Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Laura Hernández Cabezas

Euclides: Libro X

Euclid: Book X

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2019

Dirigido por
José Manuel Méndez Pérez

José Manuel Méndez Pérez
Departamento de
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo Fin de Grado estudiamos el Libro X de los Elementos de Euclides, en el que se consideran magnitudes conmensurables e inconmensurables y rectas irracionales en relación con cierta recta particular que se asume que es racional, así como áreas irracionales respecto de un área determinada que postulamos como racional. El Libro X es el volumen más intrincado de los Elementos, tanto por su enorme tamaño como por la oscuridad de sus demostraciones y la falta de motivación de sus resultados. Este libro consta de 16 definiciones, distribuidas en tres grupos, y 115 proposiciones. El principal objetivo es introducir y clasificar trece rectas irracionales, investigar sus propiedades y establecer relaciones con otro conjunto de rectas irracionales, las seis binomiales y las seis apótomas.

Palabras clave: *Magnitudes conmensurables – Magnitudes inconmensurables – Rectas racionales – Rectas irracionales – Áreas racionales – Medial – Binomial – Bimedial – Mayor –Apótoma – Menor – Euclides – Elementos – Libro X.*

Abstract

In this Final Degree Project, we study Book X, which deals with commensurable and incommensurable magnitudes, and irrational straight-lines in relation to any particular straight-line assumed as rational, as well as irrational areas, regard to a particular area, postulated as rational. Book X is the most intricate part of Euclid's Elements, because of its enormous length, the obscurity of its demonstrations and the absence of motives for its results. This book consists of 16 definitions, distributed in three groups, and 115 propositions. The main objective is to introduce and classify thirteen irrational straight-lines, investigate their properties and establish relations among them and with another set of twelve irrational straight-lines, the six orders of binomials and the six orders of apotomes.

Keywords: *Commensurable magnitudes – Incommensurable magnitudes – Rational straight-lines – Irrational straight-lines – Rational areas – Medial – Binomial – Major – Apotome – Minor – Euclid – Elements – Book X.*

Contenido

Introducción

Cuando se estudia una asignatura del Grado en Matemáticas es habitual, sobre todo en los primeros cursos, que haya un libro de referencia que contenga todas los temas de la materia, esto es, que sea autocontenido, de modo que los alumnos –además de los apuntes de clase y las tutorías que realizan– prácticamente no consultan nada más. Así, en un primer curso de cálculo de funciones de una variable, un texto de referencia como el *Calculus* de M. Spivak podría ser suficiente.

El Trabajo Fin de Grado (TFG) no deja de ser una asignatura más del vigente plan de estudios de esta titulación. Con sus peculiaridades, eso sí: los alumnos tienen su profesor asignado, pero no tienen compañeros de clase o en el aula, que suele ser el despacho del tutor.

El problema es que el objetivo de este TFG es el estudio del Libro X de los *Elementos* de Euclides de Alejandría que, por supuesto, es autocontenido en el contexto de esta obra en su conjunto, pero que fue escrita hace 2300 años y, por tanto, su lenguaje está completamente obsoleto. Nuestra pretensión es intentar comprenderlo tal como lo escribió Euclides, respetando al máximo la literalidad de sus pruebas. En los *Elementos* no aparece ninguna fórmula ni símbolo, ni siquiera para las operaciones más elementales, no existe una notación para expresar una relación de igualdad, no hay un solo ejemplo numérico en todo el texto. Únicamente con la palabra, el razonamiento y apoyándose en algunas figuras, Euclides construyó esta obra de arte.

El Libro X consta de 16 definiciones, que se distribuyen en tres grupos, y 115 proposiciones que versan fundamentalmente sobre distintos tipos y criterios de conmensurabilidad e inconmensurabilidad, así como sobre una clasificación de las rectas irracionales. Se trata de un volumen singular en el conjunto de los *Elementos*, que intimida no solo por su extensión, sino por la complejidad y oscuridad de muchas demostraciones y por la aparente, al menos, falta de motivación o justificación de los resultados. Al respecto, el matemático belga Simon Stevin (1548-1620) expuso.

> *Después de haber visto y revisto el Libro X de Euclides y de haber leído y releído a varios comentaristas de esta obra, algunos de los cuales lo juzgan como la materia más profunda e incomprensible de las matemáticas, otros que éstas son las proposiciones más oscuras y la cruz de los matemáticos, más allá de todo esto, me convencí a mí mismo de entender esta materia a través de sus motivaciones* ([10, p. 41]).

Y en otra parte, subraya

> *La dificultad del Libro X de Euclides se ha convertido para muchos en una pesadilla, incluso llegan a llamarlo la cruz de los matemáticos, una materia demasiado dura de asimilar y de la cual perciben que no pueden sacar algo de provecho* ([10, p. 61, Nota 1]).

También otros estudiosos inciden en que, desde un punto de vista pedagógico, esta obra es un desastre [3, p. 95]. Sin embargo, según T. Heath [8, p. 402] el Libro X es "el más notable, así como el más perfecto formalmente de todos los libros que integran los *Elementos*".

Este TFG se divide en tres capítulos. En el Capítulo 1 se hace una breve presentación del autor y su obra. El Capítulo 2 abarca desde el primer grupo de definiciones –el más importante sin dudas, siendo cuatro en total– hasta la Proposición 47. La primera definición trata de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de magnitudes. Dos magnitudes AB y CD son conmensurables, y se denota $AB \mathrel{\mathrm{C}} CD$, si tienen una medida en común, es decir, –en palabras de Euclides– si estas magnitudes guardan entre sí la misma razón que un número entero a otro número entero. Si no poseyeran una medida común, se dirá que son inconmensurables, y se representa $AB \not\mathrel{\mathrm{C}} CD$. En la segunda definición se dice que dos líneas rectas α y β son conmensurables en cuadrado si $\alpha^2 \mathrel{\mathrm{C}} \beta^2$, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan una misma área como medida común.

En la tercera definición se postula la existencia de una recta racional ρ y entonces cualquier otra recta α se dirá racional si $\alpha^2 \mathrel{\mathrm{C}} \rho^2$, e irracional en los demás casos. Esta definición marca una diferencia fundamental entre la teoría euclidiana de la racionalidad numérica y la concepción moderna de la misma noción. En efecto, para Euclides α puede ser racional aunque $\alpha \not\mathrel{\mathrm{C}} \rho$; así, en este aspecto, la teoría de Euclides es más amplia que la moderna. En la definición cuarta se indica que un área A es racional si $A \mathrel{\mathrm{C}} \rho^2$.

En este segundo capítulo también se presentan y construyen las primeras siete rectas irracionales del catálogo de Euclides: la medial, la binomial, la primera bimedial, la segunda bimedial, la mayor, el lado del cuadrado equivalente a una área racional más un área medial y el lado del cuadrado equivalente a dos áreas mediales.

La segunda sección del Capítulo 3 incluye el segundo grupo de definiciones y comprende desde la Proposición 48 hasta la 72. Euclides analiza la clase de rectas binomiales, constituida por seis tipos de rectas irracionales. En realidad no aportan nuevas rectas irracionales, porque las seis obviamente son rectas binomiales. Su originalidad radica en que las componentes de la binomial, en cada uno de los seis casos, satisfacen diferentes propiedades.

Las dos últimas secciones del Capítulo 3 tratan desde la Proposición 73 hasta el final. Se introducen otras seis rectas irracionales: la apótoma, la primera apótoma de una medial, la segunda apótoma de una medial, la menor, la que hace con un área racional un área entera medial y la que hace con un área medial un área entera medial. También Euclides investiga las propiedades de otras seis rectas irracionales que comparecen en el tercer grupo de definiciones: la clase de rectas irracionales que proceden de la apótoma y que clasifica en seis órdenes.

Como se ha visto, el Libro X de Euclides ha despertado, y sigue despertando, mucha polémica y controversia: que si es oscuro y ambiguo, que si su cohesión interna es deficiente, que si es un desastre desde un punto de vista pedagógico, que si es difícil de asimilar... Sin embargo, hasta los más acérrimos críticos reconocen que los resultados del Libro X son investigaciones muy recientes (nos referimos a que son de la época de Euclides) de diferentes matemáticos griegos, especialmente de Teeteto y Eudoxo [3, p. 95], y que corresponde a Euclides el innegable mérito de ordenarlos, organizarlos y clasificarlos. Reconocen igualmente algunas aportaciones importantes, como son la forma de presentar el método de exhaución, una nueva versión del algoritmo de Euclides y su clasificación rigurosa de las rectas irracionales, que cataloga en trece clases diferentes, construyendo cada una de ellas y analizando meticulosamente sus propiedades.

En conclusión, en este TFG centrado en el Libro X de los *Elementos* de Euclides de Alejandría, se ha intentado preservar el espíritu y la esencia de sus pruebas, pero recurriendo a veces a notaciones y fórmulas más actuales. En este sentido se ha procurado dar una versión algebraica de la mayor parte de los resultados. Es fácil, desde la perspectiva del siglo XXI, criticar a Euclides, pero él no disponía de ninguna herramienta algebraica. Como apostilla una de las mayores autoridades en el conocimiento de la obra euclidiana y, en general, del mundo matemático griego, Sir Thomas L. Heath.

> *Este maravilloso libro, con todas sus imperfecciones, que de verdad son pocas si se tiene en cuenta la fecha en que apareció, es y será sin duda el texto más grande de matemáticas de todos los tiempos.*

Finalmente, indicamos que ha sido imposible incluir las 115 proposiciones en esta Memoria. Creemos que se ha hecho una selección que da idea, por una parte, de la importancia de esta obra y, por otra, que hace autocontenido –en la medida de lo posible– a este TFG.

1

Primer Capítulo

1.1. Vida y obra de Euclides de Alejandría

Muy poco se sabe de la vida de Euclides. Podría ser que naciera en Atenas, pero si fue así –no hay ninguna fuente que lo confirme– se desplazó muy joven a vivir en Alejandría. Según los historiadores, solo hay dos referencias dignas de crédito sobre Euclides: Proclo y Papo de Alejandría [3]. Proclo (412-485 d. C., Constantinopla) fue un filósofo neoplatónico que realizó algunos comentarios del Libro I de los *Elementos*. Casi tan desconocido como el propio Euclides, a Papo (Pappo o Pappus) de Alejandría (290-350 d. C.) se le considera el último de los grandes matemáticos griegos, y escribió comentarios sobre los *Elementos* de Euclides y la *Gran Sintaxis* matemática de Ptolomeo (llamado *Almagesto* por los árabes). En su obra más importante, la *Synagoge* o *Colección*, habla de los discípulos de Euclides y los sitúa alrededor del año 250 a. C. [3, p. 11]. Gracias a ellos podemos asegurar que Euclides vivió durante el reinado del faraón Ptolomeo I Sóter, el Salvador (367-283 a. C.), y que enseñó matemáticas en Alejandría, donde creó una escuela en torno al famoso museo de esa ciudad. Se estima que Euclides vivió entre los años 325 a. C. y 265 a. C., y que alcanzó su plena madurez cerca del año 300 a. C., fecha en que aparecerían los primeros escritos relacionados con los *Elementos*. A Euclides se le adjudican una docena de obras, pero solo dos han llegado completas hasta nosotros, los *Elementos* y los *Datos*. Otras obras de su supuesta autoría son [11]:

(i) De carácter geométrico, *División de las figuras*, *Paralogismos* (Falsos razonamientos o Falacias), *Lugares de superficies*, *Porismas* y *Secciones Cónicas*.
(ii) De astronomía, *Fenómenos*.
(iii) De música, *Sectio Canonis* e *Introductio Harmonica*.
(iv) De mecánica, *Sobre lo ligero y lo pesado* y *Sobre la palanca*.
(v) De óptica, *Óptica* y *Catóptrica*.

Algunas de estas obras han desaparecido, solo se conservan fragmentos o mediante referencias. Otras se conocen gracias a la traducción a otros idiomas, especialmente al árabe. Los *Datos*, que sí se ha preservado íntegro, consta de 94 proposiciones que tratan sobre magnitudes, formas y posiciones de las figuras geométricas, y podría considerarse un complemento de los *Elementos*.

1.2. Los *Elementos*

Los *Elementos* es la *magnum opus* de Euclides, por la que pasó a la posterioridad. En esta obra se recopila y ordena sistemáticamente la mayoría de los conocimientos matemáticos griegos anteriores a él, en una sucesión lógica de proposiciones fundamentadas en un conjunto reducido de axiomas (postulados y nociones comunes), junto a una serie de definiciones realizadas previamente ([3], [4], [5]).

Según Eudemo[1], Hipócrates de Quíos (470-410 a. C.) fue el primero en escribir un libro de "elementos", siguiéndole Leon (s. IV a. C.) y Teudio (s. IV a. C.), entre otros. Pero el éxito de Euclides fue inmediato y tan extraordinario que supuso y provocó la desaparición de todos los *Elementos* conocidos hasta entonces. El éxito fue tal que tampoco se conocen *Elementos* publicados posteriormente a esta magna obra.

Los *Elementos* constan de 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y 465 proposiciones, todo ello distribuido en 13 libros. El Libro I comienza con un primer conjunto de 23 definiciones (punto, línea, extremos de una línea, línea recta, superficie, ángulo, círculo, etc.), tras las cuales figuran los cinco postulados [3, p. 197].

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia (radio).
4. Y ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos[2].

[1] Eudemo de Rodas (370-300 a. C.) fue uno de los más brillantes discípulos de Aristóteles y está considerado como el primer historiador de la ciencia.

[2] Este postulado, el más célebre enunciado contenido en los *Elementos*, fue cuestionado prácticamente desde que apareció. John Playfair (1748-1819), matemático y geólogo británico, lo enunció de forma más escueta en el siglo XVIII: "Por un punto exterior a una recta no se puede trazar más que una paralela a ella". Es la versión más conocida y popular.

Siguen a éstas las cinco nociones comunes, que no son otra cosa que operaciones o manipulaciones básicas entre magnitudes, y que se admiten sin pruebas porque intuitivamente parece que son indiscutiblemente ciertas [3, p. 199].

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las totales son iguales.
3. Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que la parte.

Con este terceto, definiciones, postulados y nociones comunes, Euclides construye esta monumental obra, instaurando con ello el método axiomático deductivo. Este proceso consiste, en pocas palabras, en definir unos conceptos básicos, fijar unos axiomas (postulados y nociones comunes, en este caso) y, a partir de aquí, hay que demostrar todos los enunciados matemáticos únicamente con la ayuda de la lógica y el razonamiento.

Los *Elementos*, pues, gozaron de una autoridad indiscutible, su impacto e influencia sobre el desarrollo de las matemáticas han sido enorme y se convirtieron en el modelo a imitar por todas las demás ciencias. Tampoco hay que desdeñar el gran impacto e influencia culturales que han significado los *Elementos.* No conviene olvidar que han sido un libro de texto en todas las universidades del mundo occidental hasta el siglo XIX.

Quizás este inmenso éxito de los *Elementos* contribuyó a desdibujar la figura de su autor. En la Historia de la Humanidad no hay un paradigma, como es el caso de los *Elementos*, en que la magnitud de una obra haya superado y desbordado a su autor hasta tal punto de eclipsarlo y anularlo totalmente. Euclides es sinónimo de geometría, o como lo plasmó magistralmente el escritor inglés E. M. Forster en su célebre guía de Alejandría el presentar a Euclides, "*Nada sabemos de él. A decir verdad, hoy lo consideramos como una rama del saber más que como un hombre*" [3, p. 8].

Por si fuera poco, a finales de la Edad Media y en el Renacimiento, se asignó erróneamente la autoría de los *Elementos* a Euclides de Mégara (450-380 a. C.), filósofo discípulo de Sócrates que vivió un siglo antes que el verdadero autor. Muchas ediciones salieron equivocadamente bajo el nombre de Euclides de Mégara hasta que dos editores renacentistas, el italiano Federico Commandino (1509-1575) y el alemán Cristóbal Clavio (1535-1612), deshicieron este error casi al final del siglo XVI.

Para más detalles e información de los *Elementos*, su contenido, importancia en la tradición matemática griega, su institucionalización y transmisión hasta nosotros, remitimos a la excelente introducción general de Vega [3, pp. 1-184] o a S. Batista [2].

2

Segundo Capítulo

2.1. Introducción

El libro X de los *Elementos* de Euclides comienza con 4 definiciones: magnitudes conmensurables e inconmensurables, conmensurabilidad e inconmensurabilidad en cuadrado, rectas racionales e irracionales en longitud y cuadrado.

En este capítulo se estudian las primeras 47 proposiciones de este libro, demostrándose 20 de ellas. Al principio se abarca la relación entre la razón de magnitudes conmensurables e inconmensurables con la razón entre números, así como, diferentes propiedades de estas magnitudes. Estos resultados son preparatorios para introducir siete rectas irracionales: la medial, la binomial, la primera bimedial, la segunda bimedial, la mayor, la del lado del cuadrado equivalente a un área racional más un área medial y el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

Como se indicó en el prólogo, se trata de entender las pruebas, tal como las hizo Euclides, cambiando el lenguaje y la notación en aras de la simplicidad. Las demostraciones de Euclides son eminentemente geométricas, por lo que en muchos casos damos su versión algebraica.

A lo largo de este capítulo, y de los restantes, k, k', k'', λ, ρ, ρ', ρ_1, ρ_2,... denotan cocientes de dos números enteros positivos. Por $\dfrac{m^2}{n^2}$, $\dfrac{m^2}{l^2}$,... expresamos cocientes de números cuadrados, no siempre los mismos en cada comparecencia. Cuando se refiere a un rectángulo, Euclides lo hace citando las letras de los extremos de su diagonal, por ejemplo, el rectángulo AC; otras veces indica que el rectángulo está comprendido por dos rectas AB y BC, que nosotros representamos por $[AB, BC]$; o bien señala su área $AB.BC$. Igual ocurre con el cuadrado. El símbolo C se usa para indicar que dos magnitudes son conmensurables, mientras que $\not\mathrm{C}$ significa que son inconmensurables. Si se quiere precisar más, C_{L} y $\not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}$ indican que son conmensurables en longitud o no, respectivamente. Mientras que C^2 se reserva para matizar que dos magnitudes son conmensurables solo en cuadrado. Cuando necesitamos referirnos a un resultado de Euclides, no incluido en este trabajo, por ejemplo la proposición 15 del Libro V lo indicaremos por [*V-15*].

Finalmente, adoptamos la notación de T. Heath [8] para denominar las rectas irracionales introducidas en este capítulo: A_1 para la binomial, B_1 para la primera bimedial, C_1 para la segunda bimedial, D_1 para la mayor, E_1 para el lado del cuadrado equivalente a una área racional más un área medial y F_1 para el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales.

2.2. Definiciones

Definición 2.1. *Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible hallar una medida común.*

Con una notación actual diríamos que dos magnitudes α y β son conmensurables si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k}$$

siendo, $k = \frac{m}{n}$, m, $n \in \mathbb{Z}^+$. En cualquier otro caso diremos que α y β son inconmensurables. Así, las magnitudes 6 y 3 son conmensurables pues, entre otras, tienen las medidas comunes 0.5, 1, 1.5, 3... Obsérvese que

$$\frac{6}{3} = \frac{1}{1/2}.$$

Análogamente, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ son magnitudes conmensurables. Nótese que son las diagonales de los cuadrados de lados 1 y 2, respectivamente. Según Euclides se puede ver que, a pesar de que no son conmensurables con la unidad (estas diagonales no son medibles con los lados de sus cuadrados), se tiene:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Quizás el primer ejemplo de inconmensurabilidad se dé entre el lado l y la diagonal d de un cuadrado, ya que

$$\frac{l}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

siendo bien conocido que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como el cociente de dos enteros positivos.

Definición 2.2. *Dos líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común*

Dos magnitudes α y β son conmensurables en cuadrado si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k^{1/2}},$$

e inconmensurables en cuadrado en cualquier otro caso. Obviamente, en consonancia con la observación previa, dos magnitudes α y β son conmensurables en longitud si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k},$$

e inconmensurables en longitud en otro caso. Así, las magnitudes 3 y 6 son conmensurables en cuadrado, ya que $3^2 = 9$ y $6^2 = 36$ tienen en común el área 9, o el área 3... Análogamente, las magnitudes 1 y $\sqrt{2}$ son conmensurables en cuadrado, ya que $1^2 = 1$ y $(\sqrt{2})^2 = 2$ que tienen en común el área 1. Obsérvese que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2^{1/2}}$. Sin embargo, las magnitudes $\sqrt[4]{2}$ y 1 son inconmensurables en cuadrado, porque sus respectivos cuadrados, $\sqrt{2}$ y 1, son magnitudes inconmensurables. Nótese que, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{1}{2^{1/4}}$, en línea con la definición de inconmensurabilidad en cuadrado.

Cabe señalar que para comparar dos rectas en cuadrados, Euclides considera las razones de los cuadrados obtenidas sobre ellas. Así, se tiene

$$\frac{3^2}{6^2} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

de donde se concluye que 3 y 6 son magnitudes conmensurables en cuadrado.

Nota 2.1. Fácilmente se infiere que

- Conmensurabilidad en longitud $\Rightarrow$ Conmensurabilidad en cuadrado.
- Inconmensurabilidad en cuadrado $\Rightarrow$ Inconmensurabilidad en longitud.

En general, no se cumplen los recíprocos

- Conmensurabilidad en cuadrado $\not\Rightarrow$ Conmensurabilidad en longitud.
- Inconmensurabilidad en longitud $\not\Rightarrow$ Inconmensurabilidad en cuadrado.

Definición 2.3. *Admitidos estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas conmensurables e inconmensurables, las inconmensurables solo el longitud y otras también en cuadrado, con una recta determinada. Entonces, llámese racional la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien solo en cuadrado llámense igualmente rectas racionales. Pero las rectas inconmensurables con ella llámense irracionales.*

Este libro, como casi toda la obra euclidiana, tiene un eminente carácter geométrico. Los matemáticos griegos no elaboraron ninguna teoría sobre la construcción algebraica de los números, pero el empleo de las palabras racional e irracional puede dar a entender todo lo contrario. Los conceptos de rectas racionales y rectas irracionales de Euclides son más generales que los actuales de números racionales e irracionales. Por ello, M. L. Puertas [5] habla de recta racionalmente expresable en lugar de recta racional, y de recta no racionalmente expresable por irracional. Nosotros preferimos, por simplicidad, usar los términos racional e irracional pero teniendo en cuenta las precisiones de Puertas.

Como decíamos, Euclides amplia el concepto de racional. Si se asume que la recta determinada ρ es racional, no solamente ρk (recordemos que $k = \frac{m}{n}$, $m,\, n \in \mathbb{Z}^+$) será racional, sino cualquier recta –conmensurable en longitud o conmensurable únicamente en cuadrado con ρ– también será racional. Así pues, $\rho\sqrt{k}$ es racional de acuerdo con Euclides.

En resumen, si suponemos que la longitud de la recta determinada es la unidad, las rectas racionales son las que tienen longitud k o $k^{1/2}$, según que las rectas sean conmensurables en longitud o únicamente en cuadrado, respectivamente, con la unidad. Todas las demás rectas serán irracionales.

Definición 2.4. *Y el cuadrado de la recta determinada llámese racional. Y los cuadrados conmensurables con éste también se llamarán racionales; pero los inconmensurables con él llámense irracionales; y las rectas que los producen llámense irracionales, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas rectas que originan cuadrados de áreas iguales a las de dichas figuras.*

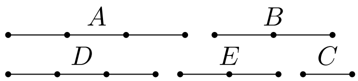
En este caso, como el cuadrado de la recta determinada es racional, $k\rho^2$ también es racional. Pero $\rho^2\sqrt{k}$ es irracional y, asimismo, el lado de este cuadrado, $\rho\sqrt[4]{k}$. Por tanto, si el área del cuadrado ρ^2 es la unidad, las áreas racionales tienen el valor k. Entonces, el resto serán irracionales. Así pues, los cuadrados tienen áreas racionales si, y solo si, sus lados tienen longitud racional [7, p. 282].

2.3. Algunos resultados

A continuación, se han elegido algunas de las 47 proposiciones que forman la primera parte del Libro X. Procuraremos ser respetuosos con las demostraciones de Euclides, aunque a veces se empleen símbolos y notaciones más actuales.

Proposición 2.5 (X-5). *Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.*

Demostración. Sean A y B dos magnitudes conmensurables. Por definición, tendrán una medida común, digamos C.



Es decir, $A = mC$ y $B = nC$, para ciertos m, $n \in \mathbb{Z}^+$ (en la figura $m = 3$ y $n = 2$).

Supongamos que en el número D haya tantas unidades –denotemos a la unidad por U– como veces C mide a A, esto es, mU; y sea E otro número con las mismas unidades que C mide a B, es decir, nU. Entonces, C mide a A según las unidades de D y D es medido por la unidad U según su número de unidades; por tanto, la unidad U mide al número D la misma cantidad de veces que la magnitud C mide a la magnitud D. Así por [*VII-Def.20*]

$$\frac{U}{D} = \frac{C}{A} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{D}{U}. \tag{2.1}$$

Análogamente,

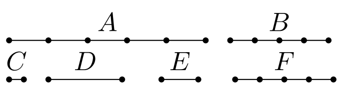
$$\frac{C}{B} = \frac{U}{E}. \tag{2.2}$$

Por igualdad, de (2.1) y (2.2) se concluye que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{D}{E}$. *Q.E.D*

Euclides ya había analizado la proporcionalidad de cuatro magnitudes en el Libro V ([*V-Def.5*]) y de cuatro números en el Libro VII ([*VII-Def.20*]). Pero en esta proposición relaciona dos magnitudes (A y B) con dos números (D y E).

Proposición 2.6 (X-6). *Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán conmensurables.*

Demostración. Por hipótesis, supongamos que las magnitudes A y B guardan entre sí la misma razón que el número D guarda con el número E. Dividamos A en tantas magnitudes iguales como unidades hay en D y representamos por C una de estas magnitudes iguales. Constrúyase entonces la magnitud F con tantas unidades iguales a C como unidades U haya en el número E.



Sigue, entonces,

$$\frac{C}{A} = \frac{U}{D} \Rightarrow \frac{A}{C} = \frac{D}{U}. \tag{2.3}$$

Análogamente,

$$\frac{C}{F} = \frac{U}{E}. \tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) se infiere que,

$$\frac{A}{F} = \frac{D}{E}. \tag{2.5}$$

Ahora bien,

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E}. \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) y [*V-11*] se llega a que

$$\frac{A}{F} = \frac{A}{B} \Rightarrow \; B = F, \tag{2.7}$$

a tenor de [*V-9*]. Como C mide a F, a la vista de (2.7) también medirá a B. Además, C ya medía a A por hipótesis. En definitiva, C mide tanto a A como a B, así que A y B son conmensurables. *Q.E.D*

Porisma 2.1. Si hay dos números D y F y una recta A, es posible construir otra recta F tal que $\frac{D}{E} = \frac{A}{F}$.

Si tomamos la media proporcional B de A y F, esto es, $\frac{A}{B} = \frac{B}{F}$, se tiene $\frac{D}{E} = \frac{A}{F} = \frac{A}{B^2/A} = \frac{A^2}{B^2}$, es decir, los números D y E guardan la misma razón que los cuadrados obtenidos sobre las rectas A y B.

El fundamental teorema que sigue se debe a Teeteto, matemático griego (417-369 a. C.). Nos limitamos a comentarlo.

Proposición 2.7 (X-9). *Los cuadrados de rectas conmensurables en longitud guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado; y los cuadrados que guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tendrán también los lados conmensurables en longitud. Pero los cuadrados de las rectas inconmensurables en longitud no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, y los cuadrados que no guardan entre sí la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado tampoco tendrán los lados conmensurables en longitud.*

Nótese que si $A \; \mathrm{C_L} \; B$, entonces $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ para ciertos números C y D, a tenor de la Proposición 2.5. El resultado sigue del hecho de que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2}.$$

Luego, $A \; \mathrm{C_L} \; B \Rightarrow \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2}$.

Y, recíprocamente, puesto que los matemáticos griegos solo operaban con cantidades positivas, el razonamiento de Euclides equivale a establecer que $\frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. De donde, por la Proposición 2.6, se tiene que $A \; \mathrm{C_L} \; B$.

La segunda parte del aserto está constituida por los contrarrecíprocos de los anteriores resultados,

$$A \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, B \Rightarrow \frac{A^2}{B^2} \neq \frac{C^2}{D^2} \quad \text{y} \quad \frac{A^2}{B^2} \neq \frac{C^2}{D^2} \Rightarrow A \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, B.$$

Proposición 2.8 (X-11). *Si cuatro magnitudes son proporcionales y la primera es conmensurable con la segunda, también la tercera será conmensurable con la cuarta, y si la primera es inconmensurable con la segunda, la tercera será también inconmensurable con la cuarta.*

Demostración. Sean A, B, C y D cuatro magnitudes proporcionales, esto es,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}. \tag{2.8}$$

Supongamos que $A \mathrm{C}\, B$. Por la Proposición 2.5 existirán dos números X e Y tal que $\frac{A}{B} = \frac{X}{Y}$. De aquí y (2.8) se deduce que $\frac{C}{D} = \frac{X}{Y} \Rightarrow C \mathrm{C}\, D$.

Asumamos ahora que $A \not\mathrm{C}\, B$. Por [*X-7*][1] se tiene de forma análoga que $\frac{A}{B} \neq \frac{X}{Y}$, es decir, $\frac{C}{D} \neq \frac{X}{Y} \Rightarrow C \not\mathrm{C}\, D$. *Q.E.D*

Proposición 2.9 (X-12). *Las magnitudes conmensurables con una misma magnitud son también conmensurables entre sí.*

Demostración. Supongamos que las magnitudes A, B y C son tales que $A \mathrm{C}\, C$ y $B \mathrm{C}\, C$. En virtud de la Proposición 2.5 existen números D y E tales que

$$\frac{A}{C} = \frac{D}{E}. \tag{2.9}$$

Y números F y G de modo que

$$\frac{C}{B} = \frac{F}{G}. \tag{2.10}$$

Pero dadas las razones $\frac{D}{E}$ y $\frac{F}{G}$ se pueden determinar números H, K y L, teniendo en cuenta [*VIII-8*], de forma que: $\frac{D}{E} = \frac{H}{K}$ y $\frac{F}{G} = \frac{K}{L}$.

De esto, (2.9) y (2.10) se obtiene

$$\frac{A}{C} = \frac{H}{K}, \quad \frac{C}{B} = \frac{K}{L} \quad \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{H}{L}.$$

Por tanto, $A \mathrm{C}\, B$. *Q.E.D*

[1] La Proposición [*X-7*] establece que "las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número".

Nótese que a partir de [*VIII-8*] se tiene que dadas las razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$,... existen números p, q, r, s,... tales que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, $\frac{c}{d} = \frac{q}{r}$, $\frac{e}{f} = \frac{r}{s}$,...

Por ejemplo, para $\frac{4}{6}$ y $\frac{9}{12}$, como $m.c.m(6,9) = 18$, entonces, se tiene que $\frac{4}{6} = \frac{12}{18}$ y $\frac{9}{12} = \frac{18}{24}$.

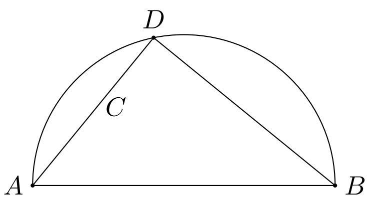
De la proposición anterior y procediendo por reducción al absurdo, se infiere en lo siguiente.

Proposición 2.10 (X-13). *Si hay dos magnitudes conmensurables y una de ellas es inconmensurable con otra magnitud cualquiera, también la que restante será inconmensurable con ella.*

$$A \,\mathrm{C}\, B \quad \text{y} \quad A \not{\mathrm{C}}\, C \quad \Rightarrow \quad B \not{\mathrm{C}}\, C.$$

Lema 2.11. *Dadas dos rectas desiguales hallar en cuánto el cuadrado de la mayor supera el cuadrado de la menor.*

Sean AB y C las rectas desiguales ($AB > C$). Trácese la semicircunferencia de diámetro AB y adáptese a ella la recta $AD = C$ [*IV-1*].



Al ser el triángulo ABD rectángulo [*III-31*], por el Teorema de Pitágoras [*I-47*] se tiene que

$$(AB)^2 = C^2 + (DB)^2.$$

Así, el cuadrado sobre AB supera al cuadrado sobre C en el cuadrado sobre DB.

Análogamente, dadas las rectas AD y DB, poniéndolas formando un ángulo recto, se puede hallar AB tal que $(AB)^2 = (AD)^2 + (DB)^2$.

Luego, podremos determinar un segmento de longitud c a partir de otros dos de longitudes a y b ($a > b$): $c = \sqrt{a^2 \pm b^2}$. *Q.E.D*

Proposición 2.12 (X-14). *Si cuatro rectas son proporcionales, y el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta conmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta conmensurable con la tercera. Y si el cuadrado de la primera es mayor que el de la segunda en el cuadrado de una recta inconmensurable con la primera, el cuadrado de la tercera será también mayor que el de la cuarta en el cuadrado de una recta inconmensurable con la tercera.*

Demostración. Sean cuatro rectas A, B, C y D tales que $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ y sean otras dos rectas E y F de modo que $A^2 = B^2 + E^2$ y $C^2 = D^2 + F^2$. Se tiene que

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2} \Leftrightarrow \frac{B^2 + E^2}{B^2} = \frac{D^2 + F^2}{D^2}.$$

De esto, por separación [*V-17*], sigue que

$$\frac{B^2 + E^2}{B^2} = \frac{D^2 + F^2}{D^2} \Rightarrow \frac{E^2}{B^2} = \frac{F^2}{D^2}.$$

Y de aquí, recurriendo a [*VI-22*], se tiene $\dfrac{E}{B} = \dfrac{F}{D}$.
Por tanto,

$$\frac{B}{E} = \frac{D}{F} \quad y \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{E} = \frac{C}{F}.$$

Como consecuencia de esto y de la Proposición 2.8 se concluye que si $A \mathrel{\mathrm{C}} E$, entonces $C \mathrel{\mathrm{C}} F$; y si $A \not\mathrel{\mathrm{C}} E$, entonces $C \not\mathrel{\mathrm{C}} F$. *Q.E.D*

Si $A = a$, $B = b$, $C = c$ y $D = d$, entonces, se tiene que $E = \sqrt{a^2 - b^2}$ y $F = \sqrt{c^2 - d^2}$. Este aserto afirma que $\sqrt{a^2 - b^2}$ es conmensurable (inconmensurable) con a, si $\sqrt{c^2 - d^2}$ es conmensurable (inconmensurable) con c.

Nota 2.2. En cuanto a la adición.

(I) Si sumamos dos magnitudes AB y BC, se tiene [*X-15*]

$$AB \mathrel{\mathrm{C}} BC \quad \Rightarrow \quad AC \mathrel{\mathrm{C}} AB \quad \text{y} \quad AC \mathrel{\mathrm{C}} BC.$$

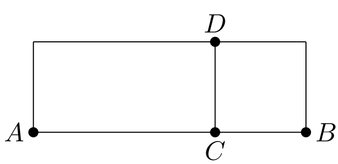
Recíprocamente, $AC \mathrel{\mathrm{C}} AB \Rightarrow AC \mathrel{\mathrm{C}} BC$.

(II) Análogamente, se tiene [*X-16*] si

$$AB \not\mathrel{\mathrm{C}} BC \quad \Rightarrow \quad AC \not\mathrel{\mathrm{C}} AB \quad \text{y} \quad AC \not\mathrel{\mathrm{C}} BC.$$

Por otra parte, $AC \not\mathrel{\mathrm{C}} AB \Rightarrow AB \not\mathrel{\mathrm{C}} BC$.

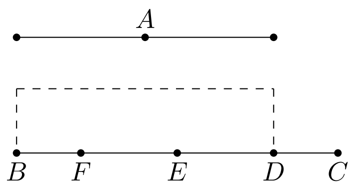
Lema 2.13. *Si se aplica a una recta un paralelogramo deficiente en la figura de un cuadrado, el paralelogramo aplicado es igual al rectángulo producido por los segmentos de recta que resultan de la aplicación.*



Evidentemente el rectángulo $AD = [AC, CD]$ tiene como lados los segmentos definidos en la recta AB por la aplicación, a saber, AC y CB, pues $CB = CD$ por ser un cuadrado.

Proposición 2.14 (X-17). *Si hay dos rectas desiguales, y se aplica a la mayor un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, y si la divide en partes conmensurables en longitud, el cuadrado de la mayor será mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con la mayor. Y si el cuadrado de la mayor es mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable con ella, y se aplica a la mayor un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor y deficiente en la figura de un cuadrado, la divide en partes conmensurables en longitud.*

Demostración. Demostraremos solo la primera parte del aserto. Sean A y BC dos rectas ($BC > A$) y aplíquese a BC un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado A (cuadrado contenido sobre la mitad de A).



Tal paralelogramo será el rectángulo $[BD, DC]$, según el Lema 2.13. A continuación dividimos BC en dos partes iguales por el punto E y hacemos $FE = ED$, lo que entraña que $BF = DC$.

Supongamos que $BD \; \mathrm{C_L} \; DC$. Se tiene que

$$EC^2 = (ED + DC)^2 = ED^2 + 2ED.DC + DC^2 = ED^2 + DC(2ED + DC) =$$

$$= ED^2 + DC(FE + ED + BF), \text{ ya que } ED = FE \text{ y } BF = DC.$$

Luego, $EC^2 = ED^2 + DC.BD$ y, multiplicando por 4,

$$4EC^2 = 4ED^2 + 4DC.BD. \tag{2.11}$$

Recuérdese que el rectángulo es la cuarta parte del cuadrado A, esto es, $4(BD.DC) = A^2$. Además, $FE = ED$, de modo que $4ED^2 = (2ED)^2 = FD^2$. Por último, al ser E el punto medio de BC sigue que $4EC^2 = (2EC)^2 = BC^2$. Con estas observaciones se puede escribir (2.11) de la forma, $BC^2 = A^2 + FD^2$, con lo cual se ha verificado que el cuadrado de BC es mayor que el cuadrado de A en el cuadrado de FD. Nos falta ver que $FD \; \mathrm{C} \; BC$.

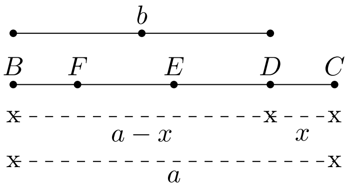
Por la Nota 2.2(i), dado que por hipótesis $BD \; \mathrm{C_L} \; DC$, se tiene

$$BC = BD + DC \quad \mathrm{C} \quad DC = BF$$

Entonces, $BC \; \mathrm{C} \; BF + DC \Rightarrow BC \; \mathrm{C} \; BC - \{BF + CD\} = FD$, esto es, $BC \; \mathrm{C} \; FD$. *Q.E.D*

Nota 2.3. La proposición [*X-18*] es análoga a la Proposición 2.14, solo que reemplazando “conmensurable”por “inconmensurable”.

Veamos qué significa realmente esta proposición anterior y su análogo. Recordemos la construcción de la prueba: el rectángulo $[BD, DC] = \dfrac{A^2}{4}$.



Traducido a un lenguaje más actual, significa que $(a-x)x = \dfrac{b^2}{4}$, que es la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - ax + \frac{b^2}{4} = 0, \qquad (2.12)$$

de soluciones $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-b^2}}{2}$. Entonces,

$$DC = x = \frac{a - \sqrt{a^2-b^2}}{2}; \quad BD = a - x = \frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{2};$$

$$FD = BC - 2x = \sqrt{a^2-b^2}; \quad BC = a.$$

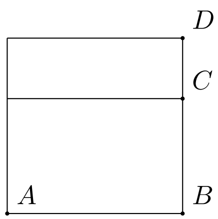
Como las conclusiones de los asertos previos fueron que:

$$BD \mathrel{\mathrm{C}} DC \iff BC \mathrel{\mathrm{C}} DF, \quad BD \not\mathrel{\mathrm{C}} DC \iff BC \not\mathrel{\mathrm{C}} DF;$$

entonces, las raíces de la ecuación (2.12) son conmensurables (inconmensurables) con a si, y solo si, $\sqrt{a^2-b^2}$ es conmensurable (inconmensurable) con a.

Proposición 2.15 (X-19). *El rectángulo comprendido por rectas racionales conmensurables en longitud, es racional.*

Demostración. Sea el rectángulo $AC = [AB, BC]$, siendo AB y BC rectas racionales, $AB \mathrel{\mathrm{C_L}} BC$.



Construyamos sobre AB el cuadrado $AD = [AB, BD]$, $AB = BD$.

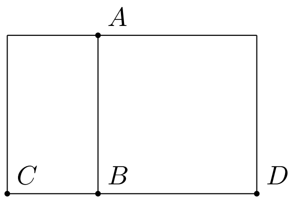
Como $AD = AB^2$ y AB es una recta racional, AD también es racional (Definición 2.4). Por otra parte, $AB \mathrel{\mathrm{C_L}} BC$, $AB = BD \Rightarrow BD \mathrel{\mathrm{C_L}} BC$.

Además, en base a [*VI-1*], sigue que $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{[AB, AB]}{[AB, BC]} = \dfrac{AD}{AC}$.

Por tanto, se infiere que $AD \mathrel{\mathrm{C}} AC$ y, al ser AD racional, $AC = [AB, BC]$ es también racional, en virtud de la Proposición 2.8. *Q.E.D*

Proposición 2.16 (X-20). *Si se aplica un área racional a una recta racional, produce como anchura una recta racional y conmensurable en longitud con aquella a la que se ha aplicado.*

Demostración. Apliquemos el área racional $AC = [AB, BC]$ a la recta racional AB de forma que dé lugar a la anchura BC. Veamos que BC es racional y $BC \mathrm{C} AB$. Para ello, sea el cuadrado $AD = [AB, BD]$, $BD = AB$, sobre AB.

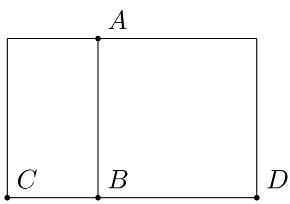


Entonces, AD es racional (Definición 2.4) y, como por hipótesis, AC es racional, concluimos que AD y AC son conmensurables. Por otra parte, [*VI-1*] sigue que: $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{[AB, AB]}{[AB, BC]} = \dfrac{AD}{AC}$.

Por tanto, como $AD \mathrm{C} AC \Rightarrow DB \mathrm{C} BC$, esto es, $AB \mathrm{C} BC$, ya que $DB = AB$. Pero AB es racional; así pues, BC es racional y $BC \mathrm{C} AB$. *Q.E.D*

Proposición 2.17 (X-21). *El rectángulo comprendido por rectas racionales y conmensurables sólo en cuadrado no es racional y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racional, se le llama a este último medial.*

Demostración. Sea el rectángulo $AC = [AB, BC]$ de lados AB y BC racionales, tales que $AB \mathrm{C}^2 BC$. Veamos que AC y el lado del cuadrado igual a dicho rectángulo son irracionales. Para ello construyamos el cuadrado $AD = [AB, BD]$, $AB = BD$, sobre AB. Entonces AD es racional (Definición 2.4).



Por otra parte, $AB \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}} BC$ y $AB = BD$, por lo que $BD \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}} BC$. Ahora bien, invocando [*VI-1*],

$$\frac{BD}{BC} = \frac{[AB, AB]}{[AB, BC]} = \frac{AD}{AC}.$$

Así pues, $AD \not\mathrm{C} AC$ a tenor de la Proposición 2.8. Pero AD es racional, entonces AC es irracional (Definición 2.4) y, consecuentemente, el lado del cuadrado igual a ese rectángulo también es irracional. A este lado se le denomina medial. *Q.E.D*

Nota 2.4. Se denomina medial porque esta recta es la media proporcional (de dos rectas conmensurables solo en cuadrado) de CB y BD:

$$BC.AB = BC.BD = l^2 \iff \frac{BC}{l} = \frac{l}{BD}.$$

Los lados del rectángulo se pueden expresar como ρ, $\rho\sqrt{k}$ (recordemos que $k = \frac{m}{n}$, m, $n \in \mathbb{Z}^+$), siendo ρ una recta racional. El área del rectángulo es $\rho^2\sqrt{k}$ y el lado del cuadrado equivalente $\rho\sqrt[4]{k}$.

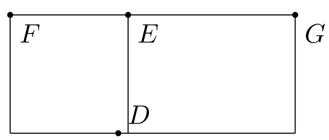
Así, la recta medial es el lado del cuadrado igual a un rectángulo cuyos lados son rectas racionales y conmensurables solo en cuadrado. Este rectángulo, como hemos establecido, es irracional y por tanto, también la medial lo es.

De acuerdo con la Definición 2.3, entonces ρ y $\rho\sqrt{k}$ son racionales, ya que $\rho\sqrt{k}\ \mathrm{C}^2\ \rho$ (pues $\frac{(\rho\sqrt{k})^2}{\rho^2} = k$). El área del rectángulo es $\rho^2\sqrt{k}$, que es irracional por $\rho^2\sqrt{k} \not\mathrm{C}\ \rho^2$ (Definición 2.4). Por tanto, la recta medial tiene longitud

$$\sqrt{\rho^2\sqrt{k}} = \rho\sqrt[4]{k},$$

cantidad irracional. En particular, si $\rho = 1$, el rectángulo medial y la recta medial son $\sqrt{k}$ y $\sqrt[4]{k}$, respectivamente.

Lema 2.18. *Si hay dos rectas, entonces la primera es a la segunda como el cuadrado de la primera es al rectángulo comprendido por las dos rectas.*



Si FE y EG son las dos rectas se tiene: $\dfrac{FE}{EG} = \dfrac{FE.ED}{EG.ED} = \dfrac{FD}{DG}$,

donde $FD = [FE, ED] = [FE, FE]$ y $DG = [EG, ED] = [EG, FE]$, puesto que $FE = ED$. *Q.E.D*

Proposición 2.19 (X-22). *El cuadrado de una recta medial, si se aplica a una recta racional, produce una anchura racional e inconmensurable en longitud con aquella a la que se aplica.*

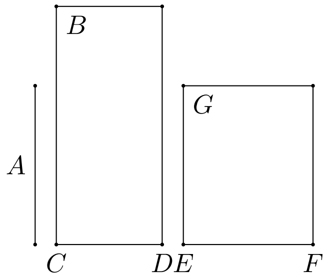
Demostración. Sean A la recta medial y BC la recta racional. Construyamos el rectángulo BD igual al cuadrado de lado A, esto es,

$$A^2 = BC.CD. \tag{2.13}$$

Por otra parte, A es medial por lo que su cuadrado es igual a un rectángulo de lados racionales y conmensurables solo en cuadrado, es decir,

$$A^2 = GE.EF. \tag{2.14}$$

donde GE y EF son racionales, $GE\ \mathrm{C}^2\ EF$.



De (2.13) y (2.14) se sigue que $BC.CD = GE.EF$, que se puede escribir

$$\frac{BC}{GE} = \frac{EF}{CD} \Rightarrow \frac{BC^2}{GE^2} = \frac{EF^2}{CD^2}. \quad (2.15)$$

Al ser racionales, $BC^2 \mathrm{C}\, GE^2$.

Luego, por (2.15) y la Proposición 2.8, $EF^2 \mathrm{C}\, CD^2$. Ahora bien, EF^2 es racional, por lo que CD^2 es racional (Definición 2.4) y, por ello, CD también.

Por otra parte, $EF \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, GE$ (solo son conmensurables en cuadrado). Y, por el Lema 2.18,

$$\frac{EF}{GE} = \frac{[EF, EF]}{[GE, EF]} \Rightarrow EF^2 \not\mathrm{C}\, [GE, EF].$$

Pero $EF^2 \mathrm{C}\, CD^2$, por lo que $CD^2 \not\mathrm{C}\, [GE, EF]$. Además, los rectángulos $[BC, CD]$ y $[GE, EF]$ son conmensurables, pues son iguales a A^2. Tenemos, invocando la Proposición 2.10, $[BC, CD] \mathrm{C}\, [GE, EF]$ y $CD^2 \not\mathrm{C}\, [GE, EF] \Rightarrow$ $\Rightarrow CD^2 \not\mathrm{C}\, [BC, CD]$.

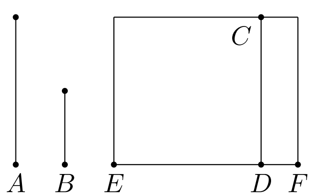
De nuevo, usando el Lema 2.18,

$$\frac{CD}{BC} = \frac{CD^2}{BC.CD} = \frac{CD^2}{[BC, CD]},$$

de donde se infiere que $CD \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, BC$, en virtud de la Proposición 2.8. Así pues, CD es inconmensurable en longitud con BC y racional. *Q.E.D*

Proposición 2.20 (X-23). *Una recta conmensurable con una recta medial es medial.*

Demostración. Sean A medial y $B \mathrm{C}\, A$. Veamos que B es medial también.



En efecto, considérese la recta racional CD, sobre la que aplicaremos el rectángulo $EC = [ED, DC]$ de área igual a A^2. Por la proposición previa, la anchura ED es racional e inconmensurable en longitud con CD.

Análogamente, sea el rectángulo $CF = [CD, DF]$ de área igual a B^2, siendo su anchura DF. Ahora bien, $A \mathrm{C}\, B \Rightarrow A^2 = ED.DC \mathrm{C}\, FD.DC = B^2$, de donde, $\dfrac{[ED, DC]}{[CD, DF]} = \dfrac{A^2}{B^2} = \dfrac{ED.DC}{FD.DC} = \dfrac{ED}{FD}$.

En consecuencia y teniendo en cuenta que $A^2 \text{ C } B^2$, usando la Proposición 2.8 se deduce que $ED \text{ C}_\text{L}\, FD$. Puesto que ED es racional, por la Definición 2.3, FD también lo es. Además, en virtud de la Proposición 2.10, como $ED \text{ C}_\text{L}\, FD$ y $ED \not\text{C}_\text{L}\, CD$, se infiere que $DF \not\text{C}\, CD$. De este modo, CD y DF son racionales y conmensurables solo en cuadrado. Por la Proposición 2.17, la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo $[FD, DC]$ es medial. En definitiva, $[FD, DC] = B^2$ y B^2 es medial, por lo cual B es medial. *Q.E.D*

Porisma 2.2. "Toda área conmensurable con un área medial es medial".

Recordemos que la longitud de una recta medial es $\rho\sqrt[4]{k}$, por lo cual el área medial vale $\rho^2\sqrt{k}$.

Nota 2.5. Resumimos algunas proposiciones, limitándonos a interpretar sus enunciados desde una perspectiva más actual.

(I) "El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables en longitud es medial" ([*X-24*]).

Las rectas mediales $k^{1/4}\rho$ y $\lambda k^{1/4}\rho$, donde $\lambda = \frac{m}{n}$, m, $n \in \mathbb{Z}^+$, son conmensurables en longitud porque $\dfrac{\rho k^{1/4}}{\lambda\rho k^{1/4}} = \dfrac{1}{\lambda}$ (Definición 2.1).

El rectángulo es medial, pues $[\rho k^{1/4}, \lambda\rho k^{1/4}] = \lambda\rho^2 k^{1/2}$.

(II) "El rectángulo comprendido por rectas mediales conmensurables solo en cuadrado o es racional o es medial" ([*X-25*]).

Las rectas mediales $k^{1/4}\rho$ y $\sqrt{\lambda}k^{1/4}\rho$ son conmensurables solo en cuadrado, ya que $\dfrac{\rho k^{1/4}}{\sqrt{\lambda}\rho k^{1/4}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (Definición 2.2).

El área del rectángulo comprendido por ellas $[k^{1/4}\rho, \sqrt{\lambda}k^{1/4}\rho] = \sqrt{\lambda}\rho^2 k^{1/2}$ que es medial en general. Pero, si $\sqrt{\lambda} = k'\sqrt{k}$, con $k' = \frac{m}{n}$, m,$n \in \mathbb{Z}^+$, $[k^{1/4}\rho, \sqrt{\lambda}k^{1/4}\rho] = k'k\rho^2$, que es una área racional.

(III) "Un área medial no excede a otra medial en un área racional" ([*X-26*]).

Esto significa que $\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2 \neq k'\rho^2$, esto es, $\sqrt{k} - \sqrt{\lambda} \neq k'$.

(IV) "Hallar rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo racional" ([*X-27*]).

Las rectas mediales $k^{1/4}\rho$ y $k^{3/4}\rho$ solo son conmensurables en cuadrado, puesto que por las Definiciones 2.1 y 2.2 se tiene: $\dfrac{k^{1/4}\rho}{k^{3/4}\rho} = \dfrac{1}{k^{1/2}}$.

Pero el área del rectángulo es racional, pues $[k^{1/4}\rho, k^{3/4}\rho] = k\rho^2$.

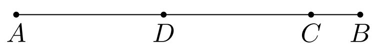
(V) “Hallar rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprendan un rectángulo medial” ([*X-28*]).

Las rectas $k^{1/4}\rho$ y $\dfrac{\lambda^{1/2}\rho}{k^{1/4}}$ son mediales (la última se puede reescribir $\lambda^{1/2}k'^{1/4}\rho$) y solo conmensurables en cuadrado, pues $\dfrac{k^{1/4}\rho}{\lambda^{1/2}\frac{\rho}{k^{1/4}}} = \dfrac{k^{1/2}}{\lambda^{1/2}} = \dfrac{1}{k''^{1/2}}$.

Y el área del rectángulo que forman las rectas es medial, pues se verifica $[k^{1/4}\rho, \lambda^{1/2}\dfrac{\rho}{k^{1/4}}] = \lambda^{1/2}\rho^2$.

Lema 2.21. *Hallar dos números cuadrados tales que su suma también lo sea.*

Demostración. Consideremos dos números AB y BC, ambos pares o impares. Esto implica que la diferencia AC es par. Dividamos AC en dos partes iguales por el punto $D : AD = DC$.



Supongamos que AB y BC son números planos semejantes o números cuadrados (semejantes también). Nótese que, teniendo presente que $AC = 2DC$,

$$\begin{aligned} AB.BC + DC^2 &= (AC + BC)BC + DC^2 = AC.BC + BC^2 + DC^2 = \\ &= 2DC.BC + BC^2 + DC^2 = BD^2, \end{aligned}$$

esto es,

$$AB.BC + DC^2 = BD^2. \tag{2.16}$$

Ahora bien, en nuestras hipótesis, $AB.BC$ es un número cuadrado. En efecto, si $AB = [a, b]$ y $BC = [c, d]$ son números semejantes, se satisface que $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ ([*VII,Def.22*]). Entonces, $AB.BC = a.b.c.d = \dfrac{bc}{d}.bcd = (bc)^2$.

Hemos pues, determinado dos números cuadrados (uno, $AB.BC$; otro, el cuadrado DC^2) que, sumados, dan el cuadrado BD^2 [*IX-1*]. De (2.16) se tiene que $BD^2 - DC^2 = AB.BC$, es decir, la diferencia de dos números cuadrados es otro número cuadrado. En cambio, si los números planos no son semejantes, hemos hallado dos cuadrados, BD^2 y CD^2, cuya diferencia, $AB - BC$, no es un cuadrado. *Q.E.D*

Análogamente se prueba el siguiente lema.

Lema 2.22. *Encontrar dos números cuadrados tales que su suma no lo sea.*

Ejemplo 2.1. Los números planos $6 = [2, 3]$ y $54 = [6, 9]$ son semejantes (ya que $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$) y pares. Aquí $AB = 54$, $BC = 6$, $AC = 54 - 6 = 48$, $DC = 24$ y $BD = BC + CD = 6 + 24 = 30$. Se cumple (2.16), ya que $54.6 + 24^2 = 18^2 + 24^2 = 30^2$.

Ejemplo 2.2. En cambio, los números planos $15 = [3, 5]$ y $135 = [9, 15]$ son semejantes, pero impares. Ahora $AB = 135$, $BC = 15$, $AC = 120$, $BD = 75$ y $AD = DC = 60$. Se tiene $AB.BC + DC^2 = 135.15 + 60^2 = 45^2 + 60^2 = 75^2$, que es (2.16).

En general el Lema 2.21 se reduce a que

$$(mnp^2)(mnq^2) + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2,$$

siempre que los números mnp^2 y mnq^2 sean ambos pares o impares.

Para el primer ejemplo se tiene

$$(2.3.1^2)(2.3.3^2) + \left(\frac{2.3.3^2 - 2.3.1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2.3.3^2 + 2.3.1^2}{2}\right)^2,$$

es decir, $18^2 + 24^2 = 30^2$. Para el segundo ejemplo,

$$(3.5.1^2)(3.5.3^2) + \left(\frac{3.5.3^2 - 3.5.1^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{3.5.1^2 + 3.5.3^2}{2}\right)^2,$$

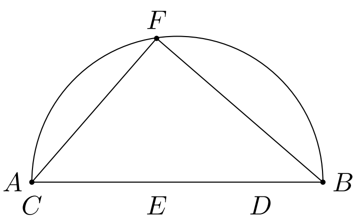
o sea, $45^2 + 60^2 = 75^2$.

Proposición 2.23 (X-29). *Hallar dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con la mayor.*

Demostración. Considérese la recta racional AB y dos números cuadrados CD y DE de modo que su diferencia CE no sea un cuadrado (Lema 2.21). Trácese el semicírculo AFB sobre AB, de modo que por el Porisma 2.1 se cumpla

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AB^2}{AF^2} \tag{2.17}$$

y dibújese la cuerda FB. Ahora, de (2.17) y la Proposición 2.6 se infiere que AB^2 C AF^2 y, como AB es racional, sigue que AF^2 es racional y, por tanto, AF también es racional (Definición 2.4).



Por otra parte, como queremos que CE no sea un cuadrado, CD no guarda con CE la razón que un cuadrado con un cuadrado. Luego, por (2.17), AB^2 tampoco guardará con AF^2 la razón que un cuadrado con un cuadrado, por lo que $AB \not{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}\, AF$, en virtud de la Proposición 2.7.

En definitiva, AB y AF son rectas racionales conmensurables solo en cuadrado. Además, como el triángulo AFB es rectángulo ([*III-31*]), por el Teorema de Pitágoras ([*I-47*]) y propiedades de las proporciones ([*V-19*]) se deduce de (2.17) que

$$\frac{CD - CE}{CD} = \frac{AB^2 - AF^2}{AB^2} \iff \frac{ED}{CD} = \frac{FB^2}{AB^2}. \tag{2.18}$$

Se ve en (2.18) que $\dfrac{FB^2}{AB^2}$ es un cociente de los números cuadrados ED y CD, lo cual entraña que $AB\ \mathrm{C}^2\ BF$, en base a la Proposición 2.7. En conclusión, $AB^2 = AF^2 + BF^2$ siendo $AB\ \mathrm{C}_{\mathrm{L}}\ BF$ y $AB\ \mathrm{C}^2\ AF$. *Q.E.D*

Definamos $x = AB = \rho$ e $y = AF = \rho\sqrt{1-k^2}$, donde $k = \sqrt{\frac{DE}{CD}} = \frac{FB}{AB}$, por (2.18). Obsérvese que $BF = \sqrt{x^2 - y^2}$ y se cumple $\rho^2 = \rho^2(1-k^2) + \rho^2 k^2$, siendo $x\ \mathrm{C}^2\ y$ y $\sqrt{x^2-y^2}\ \mathrm{C}_{\mathrm{L}}\ x$.

Proposición 2.24 (X-30). *Hallar dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable en longitud con ella.*

Demostración. La misma construcción que en el aserto anterior es válida, con la única diferencia que ahora los números cuadrados son CE y ED, cuya suma CD no es un cuadrado (Lema 2.22). Como antes, AB y AF son racionales, y $AB\ \mathrm{C}^2\ AF$.

Ahora bien, puesto que CD no guarda con ED la razón que dos números cuadrados, se infiere de (2.18) que $\dfrac{AB^2}{BF^2}$ tampoco es el cociente de dos números cuadrados, por lo cual $AB \not{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}\, BF$, a la vista de la Proposición 2.7. *Q.E.D*

En este caso resulta que

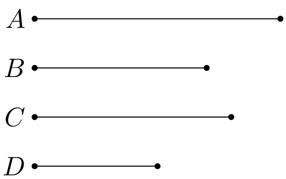
$$x = AB = \rho, \quad y = AF = \frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}} \ \text{ y } \ BF = \frac{k\rho}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Nótese que $AB^2 = AF^2 + BF^2$, por lo que $BF = \sqrt{x^2-y^2}$. De nuevo, $k = \sqrt{\dfrac{DE}{CD}} = \dfrac{BF}{AF}$, lo que implica que $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{AF}{AB}$ y $\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{BF}{AB}$.

Entonces, $\rho\ \mathrm{C}^2\ \dfrac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$ y $\rho \not{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}\, \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\rho$, es decir, $x\ \mathrm{C}^2\ y$ y $\sqrt{x^2-y^2} \not{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}}\, x$.

Proposición 2.25 (X-31). *Encontrar dos rectas mediales, conmensurables únicamente en cuadrado, que comprendan un área racional, tal que el cuadrado de la mayor sea más grande que el de la menor en el cuadrado de alguna recta conmensurable en longitud con la mayor.*

Demostración. Por la Proposición 2.23 podemos asegurar que existen rectas A, B racionales, $A \ \mathrm{C}^2\ B$ tales que $A^2 = B^2 + F^2$, donde la recta $F \ \mathrm{C_L}\ A$.



Sea $C^2 = [A, B]$. En virtud de la Proposición 2.17 $[A, B]$ es medial; luego, C^2 es medial y, en consecuencia, C es medial.

Sea ahora D la tercera proporcional de C y B, es decir, $B^2 = [C, D]$. Como B es racional, también lo es $[C, D]$.

Ahora bien,

$$\frac{A}{B} = \frac{[A, B]}{B^2} = \frac{C^2}{B^2} = \frac{C^2}{[C, D]} = \frac{C}{D},$$

es decir, a tenor de la Proposición 2.8, $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ y $A \ \mathrm{C}^2\ B \Rightarrow C \ \mathrm{C}^2\ D$.

De esto y al ser C medial, invocando la Proposición 2.20, resulta que D también es medial. Finalmente, como $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ y $A^2 = B^2 + F^2$, $F \ \mathrm{C_L}\ A$, de la Proposición 2.12 se infiere que $C^2 = D^2 + E^2$, donde $E \ \mathrm{C_L}\ C$.

Así pues, hemos determinado dos rectas racionales C y D, $C \ \mathrm{C}^2\ D$, tal que $[C, D]$ es racional y $C^2 = D^2 + E^2$, con $E \ \mathrm{C}^2\ C$. *Q.E.D*

Análogamente se puede establecer que $C^2 = D^2 + E^2$, con $E \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\ C$, siempre que $A^2 = B^2 + F^2$ y $F \not\mathrm{C}\ A$.

Cabe señalar que en el primer caso se tiene $x = C = \rho(1 - k^2)^{1/4}$ e $y = D = \rho(1 - k^2)^{3/4}$, donde $k = \dfrac{F}{A}$. Es decir,

$$x = C = \rho\left(\frac{B^2}{A^2}\right)^{1/4} = k^{1/4}\rho \quad \text{e} \quad y = \rho\left(\frac{B^2}{A^2}\right)^{3/4} = k'^{1/4}\rho',$$

que son rectas mediales, pues $A \ \mathrm{C}^2\ B$ entraña que $1 - k^2 = \dfrac{B^2}{A^2} = k'$ racional, y $\rho' = \sqrt{k'}\rho$ es racional, de acuerdo con la Definición 2.3. Además, $x \ \mathrm{C}^2\ y$ y el rectángulo $[x, y] = k'\rho^2$ es racional. Luego, xy es racional y $\sqrt{x^2 - y^2}\ \mathrm{C_L}\ x$, sin más que recordar que $E \ \mathrm{C_L}\ C$.

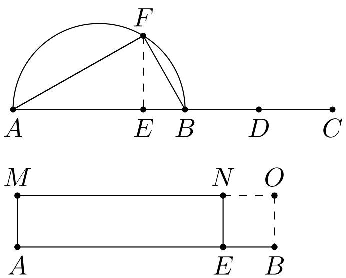
En el segundo caso se tiene, con $k = \frac{F}{B}$,

$$x = C = \frac{\rho}{(1 + k^2)^{1/4}} \quad \text{e} \quad y = D = \frac{\rho}{(1 + k^2)^{3/4}}.$$

Es decir, con la notación precedente, $x = C = k'^{1/4}\rho$ e $y = D = k'^{1/4}\rho'$. Se tiene que x e y son mediales, $[x, y] = \rho^2 k'$ racional y $x \ \mathrm{C}^2\ y$. Ahora xy es racional y $\sqrt{x^2 - y^2} \not\mathrm{C}\ x$.

Proposición 2.26 (X-33). *Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados racional pero el rectángulo comprendido por ellas, medial.*

Demostración. Sean dos rectas racionales AB y BC ($AB > BC$) tales que, por la Proposición 2.24, $AB\ \mathrm{C}^2\ BC$ y $AB^2 = BC^2 + PQ^2$, para cierta recta $PQ \not\mathrm{C}\ AB$.



Dividamos BC en dos partes iguales por el punto D y aplíquese a AB un rectángulo igual a la cuarta parte del cuadrado sobre BC y deficiente en un cuadrado. En otras palabras, tenemos un rectángulo AN, de área igual al cuadrado de BD (o de DC, ya que $BD = DC$), deficiente en el cuadrado EO (de lados $NE = EB$).

Esto significa algebraicamente que $AE.EB = BD^2$, es decir, a resolver la ecuación de segundo grado: $EB^2 - AB.EB + BD^2 = 0$, tal como se pudo ver en la Proposición 2.14. Una vez determinado EB, dibújese la semicircunferencia de diámetro AB y trácese por E la perpendicular a AB que cortará a dicha semicircunferencia en F.

Por la Nota 2.3 se sabe que el rectángulo $[AE, EB]$ cumple que $AE \not\mathrm{C}\ EB$. Además, el ángulo $\hat{F}$ es recto, pues $\widehat{AFB}$ es una semicircunferencia, valiendo los teoremas de Pitágoras, de la altura sobre la hipotenusa y de los catetos. Entonces,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BA.AE}{EB.BA} = \frac{AF^2}{BF^2} \quad \text{y} \quad AE \not\mathrm{C}\ EB \Rightarrow AF^2 \not\mathrm{C}\ BF^2,$$

esto es, AF y BF son inconmensurables en cuadrado.

Ahora bien, AB es racional, por lo que

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 \Rightarrow AF^2 + BF^2 \ \text{ es racional.} \tag{2.19}$$

Por otro lado, $[AE, EB] = BD^2$, por construcción, y $[AE, EB] = AE.EB = EF^2$, por el teorema de la altura. Por tanto, $EF = BD$ y, en consecuencia, $BC = 2EF$. Esto implica que, como por hipótesis $AB\ \mathrm{C}^2\ BC$, se tiene $AB\ \mathrm{C}^2\ EF$. Asimismo, $[AB, BC]\ \mathrm{C}\ [AB, EF]$ y $[AB, BC]$ es medial en virtud de la Proposición 2.17; se infiere que $[AB, EF]$ es medial por el Porisma 2.2.

Cabe destacar que $AB^2EF^2 = AB^2(AE.EB) = (AB.AE).(AB.EB) = AF^2BF^2 \Rightarrow AB.EF = AF.BF$; o lo que es equivalente, $[AB, EF] = [AF, FB]$, por lo que $[AF, FB]$ es medial. De esto último y (2.19) sigue el aserto. *Q.E.D*

El papel de AB y AF en la Proposición 2.24 lo juegan aquí AB y BC, esto es, $AB = \rho$ y $BC = \dfrac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$. Entonces, $EF = BD = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\rho}{2\sqrt{1+k^2}}$. Conforme a esto, si ponemos $AE = x$ y $EB = y$, se tiene (siendo $AE.EB = EF^2$):

$$\begin{cases} x + y = \rho \\ xy = \dfrac{\rho^2}{4(1+k^2)} \end{cases},$$

sistema cuyas soluciones son las de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - \rho x + \frac{\rho^2}{4(1+k^2)} = 0,$$

a saber, $x = \dfrac{\rho}{2}\left(1 + \dfrac{k}{2\sqrt{1+k^2}}\right)$; $y = \dfrac{\rho}{2}\left(1 - \dfrac{k}{2\sqrt{1+k^2}}\right)$.

Pero $AF^2 = AE^2 + EF^2 = x^2 + \dfrac{\rho^2}{4(1+k^2)} = \dfrac{\rho^2}{2} + \dfrac{k\rho^2}{2\sqrt{1+k^2}}$.

Así resulta

$$AF = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}\ .$$

Análogamente, de $BF^2 = EF^2 + EB^2$ se infiere que $BF = \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}}$.

Nótese, finalmente, que $AF^2 + BF^2 = \rho^2$ y

$$[AF, BF] = \frac{\rho^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \rho' k'^{1/2},$$

donde $\rho' = \dfrac{\rho^2}{2(1+k^2)}$ y $k' = 1 + k^2$, cumplen las conclusiones de este teorema.

Nota 2.6. Los siguientes resultados serán comentados brevemente.

(I) “Hallar dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial, de modo que el cuadrado de la mayor sea mayor que el de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con la mayor”([*X*-*32*]).

Las rectas mediales $x = \rho\lambda^{1/4}$ e $y = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{1-k^2}$ verifican,

$$(\rho\lambda^{1/4})^2 = (\rho\lambda^{1/4}\sqrt{1-k^2})^2 + (\rho\lambda^{1/4}k)^2,$$

x e y son mediales, x C^2 y, el rectángulo $[x, y] = \rho^2\lambda^2\sqrt{1-k^2}$ es medial y $\sqrt{x^2-y^2}$ $\mathrm{C_L}$ x, ya que $\sqrt{x^2-y^2} = \rho k\lambda^{1/4}$ y $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{1}{k}$.

(II) “Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado tal que la suma de sus cuadrados sea medial, pero el rectángulo comprendido por ellas sea racional” ([*X-34*]).

Las rectas pedidas son

$$x = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k} \quad \text{e } y = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}.$$

En efecto, $x^2+y^2 = \dfrac{\rho}{1+k^2}\sqrt{1+k^2} = \rho' k'^{1/2}$ es medial ($\rho' = \dfrac{\rho^2}{1+k^2}$ es racional y $k' = 1+k^2$). Además, $[x,y] = \dfrac{\rho^2}{2(1+k^2)}$ es racional.

(III) “Hallar dos rectas inconmensurables en cuadrado que tengan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellos medial y, además, inconmensurable con la suma de sus cuadrados”([*X-35*]).

Las rectas son

$$x = \frac{\rho\lambda^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\rho\lambda^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

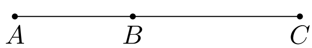
Obsérvese que $x^2+y^2 = \rho^2\lambda^{1/2}$, que es medial, mientras que

$$xy = \frac{\rho\lambda^{1/2}}{2}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \rho' k'^{1/2},$$

donde $\rho' = \dfrac{\rho^2}{2}$ y $k' = \dfrac{\lambda}{1+k^2}$ son racionales. Luego, $[x,y]$ es medial.

Proposición 2.27 (X-36). *Si se suman dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado, la recta entera es irracional; llámese binomial y denótese A_1.*

Demostración. Sean dos rectas racionales AB y BC, $AB \ \mathrm{C}^2\ BC$. Veamos que su suma AC es irracional.



En efecto, como $AB \ \mathrm{C}^2\ BC$, se tiene que $AB \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}} BC$; y como $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB.BC}{BC^2}$, se infiere que $[AB,BC] \not\mathrm{C}\ BC^2$, por la Proposición 2.8.

De la hipótesis $AB \ \mathrm{C}^2\ BC$ se deduce que $(AB^2+BC^2)\ \mathrm{C}\ BC^2$. Ahora bien, $(AB^2+BC^2)\ \mathrm{C}\ BC^2$ y $2[AB,BC] \not\mathrm{C}\ BC^2 \Rightarrow 2[AB,BC] \not\mathrm{C}\ (AB^2+BC^2)$.

Por tanto, teniendo en cuenta la Nota 2.2(ii),

$$2AB.BC + AB^2 + BC^2 = (AB+BC)^2 \not\mathrm{C}\ AB^2+BC^2,$$

esto es, $AC^2 \not\mathrm{C}\ AB^2+BC^2$. Al ser AB^2+BC^2 racional, se sigue que AC^2 es irracional y, por tanto, AC también lo es. A AC se le denomina binomial. *Q.E.D*

Nota 2.7. Por definición, la binomial es la suma de dos expresiones del tipo $l^{1/2} + k^{1/2}$, que se puede simplificar teniendo en cuenta que

$$l^{1/2} + k^{1/2} = l^{1/2} \left[1 + \left(\frac{k}{l} \right)^{1/2} \right],$$

y que $\sqrt{l}$ es racional (Definición 2.3). Luego, la longitud de la binomial es $A_1 = 1 + k^{1/2}$ o $A_1 = \rho(1 + k^{1/2})$.

Es trivial comprobar que la ecuación $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$ tiene las raíces $\pm a$ y $\pm b$. Pues bien, la binomial $A_1 = \rho + \rho k^{1/2}$ y la correspondiente apótoma $A_2 = \rho - \rho k^{1/2}$ (ver Capítulo 4) son las raíces positivas de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 2(1 + k)\rho^2 x^2 + (1 - k)^2 \rho^4 = 0.$$

Ciertamente, $A_1^2 + A_2^2 = 2(1 + k)\rho^2$ y $A_1^2 A_2^2 = (A_1 A_2)^2 = (1 - k)^2 \rho^4$.

Proposición 2.28 (X-37). *Si se suman dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprenden un rectángulo racional, la recta entera es irracional; llámese primero bimedial y denótese* B_1.

Demostración. Se prueba de forma análoga a la Proposición 2.27.

Se llama *primera bimedial* a la resultante de sumar dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprenden un rectángulo racional. La primera medial es una recta irracional cuya longitud es $B_1 = k^{1/4} + k^{3/4}$ o $B_1 = \rho k^{1/4} + \rho k^{3/4}$.

La primera bimedial B_1 y la primera apótoma de una medial $B_2 = \rho k^{1/4} - \rho k^{3/4}$ (Capítulo 4) resultan ser las raíces positivas de la ecuación de cuarto grado

$$x^4 - 2\sqrt{k}(1 + k)\rho^2 x^2 + k(1 - k)^2 \rho^4 = 0.$$

Ahora se tiene que $a^2 + b^2 = B_1^2 + B_2^2 = 2\sqrt{k}(1 + k)\rho^2$ y $a^2b^2 = B_1^2 B_2^2 = [k^{1/2}(1 - k)\rho^2]^2 = k(1 - k)^2 \rho^4$.

Nota 2.8. Enunciamos y comentamos las siguientes resultados.

(i) “Si se suman dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que abarquen un rectángulo medial, la recta entera es irracional; llámese *segunda bimedial* y denótese C_1”([*X-38*]).

Estas rectas mediales son $x = k^{1/4}$ e $y = \dfrac{k'^{1/2}}{k^{1/4}} = \left(\dfrac{k'}{k} \right)^{1/2} k^{1/4}$.

Nótese que x C^2 y, ya que $\frac{x}{y} = (k'')^{1/2}$, y que $[x, y] = k'^{1/2}$, por lo que el rectángulo es medial. La longitud de la recta segunda bimedial se expresa mediante

$$C_1 = k^{1/4} + \frac{k'^{1/2}}{k^{1/4}} \quad \text{o} \quad C_1 = k^{1/4}\rho + \frac{k'^{1/2}}{k^{1/4}}\rho.$$

Se denomina *segunda bimedial* a la resultante de sumar dos rectas mediales conmensurables solo en cuadrado que comprenden un rectángulo medial. Esta recta irracional y la segunda apótoma de una medial (Capítulo 4) son los ceros positivos de la ecuación cuártica $z^4 - 2\dfrac{(k+k')}{\sqrt{k}}z^2 + \dfrac{(k'-k)^2}{k} = 0$.

(ii) “Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados racional y el rectángulo medial, entonces la recta entera es irracional; llámese la *mayor* y represéntese por D_1”([*X-39*]).

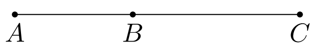
La longitud de la mayor, a tenor de la Proposición 2.26, es

$$D_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}{2}}.$$

La mayor y la correspondiente menor D_2 (Capítulo 4) son las raíces positivas de la ecuación $z^4 - 2z^2 + \dfrac{k^2}{1+k^2} = 0$.

(iii) “Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo que forman racional, entonces la recta entera es irracional; llámese *el lado del cuadrado equivalente a un área racional más un área medial* y denótese E_1”([*X-40*]).

Sean AB y BC rectas tales que $AB \not\mathcal{C}^2\, BC$, $AB^2 + BC^2$ medial y $[AB, BC]$ racional. Como quiera que AC^2 (cuadrado) es la suma de $AB^2 + BC^2$ (área medial) con $2AB.BC$ (rectángulo de área racional), se justifica el nombre dado a la recta AC.



Por la Nota 2.6(ii), se tiene,

$$AB = \sqrt{\frac{(1+k^2)^{1/2} + k}{2(1+k^2)}} \quad \text{y} \quad BC = \sqrt{\frac{(1+k^2)^{1/2} - k}{2(1+k^2)}}.$$

Esta recta tiene longitud $E_1 = AC = \sqrt{\dfrac{(1+k^2)^{1/2} + k}{2(1+k^2)}} + \sqrt{\dfrac{(1+k^2)^{1/2} - k}{2(1+k^2)}}$.

En este caso E_1 es una de las dos raíces positivas de la ecuación $z^4 - \dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}z^2 + \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2} = 0$.

(iv) “Si se suman dos rectas inconmensurables en cuadrado que hagan la suma de sus cuadrados medial y el rectángulo comprendido por ellas también medial e inconmensurable además con la suma de sus cuadrados, entonces la recta entera es irracional; llámese *lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales* y represéntese por F_1”([*X-41*]).

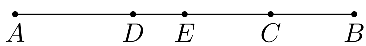
Si, como antes, AC es la resultante de sumar dos rectas AB y BC cumpliendo las hipótesis del aserto, de $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC$ se tiene que el cuadrado (AC^2) es la suma de dos áreas mediales ($AB^2 + BC^2$ y $2AB.BC$). Ello justifica el nombre dado a la recta resultante. Por otra parte, a la vista de la Nota 2.6(iii),

$$AB = \frac{k'^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \quad \text{y} \quad BC = \frac{k'^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Fácilmente se puede comprobar que $F_1 = AB + BC$ es una raíz positiva de la ecuación de cuarto grado $z^4 - 2\sqrt{k'}z^2 + \dfrac{k'k^2}{1+k^2} = 0$.

Lema 2.29. *Considérese la recta AB y divídase en partes desiguales por los puntos D y C. Supongamos que $AC > DB$; entonces los cuadrados de AC y CB son mayores que los cuadrados de AD y DB.*

Demostración. En efecto, dividamos AB en dos partes iguales por el punto E. Hemos supuesto que $AC > DB$, entonces $AC - DC > DB - DC$, esto es, $AD > CB$. Y al ser $AE = EB$, se infiere que $DE < EC$, es decir, $DE \neq EC$.



Por otra parte,

$$\begin{aligned} AC.CB + EC^2 &= (AE+EC)CB + EC^2 = (EB+EC)CB + EC^2 = \\ &= (EC+CB+EC)CB + EC^2 = (2EC+CB)CB + EC^2 = \\ &= CB^2 + 2CB.EC + EC^2 = (EC+CB)^2 = EB^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Análogamente se establece que

$$AD.DB + DE^2 = EB^2. \tag{2.21}$$

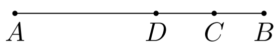
De (2.20) y (2.21) se infiere que $AC.CB + EC^2 = AD.DB + DE^2$ y, siendo $DE < EC$, sigue que $AC.CB < AD.DB$, o lo que es lo mismo,

$$2AC.CB < 2AD.DB. \tag{2.22}$$

Ahora bien, de la doble descomposición $AB = AC + CB = AD + DB$ se tiene que $(AC + CB)^2 = (AD + DB)^2$, esto es, $AC^2 + CB^2 + 2AC.CB = AD^2 + DB^2 + 2AD.DB$ y, de aquí, teniendo en cuenta (2.22), se concluye que $AC^2 + CB^2 > AD^2 + DB^2$. *Q.E.D*

Proposición 2.30 (X-42). *La recta binomial se divide en sus términos por un solo punto.*

Demostración. Sea AB la recta binomial. En virtud de la Proposición 2.27, $AB = AC + CB$, donde AC y CB son rectas racionales y $AC\ \mathrm{C}^2\ CB$. Veamos que C es el único punto que divide la binomial AB con esas propiedades.



Supongamos, por reducción al absurdo, que el punto D también divide la binomial en dos rectas AD y DB racionales y tal que $AD\ \mathrm{C}^2\ DB$. Entonces $AC \neq DB$, ya que si $AC = DB$ también sería $AD = CB$. Luego, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{DB}{AD}$.

Ello equivale a afirmar que el punto D divide la binomial como lo hace el punto C, contra lo asumido. Así pues, $AC \neq DB$ y, consecuentemente, C y D no equidistan del punto de bisección de la recta binomial.

Ahora bien, tal como se ve en la prueba del Lema 2.29, $AC^2 + CB^2$ difiere de $AD^2 + DB^2$ en lo que $2[AC, CB]$ difiere de $2[AD, DB]$. Pero, $AC^2 + CB^2$ y $AD^2 + DB^2$ son racionales (por definición de binomial), por lo que $(AC^2 + CB^2) - (AD^2 + DB^2) =$ área racional, lo cual implica que $2[AC, CB] - 2[AD, DB]$ es racional, esto es,

$$[AC, CB] - [AD, DB] = \text{área racional}. \tag{2.23}$$

Recordemos, en este momento, que tanto $[AC, CB]$ como $[AD, DB]$ son mediales (Proposición 2.27) y, que en base a la Nota 2.5(iii), llegamos a una contradicción, pues un área medial no puede exceder a otra área medial en un área racional. En conclusión, el punto C es único. *Q.E.D*

Recordemos que la longitud de una recta binomial es $k + k'^{1/2}$ o $k^{1/2} + k'^{1/2}$ (véase la Nota 2.7). Por tanto, lo que realmente establece el anterior teorema son conocidos resultados algebraicos

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \iff a = c, b = d$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} \iff a = c, b = d (a = d, b = c)$$

También Euclides demuestra que la recta primera bimedial y las tratadas desde [*X-38*] hasta [*X-41*] (Nota 2.8) se dividen por un solo punto.

3

Tercer Capítulo

3.1. Introducción

En este capítulo se analizan los resultados del Libro X que van desde la proposición [*X-48*] hasta el final del mismo. En la segunda sección se introduce un nuevo grupo de rectas irracionales, el grupo de las binomiales. Se relacionan con la clase de rectas irracionales consideradas en el capítulo anterior, mediante las operaciones radicación y potenciación. El planteamiento y las demostraciones son completamente geométricas. De acuerdo con T. Heath, denotamos por α_1 la primera binomial, por β_1 la segunda, por γ_1 la tercera, por δ_1 la cuarta, por ε_1 la quinta y por ζ_1 la sexta.

En la tercera sección se estudian seis nuevas rectas irracionales fundamentales que se denominan y, con la notación de T. Heath, se denotan: la apótoma (A_2), primera apótoma de una medial (B_2), segunda apótoma de una medial (C_2), recta menor (D_2), la recta que hace con un área racional un área entera medial (E_2) y la recta que hace con un área medial un área entera medial (F_2).

En la cuarta sección se comienza con la presentación del tercer grupo de definiciones de Euclides, los distintos órdenes de apótomas: primera apótoma (α_2), segunda apótoma (β_2), tercera apótoma (γ_2), cuarta apótoma (δ_2), quinta apótoma (ε_2) y sexta apótoma (ζ_2). Este sexteto de nuevas rectas irracionales no se incluye en el grupo selecto de la clasificación de Euclides, ya que en realidad todas son apótomas, que ya figuran en ella. La originalidad radica en que, en cada uno de los seis casos, la apótoma, su aneja y la recta completa cumplen distintos requisitos.

Algunas de estas rectas irracionales aparecen en la construcción, verbigracia, el pentágono regular, el dodecaedro y el icosaedro.

3.2. Segundo grupo de definiciones. Rectas binomiales.

Después de la Proposición 47 de este libro, Euclides precisa las siguientes definiciones.

Definición 3.1. *Dada una recta racional y otra binomial dividida en sus componentes, de forma que el cuadrado de la componente mayor sea más grande que el cuadrado de la menor en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con la mayor, entonces, si la componente mayor es conmensurable en longitud con la recta racional dada, la recta entera se llamará primera binomial.*

Definición 3.2. *Si la componente menor es conmensurable en longitud con la recta racional dada, llamaremos segunda binomial a la recta entera.*

Definición 3.3. *Pero si ninguna de las componentes es conmensurable en longitud con la recta racional dada, se denominará tercera binomial.*

Definición 3.4. *Si el cuadrado de la componente mayor es más grande que el de la menor en el cuadrado de una recta inconmensurable en longitud con la mayor, entonces, si la componente mayor es conmensurable en longitud con la recta racional dada, llamaremos cuarta binomial a la recta entera.*

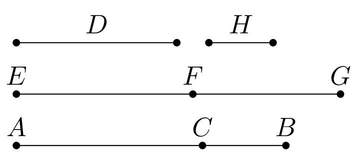
Definición 3.5. *Y si la componente menor es conmensurable, quinta recta binomial.*

Definición 3.6. *Y si ninguna de las dos componentes fuera conmensurable, sexta recta binomial.*

A continuación, se han seleccionado algunos resultados relacionados con esta nueva clase de rectas.

Proposición 3.7 (X-48). *Construir una recta primera binomial.*

Demostración. Sean AC y CB dos números tales que su suma AB guarda con BC la razón que un número cuadrado guarda con un número cuadrado, pero que esto no ocurra con AC (Lema 2.21). Considérese ahora una recta racional D y tómese otra recta EF, EF $\mathrm{C_L}$ D.



Entonces, EF también es racional. Por el Porisma 2.1 o la Proposición 2.6, existe otra recta FG tal que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF^2}{FG^2}. \tag{3.1}$$

Por otra parte, AB guarda con AC la misma razón que dos números, esto es, para ciertos enteros positivos m y n vale $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{n}$. Es decir, $\dfrac{EF^2}{FG^2} = \dfrac{m}{n}$. En virtud de la Proposición 2.6, EF^2 C FG^2 y, como EF es racional, también lo será FG. Además, como $\dfrac{AB}{AC} \neq \dfrac{m^2}{n^2}$, sigue de (3.1) que

$$\frac{EF^2}{FG^2} \neq \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow EF \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, FG,$$

en vista de la Proposición 2.7.

Resumiendo, EF y FG son rectas racionales tales que EF C^2 FG; por tanto, $EG = EF + FG$ es una recta binomial. Veamos que es primera. En efecto, de (3.1),

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF^2}{FG^2} \quad , \; AB > AC \Rightarrow EF^2 > FG^2.$$

Es decir, para cierta recta H,

$$EF^2 = FG^2 + H^2. \tag{3.2}$$

Ahora bien, de (3.1), (3.2) y [*V-19*],

$$\frac{AB}{AB - AC} = \frac{EF^2}{EF^2 - FG^2} \iff \frac{AB}{BC} = \frac{EF^2}{H^2}.$$

Puesto que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m^2}{n^2}$, consecuentemente se tiene que $\dfrac{EF^2}{H^2} = \dfrac{m^2}{n^2}$.

Así pues, por la Proposición 2.7, EF C_{L} H. Concluimos que el cuadrado de EF (el término mayor) es más grande que el de FG (término menor) en el cuadrado de una recta H, que es conmensurable en longitud con EF, y EF C_{L} D, por lo que EG es una recta primera binomial. *Q.E.D*

Nota 3.1. Si $D = \rho$, de EF C_{L} D sigue que $EF = k\rho$. Análogamente, como H C_{L} EF se infiere que $H = k'EF = k'(k\rho)$. Entonces, de (3.2) se obtiene

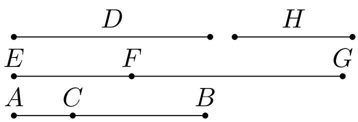
$$FG = \sqrt{EF^2 - H^2} = \rho k \sqrt{1 - k'^2}.$$

En definitiva, la longitud de la primera binomial ($EG = EF + FG$) es

$$\alpha_1 = \rho k + \rho k \sqrt{1 - k'^2}.$$

Proposición 3.8 (X-49). *Hallar una recta segunda binomial.*

Demostración. Análogamente a la anterior proposición, veamos primero si la recta es binomial.



Sean AC y CB dos números tales que su suma AB cumple

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m^2}{n^2} \text{ y } \frac{AB}{AC} \neq \frac{m^2}{n^2} \tag{3.3}$$

Consideremos la recta racional D y la recta EF, $EF \; \mathrm{C_L} \; D$, de modo que EF también es racional. Elijamos entonces, en virtud del Porisma 2.1, FG tal que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{EF^2}{FG^2},$$

de donde sigue que $EF^2 \; \mathrm{C} \; FG^2$ y FG es racional, al ser EF racional.

Por otra parte,

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{EF^2}{FG^2} \neq \frac{n^2}{m^2},$$

de modo que, recurriendo a la Proposición 2.7, $EF \; \not{\mathrm{C}}_{\mathrm{L}} \; FG$.

Luego, $EG = EF + FG$ es una recta binomial, ya que es la suma de dos racionales que solo son conmensurables al cuadrado.

Veamos que también es segunda binomial. Ciertamente, de (3.1) y siendo $AB > AC$, se infiere que $FG^2 > EF^2$. Por el Lema 2.11,

$$FG^2 = EF^2 + H^2 \tag{3.4}$$

y, razonando con el anterior aserto, se puede establecer que $FG \; \mathrm{C_L} \; H$. Resumiendo, el cuadrado de la recta mayor (FG) es más grande que el de la recta menor (EF) en el cuadrado de una recta H conmensurable en longitud con la recta mayor (FG). Además, EF y FG son racionales, $EF \; \mathrm{C}^2 \; FG$ y la recta menor $EF \; \mathrm{C_L} \; D$. Por esta razón, $EG = EF + FG$ es una recta segunda binomial.

Q.E.D

Si $D = \rho$, por los resultados teóricos obtenidos se tiene que $EF = k\rho$ y $H = k'FG$. Entonces, sigue de (3.4),

$$EF^2 = FG^2 - H^2 = FG^2 - k'^2 FG^2 = (1 - k'^2)FG^2,$$

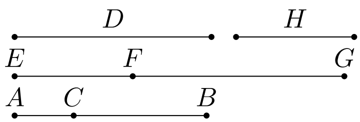
es decir, $FG = \dfrac{EF}{\sqrt{1-k'^2}} = \dfrac{k\rho}{\sqrt{1-k'^2}}$.

Por tanto, la longitud de la recta segunda binomial ($EG = EF + FG$) es

$$\beta_1 = k\rho + \frac{k\rho}{\sqrt{1-k'^2}}.$$

Proposición 3.9 (X-50). *Hallar una recta tercera binomial.*

Demostración. Sean AC y CB dos números tales que su suma AB cumplen las condiciones (3.3).



Consideremos otro número D, que no sea cuadrado, tal que

$$\frac{D}{AB} \neq \frac{m^2}{n^2} \quad , \quad \frac{D}{AC} \neq \frac{m^2}{n^2}. \tag{3.5}$$

Ahora bien, dada una recta racional E, por el Porisma 2.1, existirá otra recta FG de modo que

$$\frac{D}{AB} = \frac{E^2}{FG^2}. \tag{3.6}$$

Así que $E^2 \mathrm{C}\, FG^2$ (ya que E^2 y FG^2 guarden entre sí la misma razón que dos números D y AB) y, siendo E racional, se tiene que FG es racional.

Por otra parte, de (3.5) y (3.6) se infiere

$$\frac{E^2}{FG^2} \neq \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow E \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, FG, \tag{3.7}$$

de acuerdo con la Proposición 2.7. Recurriendo ahora al Porisma 2.1, para cierta recta GH vale

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FG^2}{GH^2}, \tag{3.8}$$

lo que entraña que $FG^2 \mathrm{C}\, GH^2$ y, como FG es racional, que GH es racional también. Pues bien, de (3.3) y (3.8) resulta

$$\frac{FG^2}{GH^2} \neq \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow FG \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, GH,$$

es decir, $FG\ \mathrm{C}^2\ GH$. Hemos llegado a que $FH = FG + GH$ es una recta binomial, pues es la suma de dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado.

Veamos que FH es tercera binomial. Para ello, véase que de (3.6) y (3.8) se infiere $\dfrac{D}{AC} = \dfrac{E^2}{GH^2}$. De esto y (3.3), se tiene que $\dfrac{E^2}{GH^2} \neq \dfrac{m^2}{n^2}$, lo que implica que $E \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\, GH$, a tenor de la Proposición 2.7. Nótese ahora que de 3.8, al ser $AB > AC$, se obtiene que $FG^2 > GH^2$; esto es, para cierta recta K,

$$FG^2 = GH^2 + K^2. \tag{3.9}$$

Fácilmente se deduce de (3.8)

$$\frac{AB}{AB - AC} = \frac{FG^2}{FG^2 - GH^2} \iff \frac{AB}{BC} = \frac{FG^2}{K^2}.$$

Y, comparando con (3.3), $\dfrac{FG^2}{K^2} = \dfrac{m^2}{n^2}$, lo cual entraña que $FG\ \mathrm{C}_{\mathrm{L}}\ K$. En conclusión, el cuadrado de FG es mayor que el de GH en una recta conmensurable solo en cuadrado con FG. Además, FG y GH son rectas racionales conmensurables solo en cuadrado y ninguna de ellas es conmensurable en longitud con E. Así pues, $FH = FG + GH$ es una recta tercera binomial. *Q.E.D*

De (3.6) y (3.7) se sigue que FG C^2 E, conllevando que $FG = k^{1/2}E = k^{1/2}\rho$. Por otra parte, FG C$_\mathrm{L}$ K, esto es, $K = k'FG$. Entonces, de (3.9) se infiere que

$$GH^2 = FG^2 - K^2 = (1 - k'^2)FG^2 \Rightarrow GH = k^{1/2}\rho\sqrt{1 - k'^2}.$$

Así pues, la longitud de la recta tercera binomial ($FH = FG + GH$) es

$$\gamma_1 = \sqrt{k}\rho(1 + \sqrt{1 - k'^2}).$$

Nota 3.2. (I) En [*X-51*] Euclides construye una recta *cuarta binomial*, cuyo valor es

$$\delta_1 = k\rho + \frac{k\rho}{\sqrt{1 + k'}} = k\rho\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + k'}}\right).$$

(II) En [*X-52*] se halla una recta *quinta binomial*, siendo su longitud

$$\varepsilon_1 = k\rho + k\rho\sqrt{1 + k'} = k\rho(1 + \sqrt{1 + k'}).$$

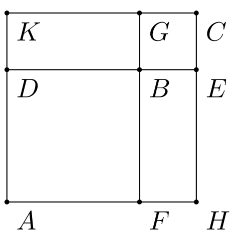
(III) En [*X-53*] se determina una recta *sexta binomial*, la cual vale

$$\zeta_1 = \rho\sqrt{k} + \rho\sqrt{k'} = \rho(\sqrt{k} + \sqrt{k'}).$$

Lema 3.10. *Si AB y BC son dos cuadrados y ponemos DB en línea recta con BE y consecuentemente FB con BG, y se completa la figura como se indica, se tiene que AC es un cuadrado, siendo DG la media proporcional de AB y BC, y DC la de AC y BC.*

Demostración. Es trivial ver que AC, es decir, el cuadrilátero $AHCK$, es un cuadrado. Veamos que $[AB][BC] = [DG]^2$.

En efecto, $[AB][BC] = BD^2.GB^2 = (BD.GB)^2 = [DG]^2$.



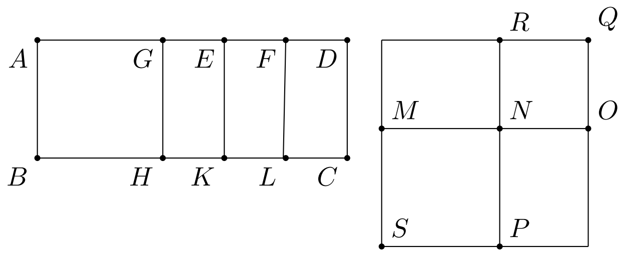
Por otra parte, $[AC][BC] = KC^2.EC^2 = DE^2.EC^2 = (DE.EC)^2 = [DC]^2$.

Así que $[DC]$ es la media proporcional de $[AC]$ y $[BC]$.

Q.E.D

Proposición 3.11 (X-54). *Si un área está comprendida por una recta racional y una primera binomial, el lado del cuadrado equivalente a dicha área es la recta irracional que hemos llamado binomial.*

Demostración. El área $[AC]$ está constituida por la recta racional AB y la recta primera binomial AD. Por tanto, sean AE y ED sus dos componentes ($AE > ED$) que, por ser AD binomial, satisfacen que AE y ED son rectas racionales, AE C^2 ED. Además, el cuadrado de AE es mayor que el de ED en el cuadrado de una recta que es conmensurable en longitud con AE, y AE C$_\mathrm{L}$ AB.



Dividimos ED en dos partes iguales por el punto F y aplíquese a la parte mayor AE un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de la menor, es decir, al cuadrado de EF y deficiente en un cuadrado. Entonces, por la Proposición 2.14, AE queda dividida en términos conmensurables en longitud. Luego, $[AG, GE] = [EF, EF]$, esto es,

$$AG.GE = EF^2 \ \ , \ \ AG \ \mathrm{C_L} \ GE. \tag{3.10}$$

A partir de los puntos G, E y F trazaremos paralelas GH, EK y FL a AB(o a DC). A continuación construimos el cuadrado SN igual al rectángulo AH y el cuadrado NQ igual al paralelogramo GK ([*II, 14*]). Coloquemos estos dos cuadrados como se hizo en el Lema 3.10, completando la figura.

Ahora bien, (3.10) se puede escribir

$$\frac{AG}{EF} = \frac{EF}{GE} \iff \frac{AG.AB}{EF.AB} = \frac{EF.AB}{GE.AB} \iff \frac{[AH]}{[EL]} = \frac{[EL]}{[GK]},$$

esto es, el área del paralelogramo EL es la media proporcional de las áreas de los rectángulos AH y GK; queremos decir que $[EL]$ es la media proporcional de $[AH]$ y $[GK]$. Recordemos que, por construcción, $[AH] = [SN]$ y $[GK] = [NQ]$. Luego, $[EL]$ es la media proporcional de $[SN]$ y $[NQ]$:

$$[EL]^2 = [SN][NQ].$$

Pero, por el Lema 3.10, $[MR]^2 = [SN][NQ]$. Por consiguiente,

$$[EL] = [MR] = [PO], \tag{3.11}$$

invocando a [*I, 43*]. En total se tiene

$$[AC] = [AH] + [GK] + 2[EL] = [SN] + [NQ] + 2[PO] = [SQ].$$

Se concluye que $[AC] = [SQ]$, es decir,

$$[AC] = MO^2, \tag{3.12}$$

o en palabras, MO es el lado del cuadrado equivalente al rectángulo de lados AB y AD.

Veamos que MO es una recta binomial. Recordemos, por la segunda expresión de (3.10), que $AG \;\mathrm{C_L}\; GE$. En consecuencia, puesto que $AE = AG + GE$ y a tenor de la Nota 2.2(i), $AE \;\mathrm{C_L}\; AG$ y $AE \;\mathrm{C_L}\; GE$. Pero, por hipótesis $AE \;\mathrm{C_L}\; AB$, de modo que $AG \;\mathrm{C_L}\; AB$ y $GE \;\mathrm{C_L}\; AB$, en virtud de la Proposición 2.9. Y como AB es racional, AG y GE son asimismo racionales. Por tanto, recurriendo a la Proposición 2.15, podemos asegurar que $[AH]$ y $[GK]$ son áreas racionales, ya que $[AH] = AB.AG$ y $[GK] = GH.GE = AB.GE$. Luego, $[AH] \;\mathrm{C}\; [GK]$, esto es, $[SN] \;\mathrm{C}\; [NQ]$, lo que equivale a afirmar que

$$MN^2 \;\mathrm{C}\; NO^2. \tag{3.13}$$

Por otra parte, recapitulando, tenemos que $AE \not\mathrm{C}_\mathrm{L}\; ED$, $AE \;\mathrm{C_L}\; AG$ y $DE \;\mathrm{C_L}\; EF$ (ya que DE es el doble de EF); luego, por la Proposición 2.10, $AG \not\mathrm{C}_\mathrm{L}\; EF$. De aquí, invocando a la Proposición 2.8, se infiere que

$$AG.AB \not\mathrm{C}\; EF.AB,$$

esto es, $[SN] = [AH] \not\mathrm{C}\; [EL] = [MR]$. Teniendo en cuenta que $[SN] \not\mathrm{C}\; [MR]$ y que

$$\frac{[SN]}{[MR]} = \frac{MN^2}{MN.RN} = \frac{MN}{RN} = \frac{MN}{NO},$$

concluimos que,

$$MN \not\mathrm{C}_\mathrm{L}\; NO. \tag{3.14}$$

De (3.13) y (3.14) se infiere que $MN \;\mathrm{C}^2\; NO$, y de (3.13), al ser MN^2 y NO^2 áreas racionales, que MN y NO son rectas racionales. Así pues, hemos establecido que $MO = MN + NO$ es la suma de dos rectas racionales conmensurables solo en cuadrado. En definitiva, MO es binomial. *Q.E.D*

La anterior demostración es totalmente geométrica. Euclides nunca habla de "raíz cuadrada de...". En su lugar, cuando quiere referirse a esta operación, dice "el lado del cuadrado equivalente a dicha área...". La versión algebraica del anterior resultado, de (3.12), afirmaría que la raíz cuadrada de la primera binomial es la recta binomial. A la vista de las Notas 2.7 y 3.1, las consideraciones anteriores se expresarían algebraicamente de una forma sencilla: $\sqrt{\alpha_1} = A_1$, esto es, $\sqrt{\rho k + \rho k\sqrt{1-k'^2}} = \alpha + \alpha\sqrt{k''}$, con α y k'' por determinar. Operando, se tiene

$$\rho k + \rho k(1+k')\sqrt{\frac{1-k'}{1+k}} = \alpha^2 + \alpha^2 k'' + 2\alpha^2\sqrt{k''},$$

que se verifica para $k'' = \dfrac{1-k'}{1+k'}$ y $2\alpha^2 = \rho k(1+k')$.

Obsérvese que $\alpha^2 + \alpha^2 k'' = \alpha^2(1+k'') = \dfrac{2\alpha^2}{1+k'} = \rho k.$

Por tanto, la raíz cuadrada de la primera binomial es $\alpha + \alpha\sqrt{k''}$, donde $\alpha = \sqrt{\dfrac{\rho k(1+k')}{2}}$ y $k'' = \dfrac{1-k'}{1+k'}$. Así pues, $\alpha + \alpha\sqrt{k''}$ es una recta binomial, ya que α es racional (Definición 2.4).

En algunos textos, como en J. L. Heiberg [7], el enunciado de la Proposición 3.11 está actualizado y se lee "*Si un área está comprendida por una recta racional y una primera binomial, entonces la raíz cuadrada de esta área es la recta irracional que se convino denominar binomial*".

En las siguientes proposiciones Euclides establece resultados de la misma índole, siempre relacionando las rectas introducidas en estos dos últimos capítulos:

(i) "La raíz cuadrada de una recta segunda binomial es la recta primera bimedial, esto es, $\sqrt{\beta_1} = B_1$"([*X-55*]).
(ii) "La raíz cuadrada de una recta tercera binomial es la recta segunda bimedial, es decir, $\sqrt{\gamma_1} = C_1$"([*X-56*]).
(iii) "La raíz cuadrada de la recta cuarta binomial es la mayor, de otra forma, $\sqrt{\delta_1} = D_1$"([*X-57*]).
(iv) "La raíz cuadrada de la quinta binomial es el lado del cuadrado equivalente a un área racional más un área medial, esto es, $\sqrt{\varepsilon_1} = E_1$"([*X-58*]).
(v) "La raíz cuadrada de la sexta binomial es el lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales, expresado de otra manera, $\sqrt{\zeta_1} = F_1$" ([*X-59*]).

Lógicamente a Euclides no le pasó desapercibido la relación existente entre radicación y potenciación. Razonando geométricamente demostró que:

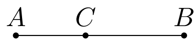
(i') "El cuadrado de una binomial aplicado a una recta racional produce como anchura una primera binomial"([*X-60*]).
Dicho de otra manera, el cuadrado de una binomial es una primera binomial: $A_1^2 = \alpha_1$.
(ii') "El cuadrado de una primera bimedial es una segunda binomial: $B_1^2 = \beta_1$" ([*X-61*]).
(iii') "El cuadrado de una segunda bimedial es una tercera binomial: $C_1^2 = \gamma_1$" ([*X-62*]).
(iv') "El cuadrado de una mayor es una cuarta binomial: $D_1^2 = \delta_1$"([*X-63*]).
(v') "El cuadrado del lado del cuadrado suma de un área racional y otra medial es una quinta binomial: $E_1^2 = \varepsilon_1$"([*X-64*]).
(vi') "El cuadrado del lado del cuadrado suma de dos áreas mediales es una sexta binomial: $F_1^2 = \zeta_1$"([*X-65*]).

3.3. La apótoma y otras rectas irracionales asociadas

En el primer resultado se introduce una nueva recta irracional denominada apótoma.

Proposición 3.12 (X-73). *Si se quita de una recta racional otra recta racional que sea conmensurable solo en cuadrado con la recta entera, entonces la recta restante es irracional. La llamaremos apótoma.*

Demostración. Sea la recta racional AB y supongamos que le extraemos la recta BC, también racional y tal que $BC \ \mathrm{C}^2 \ AB$. Veamos que AC es irracional.



En efecto, ya que $BC \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}} \ AB$ y $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB^2}{AB.BC}$, por el Lema 2.18, se infiere que $AB^2 \not\mathrm{C} \ AB.BC$, a tenor de la Proposición 2.8. Por otra parte, por la Nota 2.2(i),

$$BC^2 \ \mathrm{C} \ AB^2 \Rightarrow AB^2 + BC^2 \ \mathrm{C} \ AB^2 \tag{3.15}$$

y, como $\dfrac{2AB.BC}{AB.BC} = \dfrac{2}{1}$, por la Proposición 2.6, $2AB.BC \ \mathrm{C} \ AB.BC$. Ahora bien, $AB^2+BC^2 = (AC+BC)^2+BC^2 = AC^2+2BC(AC+BC) = AC^2+2AB.BC$, es decir,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2AB.BC. \tag{3.16}$$

Puesto que $AB^2 \not\mathrm{C} \ AB.BC$, sigue de (3.15) en base a la Proposición 2.10 que $AB^2+BC^2 \not\mathrm{C} \ AB.BC$ y, en consecuencia, $AB^2+BC^2 \not\mathrm{C} \ 2AB.BC$. De aquí y de (3.16), en virtud de la Nota 2.2(ii), se infiere que

$$AB^2 + BC^2 \not\mathrm{C} \ AC^2. \tag{3.17}$$

Finalmente, AB y BC son rectas racionales, lo que entraña que AB^2+BC^2 es racional y, por tanto, de (3.17) se concluye que AC^2 es irracional. Luego, AC también es irracional. *Q.E.D*

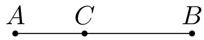
De acuerdo con este aserto, una apótoma es la diferencia de dos rectas racionales que son conmensurables solo en cuadrado. En este caso, la apótoma es AC, denominándose a BC la adjunta de la apótoma.

Este resultado es el análogo de la Proposición 2.27, pero restando. Como $AC = AB - BC$, teniendo presente la Nota 2.7, la longitud de la apótoma es

$$A_2 = \rho - \rho k^{1/2}.$$

Proposición 3.13 (X-74). *Si de una recta medial se extrae otra recta medial que sea conmensurable solo en cuadrado con la recta entera y que comprenda con esta un rectángulo racional, entonces el resto es una recta irracional. La llamaremos la primera apótoma de una medial.*

Demostración. Extraigamos de la recta medial AB la medial BC, cumpliendo que $BC\ \mathrm{C}^2\ AB$ y $[AB, BC]$ es racional. Esto es factible por la Nota 2.5(iv).



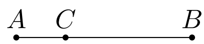
En línea con la Nota 2.4 y ya que AB y BC son rectas mediales, $AB = \rho k^{1/4}$ y $BC = \rho' k'^{1/4}$, por lo cual AB^2 y BC^2 son áreas mediales y, por tanto, irracionales. Por la Nota 2.5(iii), $AB^2 + BC^2$ es irracional y como $[AB, BC]$ es racional, entonces $AB^2 + BC^2 \not\mathrm{C}\ 2AB.BC$. De aquí, (3.16) y de la Nota 2.2(ii) se establece que $2AB.BC \not\mathrm{C}\ AC^2$ y, siendo $2AB.BC$ racional, que AC^2 es irracional. En consecuencia, AC es irracional. *Q.E.D*

Este resultado es el semejante a la Proposición 2.28, en la que las mediales se sumaban. Como en este caso se restan, esto es, $AC = AB - BC$. Así, la longitud de una primera apótoma de una medial es

$$B_2 = \rho k^{1/2} - \rho k^{3/2}.$$

Proposición 3.14 (X-76). *Supongamos que de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta entera, de modo que la suma de sus cuadrados sea racional y el rectángulo que comprenden medial. Entonces, el resto es una recta irracional que llamaremos menor.*

Demostración. Sea BC la recta que se quita de AB, $BC \not\mathrm{C}^2\ AB$. Como $AB^2 + BC^2$ racional y $2[AB, BC]$ medial, se obtiene que $AB^2 + BC^2 \not\mathrm{C}\ 2[AB, BC]$ y, por (3.16), que $AB^2 + BC^2 \not\mathrm{C}\ AC^2$. En definitiva, AC es irracional.



Q.E.D

Este resultado es el análogo a la Nota 2.8(ii). En este caso, el signo $+$ se sustituye por $-$, por lo que la longitud de la menor es

$$D_2 = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Nota 3.3. Nos limitamos a enunciar.

(i) “Si de una recta medial se sustrae otra medial que sea conmensurable solo en cuadrado con la recta dada y que comprenden un rectángulo medial, entonces la recta restante es irracional. La llamaremos segunda apótoma de una medial” ([*X-75*]).

Esta es la proposición análoga al resultado de la Nota 2.8(i). Su valor es

$$C_2 = \rho k^{1/4} - \rho \frac{k'^{1/2}}{k^{1/4}}.$$

(II) “Si de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta dada, y que haga la suma de sus cuadrados medial, pero el doble del rectángulo comprendido por ellas racional. Entonces la recta que queda es irracional. Será llamada la que hace con un área racional un área entera medial”([*X-77*]).

Se trata del análogo de la Nota 2.8(iii). Si $\rho = 1$, su expresión es

$$E_2 = \sqrt{\frac{(1+k^2)^{1/2}+k}{2(1+k^2)}} - \sqrt{\frac{(1+k^2)^{1/2}-k}{2(1+k^2)}}.$$

(III) “Admitamos que de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta dada, de modo que la suma de sus cuadrados sea medial y el doble del rectángulo que abarcan igualmente medial, y además sus cuadrados inconmensurables con el doble del rectángulo formado por ellos. Entonces, la recta que queda es irracional y se denominará la que hace con un área medial un área entera medial”([*X-78*]).

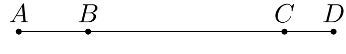
El anterior resultado es análogo a la Nota 2.8(iv). Su longitud es

$$F_2 = \frac{k'^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} - \frac{k'^{1/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Proposición 3.15 (X-79). *A una apótoma solo se le adjunta una recta racional que sea conmensurable solo en cuadrado con la recta entera.*

Demostración. Sea AB una apótoma y BC su correspondiente adjunta. Entonces, por la Proposición 3.12, AC y BC son racionales y AC C^2 BC. Veamos que no se puede adjuntar a AB ninguna otra recta con esas propiedades.

Supongamos, por reducción al absurdo, que sí es posible que exista otro adjunto BD a la apótoma AB. Entonces, por la citada proposición, AD y BD son racionales y AD C^2 BD.



Fácilmente se comprueba que $AD^2+BD^2-2AD.DB = AB^2$, que coincide con $AC^2+BC^2-2AC.BC = AB^2$, por lo que

$$(AD^2+BD^2)-(AC^2+BC^2) = 2AD.BD - 2AC.BC,$$

y de aquí, como tanto AD y BD como AC y BC son racionales, se obtiene que

$$2[AD.BD] - 2[AC.BC] = \text{área racional}. \tag{3.18}$$

Pero $[AD, BD]$ y $[AC, BC]$ son rectángulos mediales, a tenor de la Proposición 2.17. En consecuencia, (3.18) es imposible ya que, en virtud de la Nota 2.5(iii), un área medial no puede exceder a otra área medial en un área racional. Luego, $BC = BD$. *Q.E.D*

Este aserto es semejante a la Proposición 2.28. Traducido a términos algebraicos, este resultado nos dice que

$$a - \sqrt{b} = c - \sqrt{d} \iff a = c \text{ y } b = d;$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d} \iff a = c \text{ y } b = d.$$

De igual manera se puede demostrar que a una primera apótoma de una medial ([*X-80*]), a una segunda apótoma de una medial ([*X-81*]), a una recta menor ([*X-82*]), a una recta que haga con un área medial un área entera racional ([*X-83*]) y a una recta que haga con un área medial un área entera medial ([*X-84*]) únicamente se les puede adjuntar una recta que cumple los requisitos exigidos en cada caso.

3.4. Tercer grupo de definiciones. Las rectas de la clase de las apótomas

El concepto de apótoma es fundamental en la introducción de las siguientes definiciones.

Definición 3.16. *Dadas una recta racional y una apótoma, si el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la recta adjunta en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella, y la recta entera es conmensurable en longitud con la recta racional de partida, entonces a esta apótoma la llamaremos primera apótoma y denotaremos por* α_2.

Definición 3.17. *Y si la recta adjunta es conmensurable en longitud con la recta racional dada, y el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella, a esta apótoma la llamaremos segunda apótoma y la denotaremos por* β_2.

Definición 3.18. *Y si ninguna de las dos es conmensurable en longitud con la recta racional dada, y el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una recta conmensurable (en longitud) con la recta entera, entonces esta apótoma será llamada tercera apótoma y denotada* γ_2.

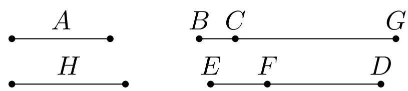
Definición 3.19. *Si, a su vez, el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una recta inconmensurable con la recta completa, entonces, siempre que la recta completa sea conmensurable en longitud con la recta racional dada, esta apótoma será la cuarta apótoma y se denotará por* δ_2.

Definición 3.20. *Y si la adjunta es conmensurable, quinta. Represéntese* ε_2.

Definición 3.21. *Y si ninguna de las dos es conmensurable, sexta. Denótese* ζ_2.

Proposición 3.22 (X-85). *Hallar la primera apótoma.*

Demostración. Sea A una recta racional y BG otra recta, $BG \mathrm{C_L} A$, por lo que BG también es racional. Consideremos seguidamente dos números cuadrados DE y EF de modo que $FD = DE - EF$ no sea cuadrado (Lema 2.21).



Luego,

$$\frac{ED}{EF} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{ED}{ED - EF} = \frac{m^2}{m^2 - n^2} \Rightarrow \frac{ED}{DF} \neq \frac{m^2}{l^2}, \tag{3.19}$$

ya que FD no es un cuadrado. Y supongamos que todo esto ha sido hecho, en base al Porisma 2.1, de manera que

$$\frac{ED}{DF} = \frac{BG^2}{GC^2}. \tag{3.20}$$

Puesto que BG^2 guarda con GC^2 la misma razón que un número (ED) con otro número (DF), por la Proposición 2.6 se tiene que $BG^2 \mathrm{C}\, GC^2$ y, al ser BG racional, que GC^2 y, por tanto, GC son racionales. Por otra parte, de (3.19), (3.20) y la Proposición 2.7 se sigue que

$$\frac{BG^2}{GC^2} \neq \frac{m^2}{l^2} \Rightarrow BG \not\mathrm{C}_\mathrm{L}\, GC.$$

En conclusión, BG y GC son rectas racionales, $BG \mathrm{C}^2 GC$, por lo que $BC = BG - GC$ es un apótoma, en virtud de la Proposición 3.12.

Veamos que es primera. Sea el cuadrado de la recta H la cantidad en que BG^2 excede a GC^2, esto es,

$$BG^2 = GC^2 + H^2. \tag{3.21}$$

De (3.20) y [*V-11, Porisma*] resulta

$$\frac{ED}{ED - DF} = \frac{BG^2}{BG^2 - GC^2} \iff \frac{ED}{EF} = \frac{BG^2}{H^2}. \tag{3.22}$$

Pero como ED y EF son, en sí mismos, números cuadrados se infiere de (3.22) y la Proposición 2.7 que $BG \mathrm{C_L} H$. Resumiendo, el cuadrado de BG es más grande que el cuadrado de GC en el cuadrado de una recta H, siendo $H \mathrm{C_L} BG$ y la recta entera $BG \mathrm{C_L} A$; por lo tanto, BC es una primera apótoma, de acuerdo con la Definición 3.16. *Q.E.D*

Este resultado es el análogo a encontrar una primera binomial (Proposición 3.7 y Nota 3.1). Si ponemos $A = \rho$, sigue de BG $\mathrm{C_L}$ A que $BG = k\rho$. Igualmente, de H $\mathrm{C_L}$ BG se deduce que $H = k'BG = kk'\rho$. Es entonces, de (3.21) se obtiene

$$GC^2 = BG^2 - H^2 = (k\rho)^2 - (kk'\rho)^2 \Rightarrow GC = k\rho\sqrt{1-k'^2}.$$

Finalmente, llevando estos valores de BG y GC a $BC = BG - GC$, resulta que la longitud de la primera apótoma es

$$\alpha_2 = k\rho - k\rho\sqrt{1-k'^2}.$$

Nótese que en las Proposiciones [*X-86*]-[*X-90*], Euclides establece resultados análogos desde la Proposición 3.8 hasta la Nota 3.2. Así, la longitud de la segunda apótoma es

$$\beta_2 = k\rho - \frac{k\rho}{\sqrt{1-k'^2}};$$

la de la tercera apótoma,

$$\gamma_2 = \sqrt{k}\rho(1 - \sqrt{1-k'^2});$$

la de la cuarta apótoma,

$$\delta_2 = k\rho\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right);$$

la de la quinta apótoma,

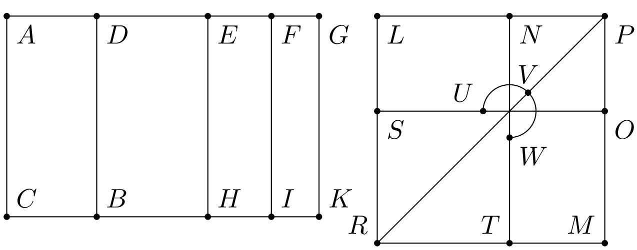
$$\varepsilon_2 = k\rho(1 - \sqrt{1+k'});$$

y la de la sexta apótoma,

$$\zeta_2 = \sqrt{k}\rho - \sqrt{k'}\rho.$$

Proposición 3.23 (X-91). *Supongamos que un área está comprendida por una recta racional y una primera apótoma. Entonces, el lado del cuadrado equivalente a dicha área es una apótoma.*

Demostración. Supongamos que el área $[AB] = [AC, AD]$ está comprendido por la recta racional AC y la primera apótoma AD. Veamos que el lado del cuadrado equivalente a $[AB]$ es una apótoma.



Como AD es una primera apótoma, sea DG su adjunta. Entonces, por la Proposición 3.12 y la Definición 3.16, las rectas AG y DG son racionales,

$$AG \ \mathrm{C}^2 \ DG \ \ ; \ \ AG \ \mathrm{C_L} \ AC \ \ ; \ \ AG^2 = DG^2 + X^2 \ , X \ \mathrm{C_L} \ AG. \tag{3.23}$$

Ahora, si aplicamos a AG un paralelogramo igual a la cuarta parte del cuadrado de DG, divide a AG en partes conmensurables en longitud, por la Proposición 2.14. A continuación dividamos por el punto E a DG en dos partes iguales, y aplíquese a AG un paralelogramo igual al cuadrado EG, deficiente en la figura de un cuadrado. Sea este rectángulo $[AF, FG]$. Así pues, $AF \ \mathrm{C_L} \ FG$.

Tracemos por E, F y G paralelas EH, FI y GK a AC. Por la Nota 2.2(i) $AF \ \mathrm{C_L} \ FG \Rightarrow AG \ \mathrm{C_L} \ AF$ y $AG \ \mathrm{C_L} \ FG$.

Pero, por la segunda condición de (3.23), $AG \ \mathrm{C_L} \ AC$, lo que entraña que $AF \ \mathrm{C_L} \ AC$ y $FG \ \mathrm{C_L} \ AC$, a tenor de la Proposición 2.9. Ahora bien, siendo AC racional, sigue que AF y FG son también racionales. Y, en consecuencia, por la Proposición 2.15, las áreas

$$[AI] = [AC, AF] \ \ ; \ \ [FK] = [FI, FG] = [AC, FG] \tag{3.24}$$

son racionales. Como $DE = EG$, es obvio que $DE \ \mathrm{C_L} \ EG$, de donde resulta que $DG \ \mathrm{C_L} \ DE$ y $DG \ \mathrm{C_L} \ EG$ y, al ser DG racional, se deriva que tanto DE como EG son rectas racionales, y $DG \ \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \ AG$, por la primera de (3.23). Puesto que $AC \ \mathrm{C_L} \ AG$, por la segunda de (3.23), se deduce que $DG \ \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \ AC$ y, por tanto, $DE \ \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \ AC$ y $EG \ \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \ AC$, acorde con la Proposición 2.10. Finalmente, por la Proposición 2.17, los rectángulos

$$[DH] = [DB, DE] = [AC, DE] \ \ , \ \ [EK] = [EH, EG] = [AC, EG] \tag{3.25}$$

son mediales.

Seguidamente, construimos el cuadrado $[LM]$ igual al rectángulo $[AI]$ ($[LM] = [LP, LP] = [AC, AF] = [AI]$), y le quitamos un cuadrado $[NO]$ igual al rectángulo $[FK]$ ($[NO] = [NP, NP] = [AC, FG] = FK$), con ángulo común $\widehat{LPM}$. Así, los cuadrados $[LM]$ y $[NO]$ tienen sus diagonales sobre la misma recta PR ([*VI,26*]). Completamos la segunda figura.

Recordemos que $[AF, FG] = [EG, EG]$, esto es, $AF.FG = EG^2$, lo que equivale a

$$\frac{AF}{EG} = \frac{EG}{FG}. \tag{3.26}$$

Por otra parte,

$$\frac{AF}{EG} = \frac{AF.AC}{EG.AC} = \frac{[AI]}{[EK]} \ \text{ y } \ \frac{EG}{FG} = \frac{EG.AC}{FG.AC} = \frac{[EK]}{[FK]}. \tag{3.27}$$

De (3.26) y (3.27) se obtiene

$$\frac{[AI]}{[EK]} = \frac{[EK]}{[FK]} \iff [EK]^2 = [AI].[FK], \tag{3.28}$$

es decir, el área $[EK]$ es la media proporcional de $[AI]$ y $[FK]$. Ahora bien, por el Lema 2.13, $[MN]^2 = [LM].[NO]$ y, dado que $[LM] = [AI]$ y $[NO] = [FK]$, se deduce de (3.28) que $[EK] = [MN]$. Pero $[EK] = [DH]$, pues EH divide al rectángulo $[DK]$ por su mitad, y $[MN] = [LO]$, por construcción de los cuadrados $[LM]$ y $[NO]$, de modo que

$$[EK] = [MN] \iff [LO] = [DH], \tag{3.29}$$

siendo todas áreas mediales, por (3.25). Obsérvese que,

$$[DK] = [DH] + [EK] = [LO] + [MN] = (\text{Gnomon de } UVW) + [NO],$$

mientras que $[AK] = [AI] + [FK] = [LM] + [NO]$. Nótese que de estas dos últimas expresiones, resulta $[AB] = [AK] - [DK] = [ST, ST] = LN^2$, es decir,

$$LN^2 = [AB] = [AC, AD]. \tag{3.30}$$

Veamos que LN es una apótoma. En efecto, por (3.24), $[AI]$ y $[FK]$ son áreas racionales, de donde por construcción $[LM] = [AI]$ y $[NO] = [FK]$ también son áreas racionales. Pero $[LM] = [LP, LP]$ y $[NO] = [NP, NP]$, por lo cual LP y PN son igualmente rectas racionales. Como, por (3.29), es $[LO]$ medial y $[NO]$ racional, ello implica que $[LO] \not\mathrm{C} [NO]$, y siendo

$$\frac{[LO]}{[NO]} = \frac{LP.PO}{PN.PN} = \frac{LP}{PN},$$

sigue que $LP \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}} PN$, en virtud de la Proposición 2.8, pues $PO = PN$ en $[NO]$. En resumen, LP y PN son rectas racionales, $LP \ \mathrm{C}^2 \ PN$ y $LN = LP - PN$. Luego, LN es una apótoma. *Q.E.D*

La fórmula (3.30) nos indica que la apótoma LN es el lado del cuadrado de igual área que el rectángulo $[AB]$ comprendido por una recta racional y una primera apótoma. Pero tiene una lectura algebraica más sencilla. Si $AC = \rho = 1$, LN es la raíz cuadrada de la primera apótoma, $LN = \sqrt{AD}$. Esto es, $A_2 = \sqrt{\alpha_2}$.

Análogamente, Euclides estableció los siguientes resultados.

(I) “Si un área está comprendida por una recta racional y una segunda apótoma, entonces el lado del cuadrado equivalente al área dada es una primera apótoma de una medial” ([*X-92*]). Esto significa que $B_2 = \sqrt{\beta_2}$.

(II) “Si un área está comprendida por una recta racional y una tercera apótoma, entonces el lado del cuadrado equivalente a dicha área es una segunda apótoma de una medial” ([*X-93*]). Algebraicamente quiere decir que $C_2 = \sqrt{\gamma_2}$.

(iii) "Si un área está comprendida por una recta racional y una recta cuarta apótoma, entonces el lado del cuadrado equivalente a esta área es una recta menor" ([*X-94*]).Ello quiere decir que $D_2 = \sqrt{\delta_2}$.

(iv) "Si un área está comprendida por una recta racional y una quinta apótoma, entonces el lado del cuadrado equivalente a dicha área es la recta que hace con un área racional un área entera medial" ([*X-95*]). Esto es, $E_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$.

(v) "Si un área está comprendida por una recta racional y una sexta apótoma, entonces el lado del cuadrado equivalente a dicha área es la recta que hace con un área medial un área entera medial" ([*X-96*]). Algebraicamente, $F_2 = \sqrt{\zeta_2}$.

Finalmente, en las proposiciones [*X-97*]-[*X-102*] Euclides probó los resultados inversos, a saber,

(i') $A_2^2 = \alpha_2$; (iii') $C_2^2 = \gamma_2$; (v') $E_2^2 = \varepsilon_2$;
(ii') $B_2^2 = \beta_2$; (iv') $D_2^2 = \delta_2$; (vi') $F_2^2 = \zeta_2$.

Seguramente que esta clase de rectas aparecieron en la construcción de figuras geométricas por parte de los matemáticos griegos. En particular, surgen en algunas de las pruebas de Euclides. Así, el lado de un pentágono inscrito en un círculo de radio racional es la recta irracional llamada menor ([*XIII-11*]). Igualmente, el lado del icosaedro inscrito en una esfera es la recta menor ([*XIII-16*]). Por otra parte, el lado del dodecaedro inscrito en una esfera es la recta irracional denominada apótoma ([*XIII-17*]).

De acuerdo con todo lo analizado en este Trabajo de Fin de Grado, Euclides considera una serie de trece rectas irracionales:

1. Medial.
2. Binomial (A_1).
3. Primera bimedial (B_1).
4. Segunda bimedial (C_1).
5. Mayor (D_1).
6. Lado del cuadrado equivalente a un área racional más un área medial (E_1).
7. Lado del cuadrado equivalente a la suma de dos áreas mediales (F_1).
8. Apótoma (A_2).
9. Primera apótoma de una medial (B_2).
10. Segunda apótoma de una medial (C_2).
11. Menor (D_2).
12. La que hace con un área racional un área entera medial (E_2).
13. La que hace con un área medial un área entera medial (F_2).

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M. *Calculus.* Vol. I, Reverté, Barcelona, 1979.

[2] Batista Cruz, Sara Gabriela. *Los Elementos de Euclides. Libros VII-VIII-IX.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2018.

[3] Euclides. *Elementos (Libros I-IV),* traducción al español y notas de M. L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1991.

[4] Euclides. *Elementos (Libros V-IX),* traducción al español y notas de M. L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1994.

[5] Euclides *Elementos (Libros X-XIII),* traducción al español y notas de M. L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1996.

[6] Gorrín Hernández, Candelaria Noemi. *Los Elementos de Euclides. Libros I-IV.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2016.

[7] Heiberg, J. L. *Euclid's Elements of Geometry.* The Greek text from *Euclidis Elementa,* edidit et Latine interpretus est I. L. Heiberg, in aedibus G. G. Teubneri (1883-1885), edited and provided with a modern English translation, by R. Fitzpatrick.

[8] Heath, Thomas Litte. *A History of Greek Mathematics. From Thales to Euclid.* Vol. I, Dover, New York, (1981[1921]).

[9] Hernández Alonso, Melanie. *Los Elementos de Euclides. Libros V-VI.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2017.

[10] Knorr, W. *"La croix des mathématiciens": the Euclidean theory of irrational lines,* Bulletin of AMS, 9(1)(1983), 41-69.

[11] Millán Gasca, A. *La fuerza del razonamiento matemático.* Nivola, Madrid, 2004.

[12] Newman, James Roy (1976): *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Vol. I, Barcelona: Grijalbo.

[13] Pla i Carrera, Josep. *Euclides, la geometría. Las matemáticas presumen de figura.* RBA, Madrid, 2012.

[14] Rey Pastor, Julio y José Babini (1984). *Historia de la Matemática.* Vol. I, Gedisa, Barcelona, 1984.

Euclid: Book X

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Laura Hernández Cabezas
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100971996@ull.edu.es

Abstract

In this Final Degree Project, we study Book X, which deals with commensurable and incommensurable magnitudes, and irrational straight-lines in relation to any particular straight-line assumed as rational, as well as irrational areas, with regard to a particular area, postulated as rational. Book X is the most intricate part of Euclid's Elements, because of its enormous length, the obscurity of its demonstrations and the absence of motives for its results. This book consists of 16 definitions, distributed in three groups, and 115 propositions. The main objective is to introduce and classify thirteen irrational straight-lines, investigate their properties and establish relations among them and with another set of twelve irrational straight-lines, the six orders of binomials and the six orders of apotomes.

1. Life and work of Euclid of Alexandria.

Euclid of Alexandria (325-265 BC) is the most famous mathematician of Antiquity, often referred to as the "father of the geometry". According to historians, there are only two credible references to Euclid: Proclus and Papo of Alexandria (290-350 AD). The latter, who is considered the last of the great Greek mathematicians, wrote in his most important work about the disciples of Euclid and places them around 250 BC. Therefore, Euclid lived during the reign of Pharaoh Ptolemy I Soter, the Savior (367-283 BC), and taught mathematics in Alexandria, where he created a school around the famous museum of this city.
Euclid is credited with a dozen works about Geometry, Astronomy, Music, Mechanics, and Optics. His *Elements* is his *magnum opus* and is one of the most important and influential works in the history of mathematics, having served as the main textbook in all the universities in the Western world until the 19th century. In this work, most of the Greek mathematical knowledge before him is systematically compiled and ordered, in a logical succession of propositions based on a reduced set of definitions, postulates, and common notions. Euclid builds this monumental work, establishing with it the deductive axiomatic method and the standard for rigor and logical structure for mathematical works.

2. First part of the Book X

The first part of Elements' Book X is constituted by 47 propositions and 4 definitions: commensurable and incommensurable magnitudes, commensurability and incommensurability in square, rational and irrational lines in length and square.
Two magnitudes α and β are **commensurable** if

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{k} \quad \text{where, } k=\frac{m}{n},\ m,\ n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

We will write $\alpha \mathrm{C} \beta$ when the magnitudes α, β are commensurable with each other, and $\alpha \not\mathrm{C} \beta$ when they are not.
Two magnitudes α and β are **commensurable in square** if

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{k^{1/2}} \quad \text{where, } k=\frac{m}{n},\ m,\ n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

We posit a certain line ρ as "the rational"; then any other ρ' is a **rational line** whenever $\rho^2 \mathrm{C} \rho'^2$, but irrational otherwise.
We call A an **rational area** whenever $A \mathrm{C} \rho^2$, but irrational otherwise.
Finally, the notation of T. Heath [2] will be used to refer to the irrational lines established in Book X. The first are the following

(I) "The rectangle contained by rational straight lines commensurable in square only is irrational, and the side of the square equal to it is irrational. Let the latter be called medial" [*X-21*].
(II) "If two rational straight lines commensurable in square only are added together, then the whole is irrational; let it be called binomial and denoted A_1" [*X-36*].
(III) "If two medial straight lines commensurable in square only and containing a rational rectangle are added together, the whole is irrational; let it be called the first bimedial straight line and denoted B_1" [*X-37*].
(IV) "If two medial straight lines commensurable in square only and containing a medial rectangle are added together, then the whole is irrational; let it be called the second bimedial straight line and denoted C_1" [*X-38*].
(V) "If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them rational but the rectangle contained by them medial are added together, then the whole straight line is irrational; let it be called major and denoted D_1" [*X-39*].
(VI) "If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial but the rectangle contained by them rational are added together, then the whole straight line is irrational; let it be called the side of a rational plus a medial area and denoted E_1" [*X-40*].
(VII) "If two straight lines incommensurable in square which make the sum of the squares on them medial and the rectangle contained by them medial and also incommensurable with the sum of the squares on them are added together, then the whole straight line is irrational; let it be called the side of the sum of two medial areas and denoted F_1" [*X-41*].

3. Second an third part of the Book X

Euclid introduced the group of binomials: first binomial(α_1), second (β_1), third (γ_1), fourth (δ_1), fifth (ε_1) and sixth (ζ_1). They are related to the class of irrational straight lines considered in the previous chapter, as follows

(I) $\sqrt{\beta_1}=B_1$, first bimedial.
(II) $\sqrt{\gamma_1}=C_1$, second bimedial.
(III) $\sqrt{\delta_1}=D_1$, major.
(IV) $\sqrt{\varepsilon_1}=E_1$, the side of a rational plus a medial area.
(V) $\sqrt{\zeta_1}=F_1$, the side of the sum two medial areas.

In the third section, six new fundamental irrational straight lines are studied: the apotome (A_2), the first apotome of a medial (B_2), the second apotome of a medial (C_2), minor line (D_2), the line that makes a whole medial area with a rational area (E_2) and a medial whole area with a medial area (F_2).
In addition, Euclides presents the third and final group of definitions, and the different orders of apotomes: first apotome (α_2), second apotome (β_2), third apotome (γ_2), fourth apotome (δ_2) fifth apotome (ε_2) and sixth apotome (ζ_2).
These last two groups of irrational straight lines are also related to each other:

(I) $\sqrt{\beta_2}=B_2 \iff \beta_2=B_2^2.$
(II) $\sqrt{\gamma_2}=C_2 \iff \gamma_2=C_2^2.$
(III) $\sqrt{\delta_2}=D_2 \iff \delta_2=D_2^2.$
(IV) $\sqrt{\varepsilon_2}=E_2 \iff \varepsilon_2=E_2^2.$
(V) $\sqrt{\zeta_2}=F_2 \iff \zeta_2=F_2^2.$

References

[1] Euclides. *Elementos (Libros X-XIII),* traducción al español y notas de M. L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1996.
[2] Heath, Thomas Litte. *A History of Greek Mathematics. From Thales to Euclid.* Vol. I, Dover, New York, (1981[1921]).