



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

José Fabrizio Pineda Ramos

Geometría de superficies minimales

The Geometry of minimal surfaces

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2019

DIRIGIDO POR

Irene Márquez Corbella

M^a Edith Padrón Fernández

Irene Márquez Corbella

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e IO*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

M^a Edith Padrón Fernández

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e IO*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Agradecimientos

A Edith Padrón, por enseñarme tantísima Geometría, por hacerme *fisquitero* y por la paciencia, el entusiasmo y la calidad con la que me ha guiado para llevar este trabajo a buen puerto.

A Irene Márquez, por su brillantez y por su enorme disposición para lidiar con mi torpeza con las máquinas.

A Enrique, por prestarme aquellos apuntes de Análisis Matemático I y, a partir de ahí, haber compartido conmigo las risas, el trabajo y el gusto infinito por esta ciencia.

A las profesoras Margarita Rivero y Mariví Reyes, por haber seguido de cerca mi trayectoria académica y por los buenos consejos que me han dado a lo largo de la carrera.

A mi familia, por el aliento con el que me ha impulsado.

A mis amigos, con los que haya compartido hogar o *café*, que han perfilado de alguna manera mi forma de pensar, trascendiendo lo académico.

Muchísimas gracias.

José Fabrizio Pineda Ramos
La Laguna, 8 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se hace una introducción a las superficies de curvatura media nula, las superficies minimales. Estas se encuentran en la naturaleza en forma de películas jabonosas optimizando el área según el principio de mínima acción de la Mecánica Lagrangiana.

Partiendo de la justificación del comportamiento de estas películas, definiremos las superficies minimales y mostraremos algunas caracterizaciones locales de carácter analítico usando la ecuación de Euler-Lagrange o la noción de función armónica. Veremos además que toda superficie de área mínima con borde prefijado es minimal y que el recíproco no es cierto en general.

El trabajo finaliza con el estudio de los ejemplos más notables de superficies minimales, dibujándolas y calculando algunos parámetros como su curvatura media, su curvatura de Gauss y el área. Para ello utilizaremos el software matemático Sagemath.

Palabras clave: *superficie – curvatura de Gauss – curvatura media – superficie minimal – superficie de área mínima – problema de Plateau – ecuación de Euler-Lagrange – superficie reglada – superficie de revolución.*

Abstract

In this dissertation we will give an introduction to null mean curvature surfaces, which are well-known as minimal surfaces. These surfaces can be found in the nature like soap films due to their ability to minimize areas following the minimum action principle of the Lagrangian Mechanics.

On the basis of the behaviour of soap films, we will define minimal surfaces, showing some local and analytic characterizations using the Euler-Lagrange equation or harmonic functions. Furthermore, we will show that every area-minimizing surface with fixed bound is a minimal surface although the converse is not true, in general.

In the last chapter, we show the most relevant minimal surfaces examples, drawing them and calculating several parameters with the mathematical software Sagemath. For example, their mean curvature, their Gauss curvature and areas.

Keywords: *surface – Gauss curvature – mean curvature – minimal surface – area-minimizing areas – Plateau’s problem – Euler-Lagrange equation – ruled surface – surface of revolution.*

Contenido

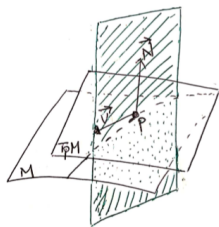
Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. La Física de las películas de jabón	1
1.1. Tensión superficial	1
1.2. La ecuación de Laplace-Young	2
2. Superficies minimales y superficies de área mínima	5
2.1. Teoría local de superficies. Curvaturas	5
2.2. Superficies minimales	10
2.2.1. Películas de jabón y curvatura media nula	10
2.2.2. Definición y caracterización local	11
2.2.3. Coordenadas isotérmicas	12
2.2.4. Superficies minimales y funciones armónicas	15
2.3. El problema de Plateau	16
3. Ejemplos de superficies minimales	19
3.1. Superficies de revolución minimales	21
3.2. Superficies regladas minimales	28
3.3. Superficies minimales de Scherk	34
3.4. Superficie de Enneper	37
3.5. Superficie de Henneberg	41
3.6. Superficie de Catalan	42
Bibliografía	45
Poster	47

Introducción

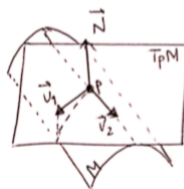
La Geometría es el estudio de aquellas propiedades que son invariantes por un grupo de transformaciones. Es más, cada grupo de transformaciones determina una Geometría distinta. La Geometría diferencial trata esencialmente de descubrir y analizar aquellas propiedades que permanecen invariantes ante difeomorfismos.

En particular, la Geometría diferencial de curvas y superficies aborda el estudio de la geometría intrínseca de las superficies y la búsqueda de propiedades invariantes por isometrías, valiéndose de las herramientas del Cálculo diferencial.

Sea p un punto de una superficie M y consideremos las curvas obtenidas como intersección de los planos determinados por la dirección normal a M en p y por cada una de las direcciones del plano tangente.



Corte con un plano normal.



Curvaturas principales.

De entre todas estas curvas, elegimos aquellas que alcancen la curvatura máxima y la mínima (curvaturas principales). Ninguna de ellas por separado nos permite capturar la geometría intrínseca de la superficie. Sin embargo, el producto de las mismas, la curvatura de Gauss, es un invariante por isometrías y, por tanto, un parámetro geoméricamente relevante de la superficie (ver, por ejemplo, [9]).

En 1827, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publica “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*”, origen de la Geometría diferencial. Aunque ya previamente Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), en sus desarrollos del Cálculo diferencial, habían usado estas técnicas en sus estudios de curvas. Muchos de los problemas abordados en estos pasos iniciales, frecuentemente trataban de maximizar o minimizar magnitudes.

La historia de la humanidad está plagada de problemas relacionados con la optimización de aspectos geométricos. Un ejemplo es la leyenda de la reina Dido. Esta leyenda trata sobre la princesa Elisa de Tiro, que huye de su ciudad natal y de la tiranía de su hermano, llegando a las costas del norte de África en el año 830 a.C. Tras pedir hospitalidad y un trozo de tierra para asentarse con sus seguidores, es despreciada por el Rey Jarbas. Este les dice, en un alarde de despotismo, que podrán quedarse con tanta tierra como puedan abarcar con una piel de buey. Elisa ordenó entonces cortar la piel del buey en tiras muy finas con las que pudo abarcar un área inmensa en forma de circunferencia.



Figura 0.1. *La muerte de Dido*, obra de Claude-Augustin Cayot.

Tras esto, Elisa se proclamó reina de la Ciudad Nueva de Cártago (actual Túnez) y los lugareños le dieron el nombre de Dido. Elisa, al encontrar la curva cerrada con longitud fija que maximiza el área que encierra, resolvió un problema isoperimétrico (para saber más ver el documento [6]).

Leonard Euler (1707-1783) fue el primero en combinar la geometría con el cálculo de variaciones para abordar este tipo de problemas. Poco después Joseph Louis Lagrange (1736-1813) publica el primer artículo sobre superficies de área mínima con un contorno fijo. Lagrange trató de abordar el problema de la minimalidad exclusivamente con herramientas analíticas, considerando que los aspectos geométricos no tenían relevancia. Concretamente, Lagrange prueba que estas superficies satisfacen una ecuación en derivadas parciales que hoy se denomina *ecuación de Euler-Lagrange*.

A las superficies que solucionan esta ecuación se las denomina *superficies minimales*. Sin embargo, no toda superficie minimal es de área mínima con respecto

a su borde. Encontrar soluciones no triviales de la ecuación de Euler-Lagrange no es una tarea fácil, por lo que la Teoría de superficies minimales ha avanzado lentamente.

El primero en conectar la definición analítica con un concepto geométrico fue Gaspard Monge (1746-1818). Este matemático estudió las superficies minimales de manera puramente teórica, no descubrió ni tuvo intención de descubrir ningún ejemplo concreto de superficie minimal, pero dio un importante resultado:

“Toda solución de la ecuación de Euler-Lagrange tiene curvaturas principales opuestas.”

Esta condición fue el primer paso para caracterizar las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange desde un punto de vista geométrico.

Jean Baptiste Meusnier (1754-1793), discípulo de Monge, no tardó en dar con el recíproco al resultado de su mentor. Quedó así establecida la equivalencia entre la definición *ser solución de Euler-Lagrange* y *tener curvaturas opuestas en todo punto*. Meusnier desarrolló notablemente la Teoría de superficies, especialmente las superficies minimales. Además, descubrió y analizó los primeros ejemplos no triviales que son la catenoide y el helicoide y obtuvo de ellos importantes conclusiones.

Sesenta años más tarde, Heinrich F. Scherk (1798-1885) impone condiciones algebraicas a la ecuación de Euler-Lagrange que permitieron su resolución por métodos elementales. Así, obtuvo las cinco superficies minimales que hoy llevan su nombre.

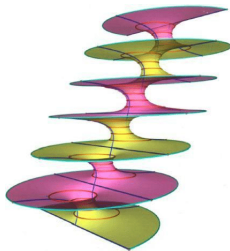
Algunos matemáticos como Pierre Ossian Bonnet (1819-1892) realizaron también trabajos acerca de curvas especiales (geodésicas y líneas asintóticas) que descansan sobre superficies minimales.

El físico belga Joseph Plateau (1801-1883), interesado en aspectos físicos de las superficies jabonosas y realizando numerosos experimentos, determinó las leyes que rigen las películas de jabón, sentando así las bases de una dualidad entre las películas de jabón y las superficies minimales. En este punto, la teoría de superficies minimales enlaza rápidamente con la física, dejando de ser una cuestión puramente matemática. Tras esto, el problema de encontrar una superficie de área mínima con contorno prefijado es bautizado como *el problema de Plateau*.

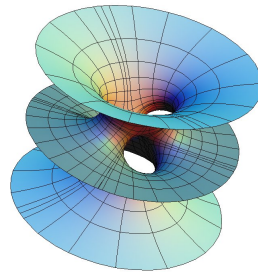
Otro matemático que contribuye notablemente en esta teoría es Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), que estudia el caso particular de fijar un contorno rectangular y descubre que las superficies minimales pueden ser extendidas por rotaciones y simetrías. Surgen así las superficies minimales periódicas (ver, por

ejemplo, [10]).

El célebre Friedrich Bernard Riemann (1826-1886) también estudió el problema de Plateau. Concretamente analizó el problema de determinar las superficies minimales bordeadas por dos circunferencias contenidas en planos paralelos y foliadas por circunferencias en planos paralelos a estos dos. Riemann probó que las únicas soluciones (salvo homotecias y movimientos rígidos) de este problema son la catenoide y una familia de superficies que hoy llevan se conocen como ejemplos de Riemann.



Superficie de Riemann¹



Superficie de Costa²

Ya en el siglo XX Jesse Douglas (1897-1965) y Tibor Radó (1895-1965) dan un teorema sobre existencia y regularidad de superficie de área mínima con un contorno general, resultado que llevó a Douglas a ganar la Medalla Fields en 1936 [5].

Posteriormente, las investigaciones se centraron en superficies minimales sin borde, olvidando por completo la motivación inicial de resolver el Problema de Plateau.

En este punto se observó que el plano, la catenoide y el helicoides no tenían frontera ni autointersecciones y se conjeturó que eran las únicas superficies minimales que cumplían estas condiciones. Sin embargo, en los años 80, el brasileño Celso José da Costa (1949) descubre la superficie que lleva su nombre, también sin frontera ni autointersecciones, refutando la conjetura.

En esta memoria mostramos una introducción al estudio de las superficies minimales, motivándolas desde el problema de Plateau.

En el primer capítulo se tratarán las propiedades físicas de las películas de jabón, justificando su comportamiento en relación con la presión del ambiente y la ten-

¹ Imagen extraída de www.researchgate.net

² Imagen extraída de www.3d-xplormath.org

sión superficial. Estas consideraciones físicas nos permitirán modelizar las superficies jabonosas con contorno fijo. Consecuencia de esta modelización obtenemos la ecuación de Laplace-Young.

El segundo capítulo comienza con un breve recordatorio de la teoría local de superficies. Posteriormente se introduce la noción de superficie minimal usando la curvatura media de la superficie y justificándola a partir de la ecuación de Laplace-Young. Veremos que esta definición es equivalente a satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange. Además introduciremos un tipo de coordenadas que siempre existe sobre una superficie minimal y que nos permite dar una caracterización en términos de funciones armónicas. Estas coordenadas se denominan isotérmicas.

También veremos cómo se relacionan las superficies minimales con el problema de Plateau. Probaremos que toda superficie de área mínima es minimal y mostraremos, en el último capítulo, que el recíproco no es cierto en general.

En este el último capítulo daremos ejemplos de superficies minimales y obtendremos las ecuaciones que las determinan. Pondremos especial atención en las superficies minimales de revolución y regladas. Probaremos dos resultados que establecen, esencialmente, que dichas superficies son las únicas minimales no triviales dentro de su género (de revolución y regladas).

Al inicio del capítulo se mostrará el código fuente (realizado en Sagemath) relativo al cálculo de la curvatura de Gauss y la curvatura media conocida una parametrización de la misma. También se mostrará un código para calcular el área de la superficie cuando los parámetros varían en intervalos acotados. En cada uno de los ejemplos desarrollados mostraremos una representación gráfica de la superficie y de sus curvas coordenadas realizadas con el programa. En [3] se pueden ver más aspectos computacionales tanto de superficies minimales como de superficies en general, abordados con el software Mathematica.

Las superficies minimales tienen numerosas aplicaciones en otras ramas de las Matemáticas y otras ciencias.

- **Arquitectura:** Las superficies minimales se utilizan para crear estructuras que, imitando el efecto de la tensión superficial de las películas de jabón, minimicen la cantidad de material necesario para llevarlas a cabo y consigan el equilibrio con pocos puntos de apoyo. El arquitecto Frei Paul Otto se interesó especialmente en el diseño de estructuras de área mínima.
- **Relatividad general:** En Relatividad general se utilizan para modelizar horizontes aparentes. La frontera de un agujero negro es una superficie mini-



Figura 0.2. Estadio Olímpico de Múnich. Diseñado por Frei Otto.

mal cuyo campo de curvaturas está ligado al tiempo, lo que se conoce como *superficie atrapada*.

- **Óptica:** La particular propiedad de ser minimal confiere a estas superficies propiedades ópticas que se aprovechan en la fabricación de cristales fotónicos.
- **Matemáticas:** Las superficies minimales pueden estudiarse desde el punto de vista de la Topología algebraica, considerando complejos simpliciales de dimensión dos, conformados por triángulos minimizantes. Esta discretización también permite computar fácilmente las superficies y tratarlas con el Análisis numérico.
- **Biología:** Las superficies minimales se pueden encontrar formando parte de estructuras biológicas tales como caparazones, alas o membranas celulares en los que la propiedad de ser minimal juega un papel relevante a efectos físico-químicos.

Actualmente, la investigación en superficies minimales sigue siendo una línea de trabajo muy puntera en el ámbito de la Geometría diferencial.

Prueba de ello es la matemática estadounidense Karen Keskulla Uhlenbeck, recientemente galardonada con el prestigioso premio Abel por *sus avances pioneros en ecuaciones en derivadas parciales geométricas, teorías Gauge y sistemas integrables, y por el impacto fundamental de su trabajo en Análisis, Geometría y Física matemática*.

Uhlenbeck trabaja en la Universidad de Illinois y su ámbito es el Análisis geométrico, que trata esencialmente de obtener resultados geométricos a partir de ecuaciones diferenciales. Algunos de sus trabajos han permitido entender la relación entre los instantones y las superficies de área mínima.

La Física de las películas de jabón

En este capítulo trataremos de justificar el comportamiento físico de las películas de jabón cuando se encuentran delimitadas por un alambre metálico.

Intuitivamente se sabe que sumergir un alambre metálico en agua jabonosa genera una película que tiene dicho alambre como borde. Cabe preguntarse si de entre todas las superficies delimitadas con ese contorno fijo, la generada por el jabón es la que tiene área mínima.

La respuesta es afirmativa, pero su demostración no es trivial. Desde un punto de vista físico entran en juego, fundamentalmente, la geometría de las moléculas de agua y del jabón y las interacciones entre las mismas. El principio de mínima acción de la Mecánica Lagrangiana es crucial para la demostración de este resultado.

En lo que sigue debemos tener en cuenta que los experimentos físicos están bajo la influencia de la gravedad, lo cual condiciona el sistema.

1.1. Tensión superficial

Para entender el comportamiento de las películas de jabón es necesario hacer un análisis a nivel molecular. La molécula de agua tiene una geometría muy especial. Los átomos de hidrógeno están desplazados a un lado del átomo de oxígeno con un ángulo fijo. Esta geometría junto con las cargas eléctricas hacen del agua una sustancia altamente polar, esto es, sus moléculas tienen las cargas opuestas muy separadas, lo que les permite agregarse con facilidad.

A nivel macroscópico se distinguen dos posibles localizaciones de las moléculas en el líquido: la parte superficial (en contacto con el aire) y la matriz del

líquido (rodeada sólo por otras moléculas de agua).

Las moléculas superficiales tienen un ambiente particular: por un lado el aire y por otro el agua, cuyas moléculas tiran de las superficiales mediante el conocido puente de hidrógeno. Esto da lugar a una fuerza de tensión que recorre toda la superficie del líquido.

En una solución jabonosa, dada la estructura molecular de los lípidos (cabeza hidrofílica y cola hidrofóbica), la densidad de la solución baja con respecto a la del agua pura y es posible levantar películas de jabón con estructura de bicapa lipídica que atrapa moléculas de agua en su parte hidrofílica. Siguiendo el principio de mínima acción, la película adoptará la forma energéticamente más económica.

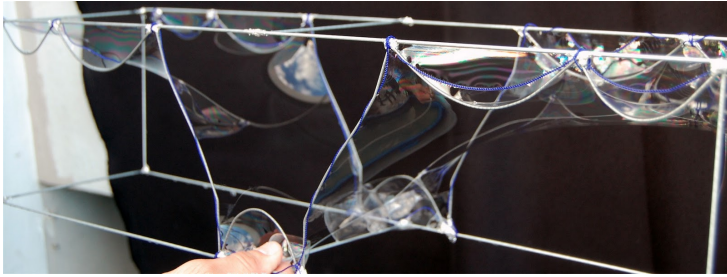


Figura 1.1. Película de jabón¹

1.2. La ecuación de Laplace-Young

Las películas de jabón son capaces de realizar trabajo al expandirse o contraerse. A continuación modelizaremos este proceso.

Definición 1.1. La *tensión superficial* σ sobre la superficie M se define como el cociente entre el trabajo W y el incremento del área ΔS , esto es

$$\sigma = \frac{W}{\Delta S}. \quad (1.1)$$

Tomamos una superficie M y fijamos un punto $p \in M$. Consideramos un entorno rectangular $V \in Ent(p)$, con V suficientemente pequeño para que sus bordes puedan ser cuatro arcos de circunferencias (ver Figura 1.2).

¹ Imagen extraída de www.cripta-guell.blogspot.com

Centrándonos ahora en ese entorno, llamaremos x e y a las longitudes de los arcos borde frontal y borde lateral respectivamente. Sabemos que el trabajo W es el producto escalar de la fuerza aplicada \vec{F} por el desplazamiento \vec{D} que se produce al realizar este trabajo, esto es

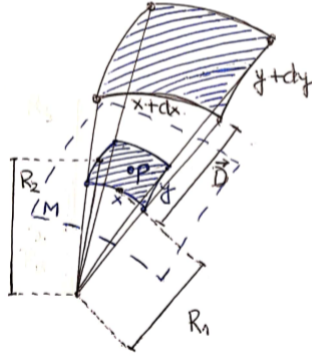


Figura 1.2. Expansión de una película jabonosa.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D}. \tag{1.2}$$

El signo \cdot denota el producto escalar de vectores. Como este desplazamiento se produce en la misma dirección que la fuerza (ver Figura 1.2), se tiene que

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{D}\|.$$

En el caso de las películas de jabón, la fuerza es perpendicular a la superficie y su módulo es el producto de la presión p por el área S donde se aplica (en nuestro caso el rectángulo de longitudes x e y). Por tanto,

$$\|\vec{F}\| = pS = pxy.$$

Así, sustituyendo en (1.2) y usando (1.1), deducimos

$$W = \vec{F} \cdot \vec{D} = (pS) \|\vec{D}\| = pxy \|\vec{D}\|. \tag{1.3}$$

Al aplicar la presión p , la superficie se expande. Si analizamos la expansión ΔS con respecto a los arcos borde frontal y borde lateral podemos reescribirla en términos de la siguiente diferencia

$$\Delta S = (x + dx)(y + dy) - xy, \quad (1.4)$$

donde $z + dz$ es la expansión del borde de longitud z . Como x y $x + dx$ son suficientemente pequeños, podemos suponer que son longitudes de arcos de circunferencias de radios R_1 y $R_1 + \|\vec{D}\|$. Al tratarse de una expansión, el ángulo del arco que determinan estos dos arcos coincide (ver Figura 1.2).

Recordemos que el cociente entre la longitud de un arco de circunferencia y su radio es el ángulo del arco θ . Así,

$$\frac{x + dx}{R_1 + \|\vec{D}\|} = \frac{x}{R_1} = \theta.$$

Razonando de manera análoga con y e $y + dy$ obtenemos que

$$\begin{aligned} x + dx &= x \left(1 + \frac{\|\vec{D}\|}{R_1} \right), \\ y + dy &= y \left(1 + \frac{\|\vec{D}\|}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta S &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= x \left(1 + \frac{\|\vec{D}\|}{R_1} \right) y \left(1 + \frac{\|\vec{D}\|}{R_2} \right) - xy \\ &= xy \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \|\vec{D}\| + xy \frac{\|\vec{D}\|^2}{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Realizando ahora una aproximación de orden dos y sustituyendo en (1.3) y (1.1).

$$pxy\|\vec{D}\| = W = \sigma \Delta S = \sigma xy \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \|\vec{D}\|.$$

Por tanto,

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.5)$$

donde $1/R_1$ y $1/R_2$ son las curvaturas de los bordes del entorno rectangular que hemos considerado. Recordemos que la curvatura de una circunferencia de radio R es $1/R$.

La fórmula (1.5), denominada **ecuación de Laplace-Young**, nos proporciona una relación geométrica entre la presión p (o diferencia de presiones a ambos lados de la película), la tensión superficial σ y cómo se curva la superficie. Para ver distintas construcciones a partir de distintos contornos ver [8].

Superficies minimales y superficies de área mínima

Este segundo capítulo tiene como objetivo introducir la noción de superficie minimal. Previamente recordaremos algunas herramientas de la Geometría diferencial que nos permitirán desarrollar la Teoría de superficies minimales. En la última parte del capítulo discutiremos la relación entre superficies minimales y superficies de área mínima.

Antes de iniciar el capítulo fijaremos la siguiente notación. Sea $G : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable donde V es un abierto de \mathbb{R}^2 . Denotamos las primeras y segundas derivadas por

$$G_x = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad G_{xy} = \frac{\partial G_x}{\partial y},$$

con (x, y) coordenadas en V .

2.1. Teoría local de superficies. Curvaturas

Para traducir adecuadamente las propiedades físicas de las películas de jabón en propiedades matemáticas, debemos recordar algunos conceptos básicos en Teoría local de superficies que nos serán útiles.

Definición 2.1. Sea M un subespacio topológico de \mathbb{R}^3 . Una función

$$\begin{aligned} \vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow M \\ (u, v) &\rightarrow \vec{x}(u, v) \end{aligned}$$

se dice que es una **parametrización local** de M si

- U es abierto de \mathbb{R}^2 y $\vec{x}(U)$ abierto en M ,

- $\vec{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable,
- $\vec{x} : U \rightarrow \vec{x}(U)$ es un homeomorfismo,
- \vec{x} es regular, es decir, \vec{x}_u y \vec{x}_v son vectores linealmente independientes en todo punto.

En el caso particular en el que $\vec{x}(U) = M$ se dirá que la parametrización \vec{x} es **global**.

Definición 2.2. Sea M un subespacio topológico de \mathbb{R}^3 . Se dice que M es **superficie regular** si para cada punto $p \in M$ existe una parametrización local \vec{x} tal que $p \in \vec{x}(U) \subset M$. A $\vec{x}(U)$ se le denomina **entorno coordinado** de M y las componentes del par $(u, v) \in U$ tal que $p = \vec{x}(u, v)$ son las **coordenadas locales** de p .

Serán particularmente importantes en esta memoria las superficies regulares que son grafos de una función diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^2 .

Definición 2.3. Una superficie regular M se dirá que es **de Monge** si

$$M = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\},$$

donde f es una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 .

Observación 2.4. Nótese que toda superficie regular es localmente de Monge como consecuencia del Teorema de la función implícita.

Sean M una superficie regular, \vec{x} una parametrización local de M y $p \in \vec{x}(U) \subset M$. Un vector tangente \vec{v} en un punto p de M es el vector tangente en el punto p a una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\frac{d\alpha(0)}{dt} = \vec{v}$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p tiene estructura de espacio vectorial de dimensión 2 y se denomina **plano tangente** de M en p . Si fijamos una parametrización \vec{x} en un abierto que contenga a p , entonces

$$T_p M = \langle \vec{x}_u(p), \vec{x}_v(p) \rangle.$$

Sobre una superficie regular se puede considerar la métrica inducida por el producto escalar de \mathbb{R}^3 .

Definición 2.5. Sean M una superficie regular y $p \in M$. Se define la **primera forma fundamental** de M en p como la restricción del producto escalar euclídeo de \mathbb{R}^3 a $T_p M$, esto es

$$\begin{aligned} I_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{w}, \vec{z}) &\rightarrow \vec{w} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Fijada una parametrización local $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, con $p \in \vec{x}(U)$, tenemos que la matriz asociada a la primera forma fundamental viene dada por

$$I_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix}$$

donde $g_{uv}(u, v) = \vec{x}_u(u, v) \cdot \vec{x}_v(u, v), \forall (u, v) \in U$.

La matriz $I_{\vec{x}}$ es siempre simétrica y definida positiva. Denotamos por g a su determinante y se puede probar que $g = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^2$ (ver [9]).

Para estudiar la forma de una superficie, es crucial detectar cómo de rápido se aleja de su plano tangente en cada punto. Fijada una parametrización local $\vec{x}(u, v)$, podemos considerar el **campo normal** \vec{N} a la superficie en un entorno del punto p , definido por

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}.$$

Si estudiamos su variación en un entorno, podremos determinar cómo se curva la superficie.

Definición 2.6. Sean M una superficie regular, $p \in M$ y \vec{x} una parametrización local en un entorno de p . Dado $\vec{w} \in T_p M$, consideramos una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{w}$. Se define la **derivada direccional** en la dirección de \vec{w} como el vector

$$D_{\vec{w}} \vec{N} = \frac{d}{dt}(\vec{N} \circ \alpha)(0).$$

Se puede probar que la definición de derivada direccional no depende de la curva α elegida mientras pase por p con velocidad \vec{w} (ver [9]).

Definición 2.7. Sean M una superficie regular y $p \in M$. Se define el **operador forma o endomorfismo de Weingarten** de M en p como la aplicación lineal

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M \\ w \rightarrow S_p(\vec{w}) = -D_{\vec{w}} \vec{N}$$

donde \vec{N} es el campo normal en el entorno coordenado de p .

Fijada una parametrización $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ con $p = \vec{x}(u_0, v_0)$ donde $(u_0, v_0) \in U$, tenemos que la matriz asociada a S_p es

$$S_p = \begin{pmatrix} L_u^u & L_v^u \\ L_u^v & L_v^v \end{pmatrix}$$

respecto de la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$. Los términos de la matriz asociada al operador forma vienen determinados por el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -D_u \vec{N} &= L_u^u \vec{x}_u + L_u^v \vec{x}_v, \\ -D_v \vec{N} &= L_v^u \vec{x}_u + L_v^v \vec{x}_v. \end{aligned}$$

Al ser S_p una aplicación lineal, su determinante y su traza son invariantes ante cambio de base.

Definición 2.8. Sean M una superficie regular, \vec{v} un vector tangente unitario en $p \in M$ y \vec{N} el campo normal definido en un entorno abierto U . Se define la **curvatura normal** de M en el punto p y en la dirección de \vec{v} como

$$k_n(\vec{v}) = S_p(\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Fijado un punto $p \in M$ y un vector unitario $\vec{v} \in T_p M$, existe un único plano $\Pi_{\vec{v}}$ que pasa por p con vectores directores \vec{v} y $\vec{N}(p)$. Se llama **sección normal** de M en p a la curva $\Pi_{\vec{v}} \cap M$ y su curvatura en el punto p es $\pm k_n(\vec{v})$.

Definición 2.9. Sean M una superficie regular y $p \in M$. Se definen las **curvaturas principales** de M en p como los valores máximo y mínimo de curvatura normal y se denotan por k_1 y k_2 . Las direcciones correspondientes a los vectores \vec{w}_1 y \vec{w}_2 asociados respectivamente a k_1 y k_2 se denominan **direcciones principales**.

Se puede probar que las curvaturas principales son los autovalores de la matriz asociada al operador forma S_p y las direcciones principales están generadas por los correspondientes autovectores. Además estas direcciones son perpendiculares (ver [9]).

Ahora definiremos dos conceptos fundamentales en la Teoría de superficies.

Definición 2.10. Sean M una superficie regular y $p \in M$. Se definen:

- La **curvatura de Gauss** de M en p como el determinante de S_p , esto es,

$$K_p = \det(S_p) = k_1 k_2.$$

- La **curvatura media** de M en p como la semitraza de S_p , esto es,

$$H_p = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

A continuación, recordaremos otra forma de calcular la curvatura de Gauss y la curvatura media.

Definición 2.11. Sean M una superficie regular y $p \in M$. Se define la **segunda forma fundamental** de M en p como la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} II_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{w}, \vec{z}) &\rightarrow II_p(\vec{w}, \vec{z}) = S_p(\vec{w}) \cdot \vec{z}. \end{aligned}$$

Fijada una parametrización local $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, tenemos que la matriz asociada a $II_{\vec{x}}$ es

$$II_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} L_{uu} & L_{uv} \\ L_{vu} & L_{vv} \end{pmatrix},$$

donde $L_{uv} = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv}$. Nótese que $\vec{x}_{uv} = \vec{x}_{vu}$ y, por lo tanto, $L_{uv} = L_{vu}$.

Por último, recordamos las expresiones de las curvaturas media y de Gauss en función de la primera y segunda forma fundamental (ver [9]).

Proposición 2.12. Sean M una superficie regular y $p \in M$, entonces

$$K_p = \frac{L_{uu}L_{vv} - L_{uv}^2}{g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2}, \quad H_p = \frac{L_{uu}g_{vv} - 2L_{uv}g_{uv} + L_{vv}g_{uu}}{2g}.$$

En el Capítulo 3 se muestran dos rutinas para calcular estas curvaturas con Sagemath.

Una diferencia esencial entre la curvatura de Gauss y la curvatura media es que la primera es invariante por isometrías locales, es decir, la curvatura de Gauss es intrínseca a la superficie, mientras que la curvatura media no lo es.

Recordamos que dos superficies regulares M y N se dicen **localmente isométricas** si, para todo $p \in M$ existen $\vec{x} : U \rightarrow M$ e $\vec{y} : V \rightarrow N$ parametrizaciones de M y N respectivamente y un difeomorfismo $F : U \rightarrow V$ que conserve los coeficientes de la primera forma fundamental.

Veamos que la curvatura media no es un invariante por isometrías locales.

Consideramos un plano M parametrizado por

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, 0),$$

con $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Consideremos también un cilindro N parametrizado por

$$\vec{y}(u, v) = (\cos(u), \sen(u), v),$$

con $(u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

El plano y el cilindro son localmente isométricos por el difeomorfismo identidad $id : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Hallamos la primera forma fundamental de ambas superficies,

$$I_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sen^2(u) + \cos^2(u) & 0 \\ 0 & \sen^2(u) + \cos^2(u) \end{pmatrix} = I_{\vec{y}}.$$

La curvatura de Gauss del plano y del cilindro es 0. Sin embargo, la curvatura media del cilindro es distinta de cero, puesto que una de las curvaturas principales

es cero $k_1 = 0$ y la otra, al ser de una circunferencia, es $k_2 = \frac{1}{R} \neq 0$. Por lo tanto,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2R} \neq 0,$$

donde R es el radio de la circunferencia intersección del cilindro con el plano normal correspondiente a la dirección principal \vec{w}_2 .

Para saber más acerca del concepto de curvatura ver, por ejemplo, [4].

2.2. Superficies minimales

Ahora estamos en condiciones de desarrollar la Teoría de superficies minimales. En primer lugar, veremos la descripción geométrica del comportamiento de las películas de jabón. Posteriormente, introduciremos la noción de superficie minimal y veremos cómo las superficies minimales son precisamente las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange. Finalmente, distinguiremos un tipo especial de coordenadas que nos serán útiles para caracterizar las superficies minimales en términos de funciones armónicas.

2.2.1. Películas de jabón y curvatura media nula

En la obtención de la ecuación de Laplace-Young (ver Sección 1.2) podemos elegir los bordes del entorno rectangular utilizando las direcciones principales que, como ya comentamos, son perpendiculares. En un entorno lo suficientemente pequeño estas curvas son arcos de circunferencias de radios R_1 y R_2 .

Así, la fórmula (1.5) puede ser reescrita en términos de la curvatura media H

$$p = \sigma(k_1 + k_2) = \sigma 2H. \quad (2.1)$$

En el caso de una superficie jabonosa delimitada por una curva, la presión que ejerce el aire sobre la película es cero. Así,

$$p = 0 \Leftrightarrow H = 0.$$

Si una película de jabón encierra un volumen formando una burbuja, esto generará una presión constante de dentro a fuera, y por (2.1) se tiene que H es constante y positiva. De hecho, la única superficie conexa y compacta de curvatura media constante es la esfera, este es el Teorema de Alexandrov (ver [1]).

2.2.2. Definición y caracterización local

El comportamiento de las películas de jabón en relación con la presión del ambiente sugiere la siguiente definición.

Definición 2.13. Una superficie regular M se dirá que es **minimal** si su curvatura media es idénticamente cero.

El siguiente resultado muestra que el hecho de que la curvatura media sea nula condiciona la curvatura de Gauss de la superficie.

Proposición 2.14. Toda superficie minimal distinta del plano es hiperbólica, es decir, tiene curvatura de Gauss negativa.

Demostración. Si M es minimal, entonces $k_1 + k_2 = 0$ y por lo tanto $k_2 = -k_1$. Su curvatura de Gauss es, entonces

$$K = k_1 k_2 = -k_1^2 < 0.$$

□

Veremos a continuación una caracterización analítica y local de superficies minimales.

Como toda superficie regular es localmente de Monge, vamos a caracterizar las superficies minimales de Monge.

Proposición 2.15. Sea M una superficie de Monge parametrizada por $\vec{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$, donde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y U es un abierto de \mathbb{R}^2 . M es minimal si y solo si

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0. \tag{2.2}$$

Demostración. Un simple cálculo prueba que

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= (1, 0, f_u), & \vec{x}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\ \vec{x}_v &= (0, 1, f_v), & \vec{x}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}), \\ & & \vec{x}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que el campo normal \vec{N} es

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Obtenemos ahora los coeficientes de la primera y la segunda forma fundamental

$$g_{uu} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 1 + f_u^2, \quad L_{uu} = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

$$g_{uv} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = f_u f_v, \quad L_{uv} = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

$$g_{vv} = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 1 + f_v^2, \quad L_{vv} = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Utilizando la fórmula de la curvatura media de la Proposición 2.12 tenemos

$$H = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2)}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Así, es claro que

$$H = 0 \iff f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0.$$

□

La ecuación en derivadas parciales (2.2) se denomina **ecuación de Euler-Lagrange**. Nótese que las superficies que son solución de esta ecuación son precisamente las superficies minimales.

2.2.3. Coordenadas isotérmicas

En Geometría de superficies es importante que los conceptos no dependan de las coordenadas. Sin embargo, elegir coordenadas especiales en una superficie puede facilitar el estudio de la misma. Este es el caso de las coordenadas isotérmicas.

Definición 2.16. *Sea M una superficie regular. Se dice que una parametrización local $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es **isotérmica** si*

$$\begin{aligned} \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v, \\ \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_u = 0. \end{aligned}$$

En tal caso la matriz asociada a la primera forma fundamental sería

$$I_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} g_{uu} & 0 \\ 0 & g_{uu} \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas isotérmicas existen para toda superficie regular. Nosotros nos centraremos en demostrar que existen para toda superficie minimal (para una superficie cualquiera ver [2]). Para probarlo necesitamos un lema de carácter técnico.

Lema 2.17. *Sea M una superficie minimal de Monge parametrizada por $\vec{z}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ con f una función diferenciable. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \quad (2.3)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right). \quad (2.4)$$

Demostración. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \\ & = - \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} [f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}(1 + f_x^2)] = 0. \end{aligned}$$

Nótese que la última igualdad es consecuencia de que M es minimal y, por tanto, satisface la ecuación de Euler-Lagrange.

Por simetría se prueba también (2.4). □

Demostremos ahora el resultado que hemos anunciado anteriormente.

Teorema 2.18. *Sea M una superficie minimal. Entonces, para todo $p \in M$, existe una parametrización isotérmica $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ tal que $p \in \vec{x}(U) \subset M$.*

Demostración. Supongamos que M es de Monge. Tomamos una parametrización $\vec{z}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ donde $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Tenemos que su primera forma fundamental viene dada por

$$I_{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 1 + f_x & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y \end{pmatrix}.$$

Buscamos un cambio de coordenadas con una transformación de la forma siguiente

$$\begin{aligned} T : V \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (u, v) = (x + \Omega(x, y), y + \Phi(x, y)), \end{aligned}$$

donde $\Omega, \Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables.

Entonces su matriz jacobiana es

$$J(T) = \begin{pmatrix} 1 + \Omega_x & \Omega_y \\ \Phi_x & 1 + \Phi_y \end{pmatrix}$$

y tiene matriz inversa

$$(J(T))^{-1} = \frac{1}{\det(J(T))} \begin{pmatrix} 1 + \Phi_y & -\Omega_y \\ -\Phi_x & 1 + \Omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que la parametrización local que buscamos $\vec{x} = \vec{z} \circ T^{-1}$ sería aquella que verificara lo siguiente

$$\vec{x}_u = h \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u} \right) = h^2 (1 + \Phi_y, -\Phi_x, f_x(1 + \Phi_y) - f_y \Phi_x),$$

$$\vec{x}_v = h \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v} \right) = h^2 (-\Omega_y, 1 + \Omega_x, -f_x \Omega_y + f_y(1 + \Omega_x)),$$

donde $h = \frac{1}{\det(J(T))}$.

Si imponemos que \vec{x} sea isotérmica, es decir

$$\vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v, \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_u = 0.$$

Obtendremos

$$\Omega_x = \frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \Omega_y = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad (2.5)$$

$$\Phi_x = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \Phi_y = \frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \quad (2.6)$$

Resta ver que existen Ω y Φ verificando (2.5) y (2.6). Para ello comprobaremos que se satisface la condición de Schwarz, es decir, veremos que

$$\begin{aligned} \Phi_{xy} &= \Phi_{yx}, \\ \Omega_{xy} &= \Omega_{yx}. \end{aligned}$$

Como M es minimal, por el Lema 2.17, tenemos que

$$\Omega_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \Omega_{yx}$$

y por simetría,

$$\Phi_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = \Phi_{xy}.$$

Por lo tanto, Ω y Φ existen y hacen a \vec{x} isotérmica. \square

2.2.4. Superficies minimales y funciones armónicas

Utilizando las coordenadas isotérmicas en superficies minimales de Monge es posible dar otra caracterización de superficie minimal en términos de funciones armónicas.

En primer lugar recordamos el concepto de función armónica.

Definición 2.19. Sea $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Diremos que h es **armónica** en U si

$$h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Sea $\vec{h} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Diremos que \vec{h} es armónica si $p_i \circ \vec{h}$ son armónicas para todo i , donde $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la i -ésima proyección con $i = 1, 2, \dots, n$.

Para probar la caracterización mencionada necesitamos un lema previo.

Lema 2.20. Sean M superficie regular y $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización local. Si \vec{x} es isotérmica entonces

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = (2g_{uu}H)\vec{N}.$$

Demostración. Partiendo de la expresión de la curvatura media de la Proposición 2.12 tenemos

$$H = \frac{(\vec{x}_{uu} \cdot \vec{N})(\vec{x}_v \cdot \vec{x}_v) - 2(\vec{x}_{uv} \cdot \vec{N})(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v) + (\vec{x}_{vv} \cdot \vec{N})(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_u)}{2g}.$$

Usando que \vec{x} es isotérmica se tiene que

$$\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0, \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v.$$

Con lo que

$$H = \frac{g_{uu}(\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}) \cdot \vec{N}}{2g}, \tag{2.7}$$

donde $g = \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^2$. Como \vec{x} es isotérmica, se tiene que

$$g = \|\vec{x}_u\|^2 \|\vec{x}_v\|^2 = g_{uu}^2. \tag{2.8}$$

Sustituyendo en (2.7) deducimos

$$2g_{uu}H = (\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}) \cdot \vec{N}.$$

Así, como $g_{uu} \neq 0$ (véase (2.8)),

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \lambda_1 \vec{x}_u + \lambda_2 \vec{x}_v + 2g_{uu}H\vec{N}.$$

Veamos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Como $\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$,

$$(\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}) \cdot \vec{x}_u = \lambda_1 g_{uu}. \quad (2.9)$$

Como \vec{x} es isotérmica,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_u) &= \frac{\partial}{\partial u}(\vec{x}_v \cdot \vec{x}_v) \Rightarrow \vec{x}_{uu} \cdot \vec{x}_u = \vec{x}_{vu} \cdot \vec{x}_v, \\ \frac{\partial}{\partial v}(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v) &= 0 \Rightarrow \vec{x}_{uv} \cdot \vec{x}_v + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} = 0. \end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones se sigue que

$$(\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv}) \cdot \vec{x}_u = 0.$$

De esto y de (2.9), deducimos que $\lambda_1 = 0$, ya que g_{uu} no puede ser cero porque $g = g_{uu}^2$.

De igual manera se puede probar que $\lambda_2 = 0$.

Se concluye entonces

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = (2g_{uu}H)\vec{N}.$$

□

Ya estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta subsección.

Teorema 2.21. *Sea M una superficie regular con parametrización isotérmica $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. M es minimal si y solo si \vec{x} es armónica en U .*

Demostración. Si M es minimal, su curvatura media es $H = 0$ y como \vec{x} es isotérmica, tenemos por el Lema 2.20 que $\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = 0$.

Recíprocamente, si \vec{x} es armónica, entonces $\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = 0$ y como \vec{x} es isotérmica, tenemos por el Lema 2.20 que $(2g_{uu}H)\vec{N} = 0$. Sabemos que $g_{uu} \neq 0$ y $\vec{N} \neq \vec{0}$. Así que necesariamente $H = 0$ y, por lo tanto, M es minimal. □

2.3. El problema de Plateau

Una pregunta razonable es por qué a este tipo de superficies se las denomina minimales. En esta sección responderemos a esta cuestión. Para empezar recordaremos el concepto de área de una superficie. En lo que sigue nos referiremos a \bar{D} como una región cerrada y simplemente conexa en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.22. Sean M una superficie regular, $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización local de M y $D = \vec{x}(\bar{D}) \subset \vec{x}(U) \subset M$ donde $\bar{D} \subset U$.

Se define el **área** de D respecto de \vec{x} como

$$A_{\vec{x}}(D) = \iint_{\bar{D}} \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| dudv. \tag{2.10}$$

Observación 2.23. Se puede probar que el área es un concepto geométrico, es decir, no depende de la parametrización local \vec{x} elegida (ver [9]).

Sea Γ una curva embebida en \mathbb{R}^3 . El **problema de Plateau** consiste en encontrar una superficie M inmersa en \mathbb{R}^3 de área mínima tal que Γ sea borde de M . El siguiente resultado da la relación entre superficies de área mínima y superficies minimales.

Teorema 2.24. Sean M una superficie regular, $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización local de M y $D = \vec{x}(\bar{D}) \subset \vec{x}(U) \subset M$ donde $\bar{D} \subset U$. Si el área de D es mínima entonces D es superficie minimal.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que M es de Monge, es decir, M tiene parametrización

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

con $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $(u, v) \in U$ abierto de \mathbb{R}^2 . De la Proposición 2.15, tenemos que

$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2},$$

y, por tanto,

$$A_{\vec{x}}(D) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Consideramos ahora una familia de deformaciones de D que dejen a su frontera $C = \partial D$ fija, esto es,

$$M_t : \vec{x}^t(u, v) = (u, v, f(u, v) + tg(u, v)),$$

con $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en \bar{D} con $g|_{\bar{C}} = 0$ donde $\bar{C} = \partial \bar{D}$ y además $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces, por la definición de área,

$$A_{\vec{x}^t}(D) = \iint_{\bar{D}} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)} dudv.$$

Como $A_{\vec{x}^0}(D) = A_{\vec{x}}(D)$ corresponde con el mínimo y

$$A'_{\vec{x}^t}(D) = \iint_{\bar{D}} \frac{f_u g_u + f_v g_v + t(g_u^2 + g_v^2)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2 + 2t(f_u g_u + f_v g_v) + t^2(g_u^2 + g_v^2)}} dudv,$$

tenemos que

$$A'_{\bar{x}^0}(D) = \iint_{\bar{D}} \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dudv = 0. \quad (2.11)$$

Sean

$$P = \frac{f_u g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad Q = \frac{f_v g}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}.$$

Teniendo en cuenta que $g|_{\bar{C}} = 0$ y aplicando el Teorema de Green sobre \bar{C} deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\bar{C}} Pdv - Qdu = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} \right) dudv = \\ &= \iint_{\bar{D}} \frac{g[f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv}]}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} dudv + \iint_{\bar{D}} \frac{f_u g_u + f_v g_v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} dudv. \end{aligned}$$

Usando (2.11), se deduce que, para todo g ,

$$\iint_{\bar{D}} \frac{g[f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv}]}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} dudv = 0.$$

Así,

$$f_{uu}(1 + f_v^2) + f_{vv}(1 + f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv} = 0.$$

Por la Proposición 2.15, concluimos la minimalidad de M . □

En virtud de este teorema, tenemos que las superficies minimales son las únicas candidatas a resolver el problema de Plateau. El recíproco no es cierto en general, esto es, existen superficies minimales que no son de área mínima con respecto a su borde. Veremos un ejemplo en el siguiente capítulo.

Ejemplos de superficies minimales

En este capítulo mostraremos varios ejemplos de superficies minimales y estudiaremos sus características básicas. Con Sagemath determinaremos sus representaciones gráficas y calcularemos sus curvaturas medias y de Gauss, así como sus áreas.

Sagemath es un software libre. Su nombre procede de las siglas en inglés *Software for Algebra and Geometry Experimentation*. Está basado en el lenguaje Python y fue creado como una alternativa libre de código abierto a Magma, Maple, Mathematica y Matlab. Podemos acceder a su página electrónica utilizando el siguiente enlace www.sagemath.org/es/.

Definimos las rutinas generales. En primer lugar declaramos las variables

```
u, v = var('u, v')
```

Es necesario definir una función que calcule la norma dado que la rutina ya implementada en Sagemath utiliza valores absolutos, los cuales entorpecen los cálculos.

```
def norma(w): #w es un vector.  
return (sqrt(w[0]^2+w[1]^2+w[2]^2)).simplify_trig()
```

Con esto, definimos el vector unitario.

```
def unitario(w): #w es un vector.  
return (w/norma(w)).simplify_trig()
```

Definimos ahora un bucle para simplificar al máximo las expresiones trigonométricas.

```
def simp_trig(f):  
    number=1 # Inicializamos un contador.  
    old=f # Guarda la expresion susceptible de ser simplificada.  
    new=old.simplify_trig() # Simplifica.  
    while 1: # Comienza el bucle.
```

```

    if hash(new)==hash(old): # Si no se simplifica.
        return old # Devuelve la expresion.
    else: # En otro caso.
        old=new # Actualiza.
        new=new.simplify_trig()
        if number>50: # Evita el bucle infinito.
            return old
number=number+1

```

Para el cálculo de las curvaturas hemos definido las siguientes rutinas atendiendo a las fórmulas (2.12). La rutina para la curvatura de Gauss es la siguiente:

```

def Curvatura_Gauss(F,G,H):
    X=(F,G,H)
    xu=vector(SR,[diff(X[0],u),diff(X[1],u),diff(X[2],u)])
    # SR denota un anillo que utiliza expresiones simbolicas
    # diff(funcion f, variable x [,n]) funcion que deriva
    # f respecto de la variable x n veces.
    # El parametro n es opcional.
    xv=vector(SR,[diff(X[0],v),diff(X[1],v),diff(X[2],v)])
    guu=xu.dot_product(xu)
    guv=xu.dot_product(xv)
    gvv=xv.dot_product(xv)
    # Calculo de los coeficientes de la primera forma fundamental.
    N=unitario(xu.cross_product(xv))
    # unitario es una funcion creada anteriormente.
    xuu=vector(SR,[diff(xu[0],u),diff(xu[1],u),diff(xu[2],u)])
    xuv=vector(SR,[diff(xu[0],v),diff(xu[1],v),diff(xu[2],v)])
    xv=vector(SR,[diff(xv[0],v),diff(xv[1],v),diff(xv[2],v)])
    # Calculo de las segundas derivadas.
    Luu=xuu.dot_product(N)
    Luv=xuv.dot_product(N)
    Lvv=xv.dot_product(N)
    # Calculo de los coeficientes de la segunda forma fundamental.
    K=((Luu*Lvv-Luv^2)/(guu*gvv-guv^2))
    K=K.reduce_trig()
    K=K.simp_trig(K)
    return K

```

y la rutina para la curvatura media es:

```

def Curvatura_media(F,G,H):
    X=(F,G,H)
    xu=vector(SR,[diff(X[0],u),diff(X[1],u),diff(X[2],u)])
    xv=vector(SR,[diff(X[0],v),diff(X[1],v),diff(X[2],v)])
    guu=xu.dot_product(xu)
    guv=xu.dot_product(xv)
    gvv=xv.dot_product(xv)

```

```

N=unitario(xu.cross_product(xv))
xuu=vector(SR,[diff(xu[0],u),diff(xu[1],u),diff(xu[2],u)])
xuv=vector(SR,[diff(xu[0],v),diff(xu[1],v),diff(xu[2],v)])
xvv=vector(SR,[diff(xv[0],v),diff(xv[1],v),diff(xv[2],v)])
Luu=xuu.dot_product(N)
Luv=xuv.dot_product(N)
Lv v=xvv.dot_product(N)
H=((Luu*gvv-2*Luv*guv+Lv v*guu)/(2*discriminante))
H=H.reduce_trig()
H=simp_trig(H)
return H

```

También hemos implementado la siguiente rutina para el cálculo de áreas:

```

def area(F,G,H,u1,u2,v1,v2):
    X=(F,G,H)
    xu=vector(SR,[diff(X[0],u),diff(X[1],u),diff(X[2],u)])
    xv=vector(SR,[diff(X[0],v),diff(X[1],v),diff(X[2],v)])
    return
    integral(integral(norma(xu.cross_product(xv)),v,v1,v2),
    u,u1,u2)

```

3.1. Superficies de revolución minimales

En esta sección trataremos de determinar las superficies de revolución que son minimales.

Definición 3.1. *Una superficie regular M se dirá que es **de revolución** si está generada por la rotación de una curva plana α a la que llamamos generatriz, alrededor de un eje de revolución coplanario con α .*

Para obtener una parametrización de la superficie de revolución consideramos una referencia donde la curva plana α esté contenida en el plano $z = 0$ y el eje de revolución esté determinado por las ecuaciones $y = 0$, $z = 0$.

Entonces una parametrización de α es

$$\alpha(u) = (f(u), h(u), 0),$$

donde f y h son funciones diferenciables en el intervalo I , dominio de α . Por consiguiente, la ecuación paramétrica de una superficie de revolución es

$$\vec{x}(u, v) = (f(u), h(u)\cos(v), h(u)\sen(v)), \quad v \in [0, 2\pi], \quad u \in I.$$

Nótese que si c es una constante y $f = c$, entonces la superficie está contenida en el plano $x = c$. En este caso α está contenida en la recta $x = c$, $z = 0$. Por

tanto, el plano es un ejemplo de superficie de revolución.

Otro ejemplo de este tipo de superficie es la generada por la curva catenaria.

La catenaria es la curva descrita por una cuerda flexible e inextensible sometida a un campo gravitatorio uniforme con los extremos fijos a una misma altura.

La catenaria tiene la siguiente parametrización (consultar [7]).

$$\alpha(u) = (u, \cosh(u)).$$

Definición 3.2. La *catenoide* es la superficie de revolución generada por la curva catenaria cuando rota alrededor de un eje coplanario rectilíneo, perpendicular al eje de simetría de la catenaria.

Fijado el sistema de referencia en \mathbb{R}^3 , la catenoide se parametriza de la siguiente manera

$$\vec{x}(u, v) = (u, b\cosh(u)\cos(v), b\cosh(u)\sen(v)), \quad v \in [0, 2\pi], \quad u \in I,$$

donde b es una constante.

Proposición 3.3. La catenoide es una superficie minimal.

Demostración. Veamos primero que \vec{x} es isotérmica. En efecto,

$$\begin{aligned}\vec{x}_u &= (1, \senh(u)\cos(v), \senh(u)\sen(v)), \\ \vec{x}_v &= (0, -\cosh(u)\sen(v), -\cosh(u)\cos(v)).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\vec{x}_u \cdot \vec{x}_u &= 1 + \senh^2(u)\cos^2(v) + \senh^2(u)\sen^2(v) = 1 + \senh^2(u) = \cosh^2(u), \\ \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v &= 0 + \cosh^2(u)\sen^2(v) + \cosh^2(u)\cos^2(v) = \cosh^2(u), \\ \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_u = 0.\end{aligned}$$

Luego, \vec{x} es isotérmica.

Para demostrar que la catenoide es una superficie minimal, basta probar que \vec{x} es armónica (ver Teorema 2.21).

Un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= (0, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sen(v)), \\ \vec{x}_{vv} &= (0, -\cosh(u)\cos(v), -\cosh(u)\sen(v)).\end{aligned}$$

Así,

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$$

y, en virtud del Teorema 2.21, tenemos que $H = 0$. □

Con Sagemath determinamos la representación gráfica de una catenoide y de sus curvas coordenadas notables.

```
sage: X_cat=(f_cat , g_cat , h_cat)
sage: cat1=parametric_plot3d(X_cat , (u, -2, 2) , (v, -4, 4))
sage: cat2=parametric_plot3d(X_cat , (u, -0.02, 0.02) , (v, -4, 4))
sage: cat3=parametric_plot3d(X_cat , (u, -2, 2) , (v, -0.02, 0.02))
sage: show(cat1+cat2+cat3)
```

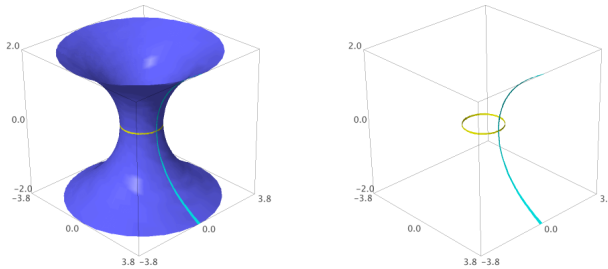


Figura 3.1. La catenoide y sus curvas coordenadas $\vec{x}(0, v)$ y $\vec{x}(u, 0)$.

Con Sagemath se calculan las curvaturas media y de Gauss obteniendo

```
sage: Curvatura_media(f_cat , g_cat , h_cat)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_cat , g_cat , h_cat)
> K=-1/cosh(u)^4
```

Además, obtenemos una fórmula general para el área de una catenoide,

```
sage: area(f_cat , g_cat , h_cat , u1, u2, v1, v2)
# los parametros u1 y u2 determinan la longitud.
# los parametros v1 y v2 determinan el angulo.
> 1/8*((4*u1*e^(2*u1)+e^(4*u1)-1)*e^(-2*u1)-(4*u2*e^(2*u2)
+e^(4*u2)-1)*e^(-2*u2))*(v1-v2)
```

Veamos a continuación que la catenoide es la única superficie de revolución minimal no trivial.

Teorema 3.4. *Si una superficie regular de revolución M es minimal, entonces M está contenida en un plano o en una catenoide.*

Demostración. Partimos de la parametrización de M

$$\vec{x}(\bar{u}, \bar{v}) = (f(\bar{u}), g(\bar{u})\cos(\bar{v}), g(\bar{u})\sen(\bar{v})),$$

donde $\alpha(\bar{u}) = (f(\bar{u}), g(\bar{u}), 0)$ es la curva generatriz de la superficie.

Distinguimos dos casos:

• **Si suponemos que $f(\bar{u}) = c$ con $c \in \mathbb{R}$** , entonces la superficie está contenida en el plano $x = c$.

• **En caso contrario, existe \bar{u}_0 tal que $f'(\bar{u}_0) \neq 0$** , entonces existe $U \in \text{Ent}(\bar{u}_0)$ tal que $f'(u) \neq 0$, para todo $u \in U$. Para simplificar cálculos, realizamos el siguiente cambio de variable

$$u = f(\bar{u}), v = \bar{v},$$

cuya matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} f'(\bar{u}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El jacobiano es no nulo en U y, por tanto, define un cambio de coordenadas. Así, tras este cambio de coordenadas, la parametrización es

$$\vec{x}(u, v) = (u, h(u)\cos(v), h(u)\sen(v)),$$

donde $h = g \circ f^{-1}$.

Calculamos entonces los términos de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 1 + h'(u)^2, \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = h(u)^2, \end{aligned}$$

y las segundas derivadas

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= (0, h''(u)\cos(v), h''(u)\sen(v)), \\ \vec{x}_{vv} &= (0, -h(u)\cos(v), -h(u)\sen(v)). \end{aligned}$$

De la Proposición 2.12, como $g_{uv} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$, obtenemos la curvatura media

$$H = \frac{\vec{x}_{uu}g_{vv} - 2\vec{x}_{uv}g_{uv} + \vec{x}_{vv}g_{uu}}{2g} \cdot \vec{N} = \frac{\vec{x}_{uu}g_{vv} + \vec{x}_{vv}g_{uu}}{2g} \cdot \vec{N}.$$

Como M es minimal, entonces $H = 0$ y, por lo tanto,

$$0 = (\vec{x}_{uu}g_{vv} + \vec{x}_{vv}g_{uu}) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = -h^2(hh'' - 1 - h'^2).$$

Si $h(u) = 0$ para todo u , tendríamos

$$\vec{x}(u, v) = (f(u), 0, 0).$$

Pero esta no es una parametrización de una superficie regular. Así, podemos suponer que $h(u) \neq 0$ en un entorno coordenado en el cual

$$hh'' = 1 + h'^2. \quad (3.1)$$

Nótese que si $h'(u) = 0$ para todo u , entonces la ecuación (3.1) no se satisface. Así que podemos suponer que $h'(u) \neq 0$ en un entorno coordenado. En tal caso, por el Teorema de la función inversa, tenemos que existe una función ϕ tal que $u = \phi(h)$. Derivando con respecto de u se tiene que

$$1 = \frac{d\phi}{dh} h',$$

y, por lo tanto,

$$h' = \frac{1}{\frac{d\phi}{dh}}.$$

Así, $m = h'$ depende de h y

$$h'' = \frac{dm}{dh} h' = w \frac{dm}{dh}.$$

Entonces la ecuación (3.1) se puede reescribir de la siguiente manera

$$hw \frac{dm}{dh} = 1 + w^2,$$

o equivalentemente,

$$\frac{m}{1+m^2} dm = \frac{dh}{h}.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{1}{2} \ln(1+m^2) = \ln(h) + \ln(c), c \in \mathbb{R}$$

Luego $\sqrt{1+w^2} = ch$.

Despejando m y deshaciendo el cambio de variable,

$$m = \frac{dh}{du} = \sqrt{c(h(u))^2 - 1},$$

o equivalentemente,

$$\frac{dh}{\sqrt{c(h(u))^2 - 1}} = du.$$

Integrando de nuevo,

$$\frac{1}{c} \operatorname{arcosh}(ch(u)) = u + b,$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es otra constante.

Finalmente, despejando $h(u)$ se concluye que

$$h(u) = \frac{1}{c} \cosh(cu + cb).$$

Concluimos entonces que $\alpha(u) = (u, h(u), 0)$ es la curva catenaria y, por lo tanto, \vec{x} es una catenoide. \square

Ciertas catenoides son contraejemplos para el recíproco del Teorema 2.24. En efecto, consideramos una catenoide C con eje de revolución el eje OX y con curva generatriz la catenaria

$$\alpha(u) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sen(v), 0), \quad u \in I = [u_1, u_2] \subset \mathbb{R}.$$

El área de la catenoide delimitada por las circunferencias de radios $r_i = \cosh(u_i)$ con $i = 1, 2$ es

$$\begin{aligned} A(C) &= \iint_{I \times [0, 2\pi]} \|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| \, dudv = \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_0^{2\pi} \cosh(u) \sqrt{\sen^2 h(u)^2 + 1} \, dv \right) du = \\ &= 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \cosh(u) \sqrt{1 + \sen^2 h(u)} \, du = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \cosh^2(u) \, du = \\ &= \frac{\pi}{2} [\sen h(2u_2) - \sen h(2u_1) + 2(u_2 - u_1)]. \end{aligned}$$

Consideramos ahora los discos D_1 y D_2 delimitados por las circunferencias borde de la catenoide con radios respectivos r_1 y r_2 y sumamos sus áreas

$$\begin{aligned} A(D_1) + A(D_2) &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(\cosh^2(u_1) + \cosh^2(u_2)) = \\ &= \frac{\pi}{2} (2 + \cosh(2u_1) + \cosh(2u_2)). \end{aligned}$$

Una vez obtenidas las áreas de C y de $D = D_1 \cup D_2$, podremos discutir cuándo una es menor que la otra en función de los parámetros u_1 y u_2 .

Así $A(C) < A(D)$ cuando

$$\sen h(2u_2) - \sen h(2u_1) + 2(u_2 - u_1) < 2 + \cosh(2u_1) + \cosh(2u_2)$$

o equivalentemente,

$$(u_2 - u_1) - \frac{(e^{2u_1} + e^{-2u_2})}{2} < 1.$$

Si denotamos por F a la función

$$F(u_1, u_2) = (u_2 - u_1) - \frac{(e^{2u_1} + e^{-2u_2})}{2} - 1,$$

tenemos

$$\begin{cases} A(C) < A(D), & \text{si } F(u_1, u_2) < 0 \\ A(C) > A(D), & \text{si } F(u_1, u_2) > 0. \end{cases}$$

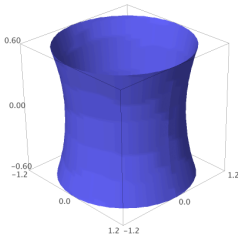
En el caso particular $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, tenemos que $F(-1, 1) = 1 - e^{-2} > 0$. Por lo tanto, esta catenoide, siendo minimal, no es la superficie de área mínima para sus bordes. En este caso, la superficie de área mínima es disconexa y sus componentes conexas son los discos D_1 y D_2 .

Con Sagemath, definimos una función que reciba los parámetros relativos a la longitud del eje de la catenoide y que nos determine si es la superficie de área mínima con respecto a su borde o si, por el contrario, lo son los discos.

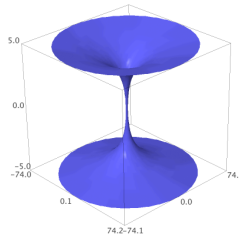
```
def Decide_Catenoide(u1,u2):
    if u2-u1-(exp(2*u1)+exp(-2*u2))/2-1<0:
        print("Esta catenoide minimiza el area.")
    else:
        print("Esta catenoide no minimiza el area.")
```

Estudiando ambos casos,

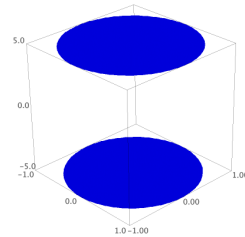
```
sage: Decide_Catenoide(-0.5,0.5)
> "Esta catenoide minimiza el area."
sage: Decide_Catenoide(-5,5)
> "Esta catenoide no minimiza el area."
```



Minimiza el área.



No minimiza el área.



Minimiza el área.

Para ver una discusión experimental consultar [11].

3.2. Superficies regladas minimales

Mostraremos ahora qué superficies regladas son minimales.

Definición 3.5. Una superficie regular M se dice **reglada** si para todo punto $p \in M$ existe una recta que pasa por p contenida en M .

Las superficies regladas se parametrizan localmente de la siguiente manera

$$\vec{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

donde α es la **curva directriz** y $\beta(u)$ es el vector director unitario de cada recta que pasa por $\alpha(u)$.

El primer ejemplo de superficie reglada es el plano. Aquí α es una recta contenida en ese plano y $\beta(u)$ es un vector unitario constante del plano en una dirección distinta de la del vector director de la recta α .

Un segundo ejemplo es el helicoides. Esta superficie se construye a partir de una **hélice circular**, esto es, una curva regular tal que existe un vector unitario \vec{u} que determina un ángulo constante con el vector tangente a la curva.

Definición 3.6. El **helicoides** es una superficie reglada generada por las rectas que pasan por la hélice circular y por su eje, sobre el que inciden siempre perpendicularmente.

Fijado un sistema de referencia en \mathbb{R}^3 donde el eje de la hélice coincide con el eje OZ , el helicoides está parametrizado por

$$\vec{x}(u, v) = (v\cos(u), v\sen(u), au),$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Nótese que

$$\vec{x}(u, v) = (0, 0, au) + v(\cos(u), \sen(u), 0) = \alpha(u) + v\beta(u).$$

Con Sagemath determinaremos su representación gráfica

```
sage: X_hel=(f_hel, g_hel, h_hel)
sage: hel1=parametric_plot3d(X_hel, (u, -8, 8), (v, 0, 2*pi))
sage: hel2=parametric_plot3d(X_hel, (u, -0.01, 0.01), (v, 0, 2*pi))
sage: hel3=parametric_plot3d(X_hel, (u, -8, 8), (v, pi-0.05, pi+0.05))
sage: show(hel1+hel2+hel3)
```

Proposición 3.7. El helicoides es una superficie minimal.

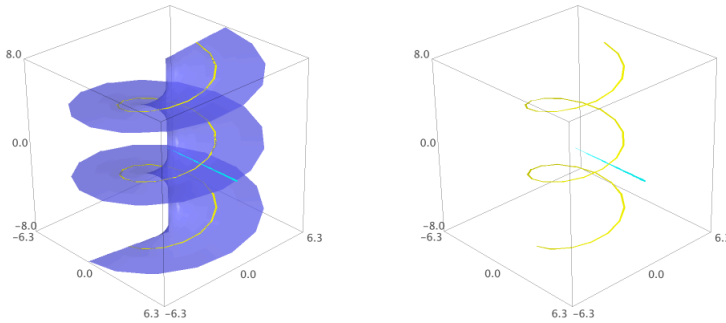


Figura 3.2. El helicoide y sus curvas coordenadas $\vec{x}(0, v)$ y $\vec{x}(u, \pi)$.

Demostración. Obtenemos los términos de la primera forma fundamental del helicoide

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = v^2 + a^2, \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 1, \\ g_{uv} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0, \end{aligned}$$

y las segundas derivadas

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu}(u, v) &= (-v\cos(u), -v\sen(u), 0), \\ \vec{x}_{vv}(u, v) &= (0, 0, 0), \\ \vec{x}_{uv}(u, v) &= (-\sen(u), \cos(u), 0). \end{aligned}$$

Ahora, de la Proposición 2.12, tenemos

$$H = \frac{g_{vv}\vec{x}_{uu} \cdot \vec{N}}{2g} = \frac{(-v\cos(u), -v\sen(u), 0) \cdot (-\sen(u), \cos(u), -v)}{2g} = 0.$$

□

Calculamos las curvatura media y de Gauss del helicoide

```
sage: Curvatura_media(f_hel, g_hel, h_hel)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_hel, g_hel, h_hel)
> K=-1/(v^2+1)^2
```

Además, se puede calcular una fórmula general para el área del helicoide como sigue

```

sage: assume (v2-v1 >0)
sage: area(f_hel,g_hel,h_hel,u1,u2,v1,v2)
#los parametros u1 y u2 determinan la longitud.
#los parametros v1 y v2 determinan el angulo.
> 1/2*(sqrt(v1^2 + 1)*v1 - sqrt(v2^2 + 1)*v2 +
+ arcsinh(v1) - arcsinh(v2))*(u1 - u2)

```

Veamos a continuación que no existen superficies regulares, no triviales, regladas y minimales distintas del helicoide.

Teorema 3.8 (de Catalan). *Si una superficie regular reglada M es minimal, entonces M está contenida en un plano o en un helicoide.*

Demostración. Tomamos la parametrización de una superficie reglada

$$\vec{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

con $\|\beta(u)\| = 1$. Distinguiremos dos casos:

- Si $\beta'(u) = 0$ para todo u , tendríamos que $\beta(u)$ es un vector constante \vec{c} y en este caso, la parametrización de la superficie es

$$\vec{x}(u, v) = \alpha(u) + v\vec{c}.$$

Los términos de su primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 1, \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 1, \\ g_{uv} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = \alpha'(u) \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha'(u) \cdot \vec{c} = 0$. De no ser así, podríamos reemplazar α por

$$\bar{\alpha}(u) = \alpha(u) - (\alpha'(u) \cdot \vec{c})\vec{c},$$

y v por

$$\bar{v} = v + \alpha'(u) \cdot \vec{c}.$$

Nótese que $\bar{\alpha}(u) \cdot \vec{c} = 0$ y $\vec{x}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + \bar{v}\beta(u)$. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\alpha'(u) \cdot \vec{c} = 0. \quad (3.2)$$

Por consiguiente,

$$\vec{c} \cdot \alpha''(u) = 0. \quad (3.3)$$

Las segundas derivadas de la parametrización \vec{x} son

$$\vec{x}_{uu} = \alpha''(u), \quad \vec{x}_{vv} = \vec{0}, \quad \vec{x}_{uv} = \vec{0}.$$

Como M es minimal,

$$H = \frac{\vec{x}_{uu}g_{vv} - 2\vec{x}_{uv}g_{uv} + \vec{x}_{vv}g_{uu}}{2g} \cdot \vec{N} = 0$$

y sustituyendo obtenemos que

$$\alpha''(u) \cdot (\alpha'(u) \times \vec{c}) = 0.$$

De esta relación deducimos que \vec{c} , $\alpha'(u)$ y $\alpha''(u)$ son linealmente dependientes. Entonces $\vec{c} = \lambda(u)\alpha''(u) + \mu(u)\alpha'(u)$ o bien $\alpha''(u) = \lambda(u)\alpha'(u)$.

En el primer caso, multiplicando escalarmente por \vec{c} y usando (3.2) y (3.3) tendríamos que $1 = 0$. Luego necesariamente $\alpha''(u) = \lambda(u)\alpha'(u)$.

Calculamos la curvatura de α ,

$$\kappa(\alpha) = \frac{\|\alpha'(u) \times \alpha''(u)\|}{\|\alpha'(u)\|^3} = \frac{\|\alpha'(u) \times \lambda(u)\alpha'(u)\|}{\|\alpha'(u)\|^3} = 0.$$

Tenemos entonces que α es una recta y, como $\alpha'(u) \cdot \vec{c} = 0$, se deduce que

$$\vec{x}(u, v) = \alpha(u) + v\vec{c}$$

es la parametrización del plano que contiene a la recta α y a las rectas que pasan por α y tienen por vector director \vec{c} .

• **Supongamos ahora que existe u_0 tal que $\beta'(u_0) \neq 0$.** Entonces existe $V \in Ent(u_0)$ donde $\beta'(u) \neq 0$ para todo $u \in V$.

Podemos tomar la parametrización natural de β , es decir, $\|\beta'(u)\| = 1$ y suponer que $\alpha'(u) \cdot \beta'(u) = 0$. De no ser así podríamos considerar

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u) &= \alpha(u) - (\alpha'(u) \cdot \beta'(u))\beta(u), \\ \bar{v} &= v + \alpha'(u) \cdot \beta'(u). \end{aligned}$$

Entonces es claro que

$$\vec{x}(u, \bar{v}) = \bar{\alpha}(u) + \bar{v}\beta(u).$$

Como hemos tomado $\beta(u)$ unitario y además β es la parametrización natural, tenemos que

$$\beta(u) \cdot \beta'(u) = \beta'(u) \cdot \beta''(u) = 0. \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones y que $\|\beta'(u)\| = 1$, obtenemos

$$\bar{\alpha}'(u) \cdot \beta'(u) = (\alpha'(u) - \frac{d}{du}(\alpha'(u) \cdot \beta'(u))\beta(u) - (\alpha'(u) \cdot \beta'(u))\beta'(u)) \cdot \beta'(u) = 0.$$

Por lo tanto, para nuestra parametrización inicial de la superficie reglada \vec{x} se puede suponer que

$$\alpha'(u) \cdot \beta'(u) = 0. \quad (3.5)$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental de \vec{x} son

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 1 + 2v(\alpha'(u) \cdot \beta'(u)) + v^2\|\beta'(u)\|^2 = 1 + v^2, \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = \|\beta(u)\|^2 = 1, \\ g_{uv} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = \alpha'(u) \cdot \beta(u) + v\beta'(u) \cdot \beta(u) = \alpha'(u) \cdot \beta(u), \end{aligned}$$

y sus derivadas segundas

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \alpha''(u) + v\beta''(u), \\ \vec{x}_{vv} &= \mathbf{0}, \\ \vec{x}_{uv} &= \beta'(u). \end{aligned}$$

Luego, de la Proposición 2.12 y como M es minimal, tenemos que

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{x}_{uu}g_{vv} - 2\vec{x}_{uv}g_{uv} + \vec{x}_{vv}g_{uu}}{2g} \cdot \vec{N} = \\ &= \frac{\alpha''(u) + v\beta''(u) - 2\beta'(u)(\alpha'(u) \cdot \beta(u))}{2\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|^3} \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha''(u) + v\beta''(u) - 2\beta'(u)(\alpha'(u) \cdot \beta(u))) \cdot ((\alpha'(u) + v\beta'(u)) \times \beta(u)) = \\ &= \alpha''(u) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u)) - 2\beta'(u)(\alpha'(u) \cdot \beta(u)) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u)) + \\ &\quad + v[\alpha''(u) \cdot (\beta(u) \times \beta'(u)) + \beta''(u) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u))] + \\ &\quad + v^2\beta''(u) \cdot (\beta(u) \times \beta'(u)). \end{aligned}$$

Nótese que como esta igualdad es cierta para todo v , se tiene

$$\alpha''(u) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u)) = 2\beta'(u)(\alpha'(u) \cdot \beta(u)) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u)), \quad (3.6)$$

$$\alpha''(u) \cdot (\beta(u) \times \beta'(u)) + \beta''(u) \cdot (\alpha'(u) \times \beta(u)) = 0, \quad (3.7)$$

$$\beta''(u) \cdot (\beta(u) \times \beta'(u)) = 0. \quad (3.8)$$

De (3.8) deducimos que los vectores $\beta(u)$, $\beta'(u)$, $\beta''(u)$ son coplanarios. Como $\beta(u) \cdot \beta'(u) = 0$, tenemos entonces que

$$\beta''(u) = \lambda(u)\beta(u) + \mu(u)\beta'(u),$$

con λ y μ funciones diferenciables. De esta ecuación y usando que u es el parámetro natural de β , obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda(u) &= \beta''(u) \cdot \beta(u) = -\beta'(u) \cdot \beta'(u) = -1, \\ \mu(u) &= \beta''(u) \cdot \beta'(u) = 0.\end{aligned}$$

Así, $\beta''(u) = -\beta(u)$ y, por tanto, $\beta'''(u) = -\beta'(u)$. Al haber tomado la parametrización natural de β , la curvatura κ y la torsión τ de β son

$$\begin{aligned}\kappa &= \|\beta''(u)\| = \|- \beta(u)\| = 1 \\ \tau &= \frac{\beta'(u) \cdot (\beta''(u) \times \beta'''(u))}{\|\beta''(u)\|^2} = \frac{\beta'''(u) \cdot (\beta'''(u) \times \beta''(u))}{\|- \beta(u)\|^2} = \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, β es, salvo movimientos rígidos, la parametrización de una circunferencia de radio 1. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que está centrada en el origen y contenida en el plano XY , es decir

$$\beta(u) = (\cos(u), \sen(u), 0). \tag{3.9}$$

Falta comprobar que α parametriza una hélice. Como $\beta''(u) = -\beta(u)$ para todo u , sustituyendo en (3.7), tenemos que

$$\alpha''(u) \cdot (\beta(u) \times \beta'(u)) = 0.$$

Entonces $\alpha''(u)$ es paralelo al plano XY y tenemos que

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), au + b), \tag{3.10}$$

con f y g funciones diferenciables y a y b constantes.

Si $a = 0$, tenemos de nuevo que M está contenida en un plano, concretamente en el plano $z = b$.

Si $a \neq 0$, sustituyendo (3.9) y (3.10) en la ecuación (3.6) obtenemos

$$g''(u)\cos(u) - f''(u)\sen(u) = 2(f'(u)\cos(u) + g'(u)\sen(u)). \tag{3.11}$$

De la condición (3.5) y teniendo en cuenta (3.9) y (3.10), deducimos que

$$f'(u)\sen(u) = g'(u)\cos(u). \tag{3.12}$$

Derivando, se concluye que

$$f''(u)\sen(u) + f'(u)\cos(u) = g''(u)\cos(u) - g'(u)\sen(u),$$

o equivalentemente,

$$g''(u)\cos(u) - f''(u)\sen(u) = f'(u)\cos(u) + g'(u)\sen(u).$$

Igualando esta ecuación con (3.11) se tiene la expresión

$$f'(u)\cos(u) + g'(u)\sen(u) = 0.$$

Esta ecuación junto con (3.12) determina el siguiente sistema

$$\begin{aligned} f'(u)\cos(u) + g'(u)\sen(u) &= 0, \\ f'(u)\sen(u) - g'(u)\cos(u) &= 0. \end{aligned}$$

De lo que se deduce que $f'(u) = g'(u) = 0$ y, por lo tanto, $f(u)$ y $g(u)$ son constantes para todo u .

Podemos asumir que dichas constantes y la constante b son nulas (de no ser así basta con hacer un movimiento rígido). Así,

$$\alpha(u) = (0, 0, au)$$

y concluimos

$$\vec{x}(u, v) = (v\cos(u), v\sen(u), au),$$

que es la parametrización de un helicoido. □

3.3. Superficies minimales de Scherk

Una forma de encontrar superficies minimales es darle condiciones algebraicas a la ecuación de Euler-Lagrange que permitan su resolución por métodos elementales. Las superficies obtenidas de esta manera se llaman **superficies de Scherk**. A continuación, veremos cómo se construye una de ellas.

Sea M una superficie minimal. Por la Proposición 2.15 sabemos que M se parametriza localmente con

$$\vec{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

verificando

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_u f_v f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0.$$

Imponemos la siguiente condición algebraica sobre f

$$f(u, v) = g(u) + h(v),$$

con g y h son funciones diferenciables.

Así, la ecuación de Euler-Lagrange se reescribe de la siguiente manera

$$g''(u)(1 + h'(v)^2) + h''(v)(1 + g'(u)^2) = 0.$$

Separando las variables,

$$-\frac{1 + g'(u)^2}{g''(u)} = \frac{1 + h'(v)^2}{h''(v)}.$$

Fijamos una constante c y calculamos una función g tal que

$$-\frac{1 + g'(u)^2}{g''(u)} = c.$$

Si denotamos por $\phi = g'$ e integramos,

$$-c \int \frac{d\phi}{1 + \phi^2} = \int du \Rightarrow \text{arctg}(\phi) = \frac{-u + b}{c}.$$

Suponiendo por simplicidad que $b = 0$,

$$\phi(u) = g'(u) = -tg\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{-\text{sen}\left(\frac{u}{c}\right)}{\cos\left(\frac{u}{c}\right)}.$$

Entonces integrando,

$$g(u) = c \ln\left(\cos\left(\frac{u}{c}\right)\right).$$

De manera análoga con h tendríamos que

$$h(v) = -c \ln\left(\cos\left(\frac{v}{c}\right)\right).$$

Luego la superficie definida por la parametrización

$$\vec{x}(u, v) = \left(u, v, c \ln\left(\frac{\cos\left(\frac{u}{c}\right)}{\cos\left(\frac{v}{c}\right)}\right) \right).$$

se llama **primera superficie de Scherk**.

Proposición 3.9. *La primera superficie de Scherk es una superficie minimal.*

Demostración. Por la propia construcción de la misma, verifica la ecuación de Euler-Lagrange y, por tanto, es minimal. \square

Con Sagemath obtenemos que la curvatura de media y la curvatura de Gauss de la primera superficie de Scherk son

```

sage: Curvatura_media(f_sch, g_sch, h_sch)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_sch, g_sch, h_sch)
> K=-((cos(u)cos(v))^2/((cos(u)sen(v))^2 + cos(v)^2)^2

```

Supongamos por simplicidad que $c = 1$ en la parametrización de esta superficie. La primera superficie de Scherk está bien definida sobre el conjunto

$$A = \{(u, v) \mid \cos(u)\cos(v) \neq 0\}.$$

Es decir, el dominio está conformado por rectángulos del siguiente tipo

$$A(m, n) = \left\{ (u, v) \mid m\pi - \frac{\pi}{2} < u < m\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi - \frac{\pi}{2} < v < n\pi + \frac{\pi}{2} \right\},$$

luego

$$A = \bigcup_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ m+n \in 2\mathbb{Z}}} A(m, n).$$

Si suponemos que $m = n = 0$ obtenemos una de las piezas fundamentales. Determinamos su representación gráfica,

```

sage: X_sch=(f_sch, g_sch, h_sch)
sage: sch1=parametric_plot3d(X_sch, (u, -pi/2, pi/2), (v, -pi/2, pi/2))
sage: sch2=parametric_plot3d(X_sch, (u, -0.01, 0.01), (v, -pi/2, pi/2))
sage: sch3=parametric_plot3d(X_sch, (u, -pi/2, pi/2), (v, -0.01, 0.01))
sage: show(sch1+sch2+sch3)

```

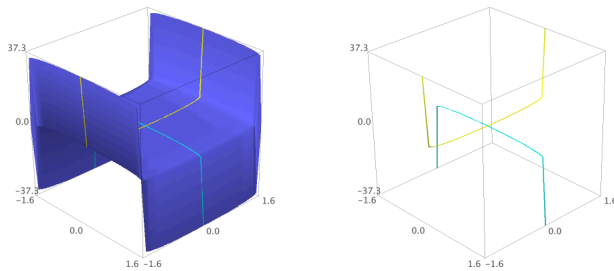


Figura 3.3. La pieza correspondiente a $A(0, 0)$ de la primera superficie de Scherk y sus curvas coordenadas $\vec{x}(0, v)$ y $\vec{y}(u, 0)$.

3.4. Superficie de Enneper

Una familia biparamétrica de planos viene dada por la ecuación

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = ((x, y, z) - (x_0(\lambda, \mu), y_0(\lambda, \mu), z_0(\lambda, \mu))) \cdot \vec{n}(\lambda, \mu) = 0,$$

donde para cada (λ, μ) tenemos el plano que pasa por $(x_0(\lambda, \mu), y_0(\lambda, \mu), z_0(\lambda, \mu))$ y tiene por vector normal a $\vec{n}(\lambda, \mu)$.

La envolvente de esta familia biparamétrica de planos es una superficie M tal que, para cada $p \in M$, existe un plano de la familia que es su plano tangente en ese punto, esto es, existe un difeomorfismo local

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu) : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\rightarrow (\lambda, \mu)(u, v) \end{aligned}$$

tal que, para todo $p \in M$, se verifica

$$F(\vec{x}(u, v), \lambda(u, v), \mu(u, v)) = 0, \quad (3.13)$$

$$\vec{x}_u(u, v) \cdot (F_x, F_y, F_z)(\vec{x}(u, v), \lambda, \mu) = 0, \quad (3.14)$$

$$\vec{x}_v(u, v) \cdot (F_x, F_y, F_z)(\vec{x}(u, v), \lambda, \mu) = 0. \quad (3.15)$$

Obsérvese que como (λ, μ) es difeomorfismo local, tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (3.16)$$

para todo $(u, v) \in U$. Si $\vec{x}_u = (x_u, y_u, z_u)$ y $\vec{x}_v = (x_v, y_v, z_v)$, derivando (3.13) respecto de (u, v) , deducimos que

$$F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} + F_\mu \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0,$$

$$F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v + F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} + F_\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

De las condiciones (3.14) y (3.15) obtenemos

$$F_x x_u + F_y y_u + F_z z_u = 0,$$

$$F_x x_v + F_y y_v + F_z z_v = 0.$$

Por consiguiente,

$$F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} + F_\mu \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0,$$

$$F_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} + F_\mu \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

Usando (3.16) se tiene que $F_\lambda = F_\mu = 0$. Por lo tanto, las coordenadas de la envolvente satisfacen

$$\begin{aligned} F(\vec{x}(u, v), \lambda(u, v), \mu(u, v)) &= 0, \\ F_\lambda(\vec{x}(u, v), \lambda(u, v), \mu(u, v)) &= 0, \\ F_\mu(\vec{x}(u, v), \lambda(u, v), \mu(u, v)) &= 0. \end{aligned}$$

A continuación, definimos la superficie de Enneper como una envolvente de planos. Para ello necesitamos introducir la noción de parábolas homofocales.

Definición 3.10. *Dos parábolas en planos perpendiculares se dicen **homofocales** si el foco de la primera es el vértice de la segunda y el foco de la segunda es el vértice de la primera.*

Definición 3.11. *Sean dos parábolas homofocales, se llama **superficie de Enneper** a la envolvente de los planos ortogonales a los segmentos delimitados por un punto en cada parábola que pasan por el punto medio del segmento.*

Obtengamos una parametrización de esta superficie. Consideremos una referencia tal que una de las parábolas tenga por ecuación

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2},$$

cuyo vértice es $V_1 = (0, 0, -\frac{1}{2})$ y su foco $F_1 = (0, 0, -\frac{1}{2} + 1) = (0, 0, \frac{1}{2})$.

Entonces la parábola de ecuación

$$z = -\frac{y^2}{4} + \frac{1}{2},$$

es homofocal.

Consideramos las siguientes parametrizaciones de estas parábolas,

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \left(2u, 0, u^2 - \frac{1}{2} \right), \\ \beta(v) &= \left(0, 2v, -v^2 + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

El vector director de las rectas que pasan por ambas parábolas y el punto medio de los segmentos con un extremo en cada parábola, vienen dados respectivamente por

$$\alpha(u) - \beta(v) = (2u, -2v, u^2 + v^2 - 1),$$

$$\frac{\alpha(u) + \beta(v)}{2} = \left(u, v, \frac{u^2 - v^2}{2} \right).$$

La familia biparamétrica de planos perpendiculares a estos segmentos que pasan por el punto medio tiene por ecuación

$$F(x, y, z, u, v) = \left((x, y, z) - \left(\frac{\alpha(u) + \beta(v)}{2} \right) \right) \cdot (\alpha(u) - \beta(v)) = 0.$$

Entonces,

$$F(x, y, z, u, v) = 2xu - 2u^2 - 2yv + 2v^2 + z(u^2 + v^2 - 1) + \frac{v^4 - u^4}{2} + \frac{u^2 - v^2}{2} = 0. \quad (3.17)$$

La envolvente estará determinada por esta ecuación y por las dos relaciones siguientes

$$F_u = 2x - 3u + 2uz - 2u^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}u - uz + u^3,$$

$$F_v = -2y + 3v + 2vz + 2v^3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}v - vz + v^3.$$

Sustituyendo en (3.17) y resolviendo el sistema obtenemos

$$(x, y, z) = \frac{2}{3} \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Reparametrizando el espacio se deduce que la superficie de Enneper tiene la siguiente parametrización local

$$\vec{x}(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Con Sagemath determinamos su representación gráfica,

```
sage: X_enn=(f_enn, g_enn, h_enn)
sage: enn1=parametric_plot3d(X_enn, (u, -10, 10), (v, -10, 10))
sage: enn2=parametric_plot3d(X_enn, (u, -0.05, 0.05), (v, -10, 10))
sage: enn3=parametric_plot3d(X_enn, (u, -10, 10), (v, -0.05, 0.05))
sage: show(enn1+enn2+enn3)
```

Proposición 3.12. *La superficie de Enneper es una superficie minimal.*

Demostración. Veamos que su parametrización es isotérmica. Calculamos sus primeras derivadas

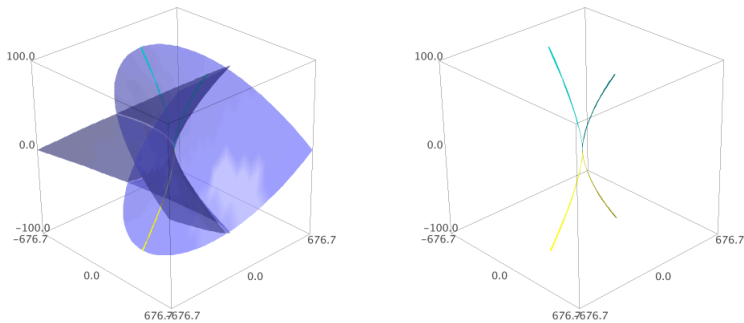


Figura 3.4. Superficie de Enneper y sus curvas coordenadas $\vec{x}(0, v)$ y $\vec{x}(v, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{x}_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u), \\ \vec{x}_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)\end{aligned}$$

y los coeficientes de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned}g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2, \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (1 - v^2 + u^2)^2 + 4u^2v^2 + 4v^2, \\ g_{uv} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0.\end{aligned}$$

Es fácil ver que $g_{uu} = g_{vv}$ con lo que \vec{x} es isotérmica. Resta comprobar que \vec{x} es armónica. En efecto,

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = (-2u, 2v, 2) + (2u, -2v, -2) = \vec{0}$$

y, en virtud del Teorema 2.21, se tiene que \vec{x} parametriza una superficie minimal. \square

Calculamos las curvaturas media y de Gauss de la superficie de Enneper, obteniendo que

```
sage: Curvatura_media(f_enn, g_enn, h_enn)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_enn, g_enn, h_enn)
> K=-4/(u^2+v^2+1)^4
```

3.5. Superficie de Henneberg

La superficie de Henneberg es aquella que viene dada por la siguiente parametrización local

$$\vec{x}(u, v) = \left(2\operatorname{senh}(u)\cos(v) - \frac{2}{3}\operatorname{senh}(3u)\cos(3v), \right. \\ \left. 2\operatorname{senh}(u)\operatorname{sen}(v) + \frac{2}{3}\operatorname{senh}(3u)\operatorname{sen}(3v), 2\cosh(2u)\cos(2v) \right).$$

Con Sagemath determinamos la representación gráfica,

```
sage: X_berg=(f_berg, g_berg, h_berg)
sage: berg1=parametric_plot3d(X_berg, (u, 0, 2*pi), (v, 0, 2*pi))
sage: berg2=parametric_plot3d(X_berg, (u, 2*pi-0.225, 2*pi-0.22),
(v, 0, 2*pi))
sage: berg3=parametric_plot3d(X_berg, (u, 0, 2*pi),
(v, 2*pi-0.325, 2*pi-0.32))
sage: show(berg1+berg2+berg3)
```

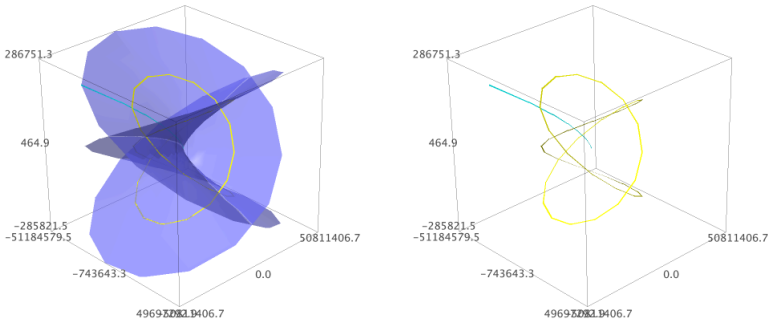


Figura 3.5. Superficie de Henneberg y sus curvas coordenadas $\vec{x}(2\pi, v)$ y $\vec{x}(u, 2\pi - 0.3225)$.

Proposición 3.13. *La superficie de Henneberg es una superficie minimal.*

Demostración. Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$g_{uu} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 8\cosh^2(u)(\cosh(4v) - \cos(4u)), \\ g_{vv} = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 8\cosh^2(u)(\cosh(4v) - \cos(4u)), \\ g_{uv} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0.$$

Luego, \vec{x} es isotérmica. Veamos que también es armónica.

$$\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= (2\operatorname{senh}(u)\cos(v) - 6\operatorname{senh}(3u)\cos(3v), \\ &\quad 2\operatorname{senh}(u)\cos(v) + 6\operatorname{senh}(3u)\cos(3v), 8\operatorname{cosh}(2u)\cos(2v)), \\ \vec{x}_{vv} &= (-2\operatorname{senh}(u)\cos(v) + 6\operatorname{senh}(3u)\cos(3v), \\ &\quad -2\operatorname{senh}(u)\cos(v) - 6\operatorname{senh}(3u)\cos(3v), -8\operatorname{cosh}(2u)\cos(2v)),\end{aligned}$$

y es claro que

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = 0.$$

Concluimos que, en virtud del Teorema 2.21, \vec{x} parametriza una superficie minimal. \square

Calculamos sus curvaturas media y de Gauss

```
sage: Curvatura_media(f_berg, g_berg, h_berg)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_berg, g_berg, h_berg)
> -1/64/(cosh(u)^8 - cosh(u)^4*sin(v)^4 - cosh(u)^6
+ cosh(u)^4*sin(v)^2)
```

3.6. Superficie de Catalan

La superficie de Catalan viene dada por la siguiente parametrización

$$\vec{x}(u, v) = \left(u - \operatorname{sen}(u)\operatorname{cosh}(v), 1 - \operatorname{cos}(u)\operatorname{cosh}(v), -4\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{v}{2}\right) \right).$$

Con Sagemath, determinamos su representación gráfica,

```
sage: X_lan=(f_lan, g_lan, h_lan)
sage: lan1=parametric_plot3d(X_lan, (u, -7, 7), (v, -7, 7))
sage: lan2=parametric_plot3d(X_lan, (u, pi-0.01, pi+0.01), (v, -7, 7))
sage: lan3=parametric_plot3d(X_lan, (u, -7, 7),
(v, (4/2)*pi-0.01, (4/2)*pi))
sage: show(lan1+lan2+lan3)
```

Y calculamos sus curvaturas media y de Gauss,

```
sage: Curvatura_media(f_lan, g_lan, h_lan)
> H=0
sage: Curvatura_Gauss(f_lan, g_lan, h_lan)
K= 1/2/(cos(u) - 2)cosh(v)^2 - cosh(v)^3
+ (2cos(u) - 1)cosh(v) + cos(u)
```

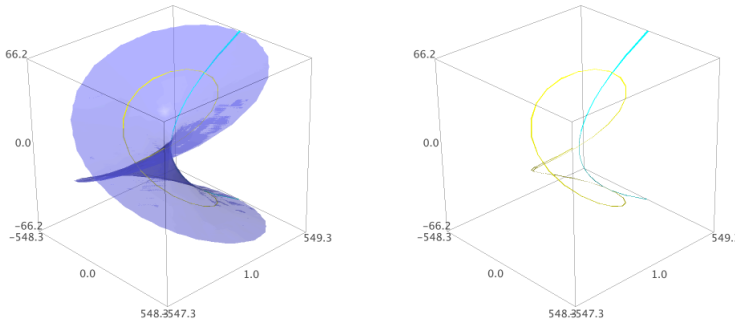


Figura 3.6. Superficie de Catalan y sus curvas coordenadas $\vec{x}(\pi, v)$ y $\vec{x}(u, \pi/2 - 0.005)$.

Proposición 3.14. *La superficie de Catalan es una superficie minimal.*

Demostración. Calculamos sus primeras derivadas

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= \left(1 - \cos(u)\cosh(v), \sin(u)\cosh(v), -2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right) \right), \\ \vec{x}_v &= \left(-\sin(u)\sinh(v), -\cos(u)\sinh(v), -2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cosh\left(\frac{v}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Y los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} g_{uu} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh(v) - \cos(u)), \\ g_{vv} &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh(v) - \cos(u)), \\ g_{uv} &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0. \end{aligned}$$

Luego \vec{x} es isotérmica. Veamos que \vec{x} es armónica,

$$\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \left(\sin(u)\cosh(v), \cos(u)\cosh(v), \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right) \right), \\ \vec{x}_{vv} &= \left(-\sin(u)\cosh(v), -\cos(u)\cosh(v), -\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$$

y concluimos, usando el Teorema 2.21, que \vec{x} es la parametrización de una superficie minimal. \square

La superficie de Catalan tiene la particularidad de contener la curva cicloide como curva geodésica. La **cicloide** es la curva descrita por un punto en una circunferencia cuando esta rueda sobre una línea recta. Tiene la siguiente parametrización local

$$\alpha(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \operatorname{cos}(t)).$$

Recordemos que una curva en una superficie regular M es una **geodésica** si su aceleración α'' es perpendicular a M en $\alpha(u)$, es decir,

$$\alpha''(u) \cdot \vec{N}(\alpha(u)) = 0.$$

Nótese que esta definición no depende de la parametrización elegida. En efecto, si tomamos otro parámetro \bar{u} ,

$$\frac{d\alpha}{d\bar{u}} = \frac{d\alpha}{du} \frac{du}{d\bar{u}}.$$

Luego,

$$\frac{d^2\alpha}{d\bar{u}^2} = \left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{du^2} + \frac{d^2u}{d\bar{u}^2} \frac{d\alpha}{du}.$$

Multiplicando por $\vec{N}(\alpha(\bar{u}))$ y suponiendo $\vec{N}(\alpha(u)) \cdot \frac{d^2\alpha}{du^2} = 0$ concluimos que

$$\vec{N}(\alpha(\bar{u})) \cdot \frac{d^2\alpha}{d\bar{u}^2} = \vec{N}(\alpha(\bar{u})) \cdot \frac{d^2\alpha}{du} \left(\frac{du}{d\bar{u}}\right)^2 + \vec{N}(\alpha(\bar{u})) \cdot \frac{d\alpha}{du} \frac{d^2u}{d\bar{u}^2} = 0.$$

□

Proposición 3.15. *La curva cicloide es una geodésica en la superficie de Catalan.*

Demostración. Es fácil ver que la superficie de Catalan contiene a la cicloide ya que

$$\vec{x}(u, 0) = \alpha(u) = (u - \operatorname{sen}(u), 1 - \operatorname{cos}(u), 0).$$

Para ver que α es geodésica basta comprobar que $\alpha''(u)$ y $\vec{N}(u, 0)$ son perpendiculares. Tenemos que

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \left(-\operatorname{cos}\left(\frac{u}{2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{v}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{v}{2}\right), -\operatorname{tanh}\left(\frac{v}{2}\right)\right).$$

y el vector aceleración es $\alpha''(u) = (\operatorname{sen}(u), \operatorname{cos}(u), 0)$. Es claro que

$$\alpha''(u) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) = 0.$$

Se concluye entonces que α es una geodésica de la superficie de Catalan. □

Bibliografía

- [1] ALEXANDROV, A. (1962). Uniqueness theorems for surfaces in the large. *I. Amer. Math. Soc. Transl.(2)*, 21, 341-354.
- [2] CHERN, S. (1955). An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface *Proceedings of the American Mathematical Society*. 6(5), 7771-782. doi: 10.2307/2032933.
- [3] CORDERO, L. FERNÁNDEZ, M. GRAY, A. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Addison-Wesley. Iberoamericana. Wilmington, Delaware (EEUU).
- [4] GARCÍA-RÍO, E. (2002) *Una Introducción a la curvatura*. Universidade de Santiago de Compostela. <http://www.mat.ucm.es/~jlafuent/Docencia/cys/Garcia%20Rio.pdf>
- [5] GONZÁLEZ-PÉREZ, J. (2005). *Jesse Douglas y el problema de Plateau*. La Gaceta de la RSME, vol. 8.2, 453-469.
- [6] ILDEFONSO, J. (2000). *De la pompa de jabón al satélite artificial: lo óptimo como estrategia*. Oeste 814. Revista del Colegio de Arquitectos de Extremadura. Vol. 4, 2002.
- [7] LUCAS, J. BARBOSA, M. GERVASIO, A. (1986). *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [8] LUCAS, P. *Superficies Minimales*. Conferencia impartida el 18/02/99 en el curso La Historia de las Matemáticas y su aplicación a la docencia en Enseñanza Secundaria. <https://es.sribd.com/document/304746065/Superficies-minimales>
- [9] MONTESDEOCA, A. (2004). *Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*. Universidad de La Laguna. <https://amontes.webs.ull.es/apuntes/gth.pdf>
- [10] MOTA, E. (2015). *Superficies Minimales. Historia, Desarrollo y Aplicaciones a otras Ciencias* Universidad Complutense de Madrid. www.academia.edu/20425278/Superficies_Minimales_Historia_Developmento_y_Aplicaciones_a_Otras_Ciencias
- [11] OPREA, J. (2000). *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*. Student Mathematical Library. Volume 10.

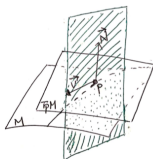
The Geometry of minimal surfaces

Abstract

The fascinating behaviour of soap films conceals a particular and beautiful geometry. These films have the ability to minimize areas following the minimum action principle of the Lagrangian Mechanics. On the basis of the behaviour of soap films, we will define minimal surfaces, showing some local and analytic characterizations using the Euler-Lagrange equation or harmonic functions. Furthermore, we will prove that every area-minimizing surface with fixed bound is a minimal surface although the converse is not true, in general. Some examples of minimal surfaces will be presented.

1. Curvatures

Let M be a regular surface in \mathbb{R}^3 and $p \in M$. If we consider the planes determined by the normal direction and the vectors in the tangent plane we obtain a set of curves in M .



The curves that correspond with the maximum and minimum values of curvature (principal curvatures) k_1 and k_2 , are used to define two important notions in Differential geometry:

$$\text{Gauss curvature: } K = k_1 k_2,$$

$$\text{Mean curvature: } H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

2. Soap films

Soap films satisfy Laplace-Young equation.

$$p = \sigma(k_1 + k_2) = 2\sigma H,$$

$$p = \text{pressure,}$$

$$\sigma = \text{surface tension.}$$

↓

$$p = 0 \Leftrightarrow H = 0.$$



3. Minimal surfaces

Definition 1 A regular surface is minimal if $H = 0$ for all $p \in M$.

Theorem 1 Let $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a differentiable function and the regular surface

$$M = \{(u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

M is minimal if and only if

$$f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_{uv} + f_{vv}(1 + f_u^2) = 0,$$

Euler-Lagrange Equation

Every regular surface can be expressed, locally, like M .

4. Isothermal coordinates and harmonic functions

In minimal surfaces, we always can choose special coordinates in order to simplify computation.

Definition 2 Let M be a regular surface. A parametrization $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ is isothermal if

$$\bar{x}_u \cdot \bar{x}_u = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_v, \quad \bar{x}_u \cdot \bar{x}_v = \bar{x}_v \cdot \bar{x}_u = 0.$$

Theorem 2 Isothermal coordinates exist in any minimal surface.

Once we have the isothermal parametrization, minimal surfaces connect with harmonic functions.

Definition 3 A differentiable function $h : U \subset \mathbb{R}^2$ is harmonic if

$$h_{uu} + h_{vv} = 0.$$

Theorem 3 Let M be a regular surface parametrized by \bar{x} isothermal. M is minimal if and only if \bar{x} is harmonic.

5. The Plateau's Problem

Let Γ an embedded curve in \mathbb{R}^3 . The **Plateau's problem** consists in determining an area-minimizing surface M immersed in \mathbb{R}^3 such that Γ is bound of M .

Let M be a regular surface and a parametrization $\bar{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, the area is defined by

$$A_{\bar{x}}(D) = \iint_D \|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\| \, du \, dv.$$

where D is a simply connected closed region in \mathbb{R}^2 . With this notion we can prove

Theorem 4 If the area of D is minimum, then D is a minimal surface.

6. Minimal surfaces of revolution

A surface of revolution is a surface generated by rotating a curve around a coplanar axis of rotation.

A catenoid is a surface of revolution generated by the rotation of a catenary.

$$\bar{x}(u, v) = (u, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v)).$$



Catenoid

$$H = 0, \quad K = -\frac{1}{\cosh^4(u)}.$$

Theorem 5 If a regular surface of revolution M is minimal, then M is a plane or a catenoid.

7. Ruled minimal surfaces

A regular surface M is ruled if through every point there is a straight line that lies on M .

An helicoid is a ruled surface generated by a straight line that rotates following and helix and determining a fixed angle with another straight line.

$$\bar{x}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u))$$



Helicoid

$$H = 0, \quad K = -\frac{1}{(v^2 + 1)^2}.$$

Theorem 6 (Catalan) If a regular ruled surface M is minimal, then M is a plane or an helicoid.

8. Other minimal surfaces



Scherk's surface



Enneper's surface



Henneberg's surface



Catalan's surface

References

- [1] CORDERO, L. FERNÁNDEZ, M. GRAY, A. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Addison-Wesley.
- [2] OPREA, J. (2000). *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*. Student Mathematical Library. Volume 10.