Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jezael Goya Sosa

Introducción al Análisis de Fourier

Introduction to Fourier Analysis

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2019

Dirigido por
María Isabel Marrero Rodríguez

María Isabel Marrero Rodríguez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
Aptdo. de Correos 456
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Al llegar al final del camino, uno agradece cada pizca de ayuda que le han brindado a lo largo de este tiempo.

A mi tutora, María Isabel Marrero Rodríguez, por la gran implicación que ha mostrado en este trabajo, guiándome y ayudándome en prácticamente todo el proceso.

A mis padres y a mi hermana, que me han apoyado y animado en todo momento a pesar de tener que aguantar mis quejas durante el desarrollo de este grado.

A mis amigos, que me han permitido relajarme y poder disfrutar de risas no acotadas. Especialmente, me siento orgulloso de pertenecer al *trío de los inseparables* y haber compartido tantas experiencias juntos.

A todos los profesores y profesoras que me han mostrado la belleza de las matemáticas.

Gracias a todas las personas que han contribuido a mi desarrollo como matemático, y sobre todo, como persona.

Jezael Goya Sosa
La Laguna, 5 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se aborda la teoría básica de las series de Fourier en espacios de funciones continuas e integrables sobre la circunferencia unidad. En el Capítulo 1 se introducen los conceptos de coeficiente de Fourier y serie de Fourier asociada a una función integrable; se analiza el orden de magnitud de tales coeficientes; se define la convolución de funciones y se estudian los núcleos de sumabilidad en el marco de los espacios homogéneos; finalmente, se expone la teoría en espacios de funciones de cuadrado integrable, conectándola con la teoría de espacios de Hilbert. En el Capítulo 2 se caracterizan los espacios de Banach homogéneos que admiten convergencia en norma como aquellos que admiten conjugación, se demuestra el principio de localización y se establecen algunos criterios de convergencia puntual. Por último, en el Capítulo 3 se profundiza en el estudio de la función conjugada desde la óptica del análisis complejo, probando en particular el teorema de M. Riesz relativo a la continuidad del operador de conjugación sobre los espacios de Lebesgue.

Palabras clave: *Coeficiente de Fourier – Serie de Fourier – Convolución – Sumabilidad – Espacio de Banach homogéneo – Convergencia en norma – Convergencia puntual – Conjugación.*

Abstract

In this work, the basic theory of Fourier series in spaces of continuous and of integrable functions on the unit circle is addressed. In Chapter 1, the concepts of Fourier coefficient and Fourier series associated with an integrable function are introduced; the order of magnitude of such coefficients is analyzed; the convolution of functions is defined and summability kernels are studied in the framework of homogeneous spaces; finally, the theory in spaces of square integrable functions is presented, connecting it with the theory of Hilbert spaces. In Chapter 2, homogeneous Banach spaces that allow convergence in norm are characterized as those that admit conjugation, the principle of localization is demonstrated, and some pointwise convergence criteria are established. Finally, in Chapter 3, the conjugate function is studied from a complex variable viewpoint and, in particular, the M. Riesz theorem regarding the continuity of the conjugation operator on Lebesgue spaces is proved.

Keywords: *Fourier coefficient – Fourier series – Convolution – Summability – Homogeneous Banach space – Convergence in norm – Pointwise convergence – Conjugation.*

Contenido

Introducción

Las *series de Fourier* deben su nombre al matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), quien las introdujo en 1807 como una herramienta para resolver lo que hoy conocemos como *ecuación del calor*. Fourier afirmó, erróneamente, que toda función admite un desarrollo en serie trigonométrica, y que este tipo de series siempre converge. Además, aunque los coeficientes del desarrollo se calculan por integración, Fourier no tuvo en cuenta qué hipótesis deben ser impuestas a la función para poder definir rigurosamente tales coeficientes. De esta manera, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema en el que estaban involucrados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, modo de convergencia. La influencia de este problema en el ulterior desarrollo del análisis matemático ha sido considerable.

Los intentos de probar la convergencia de las series de Fourier surgieron casi inmediatamente. Tras sendas demostraciones incompletas de Poisson y Cauchy, fue Dirichlet quien, en 1829, publicó el primer resultado correcto de convergencia: si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la función; en la demostración de este resultado comparece el hoy llamado *núcleo de Dirichlet*. En 1881, Jordan extendió el criterio de Dirichlet a las *funciones de variación acotada*, concepto que él mismo introdujo, dando lugar a lo que actualmente se conoce como *criterio de Dirichlet-Jordan*. De forma complementaria, Lipschitz estableció en 1864 un nuevo criterio de convergencia basado en la condición que hoy conocemos como de *Lipschitz-Hölder*. Con posterioridad, en 1880, Dini estableció un criterio más general, conocido como *criterio de Lipschitz-Dini* o, simplemente, *criterio de Dini*. Ambos criterios son los más habituales en los textos que desarrollan la teoría de series de Fourier, aunque a veces se presentan otros de principios del siglo XX debidos a Lebesgue, De la Vallée-Poussin y Young.

Cauchy había dado una definición de integral válida solamente para funciones continuas a trozos. En 1855, Riemann escribe su memoria de habilitación sobre la representabilidad de una función en serie trigonométrica, donde justifica la necesidad de extender la noción de integral de Cauchy e introduce la clase de funciones que hoy denominamos *integrables Riemann*. Además, establece un *principio de localización* y demuestra que la sucesión de coeficientes de una función integrable Riemann tiende a cero.

En un trabajo de 1870, Heine probó que sin la condición de convergencia uniforme (introducida en 1842 por Weierstrass) la integración término a término de una serie de funciones no era, en general, posible. Su resultado principal establecía que la serie de Fourier de una función continua con un número finito de máximos y mínimos converge uniformemente. Tres años más tarde, Du Bois-Reymond demostró que la serie de Fourier de una función continua puede diverger en un punto. A partir de este momento empezaron a investigarse otros tipos de convergencia, cambiando incluso la manera de sumar la serie y dando origen a los llamados *métodos de sumabilidad*. En 1900, Fejér mostró que la serie de Fourier de una función continua converge uniformemente a la propia función si antes de pasar al límite se toman los promedios de las sumas parciales.

En el siglo XX, el nacimiento de la teoría de la medida e integración de Lebesgue y del análisis funcional dieron un renovado impulso a la teoría de las series de Fourier. Lebesgue extendió a su nueva clase de funciones integrables el resultado previo de Riemann sobre la convergencia a cero de los coeficientes de Fourier (*lema de Riemann-Lebesgue*), el principio de localización, el criterio de convegencia de Dini y el método de sumabilidad de Fejér, donde la función de partida se recupera ahora en casi todo punto. Paralelamente, se fue desarrollando el concepto de espacio de Hilbert. F. Riesz elaboró la noción de distancia en los espacios L^2, y poco después llegó la convergencia de las series de Fourier en este espacio. Como consecuencia, se estudió el problema análogo en los espacios L^p, para $1 \leq p < \infty$: la respuesta fue negativa para $p = 1$ (Banach-Steinhaus, 1918) pero afirmativa para $1 < p < \infty$ (M. Riesz, 1923). Riesz no trabajó directamente con las sumas parciales sino con la *función conjugada*, concepto que proviene del análisis complejo a través de la armónica conjugada de la solución del problema de Dirichlet en el círculo unidad.

En relación con la convergencia puntual, Lusin (1913) conjeturó que la serie de Fourier de una función de L^2 converge en casi todo punto. Por otro lado, Kolmogorov demostró en 1926 la existencia de una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto. No es hasta 1965 que Carleson prueba la conjetura de Lusin, extendida luego por Hunt a todos los espacios L^p con $1 < p < \infty$. Así, el teorema de Carleson y su extensión por Hunt supusieron la culminación de un camino que había empezado siglo y medio antes. Aquí lo recorreremos apoyándonos, fundamentalmente, en la monografía de Katznelson [10].

1

Series de Fourier en $\mathbb{T}$

Denotamos por $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales y por $\mathbb{Z}$ el subgrupo de los enteros. El grupo $\mathbb{T}$ está definido como el cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ donde, como indica la notación, $2\pi\mathbb{Z}$ es el grupo de los múltiplos enteros de 2π. Existe una identificación natural entre las funciones definidas sobre $\mathbb{T}$ y las funciones 2π-periódicas definidas sobre $\mathbb{R}$, lo que nos permite introducir implícitamente nociones como la continuidad o la derivabilidad para funciones sobre $\mathbb{T}$. Análogamente, la *medida de Lebesgue* puede ser definida en $\mathbb{T}$ mediante la identificación anterior: una función f es integrable sobre $\mathbb{T}$ si la correspondiente función 2π-periódica, que volvemos a denotar como f, es integrable en $[0, 2\pi)$, y ponemos

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

En otras palabras, consideramos el intervalo $[0, 2\pi)$ como un modelo para $\mathbb{T}$ y la medida de Lebesgue dt sobre $\mathbb{T}$ es la restricción de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ a $[0, 2\pi)$. La masa total de dt sobre $\mathbb{T}$ es igual a 2π y muchas fórmulas se simplificarían si normalizamos dt para que tenga masa total 1, esto es, si reemplazamos dt por $dx/2\pi$. Sin embargo, tomar intervalos de $\mathbb{R}$ como modelos para $\mathbb{T}$ es muy conveniente, y elegimos poner $dt = dx$ para evitar confusiones. El precio que pagamos a cambio es escribir el factor $1/2\pi$ delante de cada integral.

Una propiedad muy interesante de dt sobre $\mathbb{T}$ es la de permanecer invariante por traslaciones; esto es, para todo $t_0 \in \mathbb{T}$ y toda f definida sobre $\mathbb{T}$,

$$\int f(t - t_0)\,dt = \int f(t)\,dt.$$

A lo largo de este capítulo se sobreentenderá que aquellas integrales cuyos límites de integración no están especificados se toman sobre $\mathbb{T}$.

1.1. Coeficientes de Fourier

Denotamos por $L^1(\mathbb{T})$ el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones integrables Lebesgue sobre $\mathbb{T}$ con valores complejos. Para $f \in L^1(\mathbb{T})$ ponemos

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt.$$

Es bien sabido que $L^1(\mathbb{T})$ con la norma anterior es un espacio de Banach.

Definición 1.1. *Un* polinomio trigonométrico *en* $\mathbb{T}$ *es una expresión de la forma*

$$P \sim \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}. \tag{1.1}$$

Los números n que aparecen en (1.1) se llaman *frecuencias* de P, y el mayor entero n que cumple que $|a_n| + |a_{-n}| \neq 0$ se llama *grado* de P. Los valores que toma n son enteros, de modo que cada uno de los sumandos en (1.1) es una función en $\mathbb{T}$. Puesto que la suma (1.1) es finita, representa una función, que volvemos a denotar por P, definida para cada $t \in \mathbb{T}$ como

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}. \tag{1.2}$$

Sea P dada por (1.2). Conociendo la función P podemos computar los coeficientes a_n por la fórmula

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int P(t) e^{-int}\, dt, \tag{1.3}$$

como se desprende inmediatamente del hecho de que, para $j \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ijt}\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

Encontramos así que la función P determina la expresión (1.1), y parecería innecesario mantener la distinción entre ésta y la función P. Consideraremos los polinomios trigonométricos como expresiones formales y funciones a la vez.

Definición 1.2. *Una* serie trigonométrica *en* $\mathbb{T}$ *es una expresión de la forma*

$$S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}. \tag{1.4}$$

Al igual que antes, n toma valores enteros; sin embargo, el número de términos en (1.4) puede ser infinito y no se ha supuesto nada acerca del tamaño de los coeficientes o sobre convergencia. La *conjugada* de la serie (1.4) es, por definición, la serie

$$\widetilde{S} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\,\mathrm{sgn}(n) a_n e^{int},$$

donde

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ n/|n| & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Motivados por (1.3), definimos el *n-ésimo coeficiente de Fourier* de f como

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int}\, dt. \tag{1.5}$$

Definición 1.3. *La* serie de Fourier $S[f]$ *de una función* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *es la serie trigonométrica*

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

La serie conjugada de $S[f]$ será denotada por $\widetilde{S}[f]$ y denominada *serie de Fourier conjugada* de f. Además, diremos que una serie trigonométrica es *de Fourier* si es la serie de Fourier de alguna $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Nos centraremos ahora en algunas propiedades elementales de los coeficientes de Fourier.

Teorema 1.4. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$.*

a) Se tiene: $(\widehat{f+g})(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.
b) Para cualquier número complejo α,

$$(\widehat{\alpha f})(n) = \alpha \widehat{f}(n).$$

c) Si $\overline{f}$ es la conjugada compleja de f, definida por $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$ $(t \in \mathbb{T})$, entonces

$$\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}.$$

d) Pongamos $f_\tau(t) = f(t-\tau)$ $(\tau \in \mathbb{T})$; entonces

$$\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n) e^{-in\tau}.$$

e) Se cumple que

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1}.$$

Demostración. La prueba de todos los apartados se sigue inmediatamente de (1.5). ■

Corolario 1.5. *Supongamos que $f_j \in L^1(\mathbb{T})$ $(j = 0, 1, \ldots)$, con $\|f_j - f_0\|_{L^1} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Entonces $\widehat{f_j}(n) \to \widehat{f_0}(n)$ cuando $j \to \infty$ uniformemente en j, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Teorema 1.6. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, con $\widehat{f}(0) = 0$, y definamos*

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Entonces F es continua, 2π-periódica, y

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n) \quad (n \neq 0). \tag{1.6}$$

Demostración. La continuidad (de hecho, continuidad absoluta) de F es evidente. La periodicidad sigue de que

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)\, d\tau = 2\pi \widehat{f}(0) = 0,$$

y (1.6) se obtiene integrando por partes:

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}\, dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(t)\frac{1}{-in}e^{-int}\, dt = \frac{1}{in}\widehat{f}(n).$$

■

Ahora definiremos el operador de convolución en $L^1(\mathbb{T})$. En lo que sigue subyacen la estructura de grupo de $\mathbb{T}$ y la invariancia por traslaciones de dt.

Teorema 1.7. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Para casi todo t, la función $f(t-\tau)g(\tau)$ es integrable sobre $\mathbb{T}$ como función de τ, y si escribimos*

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau \tag{1.7}$$

entonces $h \in L^1(\mathbb{T})$, con

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\, \|g\|_{L^1}\, . \tag{1.8}$$

Además,

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1.9}$$

Demostración. Las funciones $f(t-\tau)$ y $g(\tau)$, consideradas como funciones de las dos variables (t,τ), son claramente medibles y, por tanto, también lo es

$$F(t,\tau) = f(t-\tau)g(\tau).$$

Para cada τ, $F(t,\tau)$ es un múltiplo constante de f_τ, luego es dt-integrable, y

$$\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{1}{2\pi}\int |F(t,\tau)|\,dt\right)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int |g(\tau)|\,\|f\|_{L^1}\ d\tau = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}\,.$$

Por el teorema de Fubini, $f(t-\tau)g(\tau)$ es integrable (sobre $(0,2\pi)$) como función de τ para casi todo t. Además,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int |h(t)|\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int\left|\frac{1}{2\pi}\int F(t,\tau)\,d\tau\right|dt\\ &\le \frac{1}{4\pi^2}\iint |F(t,\tau)|\ dt\,d\tau = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^1}\,,\end{aligned}$$

lo que establece (1.8). Para demostrar (1.9), escribimos

$$\begin{aligned}\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int h(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{4\pi^2}\iint f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}g(\tau)e^{-in\tau}\,dt\,d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}\,dt\ \frac{1}{2\pi}\int g(\tau)e^{-in\tau}\,d\tau = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).\end{aligned}$$

Como anteriormente, el cambio en el orden de integración está justificado por el teorema de Fubini. ∎

Definición 1.8. *La* convolución $f*g$ *de las funciones* $f,g\in L^1(\mathbb{T})$ *es la función* h *definida por (1.7).*

Usando esta notación para la convolución, podemos reescribir (1.9) como

$$\widehat{(f*g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad (n\in\mathbb{Z}). \tag{1.10}$$

Teorema 1.9. *La operación de convolución en* $L^1(\mathbb{T})$ *es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma.*

Demostración. Establezcamos cada propiedad por separado.

- Conmutativa: el cambio de variable $\vartheta = t-\tau$ permite escribir

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int g(t-\vartheta)f(\vartheta)\,d\vartheta = (g*f)(t).$$

- Asociativa: Si $f_1, f_2, f_3 \in L^1(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}[(f_1 * f_2) * f_3](t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint f_1(t-u-\tau) f_2(u) f_3(\tau)\, du\, d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint f_1(t-\omega) f_2(\omega-\tau) f_3(\tau)\, d\omega\, d\tau \\ &= [f_1 * (f_2 * f_3)](t).\end{aligned}$$

- Distributiva: si $f_1, f_2, f_3 \in L^1(\mathbb{T})$ entonces

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3,$$

como resulta evidente a partir de (1.7). ∎

Lema 1.10. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$, y sea $\varphi(t) = e^{int}$ para algún entero n. Entonces*

$$(\varphi * f)(t) = \widehat{f}(n) e^{int}.$$

Demostración. Se tiene:

$$(\varphi * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{in(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{int} \cdot \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) e^{-in\tau}\, d\tau = \widehat{f}(n) e^{int}.$$

∎

Corolario 1.11. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $k(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, entonces*

$$(k * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \widehat{f}(n) e^{int}. \tag{1.11}$$

1.2. Sumabilidad en norma y espacios de Banach homogéneos sobre $\mathbb{T}$

Hemos definido la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ como una cierta serie trigonométrica formal. Nos podríamos preguntar qué objeto tiene la introducción de estas series formales: después de todo, la expresión formal $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$ no contiene más información que la que puede haber en la más simple $\left\{\widehat{f}(n)\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ o en la aún más simple $\widehat{f}$, sobreentendiendo que la función $\widehat{f}$ está definida sobre los enteros. Como veremos, ambas expresiones, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}$ y $\widehat{f}$, tienen sus ventajas; la ventaja principal de la notación como serie reside en que ésta nos indica la manera en la que f puede ser reconstruida a partir de $\widehat{f}$. La mayor parte de este capítulo y todo el capítulo siguiente estarán dedicados a clarificar el sentido en el que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ representa a f. En esta sección estableceremos algunos de los hechos principales; veremos que $\widehat{f}$ determina f de forma unívoca y mostraremos cómo encontrar f, conocida $\widehat{f}$.

Dos propiedades muy importantes del espacio de Banach $L^1(\mathbb{T})$ son las siguientes:

(H-1') Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\tau \in \mathbb{T}$, entonces

$$f_\tau(t) = f(t-\tau) \in L^1(\mathbb{T}) \quad \text{y} \quad \|f_\tau\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}.$$

(H-2') La función valuada en $L^1(\mathbb{T})$ y definida por $\tau \mapsto f_\tau$ es continua sobre $\mathbb{T}$; esto es, para $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\tau_0 \in \mathbb{T}$,

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0. \tag{1.12}$$

Nos referiremos a la propiedad (H-1') como la *invariancia por traslaciones* de $L^1(\mathbb{T})$; es una consecuencia inmediata de la invariancia por traslaciones de la medida dt. Para establecer (H-2') advertimos que, obviamente, (1.12) vale si f es una función continua. Recordando que las funciones continuas son densas en $L^1(\mathbb{T})$, podemos considerar $f \in L^1(\mathbb{T})$ arbitraria y, dado $\varepsilon > 0$, encontrar una función g, continua sobre $\mathbb{T}$, tal que $\|g - f\|_{L^1} < \varepsilon/2$; entonces,

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} &\le \|f_\tau - g_\tau\|_{L^1} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1} + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_{L^1} \\ &= \|(f-g)_\tau\|_{L^1} + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1} + \|(g-f)_{\tau_0}\|_{L^1} \\ &\le \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Luego, $\limsup_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} \le \varepsilon$ y, siendo ε un número positivo arbitrario, queda probado (H-2').

Definición 1.12. *Un* núcleo de sumabilidad *es una sucesión* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones continuas* 2π*-periódicas que satisfacen:*

(S-1) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int k_n(t)\,dt = 1.$

(S-2) $\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int |k_n(t)|\,dt \le C$*, siendo* C *una constante.*

(S-3) Para todo $0 < \delta < \pi$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0.$$

Un núcleo de sumabilidad positivo *es aquel que cumple que* $k_n(t) \ge 0$ *para cualesquiera* t *y* n*.*

Nótese que para núcleos postivos la condición (S-2) es claramente redundante.

Podemos considerar también familias $\{k_r\}$ que dependan de un parámetro continuo r en vez de uno discreto n. Así, por ejemplo, el *núcleo de Poisson* $\mathbf{P}(r,t)$, que introduciremos al final de esta sección, está definido para $0 \le r < 1$ y podemos sustituir, tanto en (S-3) como en las aplicaciones, el límite «$\text{lím}_{n\to\infty}$» por «$\text{lím}_{r\to 1}$».

El siguiente lema está enunciado en términos de integrales con valores vectoriales [10, Appendix A].

Lema 1.13. *Sean B un espacio de Banach, φ una función continua sobre $\mathbb{T}$ con valores en B, y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int k_n(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(0).$$

Demostración. Por (S-1) tenemos que, para $0 < \delta < \pi$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int k_n(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \varphi(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int k_n(\tau)[\varphi(\tau)-\varphi(0)]\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}\right) k_n(\tau)[\varphi(\tau)-\varphi(0)]\,d\tau. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ahora,

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)[\varphi(\tau)-\varphi(0)]\,d\tau \right\|_B \le \max_{|\tau|\le\delta} \|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|_B \, \|k_n\|_{L^1} \tag{1.14}$$

y

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(\tau)[\varphi(\tau)-\varphi(0)]\,d\tau \right\|_B \\ &\le \max \|\varphi(\tau)-\varphi(0)\|_B \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(\tau)|\,d\tau. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Por (S-2) y la continuidad de $\varphi(\tau)$ en $\tau = 0$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que (1.14) está acotado por ε; fijada esta δ, de (S-3) resulta que (1.15) tiende a cero cuando $n \to \infty$, así que (1.13) está acotado por 2ε. ■

Para $f \in L^1(\mathbb{T})$ ponemos $\varphi(\tau) = f_\tau(t) = f(t-\tau)$. Por (H-1') y (H-2'), φ es una función continua sobre $\mathbb{T}$ valuada en $L^1(\mathbb{T})$, con $\varphi(0) = f$. Aplicando el Lema **??** obtenemos:

Teorema 1.14. *Sean $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad; entonces*

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau \, d\tau \tag{1.16}$$

en la norma de $L^1(\mathbb{T})$.

Las integrales en (1.16) tienen la apariencia formal de una convolución, a pesar de que la operación involucrada en este caso, esto es, la integración vectorial, es diferente de la convolución definida por (1.7). No obstante, esta ambigüedad no supondrá un problema.

Lema 1.15. *Sean k una función continua sobre $\mathbb{T}$ y $f \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau \, d\tau = k * f. \tag{1.17}$$

Demostración. Supongamos primero que f es continua sobre $\mathbb{T}$. Tenemos [10, Appendix A]:

$$\frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j},$$

donde el límite se toma en la norma de $L^1(\mathbb{T})$, a medida que la subdivisión $\{\tau_j\}_{j=0}^{n-1}$ de $[0,2\pi)$ se hace cada vez más fina. Por otra parte,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(t - \tau_j) = (k * f)(t)$$

uniformemente, lo que prueba el lema cuando f es continua. Para una función arbitraria $f \in L^1(\mathbb{T})$, dado $\varepsilon > 0$ sea g una función continua sobre $\mathbb{T}$ tal que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$. Como (1.17) vale para g,

$$\frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau \, d\tau - k * f = \frac{1}{2\pi} \int k(\tau)(f - g)_\tau \, d\tau + k * (g - f),$$

y en consecuencia

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau \, d\tau - k * f \right\|_{L^1} \leq 2 \|k\|_{L^1} \varepsilon.$$

■

Usando el Lema 1.15 podemos reescribir (1.16) como:

$$f = \lim_{n\to\infty} k_n * f \tag{1.18}$$

en la norma de $L^1(\mathbb{T})$.

1.2.1. Núcleos de Fejér y Dirichlet

Uno de los núcleos de sumabilidad más útiles, y probablemente el más conocido, es el *núcleo de Fejér* (al que denotaremos $\{\mathbf{K}_n\}_{n=0}^{\infty}$), definido por

$$\mathbf{K}_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}. \tag{1.19}$$

El hecho de que $\mathbf{K}_n$ satisface (S-1) es obvio a partir de (1.19); que $\mathbf{K}_n(t) \geq 0$ y se cumple (S-3) se infiere del resultado siguiente.

Lema 1.16. *Se verifica:*

$$\mathbf{K}_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)t}{2}}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \right)^2 .$$

Demostración. Recuérdese que

$$\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos t) = -\frac{1}{4} e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{it}. \tag{1.20}$$

Calculando directamente los coeficientes del producto:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{4} e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{it} \right) \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(-\frac{1}{4} e^{-i(n+1)t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i(n+1)t} \right). \end{aligned}$$

■

Adhiriéndonos a la notación habitual, escribiremos $\sigma_n f = \mathbf{K}_n * f$ y $\sigma_n(f,t) = (\mathbf{K}_n * f)(t)$. Se sigue del Corolario 1.11 que

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}(j) e^{ijt}. \tag{1.21}$$

El hecho de que $\sigma_n f \to f$ en la norma de $L^1(\mathbb{T})$ para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$, que es un caso particular de (1.18), junto con el hecho de que $\sigma_n f$ es un polinomio trigonométrico, implica que los polinomios trigonométricos son densos en $L^1(\mathbb{T})$. Otras consecuencias inmediatas e importantes son los dos teoremas siguientes.

Teorema 1.17 (Unicidad). *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que $\widehat{f}(n) = 0$ para todo n. Entonces, $f = 0$.*

Demostración. Por (1.21), $\sigma_n f = 0$ para todo n. Como $\sigma_n f \to f$, se concluye que $f = 0$. ■

Una forma equivalente del teorema de unicidad es la siguiente:

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, y supongamos que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo n. Entonces $f = g$.

Teorema 1.18 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, se cumple que*

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$, sea P un polinomio trigonométrico sobre $\mathbb{T}$ tal que $\|f - P\|_{L^1} < \varepsilon$. Si $|n| > \deg(P)$, entonces

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{(f-P)}(n)| \leq \|f - P\|_{L^1} < \varepsilon.$$

■

Observación 1.19. Si K es un compacto en $L^1(\mathbb{T})$ y $\varepsilon > 0$, existe un número finito de polinomios trigonométricos $P_1, \ldots, P_n$ y, para cada $f \in K$, un j, $1 \leq j \leq N$, de manera que $\|f - P_j\|_{L^1} < \varepsilon$. Si $|n| > \max_{1\leq j\leq N} \deg(P_j)$, entonces $|\widehat{f}(n)| < \varepsilon$ para toda $f \in K$. En otras palabras, el lema de Riemann-Lebesgue se verifica uniformemente en subconjuntos compactos de $L^1(\mathbb{T})$.

Para $f \in L^1(\mathbb{T})$ denotamos por $S_n f$ la n-ésima suma parcial de $S[f]$, esto es,

$$(S_n f)(t) = S_n(f, t) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{ijt}. \tag{1.22}$$

Si comparamos (1.21) y (1.22) vemos que

$$\sigma_n f = \frac{1}{n+1} \left(S_0 f + S_1 f + \ldots + S_n f \right). \tag{1.23}$$

Dicho de otra forma, $\sigma_n f$ son las medias aritméticas de $S_n f$, a veces denominadas *medias de Cesàro* o, especialmente en análisis de Fourier, *medias de Fejér*. Se sigue que si $S_n f$ converge en $L^1(\mathbb{T})$ cuando $n \to \infty$, entonces el límite es necesariamente f.

Del Corolario 1.11 se desprende que $S_n f = D_n * f$, donde D_n es el *núcleo de Dirichlet*, definido por

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}. \tag{1.24}$$

Es importante remarcar que $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ no es un núcleo de sumabilidad en el sentido definido anteriormente ya que, aunque satisface (S-1), no cumple ni (S-2) ni (S-3). Esto explica por qué el problema de la convergencia de las series de Fourier es mucho más complicado que el problema de la sumabilidad.

1.2.2. Espacios de Banach homogéneos

Definición 1.20. *Un espacio de Banach homogéneo sobre* $\mathbb{T}$ *es un subespacio vectorial* B *de* $L^1(\mathbb{T})$ *con una norma* $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ *que lo hace espacio de Banach, y que además cumple las siguientes propiedades:*

(H-1) Si $f \in B$ *y* $\tau \in \mathbb{T}$*, entonces* $f_\tau \in B$ *y* $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$ *(donde, como anteriormente,* $f_\tau(t) = f(t-\tau)$*).*
(H-2) Para cualesquiera $f \in B$ *y* $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$, $\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Observación 1.21. Las condiciones (H-1) y (H-2) se denominan *invariancia por traslaciones* y *continuidad de la traslación*, respectivamente. Podemos simplificar (H-2) un tanto requiriendo la continuidad en un $\tau_0 \in \mathbb{T}$ específico, digamos $\tau_0 = 0$, en vez de cualquier $\tau \in \mathbb{T}$, ya que, por (H-1),

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_B \,.$$

Además, el método seguido para probar (H-2') muestra que si tenemos un espacio B satisfaciendo (H-1) y queremos demostrar que también satisface (H-2), es suficiente comprobar la continuidad de la traslación en un subconjunto denso de B. A continuación damos un enunciado casi equivalente.

Lema 1.22. *Sea* $B \subset L^1(\mathbb{T})$ *un espacio de Banach satisfaciendo (H-1). Denotamos por* B_c *el conjunto de todas las funciones* $f \in B$ *tales que* $\tau \mapsto f_\tau$ *es una función continua valuada en* B*. Entonces* B_c *es un subespacio cerrado de* B*.*

Algunos ejemplos de espacios de Banach homogéneos sobre $\mathbb{T}$ son los siguientes:

a) $C(\mathbb{T})$, el espacio de todas las funciones continuas 2π-periódicas, con la norma del supremo
$$\|f\|_\infty = \max_t |f(t)| \,. \tag{1.25}$$

b) $C^n(\mathbb{T})$, el subespacio de $C(\mathbb{T})$ formado por todas las funciones continuamente derivables hasta el orden n, con la norma
$$\|f\|_{C^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \max_t \left| f^{(j)}(t) \right|. \tag{1.26}$$

c) $L^p(\mathbb{T})$ $(1 \leq p < \infty)$, el subespacio de $L^1(\mathbb{T})$ consistente en todas las funciones f para las que $\int |f(t)|^p \, dt < \infty$, con la norma
$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} . \tag{1.27}$$

La validez de (H-1) para los tres ejemplos es evidente, mientras que la comprobación de (H-2) para a) y b) equivale al hecho de que las funciones continuas sobre $\mathbb{T}$ son uniformemente continuas. La prueba de (H-2) para c) es idéntica a la de (H-2').

Ahora extenderemos el Teorema 1.14 a los espacios de Banach homogéneos sobre $\mathbb{T}$.

Teorema 1.23. *Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbb{T}$, sea $f \in B$, y sea $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces $\|k_n * f - f\|_B \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Como $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$, la integral valuada en B

$$\frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau \, d\tau$$

es la misma que la integral valuada en $L^1(\mathbb{T})$ la cual, por el Lema 1.15, es igual a $k_n * f$. El teorema se sigue ahora del Lema 1.13. ■

Teorema 1.24. *Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbb{T}$. Entonces, los polinomios trigonométricos en B son densos.*

Demostración. Para cada $f \in B$, $\sigma_n f \to f$. ■

Corolario 1.25 (Teorema de aproximación de Weierstrass). *Cualquier función continua 2π-periódica se puede aproximar uniformemente por polinomios trigonométricos.*

1.2.3. Núcleos de De la Vallée-Poussin y Poisson

Terminamos esta sección mencionando dos núcleos de sumabilidad de gran relevancia.

a) El *núcleo de De la Vallée-Poussin*:

$$\mathbf{V}_n = 2\mathbf{K}_{2n+1}(t) - \mathbf{K}_n(t). \tag{1.28}$$

De (1.28) se infiere directamente que $\mathbf{V}_n(t)$ cumple (S-1), (S-2) y (S-3). Además, $\mathbf{V}_n$ es un polinomio de grado $2n+1$ con la propiedad de que $\widehat{\mathbf{V}}_n(j) = 1$ si $|j| \leq n+1$; por tanto, resulta muy útil cuando queremos aproximar una función f por polinomios que tengan los mismos coeficientes de Fourier que f sobre intervalos prefijados (a saber, $\mathbf{V}_n * f$).

b) El *núcleo de Poisson*: para $0 \leq r < 1$ ponemos

$$\mathbf{P}(r,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijt} = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jt = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}. \tag{1.29}$$

Del Corolario 1.11 y del hecho de que la serie en (1.29) converge uniformemente se sigue que

$$\mathbf{P}(r,t) * f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}. \tag{1.30}$$

Así, $\mathbf{P} * f$ es la media de Abel de $S[f]$, y el Teorema 1.23 (con el núcleo de Poisson) establece que para $f \in B$, $S[f]$ es sumable Abel a f en la norma de B. Comparado con el núcleo de Fejér, el núcleo de Poisson tiene la desventaja de que no es un polinomio. Sin embargo, al ser, esencialmente, la parte real del núcleo de Cauchy:

$$\mathbf{P}(r,t) = \Re\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right),$$

el núcleo de Poisson enlaza la teoría de las series trigonométricas con la teoría de las funciones analíticas. Además, $\mathbf{P}(r,t)$ tiene la útil propiedad de ser una función decreciente de t, para $0 < t < \pi$.

1.3. Convergencia puntual de $\boldsymbol{\sigma_n f}$

Ya vimos en la sección anterior que si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\sigma_n f$ converge a f en la topología de cualquier espacio de Banach homogéneo que contenga a f; en particular, si $f \in C(\mathbb{T})$ entonces $\sigma_n f$ converge uniformemente a f. No obstante, si f no es continua, en general no podemos deducir la convergencia puntual de $\sigma_n f$ a partir de su convergencia en norma, ni podemos relacionar el límite de $\sigma_n(f,t_0)$, en caso de que exista, con $f(t_0)$. Por lo tanto, para estudiar la convergencia puntual tenemos que reexaminar las integrales que definen a $\sigma_n f$.

Teorema 1.26 (Fejér). *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

a) Supongamos que existe $\lim_{h\to 0}[f(t_0+h)+f(t_0-h)]$ *(permitimos los valores $\pm\infty$). Se verifica:*

$$\sigma_n(f,t_0) \to \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}[f(t_0+h)+f(t_0-h)]. \tag{1.31}$$

En particular, si f es continua en t_0 entonces $\sigma_n(f,t_0) \to f(t_0)$.

b) Si cada punto de un intervalo cerrado I es un punto de continuidad de f, entonces $\sigma_n(f,t)$ converge a $f(t)$ uniformemente sobre I.

c) Si para casi todo t es $m \le f(t)$, entonces $m \le \sigma_n(f,t)$; y si para casi todo t es $f(t) \le M$, entonces $\sigma_n(f,t) \le M$.

Observación 1.27. La prueba se basará en el hecho de que $\{\mathbf{K}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad positivo con las siguientes propiedades:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\vartheta<t<2\pi-\vartheta}\mathbf{K}_n(t)\right)=0 \quad (0<\vartheta<\pi), \tag{1.32}$$

$$\mathbf{K}_n(t)=\mathbf{K}_n(-t). \tag{1.33}$$

El teorema sigue siendo válido si reemplazamos $\sigma_n f$ por $k_n * f$, donde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad positivo satisfaciendo (1.32) y (1.33). Por ejemplo, el núcleo de Poisson verifica todas estas condiciones y el teorema continúa valiendo si reemplazamos $\sigma_n f$ por las medias abelianas de la serie de Fourier de f.

Demostración (Teorema de Fejér). Asumimos, por simplicidad, que

$$\check{f}(t_0)=\lim\frac{1}{2}[f(t_0+h)+f(t_0-h)]$$

es finito; las modificaciones necesarias para los casos $\check{f}(t_0)=+\infty$ ó $\check{f}(t_0)=-\infty$ son obvias. Ahora,

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f,t_0)-\check{f}(t_0)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\mathbf{K}_n(\tau)\left[f(t_0-\tau)-\check{f}(t_0)\right]\,d\tau\\
&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\vartheta}^{\vartheta}+\int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\right)\mathbf{K}_n(\tau)\left[f(t_0-\tau)-\check{f}(t_0)\right]d\tau\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\vartheta}+\int_{\vartheta}^{\pi}\right)\mathbf{K}_n(\tau)\left[\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right]d\tau.
\end{aligned}\tag{1.34}$$

Nótese que la última igualdad en (1.34) depende de (1.33).

Dado $\varepsilon>0$, elegimos $\vartheta>0$ lo suficientemente pequeño como para que

$$\left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|<\varepsilon \quad (|\tau|<\vartheta), \tag{1.35}$$

y a continuación elegimos n_0 lo suficientemente grande como para que

$$\sup_{\vartheta<\tau<2\pi-\vartheta}\mathbf{K}_n(\tau)<\varepsilon \quad (n>n_0). \tag{1.36}$$

De (1.34), (1.35) y (1.36) obtenemos

$$\left|\sigma_n(f,t_0)-\check{f}(t+0)\right|<\varepsilon+\varepsilon\left\|f-\check{f}(t_0)\right\|_{L^1}, \tag{1.37}$$

lo que que prueba a).

El apartado b) se sigue de la continuidad uniforme de f en I; podemos elegir ϑ tal que (1.35) vale para todo $t_0\in I$, y n_0 depende únicamente de ϑ (y ε).

El apartado c) descansa en los hechos de que $\mathbf{K}_n(t) \geq 0$ y

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}_n(t)\, dt = 1.$$

Si $m \leq f$ entonces

$$\sigma_n(f,t) - m = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}_n(\tau)\, [f(t-\tau) - m]\, d\tau \geq 0,$$

ya que el integrando es no negativo; si $f \leq M$ entonces

$$M - \sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}_n(\tau)\, [M - f(t-\tau)]\, d\tau \geq 0,$$

por la misma razón. ∎

Corolario 1.28. *Si t_0 es un punto de continuidad de f y si la serie de Fourier de f converge en t_0, entonces su suma es $f(t_0)$.*

La condición de Fejér

$$\check{f}(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2}$$

implica que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau = 0. \tag{1.38}$$

Requerir la existencia de un número $\check{f}(t)$ para el que valga (1.38) es mucho menos restrictivo que la condición de Fejér y más natural para funciones integrables. No varía si modificamos f en un conjunto de medida cero y, aunque para una función f la condición de Fejér no se cumpla en ningún t_0, (1.38) se sigue verificando con $\check{f}(t_0) = f(t_0)$ en casi todo t_0 [12, Vol. 1, p. 65].

Teorema 1.29 (Lebesgue). *Si se cumple (1.38), entonces $\sigma_n(f,t_0) \to f(t_0)$. En particular, $\sigma_n(f,t) \to f(t)$ en casi todo punto.*

Demostración. Al igual que en la prueba del teorema de Fejér (Teorema 1.26),

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(f,t_0) - \check{f}(t_0) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\vartheta} + \int_{\vartheta}^{\pi} \right) \mathbf{K}_n(\tau) \left[\frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right] d\tau.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Como

$$\mathbf{K}_n(\tau) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)\tau}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{2}}\right)^2$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{\tau}{2} > \frac{\tau}{\pi} \quad (0 < \tau < \pi),$$

obtenemos

$$\mathbf{K}_n(\tau) \leq \min\left\{n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\right\}. \tag{1.40}$$

En particular, vemos que la segunda integral en (1.39) tiende a cero cuando $(n+1)\vartheta^2$ tiende a ∞. Elegimos $\vartheta = n^{-1/4}$ y evaluamos la primera integral.

Denotamos

$$\Phi(h) = \int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right| d\tau;$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\vartheta} \mathbf{K}_n(\tau)\left[\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right] d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{1/n}\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{1/n}^{\vartheta}\right| \\
&\leq \frac{n+1}{\pi}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\vartheta}\left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right|\frac{d\tau}{\tau^2}.
\end{aligned}$$

El término $(n+1)\Phi(1/n)/\pi$ tiende a cero por (1.38). Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\vartheta}\left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right|\frac{d\tau}{\tau^2} \\
&= \frac{\pi}{n+1}\left[\frac{\Phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{1/n}^{\vartheta} + \frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\vartheta}\frac{\Phi(\tau)}{\tau^3}\, d\tau.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Para $\varepsilon > 0$ y $n > n(\varepsilon)$ tenemos, por (1.38),

$$\Phi(\tau) < \varepsilon\tau \quad (0 < \tau < \vartheta = n^{-1/4});$$

luego, (1.41) está acotado por

$$\frac{\pi\varepsilon n}{n+1} + \frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^{\vartheta}\frac{d\tau}{\tau^2} < 3\pi\varepsilon.$$

■

Corolario 1.30. *Si la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ converge en un conjunto E de medida positiva, su suma coincide con f en casi todo punto de E. En particular, si una serie de Fourier converge a cero en casi todo punto, todos sus coeficientes deben ser nulos.*

Observación 1.31. Este último resultado no es cierto para todas las series trigonométricas. Existen ejemplos de series trigonométricas que convergen a cero en casi todo punto sin ser idénticamente nulas. Sin embargo, una serie trigonométrica convergente a cero en todo punto es idénticamente nula [9, Chapter 5].

La necesidad de imponer en el Teorema 1.29 la condición estricta (1.38) en vez de la condición más débil

$$\Psi(h) = \int_0^h \left[\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right] d\tau = o(h) \tag{1.42}$$

proviene del hecho que para integrar por partes hemos de reemplazar $\mathbf{K}_n(t)$ por la mayorante monótona

$$\text{mín}\left\{ n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2} \right\}.$$

Si queremos probar el resultado análogo para $\mathbf{P}(r,t)$ en vez de $\mathbf{K}_n(t)$, la condición (1.42) es suficiente. Así, obtenemos:

Teorema 1.32 (Fatou). *Si se verifica (1.42), entonces*

$$\lim_{r\to 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) r^{|j|} e^{ijt_0} = \check{f}(t_0).$$

La condición (1.42) con $\check{f}(t_0) = f(t_0)$ se satisface en cada punto t_0 en el que f es la derivada de su integral (es decir, en casi todo punto).

1.4. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

Por el momento, lo único que sabemos acerca del tamaño de los coeficientes de Fourier $\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es que están acotados por $\|f\|_{L^1}$ (Teorema 1.4 e)) y que $\text{lím}_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$ (lema de Riemann-Lebesgue: Teorema 1.18). En esta sección discutiremos las tres cuestiones siguientes:

a) ¿Es posible mejorar el lema de Riemann-Lebesgue para proporcionar una cierta ratio de la anulación de $\widehat{f}(n)$ cuando $|n| \to \infty$?

Veremos que la respuesta a a) es negativa: $\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ puede tender a cero de forma arbitrariamente lenta (Teorema 1.33).

b) A la vista de la respuesta negativa a a), ¿es cierto que cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que tienda a cero cuando $|n| \to \infty$ es la sucesión de coeficientes de Fourier de alguna $f \in L^1(\mathbb{T})$?

La respuesta a b) es, de nuevo, negativa (Corolario 1.35).

c) ¿Cómo se reflejan en $\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ propiedades de f tales como acotación, continuidad, regularidad, etc.?

La cuestión c) es, de una forma u otra, un tema recurrente en análisis armónico. En la segunda mitad de esta sección veremos cómo distintas condiciones de regularidad afectan al tamaño de los coeficientes de Fourier. Las condiciones sobre el «orden de magnitud» de sus coeficientes de Fourier son raramente necesarias y suficientes para que una función pertenezca a un espacio determinado. Por ejemplo, una condición necesaria para que $f \in C(\mathbb{T})$ es que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$, y una condición suficiente es que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$; en ambos casos, los exponentes son óptimos.

Los únicos espacios, definidos por condiciones de tamaño o regularidad de sus funciones, para los que se obtienen caracterizaciones completas (es decir, una única condición necesaria y suficiente expresada en términos de orden de magnitud) para que una sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sea la sucesión de coeficientes de Fourier de una función del espacio, son $L^2(\mathbb{T})$ y sus «derivadas» (como, por ejemplo, el espacio de las funciones absolutamente continuas con derivadas en $L^2(\mathbb{T})$).

Teorema 1.33. *Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión par de números no negativos que tiende a cero en infinito. Supongamos que para $n > 0$,*

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0. \tag{1.43}$$

Entonces existe una función no negativa $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) = a_n$.

Demostración. Observamos en primer lugar que $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0$, y que la condición de convexidad (1.43) implica que $a_n - a_{n+1}$ decrece monótonamente con n. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0,$$

y, consecuentemente,

$$\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1})$$

converge a a_0 cuando $N \to \infty$. Pongamos

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\mathbf{K}_{n-1}(t), \tag{1.44}$$

donde, como usualmente, $\mathbf{K}_n$ denota el núcleo de Fejér. Puesto que $\|\mathbf{K}_n\|_{L^1} = 1$, la serie (1.44) converge en $L^1(\mathbb{T})$; y puesto que todos sus términos son no negativos, también lo es su límite f. Ahora,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\widehat{\mathbf{K}}_{n-1}(j) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = a_{|j|},\end{aligned}$$

completando la prueba. ∎

La comparación del Teorema 1.33 con el siguiente muestra las diferencias básicas entre la serie-seno ($a_{-n} = -a_n$) y la serie-coseno ($a_{-n} = a_n$).

Teorema 1.34. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, y supongamos que $\widehat{f}(|n|) = -\widehat{f}(-|n|) \geq 0$. Se cumple:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\widehat{f}(n) < \infty.$$

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\widehat{f}(0) = 0$. Escribamos $F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$; entonces $F \in C(\mathbb{T})$ y, por el Teorema 1.6,

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n) \quad (n \neq 0).$$

Como F es continua, podemos aplicar el teorema de Fejér (Teorema 1.26) con $t_0 = 0$ y obtener

$$\lim_{N\to\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\frac{\widehat{f}(n)}{n} = i\left[F(0) - \widehat{F}(0)\right] = -i\widehat{F}(0).$$

Para completar la demostración basta advertir que $\widehat{f}(n)/n \geq 0$. ∎

Corolario 1.35. *Si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nt$ no es una serie de Fourier. Por tanto, existen series trigonométricas cuyos coeficientes tienden a cero, que no son series de Fourier.*

Observación 1.36. Por el Teorema 1.33, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n|\geq 2} \frac{e^{int}}{2\ln|n|}$$

es una serie de Fourier, mientras que, por el Teorema 1.34, su serie conjugada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{\log n} = -i \sum_{|n|\geq 2} \frac{\operatorname{sgn}(n)}{2\ln|n|} e^{int}$$

no lo es.

Nos ocupamos ahora de algunos resultados sencillos sobre el orden de magnitud de coeficientes de Fourier de funciones que satisfacen diversas condiciones de regularidad.

Teorema 1.37. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es absolutamente continua, entonces $\widehat{f}(n) = o(1/n)$.*

Demostración. Por el Teorema 1.6 tenemos que $\widehat{f}(n) = (1/in)\widehat{f'}(n)$, y por el lema de Riemann-Lebesgue (Teorema 1.18), que $\widehat{f'}(n) \to 0$. ■

Observación 1.38. Aplicando repetidamente el Teorema 1.6 (es decir, integrando repetidamente por partes) vemos que si f es derivable k veces y $f^{(k-1)}$ es absolutamente continua (de modo que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$ y $f^{(k-1)}$ es su primitiva), entonces

$$\widehat{f}(n) = o(n^{-k}) \quad \text{cuando } |n| \to \infty. \tag{1.45}$$

Podemos encontrar una estimación algo más precisa que la asintótica (1.45). Todo lo que tenemos que hacer es observar que si $0 \leq j \leq k$, entonces $\widehat{f}(n) = (in)^{-j}\widehat{f^{(j)}}(n)$, luego

$$|\widehat{f}(n)| \leq |n|^{-j} \|f^{(j)}\|_{L^1}.$$

Obtenemos así:

Teorema 1.39. *Si f es derivable hasta el orden k, y $f^{(k-1)}$ es absolutamente continua, entonces*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0\leq j\leq k} \frac{\|f^{(j)}\|_{L^1}}{|n|^j}.$$

Si f es infinitamente derivable, entonces

$$|\widehat{f}(n)| \leq \min_{0\leq j} \frac{\|f^{(j)}\|_{L^1}}{|n|^j}.$$

Teorema 1.40. *Si f es de variación acotada sobre $\mathbb{T}$, entonces*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{\operatorname{var}(f)}{2\pi|n|}.$$

Demostración. Integramos por partes usando integrales de Stieltjes:

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int e^{-int}f(t)dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi in}\int e^{-int}df(t)\right| \leq \frac{\mathrm{var}(f)}{2\pi|n|}.$$

■

Para $f \in C(\mathbb{T})$ denotamos por $\omega(f,h)$ el *módulo de continuidad* de f, esto es,

$$\omega(f,h) = \sup_{|y|\leq h} \|f(t+y) - f(t)\|_\infty.$$

Similarmente, para $f \in L^1(\mathbb{T})$ denotamos por $\Omega(f,h)$ el *módulo integral de continuidad* de f, esto es,

$$\Omega(f,h) = \|f(t+h) - f(t)\|_{L^1}.$$

Es claro que $\Omega(f,h) \leq \omega(f,h)$.

Teorema 1.41. *Para $n \neq 0$, se verifica:*

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right).$$

Demostración. En efecto:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt = -\frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-in(t+\pi/n)}dt.$$

Efectuando un cambio de variable,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int \left[f\left(t+\frac{\pi}{n}\right) - f(t)\right]e^{-int}dt;$$

luego,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right).$$

■

Corolario 1.42. *Si $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$.*

Teorema 1.43. *Sea $1 < p \leq 2$ y sea q el exponente conjugado de p, esto es, $q = p/(p-1)$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^q < \infty$.*

Demostración. El caso $p = 2$ será probado en la siguiente sección. Para el caso $1 < p < 2$, véase [10, Chapter IV]. ■

Observación 1.44. El Teorema 1.43 no puede ser extendido a $p > 2$. Así, si $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $p > 2$, entonces $f \in L^2(\mathbb{T})$ y, consecuentemente, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$. Esto es todo lo que podemos afirmar, incluso para funciones continuas. Existen funciones continuas f tales que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^{q(2-\varepsilon)} = \infty$ para cada $\varepsilon > 0$ (cf. [10, Chapter IV.2]. En efecto, dada cualquier $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2$, existe una función continua f tal que $|\widehat{f}(n)| > |c_n|$ (cf. [10, Appendix B.2.1]).

1.5. Series de Fourier de funciones de cuadrado integrable

En algunos aspectos, la representación de funciones como su serie de Fourier alcanza sus mayores éxitos cuando las funciones son de cuadrado integrable. La razón es que $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert, con un producto interior definido por

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g}(t)\,dt,$$

y en este espacio de Hilbert las exponenciales constituyen una base ortonormal. Abrimos esta sección con un breve resumen de las propiedades fundamentales de las bases ortonormales en espacios de Hilbert abstractos, y concluiremos con los correspondientes enunciados sobre series de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$.

Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert complejo. Sean $f, g \in \mathcal{H}$. Decimos que *f es ortogonal a g* si $\langle f, g\rangle = 0$. Esta relación es claramente simétrica. Si E es un subconjunto de $\mathcal{H}$, diremos que $f \in \mathcal{H}$ es *ortogonal a E* si f es ortogonal a todos los elementos de E. Un conjunto $E \subset \mathcal{H}$ es *ortogonal* si dos vectores cualesquiera de E son ortogonales entre sí. Un conjunto $E \subset \mathcal{H}$ es un *sistema ortonormal* si es ortogonal y la norma de cada vector en E vale uno, esto es, si para cualesquiera $f, g \in E$ se tiene $\langle f, g\rangle = 0$ siempre que $f \neq g$, y además $\langle f, f\rangle = 1$.

Lema 1.45. *Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ un sistema ortonormal finito. Sean $a_1, \ldots, a_N$ números complejos. Entonces*

$$\left\|\sum_{n=1}^N a_n\varphi_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Demostración. En efecto:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^N a_n\varphi_n\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=1}^N a_n\varphi_n, \sum_{m=1}^N a_m\varphi_m\right\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \left\langle \varphi_n, \sum_{m=1}^N a_m\varphi_m\right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N a_n\overline{a}_n = \sum_{n=1}^N |a_n|^2.\end{aligned}$$

■

Corolario 1.46. *Sea $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ y sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números complejos tales que $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$. Entonces, $\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi_n$ converge en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Como $\mathcal{H}$ es completo, basta demostrar que la sucesión de sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$. Ahora, para $N > M$,

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |a_n|^2 \to 0 \;\text{ cuando } M \to \infty.$$

■

Lema 1.47. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ un sistema ortonormal finito en $\mathcal{H}$. Para $f \in \mathcal{H}$ escribimos $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$. Entonces*

$$0 \le \left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2. \tag{1.46}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n, f - \sum_{m=1}^{N} a_m \varphi_m \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{m=1}^{N} \overline{a}_m \langle f, \varphi_m \rangle - \sum_{n=1}^{N} a_n \langle \varphi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2.
\end{aligned}$$

■

Corolario 1.48 (Desigualdad de Bessel). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$. Para $f \in \mathcal{H}$ escribimos $a_\alpha = \langle f, \varphi_\alpha \rangle$. Entonces*

$$\sum_{\alpha \in A} |a_\alpha|^2 \le \|f\|^2 . \tag{1.47}$$

La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en el enunciado de la desigualdad de Bessel no tiene por qué ser finita, ni tan siquiera numerable. La desigualdad (1.47) es equivalente a decir que para cualquier subconjunto finito de $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se cumple (1.46). En particular, $a_\alpha = 0$ excepto para un número contable de valores de α, y la serie $\sum_{\alpha \in A} |a_\alpha|^2$ converge.

Si $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$, todos los sistemas ortonormales en $\mathcal{H}$ son finitos o numerables, y podemos escribirlos como sucesiones $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición 1.49. *Una* base ortonormal *o* sistema ortonormal completo *en $\mathcal{H}$ es un sistema ortonormal con la propiedad adicional de que el único vector de $\mathcal{H}$ ortogonal a dicho sistema es el vector nulo.*

Lema 1.50. *Sea* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un sistema ortonormal en* $\mathcal{H}$. *Los enunciados que siguen son equivalentes:*

a) El sistema $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es completo.*
b) Se tiene:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \quad (f \in \mathcal{H}). \tag{1.48}$$

c) Se verifica:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \, \varphi_n \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Demostración. La equivalencia entre b) y c) se sigue inmediatamente de (1.46). Si f es ortogonal a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ y vale (1.48) entonces $\|f\|^2 = 0$, así que $f = 0$. Consecuentemente, b) implica a). Completaremos la prueba estableciendo que a) implica c). De la desigualdad de Bessel (Corolario 1.48) y el Corolario 1.46 se infiere que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \, \varphi_n$ converge en $\mathcal{H}$. Poniendo $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \, \varphi_n$ encontramos que $\langle g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle$ o, equivalentemente, que $g - f$ es ortogonal a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, si $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completo se concluye que $f = g$. ■

Lema 1.51 (Parseval). *Sea* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un sistema ortonormal completo en* $\mathcal{H}$. *Sean* $f, g \in \mathcal{H}$. *Entonces*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle. \tag{1.49}$$

Demostración. Si f es una combinación lineal finita de $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, la igualdad (1.49) es obvia. En el caso general,

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \to \infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, g \right\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle.$$

■

En $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$, las exponenciales $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ forman un sistema ortonormal completo. La ortonormalidad es evidente:

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(n-m)t} \, dt = \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker. La completitud lo es algo menos; se deduce del Teorema 1.17, por cuanto

$$\langle f, e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \overline{e^{int}} \, dt = \widehat{f}(n).$$

Ahora, el resultado general sobre sistemas ortonormales completos en espacios de Hilbert conduce al

Teorema 1.52. *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{T})$.*

a) Se tiene:
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^2 \, dt.$$

b) Se verifica:
$$f = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int}$$
en la norma de $L^2(\mathbb{T})$.

c) Para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos satisfaciendo $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, existe una única $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $a_n = \widehat{f}(n)$.

d) Se cumple:
$$\frac{1}{2\pi} \int f(t)\overline{g(t)} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

Denotamos por ℓ^2 el espacio de todas las sucesiones $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complejos tales que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Con las operaciones algebraicas definidas término a término y el producto escalar
$$\left\langle \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n,$$
ℓ^2 es un espacio de Hilbert. El Teorema 1.52 viene a expresar que la correspondencia $f \mapsto \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una isometría entre $L^2(\mathbb{T})$ y ℓ^2.

2

Convergencia de series de Fourier

Ya quedó dicho que los problemas de convergencia de series de Fourier, es decir, de convergencia de las sumas parciales simétricas $S_n f$, son bastante más delicados que los correspondientes problemas de sumabilidad con respecto a «buenos» núcleos como los de Fejér o Poisson. Al igual que ocurre con la sumabilidad, los problemas de convergencia en norma son generalmente más sencillos que los de convergencia puntual. La convergencia se relaciona estrechamente con la existencia y propiedades de la función conjugada, que será objeto de un estudio más profundo en el Capítulo 3.

2.1. Convergencia en norma

Definición 2.1. *Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbb{T}$. Como es usual, escribimos*

$$(S_n f)(t) = S_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{ijt}. \tag{2.1}$$

Diremos que B admite convergencia en norma *si*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_B = 0. \tag{2.2}$$

Nuestro propósito en esta sección es caracterizar los espacios B que tienen esta propiedad.

En el Capítulo 1 introdujimos el operador $S_n : f \mapsto S_n f$. Nótese que S_n está bien definido en cada espacio de Banach homogéneo B; denotaremos su norma, como operador sobre B, por $\|S_n\|^B$.

Teorema 2.2. *Un espacio de Banach homogéneo B admite convergencia en norma si, y sólo si, $\|S_n\|^B$ está acotada (cuando $n \to \infty$), esto es, si existe una constante K tal que*

$$\|S_n f\|_B \leq K \|f\|_B \tag{2.3}$$

para cualesquiera $f \in B$ y $n > 0$.

Demostración. Si $S_n f$ converge a f para toda $f \in B$, entonces $S_n f$ está acotada para toda $f \in B$; por el teorema de la acotación uniforme, $\|S_n\|^B = O(1)$. Por otro lado, supongamos que se verifica (2.3), donde asumimos, sin pérdida de generalidad, que $K \geq 1$. Sean $f \in B$, $\varepsilon > 0$, y P un polinomio trigonométrico satisfaciendo $\|f - P\|_B \leq \varepsilon/2K$. Para n mayor que el grado de P tenemos que $S_n P = P$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\|S_n f - f\|_B &= \|S_n f - S_n P + P - f\|_B \\ &\leq \|S_n(f - P)\|_B + \|P - f\|_B \leq K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

■

El hecho de que $S_n f = D_n * f$, donde D_n es el núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)t}{\operatorname{sen} t/2} \tag{2.4}$$

proporciona una acotación simple para $\|S_n\|^B$. En efecto,

$$\|D_n * f\|_B \leq \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B \,,$$

así que

$$\|S_n\|^B \leq \|D_n\|_{L^1} \,. \tag{2.5}$$

Los números $L_n = \|D_n\|_{L^1}$ se denominan *constantes de Lebesgue*, y tienden a infinito como un mútiplo constante de $\ln n$.

En el caso $B = L^1(\mathbb{T})$, la desigualdad (2.5) se convierte en una igualdad. Esto se puede ver como sigue: denotamos por $\mathbf{K}_N$ el núcleo de Fejér, y recordamos que $\|\mathbf{K}_N\|_{L^1} = 1$. Como $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|S_n \mathbf{K}_N\|_{L^1} = \|\sigma_N D_n\|_{L^1}$, y como $\sigma_N D_n \to D_n$ cuando $N \to \infty$, obtenemos

$$\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_{L^1} \,;$$

luego, $\|S_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_{L^1}$. De aquí se concluye que $L^1(\mathbb{T})$ no admite convergencia en norma.

En el caso de que $B = C(\mathbb{T})$, la convergencia en norma es, simplemente, la convergencia uniforme. Probaremos que las series de Fourier de funciones continuas pueden no converger uniformemente mostrando que la sucesión de normas $\{\|S_n\|^{C(\mathbb{T})}\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada; de forma más precisa, veremos que $\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} = L_n$. Para ello, vamos a considerar funciones continuas ψ_n satisfaciendo

$$\|\psi_n\|_\infty = \sup_t |\psi_n(t)| \leq 1$$

y tales que $\psi_n(t) = \operatorname{sgn} D_n(t)$, excepto en intervalos pequeños alrededor de los puntos de discontinuidad de $\operatorname{sgn} D_n(t)$. Si la suma de las longitudes de esos intervalos es menor que $\varepsilon/2n$, entonces

$$\|S_n\|^{C(\mathbb{T})} \geq |S_n(\psi_n, 0)| = \frac{1}{2\pi}\int D_n(t)\psi_n(t)\,dt > L_n - \varepsilon,$$

lo cual, junto con (2.5), prueba lo que pretendíamos.

Para una clase de espacios de Banach homogéneos sobre $\mathbb{T}$, el problema de la convergencia en norma puede ser relacionado con la invariancia por conjugación. En el Capítulo 1 definimos la serie conjugada de una serie trigonométrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ como la serie $-i\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y si la serie conjugada de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}$ es la serie de Fourier de alguna función $g \in L^1(\mathbb{T})$, llamamos a g la *función conjugada* de f y la denotamos por $\widetilde{f}$. Esta definición es adecuada para los propósitos de esta sección, pero no da sentido a $\widetilde{f}$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$; haremos tal extensión más adelante.

Definición 2.3. *Un espacio de funciones $B \subset L^1(\mathbb{T})$* admite conjugación *si para toda $f \in B$, $\widetilde{f}$ está definida y pertenece a B.*

Si B es un espacio de Banach homogéneo que admite conjugación, entonces $f \mapsto \widetilde{f}$ es un operador lineal acotado sobre B. La linealidad es evidente a partir de la definición; para probar la acotación, aplicaremos el teorema del grafo cerrado. Todo lo que tenemos que hacer es mostrar que el operador $f \mapsto \widetilde{f}$ es cerrado, esto es, que si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n} = g$ en B, entonces $g = \widetilde{f}$. Esto se sigue del hecho de que, para cada entero j,

$$\begin{aligned}\widehat{g}(j) &= \lim_{n\to\infty} \widehat{\widetilde{f}}_n(j) = \lim_{n\to\infty}\left[-i\operatorname{sgn}(j)\widehat{f}_n(j)\right] \\ &= -i\operatorname{sgn}(j)\lim_{n\to\infty}\widehat{f}_n(j) = -i\operatorname{sgn}(j)\widehat{f}(j) = \widehat{\widetilde{f}}(j).\end{aligned}$$

Si B admite conjugación, entonces

$$f \mapsto f^\flat = \frac{1}{2}\widehat{f}(0) + \frac{1}{2}(f + i\widetilde{f}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}(j)e^{ijt} \tag{2.6}$$

es un operador lineal bien definido y acotado sobre B. Recíprocamente, si la aplicación $f \mapsto f^\flat$ está bien definida en el espacio B, entonces B admite conjugación: $\widetilde{f} = -i\left[2f^\flat - f - f(0)\right]$.

Teorema 2.4. *Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbb{T}$ y supongamos que para toda $f \in B$ y todo n, $e^{int} f \in B$ y*

$$\left\| e^{int} f \right\|_B = \|f\|_B \,. \tag{2.7}$$

Entonces B admite conjugación si, y sólo si, B admite convergencia en norma.

Demostración. Por el Teorema 2.2 y las observaciones precedentes, basta probar que la aplicación $f \mapsto f^\flat$ está bien definida en B si, y sólo si, los operadores $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ están uniformemente acotados sobre B. Supongamos, en primer lugar, que existe una constante K tal que $\|S_n\|^B \leq K$. Definimos

$$S_n^\flat(f) = \sum_{j=0}^{2n} \widehat{f}(j) e^{ijt} = e^{int} S_n(e^{-int} f); \tag{2.8}$$

por (2.7), $\left\| S^\flat \right\|^B \leq K$.

Sean $f \in B$, $\varepsilon > 0$, y $P \in B$ un polinomio trigonométrico satisfaciendo $\|f - P\|_B \leq \varepsilon / 2K$. Entonces,

$$\left\| S_n^\flat f - S_n^\flat P \right\|_B = \left\| S_n^\flat (f - P) \right\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Si n y m son ambos mayores que el grado de P, se tiene $S_n^\flat P = S_m^\flat P$, y (2.9) implica

$$\left\| S_n^\flat f - S_m^\flat f \right\|_B \leq \varepsilon.$$

La sucesión $\left\{ S_n^\flat f \right\}_{n=0}^\infty$ es entonces de Cauchy en B; luego, converge, y su límite es la serie de Fourier $\sum_{j=0}^\infty \widehat{f}(j) e^{ijt}$. Así, $f^\flat = \lim_{n \to \infty} S_n^\flat f \in B$.

Recíprocamente, supongamos que $f \mapsto f^\flat$ está bien definida, y por lo tanto acotada, en B. Entonces

$$S_n^\flat f = f^\flat - e^{i(2n+1)t} [e^{-i(2n+1)t} f]^\flat,$$

lo que significa que $\left\| S_n^\flat \right\|^B$ está acotada por el doble de la norma sobre B de la aplicación $f \mapsto f^\flat$. En virtud de (2.7) y (2.8) se concluye que $\|S_n\|^B = \left\| S_n^\flat \right\|^B$, y el teorema queda demostrado. ∎

Veremos en el Capítulo 3 (Teorema 3.20) que, para $1 < p < \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ admite conjugación. En consecuencia:

Teorema 2.5. *Para $1 < p < \infty$, la serie de Fourier de cada $f \in L^p(\mathbb{T})$ converge a f en la norma de $L^p(\mathbb{T})$.*

2.2. Convergencia y divergencia en un punto

Hemos visto en la sección anterior que la serie de Fourier de una función continua no tiene por qué converger uniformemente. En esta sección probaremos que, incluso, puede no converger puntualmente, y daremos dos criterios para la convergencia de una serie de Fourier en un punto.

Recogemos dos demostraciones de este primer resultado, aunque en realidad se reducen a una. La primera de ellas, abstracta, se basa en el principio de la acotación uniforme, y es muy corta. La segunda consiste en la construcción de un ejemplo concreto, esencialmente siguiendo la forma en que se demuestra dicho principio.

Teorema 2.6. *Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Demostración (A). Las aplicaciones $f \mapsto S_n(f,0)$ son funcionales lineales continuos sobre $C(\mathbb{T})$. Vimos en la sección anterior que estos funcionales no están uniformemente acotados; luego, por el teorema de la acotación uniforme, existe $f \in C(\mathbb{T})$ tal que $\{S_n(f,0)\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada. En otras palabras, la serie de Fourier de f diverge no acotadamente en $t=0$.

Demostración (B). Como hemos visto en la sección precedente, existe una sucesión $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{T})$ satisfaciendo

$$\|\psi_n\|_\infty \leq 1,$$

$$|S_n(\psi_n,0)| > \frac{1}{2}\|D_n\|_{L^1} > \frac{1}{10}\ln n.$$

Ponemos $\varphi_n(t) = \sigma_{n^2}(\psi_n,t)$ y advertimos que φ_n es un polinomio trigonométrico de grado n^2 tal que

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq 1,$$

$$|S_n(\varphi_n,t) - S_n(\psi_n,t)| < 2.$$

Luego,

$$|S_n(\varphi_n,0)| > \frac{1}{10}\ln n - 2.$$

Con $\lambda_n = 2^{3^n}$, definimos

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) \tag{2.10}$$

y afirmamos que f es una función continua cuya serie de Fourier diverge en $t=0$. En efecto, la continuidad de f se sigue inmediatamente de la convergencia uniforme de la serie en (2.10); para mostrar la divergencia de la serie de Fourier de f en cero, notamos que $\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) = \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m)e^{i\lambda_j t}$; por tanto,

$$\begin{aligned}
|S_{\lambda_n^2}(f,0)| &= \left| S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), 0 \right) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(0) + \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0) \right| \\
&\geq \frac{K}{n^2}\ln\lambda_n - 3,
\end{aligned}$$

donde el segundo miembro tiende a infinito. Queda así probado el teorema. ■

Observación 2.7. Nótese que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

El primer término es un polinomio trigonométrico y, por lo tanto, no afecta a la convergencia de la serie de Fourier de f. El segundo término es periódico de periodo $2\pi/\lambda_m$ (ya que λ_m divide a λ_k para $k \geq m$); consecuentemente, las sumas parciales de la serie de Fourier de f no están acotadas en ningún punto de la forma $2\pi j/\lambda_m$, cualesquiera sean los enteros positivos j y m. Si queremos obtener divergencia en todo múltiplo racional de 2π, basta tomar $\lambda_n = n!2^{3^n}$.

Nuestro primer criterio de convergencia es, en realidad, un simple teorema tauberiano debido a Hardy.

Teorema 2.8. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que*

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{cuando } |n| \to \infty. \tag{2.11}$$

Entonces $S_n(f,t)$ y $\sigma_n(f,t)$ convergen para los mismos valores de t y al mismo límite. Además, si $\sigma_n(f,t)$ converge uniformemente en algún conjunto, también lo hace $S_n(f,t)$.

Demostración. La condición (2.11) implica la siguiente condición más débil, pero que realmente es la que necesitamos: para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\lambda > 1$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{n\leq|j|\leq\lambda n} |\widehat{f}(j)| < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Sean $\varepsilon > 0$ y $\lambda > 1$ para los que se cumple (2.12). Se tiene:

$$
\begin{aligned}
S_n(f,t) =& \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\sigma_{[\lambda n]}(f,t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n}\sigma_n(f,t) \\
&- \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \sum_{n\le |j|\le \lambda n} \left(1-\frac{|j|}{[\lambda]+1}\right)\widehat{f}(j)e^{ijt},
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

donde $[\lambda n]$ denota la parte entera de λn. Por (2.12), existe un n_0 tal que si $n > n_0$, el último término en (2.13) está acotado por ε. Si $\sigma_n(f,t_0)$ converge a un límite $\sigma(f,t_0)$, se sigue de (2.13) que, para n_1 suficientemente grande, $n > n_1$ implica

$$
|S_n(f,t_0) - \sigma(f,t_0)| < 2\varepsilon; \tag{2.14}
$$

o, dicho de otra manera,

$$
\lim_{n\to\infty} S_n(f,t_0) = \sigma(f,t_0). \tag{2.15}
$$

La elección de n_1 depende solamente de la ratio de convergencia de $\sigma_n(f,t_0)$ a $\sigma(f,t_0)$, de modo que si esta convergencia es uniforme en algún conjunto, también lo es (2.15). ■

Corolario 2.9. *Sea f una función de variación acotada sobre $\mathbb{T}$. Entonces, las sumas parciales $S_n(f,t)$ convergen a $[f(t+0)+f(t-0)]/2$ y, en particular, a $f(t)$ en cualquier punto donde exista continuidad. La convergencia es uniforme en intervalos cerrados de continuidad de f.*

Demostración. Por el teorema de Fejér, este enunciado es cierto para $\sigma_n(f,t)$. La demostración sigue del hecho de que para funciones de variación acotada, vale (2.11) (cf. Teorema 1.40).

Lema 2.10. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que*

$$
\int_{-1}^{1} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty.
$$

Entonces

$$
\lim_{n\to\infty} S_n(f,0) = 0.
$$

Demostración. En efecto:

$$
\begin{aligned}
S_n(f,0) &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(t)}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int f(t)\cos nt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(t)\cos\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \operatorname{sen} t\, dt.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Por hipótesis,

$$\frac{f(t)\cos\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \in L^1(\mathbb{T});$$

luego, por el lema de Riemann-Lebesgue (Teorema 1.18), todas las integrales en (2.16) tienden a cero. ∎

Teorema 2.11 (Principio de localización). *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ se anula en un intervalo abierto I. Entonces $S_n(f,t)$ converge a cero para todo $t \in I$, y la convergencia es uniforme en subconjuntos cerrados de I.*

Demostración. La convergencia a cero en cada $t \in I$ es una consecuencia inmediata del Lema 2.10. Si I_0 es un subintervalo cerrado de I, las funciones

$$\phi_{t_0}(t) = \frac{f(t-t_0)\cos\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} \quad (t_0 \in I_0)$$

forman una familia compacta en $L^1(\mathbb{T})$, así que, por la Observación 1.19, las integrales en (2.16) correspondientes a $f(t-t_0)$ $(t_0 \in I_0)$ tienden uniformemente a cero. ∎

El principio de localización se suele enunciar de la siguiente manera:

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, y supongamos que $f(t) = g(t)$ en algún entorno de un punto t_0. Entonces, o bien las series de Fourier de f y g en t_0 son ambas convergentes y al mismo límite, o bien ambas divergen y de igual manera.

Otra aplicación inmediata del Lema 2.10 es la siguiente:

Teorema 2.12 (Criterio de Dini). *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(t+t_0) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty,$$

entonces $S_n(f,t_0) \to f(t_0)$.

Tal y como adelantamos en la Introducción, el teorema de Carleson-Hunt supone la culminación del estudio de la convergencia puntual de las series de Fourier en espacios de Lebesgue.

Teorema 2.13 (Carleson-Hunt). *Sea $1 < p < \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, entonces $S_n f \to f$ en casi todo punto cuando $n \to \infty$.*

La demostración de este teorema excede el alcance del presente trabajo. Al respecto se puede consultar, por ejemplo, la monografía de Arias de Reyna [1], íntegramente dedicada a él. Los textos de Grafakos [7, 8] también incluyen una demostración del teorema de Carleson-Hunt.

3

Conjugación

Con anterioridad definimos la función conjugada de ciertas funciones integrables mediante su serie de Fourier conjugada. Ahora, usando un enfoque de variable compleja, extenderemos esta noción a todas las funciones integrables y estudiaremos las propiedades básicas de la función conjugada en algunas clases de funciones.

3.1. Coeficientes de Fourier de funcionales lineales

Sea B un espacio de Banach homogéneo sobre $\mathbb{T}$ y supongamos, por simplicidad, que $e^{int} \in B$ para todo n. Como habitualmente, denotamos por B^* el espacio dual de B.

Los *coeficientes de Fourier* de un funcional $\mu \in B^*$ son, por definición,

$$\widehat{\mu}(n) = \overline{\langle e^{int}, \mu \rangle} \quad (n \in \mathbb{Z}); \tag{3.1}$$

la serie trigonométrica

$$S[\mu] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\mu}(n) e^{int}$$

es la *serie de Fourier* de μ. Mantenemos el convenio de la Definición 1.3 de que una serie de Fourier, sin más, es la serie de Fourier de una función integrable. Claramente,

$$|\widehat{\mu}(n)| \leq \|\mu\|_{B^*} \|e^{int}\|_B.$$

La notación (3.1) es consistente con nuestra definición de coeficientes de Fourier en el caso de que μ se identifique, de forma natural, con una función integrable. Por ejemplo, si $B = L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < \infty)$, B^* se identifica canónicamente con $L^q(\mathbb{T})$, donde $q = p/(p-1)$ es el exponente conjugado de p. A la función $g \in L^q(\mathbb{T})$ le corresponde el funcional lineal

$$f \mapsto \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad (f \in L^p(\mathbb{T})),$$

y

$$\overline{\langle e^{int}, g\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int \overline{e^{int}\overline{g(t)}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int e^{-int}g(t)\,dt,$$

de manera que $\widehat{g}(n)$ definido en (3.1) para el funcional g coincide con el n-ésimo coeficiente de Fourier de la función g.

Teorema 3.1 (Fórmula de Parseval). *Sean $f \in B$, $\mu \in B^*$; entonces*

$$\langle f, \mu\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)\widehat{f}(n)\overline{\widehat{\mu}(n)}. \tag{3.2}$$

Demostración. Para polinomios $P(t) = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{P}(n)e^{int}$ se tiene, claramente,

$$\langle P, \mu\rangle = \sum_{n=-N}^{N}\widehat{P}(n)\overline{\widehat{\mu}(n)}.$$

Como, por el Teorema 1.23, $f = \lim_{N\to\infty}\sigma_N f$ en la norma de B, sigue de lo anterior y de la continuidad de μ que

$$\langle f, \mu\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle\sigma_N f, \mu\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right)\widehat{f}(n)\overline{\widehat{\mu}(n)}.$$

■

Observación 3.2. La existencia del límite en (3.2) está implícita en el teorema. Es equivalente a la sumabilidad Cesàro de orden uno de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{\mu}(n)}$. Si esta serie converge, es claro entonces que

$$\langle f, \mu\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{\mu}(n)}. \tag{3.3}$$

A veces la ecuación (3.3) es referida como la *fórmula de Parseval*, teniendo en mente que si la serie del segundo miembro no converge, entonces (3.3) es simplemente una abreviación de (3.2).

Corolario 3.3 (Unicidad). *Si $\widehat{\mu}(n) = 0$ para todo n, entonces $\mu = 0$.*

3.2. La función conjugada

Continuamos identificando $\mathbb{T}$ con la circunferencia unidad $\{z : z = e^{it}\}$ del plano complejo. El disco unidad $\{z : |z| < 1\}$ será denotado por $\mathbb{D}$, y el disco unidad cerrado, $\{z : |z| \leq 1\}$, por $\overline{\mathbb{D}}$. Para $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f(re^{it})$ $(0 \leq r < 1)$ representará la *integral de Poisson* de f,

$$f(re^{it}) = [\mathbf{P}(r,.) * f](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int}. \tag{3.4}$$

En el Capítulo 1 consideramos $\mathbf{P}(r,.) * f$ como una familia de funciones sobre $\mathbb{T}$ dependiente del parámetro r $(0 \leq r < 1)$. La principal idea de esta sección es considerarla como una función de la variable compleja $z = re^{it} \in \mathbb{D}$.

Las funciones $r^{|n|}e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ son armónicas en $\mathbb{D}$, y como la serie en (3.4) converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, se sigue que $f(re^{it})$ es armónica en $\mathbb{D}$. Ya vimos en el Capítulo 1 que en todo punto t donde f es la derivada de su integral (y, por tanto, en casi todo punto), $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it})$. De hecho, no es muy díficil ver que para casi toda t, $f(z) \to f(e^{it})$ cuando $z \to e^{it}$ no tangencialmente, es decir, si $z \to e^{it}$ dentro de un sector de la forma $\left\{\zeta : \left|\arg(1-\zeta e^{-it})\right| \leq \alpha < \pi\right\}$ [12, Vol. 1, p. 101].

La armónica conjugada de (3.4) es la función

$$\widetilde{f}(re^{it}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) r^{|n|} \widehat{f}(n) e^{int} = [Q(r,\cdot) * f](t), \tag{3.5}$$

donde

$$Q(r,t) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) r^{|n|} e^{int} = \frac{2r \operatorname{sen} t}{1 - 2r\cos t + r^2} \tag{3.6}$$

es la armónica conjugada del núcleo de Poisson $P(r,t)$ (normalizada por la condición $Q(0,t) = \operatorname{sgn}(0) = 0$). Mostraremos que $\widetilde{f}(re^{it})$ tiene límite radial para casi todo t. Denotando el límite radial por $\widetilde{f}(e^{it})$, veremos que si f tiene una conjugada en el sentido de la Sección 2.1, esta conjugada es $\widetilde{f}(e^{it})$. Podemos llamar entonces a $\widetilde{f}$ la función conjugada de f.

Lema 3.4. *Toda función armónica y acotada en $\mathbb{D}$ es la integral de Poisson de alguna función acotada sobre $\mathbb{T}$.*

Demostración. Sea F armónica y acotada en $\mathbb{D}$. Sea $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente, convergente a 1, y escribamos $f_n(e^{it}) = F(r_n e^{it})$. La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada en $L^\infty(\mathbb{T})$; por tanto, para alguna subsucesión $n_j \to \infty$, $\{f_{n_j}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en la topología débil* ($L^\infty(\mathbb{T})$ es el dual de $L^1(\mathbb{T})$) a alguna función $F(e^{it})$. Sea $\rho e^{i\tau} \in \mathbb{D}$; entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{P}(\rho, t-\tau)F(e^{it})\,dt &= \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{P}(\rho, t-\tau)f_{n_j}(e^{it})\,dt\\ &= \lim_{j\to\infty} F(r_{n_j}\rho e^{i\tau}) = F(\rho e^{i\tau}).\end{aligned}$$

■

Lema 3.5. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$, y sea $\widetilde{f}(re^{it})$ definida por (3.5). Entonces, para casi toda t, $f(re^{it})$ tiene límite cuando $r \to 1$.*

Demostración. Como la aplicación $f \mapsto \widetilde{f}(re^{it})$ es claramente lineal, y además cualquier $f \in L^1(\mathbb{T})$ puede ser escrita como $f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, con $f_j \geq 0$ en $L^1(\mathbb{T})$, sin pérdida de generalidad asumimos que $f > 0$. La función $F(z) = e^{-f(z)-i\widetilde{f}(z)}$ es holomorfa (y por tanto armónica) en $\mathbb{D}$. Ya que la integral de Poisson de una función no negativa es $f(z) > 0$, y como $\widetilde{f}$ toma valores en $\mathbb{R}$ (al ser la armónica conjugada de la función real f), se sigue que $|F(z)| \geq 1$ en $\mathbb{D}$. Por el Lema 3.4 (y por el Teorema 1.32), F tiene un límite radial con módulo $e^{-f(t)}$ en casi todo punto; y en cada punto donde $F(e^{it})$ existe y es distinta de cero, $\widetilde{f}(re^{it})$ tiene un límite radial finito. ■

Definición 3.6. *La* función conjugada *de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es $\widetilde{f}(e^{it}) = \lim_{r\to 1}\widetilde{f}(re^{it})$.*

Si la serie conjugada de la serie de Fourier de f es la serie de Fourier de alguna $g \in L^(\mathbb{T})$, entonces la integral de Poisson de g es claramente $\widetilde{f}(re^{it})$, que converge radialmente a $g(e^{it})$ para casi toda t (Teorema 1.32). Se sigue que, en este caso, $\widetilde{f} = g$, y nuestra nueva definición de función conjugada extiende la dada en la Sección 2.1.

Hemos visto (Observación 1.36) que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nt}{\ln n} \tag{3.7}$$

es una serie de Fourier, mientras que su serie conjugada,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nt}{\ln n}, \tag{3.8}$$

no lo es. Como (3.8) converge en casi todo punto, su suma es la función conjugada de la función (3.7), y podemos comprobar que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nt}{\ln n} \notin L^1(\mathbb{T}). \tag{3.9}$$

Por tanto, la función conjugada de una función integrable no es necesariamente integrable.

Observación 3.7. En este punto no podemos deducir (3.9) del mero hecho de que esta serie no es de Fourier. Sin embargo, se demuestra [10, Section III.3] que si $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ para alguna $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\widetilde{f}(re^{it})$ es la integral de Poisson de $\widetilde{f}$. De aquí podemos deducir que si $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ entonces su serie de Fourier es $\widetilde{S}[f]$, así que si $\widetilde{S}[f]$ no es una serie de Fourier, necesariamente $\widetilde{f} \notin L^1(\mathbb{T})$.

La dificultad en probar inmediatamente que $\widetilde{f}(re^{it})$ es la integral de Poisson de $\widetilde{f}$ emana del hecho de que solamente hemos establecido convergencia puntual en casi todo punto de $\widetilde{f}(re^{it})$ a $\widetilde{f}(e^{it})$, y este tipo de convergencia no es suficiente para implicar la convergencia de las integrales.

Denotamos la medida de Lebesgue de un conjunto medible $E \subset \mathbb{T}$ por $|E|$.

Definición 3.8. *La* función de distribución *de una función medible real f sobre $\mathbb{T}$ es la función*

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}_f(x) = |\{t : f(t) \le x\}| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Las funciones de distribución son claramente continuas por la derecha y monótonas, incrementando desde cero en $x = -\infty$ hasta 2π cuando $x \to \infty$. La principal propiedad de las funciones de distribución es que para toda función F continua sobre $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{T}} F[f(t)]\, dt = \int F(x)\, d\mathbf{m}_f(x). \tag{3.10}$$

Definición 3.9. *Una función medible f es de* tipo L^p débil $(0 < p < \infty)$ *si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$,*

$$\mathbf{m}_f(\lambda) \ge 2\pi - C\lambda^{-p} \tag{3.11}$$

(o, equivalentemente, $|\{t : |f(t)| \ge \lambda\}| \le C\lambda^{-p}$).

Toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ es claramente de tipo L^p débil. De hecho, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty x^p\, d\mathbf{m}_{|f|}(x) \ge \frac{1}{2\pi}\int_\lambda^\infty x^p\, d\mathbf{m}_{|f|}(x) \\ &\ge \frac{1}{2\pi}\lambda^p \int_\lambda^\infty d\mathbf{m}_{|f|}(x) = \frac{\lambda^p}{2\pi}\left[2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(\lambda)\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, (3.11) se cumple con $C = 2\pi\, \|f\|_{L^p}^p$. Además, es igualmente claro que existen funciones de tipo L^p débil que no están en $L^p(\mathbb{T})$; un ejemplo sencillo es $|\operatorname{sen} t|^{-1/p}$.

Lema 3.10. *Si f es de tipo L^p débil, entonces $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ para cada $p' < p$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\int |f|^{p'}\,dt &= \int_0^\infty x^{p'}\,d\mathbf{m}_{|f|}(x) \le \mathbf{m}_{|f|}(1) + \int_1^\infty x^p\,d\mathbf{m}_{|f|}(x) = \\ &= \mathbf{m}_{|f|}(1) - \Big[x^{p'}\left[2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x)\right]\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \left[2\pi - \mathbf{m}_{|f|}(x)\right]\,dx^{p'} \\ &\le 2\pi + C\int_1^\infty x^{-p}\,dx^{p'} = 2\pi + C\int_1^\infty x^{p'-p-1}\,dx < \infty.\end{aligned}$$

■

Teorema 3.11. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\widetilde{f}$ es de tipo L^1 débil.*

Demostración. Suponemos primero que $f > 0$; además, normalizamos f asumiendo que $\|f\|_{L^1} = 1$. Queremos evaluar la medida del conjunto de puntos donde $|\widetilde{f}| > \lambda$. La función

$$H_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi}\Im\left(\log\frac{z-i\lambda}{z+i\lambda}\right)$$

es claramente armónica y no negativa en el semiplano derecho $\Re(z) > 0$, y sus líneas de nivel son arcos circulares pasando por los puntos $i\lambda$ y $-i\lambda$. La línea de nivel $H_\lambda(z) = 1/2$ es la semicircunferencia $z = \lambda e^{i\vartheta}$ $(-\pi/2 < \vartheta < \pi/2)$, y, por tanto, si $|z| > \lambda$ entonces $H_\lambda(z) > 1/2$. Además, es claro que

$$H_\lambda(1) = 1 - 2\pi\operatorname{arc\,tg}\lambda < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

Ahora, $H_\lambda[f(z) + i\widetilde{f}(z)]$ es una función armónica positiva bien definida sobre $\mathbb{D}$; luego,

$$\frac{1}{2\pi}\int H_\lambda[f(re^{it}) + i\widetilde{f}(re^{it})]\,dt = H_\lambda[f(0)] = H_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda}, \tag{3.12}$$

y recordando que $H_\lambda(f + i\widetilde{f}) \ge 1/2$ si $|f + i\widetilde{f}| > \lambda$, obtenemos

$$|\{t : |\widetilde{f}(re^{it})| > \lambda\}| \le \frac{8}{\lambda}.$$

Como la aplicación $f \mapsto \widetilde{f}$ es lineal, si omitimos la normalización $\|f\|_{L^1} = 1$ y hacemos $r \to 1$ encontramos que, para $f \ge 0$ en $L^1(\mathbb{T})$,

$$|\{t : |\widetilde{f}(re^{it})| > \lambda\}| \le 8\,\|f\|_{L^1}\,\lambda^{-1}.$$

Toda $f \in L^1(\mathbb{T})$ se puede escribir como $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, donde $f_j \ge 0$ y $\|f_j\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}$. Entonces $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2 + i\widetilde{f}_3 - i\widetilde{f}_4$ y, consecuentemente,

$$\{t : |\widetilde{f}(e^{it})| > \lambda\} \subset \bigcup_{j=1}^{4} \{t : |\widetilde{f}(e^{it})| > \lambda/4\}.$$

Se sigue que para $c = 128$ y toda $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$|\{t : |\widetilde{f}(re^{it})| > \lambda\}| \leq c \, \|f\|_{L^1} \, \lambda^{-1}. \tag{3.13}$$

■

Corolario 3.12. *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $f \in L^\alpha(\mathbb{T})$, para todo $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. Lema 3.5. ■

La técnica de la demostración del Teorema 3.11 también puede ser aplicada a funciones acotadas.

Teorema 3.13. *Si f toma valores reales y $|f| \leq 1$ entonces, para $0 \leq \alpha < \pi/2$,*

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{\alpha |\widetilde{f}(e^{it})|} \, dt \leq \frac{2}{\cos \alpha}. \tag{3.14}$$

Demostración. Pongamos $F(z) = \widetilde{f}(z) - i f(z)$. Como $\cos[\alpha f(z)] \geq \cos \alpha$, tenemos

$$\Re(e^{\alpha f(z)}) \geq \cos \alpha |e^{\alpha F(z)}| = \cos[\alpha e^{\alpha \widetilde{f}(z)}];$$

y como

$$\frac{1}{2\pi} \int \Re(e^{\alpha F(re^{it})}) \, dt = \Re(e^{\alpha F(0)}) = \cos[\alpha f(0)] \leq 1,$$

se sigue que

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{\alpha \widetilde{f}(re^{it})} \, dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Similarmente,

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-\alpha \widetilde{f}(re^{it})} \, dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Sumando y haciendo $r \to 1$ resulta (3.14). ■

Corolario 3.14. *Si $|f| \leq 1$, entonces*

$$\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda) > 2\pi \left(1 - \frac{4}{\cos \sqrt{2}} e^{-\lambda}\right). \tag{3.15}$$

Demostración. Escribimos $f = f_1 + i f_2$, donde f_1, f_2 son funciones reales. Se verifica que $\widetilde{f} = \widetilde{f_1} + i \widetilde{f_2}$ y, consecuentemente, $|\widetilde{f}(e^{it})| > \lambda$ ocurre solamente bajo alguna de las condiciones siguientes:

$$|\widetilde{f}_1(e^{it})| > 2^{-1/2}\lambda \quad \text{ó} \quad |\widetilde{f}_2(e^{it})| > 2^{-1/2}\lambda.$$

Ahora, por (3.14) con $\alpha = \sqrt{2}$,

$$|\{t : |\widetilde{f}_j| > 2^{-1/2}\lambda\}| < \frac{4\pi}{\cos\sqrt{2}} e^{-\lambda} \quad (j = 1, 2),$$

y se concluye (3.15). ■

Observación 3.15. Una medida de Borel finita está completamente determinada por su transformada de Fourier-Stieltjes, del mismo modo que las medidas sobre $\mathbb{T}$ están determinadas por sus coeficientes de Fourier-Stieltjes [10, Chapter VI]. Esto significa que dos funciones de distribución, $\mathbf{m}_1(x)$ y $\mathbf{m}_2(x)$, de funciones reales sobre $\mathbb{T}$ son iguales si $\int e^{i\xi x}\, d\mathbf{m}_1(x) = \int e^{i\xi x}\, d\mathbf{m}_2(x)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Usando la Observación 3.15 mostraremos que, si f es la función indicatriz de algún conjunto $U \subset \mathbb{T}$, entonces $\mathbf{m}_{\widetilde{f}}(\lambda)$ depende solamente de la medida de U y no de su estructura particular. Así, podemos computar $\mathbf{m}_{\widetilde{f}}(\lambda)$ explícitamente reemplazando U por un intervalo con la misma medida.

Teorema 3.16. *Sea $U \subset \mathbb{T}$ un conjunto de medida 2α. Sea f la función indicatriz de U, y sea χ_α la función indicatriz de $(-\alpha, \alpha)$. Escribimos $\mathbf{m}_\alpha(\lambda) = \mathbf{m}_{\widetilde{\chi}_\alpha}(\lambda)$. Entonces $\mathbf{m}_{\widetilde{f}}(\lambda) = \mathbf{m}_\alpha(\lambda)$.*

Demostración. Aplicando la fórmula de Cauchy con $z = re^{it}$ a las funciones analíticas $F^\xi(z) = e^{\xi[f(z)+i\widetilde{f}(z)]}$, haciendo $r \to 1$ y recordando que $f = 0$ sobre $\mathbb{T} \setminus U$ mientras que $f = 1$ sobre U, obtenemos

$$\int_{\mathbb{T}\setminus U} e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt + e^\xi \int_U e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt = 2\pi F^\xi(0) = 2\pi e^{\xi\alpha/\pi}. \tag{3.16}$$

Reescribiendo (3.16) para $-\xi$ en vez de ξ y tomando conjugados complejos,

$$\int_{\mathbb{T}\setminus U} e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt + e^{-\xi} \int_U e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt = 2\pi e^{-\xi\alpha/\pi}. \tag{3.17}$$

De (3.16) y (3.17) resulta

$$\int_U e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt = 2\pi\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\alpha}{\pi}}{\operatorname{sh}\xi}, \qquad \int_{\mathbb{T}\setminus U} e^{i\xi\widetilde{f}(e^{it})}\, dt = 2\pi\frac{\operatorname{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\operatorname{sh}\xi}. \tag{3.18}$$

Ponemos ahora $\mathbf{m}_{\widetilde{f}}(\lambda) = \mathbf{n}_1(\lambda) + \mathbf{n}_2(\lambda)$, donde

$$\mathbf{n}_1(\lambda) = |U \cap \{t : \widetilde{f}(e^{it}) \le \lambda\}|, \quad \mathbf{n}_2(\lambda) = |(\mathbb{T}\setminus U) \cap \{t : \widetilde{f}(e^{it}) \le \lambda\}|,$$

y reescribimos (3.18) como

$$\int e^{i\xi x}\, d\mathbf{n}_1(x) = 2\pi \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi\alpha}{\pi}}{\operatorname{sh}\xi}, \qquad \int e^{i\xi x}\, d\mathbf{n}_2(x) = 2\pi \frac{\operatorname{sh}\xi(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\operatorname{sh}\xi}. \tag{3.19}$$

Vemos que $\mathbf{n}_1(x)$ y $\mathbf{n}_2(x)$ están unívocamente determinadas por α, luego son las mismas para $\widetilde{f}$ y $\widetilde{\chi}_\alpha$. Encontramos así que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{\chi_\alpha}$ tienen la misma distribución de valores no sólo en $\mathbb{T}$, sino también en U para $\widetilde{f}$, y en $(-\alpha,\alpha)$ para $\widetilde{\chi}_\alpha$. ■

La serie de Fourier de χ_α es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\pi n} e^{int} = \frac{\alpha}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\pi n} \cos nt;$$

luego

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}_\alpha(re^{it}) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\pi n} \operatorname{sen} nt = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos n(t-\alpha) - \cos n(t+\alpha)}{\pi n} \\
&= \frac{1}{\pi}\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} e^{in(t-\alpha)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} e^{in(t+\alpha)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{re^{it}-e^{i\alpha}}{re^{it}-e^{-i\alpha}}\right|,
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\widetilde{\xi}_\alpha(e^{it}) = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{e^{it}-e^{i\alpha}}{e^{it}-e^{-i\alpha}}\right| = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1-\cos(t-\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)}. \tag{3.20}$$

Se sigue de (3.20) que para $\lambda > 1$, el conjunto $\{t : \widetilde{\chi}_\alpha(e^{it}) > \lambda\}$ es un intervalo que contiene a $t = -\alpha$ y contenido en $(-\alpha-\beta_1, -\alpha+\beta_2)$, donde

$$\frac{\beta_1}{2\alpha+\beta_1} = \frac{\beta_2}{2\alpha-\beta_2} = e^{-\pi\alpha};$$

por tanto,

$$\mathbf{m}_\alpha(\lambda) \geq 2\pi - 5\alpha e^{-\pi\lambda}. \tag{3.21}$$

Corolario 3.17. *Sea f la función indicatriz de un conjunto U de medida 2α sobre $\mathbb{T}$. Entonces, para $\lambda > 1$,*

$$|\{t : |\widetilde{f}(e^{it})| > \lambda\}| < 10\alpha e^{-\pi\lambda}. \tag{3.22}$$

Volviendo a $L^1(\mathbb{T})$, aplicaremos el Teorema 3.11 y el hecho de que la conjugación es un operador de norma unidad sobre $L^2(\mathbb{T})$ para establecer el siguiente.

Teorema 3.18. *Si $f \ln^+ |f| \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.*

Demostración. Para $g \in L^2(\mathbb{T})$, se tiene $\widetilde{g} \in L^2(\mathbb{T})$ y $\|\widetilde{g}\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2}$ (Teorema 1.52). Como hemos visto anteriormente, esto implica que

$$\mathbf{m}_{|\widetilde{g}|}(\lambda) \ge 2\pi \left(1 - \|g\|_{L^2}^2 \lambda^{-1}\right). \tag{3.23}$$

Hemos de probar que $\int_1^\infty \lambda \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda) < \infty$, que es lo mismo que decir que $\int_1^R \lambda \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda) = O(1)$ cuando $R \to \infty$. Integrando por partes y recordando (3.13) advertimos que el teorema es equivalente a

$$\int_1^R [2\pi - \mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda)] \, d\lambda = O(1) \quad \text{cuando } R \to \infty. \tag{3.24}$$

Para estimar $2\pi - \mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda)$ escribimos $f = g + h$, donde $g = f$ cuando $|f| \le \lambda$ y $h = f$ cuando $|f| > \lambda$. Se tiene que $\widetilde{f} = \widetilde{g} + \widetilde{h}$, y consecuentemente

$$\{t : |\widetilde{f}(t)| > \lambda\} \subset \{t : |\widetilde{g}(t)| > \lambda/2\} \cup \{t : |\widetilde{h}(t)| > \lambda/2\}. \tag{3.25}$$

Por (3.23)

$$|\{t : |\widetilde{g}(t)| > \lambda/2\}| \le 8\pi\lambda^{-2} \|g\|_{L^2}^2 = 8\pi\lambda^{-2} \int_0^\lambda x^2 \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}, \tag{3.26}$$

y por (3.13)

$$|\{t : |\widetilde{h}| > \lambda/2\}| \le 2c\lambda^{-1} \|h\|_{L^1} = 2c\lambda^{-1} \int_\lambda^\infty x \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|};$$

para $x \ge \lambda$, $\ln^{1/2} x \ge \ln^{1/2} \lambda$, y obtenemos

$$|\{t : |\widetilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \le \frac{2c}{\lambda\sqrt{\ln \lambda}} \int_\lambda^\infty x\sqrt{\ln x} \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}. \tag{3.27}$$

La combinación de (3.25), (3.26) y (3.27) proporciona

$$2\pi - \mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}(\lambda) \le 8\pi\lambda^{-2} \int_0^\lambda x^2 \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} + \frac{2c}{\lambda\sqrt{\ln \lambda}} \int_\lambda^\infty x\sqrt{\ln x} \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}.$$

Así pues, se verificará (3.24), y por tanto el teorema, si probamos que, para $R \to \infty$,

$$\int_1^R \lambda^{-2} \left(\int_0^\lambda x^2 \, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} \right) d\lambda = O(1), \tag{3.28}$$

$$\int_1^R \frac{1}{\lambda\sqrt{\ln\lambda}} \left(\int_\lambda^\infty x\sqrt{\ln x}\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} \right) d\lambda = O(1).$$

La información que tenemos acerca de $\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|}$ es que se trata de una función monótona que tiende a 2π en el infinito y verifica

$$\int_1^\infty x \ln x\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} < \infty. \tag{3.29}$$

Para derivar (3.28) de (3.29) aplicamos el teorema de Fubini. El dominio de la primera integral es el trapezoide

$$\{(x,\lambda) : 1 < \lambda < R,\ 0 < x < \lambda\}\,;$$

integrando primeramente con respecto a λ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_1^R \lambda^{-2} \left(\int_0^\lambda x^2\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} \right) d\lambda \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{R}\right) x^2\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} + \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right) x^2\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} \\
&\le 2\pi + \int_1^R x\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} = O(1).
\end{aligned}$$

El dominio para la segunda integral es la banda

$$\{(x,\lambda) : 1 < \lambda < R,\ \lambda < x\}\,;$$

integrando primero con respecto a λ,

$$\begin{aligned}
&\int_1^R \frac{1}{\lambda\sqrt{\ln\lambda}} \left(\int_\lambda^\infty x\sqrt{\ln x}\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} \right) d\lambda \\
&= 2\int_1^R x \ln x\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} + 2\sqrt{\ln R} \int_R^\infty x\sqrt{\ln x}\, d\mathbf{m}_{|\widetilde{f}|} = O(1).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba. ∎

Cuando la medida del espacio subyacente es infinita, como ocurre por ejemplo con la recta $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{T}$, podemos usar $\mu(\{x : f(x) > \lambda\})$ en vez de la función de distribución. Para funciones integrables positivas esto da la información completa acerca de la distribución de f.

Un calibre ligeramente más grueso, que a menudo resulta más transparente y fácil para trabajar que la función de distribución incluso cuando la medida subyacente es finita, es el «*lumping*» de $d\mathbf{m}_f$, definido para un espacio de medida arbitrario $(X, \mathcal{B}, \mu)$, finito o infinito, como sigue.

Definición 3.19. *Dados una función medible real f y un entero n, definimos*

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{m}_n(f) = \mu\left(\left\{x : 2^{n-1} < |f(x)| \leq 2^n\right\}\right).$$

En relación con esta definición observamos, en primer lugar, que f es de tipo L^p débil si, y sólo si, $\mathbf{m}_n(f) = O(2^{-np})$. Por otra parte, $f \in L^p$ si, y sólo si, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{np}\mathbf{m}_n(f) < \infty$, y de hecho

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{np}\mathbf{m}_n(f) \leq 2^p \|f\|_{L^p}^p. \tag{3.30}$$

La técnica aplicada en el Teorema 3.18 es una *interpolación*, usando lo que sabemos acerca de las propiedades de un operador (el operador de conjugación $f \mapsto \widetilde{f}$) sobre $L^1(\mathbb{T})$ y sobre $L^2(\mathbb{T})$, para probar que éste aplica el espacio intermedio $L\log L(\mathbb{T})$ en $L^1(\mathbb{T})$.

El mismo método vale para probar el siguiente Teorema 3.20. Usaremos los parámetros $\mathbf{m}_n$ en vez de las funciones de distribución. Es interesante comparar la *Demostración (A)* de este teorema con la del Teorema 3.18. La prueba original de Riesz se recoge como *Demostración (B)*.

Hemos mencionado anteriormente que para $p = 2$, el Teorema 3.20 se sigue del Teorema 1.52. La fórmula de Parseval (Teorema 3.1) implica que si p y q son exponentes conjugados, las aplicaciones $f \mapsto \widetilde{f}$ en $L^p(\mathbb{T})$ y en $L^q(\mathbb{T})$ son, excepto por un signo, adjuntas una de la otra; consecuentemente, si una está acotada la otra también lo estará, y por la misma cota. Así, es suficiente probar el teorema para $1 < p < 2$.

Teorema 3.20 (M. Riesz). *Para $1 < p < \infty$, la aplicación $f \mapsto \widetilde{f}$ es un operador lineal acotado sobre $L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración (A). Supongamos que $1 < p < 2$. Necesitamos demostrar que existe una constante C_p tal que si $f \in L^p(\mathbb{T})$, entonces $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ y $\|\widetilde{f}\|_p \leq C_p \|f\|_p$.

Como $\|\widetilde{f}\|_{L^p}^p \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{np}\mathbf{m}_n(\widetilde{f})$, estimaremos $\mathbf{m}_n(\widetilde{f})$. Dado n, escribimos $f = f_{0,n} + f_{1,n}$, donde $f_{0,n}(t) = f(t)$ si $|f(t)| \geq 2^n$ (y es cero en otro caso), y $f_{1,n}(t) = f(t)$ si $|f(t)| < 2^n$ (y es cero en otro caso). Como $1 < p < 2$, $f_{0,n} \in L^1(\mathbb{T})$ y $f_{1,n} \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces

$$\|f_{0,n}\|_{L^1} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^j\mathbf{m}_j(f), \qquad \|f_{1,n}\|_{L^2} \leq \sum_{j=1}^{n} 2^{2j}\mathbf{m}_j(f). \tag{3.31}$$

Ya que $\widetilde{f} = \widetilde{f}_{0,n} + \widetilde{f}_{1,n}$, la desigualdad $|\widetilde{f}(t)| > 2^n$ entraña al menos una de las desigualdades $|\widetilde{f}_{0,n}(t)| > 2^{n-1}$ ó $|\widetilde{f}_{1,n}(t)| > 2^{n-1}$, así que

$$\mathbf{m}_{n+1}(\widetilde{f}) \le \mu(\{t : |\widetilde{f}_{0,n}(t)| > 2^{n-1}\}) + \mu(\{t : |\widetilde{f}_{1,n}(t)| > 2^{n-1}\}). \tag{3.32}$$

Por (3.13),

$$\mu(\{t : |\widetilde{f}_{0,n}(t)| > 2^{n-1}\}) \le \frac{\|f_{0,n}\|_{L^1}}{2^{n-1}} \le c_1 2^{-n} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbf{m}_j(f) 2^j; \tag{3.33}$$

y puesto que la conjugación tiene norma unidad en $L^2(\mathbb{T})$,

$$\mu(\{t : |\widetilde{f}_{1,n}(t)| > 2^{n-1}\}) \le \frac{\|f_{1,n}\|_{L^2}^2}{2^{2n-2}} \le c_2 2^{-2n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_j(f) 2^{2^j}. \tag{3.34}$$

Se sigue que

$$\mathbf{m}_n(\widetilde{f}) \le c_1 2^{-n} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbf{m}_j(f) 2^j + c_2 2^{-2n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_j(f) 2^{2^j}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f}\|_{L^p}^p &\le \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{np} \mathbf{m}_n(\widetilde{f}) \\
&\le c_3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{pn} \left(2^{-n} \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbf{m}_j(f) 2^j + 2^{-2n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}_j(f) 2^{2j} \right) \\
&= c_3 \left(\sum_{n \le j} 2^{(n-j)(p-1)} \mathbf{m}_j(f) 2^{jp} + \sum_{n \ge j} 2^{(p-2)(n-j)} \mathbf{m}_j(f) 2^{jp} \right).
\end{aligned}$$

Sumando primero con respecto de n resultan constantes que dependen solamente de p, y se concluye que

$$\|\widetilde{f}\|_{L^p}^p \le c_p \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{m}_j(f) 2^{jp} \le C(p) \|f\|_{L^p}^p.$$

■

Demostración (B). Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$, $f \ge 0$. Sean $f(re^{it})$ su integral de Poisson, $\widetilde{f}(re^{it})$ su armónica conjugada, y $H(re^{it}) = f(re^{it}) + i\widetilde{f}(re^{it})$. Podemos suponer que f no es idénticamente nula. Puesto que $f \ge 0$, necesariamente $f(re^{it}) > 0$, por lo que $H(re^{it}) \ne 0$ en $\mathbb{D}$. Sea $G(re^{it})$ la rama de $H(re^{it})^p$ que es real en $r = 0$, y sea γ un número real satisfaciendo

$$\gamma < \frac{\pi}{2}, \quad p\gamma > \frac{\pi}{2}.$$

Para $0 < r < 1$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int |G(re^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_I |G(re^{it})|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{II} |G(re^{it})|\,dt,$$

donde $\int_I$ se toma sobre el conjunto donde $|\arg H(z)| < \gamma$ e $\int_{II}$ se toma sobre el conjunto complementario (definido por la condición $\gamma \leq |\arg H(z)| < \pi/2$), siendo $z = re^{it}$. En $\int_I$ tenemos $|H(z)| < f(z)(\cos\gamma)^{-1}$, luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_I |G(re^{it})|\,dt \leq (\cos\gamma)^{-p}\|f\|_{L^p}^p, \tag{3.35}$$

y, en particular,

$$\frac{1}{2\pi}\int_I \Re G(re^{it})\,dt \leq (\cos\gamma)^{-p}\|f\|_{L^p}^p. \tag{3.36}$$

Por otra parte, en $\int_{II}$ tenemos

$$|G(z)| \leq \Re G(z)(\cos p\gamma)^{-1}, \tag{3.37}$$

ya que ambos factores son negativos. Ahora, como

$$\frac{1}{2\pi}\int \Re G(re^{it})\,dt = G(0) = [\widetilde{f}(0)]^p,$$

sigue de (3.36) que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{II} |\Re G(re^{it})|\,dt \leq [\widehat{f}(0)]^p + (\cos\gamma)^{-p}\|f\|_{L^p}^p.$$

En combinación con (3.37) y (3.35), esto implica

$$\frac{1}{2\pi}\int |G(re^{it})|\,dt \leq c_p\|f\|_{L^p}^p, \tag{3.38}$$

donde c_p es una constante que sólo depende de p.

Como $|\widetilde{f}(re^{it})|^p \leq |H(re^{it})| = |G(re^{it})|$, haciendo $r \to 1$ se concluye de (3.38) que $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$, con $\|\widetilde{f}\|_{L^p} \leq c_p^{1/p}\|f\|_{L^p}$. Finalmente, el teorema es consecuencia del caso $f > 0$ y la linealidad de la aplicación $f \mapsto \widetilde{f}$. ∎

Bibliografía

[1] J. Arias de Reyna: *Pointwise Convergence of Fourier Series.* Springer, 2002.

[2] J. Canto: *Convergence of Fourier series.* Trabajo Fin de Grado, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, 2016.

[3] J. Duoandikoetxea: *Fourier Analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[4] J. Duoandikoetxea: 200 años de convergencia de las series de Fourier. *La Gaceta de la RSME* **10** (2007), no. 3, 651–688.

[5] A. Fernández: *Convergencia y divergencia de series de Fourier.* Trabajo Fin de Grado, Universidad de Murcia, 2015.

[6] G. Folland: *Fourier Analysis and its Applications.* Wadsworth, 1992.

[7] L. Grafakos: *Classical Fourier Analysis*, 3rd ed. Springer, 2014.

[8] L. Grafakos: *Modern Fourier Analysis*, 3rd ed. Springer, 2014.

[9] J.-P. Kahane, R. Salem: *Ensembles parfaits et series trigonometriques.* Hermann, 1963.

[10] Y. Katznelson: *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd. ed. Cambridge University Press, 2004.

[11] E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[12] A. Zygmund: *Trigonometric Series*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1959.

Introduction to Fourier Analysis

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jezael Goya Sosa
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100970654@ull.edu.es

Abstract

In this work, the basic theory of Fourier series in spaces of continuous and of integrable functions on the unit circle is addressed.

1. Introduction

Fourier series owe its name to the French mathematician and physicist Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), who introduced them in 1807 as a tool to solve what we now know as the heat equation. Fourier erroneously asserted that all functions admit a development in a trigonometric series, and that this type of series always converges. Furthermore, although the coefficients of the development are calculated by integration, Fourier did not take into account which hypotheses must be imposed on the function in order to rigorously define such coefficients. In this way, what Fourier left us was not a theorem about the representation of a function in a trigonometric series, but a problem in which the concepts of function, integral, sum of a series and, later, mode of convergence were involved. The influence of this problem in the further development of mathematical analysis has been considerable.

2. Fourier series on $\mathbb{T}$

In Chapter 1, the concepts of Fourier coefficient and Fourier series associated with an integrable function are introduced; the order of magnitude of such coefficients is analyzed; the convolution of functions is defined and summability kernels are studied in the framework of homogeneous spaces; finally, the theory in spaces of square integrable functions is presented, connecting it with the theory of Hilbert spaces. Let us summarize some definitions and results (unless otherwise stated, all integrals are assumed to be taken over $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

Let $f \in L^1(\mathbb{T})$. For $n \in \mathbb{Z}$, the *nth Fourier coefficient* of f is given by

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}\,dt.$$

The *Fourier series* of f, $S[f]$, is the trigonometric series

$$S[f] \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Two important properties of the Fourier coefficients are the following:

(Uniqueness theorem) *Let $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, and assume $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Then $f = g$.*

(Riemann-Lebesgue lemma) *For $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

The *convolution* $f * g$ of the functions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ is the function $h \in L^1(\mathbb{T})$ defined by

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

The following properties hold:

$$\|f * g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}, \quad \widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

A *summability kernel* is a sequence $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ of continuous, 2π-periodic functions satisfying

(S-1) $\frac{1}{2\pi}\int k_n(t)\,dt = 1.$

(S-2) $\frac{1}{2\pi}\int |k_n(t)|\,dt \le C$, where C is a constant.

(S-3) For any $0 < \delta < \pi$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|\,dt = 0.$$

The *Fejér summability kernel* $\{\mathbf{K}_n\}_{n=0}^{\infty}$ is defined by

$$\mathbf{K}_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}.$$

An *homogeneous Banach space* on $\mathbb{T}$ is a linear subspace B of $L^1(\mathbb{T})$ endowed with a norm $\|\cdot\|_B \ge \|\cdot\|_{L^1}$ making it into a Banach space, with the following properties:

(H-1) If $f \in B$ and $\tau \in \mathbb{T}$, then $f_\tau \in B$ and $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$, where $f_\tau(t) = f(t-\tau)$.

(H-2) For every $f \in B$ and $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$, $\lim_{\tau\to\tau_0}\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Let B be an homogeneous Banach space on $\mathbb{T}$, let $f \in B$, and let $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a summability kernel. Then $\|k_n * f - f\|_B \to 0$ as $n \to \infty$. In particular, if $f \in L^1(\mathbb{T})$ then $\sigma_n f = \mathbf{K}_n * f \to f$ as $n \to \infty$ in the topology of any homogeneous Banach space containing f.

3. Convergence of Fourier series

If $f \in L^1(\mathbb{T})$ and the series conjugate to $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{int}$, that is, $-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(n)\widehat{f}(n)e^{int}$, is the Fourier series of some $g \in L^1(\mathbb{T})$, then we call g the *function conjugate* to f and denote it by $\tilde{f}$.

A function space B *admits conjugation* if for all $f \in B$, $\tilde{f}$ is defined and belongs to B.

In Chapter 2, homogeneous Banach spaces that allow convergence in norm are characterized as those that admit conjugation. Also, the following is established:

(Localization principle) *Assume that $f \in L^1(\mathbb{T})$ vanishes in an open interval I. Then, for all $t \in I$, the sequence $\{S_n(f,t)\}_{n=0}^{\infty}$ of partial sums of the Fourier series of f converges to zero, and the convergence is uniform on closed subsets of I.*

Furthermore, some pointwise convergence criteria for Fourier series are demonstrated. Chapter 2 ends with the celebrated Carleson-Hunt theorem, which is stated without proof:

(Carleson-Hunt theorem) *Let $1 < p < \infty$. If $f \in L^p(\mathbb{T})$, then $\{S_n(f,t)\}_{n=0}^{\infty}$ converges to f almost everywhere as $n \to \infty$.*

4. Conjugation

In Chapter 3, the conjugate function is studied from a complex variable viewpoint and, in particular, the M. Riesz theorem regarding the continuity of the conjugation operator on Lebesgue spaces is proved.

(M. Riesz theorem) *For $1 < p < \infty$, the mapping $f \mapsto \tilde{f}$ is a bounded linear operator on $L^p(\mathbb{T})$.*

From the results in Chapter 2 it can be concluded that L^p spaces $(1 < p < \infty)$ admit convergence in norm.

References

[1] J. Duoandikoetxea: *Fourier Analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[2] G. Folland: *Fourier Analysis and its Applications.* Wadsworth, 1992.

[3] Y. Katznelson: *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd. ed. Cambridge University Press, 2004.

[4] E. Stein, R. Shakarchi: *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.