a considerar el caso que se muestra en la Figura 3.14(a). Las superficies de Seifert asociadas a ambos diagramas serán idénticas salvo en los lugares que se ven afectados por el movimiento de Reidemeister. Al construir las superficies de Seifert asociadas a ambos diagramas y al fijarse en esos lugares (3.14(b)), se puede observar que ambas superficies tienen el mismo número de bandas, mientras que S tiene 2 discos más que S' .

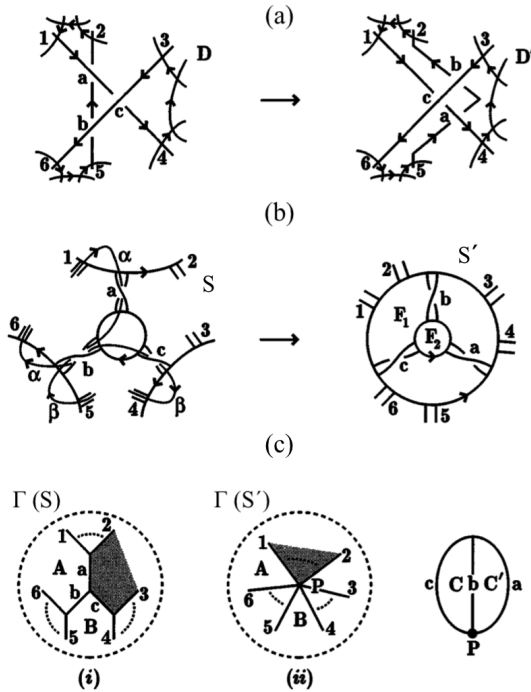


Figura 3.14.

Considerando ahora los grafos de Seifert asociados a ambas superficies, que solo difieran en la zona mostrada en la Figura 3.14(c) y atendiendo a la Figura 3.15 se tiene que las matrices de Seifert tienen la siguiente forma. Los siguientes resultados se pueden consultar en [8, Capítulo 5] para más detalle.

$$M = \begin{bmatrix} N & N' \\ p & 0 \\ N'' & -1 & q \end{bmatrix}$$

donde las últimas dos filas y columnas corresponden con las curvas cerradas α y β que rodean las caras de A y B del grafo $\Gamma(S)$, y

$$M' = \begin{bmatrix} N & N' & O \\ p & 0 \\ N'' & 0 & q & O \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ O & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde las últimas cuatro filas y columnas de corresponden con las curvas cerradas α, β, γ y δ que rodean las caras A,B,C y D del grafo $\Gamma(S')$.



Figura 3.15.

Finalmente, solo bastaría ver que $M \stackrel{S}{\sim} M'$, para ello primero se aplica a M' la operación A_1 con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta operación resta la penúltima fila a la antepenúltima fila, y luego hace lo mismo con las columnas, por lo que se obtiene

$$\Lambda_1 M' = PM'P^T = \begin{bmatrix} N & N' & O \\ & p & 0 \\ N'' & 0 & q & O \\ & -1 & 0 & 0 & 0 \\ O & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y solo quedaría aplicar Λ_2^{-1} para obtener que $M \stackrel{S}{\sim} M'$. □

Proposición 3.18. *Sea S una de las superficies de Seifert construidas a partir de un diagrama D , y sea M la matriz de Seifert de S . Entonces existe un diagrama D_0 tal que:*

- (a) D_0 es equivalente a D .
- (a) Solo se puede construir una única superficie de Seifert S_0 a partir de D_0 , es decir todos los discos de Seifert tienen la misma altura.
- (a) La matriz de Seifert de S_0 , M_0 , es Λ_1 -equivalente a M por lo que $M_0 \stackrel{S}{\sim} M$.

Demostración. Teniendo en cuenta el algoritmo de construcción de la superficie de Seifert, el problema surge cuando “dentro” de un disco hay otros discos, como por ejemplo en la Figura 3.16, en el que hay dos discos S_{12} y S_{22} .

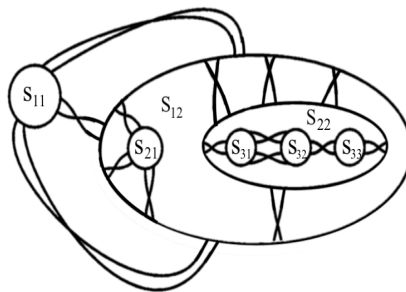


Figura 3.16.

La idea de esta demostración se basa en reemplazar un disco de este tipo por un anillo abierto, obtenido mediante la aplicación de movimientos de Reidemeister. De tal manera que si S_2 se encuentra sobre S_1 , entonces el disco resultante y el anillo quedarán conectados mediante las bandas, tal y como se puede observar en la Figura 3.17(a). Sin embargo, si S_2 está debajo de S_1 , entonces el anillo y el disco quedarán conectados como se muestra en la Figura 3.17(b).

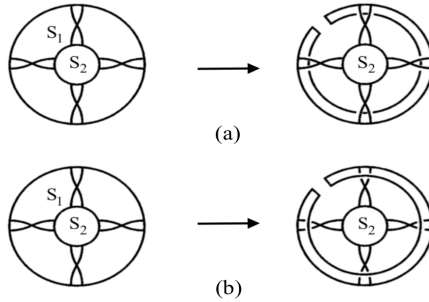
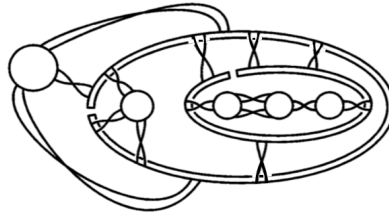


Figura 3.17.

Repitiendo este proceso, se obtiene una superficie plana.



□

A partir de esta proposición se desprende que dos superficies de Seifert diferentes construidas del mismo diagrama son S -equivalentes.

Ya se está en disposición de abordar la demostración del Teorema 3.13.

Demostración (3.13). Sean K y J dos nudos equivalentes, por el Teorema 1.13 se tiene que existen $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ movimientos de Reidemeister tales que

$$D_0 \xrightarrow{\Omega_1} D_1 \xrightarrow{\Omega_2} \dots \xrightarrow{\Omega_n} D_n$$

con D_0 el diagrama asociado a K y D_n el diagrama asociado a J .

De esta manera cada D_i está obtenido a partir del anterior diagrama D_{i-1} tras aplicarle un único movimiento de Reidemeister $\forall i = 1, \dots, n$. Para cada uno de estos diagramas D_i , se sabe por el Teorema 3.2 que se puede obtener una superficie de Seifert S_i . Aunque esta superficie de Seifert no es única, como la Proposición 3.18 garantiza que dos superficies de Seifert diferentes a partir del mismo diagrama tienen matrices S -equivalentes, basta con considerar una de ellas, sea esta S_i . Esto se deduce de inmediato de 3.18, ya que si D es equivalente a D_0 y $M \stackrel{S}{\sim} M_0$ para cualquier superficie de Seifert construida a partir de su diagrama. Luego, por transitividad de la S -equivalencia se tiene que cualquier $M \stackrel{S}{\sim} M_0 \stackrel{S}{\sim} M'$ a otra M .

Aplicando la Proposición 3.17 se tiene que las matrices de Seifert M_{i-1}, M_i obtenidas a partir de las superficies S_{i-1}, S_i respectivamente son S -equivalentes ya que sus diagramas D_{i-1}, D_i se han obtenido uno a partir del otro mediante un único movimiento de Reidemeister.

Así, se puede construir una sucesión de matrices de Seifert $M = M_0, M_1, \dots, M_n = M'$ tal que $M_{i-1} \stackrel{S}{\sim} M_i \forall i = 1, \dots, n$. Con M' la matriz de Seifert de S_n , que es la superficie obtenida a partir del diagrama D_n asociada al nudo J .

Puesto que ser S -equivalente es una relación de equivalencia, por transitividad se tiene que $M \stackrel{S}{\sim} M'$. □

3.4. Polinomio de Alexander via Matrices de Seifert

A partir de la matriz de Seifert se puede obtener una serie de invariantes asociadas a un nudo.

Definición 3.19. *Sea M una matriz de Seifert de un nudo K , entonces el **determinante** de K se define como $|\det(M + M^T)|$ y se denota por $\det(K)$.*

Proposición 3.20. *El determinante de K es un invariante del nudo K .*

Demostración. Sea K un nudo por el algoritmo de Seifert se sabe que K admite una superficie de Seifert S y, por lo tanto, una matriz de Seifert M . La idea para demostrar esta proposición es probar que el determinante bajo transformaciones de tipo A_1 y A_2 no cambia. Primeramente, se prueba que es un invariante bajo transformaciones de tipo A_1 . Entonces, teniendo en cuenta que esta transformación cambia la matriz M en PMP^T donde P es una matriz invertible con $\det(P) = \pm 1$.

$$\begin{aligned} \det(K) &= |\det(M + M^T)| = |\det(PMP^T + (PMP^T)^T)| = \\ &= |\det(PMP^T + (PM^T P^T))| = |\det(P(M + M^T)P^T)| = \\ &= |\det(P)||\det(M + M^T)||\det(P^T)| = |\det(M + M^T)|. \end{aligned}$$

Por otro lado, bajo transformaciones de tipo A_2 , notando que no importa cuál sea la matriz M_2 , ya que al sumar por su traspuesta el resultado será

$$M_2 + M_2^T = \begin{bmatrix} & & * & 0 \\ & M + M^T & \vdots & \vdots \\ & & * & 0 \\ * & \dots & * & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, al calcular el determinante de $M_2 + M_2^T$ sobre la última fila se tiene

$$\det(M_2 + M_2^T) = \pm \det \begin{bmatrix} & & 0 \\ & M + M^T & \vdots \\ * & \dots & * 1 \end{bmatrix}$$

y luego en la última columna, obteniendo

$$|\det(M_2 + M_2^T)| = |\pm \det(M + M^T)| = |\det(M + M^T)|. \quad \square$$

Este invariante, el determinante de un nudo, es un invariante bastante antiguo. Una de sus propiedades útiles es que dado que el determinante del nudo trivial es 1.

Teorema 3.21. *Si M_1 y M_2 son matrices de Seifert del nudo K , donde r y s son los órdenes de M_1 y M_2 respectivamente, entonces:*

$$t^{-r/2} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{-s/2} \det(M_2 - tM_2^T).$$

Demostración. En primer lugar se considera cómo el polinomio $\det(M - tM^T)$ se ve afectado por las transformaciones Λ_1 y $\Lambda_2^{\pm 1}$.

Sea P una matriz invertible tal que $\det(P) = \det(P^T) = \pm 1$, se aplica Λ_1 al polinomio

$$\det(\Lambda_1(M - tM^T)) = \det(P(M - tM^T)P^T) = \det(M - tM^T).$$

Por lo tanto, no se ve afectado por la operación Λ_1 , sin embargo al aplicar Λ_2

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2(M - tM^T)) &= \det \begin{bmatrix} & & b_1 & 0 \\ & M - tM^T & \vdots & \vdots \\ & & b_m & 0 \\ -b_1 t & \dots & -b_m t & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -t & 0 \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} & & b_1 & 0 \\ & M - tM^T & \vdots & \vdots \\ & & b_m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -t & 0 \end{bmatrix} = t \det(M - tM^T). \end{aligned}$$

De la misma manera se obtiene

$$\det(\Lambda_2^{-1}(M_2 - tM_2^T)) = t^{-1} \det(M_2 - tM_2^T)$$

Sean M_1 y M_2 las matrices de Seifert del nudo K , en el que M_1 tiene orden r y M_2 tiene orden s , se supone que $s > r$ sin pérdida de generalidad. Puesto que

la transformación A_2 añade dos filas y dos columnas a la matriz cada vez que se aplica se tiene que $s = r + 2n$, siendo n el número de veces que es necesario aplicar la operación A_2 para transformar M_1 en M_2 .

Recordando que

$$\det(A_2(M - tM^T)) = t \det(M - tM^T).$$

Al aplicar n veces A_2 se tiene que

$$\det(M_2 - tM_2^T) = t^n \det(M_1 - tM_1^T).$$

Despejando $n = \frac{s-r}{2}$, basta con sustituir en la expresión anterior

$$\det(M_2 - tM_2^T) = t^{\frac{s-r}{2}} \det(M_1 - tM_1^T),$$

finalmente multiplicando por $- \frac{s}{2}$ se obtiene

$$t^{-s/2} \det(M_2 - tM_2^T) = t^{-r/2} \det(M_1 - tM_1^T). \quad \square$$

A partir del determinante de un nudo es posible calcular el polinomio de Alexander, un polinomio bastante útil para el estudio de las propiedades de los nudos, y teniendo que $t^{-k/2} \det(M - tM^T)$ es un invariante de un nudo K con superficie de Seifert S tal que $k = 2g(S)$.

Definición 3.22. Si S es la superficie de Seifert y M es la matriz de Seifert del nudo K con orden k , entonces el **polinomio de Alexander** de K denotado por $\Delta_K(t)$ es

$$\Delta_K(t) = t^{-k/2} \det(M - tM^T)$$

donde $k = 2g(S)$.

A continuación, se verá cómo el polinomio de Alexander es simétrico aplicando propiedades de matrices y determinantes.

Teorema 3.23. Sea K un nudo, entonces $\Delta_K(t)$ es un polinomio de Laurent simétrico

$$\Delta_K(t) = a_{-n}t^{-n} + a_{n-1}t^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$$

con $a_j = a_{-j}$ para $j = 1, \dots, n$.

Demostración. Sea la superficie de Seifert S del nudo K y M la matriz de Seifert con orden k , el cual es par ya que $k = 2g(S)$. Aplicando propiedades de matrices y determinantes, $\Delta_K(t)$ simétrico, es decir, $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t^{-1}) &= t^{k/2} \det(M - t^{-1}M^T) = t^{-k/2} \det(tM - M^T) = \\ &= (-1)^k t^{-k/2} \det(M^T - tM) = t^{-k/2} \det(M - tM^T)^T = \\ &= t^{-k/2} \det(M - tM^T) = \Delta_K(t). \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 3.24. *El determinante de un nudo K es igual a $|\Delta_K(-1)|$.*

Demostración. Sea K un nudo, entonces

$$|\Delta_K(-1)| = |(-1)^{k/2} \det(M + M^T)| = |\det(M + M^T)|. \quad \square$$

Ejemplo 3.25. Si K es el nudo trivial, por convenio se tiene $\Delta_K(t) = 1$.

Ejemplo 3.26. Si K es nudo 3_1 , sabiendo que su matriz de Seifert M es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ entonces el polinomio de Alexander mediante la fórmula es:

$$\Delta_K(t) = t^{-1}(M - tM^T) = t^{-1} \det \begin{vmatrix} -(1-t) & -t \\ 1 & -(1-t) \end{vmatrix} = t^{-1} - 1 + t.$$

Por lo tanto, al multiplicar por t al polinomio da el resultado:

$$\Delta_K(t) = 1 - t + t^2.$$

Bibliografía

- [1] ADAMS, C. *The Knot Book*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] L. V AHLFORS Y L. SARIO. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press.
- [3] BURDE G. Y ZIESCHANG H. *Knots*. DeGruyter Studies in Mathematics, vol. 5, Walter DeGruyter, Berlin, New York, 1985.
- [4] CROMWEL, P. *Knots and Link*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] R.H. CROWELL Y R.H. FOX. *Introduction to Knot Theory*. Introduction to Higher Mathematics, 1963.
- [6] LEE, J. *Introduction to topological manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 202. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [7] MUNKRES, J. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [8] MURASUGI, K. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, 1996.
- [9] OPREA, J. *Differential Geometry and its Applications*. Prentice-Hall, 2004.
- [10] ROLFSEN, D. *Knots and links*. AMS Chelsea Publishing 1976.

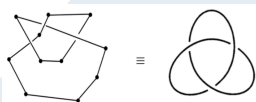
Knot Theory

Abstract

The objective of this work is a brief introduction to knot theory, establishing when two knots are equivalent. Using different topological characteristics of surfaces, we will proceed to the analysis of knot invariants. For this we will use Seifert's algorithm that will allow the construction of the matrix of the same name and from it, we can define the Alexander polynomial and offer a short overview of the classification of the knots.

1. Knot Theory

A polygonal knot in \mathbb{R}^3 is the union of a finite number of closed, straight-line segments $[p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n] \cup [p_n, p_1]$ where p_i are the vertices and $[p_i, p_{i+1}]$ is an edge. A knot is said to be tame if it is equivalent to a polygonal knot.



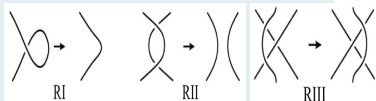
Definition 1. A knot J is an elementary deformation of a knot K if one is formed from the other by adding a single vertex $p_0 \notin K$ such that the triangle formed by p_0 together with its adjacent vertices p_1 and p_2 intersects the knot only along the segment $[p_1, p_2]$, or its inverse. One more operation would be to add a vertex to an edge, or to eliminate collinear vertex.

Definition 2. Two knots K and J are equivalent if exists a sequence of knots $K = K_0, K_1, K_2, \dots, K_n = J$, such that K_{i+1} is an elementary deformation of K_i , for $i \geq 0$.

Through a knot projection called regular projection, we obtain a representation of a knot in the plane where there are no more than two points on two points of the knot are projected to the same point on the plane and at each such point it is indicated which strand is closest to the plane (usually by erasing part of the lower strand). This knot projection is known as a diagram.

Theorem 3.

Two knots are topologically equivalent if and only if their diagrams may be deformed into each other by a sequence of the three Reidemeister moves shown below.



The orientation of a knot is the direction in which the vertices of the knot are traversed. Two orientations are said to be equivalent if they differ in a cyclic permutation.

2. Seifert's algorithm and Alexander polynomial.

A polynomial can be associated with each knot, called Alexander polynomial. For it, we will create first a surface using the Seifert's algorithm.

Seifert's algorithm

First step: Given an oriented diagram of a knot K , at each crossing, there will be two incoming and two outgoing strands. Connect each incoming strand to the adjacent outgoing strand, thus eliminating crossings, and creating a set of topological circles (Seifert circles) in the plane.

Second step: Provide a height to the Seifert circles if they are nested, such that $z = h(S_i)$ with $h(S_i) =$ number of Seifert circles containing S_i .

Third step: Connect the disks with a series of twisted bands so that, when viewed from the top, the boundaries of the bands looks like the original projection of the knot. The resulting surface has one boundary component, and it is the knot K .

A Seifert surface is a surface whose boundary is a given knot, also it is a compact, connected and an oriented surface.

Definition 4. A linking number is a numerical invariant that describes the linking of two closed curves in three-dimensional space. Intuitively, the linking number represents the number of times that each curve winds around the other.

From this surface, we will create a matrix called the Seifert matrix formed by linking numbers. It depends on whether the crossings formed by curves created on the Seifert surface have a positive or negative crossings (± 1). Furthermore, exists an equivalence relation such that if two knots are equivalent then their Seifert matrices are also equivalent, and are said to be matrices S -equivalent.

The Alexander polynomial of a knot is obtained through the Seifert matrix by the formula

$$\Delta_K(t) = t^{-k/2} \det(M - tM^T),$$

where M is the Seifert matrix and $k = 2g(S)$ with $g(S)$ the genus of S . Equivalent knots give the same polynomial.

References

- [1] ADAMS C. *The Knot Book*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] BURDE G. Y ZIESCHANG H. *Knots*. DeGruyter Studies in Mathematics, vol. 5, Walter DeGruyter, Berlin, New York, 1985.
- [3] CROWMEL, P. *Knots and Link*. Cambridge University Press, 2004.
- [4] R.H. CROWELL Y R.H. FOX. *Introduction to Knot Theory*. Introduction to Higher Mathematics, 1963.
- [5] MUNKRES, J. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [6] MURASUGI, K. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, 1996.
- [7] ROLFSEN, D. *Knots and links*. AMS Chelsea Publishing 1976.