Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Lorena Morales Pérez

Ceros de las funciones holomorfas

Zeros of holomorphic functions

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2019

Dirigido por
María Isabel Marrero Rodríguez

María Isabel Marrero Rodríguez

Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
Aptdo. de Correos 456
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi profesora María Isabel Marrero Rodríguez,
por ser mi guía y mi apoyo en este proyecto.

A Fernando Pérez González, al que le debo
la motivación inicial hacia este trabajo.

A todo el profesorado del Grado, por ser una parte determinante en
mi desarrollo personal y profesional.

A mis padres por su apoyo constante durante todos estos años.

A mi pareja, por quererme y potenciarme tanto personal como
profesionalmente.

Lorena Morales Pérez
La Laguna, 8 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

Los productos infinitos, como su nombre sugiere, deben entenderse en paralelo a las series, pero reemplazando sumas por productos parciales. Constituyen una herramienta fundamental del análisis complejo, donde el célebre teorema de factorización de Weierstrass permite representar cualquier función holomorfa como producto infinito, identificando claramente sus ceros. Se abordan ejemplos tales como la factorización de la función seno, la expresión de las funciones Gamma de Euler y zeta de Riemann en forma de producto infinito, o las propiedades básicas de los productos de Blaschke. Como aplicación se contempla la resolución de problemas de interpolación (en combinación con el teorema de Mittag-Leffler) y aproximación (concretamente, el teorema de Müntz-Szász).

Palabras clave: *Producto infinito – Teorema de factorización de Weierstrass – Función seno – Función Gamma de Euler – Función zeta de Riemann – Producto de Blaschke – Interpolación – Teorema de Müntz-Szász.*

Abstract

Infinite products, as their name suggests, must be understood in parallel to series, but replacing sums with partial products. They constitute a fundamental tool of complex analysis, where the celebrated Weierstrass factorization theorem allows us to represent any holomorphic function as an infinite product, clearly identifying its zeros. Examples such as the factorization of the sine function, the expression of the Euler Gamma and Riemann zeta functions in the form of an infinite product, or the basic properties of Blaschke products, are given. As an application, the solutions to an interpolation problem (in combination with the Mittag-Leffler theorem) and an approximation problem (namely, the Müntz-Szász theorem) are presented.

Keywords: *Infinite product – Weierstrass factorization theorem – Sine function – Euler Gamma function – Riemann zeta function – Blaschke product – Interpolation – Müntz-Szász theorem.*

Contenido

Introducción

El teorema fundamental del álgebra establece que todo polinomio complejo p, no idénticamente nulo, con raíces a_k de multiplicidades respectivas m_k $(1 \leq k \leq n)$, admite una única representación de la forma

$$p(z) = c(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2} \cdots (z-a_n)^{m_n},$$

con $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El principal objetivo de este trabajo es conseguir una representación análoga para funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$ y, en particular, para funciones enteras.

Si la función f es holomorfa y no idénticamente nula en un dominio (abierto y conexo) del plano, se sabe que el conjunto de sus ceros carece de puntos de acumulación y, por consiguiente, es a lo sumo numerable. Además, es posible definir la multiplicidad, como un número entero no negativo, de cada cero de f.

Nos planteamos entonces la siguiente cuestión: dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un dominio G, carente de puntos de acumulación en G, y una sucesión de enteros $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, ¿existe una función f, analítica en G, con ceros $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, de tal forma que la multiplicidad del cero de f en $z = a_k$ sea m_k $(k \in \mathbb{N})$? Si se considerara únicamente una familia finita $\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces la solución trivial de este problema sería un polinomio complejo como el antes mencionado.

Nos planteamos, por tanto, el objetivo de conseguir una factorización análoga para funciones holomorfas con infinitos ceros, reemplazando el producto finito por un producto infinito que explicite los ceros y sus multiplicidades. Esto se logra gracias al teorema de factorización de Weierstrass, que se estudia en el capítulo 2. Previamente necesitamos definir y estudiar la convergencia de productos infinitos numéricos y funcionales, lo que hacemos en el capítulo 1.

Ilustramos este teorema de Weierstrass con algunos ejemplos y aplicaciones relevantes en cuanto a productos infinitos se refiere. En primer lugar, nos ocupamos de dar dos factorizaciones, debidas a Euler, de la función seno, y las aplicamos al cálculo de desarrollos para las funciones coseno y cotangente, de la suma de Basilea (serie formada por los recíprocos de los cuadrados de los números naturales), y de las fórmulas de Wallis y de Viète para el número π. Seguidamente estudiamos en detalle las que posiblemente sean las dos funciones más célebres del análisis complejo: la función Gamma de Euler y la función zeta de Riemann.

El capítulo 2 se completa con la solución de un problema de interpolación que combina el teorema de factorización de Weierstrass con el teorema de Mittag-Leffler. El segundo puede ser considerado como una generalización del primero, por cuanto consigue una expresión en serie numérica de una función meromorfa donde es posible identificar rápidamente los polos de la función y sus correspondientes partes principales. Más precisamente, el problema que se resuelve es el siguiente: dados un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y un conjunto arbitrario $A \subset G$, sin puntos de acumulación en G, ¿existe una función $f \in H(G)$ que tome valores prefijados en cada punto de A? No sólo la respuesta a esta cuestión es afirmativa, sino que incluso cabe prescribir un número finito de derivadas en cada punto de A.

En el capítulo 3 abordamos los llamados productos de Blaschke. Se trata de unos productos infinitos que dan lugar a funciones holomorfas y acotadas en el disco unidad del plano complejo con una sucesión de ceros prefijada, siempre que ésta satisfaga una cierta condición de fácil verificación. Los productos de Blaschke permiten factorizar clases importantes de funciones holomorfas en el disco unidad, como la de las funciones acotadas o las clases de Hardy. A modo de aplicación de esta teoría presentamos el teorema de Müntz-Szász, un teorema de aproximación que generaliza el bien conocido teorema de aproximación de Weierstrass. Concretamente, el teorema de Müntz-Szász proporciona una condición necesaria y suficiente para que las combinaciones lineales finitas de una sucesión de monomios con exponentes reales (esto es, los llamados polinomios de Müntz) sean uniformemente densas en el espacio de las funciones complejas continuas en un intervalo cerrado.

Para la elaboración de esta memoria hemos seguido principalmente los textos clásicos de Conway [4] y Rudin [10]. Al término de la misma se puede consultar un breve listado de otras referencias bibliográficas, tanto generalistas como específicas, que consideramos potencialmente interesantes para ampliar o profundizar en el tema.

Conforme a la normativa académica vigente, la memoria concluye con el preceptivo póster que resume sus contenidos.

La notación utilizada es razonablemente estándar: $H(G)$ y $M(G)$ denotan, respectivamente, los espacios de funciones holomorfas y meromorfas en un abierto G del plano complejo $\mathbb{C}$, mientras que $B(a;r)$ y $\overline{B}(a;r)$ representan, respectivamente, las bolas abierta y cerrada de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. Por simplicidad, $\mathbb{D} = B(0;1)$ simbolizará el disco unidad abierto de $\mathbb{C}$.

1

Convergencia de productos infinitos

El concepto de producto infinito viene a dar solución, entre otras, a la cuestión siguiente: dada una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en un dominio G, carente de puntos de acumulación en G, y una sucesión de enteros $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, ¿existe una función f, analítica en G, con ceros $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, de tal forma que la multiplicidad del cero de f en $z = a_k$ sea m_k $(k \in \mathbb{N})$?

Si se considerara únicamente una familia finita $\{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces la función buscada sería $f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n}$. La consideración de una familia infinita de puntos conduce de forma natural al análisis de la convergencia de productos infinitos numéricos y funcionales.

1.1. Productos infinitos numéricos

Definición 1.1 *Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos y existe $z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k$, se dice que z es el* producto infinito *de los números $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, y se escribe*

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Supongamos que ninguno de los números z_n $(n \in \mathbb{N})$ es cero, y que $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ existe y tampoco es cero. Sean $p_0 = 1$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ $(n \in \mathbb{N})$; entonces $p_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\})$, y

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = z_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ya que $z \neq 0$ y $p_n \to z$ cuando $n \to \infty$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$. Por tanto, excepto para los casos donde aparece el cero, una condición necesaria para la convergencia de un producto infinito es que el término n-ésimo tienda a 1. Por otro lado, observemos que si $z_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$, con $|a| < 1$, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$ aunque $\lim_{n\to\infty} z_n = a \neq 0$.

Ejemplo 1.1. Se tiene:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Resolución. Para todo $n \in \mathbb{N}$, los términos

$$z_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

son no nulos y tienden a 1. Ya que

$$z_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)},$$

los productos parciales se escriben, cancelando factores, en la forma

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

De manera que

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1}{2},$$

como habíamos afirmado. ■

Ejemplo 1.2. Sea

$$z_n = \begin{cases} 2, & n \text{ par} \\ 1/2, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge.

Resolución. La sucesión de productos parciales es $\{1/2, 1, 1/2, 1, \ldots\}$, que no converge. ■

Ejemplo 1.3. Si

$$z_n = \frac{n+1}{n}$$

para $n \in \mathbb{N}$, entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge.

Resolución. Para todo $n \in \mathbb{N}$, los términos z_n son no nulos y tienden a 1; pero los productos parciales son

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n} = n+1,$$

de modo que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge. ■

Ejemplo 1.4. Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales positivos convergente a cero, definimos la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ mediante

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &= 1 + a_n \\ z_{2n} &= \frac{1}{1+a_n}, \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, con

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1.$$

Resolución. Para todo $n \in \mathbb{N}$, los términos z_n son no nulos y tienden a 1. Denotemos por p_n el n-ésimo producto parcial. Se tiene

$$\begin{aligned} p_{2n-1} &= 1 + a_n, \\ p_{2n} &= 1, \end{aligned}$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$. ■

Puesto que la exponencial de una suma es el producto de las exponenciales de los términos individuales, es posible discutir la convergencia de un producto infinito (donde no comparezca el cero) discutiendo la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$, siendo Log la rama principal del logaritmo. Para que esto tenga sentido es necesario que $\operatorname{Log} z_n$ lo tenga, y a tal fin es necesario restringir z_n ($n \in \mathbb{N}$). Si el producto ha de ser no nulo, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$; luego, no se pierde generalidad asumiendo que $\Re z_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

Proposición 1.2 *Sea $\Re z_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Entonces, $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a un número distinto de cero si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ converge.*

Demostración. Sea $z = re^{i\theta}$ ($-\pi < \theta \leq \pi$), y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ y sea $\operatorname{Log} p_n = \ln|p_n| + i\theta_n$, donde $\theta - \pi < \theta_n \leq \theta + \pi$. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k$ entonces $e^{s_n} = p_n$, así que $s_n = \operatorname{Log} p_n + 2\pi i k_n$ para algún $k_n \in \mathbb{Z}$.

Supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} p_n = z$. Entonces, $s_n - s_{n-1} = \operatorname{Log} z_n \to 0$ y, además, $\operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} p_{n-1} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Por tanto, $k_n - k_{n-1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Puesto que cada k_n ($n \in \mathbb{N}$) es entero, necesariamente existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $k_m = k_n = k$ ($m, n \geq n_0$). Así, $\lim_{n\to\infty} s_n = \operatorname{Log} z + 2\pi i k$; esto es, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ converge.

Recíprocamente, supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} z_n$ converge. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} z_k$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, entonces $\lim_{n\to\infty} e^{s_n} = e^s$. Pero $e^{s_n} = \prod_{k=1}^{n} z_k$, así que $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a $z = e^s \neq 0$. ■

Consideremos el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{Log}(1+z)$ centrado en $z = 0$:

$$\operatorname{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots,$$

que tiene radio de convergencia 1. Si $|z|<1$, entonces

$$\left|1-\frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}\right|=\left|\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}z^2+\dots\right|\le\frac{1}{2}(|z|+|z|^2+\dots)=\frac{1}{2}\frac{|z|}{1-|z|}.$$

Si además requerimos que $|z|<1/2$, entonces

$$\left|1-\frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}\right|\le\frac{1}{2}.$$

Por tanto, para $|z|<1/2$,

$$\frac{1}{2}|z|\le|\operatorname{Log}(1+z)|\le\frac{3}{2}|z|. \tag{1.1}$$

Usaremos esta estimación en la demostración del resultado siguiente.

Proposición 1.3 *Sea $\Re z_n>-1$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}(1+z_n)$ converge absolutamente si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ converge absolutamente.*

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge entonces $\lim_{n\to\infty}z_n=0$, así que, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, $|z_n|<1/2$. En virtud de (1.1), la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+z_n)|$ está dominada por una serie convergente, y por lo tanto ella misma es convergente. Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+z_n)|$ converge, entonces se debe tener $|z_n|<1/2$ para n suficientemente grande; de nuevo, (1.1) nos permite concluir que $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge. ■

Ahora queremos definir la convergencia absoluta de un producto infinito. Por analogía con las series infinitas, sería deseable que la convergencia absoluta implicase la convergencia, lo cual nos impulsa a pedir que $\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converja; pero este primer impulso debe ser descartado, toda vez que la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|$ no implica la de $\prod_{n=1}^{\infty}z_n$. En efecto, si $z_n=-1$ $(n\in\mathbb{N})$ entonces $|z_n|=1$ $(n\in\mathbb{N})$, así que $\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|$ converge a 1. Sin embargo, $\prod_{k=1}^{n}z_k=\pm1$ dependiendo de si n es par o impar, de manera que $\prod_{n=1}^{\infty}z_n$ no converge.

La Proposición 1.2 justifica la siguiente definición.

Definición 1.4 *Si $\Re z_n>0$ $(n\in\mathbb{N})$, se dirá que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}z_n$* converge absolutamente *cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}z_n$ converja absolutamente.*

De acuerdo con la Proposición 1.2 y el hecho de que la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia, tenemos que la convergencia absoluta de un producto implica la convergencia de ese producto. De la misma forma, si un producto converge absolutamente entonces cualquier reordenamiento de los términos del producto resulta en otro producto que también converge absolutamente. Si combinamos las Proposiciones 1.2 y 1.3 con la Definición 1.4, se obtiene el siguiente criterio fundamental de convergencia de un producto infinito.

Corolario 1.5 *Si* $\Re z_n > 0$*, entonces el producto* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente si, y sólo si, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n - 1)$ *converge absolutamente.*

Aunque el Corolario 1.5 establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia absoluta de un producto infinito en términos que nos resultan familiares, no proporciona un método para calcular los productos infinitos a partir de las series infinitas correspondientes, de manera que no resulta infrecuente que para evaluar un producto particular debamos recurrir a algún artificio.

Ejemplo 1.5. En el Ejemplo 1.4 tomamos $a_n = 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\begin{aligned} z_{2n-1} &= \frac{n+1}{n} \\ z_{2n} &= \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

si $n \in \mathbb{N}$. Entonces el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, con

$$\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 1.$$

Pero este producto no converge absolutamente.

Resolución. En efecto, la convergencia se sigue inmediatamente del Ejemplo 1.4. Para ver que no es absoluta basta aplicar el Corolario 1.5, teniendo en cuenta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_{2k-1} - 1| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

■

1.2. Productos infinitos funcionales

Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones definidas en un conjunto X, con $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $x \in X$, para $n \to \infty$. ¿Cuándo se cumplirá que $e^{f_n(x)} \to e^{f(x)}$ uniformemente en $x \in X$, para $n \to \infty$? El siguiente resultado proporciona una respuesta parcial a esta pregunta, la cual, no obstante, será suficiente para nuestros propósitos.

Lema 1.6 *Sea* X *un conjunto y sean* $f, f_1, f_2, \ldots$ *funciones de* X *en* $\mathbb{C}$ *tales que* $f_n(x) \to f(x)$ *uniformemente en* $x \in X$*, cuando* $n \to \infty$*. Si existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que* $\Re f(x) \le a$ $(x \in X)$*, entonces* $e^{f_n(x)} \to e^{f(x)}$ *uniformemente en* $x \in X$*, cuando* $n \to \infty$*.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \varepsilon e^{-a}$ $(|z| < \delta)$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ $(x \in X,\ n \geq n_0)$. Así,

$$\varepsilon e^{-a} > \left| e^{f_n(x) - f(x)} - 1 \right| = \left| \frac{e^{f_n(x)}}{e^{f(x)}} - 1 \right| \quad (x \in X,\ n \geq n_0).$$

Se concluye que

$$\left| e^{f_n(x)} - e^{f(x)} \right| < \varepsilon e^{-a} \left| e^{f(x)} \right| \leq \varepsilon \quad (x \in X,\ n \geq n_0).$$

■

Lema 1.7 *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas definidas sobre X con valores en $\mathbb{C}$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge absoluta y uniformemente para $x \in X$. Entonces, el producto*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + g_n(x)]$$

converge absoluta y uniformemente para $x \in X$. Además, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 0$ si, y sólo si, $g_n(x) = -1$ para algún n, $1 \leq n \leq n_0$.

Demostración. Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge uniformemente para $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n(x)| < 1/2$ $(x \in X,\ n > n_0)$. Esto implica que $\Re[1 + g_n(x)] > 0$ y también, de acuerdo con la desigualdad (1.1), que

$$|\mathrm{Log}[1 + g_n(x)]| \leq \frac{3}{2} |g_n(x)| \quad (x \in X,\ n > n_0).$$

Así,

$$h(x) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mathrm{Log}[1 + g_n(x)] \quad (x \in X)$$

converge uniformemente. Como h es continua y X es compacto, se sigue que h es acotada; en particular, existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\Re h(x) < a$ $(x \in X)$. Aplicando el Lema 1.6 encontramos que

$$e^{h(x)} = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} [1 + g_n(x)] \quad (x \in X)$$

converge uniformemente. Por último,

$$f(x) = [1 + g_1(x)] \cdots [1 + g_{n_0}(x)] e^{h(x)} \quad (x \in X),$$

con $e^{h(x)} \neq 0$ $(x \in X)$. Por tanto, si $f(x) = 0$, necesariamente $g_n(x) = -1$ para algún n con $1 \leq n \leq n_0$. ■

Abandonamos ahora la situación general para discutir las funciones analíticas.

Teorema 1.8 *Sea G una región en $\mathbb{C}$, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $H(G)$ tal que $f_n \not\equiv 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(z) - 1]$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en $H(G)$ a una función analítica $f(z)$. Si a es un cero de f, entonces a es un cero de tan sólo un número finito de funciones f_n, y la multiplicidad del cero de f en a es la suma de las multiplicidades de los ceros de las funciones f_n en a.*

Demostración. Ya que $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(z)-1]$ converge absoluta y uniformente en subconjuntos compactos de G, el Lema 1.7 implica que $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absoluta y uniformente en subconjuntos compactos de G; esto es, el producto infinito converge en $H(G)$.

Sea $f(a) = 0$ y elijamos $r > 0$ tal que $\overline{B}(a;r) \subset G$. Por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(z) - 1]$ converge uniformemente en $\overline{B}(a;r)$. De acuerdo con el Lema 1.7, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = f_1(z) \cdots f_n(z) g(z)$, donde g no se anula en $\overline{B}(a;r)$. Esto completa la prueba. ■

Retomemos ahora la discusión del problema original. Supongamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en una región G, sin puntos de acumulación en G (aunque algún término puede repetirse en la sucesión un número finito de veces), y consideremos las funciones $z - a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Por el Teorema 1.8, si podemos encontrar funciones $g_n(z)$ analíticas en G, sin ceros en G, y tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(z - a_n)g_n(z) - 1|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de G, entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (z - a_n)g_n(z)$$

es analítica y tiene ceros únicamente en los puntos $z = a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. La manera más segura de garantizar que $g_n(z)$ nunca se anula es expresarla como $g_n(z) = e^{h_n(z)}$ para alguna función analítica $h_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$. De hecho, si G es simplemente conexo entonces $g_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$ debe ser necesariamente de esta forma.

Las funciones que buscamos fueron introducidas por Weierstrass.

Definición 1.9 *Para $p \in \mathbb{Z}_+$, llamamos* factor elemental *(de Weierstrass) a cualquiera de las siguientes funciones $E_p(z)$:*

$$E_0(z) = 1 - z,$$
$$E_p(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \quad (p \in \mathbb{N}).$$

La función $E_p(z/a)$ $(p \in \mathbb{Z}_+)$ tiene un cero simple en $z = a$, y ningún otro. Además, si $b \in \mathbb{C} \setminus G$ entonces

$$E_p\left(\frac{a-b}{z-b}\right)$$

tiene un cero simple en $z = a$ y es analítica en G. Estas funciones serán usadas para construir funciones analíticas con ceros prefijados y de multiplicidad prefijada, pero primero debemos demostrar una desigualdad que nos permita aplicar el Teorema 1.8 y obtener un producto infinito convergente.

Lema 1.10 *Si* $|z| \le 1$, *entonces* $|1 - E_p(z)| \le |z|^{p+1}$ $(p \in \mathbb{Z}_+)$.

Demostración. Podemos restringir nuestra atención al caso en que $p \ge 1$. Fijado p, sea

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

el desarrollo en serie de potencias de $E_p(z)$ centrado en $z = 0$. Si derivamos la serie de potencias y la expresión original para $E_p(z)$, obtenemos:

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = -z^p \exp\left(z + \ldots + \frac{z^p}{p}\right).$$

La comparación de ambas expresiones da lugar a dos piezas de información sobre los coeficientes a_k. En primer lugar, $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$; en segundo lugar, ya que los coeficientes del desarrollo de $\exp(z + \ldots + z^p/p)$ son todos positivos, $a_k \le 0$ para $k \ge p+1$. Así, $|a_k| = -a_k$ para $k \ge p+1$; esto nos da

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k,$$

o bien

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Luego, para $|z| \le 1$,

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\ &= |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \end{aligned}$$

$$\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k|$$
$$= |z|^{p+1},$$

que es la desigualdad buscada. ■

Antes de resolver el problema de encontrar una función con ceros prefijados en cualquier dominio G (teorema de factorización de Weierstrass: Teorema 2.1) lo resolveremos para el caso en que $G = \mathbb{C}$, pues de esta manera quedará más clara la idea que subyace en la demostración del caso general.

Teorema 1.11 *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. (Esta no es una sucesión de puntos diferentes; pero, por hipótesis, ningún punto se repite un número infinito de veces). Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de enteros no negativos tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty \quad (r > 0), \tag{1.2}$$

entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

converge en $H(\mathbb{C})$. La función f es una función entera con ceros únicamente en los puntos a_n $(n \in \mathbb{N})$. Si z_0 aparece en la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ exactamente m veces, entonces f tiene un cero en z_0 de multiplicidad m. Además, si $p_n = n-1$ entonces se verifica (1.2).

Demostración. Supongamos que existen enteros p_n verificando (1.2). Entonces, por el Lema 1.10,

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

cuando $|z| \leq r$ y $r \leq |a_n|$.

Dado $r > 0$ fijo, existe un entero N tal que $|a_n| \geq r$ siempre que $n \geq N$ (porque $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$). Así, para cada $r > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/a_n)|$ está dominada por la serie convergente (1.2) en el disco $\overline{B}(0; r)$. Esto nos dice que $\sum_{n=1}^{\infty} [1 - E_{p_n}(z/a_n)]$ converge absolutamente en $H(\mathbb{C})$. Por el Teorema 1.8, el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$ converge en $H(\mathbb{C})$.

Demostrar que efectivamente existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de modo que se cumple (1.2) para todo r es una cuestión trivial. Para cada r, existe un entero N tal que $|a_n| > 2r$, siempre que $n \geq N$. Esto nos dice que $(r/|a_n|) < 1/2$ para cada $n \geq N$; por tanto, si $p_n = n-1$ para todo n, el resto de la serie en (1.2) está dominado por $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$. Así, se satisface (1.2). ■

Nótese que el Teorema 1.11 permite una gran flexibilidad a la hora de elegir la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$: si $p_n > n-1$ ($n \in \mathbb{N}$), obtendríamos la misma conclusión. Sin embargo, resulta más ventajoso elegir p_n lo más pequeño posible, pues cuanto menor sea p_n, «más elemental» será el factor $E_{p_n}(z/a_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). A la vista de la serie (1.2), es evidente que el tamaño de los enteros p_n ($n \in \mathbb{N}$) depende de la velocidad con la que $\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a infinito.

Teorema 1.12 *Sean f una función entera y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ los ceros no nulos de f, repetidos según su multiplicidad. Supongamos que f tiene un cero en $z=0$ de orden $m \in \mathbb{Z}_+$ (un cero de orden $m=0$ en $z=0$ significa que $f(0) \neq 0$). Entonces, existen una función entera g y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+$ tales que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(z/a_n\right).$$

Demostración. Por el Teorema 1.11, los enteros $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ pueden ser elegidos de manera que

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(z/a_n\right)$$

tiene los mismos ceros que f, con las mismas multiplicidades. Se desprende que $f(z)/h(z)$ posee singularidades evitables en $0, a_1, a_2, \ldots$. Así, la función f/h es entera, y además carece de ceros. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, existe una función entera g tal que

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$$

[4, Corollary IV.6.17], completando la prueba. ■

2

El teorema de factorización de Weierstrass: ejemplos y aplicaciones

El teorema de factorización de Weierstrass (Teorema 2.1) afirma que todo subconjunto A de una región G, sin puntos de acumulación en G, es el conjunto de ceros de alguna función $f \in H(G)$. Si $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la forma natural de construir f es elegir funciones $f_n \in H(G)$ tales que cada f_n tiene un único cero en a_n $(n \in \mathbb{N})$ y luego considerar $\lim_{n\to\infty} p_n$, donde $p_n = f_1 f_2 \cdots f_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Para ello hay que garantizar que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a alguna $f \in H(G)$, y que la función límite f no se anula excepto en los puntos de A. A tal fin nos apoyaremos en la teoría desarrollada en el capítulo 1.

2.1. Teorema de factorización de Weierstrass

Teorema 2.1 (Factorización de Weierstrass) *Sean G una región y $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de G distintos entre sí, carente de puntos de acumulación en G; y sea $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos. Entonces existe una función analítica f, definida en G, cuyos únicos ceros son los puntos a_j $(j \in \mathbb{N})$. Además, a_j es un cero de f de multiplicidad m_j $(j \in \mathbb{N})$.*

Demostración. Empezaremos mostrando que basta probar este teorema para el caso particular en que existe $R > 0$ satisfaciendo

$$\{z : |z| > R\} \subset G \quad \text{y} \quad |a_j| \leq R \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

Debemos demostrar que, bajo esta hipótesis, existe $f \in H(G)$ cuyos únicos ceros son $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, de manera que la multiplicidad del cero en a_j sea m_j; y con la propiedad adicional de que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 1. \tag{2.2}$$

En efecto, asumiendo que siempre se puede encontrar una tal f para un conjunto satisfaciendo (2.1), sean G_1 un subconjunto abierto arbitrario de $\mathbb{C}$, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de G_1 distintos entre sí y carente de puntos de acumulación, y $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos. Si $\overline{B}(a;r)$ es un disco en G_1 tal que $\alpha_j \notin B(a;r)$ $(j \in N)$, consideramos la transformación de Möbius $Tz = (z-a)^{-1}$. Poniendo $G = T(G_1)$, es fácil ver que G satisface la condición (2.1), donde $a_j = T\alpha_j = (\alpha_j - a)^{-1}$. Si existe una función $f \in H(G)$ con un cero en cada a_j de multiplicidad m_j $(j \in N)$, sin más ceros, y tal que f satisface (2.2), entonces $g(z) = f(Tz)$ es analítica en $G_1 \setminus \{a\}$, con una singularidad evitable en a. Además, g tiene un cero en cada α_j de multiplicidad m_j $(j \in \mathbb{N})$.

Por tanto, asumamos que G satisface (2.1) y definamos una segunda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, que consiste en los puntos de $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ pero en la que cada a_j se repite de acuerdo a su multiplicidad m_j $(j \in N)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $w_n \in \mathbb{C} \setminus G$ tal que

$$|w_n - z_n| = d(z_n, \mathbb{C} \setminus G).$$

Observemos que la hipótesis (2.1) excluye la posibilidad de que $G = \mathbb{C}$ a menos que la sucesión $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ sea finita, en cuyo caso el teorema se demostraría fácilmente. Supondremos entonces que $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es infinita. Ya que $|a_j| \leq R$ $(j \in \mathbb{N})$ y $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación en G, resulta que $\mathbb{C} \setminus G$ es compacto y no vacío, y además

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w_n| = 0.$$

Consideremos las funciones

$$E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N});$$

cada E_n tiene un cero simple en z_n $(n \in \mathbb{N})$. Debemos ver que el producto infinito de estas funciones converge en $H(G)$.

Para ello, sea K un subconjunto compacto de G, de modo que $d(\mathbb{C}\setminus G, K) > 0$. Entonces

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| \leq |z_n - w_n|\,[d(w_n, K)]^{-1} \leq |z_n - w_n|\,[d(\mathbb{C} \setminus G, K)]^{-1} \quad (z \in K).$$

Sigue de aquí que para cada δ, $0 < \delta < 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right| < \delta \quad (z \in K,\ n \geq N).$$

Del Lema 1.10 deducimos que

$$\left|E_n\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n}\right) - 1\right| \leq \delta^{n+1} \quad (z \in K,\ n \geq N). \tag{2.3}$$

Pero esto implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)-1\right]$$

converge absoluta y uniformemente en K. Por el Teorema 1.8,

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)$$

converge en $H(G)$, así que f es una función analítica en G. Además, el Teorema 1.8 implica que los puntos $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ son los únicos ceros de f y, para cada $j\in\mathbb{N}$, m_j es el orden del cero en a_j (porque a_j aparece m_j veces en la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$). Para ver que $\lim_{z\to\infty}f(z)=1$, sea $\varepsilon>0$ arbitrario, y sea $R_1>R$ (R_1 se especificará más adelante). Si $|z|\geq R_1$ entonces, puesto que $|z_n|\leq R$ y $w_n\in\mathbb{C}\setminus G\subset B(0;R)$, se tiene

$$\left|\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right|\leq\frac{2R}{R_1-R}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Por tanto, si elegimos $R_1>R$ de modo que $2R<\delta(R_1-R)$ para algún δ, $0<\delta<1$, se verifica (2.3) para $|z|\geq R_1$ y todo $n\in\mathbb{N}$. En particular

$$\Re E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)>0\quad(|z|\geq R_1,\ n\in\mathbb{N}),$$

así que tiene sentido escribir

$$|f(z)-1|=\left|\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)\right]-1\right|\quad(|z|\geq R_1).\tag{2.4}$$

Por otro lado, (1.1) y (2.3) conducen a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Log}E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)\right|&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\operatorname{Log}E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)\right|\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left|E_n\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)-1\right|\\&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\delta^{n+1}\\&=\frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta}\quad(|z|>R_1).\end{aligned}$$

Si además restringimos δ de modo que $|e^w-1|<\varepsilon$ cuando

$$|w| < \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{1-\delta},$$

la ecuación (2.4) implica que $|f(z)-1| < \varepsilon$ para $|z| \geq R_1$. Esto es, $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$. ■

Uno de los resultados más interesantes que se deduce del Teorema 2.1 es el que expresa (en términos algebraicos) que $M(G)$ es el cuerpo cociente del dominio de integridad $H(G)$. Prescindiendo de la terminología algebraica, el resultado es como sigue.

Corolario 2.2 *Si f es una función meromorfa en un conjunto abierto G, existen funciones g, h, analíticas en G, tales que $f = g/h$.*

Demostración. Sean $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ los polos de f y m_j el orden del polo a_j $(j \in \mathbb{N})$. Por el Teorema 2.1, existe una función h, analítica en G, con un cero de multiplicidad m_j en cada a_j $(j \in \mathbb{N})$ y ningún otro cero más. Así, $g = hf$ tiene singularidades evitables en cada a_j $(j \in \mathbb{N})$, de modo que g es analítica en G. ■

2.2. Factorización de la función seno

En esta sección comenzaremos aplicando el teorema de factorización de Weierstrass a la función $\operatorname{sen} \pi z$. Adoptaremos la siguiente notación: si una suma o un producto infinito están seguidos de un apóstrofo (esto es, $\sum'$ ó $\prod'$), entonces la suma o el producto se toman sobre todos los índices n especificados, excepto $n = 0$. Por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Los ceros de

$$\operatorname{sen} \pi z = \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)$$

son precisamente los enteros; además, cada cero es simple. Ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{r}{n}\right)^2 < \infty \quad (r > 0),$$

en virtud de (1.2) es posible elegir $p_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ en el teorema de factorización de Weierstrass. Así,

$$\operatorname{sen} \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n},$$

o bien, ya que los términos del producto infinito pueden ser reordenados,

$$\operatorname{sen} \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \tag{2.5}$$

para alguna función entera g. Si $f(z) = \operatorname{sen} \pi z$ entonces, atendiendo a [4, Theorem VII.2.1],

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

y la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos del plano que no contienen enteros. Ahora bien [4, Exercise V.2.8],

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \notin \mathbb{Z}).$$

Luego, g debe ser una constante, digamos $g(z) = a$ $(z \in \mathbb{C})$. Sigue de (2.5) que

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \frac{e^a}{\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (0 < |z| < 1).$$

Haciendo $z \to 0$ encontramos que $e^a = \pi$. Se concluye que

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \tag{2.6}$$

donde la convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

A continuación consideramos algunas aplicaciones de la factorización anterior.

Ejemplo 2.1. Se tiene:

$$\cos \pi z = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right] \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Resolución. Basta combinar (2.6) con la identidad trigonométrica

$$\cos \pi z = \frac{\operatorname{sen} 2\pi z}{2 \operatorname{sen} \pi z} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

■

Ejemplo 2.2. Admitiendo (2.6) y derivando logarítmicamente esta expresión obtenemos la siguiente, que ya encontramos en la deducción de (2.6) y merece ser destacada:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (z \notin \mathbb{Z}). \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.3. A través de (2.7), la factorización (2.6) permite inferir la clásica fórmula de Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolución. Derivando (2.7) resulta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} \quad (z \notin \mathbb{Z}). \tag{2.8}$$

Restando $1/z^2$ en ambos miembros de (2.8) y pasando al límite cuando $z \to 0$:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right).$$

Usando el desarrollo de McLaurin del seno:

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z} - \frac{1}{z^2} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{\pi^2 z^2 - \operatorname{sen}^2 \pi z}{z^2 \operatorname{sen}^2 \pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi^4 z^4/3}{\pi^2 z^4} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Por tanto:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

■

Ejemplo 2.4. De la anterior factorización de $\operatorname{sen} \pi z$ se recupera la fórmula de Wallis para el número π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Resolución. Haciendo $z = 1/2$ en (2.6) encontramos que

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right),$$

de donde

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

■

Nótese que, alternativamente:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)},$$

o bien:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}},$$

expresión que también puede ser obtenida de la aproximación de Stirling.

Concluimos esta sección con otra factorización de la función seno debida a Euler:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2^n} \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{2.9}$$

donde la convergencia es absoluta y uniforme sobre compactos del plano.

En efecto, iterando la fórmula para el seno del ángulo doble

$$\operatorname{sen} z = 2 \operatorname{sen} \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2} \quad (z \in \mathbb{C})$$

resulta, para $N \in \mathbb{N}$, que

$$\operatorname{sen} z = 2^N \operatorname{sen} \frac{z}{2^N} \prod_{n=1}^{N} \cos \frac{z}{2^n} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} k \operatorname{sen} \frac{z}{k} = z;$$

por tanto, tenemos (2.9). Para ver que la convergencia es absoluta y uniforme sobre compactos, advertimos que

$$|\cos z - 1| \leq C|z|^2 \quad (|z| \leq 1)$$

para una cierta constante $C > 0$. Luego, si $|z| \leq R$ y si $2^n \geq R$,

$$\left|\cos \frac{z}{2^n} - 1\right| \leq C \frac{R^2}{2^{2n}};$$

ahora basta aplicar el Lema 1.7.

Ejemplo 2.5. La derivada logarítmica de la expresión (2.9) proporciona la identidad

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{z}{2^n} \quad (z \neq \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots).$$

Ejemplo 2.6. La factorización (2.9) permite recuperar la fórmula de Viète para el número π:

$$1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots. \tag{2.10}$$

Resolución. Particularizando $z = \pi/2$ en (2.9):

$$1 = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

y usando recursivamente que

$$\cos\frac{x}{2} = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{1/2} \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right),$$

ya se concluye (2.10). ■

2.3. La función Gamma de Euler

Explicitamos ahora un argumento que hemos aplicado implícitamente en algunos ejemplos anteriores. Sea G un subconjunto abierto del plano, y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en G. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $H(G)$ a f y f no es idénticamente nula, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $M(G)$. Ya que $d(z_1, z_2) = d(1/z_1, 1/z_2)$, donde d es la métrica esférica en $\mathbb{C}_\infty$ [4, Equation VII.3.1], sigue que $\{1/f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $1/f$ en $M(G)$. Es fácil ver que $\{1/f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $1/f$ en cualquier conjunto compacto donde ninguna f_n $(n \in \mathbb{N})$ se anule.

Puesto que, por el Teorema 1.11, el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$$

converge en $H(\mathbb{C})$ a una función entera que sólo tiene ceros simples en $-1, -2, \ldots$, la anterior discusión da como resultado que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n} \tag{2.11}$$

converge en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$ a una función con polos simples en $-1, -2, \ldots$.

Definición 2.3 *La* función Gamma *es la función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *con polos simples en* $0, -1, -2, \ldots$ *definida por*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \tag{2.12}$$

donde la constante γ *se elige de modo que* $\Gamma(1) = 1$.

Lo primero que debemos hacer es mostrar que la constante γ existe. Sustituyendo $z = 1$ en (2.11) obtenemos un número finito

$$c = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n},$$

el cual es claramente positivo. Sea $\gamma = \ln c$; con esta elección de γ, la ecuación (2.12) para $z = 1$ da $\Gamma(1) = 1$. Esta constante se llama *constante de Euler-Mascheroni* y satisface

$$e^{\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{1/n}. \tag{2.13}$$

Ya que ambos miembros de la ecuación (2.13) involucran solamente números reales positivos y el logaritmo real es continuo, podemos aplicarlo a los dos miembros de (2.13) para obtener

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-1} e^{1/k} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) \right].
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\ln n$ al término general de esta sucesión y usando el hecho de que

$$\lim_{n \to \infty} \ln \frac{n}{n+1} = 0,$$

nos vemos conducidos a la expresión

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n \right]. \tag{2.14}$$

2.3.1. Fórmula de Gauss y ecuación funcional

La ecuación (2.14) puede ser usada para aproximar γ. Esta fórmula también se usa para deducir otra expresión de la función Γ. Por la definición de Γ,

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{k e^{z/k}}{z+k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\gamma z} n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \exp\left[z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$e^{-\gamma z} \exp\left[z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right] = n^{z} \exp\left[z\left(-\gamma+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\right].$$

Se obtiene así la siguiente:

Proposición 2.4 (Fórmula de Gauss) *Para* $z \neq 0, -1, \ldots,$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{2.15}$$

La fórmula de Gauss facilita la deducción de la ecuación funcional satisfecha por la función Gamma.

Proposición 2.5 (Ecuación funcional) *Para* $z \neq 0, -1, \ldots,$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{2.16}$$

Demostración. Sustituyendo $z+1$ por z en (2.15) resulta

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n+1)} \\ &= z \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)} \frac{n}{z+n+1}\right] \\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n+1} = 1.$$

∎

Consideremos ahora $\Gamma(z+2)$, $z \neq 0, -1, \ldots$; por la ecuación funcional tenemos que

$$\Gamma(z+2) = \Gamma((z+1)+1) = (z+1)\Gamma(z+1).$$

Una segunda aplicación de (2.16) da

$$\Gamma(z+2) = z(z+1)\Gamma(z).$$

De hecho, iterando este proceso:

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\Gamma(z) \quad (n \in \mathbb{Z}_+,\ z \neq 0, -1, \ldots). \tag{2.17}$$

En particular, para $z = 1$:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Esto es, la función Γ es analítica en el semiplano derecho y coincide con la función factorial en los enteros. Por tanto, podemos considerar la función Gamma como una extensión del factorial al plano complejo; alternativamente, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, está justificado definir $z! = \Gamma(z+1)$.

Como se ha señalado, Γ tiene polos simples en $0, -1, -2, \ldots$; queremos encontrar el residuo de Γ en cada uno de ellos. A tal fin, recordemos [4, Proposition V.2.4] que

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Pero, por (2.17):

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

Luego, haciendo $z \to -n$ obtenemos:

$$\operatorname{Res}(\Gamma; -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Por otra parte,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)} \quad (z \neq 0, -1, \ldots), \tag{2.18}$$

y la convergencia es uniforme en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, \ldots\}$. En virtud de [4, Theorem VII.2.1], para calcular la derivada de Γ'/Γ podemos derivar la serie (2.18) término a término. Así,

$$\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \quad (z \neq 0, -1, \ldots). \tag{2.19}$$

Las fórmulas (2.18) y (2.19) nos permiten caracterizar la función Gamma de una manera particularmente estética.

2.3.2. Teorema de Bohr-Mollerup

La definición de Γ implica que $\Gamma(x) > 0$ si $x > 0$. Así, $\ln \Gamma(x)$ está bien definido para $x > 0$ y, conforme a (2.19), la segunda derivada de $\ln \Gamma(x)$ es siempre positiva. De acuerdo con [4, Proposition VI.3.4], esto implica que la función Gamma es logarítmicamente convexa en $(0, \infty)$; esto es, $\ln \Gamma(x)$ es convexa en ese intervalo. Pues bien: esta propiedad, junto con la ecuación funcional y el hecho de que $\Gamma(1) = 1$, caracterizan completamente a la función Gamma.

Teorema 2.6 (Bohr-Mollerup) *Sea f una función definida en $(0, \infty)$ tal que $f(x) > 0$ $(x > 0)$. Supongamos que f tiene las siguientes propiedades:*

a) la función $\ln f(x)$ es convexa;
b) $f(x+1) = xf(x)$ $(x > 0)$;
c) $f(1) = 1$.

Entonces $f(x) = \Gamma(x)$ $(x > 0)$.

Demostración. Comenzamos observando que, puesto que f cumple las propiedades b) y c), la función también satisface

$$f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x) \tag{2.20}$$

para todo entero positivo n. Por tanto, si $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leq 1$, esta ecuación nos dará que f y Γ son idénticas en todo punto.

Sean $0 < x \leq 1$ y n un entero mayor que 2; la condición a) permite escribir:

$$\frac{\ln f(n-1) - \ln f(n)}{(n-1)-n} \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln f(n)}{(x+n)-n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{(n+1)-n}$$

(cf. [4, Exercise VI.3.3]). Por (2.20), tenemos que $f(m) = (m-1)!$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Así, las desigualdades anteriores quedan:

$$-\ln(n-2)! + \ln(n-1)! \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln(n-1)!}{x} \leq \ln n! - \ln(n-1)!;$$

o bien,

$$x \ln(n-1) \leq \ln f(x+n) - \ln(n-1)! \leq x \ln n.$$

Añadiendo $\ln(n-1)!$ a cada término de esta cadena de desigualdades y tomando exponenciales resulta:

$$(n-1)^x\,(n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x\,(n-1)!.$$

Aplicando ahora (2.20) para calcular $f(x+n)$, obtenemos:

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x\,(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

$$= \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,\frac{x+n}{n}.$$

Ya que el término intermedio de la cadena, $f(x)$, no involucra a n y puesto que la desigualdad se verifica para todos los enteros $n \geq 2$, podemos variar los enteros del primer y tercer miembros independientemente el uno del otro manteniendo la desigualdad. En particular, $n+1$ puede ser sustituido por n en el primer miembro mientras que el tercero permanece inalterado. Procediendo así, encontramos que

$$\frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,\frac{x+n}{n}$$

para cualesquiera $n \geq 2$ y $x \in (0,1]$. Ahora, tomamos límite cuando $n \to \infty$. Como $\lim_{n\to\infty} (x+n)/n = 1$, la fórmula de Gauss (Proposición 2.4) implica que $\Gamma(x) = f(x)$ para $0 < x \leq 1$. El resultado ya se concluye aplicando (2.20) y la ecuación funcional (Proposición 2.5). ■

2.3.3. Expresión integral

Teorema 2.7 *Si* $\Re z > 0$, *entonces*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

El integrando del Teorema 2.7 se comporta mal en $t = 0$ y $t = \infty$, por lo que es necesario dar sentido a la ecuación anterior. En vez de enunciar una definición formal de convergencia de integrales impropias, utilizaremos el lema siguiente para deducir las propiedades de esta integral particular.

Lema 2.8 *Sea* $S = \{z : a \leq \Re z \leq A\}$, *con* $0 < a < A < \infty$.

a) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| < \varepsilon \quad (z \in S,\ 0 < \alpha < \beta < \delta).$$

b) Para todo $\varepsilon > 0$, *existe* $\kappa > 0$ *tal que*

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| < \varepsilon \quad (z \in S,\ \beta > \alpha > \kappa).$$

Demostración. Para probar a), advertimos que si $0 < t \leq 1$ y $z \in S$ entonces $(\Re z - 1)\ln t \leq (a-1)\ln t$; ya que $e^{-t} \leq 1$,

$$\left|e^{-t} t^{z-1}\right| \leq t^{\Re z - 1} \leq t^{a-1}.$$

Por tanto, si $0 < \alpha < \beta < 1$ entonces

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| \leq \int_\alpha^\beta t^{a-1}\, dt = \frac{1}{a}(\beta^a - \alpha^a)$$

para todo $z \in S$. Si $\varepsilon > 0$, podemos elegir δ, $0 < \delta < 1$, tal que $a^{-1}(\beta^a - \alpha^a) < \varepsilon$ para $|\alpha - \beta| < \delta$. Con esto queda probado a).

Para demostrar b), observamos que si $z \in S$ y $t \geq 1$, es $|t^{z-1}| \leq t^{A-1}$. Ya que $t^{A-1}e^{-t/2}$ es continua en $[1, \infty)$ y converge a cero cuando $t \to \infty$, existe una constante c tal que $t^{A-1}e^{-t/2} \leq c$ para todo $t \geq 1$. De aquí,

$$\left| e^{-t} t^{z-1} \right| \leq c e^{-t/2}$$

para cualesquiera $z \in S$ y $t \geq 1$. Si $\beta > \alpha > 1$, entonces

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{-t} t^{z-1}\, dt \right| \leq c \int_\alpha^\beta e^{-t/2}\, dt = 2c(e^{-\alpha/2} - e^{-\beta/2}).$$

De nuevo, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $\kappa > 1$ tal que

$$\left| 2c(e^{-\alpha/2} - e^{-\beta/2}) \right| < \varepsilon$$

cuando $\alpha, \beta > \kappa$, obteniéndose así b). ■

Los resultados del Lema 2.8 encierran el concepto de integral uniformemente convergente. En efecto, si consideramos las integrales

$$\int_\alpha^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad (0 < \alpha < 1),$$

entonces el apartado a) del Lema 2.8 expresa que esas integrales satisfacen el criterio de Cauchy cuando $\alpha \to 0$. Esto es, la diferencia entre dos cualesquiera de ellas será arbitrariamente pequeña si se toman α y β suficientemente próximos a cero. Se tiene una interpretación similar para los integrales

$$\int_1^\alpha e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad (\alpha > 1).$$

La siguiente proposición formaliza esta discusión.

Proposición 2.9 *Si $G = \{z : \Re z > 0\}$ y*

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad (z \in G,\ n \in \mathbb{N}),$$

entonces cada f_n $(n \in \mathbb{N})$ es analítica en G y la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge en $H(G)$.

Demostración. Pensando en $f_n(z)$ como la integral de $\varphi(t,z) = e^{-t}t^{z-1}$ a lo largo del segmento $[1/n, n]$ y aplicando [4, Exercise IV.2.2], concluimos que f_n es analítica.

Ahora, si K es un subconjunto compacto de G, existen números reales positivos a y A tales que $K \subset \{z : a \leq \Re z \leq A\}$. Ya que

$$f_m(z) - f_n(z) = \int_{1/m}^{1/n} e^{-t}t^{z-1}\,dt + \int_n^m e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

para $m > n$, el Lema 2.8 y [4, Lemma VII.1.7] implican que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $H(G)$. Pero $H(G)$ es completo [4, Corollary VII.2.3], y por lo tanto $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger. ■

Si f es el límite de las funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la Proposición 2.9, definimos la integral como este límite. Es decir:

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt \quad (\Re z > 0).$$

Para demostrar que la función $f(z)$ es efectivamente la función Gamma cuando $\Re z > 0$, sólo tenemos que comprobar que $f(x) = \Gamma(x)$ $(x \geq 1)$; como $[1,\infty)$ posee puntos de acumulación en el semiplano derecho y tanto f como Γ son analíticas, seguirá entonces que f debe ser Γ [4, Corollary IV.3.8]. Ahora, observemos que tras realizar sucesivas integraciones por partes sobre $(1-t/n)^n t^{x-1}$ se obtiene la expresión

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

que, por la fórmula de Gauss (Proposición 2.4), converge a $\Gamma(x)$ cuando $n \to \infty$. Si podemos mostrar que la integral en esta ecuación converge a

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = f(x)$$

cuando $n \to \infty$, quedará probado el Teorema 2.7. Este es, en efecto, el caso, como se infiere del siguiente lema:

Lema 2.10 *Se verifican los dos enunciados siguientes:*

a) *La sucesión*

$$\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

converge a e^z en $H(\mathbb{C})$.

b) *Si $t \geq 0$, entonces*

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \quad (n > t).$$

Demostración. Para probar a), sea K un subconjunto compacto del plano. Entonces, $|z| < n$ para todo $z \in K$ y n suficientemente grande. Por el Lema 1.6, basta demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = z$$

uniformemente para $z \in K$. Recordemos que

$$\operatorname{Log}(1 + w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k} \quad (|w| < 1).$$

Sea $n > |z|$ para todo $z \in K$; si z es cualquier punto de K, entonces

$$n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = z - \frac{1}{2}\frac{z^2}{n} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{n^2} - \ldots.$$

Por tanto:

$$n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z = z\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^2 - \ldots\right]. \tag{2.21}$$

Tomando valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\left|n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z}{n}\right) - z\right| &\leq |z| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left|\frac{z}{n}\right|^{k-1} \\
&\leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{n}\right|^{k} \\
&= \frac{|z|^2}{n} \frac{1}{1 - |z/n|} \\
&\leq \frac{R^2}{n - R},
\end{aligned}$$

donde $R \geq |z|$ para todo $z \in K$. Si $n \to \infty$, encontramos que esta diferencia tiende a cero uniformemente para $z \in K$.

Para demostrar b), sea $0 \leq t < n$ y sustituyamos z por $-t$ en (2.21). Esto da

$$n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t = -t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{t}{n}\right)^{k-1} \leq 0.$$

Así,

$$n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t;$$

y ya que la exponencial es una función monótona, queda probado b). ∎

Demostración (Teorema 2.7). Fijemos $x > 1$, y sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo con el Lema 2.8, podemos elegir $\kappa > 0$ tal que

$$\int_{\kappa}^{r} e^{-t} t^{x-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{4} \quad (r > \kappa). \tag{2.22}$$

Sea n cualquier entero mayor que κ, y sea f_n la función definida en la Proposición 2.9. Entonces

$$\begin{aligned} f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt = &- \int_0^{1/n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \\ &+ \int_{1/n}^{n} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1}\, dt. \end{aligned}$$

Ahora, por los Lemas 2.10 y 2.8,

$$\int_0^{1/n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \le \int_0^{1/n} e^{-t} t^{x-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.23}$$

para n suficientemente grande. También, si n es suficientemente grande, el apartado a) del Lema 2.10 da

$$\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - e^{-t} \right| \le \frac{\varepsilon}{4M\kappa}$$

para $t \in [0, \kappa]$, donde $M = \int_0^{\kappa} t^{x-1}\, dt$. Luego,

$$\left| \int_{1/n}^{\kappa} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1}\, dt \right| \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Usando el Lema 2.10 y (2.22),

$$\left| \int_{\kappa}^{n} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{x-1}\, dt \right| \le 2 \int_{\kappa}^{n} e^{-t} t^{x-1}\, dt \le \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n > \kappa$. Si combinamos esta desigualdad con (2.23) y (2.24), obtenemos

$$\left| f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \right| < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \right] = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt - \Gamma(x). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del Teorema 2.7. ∎

Como aplicación del Teorema 2.7 y del hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, nótese que

$$\sqrt{\pi} = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt.$$

Efectuando el cambio de variable $t = s^2$ encontramos que

$$\sqrt{\pi} = 2 \int_0^\infty e^{-s^2}\, ds,$$

de donde

$$\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Esta integral es de uso frecuente en teoría de probabilidades.

2.4. La función zeta de Riemann

Sean z un número complejo y n un entero positivo. Entonces,

$$|n^z| = |e^{z \ln n}| = e^{\Re z \ln n}.$$

Así:

$$\sum_{k=1}^{n} |k^{-z}| = \sum_{k=1}^{n} e^{-\Re z \ln k} = \sum_{k=1}^{n} k^{-\Re z}.$$

Por tanto, si $\Re z \geq 1 + \varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^{n} |k^{-z}| \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-(1+\varepsilon)};$$

esto es, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converge absoluta y uniformemente en $\{z : \Re z \geq 1+\varepsilon\}$. En particular, esta serie converge en $H(\{z : \Re z > 1\})$ a una función analítica $\zeta(z)$.

Definición 2.11 *La* función zeta de Riemann *está definida por la ecuación*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad (\Re z > 1).$$

2.4.1. Relación con la función Gamma

Al igual que la función Gamma, la función zeta ha sido objeto, desde su introducción, de una enorme cantidad de investigaciones matemáticas. El análisis de la función zeta ha tenido un efecto profundo en la teoría de números y esto, a su vez, ha inspirado más trabajo sobre la propia función zeta. De hecho, uno de los problemas abiertos más famosos de las Matemáticas es la localización de los ceros de la función zeta.

Pretendemos encontrar una relación entre las funciones zeta y Gamma. Para ello, fijamos z tal que $\Re z > 0$ y, apelando al Teorema 2.7, escribimos:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Efectuando en esta integral el cambio de variable $t = nu$ y renombrando u como t, obtenemos:

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^\infty e^{-nt} t^{z-1}\, dt;$$

esto es,

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-nt} t^{z-1}\, dt.$$

Si $\Re z > 1$ y sumamos esta ecuación sobre todos los $n \in \mathbb{N}$, resulta:

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^\infty n^{-z}\Gamma(z) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-nt} t^{z-1}\, dt. \tag{2.25}$$

Queremos demostrar que podemos intercambiar la suma infinita con la integral. A tal fin necesitaremos el siguiente análogo del Lema 2.8.

Lema 2.12 *a) Sea $S = \{z : \Re z \geq a\}$, donde $a > 1$. Si $\varepsilon > 0$, existe un número δ, $0 < \delta < 1$, tal que*

$$\left| \int_\alpha^\beta (e^t - 1)^{-1} t^{z-1}\, dt \right| < \varepsilon \quad (z \in S,\ \delta > \beta > \alpha).$$

b) Sea $S = \{z : \Re z \leq A\}$, donde $-\infty < A < \infty$. Si $\varepsilon > 0$, existe $\kappa > 1$ tal que

$$\left| \int_\alpha^\beta (e^t - 1)^{-1} t^{z-1}\, dt \right| < \varepsilon \quad (z \in S,\ \beta > \alpha > \kappa).$$

Demostración. a) Ya que $e^t - 1 \geq t$ para todo $t \geq 0$ tenemos que, para $0 < t \leq 1$ y $z \in S$,

$$\left|(e^t - 1)^{-1} t^{z-1}\right| \leq t^{a-2}.$$

Como $a > 1$, la integral $\int_0^1 t^{a-2}\, dt$ es finita, y por tanto se puede encontrar un δ satisfaciendo a).

b) Si $t \geq 1$ y z es cualquier punto de S entonces, al igual que en la prueba del Lema 2.8 b), existe una constante c tal que

$$\left|(e^t-1)^{-1}t^{z-1}\right| \leq (e^t-1)^{-1}t^{A-1} \leq ce^{t/2}(e^t-1)^{-1}.$$

Y como $e^{t/2}(e^t-1)^{-1}$ es integrable en $[1,\infty)$, es posible encontrar el κ requerido.

∎

Corolario 2.13 *a) Si $S=\{z : a \leq \Re z \leq A\}$, donde $1<a<A<\infty$, entonces la integral*

$$\int_0^\infty (e^t-1)^{-1}t^{z-1}\,dt$$

converge uniformemente en S.

b) Si $S=\{z : \Re z \leq A\}$, donde $-\infty<A<\infty$, entonces la integral

$$\int_1^\infty (e^t-1)^{-1}t^{z-1}\,dt$$

converge uniformemente en S.

Proposición 2.14 *Se tiene:*

$$\zeta(z)\Gamma(z)=\int_0^\infty (e^t-1)^{-1}t^{z-1}\,dt \quad (\Re z>1).$$

Demostración. Por el Corolario 2.13, la integral anterior es una función analítica en la región $\{z : \Re z>1\}$. Así, es suficiente demostrar que $\zeta(z)\Gamma(z)$ es igual a esta integral para $z=x>1$.

Por el Lema 2.12, existen números α y β, $0<\alpha<\beta<\infty$, tales que

$$\int_0^\alpha (e^t-1)^{-1}t^{x-1}\,dt<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\int_\beta^\infty (e^t-1)^{-1}t^{x-1}\,dt<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-kt} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt}=(e^t-1)^{-1}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\alpha e^{-nt}t^{x-1}\,dt<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} e^{-nt} t^{x-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Usando (2.25),

$$\left| \zeta(x)\Gamma(x) - \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1}\, dt \right|$$
$$\leq \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt} t^{x-1}\, dt - \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1}\, dt \right|.$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$ converge a $(e^t - 1)^{-1}$ uniformemente en $[\alpha, \beta]$, por lo que el segundo miembro es exactamente ε. ■

2.4.2. Ecuación funcional de Riemann

Nos proponemos usar la Proposición 2.14 para extender el dominio de definición de $\zeta(z)$ a $\{z : \Re z > -1\}$ (y, eventualmente, a todo $\mathbb{C}$). Para ello, consideremos el desarrollo de Laurent de $(e^z - 1)^{-1}$ centrado en el origen:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{2.26}$$

para ciertas constantes $a_1, a_2, \ldots$. Así, $(e^t - 1)^{-1} - t^{-1}$ permanece acotada en un entorno de $t = 0$. Pero esto implica que la integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1}\, dt$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos del semiplano derecho $\{z : \Re z > 0\}$, y consecuentemente representa una función analítica en dicho semiplano. Se infiere que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1}\, dt + (z-1)^{-1} + \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt, \tag{2.27}$$

y (usando el Corolario 2.13), cada uno de esos sumandos, excepto $(z-1)^{-1}$, es analítico en el semiplano derecho. Así, es posible definir $\zeta(z)$ para $\Re z > 0$ haciéndola igual a $[\Gamma(z)]^{-1}$ veces el segundo miembro de (2.27). De este modo, $\zeta(z)$ es meromorfa en el semiplano derecho, con un polo simple en 1 ($\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ diverge), cuyo residuo es 1.

Supongamos ahora que $0 < \Re z < 1$; entonces

$$(z-1)^{-1} = -\int_1^{\infty} t^{z-2}\, dt.$$

Incorporando esto a la ecuación (2.27) resulta

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}\, dt \quad (0 < \Re z < 1). \tag{2.28}$$

Considerando de nuevo el desarrollo (2.26), vemos que $(e^t - 1)^{-1} - t^{-1} + 1/2 \leq ct$ para alguna constante c y todo $t \in [0,1]$. Así, la integral

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1}\, dt$$

es uniformemente convergente en subconjuntos compactos de $\{z : \Re z > -1\}$. Además, ya que

$$\lim_{t\to\infty} t\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right) = 1,$$

existe una constante c' tal que

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \leq \frac{c'}{t} \quad (t \geq 1).$$

Se concluye que la integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}\, dt$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\{z : \Re z < 1\}$. Combinando estas dos últimas integrales con la ecuación (2.28) obtenemos:

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) = &\int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{z-1}\, dt \\ &- \frac{1}{2z} + \int_1^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) t^{z-1}\, dt \quad (0 < \Re z < 1).\end{aligned} \tag{2.29}$$

Puesto que ambas integrales convergen en la banda $-1 < \Re z < 1$, es posible usar (2.29) para definir $\zeta(z)$ en $\{z : -1 < \Re z < 1\}$. ¿Qué ocurre en $z = 0$? Ya que aparece el término $(2z)^{-1}$ en el segundo miembro de (2.29), ¿tendrá $\zeta(z)$ un polo en $z = 0$? La respuesta es negativa. Para definir $\zeta(z)$, debemos dividir (2.29) por $\Gamma(z)$. Tras la división, el término en cuestión se convierte en $[2z\Gamma(z)]^{-1} = [2\Gamma(z+1)]^{-1}$, que es analítico en $z = 0$. Por tanto, si $\zeta(z)$ está definida así en la banda $\{z : -1 < \Re z < 1\}$, entonces es analítica en ella. Y si combinamos esto con (2.27), concluimos que $\zeta(z)$ está definida para $\Re z > -1$, con un polo simple en $z = 1$.

Ahora, si $-1 < \Re z < 0$ entonces

$$\int_1^\infty t^{z-1}\, dt = -\frac{1}{z};$$

insertando esta expresión en (2.29):

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1}\, dt \quad (-1 < \Re z < 0). \tag{2.30}$$

Pero

$$\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{it}{2}.$$

Un cálculo directo [4, Exercise V.2.8] muestra que

$$\operatorname{ctg} \frac{it}{2} = \frac{2}{it} - 4it \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2} \quad (t \neq 0).$$

Así:

$$\left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}.$$

Aplicando esto a (2.30):

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= 2 \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2} \right) t^z\, dt \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{t^z}{t^2 + 4n^2\pi^2}\, dt \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{z-1} \int_0^\infty \frac{t^z}{t^2 + 1}\, dt \\
&= 2(2\pi)^{z-1} \zeta(1 - z) \int_0^\infty \frac{t^z}{t^2 + 1}\, dt \quad (-1 < \Re z < 0).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Dado un número real x con $-1 < x < 0$, el cambio de variable $s = t^2$ conduce a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2 + 1}\, dt &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{s^{(x-1)/2}}{s + 1}\, ds \\
&= \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi(1 - x)}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi x}{2}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

[4, Example V.2.12]. Ahora bien [4, Exercise VII.7.2],

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(1 - x)}{\pi} \operatorname{sen} \pi x = \frac{\Gamma(1 - x)}{\pi} \left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right).$$

Combinando esto con (2.31) y (2.32), desembocamos en la

Proposición 2.15 (Ecuación funcional de Riemann) *Se cumple:*

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\operatorname{sen}\frac{\pi z}{2} \quad (-1 < \Re z < 0). \tag{2.33}$$

Realmente, la ecuación (2.33) ha sido probada para $x \in (-1, 0)$; pero, ya que ambos miembros de (2.33) son analíticos en la banda $-1 < \Re z < 0$, se verifica (2.33). Un argumento similar muestra que la ecuación funcional de Riemann (2.33) se extiende a $-1 < \Re z < 1$. Por último, observamos que el segundo miembro de (2.33) es analítico en el semiplano izquierdo $\Re z < 0$, de manera que podemos usar (2.33) para extender la definición de $\zeta(z)$ a $\Re z < 0$. En resumen:

Teorema 2.16 *La función $\zeta(z)$ se puede definir como una función meromorfa en el plano con un único polo simple en $z = 1$ y $\operatorname{Res}(\zeta; 1) = 1$. Para $z \neq 1$, $\zeta(z)$ satisface la ecuación funcional de Riemann (2.33).*

2.4.3. La Hipótesis de Riemann

Ya que $\Gamma(1-z)$ tiene polos en $z = 1, 2, \ldots$ y $\zeta(z)$ es analítica en $z = 2, 3, \ldots$ sabemos, por la ecuación funcional de Riemann, que

$$\zeta(1-z)\operatorname{sen}\frac{\pi z}{2} = 0 \quad (z = 2, 3, \ldots). \tag{2.34}$$

Además, ya que el polo de $\Gamma(1-z)$ en $z = 2, 3, \ldots$ es simple, cada uno de los ceros de (2.34) debe ser simple. Y como $\operatorname{sen}(\pi z/2) = 0$ siempre que z es un entero par, necesariamente $\zeta(1-z) = 0$ para $z = 3, 5, \ldots$. Esto es, $\zeta(z) = 0$ para $z = -2, -4, -6, \ldots$. Un razonamiento similar muestra que $\zeta(z)$ no tiene otros ceros fuera de la banda cerrada $\{z : 0 \leq \Re z \leq 1\}$.

Definición 2.17 *Los puntos $z = -2, -4, \ldots$ se denominan* ceros triviales *de $\zeta(z)$, mientras que la banda $\{z : 0 \leq \Re z \leq 1\}$ es llamada* banda crítica.

Ahora, estamos en condiciones de enunciar una de las más célebres cuestiones abiertas de todas las Matemáticas. ¿Es cierta la siguiente conjetura?

Hipótesis 2.18 (Riemann) *Si z es un cero de la función $\zeta(z)$ en la banda crítica, entonces $\Re z = 1/2$.*

Es sabido que no existen ceros de $\zeta(z)$ en la recta $\Re z = 1$ (y, por la ecuación funcional, tampoco en $\Re z = 0$), mientras que hay un número infinito de ceros en la recta $\Re z = 1/2$. Pero todavía nadie ha podido demostrar que $\zeta(z)$ tiene algún cero fuera de la recta $\Re z = 1/2$, ni tampoco que todos los ceros deben estar sobre ella.

Una resolución positiva de la Hipótesis de Riemann tendría numerosos efectos beneficiosos en la teoría de números. La conexión entre la función $\zeta(z)$ y la teoría de números descansa en el siguiente teorema.

Teorema 2.19 (Euler) *Si* $\Re z > 1$, *entonces*

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}},$$

donde $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es la sucesión de los números primos.*

Demostración. En primer lugar, usamos la serie geométrica para escribir

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} p_n^{-mz} \tag{2.35}$$

cuando $n \in \mathbb{N}$. Ahora, si $n \in \mathbb{N}$ y tomamos el producto de los términos $\left(1 - p_k^{-z}\right)^{-1}$ para $1 \leq k \leq n$ entonces, por la ley distributiva de la multiplicación y por (2.35),

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} n_j^{-z},$$

donde $n_1, n_2, \ldots$ son todos los enteros que pueden ser factorizados como un producto de potencias de los números primos $p_1, \ldots, p_n$ únicamente. (La razón por la que ningún número n_j^{-z} tiene un coeficiente distinto de la unidad en este desarrollo es que la factorización de n_j en producto de primos es única). Sin más que hacer $n \to \infty$ logramos el resultado que se buscaba. ■

2.5. Un problema de interpolación

El teorema de Mittag-Leffler [10, Theorem 13.10] establece que es posible construir funciones meromorfas con polos arbitrariamente preasignados:

Teorema 2.20 (Mittag-Leffler) *Sean* G *un abierto del plano,* $A \subset G$ *sin puntos de acumulación en* G*, y supongamos que a cada* $\alpha \in A$ *se le asocian un entero positivo* $m(\alpha)$ *y una función racional*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z - \alpha)^{-j}.$$

Entonces existe una función f*, meromorfa en* G*, cuya parte principal en cada* $\alpha \in A$ *es* P_α *y que no tiene otros polos en* G*.*

La combinación del teorema de Mittag-Leffler (Teorema 2.20) con el teorema de factorización de Weierstrass (Teorema 2.1) permite resolver el siguiente problema: dados un abierto $G \subset \mathbb{C}$ y un conjunto arbitrario $A \subset G$, sin puntos de acumulación en G, ¿existe una función $f \in H(G)$ que tome valores prefijados en cada punto de A? No sólo la respuesta a esta cuestión es afirmativa, sino que incluso podemos prescribir un número finito de derivadas en cada punto de A.

Teorema 2.21 *Supongamos que $G \subset \mathbb{C}$ es abierto, que $A \subset G$ carece de puntos de acumulación en G, y que a cada $\alpha \in A$ se le asocian un entero positivo $m(\alpha)$ y números complejos $w_{n,\alpha}$ $(0 \le n \le m(\alpha))$. Entonces existe $f \in H(G)$ tal que*

$$f^{(n)}(\alpha) = n!\, w_{n,\alpha} \quad (\alpha \in A,\ 0 \le n \le m(\alpha)).$$

Demostración. Por el Teorema 2.1, existe $g \in H(G)$, cuyos únicos ceros están en A, tal que el orden del cero de g en cada $\alpha \in A$ es $m(\alpha)+1$. Afirmamos que podemos asociar a cada $\alpha \in A$ una función P_α, de la forma

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{1+m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j},$$

tal que gP_α admite el desarrollo en serie

$$g(z)P_\alpha(z) = w_{0,\alpha} + w_{1,\alpha}(z-\alpha) + \ldots + w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)} + \ldots$$

en algún disco centrado en α.

Por simplicidad, pongamos $\alpha = 0$ y $m(\alpha) = m$, y omitamos los subíndices α. Para z próximo a cero tenemos

$$g(z) = b_1 z^{m+1} + b_2 z^{m+2} + \ldots,$$

donde $b_1 \neq 0$. Si

$$P(z) = c_1 z^{-1} + \ldots + c_{m+1} z^{-m-1},$$

entonces

$$g(z)P(z) = (c_{m+1} + c_m z + \ldots + c_1 z^m)\,(b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + \ldots). \tag{2.36}$$

Los b's están dados, y queremos elegir los c's tales que

$$g(z)P(z) = w_0 + w_1 z + \ldots + w_m z^m + \ldots. \tag{2.37}$$

Si comparamos los coeficientes de $1, z, \ldots, z^m$ en (2.36) y (2.37), podemos resolver las ecuaciones resultantes sucesivamente para $c_{m+1}, c_m, \ldots, c_1$, ya que $b_1 \neq 0$.

De esta forma se obtienen las P_α's buscadas. Ahora, el teorema de Mittag-Leffler proporciona una función h meromorfa en G cuyas partes principales son estas P_α's, y si ponemos $f = gh$ obtenemos una función con las propiedades deseadas. ■

La solución del problema de interpolación anterior permite determinar la estructura de todos los ideales finitamente generados en el anillo $H(G)$.

Definición 2.22 *El* ideal $[g_1, \ldots, g_n]$ generado por las funciones $g_1, \ldots, g_n \in H(G)$ *es el conjunto de todas las funciones de la forma* $\sum_{i=1}^n f_i g_i$*, donde* $f_i \in H(G)$ $(1 \leq i \leq n)$*. Un* ideal principal *es el que está generado por una sola función. Nótese que* $[1] = H(G)$*.*

Si $f \in H(G)$ $(\alpha \in G)$ y f no es idénticamente nula en un entorno de α, la multiplicidad del cero de f en α será denotada por $m(f;\alpha)$. Si $f(\alpha) \neq 0$, entonces $m(f;\alpha) = 0$.

Teorema 2.23 *Todo ideal finitamente generado en* $H(G)$ *es principal. Más precisamente: si* $g_1, \ldots, g_n \in H(G)$*, entonces existen funciones* $g, f_i, h_i \in H(G)$ *tales que*

$$g = \sum_{i=1}^n f_i g_i \quad \text{ y } \quad g_i = h_i g \quad (1 \leq i \leq n).$$

Demostración. Supondremos en primer lugar que G es un dominio (abierto y conexo), para evitar los problemas planteados por funciones que son idénticamente nulas en algunas componentes de G, pero no en todas. Una vez demostrado para dominios, el resultado se podría aplicar a cada componente conexa de un abierto arbitrario G para deducir el caso general.

Sea entonces G un dominio; procederemos por inducción sobre n. Denominamos $P(n)$ al enunciado siguiente:

Si $g_1, \ldots, g_n \in H(G)$*, ninguna de estas funciones es idénticamente nula, y ningún punto de* G *es un cero de todas ellas, entonces* $[g_1, \ldots, g_n] = [1]$*.*

$P(1)$ es trivial. Supongamos que $n > 1$ y que $P(n-1)$ es cierto. Tomemos $g_1, \ldots, g_n \in H(G)$, sin ceros comunes. Por el teorema de factorización de Weierstrass (Teorema 2.1), existe $\varphi \in H(G)$ tal que

$$m(\varphi;\alpha) = \min\{m(g_i;\alpha) : 1 \leq i \leq n-1\} \quad (\alpha \in G).$$

Las funciones $f_i = g_i/\varphi$ $(1 \leq i \leq n-1)$ están en $H(G)$ y carecen de ceros comunes en G. Puesto que vale $P(n-1)$, $[f_1, \ldots, f_{n-1}] = [1]$. Por tanto,

$$[g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n] = [\varphi, g_n]. \tag{2.38}$$

Además, nuestra elección de φ muestra que $g_n(\alpha) \neq 0$ en todo punto del conjunto $A = \{\alpha \in G : \varphi(\alpha) = 0\}$. Sigue del Teorema 2.21 que existe $h \in H(G)$ satisfaciendo

$$m(1 - hg_n;\alpha) \geq m(\varphi;\alpha) \quad (\alpha \in G). \tag{2.39}$$

Esta h se obtiene eligiendo adecuadamente los valores prefijados de $h^{(k)}(\alpha)$, para $\alpha \in A$ y $0 \leq k \leq m(\varphi;\alpha)$.

Por (2.39), $(1 - hg_n)/\varphi$ tiene singularidades evitables. Luego,

$$1 = hg_n + f\varphi \tag{2.40}$$

para alguna $f \in H(G)$. Por (2.38) y (2.40), $1 \in [g_1, \ldots, g_n]$.

Hemos probado que $P(n-1)$ implica $P(n)$. Por tanto, $P(n)$ se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, finalmente, que $G_1, \ldots, G_n \in H(G)$ y (sin pérdida de generalidad) que ninguna G_i $(1 \leq i \leq n)$ es idénticamente nula. Una nueva aplicación del teorema de factorización de Weierstrass proporciona $\varphi \in H(G)$ con $m(\varphi; \alpha) = \text{mín}\{m(G_i; \alpha) : 1 \leq i \leq n\}$ $(\alpha \in G)$. Pongamos $g_i = G_i/\varphi$; entonces $g_i \in H(G)$ $(1 \leq i \leq n)$, y las funciones $g_1, \ldots, g_n$ carecen de ceros comunes en G. Por $P(n)$, $[g_1, \ldots, g_n] = [1]$. Se concluye que $[G_1, \ldots, G_n] = [\varphi]$, completando la prueba. ■

3

Productos de Blaschke

Un producto de Blaschke es una función de la forma

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

donde $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{D}$ denota el disco unidad del plano complejo, y $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ es una sucesión de puntos tales que el producto infinito del segundo miembro converge. Blaschke [1] probó que la condición necesaria y suficiente sobre esta sucesión para que se tenga convergencia es que $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty$.

Los productos de Blaschke permiten factorizar clases importantes de funciones holomorfas en el disco unidad, como la de las funciones acotadas $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$, o las clases de Hardy $H^p = H^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < \infty)$. Aunque excede el alcance del presente trabajo, podemos mencionar que esta teoría ha sido extendida por M. Dzhrbashyan [5, 6], quien construyó productos infinitos de naturaleza más general, aptos para la factorización de clases mucho más amplias de funciones meromorfas. También se ha encontrado una solución para el problema de construir análogos de productos de Blaschke y del teorema de Blaschke en dominios doblemente conexos [8] y, en general, finitamente conexos [11].

En lo que sigue expondremos brevemente la teoría de productos de Blaschke en su contexto original.

3.1. Fórmula de Jensen

En el teorema de factorización de Weierstrass (Teorema 2.1) hemos visto que la localización de los ceros de una función holomorfa no idénticamente nula en un dominio G no está sujeta a ninguna restricción excepto, naturalmente, a la ausencia de puntos de acumulación en G. La situación es bien diferente si reemplazamos $H(G)$ por subclases de funciones definidas por determinadas condiciones de crecimiento. En tales casos, la distribución de los ceros debe satisfacer ciertas condiciones cuantitativas, en cuya base se encuentra la fórmula de Jensen (Teorema 3.2). Aplicaremos dicha fórmula a clases de funciones enteras y a subclases de $H(\mathbb{D})$.

Lema 3.1 *Se verifica:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1-e^{i\theta}|\,d\theta = 0.$$

Demostración. Sea $G=\{z : \Re z<1\}$. Ya que $1-z\neq 0$ en G y G es simplemente conexo, existe $h\in H(G)$ tal que $e^{h(z)}=1-z$ en G, y esta h está unívocamente determinada si exigimos que $h(0)=0$ [4, Corollary IV.6.17]. Como $\Re(1-z)>0$ en G, se tiene

$$\Re h(z)=\ln|1-z|, \quad |\Im h(z)|<\frac{\pi}{2} \quad (z\in G). \tag{3.1}$$

Para $\delta>0$ pequeño, sea Γ el camino

$$\Gamma(t)=e^{it} \quad (\delta\le t\le 2\pi-\delta),$$

y sea γ el arco circular centrado en 1 que une $e^{i\delta}$ con $e^{-i\delta}$ dentro de $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} \ln|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\frac{dz}{z}\right] = \Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{dz}{z}\right]. \tag{3.2}$$

En la última igualdad se ha utilizado el teorema de Cauchy; recuérdese que $h(0)=0$.

La longitud de γ no excede $\pi\delta$, por lo que, en virtud de (3.1), el valor absoluto de la última integral en (3.2) es menor que $C\delta\ln(1/\delta)$, donde C es una constante. A la vista de esta estimación, haciendo $\delta\to 0$ en (3.2) se obtiene el resultado deseado. ∎

Teorema 3.2 (Fórmula de Jensen) *Supongamos que* $G=B(0;R)$, $f\in H(G)$, $f(0)\neq 0$, $0<r<R$, *y* $\alpha_1,\dots,\alpha_N$ *son los ceros de* f *en* $\overline{B}(0;r)$, *contados según sus multiplicidades. Entonces*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\}. \tag{3.3}$$

Demostración. Ordenamos los puntos α_j para que $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ estén en $B(0;r)$ y $|\alpha_{m+1}|=\ldots=|\alpha_N|=r$ (puede ocurrir que $m=N$ ó $m=0$). Ponemos

$$g(z)=f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\overline{\alpha}_n z}{r(\alpha_n-z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-z}. \tag{3.4}$$

Entonces $g \in H(B)$, donde $B = B(0; r+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Como g carece de ceros en B, se tiene que $\ln|g|$ es armónica en B [10, Theorem 13.12], así que

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|g(re^{i\theta})\right| d\theta. \tag{3.5}$$

Por (3.4),

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|\alpha_n|}. \tag{3.6}$$

Para $1 \leq n \leq m$, los factores en (3.4) son unimodulares cuando $|z| = r$. Si $\alpha_n = re^{i\theta_n}$ para $m < n \leq N$, se deduce que

$$\ln\left|g(re^{i\theta})\right| = \ln\left|f(re^{i\theta})\right| - \sum_{n=m+1}^{N} \ln\left|1 - e^{i(\theta-\theta_n)}\right|.$$

El Lema 3.1 muestra que la integral en (3.5) no cambia si g es reemplazada por f. Ahora, una comparación con (3.6) da (3.3). ∎

Nótese que la condición $f(0) \neq 0$ en el Teorema 3.2 no restringe la generalidad, pues si f tiene un cero de orden k en el origen basta aplicar la fórmula a $f(z)/z^k$.

La fórmula de Jensen da lugar a una desigualdad que involucra a los valores de frontera de las funciones holomorfas acotadas en $\mathbb{D}$ (recordemos que la clase de estas funciones ha sido denotada H^∞):

Teorema 3.3 *Si $f \in H^\infty$ no es idénticamente nula, definimos*

$$\mu_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|\, d\theta \quad (0 < r < 1)$$

y

$$\mu^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f^*(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

donde f^* es la función límite radial de f [10, Theorem 11.32]. Entonces:

$$\mu_r(f) \leq \mu_s(f) \quad (0 < r < s < 1), \tag{3.7}$$

$$\mu_r(f) \to \ln|f(0)| \text{ cuando } r \to 0, \tag{3.8}$$

y

$$\mu_r(f) \leq \mu^*(f) \quad (0 < r < 1). \tag{3.9}$$

Demostración. Existe un entero $m \geq 0$ tal que $f(z) = z^m g(z)$, donde $g \in H^\infty$ y $g(0) \neq 0$. Aplicamos la fórmula de Jensen (Teorema 3.2) a g en lugar de f. El primer miembro no puede decrecer si r aumenta; así, $\mu_r(g) \leq \mu_s(g)$ para $r < s$. Ya que

$$\mu_r(f) = \mu_r(g) + m \ln r,$$

hemos probado (3.7).

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $|f| \leq 1$. Escribimos $f_r(e^{i\theta})$ en lugar de $f(re^{i\theta})$. Entonces $f_r \to f(0)$ cuando $r \to 0$, y $f_r \to f^*$ en casi todo punto cuando $r \to 1$. Ya que $\ln(1/|f_r|) \geq 0$, aplicando dos veces el lema de Fatou, en combinación con (3.7), obtenemos (3.8) y (3.9). ■

Nótese la siguiente consecuencia: podemos elegir r tal que $f(z) \neq 0$ si $|z| = r$; entonces $\mu_r(f)$ es finita y, por (3.9), también lo es $\mu^*(f)$. Así, $\ln|f^*| \in L^1(T)$, y $f^*(e^{i\theta}) \neq 0$ en casi todo punto de la circunferencia unidad.

3.2. Ceros de las funciones enteras

Supongamos que f es una función entera, que

$$M(r) = \sup_\theta \left|f(re^{i\theta})\right| \quad (0 < r < \infty),$$

y que $n(r)$ es el número de ceros de f en $\overline{B}(0; r)$. Por simplicidad, asumimos $f(0) = 1$. La fórmula de Jensen proporciona:

$$M(2r) \geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|f(2re^{i\theta})\right| d\theta\right\} = \prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq 2^{n(r)},$$

si $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión de los ceros de f, ordenada de modo que

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \ldots .$$

Por tanto,

$$n(r) \ln 2 \leq \ln M(2r). \tag{3.10}$$

Así, la rapidez con la que crece $n(r)$ (esto es, la densidad de los ceros de f) está controlada por la tasa de crecimiento de $M(r)$. Supongamos, por concretar, que, para r grande,

$$M(r) < \exp\{Ar^k\},$$

donde A y k son números positivos dados. Entonces (3.10) conduce a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} \leq k. \tag{3.11}$$

Por ejemplo, si k es un entero positivo y $f(z) = 1 - e^{z^k}$, se tiene que $n(r)$ es, aproximadamente, $\pi^{-1}kr^k$, así que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = k.$$

Esto demuestra que la estimación (3.11) no se puede mejorar.

3.3. Productos de Blaschke

La fórmula de Jensen permite determinar las condiciones precisas que deben satisfacer los ceros de una función $f \in H^\infty$ no constante.

Teorema 3.4 *Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathbb{D}$ tal que $\alpha_n \neq 0$ y*

$$\sum_{n=1}^\infty (1 - |\alpha_n|) < \infty,$$

si k es un entero no negativo, y si

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (z \in \mathbb{D}), \tag{3.12}$$

entonces $B \in H^\infty$, y B no tiene ceros excepto en los puntos α_n (y en el origen, si $k > 0$).

Demostración. El término n-ésimo de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$$

es

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1 - \overline{\alpha}_n z)\alpha_n} \right| (1 - |\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1 - |\alpha_n|),$$

si $|z| \leq r$. Luego, el Teorema 1.8 muestra que $B \in H(\mathbb{D})$ y que B tiene sólo los ceros prescritos. Ya que el módulo de cada factor en (3.12) es menor que 1 en $\mathbb{D}$, se concluye que $|B(z)| < 1$. ■

La función B del Teorema 3.4 se denomina *producto de Blaschke*. Notemos que algunos de los α_n pueden estar repetidos, en cuyo caso B tiene ceros múltiples en esos puntos. Observemos, asimismo, que cada factor en (3.12) tiene módulo unidad sobre la frontera del disco.

Usaremos también el término «producto de Blaschke» si sólo hay un número finito de factores y aun cuando no hubiese ninguno, en cuyo caso $B(z) = 1$.

El teorema anterior muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|)<\infty \tag{3.13}$$

es una condición suficiente para la existencia de una $f\in H^\infty$ que sólo tenga los ceros $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Esta condición también resulta ser necesaria:

Si $f\in H^\infty$ y f no es idénticamente nula, los ceros de f deben satisfacer (3.13).

Esto es un caso particular del Teorema 3.5. Resulta interesante el hecho de que la condición (3.13) es necesaria en una clase de funciones mucho mayor, la cual describiremos a continuación.

Para cualquier número real t, definimos $\ln^+ t=\ln t$ si $t\geq 1$ y $\ln^+ t=0$ si $t<1$. Denotamos N (por Nevanlinna) a la clase de todas las $f\in H(\mathbb{D})$ para las cuales

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|f(re^{i\theta})\right|\,d\theta<\infty. \tag{3.14}$$

Es claro que $H^\infty\subset N$. Notemos que (3.14) impone una restricción a la tasa de crecimiento de $|f(z)|$ cuando $|z|\to 1$, mientras que la acotación de las integrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta \tag{3.15}$$

no impone restricción alguna. Por ejemplo, (3.15) es independiente de r si $f=e^g$ para cualquier $g\in H(\mathbb{D})$. El punto es que (3.15) puede permanecer pequeño porque $\ln|f|$ toma valores grandes tanto negativos como positivos, mientras que $\ln^+|f|\geq 0$.

Teorema 3.5 *Supongamos que $f\in N$ no es idénticamente nula en $\mathbb{D}$, y sean $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ los ceros de f, ordenados por módulos crecientes y contados según sus multiplicidades. Entonces se verifica* (3.13).

Demostración. Asumimos tácitamente que f tiene infinitos ceros en $\mathbb{D}$, pues de lo contrario la serie (3.13) sería una suma finita y no habría nada que probar.

Si f tiene un cero de orden m en el origen, y $g(z)=z^{-m}f(z)$, entonces $g\in N$ y g tiene los mismos ceros que f, excepto en el origen. Por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0)\neq 0$. Sea $n(r)$ el número de ceros de f en $\overline{B}(0;r)$, fijemos k, y tomemos $r<1$ de modo que $n(r)>k$. La fórmula de Jensen

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|f(re^{i\theta})\right|\,d\theta\right\}$$

implica que

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \leq \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| \, d\theta \right\}. \tag{3.16}$$

Nuestra hipótesis de que $f \in N$ es equivalente a la existencia de una constante positiva C mayor que el segundo miembro de (3.16) para todo r, $0 < r < 1$. Se sigue que

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geq C^{-1} |f(0)| r^k.$$

La desigualdad subsiste para todo k, cuando $r \to 1$. Luego,

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geq C^{-1} |f(0)| > 0. \tag{3.17}$$

Finalmente, por el Corolario 1.5, (3.17) implica (3.13). ■

Corolario 3.6 *Si $f \in H^\infty$ (o, incluso, si $f \in N$), si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ son los ceros de f en $\mathbb{D}$, y si $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) = \infty$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Por ejemplo, ninguna función holomorfa acotada no constante en $\mathbb{D}$ puede tener un cero en cada uno de los puntos $(n-1)/n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Concluimos esta sección con un teorema que describe el comportamiento de un producto de Blaschke cerca de la frontera $\mathbb{T}$ de $\mathbb{D}$. Recuérdese que, como elemento de H^∞, B tiene límites radiales $B^*(e^{i\theta})$ en casi todos los puntos de $\mathbb{T}$ [10, Theorem 11.32].

Teorema 3.7 *Si B es un producto de Blaschke, entonces $\left|B^*(e^{i\theta})\right| = 1$ c.t.p. y*

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| B(re^{i\theta}) \right| \, d\theta = 0. \tag{3.18}$$

Demostración. La existencia del límite es consecuencia de que la integral es una función monótona de r. Supongamos que $B(z)$ es como en el Teorema 3.4, y pongamos

$$B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Como $\ln |B/B_N|$ es continua en un conjunto abierto que contiene a $\mathbb{T}$, el límite (3.18) no cambia al reemplazar B por B_N. Si aplicamos el Teorema 3.3 a B_N, obtenemos

$$\ln |B_N(0)| \leq \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| B(re^{i\theta}) \right| \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| B^*(e^{i\theta}) \right| \, d\theta \leq 0. \tag{3.19}$$

Cuando $N \to \infty$, el primer miembro de (3.19) tiende a cero. Esto da (3.18), y muestra que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| B^*(e^{i\theta}) \right| \, d\theta = 0.$$

Ya que $\ln |B^*| \leq 0$ c.t.p., se concluye que $\ln |B^*| = 0$ c.t.p.. ■

3.4. Teorema de Müntz-Szász

Un teorema clásico de Weierstrass establece que los polinomios son densos en $C(I)$, el espacio de todas las funciones complejas continuas en el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ con la norma del supremo. En otras palabras, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones

$$1, t, t^2, t^3, \ldots \tag{3.20}$$

es denso en $C(I)$. Esto, a veces, se expresa diciendo que las funciones (3.20) generan $C(I)$. Surge de modo natural la siguiente pregunta:

Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, ¿bajo qué condiciones es cierto que las funciones

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \ldots \tag{3.21}$$

generan $C(I)$?

Resulta que este problema está conectado, también de forma natural, con el problema de la distribución de los ceros de una función holomorfa acotada en un semiplano (o en un disco: ambos dominios son conformemente equivalentes [10, p. 281]). La respuesta es que *las funciones* (3.21) *generan $C(I)$ si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$.*

En realidad, la prueba permite obtener una conclusión aún más precisa:

Teorema 3.8 (Müntz-Szász) *Supongamos que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, y sea X la clausura en $C(I)$ del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las funciones*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, \ldots .$$

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$, entonces $X = C(I)$.
b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$, y si $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda \neq 0$, entonces X no contiene a la función t^{λ}.

Demostración. Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, $\varphi \in C(I) \setminus X$ si, y sólo si, existe un funcional lineal acotado en $C(I)$ que no se anula en φ pero es idénticamente nulo sobre X. Ya que, por el teorema de representación de Riesz, todo funcional lineal acotado sobre $C(I)$ se obtiene por integración contra una medida de Borel compleja definida en I, a) será consecuencia de la siguiente proposición:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = \infty$, y si μ es una medida de Borel compleja sobre I tal que

$$\int_I t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{3.22}$$

entonces también

$$\int_I t^k \, d\mu(t) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{3.23}$$

Una vez que se pruebe esta afirmación, la observación precedente muestra que X contiene a todas las funciones t^k; ya que $1 \in X$, todos los polinomios estarán entonces en X, y del teorema de Weierstrass se concluye que $X = C(I)$.

Supongamos entonces que se verifica (3.22). Dado que los integrandos en (3.22) y (3.23) se anulan en cero, también podemos suponer que μ está concentrada en $(0, 1]$. Asociamos a μ la función

$$f(z) = \int_I t^z \, d\mu(t). \tag{3.24}$$

Para $t > 0$, $t^z = e^{z \ln t}$, por definición. Afirmamos que f es holomorfa en el semiplano derecho. La continuidad de f se comprueba fácilmente, y cabe aplicar entonces el teorema de Morera. Además, si $z = x + iy$, si $x > 0$, y si $0 < t \leq 1$, entonces $|t^z| = t^x \leq 1$. . Así, f está acotada en el semiplano derecho, y (3.22) expresa que $f(\lambda_n) = 0$, para $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$g(z) = f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Entonces, $g \in H^\infty$ y $g(\alpha_n) = 0$, donde $\alpha_n = (\lambda_n - 1)/(\lambda_n + 1)$. Un cálculo sencillo muestra que $\sum_{n=1}^\infty (1 - |\alpha_n|) = \infty$ si $\sum_{n=1}^\infty 1/\lambda_n = \infty$. El Corolario 3.6 implica que $g(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$; luego, $f = 0$. En particular, $f(k) = 0$ para $k \in \mathbb{N}$, y esto es (3.23). Así, hemos demostrado a).

Para probar b) será suficiente construir una medida μ sobre I tal que (3.24) defina una función f, holomorfa en el semiplano $\Re z > -1$, que se anule en $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, y que no tenga más ceros en ese semiplano. Pues el funcional inducido por esta medida μ se anulará entonces sobre X pero no en ninguna función t^λ, si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$.

Comenzamos por construir una función f con estos ceros prefijados, para luego mostrar que f se puede representar en la forma (3.24). Definimos

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^\infty \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}. \tag{3.25}$$

Ya que

$$1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} = \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z},$$

el producto infinito en (3.25) converge uniformemente en cada conjunto compacto que no contiene ninguno de los puntos $-\lambda_n - 2$. De ello se deduce que f es una función meromorfa en todo el plano, con polos en -2 y en $-\lambda_n - 2$, y con ceros en $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Además, cada factor en el producto infinito (3.25) es menor que 1 en módulo si $\Re z > -1$. Así, $|f(z)| \leq 1$ cuando $\Re z \geq -1$. El factor $(2+z)^3$ garantiza que la restricción de f a la recta $\Re z = -1$ está en L^1.

Fijamos z con $\Re z > -1$ y consideramos la fórmula de Cauchy para $f(z)$, donde el camino de integración consiste en el semicírculo de centro en -1 y radio $R > 1 + |z|$ que va de $-1 - iR$ a $-1 + R$ a $-1 + iR$, seguido del intervalo desde $-1 + iR$ a $-1 - iR$. La integral sobre el semicírculo tiende a cero cuando $R \to \infty$, lo que nos deja

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z}\, ds \quad (\Re z > -1). \tag{3.26}$$

Ahora bien:

$$\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}\, dt \quad (\Re z > -1).$$

Por tanto, (3.26) puede ser reescrita en la forma

$$f(z) = \int_0^1 t^z \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is) e^{-is \ln t}\, ds \right\} dt. \tag{3.27}$$

El intercambio en el orden de integración es lícito: si sustituimos el integrando en (3.27) por su módulo, obtenemos una integral finita.

Sea $g(s) = f(-1+is)$. Entonces la integral interior en (3.27) es $\hat{g}(\ln t)$, donde $\hat{g}$ denota la transformada de Fourier de g. Esta es una función continua acotada en $(0,1]$, y poniendo $d\mu(t) = \hat{g}(\ln t)\, dt$ obtenemos una medida que representa a f en la forma deseada (3.24), lo que completa la prueba. ■

El teorema de Müntz-Szász implica que siempre que $\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ genera $C(I)$, es posible eliminar alguna subcolección infinita de t^{λ_i}'s sin alterar el subespacio generado. En particular, $C(I)$ no contiene conjuntos generadores minimales de este tipo, hecho que está en marcado contraste con el comportamiento de los conjuntos ortonormales en espacios de Hilbert: si algún elemento de un conjunto ortonormal es removido, el subespacio que se genera disminuye. Del mismo modo, si $\{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ no genera $C(I)$, la eliminación de cualquiera de sus elementos disminuirá el subespacio generado; esto se deduce del Teorema 3.8 b).

Bibliografía

[1] W. Blaschke: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. *Berichte Math.-Phys. Kl., Sächs. Gesell. der Wiss. Leipzig* **67** (1915), 194–200.

[2] J. Bruna, J. Cufí: *Complex Analysis.* European Mathematical Society, 2013.

[3] P. Colwell: *Blaschke Products.* University of Michigan Press, 1985.

[4] J.B. Conway: *Functions of One Complex Variable I* (2nd ed.). Springer, 1978.

[5] M.M. Dzhrbashyan: *Integral transforms and representation of functions in the complex domain.* Nauka, 1966 (en ruso).

[6] M.M. Dzhrbashyan: The theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in a disc. *Russian Math. Surveys* **28** (1973), no. 4, 1–12 [*Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 4(172), 3–14 (en ruso)].

[7] J.L. Fernández: *Variable Compleja IIε*, cap. 7 (versión preliminar). Universidad Autónoma de Madrid, 2018.

[8] S.A. Kas'yanyuk: On functions of classes A and $\mathcal{H}_\delta$ on an annulus. *Mat. Sb. (N.S.)* **42(84)** (1957), no. 3, 301–326 (en ruso).

[9] M. Marín: *Productos infinitos en variable compleja.* Trabajo Fin de Grado, Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia, 2014.

[10] W. Rudin: *Real and Complex Analysis* (3.ª ed.). McGraw-Hill, 1987.

[11] P.M. Tamrazov: Conformal-metric theory of doubly connected domains and the generalized Blaschke product. *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), no. 2, 432–435 [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **161** (1965), no. 2, 308–311 (en ruso)].

Zeros of holomorphic functions

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Lorena Morales Pérez
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100786217@ull.edu.es

Abstract

INFINITE products, as their name suggests, must be understood in parallel to series, but replacing sums with partial products. They constitute a fundamental tool of complex analysis, where the celebrated Weierstrass factorization theorem allows us to represent any holomorphic function as an infinite product, clearly identifying its zeros. Examples such as the factorization of the sine function, the expression of the Euler Gamma and Riemann zeta functions in the form of an infinite product, or the basic properties of Blaschke products, are given. As an application, the solutions to an interpolation problem (in combination with the Mittag-Leffler theorem) and an approximation problem (namely, the Müntz-Szász theorem) are presented.

1. Introduction

THE fundamental theorem of algebra establishes that every complex polynomial p, not identically zero, with roots a_k of respective multiplicities m_k $(1 \le k \le n)$, admits a unique representation of the form

$$p(z) = c(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots(z-a_n)^{m_n},$$

where $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. The main purpose of this work is to get an analogous representation for functions holomorphic in an open subset of $\mathbb{C}$ and, in particular, for entire ones.
Should the function f be holomorphic and not identically zero in a domain (open and connected subset) of the plane, it is known that its zero set cannot have limit points and, therefore, it is at most denumerable. Furthermore, a definition of multiplicity, as a nonnegative integer, of each zero of f can be given.
Thus, the following question arises naturally: given a sequence $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ in a domain G, with no limit points in G, and a sequence of integers $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, does there exist a function f, analytic in G, whose zeros are $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, in such a way that the multiplicity of the zero of f at $z = a_k$ is m_k $(k \in \mathbb{N})$? If only a finite family $\{a_1,\dots,a_n\}$ is considered, then the trivial solution to this problem would be a complex polynomial like the above one.

2. Infinite products and the Weierstrass factorization theorem

OUR aim, therefore, is to obtain an analogous factorization for holomorphic functions with an infinite number of zeros, replacing the finite product with an infinite one where the zeros and their multiplicities are reflected explicitly. This can be managed thanks to the Weierstrass factorization theorem, which is the main subject of chapter 2.
Prior to that, convergence of numerical as well as functional infinite products must be defined and investigated, which is done in chapter 1.
In chapter 2, the Weierstrass factorization theorem is illustrated with some examples and relevant applications, as far as infinite products are concerned. In the first place, we give two factorizations, due to Euler, of the sine function, and apply them to the calculation of developments for the cosine and cotangent functions, of the sum of Basel (the series formed by the reciprocals of the squares of the natural numbers), and of the formulas of Wallis and Viète for the number π. Next, we study in detail what are possibly the two most famous functions in complex analysis: the Euler Gamma function and the Riemann zeta function.
Chapter 2 is completed with the solution of an interpolation problem that combines the Weierstrass factorization theorem with the Mittag-Leffler theorem. The latter can be considered as a generalization of the former, in that it achieves a numerical series expression of a meromorphic function where the poles of the function and their corresponding main parts can be quickly identified. More precisely, the problem that is solved is the following: given an open $G \subset \mathbb{C}$ and an arbitrary set $A \subset G$, without accumulation points in G, is there a function $f \in H(G)$ which takes prescribed values at each point of A? Not only is the answer to this question affirmative, but it is even possible to prescribe a finite number of derivatives at each point of A.

3. Blaschke products

IN chapter 3 we address the so-called Blaschke products. These are infinite products that give rise to holomorphic and bounded functions in the unit disk of the complex plane with a predefined sequence of zeros, provided that this sequence satisfies a certain condition of easy verification. Blaschke products allow to factorize important classes of holomorphic functions in the unit disk, such as bounded functions or Hardy classes. As an application of this theory we present the Müntz-Szász theorem, an approximation theorem that generalizes the well-known Weierstrass approximation theorem. Specifically, the Müntz-Szász theorem provides a necessary and sufficient condition for the finite linear combinations of a succession of monomials with real exponents (that is, the so-called Müntz polynomials) to be uniformly dense in the space of continuous complex functions in a closed interval.

4. Final remarks

FOR the elaboration of this report we have mainly followed the texts of Conway [4] and Rudin [7]. The report ends with a short list of other bibliographical references, both general and specific, which we consider potentially interesting in order to broaden or delve into the subject.

References

[1] W. BLASCHKE: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. *Berichte Math.-Phys. Kl., Sächs. Gesell. der Wiss. Leipzig* **67** (1915), 194–200.

[2] J. BRUNA, J. CUFÍ: *Complex Analysis.* European Mathematical Society, 2013.

[3] P. COLWELL: *Blaschke Products.* University of Michigan Press, 1985.

[4] J.B. CONWAY: *Functions of One Complex Variable I* (2nd ed.). Springer, 1978.

[5] M.M. DZHRBASHYAN: *Integral transforms and representation of functions in the complex domain.* Nauka, 1966 (en ruso).

[6] M.M. DZHRBASHYAN: The theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in a disc. *Russian Math. Surveys* **28** (1973), no. 4, 1–12 [*Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 4(172), 3–14 (en ruso)].

[7] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis* (3.ª ed.). McGraw-Hill, 1987.

[8] S.A. KAS'YANYUK: On functions of classes A and $\mathscr{H}_\delta$ on an annulus. *Mat. Sb. (N.S.)* **42(84)** (1957), no. 3, 301–326 (en ruso).

[9] P.M. TAMRAZOV: Conformal-metric theory of doubly connected domains and the generalized Blaschke product. *Soviet Math. Dokl.* **6** (1965), no. 2, 432–435 [*Dokl. Akad. Nauk SSSR* **161** (1965), no. 2, 308–311 (en ruso)].