Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

María Jesús Hernández Vega

Teoría del grado topológico y aplicaciones

Topological degree theory and applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2019

Dirigido por
José Claudio Sabina de Lis

José Claudio Sabina de Lis
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Gracias a mi tutor, D. José Claudio Sabina de Lis, por guiarme y enseñarme pacientemente los conocimientos necesarios para elaborar esta memoria.

Gracias a mi madre por apoyarme en todo momento, por venir a Tenerife a cuidarme cuando lo necesitaba y, sobre todo, por creer en mí.

Gracias a mis compañeros del grado, en especial a Paula, por compartir tantas horas de biblioteca, cafés y risas.

María Jesús Hernández Vega
La Laguna, 5 de julio de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de esta memoria es desarrollar la teoría del grado topológico y algunas de sus principales aplicaciones en análisis y topología. En primer lugar, construimos el grado de una aplicación continua en espacios de dimensión finita, que es lo que se conoce como el grado de Brouwer, y presentamos sus propiedades fundamentales. Posteriormente, utilizamos el grado de Brouwer para estudiar la existencia de soluciones de ecuaciones de la forma $\varphi(x) = b$ y para demostrar algunos resultados clásicos de topología. Por último, probamos la unicidad del grado de Brouwer.

Palabras clave: *Teoría del grado topológico – Grado de Brouwer.*

Abstract

The aim of this memory is to develop the topological degree theory and some of its main applications in analysis and topology. First, we construct the Brouwer degree for continuous mappings in finite dimensional spaces, and we state its fundamental properties. Next, we use the Brouwer degree both to study the existence of solutions of equations of the form $\varphi(x) = b$ and to prove some classical results in topology. Finally, we show the uniqueness of the Brouwer degree.

Keywords: *Topological degree theory – Brouwer degree.*

Contenido

Introducción

Uno de los problemas más importantes de la matemática sigue siendo la resolución de ecuaciones. En las aplicaciones la generalidad de estas ecuaciones adopta la forma $\varphi(x) = b$, en donde incógnitas x y datos b varían en espacios apropiados. Resulta natural exigir que tales espacios estén dotados de una noción de convergencia (topología) y que la aplicación φ sea al menos continua. El grado topológico, creado a principios del siglo XX, se ha desarrollado como una técnica para analizar el conjunto de soluciones de estas ecuaciones. Especialmente estudiar su existencia, número y dependencia respecto de los diversos parámetros. A partir de los años sesenta del siglo pasado, esta teoría se ha convertido en una de las herramientas destacadas de lo que ahora se denomina el "análisis no lineal". Su uso se ha generalizado en el estudio de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales.

Supongamos que Ω es un abierto de un espacio normado X ($\mathbb{R}^N$ en el contexto de esta memoria), $\varphi : \Omega \to X$ es una aplicación continua y b es un punto de X, verificando que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Ésta última condición previene la acumulación de soluciones en la frontera. El objetivo de la teoría consiste en definir un entero $d(\varphi, \Omega, b)$, el grado de φ relativo a Ω en el punto b, que cumple las siguientes propiedades:

d1) Si $b \in \Omega$ e I es la aplicación identidad en X, entonces $d(I, \Omega, b) = 1$.
d2) d es aditiva en Ω, es decir, si Ω_1, Ω_2 son abiertos disjuntos de Ω tales que $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$, entonces $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$.
d3) d es invariante frente a "deformaciones continuas". Más precisamente, si $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to X$ es continua y $b \notin H(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces el grado $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ es constante en $[0, 1]$.
d4) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0)$.

La primera propiedad es una mera "normalización". La misión de la segunda es permitir la localización del grado. La tercera permite analizar una ecuación complicada mediante una "deformación continua" a otra más sencilla. A título de ejemplo, la ecuación polinómica:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad z \in \mathbb{C},$$

se deforma en la ecuación $z^n = 0$ usando $H(z,t) = z^n + t a_1 z^{n-1} + \cdots t a_{n-1} z + t a_n$, $t \in [0,1]$. La última propiedad nos permite considerar el grado de φ en cualquier punto b como el grado de $\varphi - b$ en cero.

En el primer capítulo de este trabajo establecemos la definición y principales propiedades del grado topológico en espacios normados de dimensión finita, es decir, tomando $X = \mathbb{R}^N$. Éste se conoce como grado de Brouwer, ya que fue L. E. Brouwer el primero en dar una definición de grado para aplicaciones continuas en un artículo publicado en 1912. Brouwer utilizó conceptos de topología algebraica para desarrollar la teoría. Sin embargo, la memoria ha sido elaborada desde el punto de vista proporcionado por M. Nagumo en 1951. Este tratamiento del tema suele denominarse el enfoque diferencial o analítico.

En el segundo capítulo nos ocupamos de diversas aplicaciones del grado de Brouwer en análisis y topología. En primer lugar, demostramos que si $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, entonces existe al menos una solución de la ecuación $\varphi(x) = b$ en Ω. Siguiendo esta línea, damos una extensión del Teorema de Bolzano al caso de un número finito de variables. En segundo lugar, presentamos algunos resultados clásicos en topología que pueden ser probados usando el grado de Brouwer. Estos comprenden el teorema del punto fijo de Brouwer y el teorema de separación de Jordan.

Finalmente, en el tercer capítulo, probamos la unicidad del grado de Brouwer partiendo de una aplicación

$$d : \{(\varphi, \Omega, b) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ abierto y acotado}, \varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ b \notin \varphi(\partial\Omega)\} \to \mathbb{Z}$$

que satisface las propiedades d1), d2), d3) y d4). Esta prueba se basa en el hecho de que si $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, con $\det A \neq 0$, entonces $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A)$ para todo $\varepsilon > 0$. Curiosamente, la unicidad del grado no fue demostrada hasta 1973 por H. Amann y S. Weiss ([5]).

La presente memoria no ha perseguido objetivos de investigación. El trabajo se ha centrado en el estudio de las monografías [1], [2] complementado con la lectura de [3] y [5].

1

El grado topológico y sus propiedades

En este capítulo desarrollamos la teoría del grado topológico con el objetivo de construir el grado de Brouwer. En primer lugar, se define el grado topológico para funciones de clase $\mathcal{C}^1$ y para valores regulares. En una segunda etapa, tratamos con funciones de clase $\mathcal{C}^2$ con el fin de suprimir la restricción de que el valor sea regular. Por último, definimos el grado topológico para funciones continuas y para cualquier tipo de valores, conocido como el grado de Brouwer, y presentamos las propiedades del mismo.

1.1. Notaciones y definiciones previas

Comenzamos con una serie de definiciones previas y fijando la notación. Denotamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Dado un conjunto D, $\overline{D}$ designa su clausura, $\mathring{D}$ su interior y ∂D su frontera. La bola abierta la representamos $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - c| < r\}$. Dado $b \in \mathbb{R}^N$ y un conjunto $D \subset \mathbb{R}^N$ la distancia $d(b, D)$ de b a D se define como $d(b, D) = \inf_{x \in D} |b - x|$. La medida de Lebesgue de un conjunto medible $D \subset \mathbb{R}^N$ la denotamos por $|D|$.

Definición 1.1. *Definimos los siguientes espacios de funciones:*

- $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) = \{\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N : \varphi$ *continua*$\}$.
- $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^N) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^N :$ *todas las componentes* φ_i *de* φ *admiten derivadas parciales continuas hasta el orden* $k\}$.
- $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) = \{\varphi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^N) :$ *las derivadas parciales de* φ *se extienden de forma continua hasta* $\partial\Omega\}$.

Frecuentemente, empleamos la notación $\overline{\mathcal{C}}^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ para designar el espacio $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Definición 1.2. *Sea* $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*. Definimos la norma* $\|\cdot\|_\infty$ *en* $\mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *como:*

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)|.$$

Definición 1.3. *Sea* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*. La norma* $\|\cdot\|_1$ *en* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *se define:*

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ 1 \leq i \leq N}} |\varphi_i(x)| + \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega} \\ 1 \leq i,j \leq N}} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right|.$$

Definición 1.4. *El soporte de una aplicación* φ *se define como:*

$$\operatorname{sop} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Si $\operatorname{sop} \varphi$ *es acotado se dice que la aplicación* φ *tiene soporte compacto.*

Denotamos por $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ al subespacio de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ de las aplicaciones con soporte compacto en Ω.

Definición 1.5. *Se define la función signo,* $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$*, de la siguiente manera:*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Designamos $\varphi'(x)$ a la matriz Jacobiana de φ en x y a su determinante Jacobiano por $J_\varphi(x) = \det \varphi'(x)$.

Definición 1.6. *Sea* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Se dice que* $x \in \Omega$ *es un punto crítico de* φ *si* $J_\varphi(x) = 0$*.*

El conjunto S representa el conjunto de punto críticos de la aplicación φ, es decir, $S = \{x \in \Omega : J_\varphi(x) = 0\}$.

Definición 1.7. *Sea* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*. Se dice que* $b \in \mathbb{R}^N$ *es un valor regular de* φ *si, o bien* $\varphi^{-1}(b)$ *es vacío, o bien no existen puntos críticos en* $\varphi^{-1}(b)$*. Un punto que no es valor regular de* φ *se denomina valor crítico de* φ*.*

1.2. El grado topológico para valores regulares

El siguiente resultado constituye un paso previo para la demostración del teorema del cambio de variable en integrales múltiples (véase [1]).

Lema 1.8. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Entonces, para todo $A \subset \overline{\Omega}$ medible Lebesgue se tienen:*

i) $\varphi(A)$ *es medible Lebesgue.*
ii) $|\varphi(A)| \leq \int_A |J_\varphi(x)| dx$.

Teorema 1.9 (Teorema de Sard). *Sean $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y S su conjunto crítico. Entonces, $|\varphi(S)| = 0$.*

Demostración. Tomamos $A = S$ y aplicamos el Lema 1.8. Obtenemos así que

$$0 \leq |\varphi(S)| \leq \int_S |J_\varphi(x)| dx = 0,$$

ya que $J_\varphi(x) = 0$ para todo $x \in S$. Luego, $|\varphi(S)| = 0$. □

A continuación, introducimos la definición de grado topológico para valores regulares y funciones de clase $\mathcal{C}^1$.

Definición 1.10. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se define el grado topológico de la aplicación φ relativo a Ω en el punto b como:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}\ (J_\varphi(\xi)), \tag{1.1}$$

donde se entiende que el valor es 0 si $\varphi^{-1}(b) = \emptyset$.

Con el siguiente lema, comprobamos que la suma de la definición anterior no puede tener infinitos términos.

Lema 1.11. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Entonces, $\varphi^{-1}(b) = \emptyset$ ó $\varphi^{-1}(b)$ es finito.*

Demostración. Supongamos que $\varphi^{-1}(b) \neq \emptyset$. Tenemos que $\varphi^{-1}(b) \subset \Omega$. Como $\varphi^{-1}(b)$ es cerrado y acotado, entonces $\varphi^{-1}(b)$ es compacto. Además, por el teorema de la función inversa, $\varphi^{-1}(b)$ solamente tiene puntos aislados. Luego,

$$\varphi^{-1}(b) \text{ es compacto y discreto } \Rightarrow \varphi^{-1}(b) \text{ es finito.}$$

□

Ejemplo 1.12. Sea $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1((-4,4), \mathbb{R})$, $\varphi(x) = \sin x$. Tenemos que 0 es un valor regular de φ y que $0 \notin \varphi(\pm 4)$. Así, el grado topológico de φ relativo a $(-4,4)$ en 0 es:

$$d(\varphi, (-4,4), 0) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi)) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\cos(-\pi)) + \operatorname{sgn}(\cos(0)) + \operatorname{sgn}(cos(\pi)) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

Nótese que, en este caso, es fácil calcular el grado topológico de φ observando la Figura 1.1.

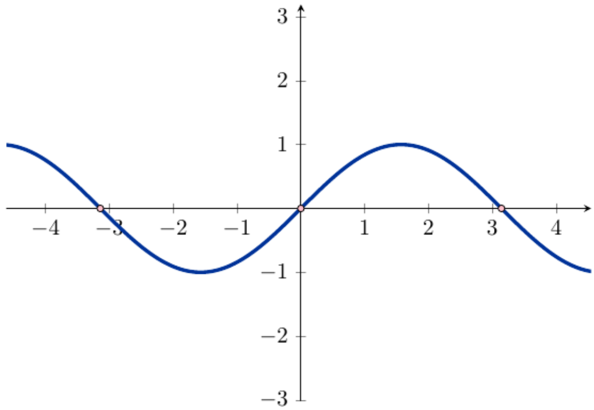

Figura 1.1. Gráfica de $\varphi(x) = \sin x$

Sea $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Por el teorema de la función inversa, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe un entorno $N_i(\xi_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$ tal que $\varphi : N_i(\xi_i) \to B_\varepsilon(b)$ es un difeomorfismo de clase uno. Nótese que ε_0 se puede elegir de forma que $J_\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in N_i(\xi_i)$ y que $N_i(\xi_i) \cap N_j(\xi_j) = \emptyset$ para todo $i, j = 1, \dots, k$.

Introducimos ahora una familia auxiliar $\{\rho_\varepsilon\}$ de funciones. Tomamos:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases}$$

donde $\operatorname{sop} \rho = \overline{B_1(0)}$, $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Definimos ahora la función:

$$\rho_\varepsilon(x) = c\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ con } c \neq 0, \text{ sop}\, \rho_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

Elegimos c tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x)dx = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$. Para ello,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} c\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon^N \int_{B_\varepsilon(0)} c\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dx}{\varepsilon^N} = \varepsilon^N c \int_{B_1(0)} \rho(y)dy,$$

donde hemos hecho el cambio de variable $y = \varepsilon^{-1}x$. Por tanto, la integral vale uno si $c = \frac{1}{\varepsilon^N I}$, $I = \int_{B_1(0)} \rho(y)dy > 0$.

Definición 1.13. *Toda familia de funciones* $\{\rho_\varepsilon\}$ *tal que:*

i) $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{sop} \rho_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$,
ii) $\rho_\varepsilon \geq 0$,

iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon = 1$,

se denomina una familia de núcleos regularizantes.

Teorema 1.14 (Representación integral del grado). *Sean* $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *y* $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. *Entonces* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *tal que* $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *se puede representar el grado como:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx. \tag{1.2}$$

Demostración. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx &= \textstyle\int_{\{x \in \Omega : |\varphi(x) - b| < \varepsilon\}} \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx = \\ &= \textstyle\int_{N_1} \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx + \cdots + \int_{N_k} \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx, \end{aligned}$$

donde para cada $i = 1, \ldots, k$, N_i es el entorno de ξ_i introducido más arriba. Tenemos así que:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{N_i} \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx &= \textstyle\int_{N_i} \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) \frac{J_\varphi(x)}{|J_\varphi(x)|} |J_\varphi(x)| dx = \\ &= \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) \textstyle\int_{B_\varepsilon(b)} \rho_\varepsilon(y - b) dy, \end{aligned}$$

donde hemos realizado el cambio de variable $y = \varphi(x)$. Se sigue que:

$$\operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) \int_{B_\varepsilon(b)} \rho_\varepsilon(y - b) dy = \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) \int_{B_\varepsilon(b)} \rho_\varepsilon(z) dz = \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)),$$

donde hemos hecho el cambio de variable $z = y - b$. Por tanto,

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b) J_\varphi(x) dx = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) = d(\varphi, \Omega, b).$$

□

Presentamos ahora dos resultados auxiliares para demostrar el Teorema 1.17.

Lema 1.15. *Sean* X *un espacio de Banach y* $\psi : \overline{B_r(0)} \to X$ *tal que* $\psi(x) = x + T(x)$, *donde* T *es una aplicación* α*–contractiva, es decir:*

$$|T(x) - T(y)| \leq \alpha |x - y|$$

para todo x, y *donde* $0 \leq \alpha < 1$. *Supongamos que se verifica T(0)=0. Entonces,*

i) Para todo $y \in B_{(1-\alpha)r}(0)$, *existe* $x \in B_r(0)$ *tal que* $\psi(x) = y$.
ii) ψ *es inyectiva en* $B_r(0)$.

Demostración (i). Queremos ver que para todo $y \in B_{(1-\alpha)r}(0)$, existe $x \in B_r(0)$ tal que $\psi(x) = x + T(x) = y$, es decir, $x = y - T(x)$.

Definimos $T_1 : \overline{B_r(0)} \to \overline{B_r(0)}$, $T_1(x) = y - T(x)$. Veamos primero que T_1 es una aplicación contractiva. Sean $x_1, x_2 \in \overline{B_r(0)}$, tenemos que $|T_1(x_1) - T_1(x_2)| = |T(x_1) - T(x_2)| \leq \alpha|x_1 - x_2|$. Luego, T_1 es α–contractiva.

Veamos ahora que si $x \in \overline{B_r(0)}$, entonces $T_1(x) \in \overline{B_r(0)}$. Sea $|x| \leq r$, se tiene que $|x - 0| \leq r$, por lo que $|T(x) - T(0)| = |T(x)| \leq \alpha r$. De esta forma, $|T_1(x)| = |y - T(x)| < (1-\alpha)r + |T(x)| \leq (1-\alpha)r + \alpha r = r$. Luego, $T_1(x) \in B_r(0) \subset \overline{B_r(0)}$.

Finalmente, por el teorema del punto fijo de Banach ([1]), T_1 tiene un único punto fijo en $\overline{B_r(0)}$ y se cumple que para todo $y \in B_{(1-\alpha)r}(0)$, existe $x \in B_r(0)$ tal que $T_1(x) = x$.

Demostración (ii). Suponemos que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, $x_1, x_2 \in B_r(0)$. Luego, se tienen las siguientes igualdades: $x_1 + T(x_1) = x_2 + T(x_2)$, es decir, $x_1 - x_2 = T(x_2) - T(x_1)$, por lo que $|x_1 - x_2| = |T(x_2) - T(x_1)|$. Como T es α–contractiva, se sigue que $|x_1 - x_2| \leq \alpha|x_1 - x_2|$. Por tanto, $|x_1 - x_2| = 0$, es decir, $x_1 = x_2$. □

En la práctica, usaremos el siguiente lema cuando demostremos que una función es contractiva.

Lema 1.16. *Sean $T \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ y $|T'(x)| \leq M$ en $\overline{B_r(0)}$. Entonces, se tiene que $|T(x) - T(y)| \leq M|x - y|$ para todo $x, y \in \overline{B_r(0)}$.*

Teorema 1.17. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, donde S es el conjunto crítico de φ. Entonces, existe $U = \{\psi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) : \|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon\}$ tal que para todo $\psi \in U$:*

i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$.
ii) $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow J_\psi(x) \neq 0$.
iii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Demostración (i). Definimos $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf_{x\in\partial\Omega} |\varphi(x) - b|$. Luego, $|\varphi(x) - b| \geq \rho$ si $x \in \partial\Omega$. Tomamos $0 < \varepsilon_1 < \rho$. Sea $x \in \partial\Omega$, se tiene que:

$$b - \psi(x) = b - \varphi(x) + \varphi(x) - \psi(x),$$
$$|b - \psi(x)| \geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - \psi(x)| \geq \rho - \varepsilon_1 > 0.$$

Por tanto, $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

Demostración (ii). Sabemos que $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. Existe $r > 0$ tal que:

- $\varphi_{|B_r(\xi_i)}$ es un difeomorfismo para todo $i = 1, \ldots, k$.
- $J_\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_r(\xi_i)$.
- $|(\varphi'(\xi_i))^{-1}(\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i))| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in B_r(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, k$.
- $\min\limits_{1\leq i\leq k} \min\limits_{x\in\overline{B}_r(\xi_i)} |J_\varphi(x)| > \eta$, donde $\eta = \frac{1}{2} \min\limits_{1\leq i\leq k} |J_\varphi(\xi_i)|$.

Sea el compacto $K = \overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^{k} B_r(\xi_i)$. Tenemos que $b \notin \varphi(K)$. Definimos $\mu = d(b, \varphi(K))$. Si $x \in K$ y $\psi \in U$, se tiene que:

$$\begin{gathered}\psi(x) - b = \psi(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - b, \\ |\psi(x) - b| \geq |\varphi(x) - b| - |\psi(x) - \varphi(x)| \geq \mu - \varepsilon_2 > 0,\end{gathered}$$

siempre que $\varepsilon_2 < \min\{\varepsilon_1, d(b, \varphi(K))\}$. Por tanto, si $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon_2$, entonces $b \notin \psi(K)$. Esto quiere decir que si $\psi(x) = b$, entonces $x \in B_r(\xi_1) \cup \cdots \cup B_r(\xi_k)$. Ahora tomamos $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$ tal que:

$$\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon_3 \Rightarrow |J_\varphi(x) - J_\psi(x)| < \eta \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Como $|J_\varphi(x)| > \eta$ en $B_r(\xi_1) \cup \cdots \cup B_r(\xi_k)$, se sigue que $J_\varphi(x) > \eta$ ó $J_\varphi(x) < -\eta$ en cada $B_r(\xi_i)$. Por otro lado, se tiene que $J_\varphi(x) - \eta < J_\psi(x) < J_\varphi(x) + \eta$ en cada $B_r(\xi_i)$. Obtenemos así que:

$$\begin{cases} \text{si } J_\varphi(x) > 0 & \text{en } B_r(\xi_i), \text{ entonces } J_\psi(x) > 0 \quad \text{en } B_r(\xi_i), \\ \text{si } J_\varphi(x) < 0 & \text{en } B_r(\xi_i), \text{ entonces } J_\psi(x) < 0 \quad \text{en } B_r(\xi_i). \end{cases}$$

Concluimos que para todo $\psi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon_3$,

$$\operatorname{sgn}(J_\psi(x)) = \operatorname{sgn}(J_\varphi(x)) \text{ para todo } x \in B_r(\xi_i),\ i = 1, \ldots, k. \tag{1.3}$$

Sabemos que $J_\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_r(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, k$, por lo que $J_\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in B_r(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, k$. En particular, $J_\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in \psi^{-1}(b)$, aunque no sabemos todavía si $\psi^{-1}(b)$ es o no vacío.

Demostración (iii). Hemos visto que si fuese $\psi(x) = b$, entonces $x \in B_r(\xi_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$. Sea $L_0^{-1} = (\psi')^{-1}(\xi_i)$, tenemos que resolver $\psi(x) = b$ equivale a resolver:

$$\begin{gathered}\psi(x) - \psi(\xi_i) = b - \psi(\xi_i), \\ L_0^{-1}(\psi(x) - \psi(\xi_i)) = L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i)).\end{gathered}$$

Podemos escribir $x = z + \xi_i$, con lo que $z \in B_r(0) \Leftrightarrow x \in B_r(\xi_i)$. De esta forma, se tienen las siguientes identidades:

$$\begin{gathered}L_0^{-1}(\psi(z + \xi_i) - \psi(\xi_i)) = L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i)), \\ z + L_0^{-1}(\psi(z + \xi_i) - \psi(\xi_i)) - z = L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i)), \\ z + T(z) = L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i)), \\ T'(z) = L_0^{-1}\psi'(z + \xi_i) - I, \quad z \in B_r(0),\end{gathered}$$

en donde $T(z) = L_0^{-1}(\psi(z + \xi_i) - \psi(\xi_i)) - z$. Sabemos que $|(\varphi'(\xi_i))^{-1}(\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i))| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in B_r(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Tomamos $0 < \varepsilon_4 < \varepsilon_3$ lo suficientemente pequeño como para que:

$$\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon_4 \Rightarrow |(\psi'(\xi_i))^{-1}(\psi'(x) - \psi'(\xi_i))| < \frac{3}{4}.$$

Tomamos $\alpha = \frac{3}{4}$. Luego, $|T'(z)| \leq \alpha$, con $z \in B_r(0)$. Por el Lema 1.16, tenemos que $|T(z) - T(y)| \leq \alpha|z - y|$.

Queremos ver que $|L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i))| \leq (1 - \alpha)r$. Desarrollando se tiene que:

$$|L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i))| = |(\psi'(\xi_i))^{-1}(\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i))| \leq |(\psi'(\xi_i))^{-1}||\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i)|.$$

Sea $a = \max |(\psi'(\xi_i))^{-1}|$. Como $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon_4$, se sigue que:

$$|(\psi'(\xi_i))^{-1}||\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i)| \leq a\|\varphi - \psi\|_\infty \leq a\varepsilon_F \leq (1 - \frac{3}{4})r = \frac{r}{4},$$

siempre que $\varepsilon_F \leq \frac{r}{4a}$. Por ello, elegimos $\varepsilon_F = \min\{\varepsilon_4, \frac{r}{4a}\}$. El ε considerado es ε_F.

Definimos $\phi(z) = z + T(z)$, donde se recuerda que $T(0) = 0$. Luego, por el Lema 1.15, existe un único $z \in B_r(0)$ tal que $\phi(z) = L_0^{-1}(b - \psi(\xi_i))$, es decir, existe un único $\eta_i \in B_r(\xi_i)$ tal que $\psi(\eta_i) = b$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. En consecuencia, $\psi^{-1}(b) = \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$.

Concluimos que, por el resultado (1.3),

$$d(\psi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(J_\psi(\eta_i)) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) = d(\varphi, \Omega, b).$$

□

A continuación, presentamos cuatro resultados auxiliares para demostrar el Teorema 1.24.

Lema 1.18. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ y $\alpha = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Entonces, para todo $b_1, b_2 \in B_\alpha(b)$ valores regulares de φ, se tiene que*

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega \operatorname{div} \bar{w}(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx,$$

donde $\bar{w}(y) = (b_1 - b_2)\int_0^1 \rho_\varepsilon(y - b_t)dt$ y ε se toma $0 < \varepsilon < \min\{\alpha - |b - b_i|\} = \alpha - \max\{|b - b_i|\}$, $i = 1, 2$. Además, $\bar{w}(\varphi(x)) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$.

Demostración. Según el Teorema 1.14, podemos representar el grado topológico de la siguiente forma:

$$d(\varphi, \Omega, b_i) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_i) J_\varphi(x) dx, \quad i = 1, 2,$$

por lo que

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega [\rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_2) - \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_1)] J_\varphi(x) dx.$$

Sea $x_i = \varphi(x) - b_i$, $i = 1, 2$. Tomamos $g(t) = \rho_\varepsilon(x_1 + t(x_2 - x_1))$, $0 \le t \le 1$. Por el segundo teorema fundamental del cálculo integral, tenemos que:

$$\rho_\varepsilon(x_2) - \rho_\varepsilon(x_1) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt = \int_0^1 \nabla \rho_\varepsilon(x_t)(x_2 - x_1) dt,$$

donde $x_t = \varphi(x) - b_t$ y $b_t = b_1 + t(b_2 - b_1)$, $0 \le t \le 1$. Luego,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [\rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_2) - \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_1)] J_\varphi(x) dx \\ &= \int_\Omega \left[\int_0^1 \nabla \rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_t)(b_1 - b_2) dt \right] J_\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Sean $\phi(y) = \int_0^1 \rho_\varepsilon(y - b_t) dt$ y $\bar{u} = b_1 - b_2$. Tomamos $\bar{w}(y) = \phi(y)\bar{u}$. Luego, $\operatorname{div} \bar{w}(y) = \nabla \phi(y) \bar{u}$. De esta forma,

$$\operatorname{div} \bar{w}(y) = \nabla \left(\int_0^1 \rho_\varepsilon(y - b_t) dt \right) (b_1 - b_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\int_0^1 \rho_\varepsilon(y - b_t) dt \right) (b_1 - b_2)_i = \left(\int_0^1 \nabla \rho_\varepsilon(y - b_t) dt \right) (b_1 - b_2).$$

Si tomamos $y = \varphi(x)$, tenemos que

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega \operatorname{div} \bar{w}(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx.$$

Por otro lado, $\varphi(x) - b_t \notin B_\varepsilon(b_t)$ si $x \in \partial\Omega$. Luego, por definición, $\rho_\varepsilon(\varphi(x) - b_t) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Concluimos así que $\bar{w}(\varphi(x)) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. □

Observación 1.19. El soporte de ϕ es $\operatorname{sop} \phi = \cup_{t \in [0,1]} B_\varepsilon(b_t)$, por lo que $\operatorname{sop} \phi \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$. Por la continuidad de φ, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varphi(\{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \le \varepsilon_0\}) \cap \operatorname{sop} \phi = \emptyset$. Esto implica que $\operatorname{sop}(\phi(\varphi(x))) \subset \Omega$. De hecho, $\phi(\varphi(x)) = 0$ si $d(x, \partial\Omega) \le \varepsilon_0$ y por tanto $\bar{w}(\varphi(x)) = 0$ si $d(x, \partial\Omega) \le \varepsilon_0$.

Lema 1.20. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $D(x)$ la matriz adjunta de $\varphi'(x)$ y $\bar{d}_i$ la fila i de $D(x)$, $i = 1, \ldots, N$. Entonces,*

$$\nabla \varphi_k \bar{d}_i = \delta_{ki} J_\varphi(x), \ \textit{donde } \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \textit{si } i = k, \\ 0 & \textit{si } i \ne k. \end{cases}$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, N\}$. Se tienen las siguientes identidades:

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} d_{i1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_N} d_{iN} = \nabla \varphi_i (d_{i1}, \ldots, d_{iN}) = \nabla \varphi_i \bar{d}_i.$$

Luego, $\nabla \varphi_i \bar{d}_i = J_\varphi(x)$. Nótese que $\nabla \varphi_k \bar{d}_i = 0$ si $k \neq i$. Por tanto, $\nabla \varphi_k \bar{d}_i = \delta_{ki} J_\varphi(x)$. □

Lema 1.21. *Sean $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $D(x)$ la matriz adjunta de $\varphi'(x)$ y $\bar{d}_i$ la fila i de $D(x)$, $i = 1, \ldots, N$. Entonces,* $\operatorname{div} \bar{d}_i$*=0.*

Demostración. Desarrollando, tenemos que:

$$\operatorname{div} \bar{d}_i = \operatorname{div}(d_{i1}, \ldots, d_{iN}) = \frac{\partial d_{i1}}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial d_{iN}}{\partial x_N} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j}.$$

Veamos que $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = 0$. Sea $\varphi_{x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, N$. Podemos representar $\varphi'(x)$ por columnas como $\varphi'(x) = (\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_j}, \ldots, \varphi_{x_N})$. De esta forma, $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det[(\varphi_{x_1}, \ldots, \hat{\varphi}_{x_j}, \ldots, \varphi_{x_N})]$, donde $\hat{\varphi}_{x_j}$ significa que se elimina la columna φ_{x_j}. Se tiene así que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} &= (-1)^{i+j} \sum_{k<j} \det[(\varphi_{x_1} \ldots \varphi_{x_k x_j} \ldots \hat{\varphi}_{x_j} \ldots \varphi_{x_N})] + \\ &+ (-1)^{i+j} \sum_{k>j} \det[(\varphi_{x_1} \ldots \hat{\varphi}_{x_j} \ldots \varphi_{x_k x_j} \ldots \varphi_{x_N})] = \\ &= (-1)^{i+j} \sum_{k<j} (-1)^{k-1} \det[(\varphi_{x_k x_j} \varphi_{x_1} \ldots \hat{\varphi}_{x_k} \ldots \hat{\varphi}_{x_j} \ldots \varphi_{x_N})] + \\ &+ (-1)^{i+j} \sum_{k>j} (-1)^{k-2} \det[(\varphi_{x_k x_j} \varphi_{x_1} \ldots \hat{\varphi}_{x_j} \ldots \hat{\varphi}_{x_k} \ldots \varphi_{x_N})]. \end{aligned}$$

Sea $c_{kj} = \det[(\varphi_{x_k x_j} \varphi_{x_1} \ldots \hat{\varphi}_{x_k} \ldots \hat{\varphi}_{x_j} \ldots \varphi_{x_N})]$. Nótese que $c_{kj} = c_{jk}$ para todo $j, k \in \{1, \ldots, N\}$. Tenemos así que:

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = (-1)^i \left[\sum_{k<j} (-1)^{j+k-1} c_{kj} + \sum_{k>j} (-1)(-1)^{j+k-1} c_{kj} \right].$$

Definimos

$$\gamma_{kj} = \begin{cases} (-1)^{j+k-1} & \text{si } k < j, \\ 0 & \text{si } k = j, \\ -(-1)^{j+k-1} & \text{si } k > j. \end{cases}$$

Nótese que $\gamma_{kj} = -\gamma_{jk}$ para todo $j, k \in \{1, \ldots, N\}$. Finalmente, tenemos que:

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = (-1)^i \sum_{k=1}^{N} \gamma_{kj} c_{kj}.$$

Nótese que $\gamma_{kj} c_{kj} = -\gamma_{jk} c_{jk}$ para todo $j, k \in \{1, \ldots, N\}$. Por tanto,

$$\operatorname{div} \bar{d}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = (-1)^i \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \gamma_{kj} c_{kj} = 0.$$

□

Lema 1.22. *Sean $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $\bar{v}(x) = \bar{w}(\varphi(x)) D(x)$. Entonces,* $\operatorname{div} \bar{v}(x) = \operatorname{div} \bar{w}(\varphi(x)) J_\varphi(x)$.

Demostración. Sea $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_N)$, con $v_j(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i(\varphi(x)) d_{ij}$, $j = 1, \ldots, N$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v}(x) &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial w_i(\varphi(x))}{\partial x_j} d_{ij} + w_i(\varphi(x)) \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i(\varphi(x))}{\partial x_j} d_{ij} + \sum_{i=1}^{N} w_i(\varphi(x)) \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Por el Lema 1.21, se tiene que $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} = 0$. Luego,

$$\operatorname{div} \bar{v}(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i(\varphi(x))}{\partial x_j} d_{ij}.$$

Sea $y_k = \varphi_k(x)$. Por el Lema 1.20, se sigue que:

$$\operatorname{div} \bar{v}(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} d_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} d_{ij} =$$

$$= J_\varphi(x) \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \delta_{ki} = J_\varphi(x) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial y_i}.$$

Concluimos así que:

$$\operatorname{div} \bar{v}(x) = J_\varphi(x) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial y_i} = J_\varphi(x) \operatorname{div} \bar{w}(\varphi(x)).$$

□

Observación 1.23. Nótese que $\operatorname{sop} \bar{v} \subset \Omega$ y que el campo $\bar{v}$ se puede extender $\mathcal{C}^1$ por $\bar{0}$ a todo $\mathbb{R}^N$.

Teorema 1.24. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ y $\alpha = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Entonces, para todo $b_1, b_2 \in B_\alpha(b)$ valores regulares de φ, se tiene que $d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2)$.*

Demostración. Veamos que $d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = 0$. Aplicando el Lema 1.18 y el Lema 1.22, tenemos que:

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_\Omega \operatorname{div} \bar{w}(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx = \int_\Omega \operatorname{div} \bar{v}(x) dx = \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \bar{v}(x) dx,$$

donde $\Omega_1 \supset \Omega$ es un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^1$. Aplicando el teorema de la divergencia en Ω_1, se sigue que:

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_{\Omega_1} \operatorname{div} \bar{v}(x) dx = \int_{\partial\Omega_1} \bar{v}(x) \bar{n} dS.$$

Sabemos que $\bar{w}(\varphi(x)) = 0$ si $x \in \partial\Omega_1$. Luego, $\bar{v}(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega_1$. Por tanto,

$$d(\varphi, \Omega, b_2) - d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_{\partial\Omega_1} \bar{v}(x) \bar{n} dS = 0.$$

□

Observación 1.25. Es necesario usar $\Omega_1 \supset \Omega$ porque en principio la frontera del conjunto original Ω no tiene por qué ser una hipersuperficie regular cerrada.

1.3. Primera extensión del grado topológico

El Teorema 1.17 y el Teorema 1.24 nos permiten extender el grado topológico, para permitir que b sea incluso un valor crítico.

Definición 1.26. *Sean $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se define el grado topológico como:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b') \quad \forall b' \in B_\rho(b),\ b' \notin \varphi(S), \tag{1.4}$$

donde $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega))$.

Las siguientes propiedades se cumplen para la primera extensión del grado topológico.

Lema 1.27. *Sean* $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *y* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$*, entonces* $d(\varphi, \Omega, b)$ *es constante sobre las componentes conexas de* $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$*.*

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in C$, donde C es una componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Sabemos que C es conexa y abierta. Luego, existe una curva $\Gamma \subset C$ con origen en b_1 y extremo en b_2.

Sabemos que para todo $b \in \Gamma$, existe $B_\rho(b) \subset C$, donde $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Tenemos así que $\Gamma \subset \cup_{b\in\Gamma} B_\rho(b)$. Luego, por ser Γ compacta, $\Gamma \subset B_{\rho_1}(\tilde{b}_1) \cup B_{\rho_2}(\tilde{b}_2) \cup \cdots \cup B_{\rho_m}(\tilde{b}_m)$, donde $\tilde{b}_1 = b_1$, $\tilde{b}_m = b_2$, $\tilde{b}_i \in \Gamma$, $\rho_i = d(\tilde{b}_i, \varphi(\partial\Omega))$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Además, por ser Γ conexa, se pueden elegir de forma que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, donde $B_i = B_{\rho_i}(\tilde{b}_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Por el Teorema 1.24, $d(\varphi, \Omega, b')$ es constante para todo $b' \in B_i, i \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto, $d(\varphi, \Omega, b') = d(\varphi, \Omega, b'')$, con $b' \in B_1$ y $b'' \in B_m$. En particular, $d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2)$. □

Lema 1.28. *Sean* $\varphi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *y* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$*, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$ *para toda* $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tal que* $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon$*.*

Demostración. Para el caso $b \notin \varphi(S)$ basta con aplicar el Teorema 1.17.

Supongamos ahora que $b \in \varphi(S)$. Tomamos $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{\rho}{2}$. Se tiene así que $B_{\frac{\rho}{2}}(b) \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$. Luego, $B_{\frac{\rho}{2}}(b)$ está en la componente conexa de $\mathbb{R}^N - \psi(\partial\Omega)$ que contiene a b. Por el Teorema 1.9, existe $b' \in B_{\frac{\rho}{2}}(b)$ tal que $b' \notin \varphi(S)$. Luego, según la definición 1.26, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b')$.

Finalmente, por el Teorema 1.17, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon$, $d(\varphi, \Omega, b') = d(\psi, \Omega, b')$. De esta forma, $d(\psi, \Omega, b') = d(\psi, \Omega, b)$ para toda $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_1 < \text{mín}\{\varepsilon, \frac{\rho}{2}\}$, pues b' y b están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$. □

Lema 1.29 (Invariancia frente a homotopías). *Sean* $H(x,t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$*,* $I = [0,1]$*, y* $b \notin H(\partial\Omega \times I)$*, es decir,* $b \notin H(\partial\Omega, t)$ *para todo* $t \in I$*. Entonces,* $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ *es constante en el intervalo* I*.*

Demostración. Sabemos que $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$ para toda $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_1 < \varepsilon$ por el Lema 1.28. Sea $H_t(x) = H(x,t)$. Veamos que $d(H_t, \Omega, b) = d(H_{t'}, \Omega, b)$ si $|t - t'| < \delta$, es decir, $|t - t'| < \delta$ implica que $\|H_t - H_{t'}\|_1 < \varepsilon$, por lo que $d(H_t, \Omega, b) = d(H_{t'}, \Omega, b)$.

Como $H(x,t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$ y $\overline{\Omega} \times I$ es compacto, tenemos que:

- H_i es uniformemente continua en $\overline{\Omega} \times I$ para todo $i = 1, \ldots, N$.
- $\frac{\partial H_i}{\partial x_j}$ es uniformemente continua en $\overline{\Omega} \times I$ para todo $i, j = 1, \ldots, N$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_{N+N^2}\} > 0$ tal que para $|x-y| + |t-t'| < \delta$ se cumple:

$$\begin{cases} |H_i(x,t) - H_i(y,t')| < \frac{\varepsilon}{N+N^2}, \\ |\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,t')| < \frac{\varepsilon}{N+N^2}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Si $x = y$ y $|t-t'| < \delta$ del resultado (1.5) se sigue que:

$$\begin{cases} \sup |H_i(x,t) - H_i(y,t')| < \frac{\varepsilon}{N+N^2}, \\ \sup |\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,t) - \frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x,t')| < \frac{\varepsilon}{N+N^2} \end{cases}$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Luego,

$$\|H_t - H_{t'}\|_1 < \frac{N\varepsilon + N^2\varepsilon}{N+N^2} = \frac{(N+N^2)\varepsilon}{N+N^2} = \varepsilon.$$

Hemos probado que para todo $t \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $d(H_t, \Omega, b)$ es constante en $I_\delta = (t-\delta, t+\delta)$. Además, por compacidad se cumple que $[0,1] \subset I_{\delta_1}(t_1) \cup \cdots \cup I_{\delta_m}(t_m)$, con $t_i \in I$, $i = 1, \ldots, m$, y por conexidad, $I_{\delta_i}(t_i) \cap I_{\delta_{i+1}}(t_{i+1}) \neq \emptyset$. Por tanto, $d(H_t, \Omega, b)$ es constante para todo $t \in I$. □

1.4. Grado de Brouwer

Finalmente, damos la tercera y última extensión de la noción de grado topológico que da lugar a lo que se conoce como el grado de Brouwer.

Definición 1.30. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se define el grado de Brouwer como:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \quad \forall \psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|\psi - \varphi\|_\infty < \rho, \tag{1.6}$$

donde $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega))$.

Con el siguiente lema, comprobamos que el grado de Brouwer está bien definido.

Lema 1.31. *Sea $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Se tiene que:*

i) Siempre existen funciones $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tales que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \rho$.
ii) Si $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ y $\psi_1, \psi_2 \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ satisfacen $\|\psi_i - \varphi\|_\infty < \rho$, $i = 1, 2$, entonces $d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b)$.

Demostración (i). El teorema de Stone–Weierstrass establece que toda función $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, donde K es un compacto de $\mathbb{R}^N$, puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Como $\overline{\Omega}$ es un compacto de $\mathbb{R}^N$, aplicando este teorema componente a componente, verificamos la existencia de funciones $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tales que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \rho$.

Demostración (ii). Sabemos que $B_\rho^X(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) : \|\psi - \varphi\|_\infty < \rho\}$ es convexa. Definimos $H(x,t) = (1-t)\psi_1 + t\psi_2$, $H(x,t) \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$. Luego, $\|H(\cdot, t) - \varphi\|_\infty < \rho$ para todo $t \in I = [0,1]$.

Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ y $H(\cdot, t) \in B_\rho^X(\varphi)$ si $t \in I$, se tiene que $b \notin H(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in I$. Por el Lema 1.29, tenemos que $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ es constante para todo $t \in I$. Haciendo $t = 0$ y $t = 1$ se tiene que $d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b)$. □

La siguiente propiedad nos permite considerar el grado de φ en cualquier punto b como el grado de $\varphi - b$ en cero.

Lema 1.32. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0)$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y que b es un valor regular. Como b no influye en la matriz jacobiana, se tiene que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0)$.

Supongamos ahora que $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Según la Definición 1.30, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ para toda $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \rho$, donde $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Como $d(b, \varphi(\partial\Omega)) = d(0, (\varphi - b)(\partial\Omega))$, se tiene que $d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0)$.

Veamos que $d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, b)$. Si b es un valor regular para ψ, ya se ha demostrado. Si b es un valor crítico para ψ, entonces 0 es un valor crítico para $\psi - b$. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos un valor regular b' tal que $|b' - b| < d(b, \psi(\partial\Omega))$. Tenemos así que $d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b') = d(\psi - b', \Omega, 0)$. Falta ver que $d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b', \Omega, 0)$. Se tiene que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b')\|_\infty = |b' - b| < d(b, \psi(\partial\Omega)) = d(0, (\psi - b)(\partial\Omega)).$$

Luego, $d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b', \Omega, 0)$ y, por tanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\varphi - b, \Omega, 0)$. □

Presentamos ahora las propiedades fundamentales del grado de Brouwer.

Teorema 1.33 (Propiedades fundamentales del grado de Brouwer). *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se tienen las siguientes propiedades:*

d1)[Normalización] *Si $b \in \Omega$, entonces $d(I, \Omega, b) = 1$, donde I es la función identidad.*

d2)[Continuidad del grado en φ] *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\chi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ cumpliendo $\|\chi - \varphi\|_\infty < \varepsilon$, se tiene que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\chi, \Omega, b)$.*

d3)[Invariancia por homotopías] *Sean $H(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$, $I = [0,1]$, y $b \notin H(\partial\Omega, t)$ para todo $t \in I$. Entonces, $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ es constante en el intervalo I.*

d4)[Continuidad del grado en b] *Sea $b' \in C_b$, donde C_b es la componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ a la que pertenece b. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b')$.*

d5)[Aditividad] *Sean $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ abiertos acotados tales que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2) = \varphi(\partial\Omega)$. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$.*

Demostración (d1). Basta con aplicar la Definición 1.10.

Demostración (d2). Según la Definición 1.30,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \quad \forall \psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|\psi - \varphi\|_\infty < \rho, \tag{1.7}$$

$$d(\chi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \quad \forall \psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|\psi - \chi\|_\infty < d(b, \chi(\partial\Omega)). \tag{1.8}$$

Tomamos $k > 1$ y suponemos que $\|\chi - \varphi\|_\infty < \frac{\rho}{k}$. Para todo $x \in \partial\Omega$ tenemos que:

$$|b - \chi(x)| \geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - \chi(x)| \geq \rho - \frac{\rho}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\rho > 0.$$

Luego, $d(b, \chi(\partial\Omega)) \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\rho$. Si $\|\psi - \chi\|_\infty < \left(1 - \frac{1}{k}\right)\rho \leq d(b, \chi(\partial\Omega))$, entonces

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \|\psi - \chi\|_\infty + \|\chi - \varphi\|_\infty \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\rho + \frac{\rho}{k} = \rho.$$

Luego, para toda $\chi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\chi - \varphi\|_\infty < \varepsilon = \frac{\rho}{k}$, las funciones ψ que cumplen (1.7) también cumplen (1.8) y, por tanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\chi, \Omega, b)$.

Demostración (d3). Sea $t \in I$ fijo. Veamos que $d(H(\cdot,t), \Omega, b) = d(H(\cdot,t'), \Omega, b)$ si $|t - t'| < \delta$. Como $H(x,t) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$ y $\overline{\Omega} \times I$ es compacto, entonces $H(x,t)$ es uniformemente continua en $\overline{\Omega} \times I$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| + |t-t'| < \delta$ implica que $|H(x,t) - H(y,t')| < \varepsilon$. Si $x = y$, entonces $|t-t'| < \delta$ implica que $|H(x,t) - H(x,t')| < \varepsilon$, lo que supone que $\|H(\cdot,t) - H(\cdot,t')\|_\infty < \varepsilon$. Aplicando la propiedad d2), tenemos que $d(H(\cdot,t), \Omega, b) = d(H(\cdot,t'), \Omega, b)$.

Hemos probado que para todo $t \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ es constante en $I_\delta(t) = (t - \delta, t + \delta)$. Usando la compacidad y conexidad de I igual que en la demostración del Lema 1.29, se sigue que $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ es constante para todo $t \in I$.

Demostración (d4). Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\tilde{b} \in B_\varepsilon(b)$. Tenemos que $\|(\varphi - b) - (\varphi - \tilde{b})\|_\infty = |b - \tilde{b}| < \varepsilon$. Por la propiedad d2), se sigue que $d(\varphi - b, \Omega, 0) =$

$d(\varphi - \tilde{b}, \Omega, 0)$, lo que implica que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, \tilde{b})$. Hemos probado que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, \tilde{b})$ para todo $\tilde{b} \in B_\varepsilon(b)$.

Sea $b' \in C_b$, donde C_b es la componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ que contiene a b. Como C_b es conexa y abierta, existe una curva Γ con origen en b y extremo en b' contenida en C_b. Usando la compacidad y conexidad de Γ igual que en la demostración del Lema 1.27, obtenemos que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b')$.

Demostración (d5). Supongamos que $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y b es un valor regular. Tenemos que $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_n\}$, donde $\xi_i \in \Omega_1$, $i = 1, \ldots, m$, y $\eta_j \in \Omega_2$, $j = 1, \ldots, n$. Luego,

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}\left(J_\varphi(\xi_i)\right) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\left(J_\varphi(\eta_j)\right) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

Supongamos ahora que $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Sea $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2))$, tomamos $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ que cumpla $\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} < \rho$. Entonces,

$$\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega_i} \leq \|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} < \rho \leq d(b, \varphi(\partial\Omega_i)), \quad i = 1, 2,$$

y además, $\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} < d(b, \varphi(\partial\Omega))$. De esta forma, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ y $d(\varphi, \Omega_i, b) = d(\psi, \Omega_i, b)$ para $i = 1, 2$.

Si b es un valor regular para ψ, se tiene que $d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega_1, b) + d(\psi, \Omega_2, b)$, por lo que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$.

Por otro lado, sabemos que $b \notin \psi(\partial\Omega_1) \cup \psi(\partial\Omega_2) \supset \psi(\partial\Omega)$. Si b es un valor crítico para ψ, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$. Tomamos $b' \in B_\varepsilon(b)$ no crítico. Por el Teorema 1.24, se sigue que $d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b')$ y $d(\psi, \Omega_i, b) = d(\psi, \Omega_i, b')$, para $i = 1, 2$. Además, $d(\psi, \Omega, b') = d(\psi, \Omega_1, b') + d(\psi, \Omega_2, b')$, por lo que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$. □

Corolario 1.34. *Sean $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ y $b : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ funciones continuas tales que $b(t) \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces, $d(H(\cdot, t), \Omega, b(t))$ es constante para todo $t \in [0, 1]$.*

Demostración. Por el Lema 1.32, podemos escribir que $d(H(\cdot, t), \Omega, b(t)) = d(H(\cdot, t) - b(t), \Omega, 0)$. Definimos ahora la función continua $H_1(\cdot, t) = H(\cdot, t) - b(t)$. Nótese que $0 \notin H_1(\partial\Omega \times [0, 1])$. Luego, por la propiedad d3) del Teorema 1.33, $d(H_1(\cdot, t), \Omega, 0)$ es constante en $[0, 1]$ y, por tanto, también lo es $d(H(\cdot, t), \Omega, b(t))$.

Lema 1.35 (Propiedad de escisión). *Sean $K \subset \overline{\Omega}$ un compacto, $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(K \cup \partial\Omega)$. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b)$.*

Demostración. Suponiendo que $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y que b es un valor regular, el resultado es trivial.

Supongamos ahora que $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Sea $\Omega' = \Omega \setminus K$. Tomamos $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} < d(b, \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(K))$. Entonces,

$$\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega'} \leq \|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} <$$
$$< d(b, \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(K)) \leq \text{mín}\{d(b, \varphi(\partial\Omega)), d(b, \varphi(\partial\Omega'))\},$$

pues $\partial\Omega' \subset \partial\Omega \cup K$. De esta forma, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ y $d(\varphi, \Omega', b) = d(\psi, \Omega', b)$.

Si b es un valor regular para ψ, ya lo hemos demostrado. Si b es un valor crítico, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \cap (\psi(\partial\Omega) \cup \varphi(K)) = \emptyset$. Tomamos $b' \in B_\varepsilon(b)$ regular. Por el Teorema 1.24, se sigue que $d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b')$ y $d(\psi, \Omega', b) = d(\psi, \Omega', b')$, y concluye la demostración. □

Lema 1.36. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en Ω disjuntos dos a dos y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, con $\varphi^{-1}(b) \subset \cup_{i\in I}\Omega_i$. Entonces, $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$, salvo en un número finito de índices $i \in I$, y se tiene que:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

Demostración. Nótese en primer lugar que $d(\varphi, \Omega_i, b)$ está bien definido para todo $i \in I$, ya que $b \notin \varphi(\partial\Omega_i)$. En efecto, como los abiertos Ω_i son disjuntos dos a dos, tenemos que $\Omega_j \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ para todo $i, j \in I$.

Sabemos que $\varphi^{-1}(b)$ es compacto, por lo que está recubierto por un número finito de abiertos Ω_i. Sea $\varphi^{-1}(b) \subset \cup_{i\in I_0}\Omega_i$, $I_0 \subset I$ finito, entonces $b \notin \varphi(\overline{\Omega}_i)$ y $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$ para todo $i \in I \setminus I_0$.

El conjunto $K = \overline{\Omega} \setminus \cup_{i\in I_0}\Omega_i$ es un compacto contenido en $\overline{\Omega}$ tal que $b \notin \varphi(K)$. Por la propiedad de escisión (Lema 1.35), se sigue que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \cup_{i\in I_0}\Omega_i, b)$. Además, $d(\varphi, \cup_{i\in I_0}\Omega_i, b) = \sum_{i\in I_0} d(\varphi, \Omega_i, b)$ por la propiedad de aditividad (Teorema 1.33). Por tanto, $d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in I} d(\varphi, \Omega_i, b)$. □

2

Aplicaciones del grado de Brouwer

En el presente capítulo nos ocupamos de algunas de las principales aplicaciones del grado en análisis y topología.

2.1. Existencia de soluciones

El grado de Brouwer constituye, por construcción, una potente herramienta en el estudio de la existencia de soluciones de ecuaciones de la forma $\varphi(x) = b$. En este contexto $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y b es un punto de $\mathbb{R}^N$ que no pertenece a la imagen de la frontera de Ω por φ.

Proposición 2.1. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y b es un valor regular. Como $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ según la Definición 1.10.

Supongamos ahora que $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Tomamos $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_\infty < d(b, \varphi(\overline{\Omega})) \leq d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Si b es un valor regular, $d(\psi, \Omega, b) = 0$. Luego, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ según la definición del grado de Brouwer. Si b es un valor crítico tomamos b' regular tal que $|b - b'| < d(b, \psi(\overline{\Omega}))$. Luego, $d(\psi, \Omega, b') = d(\psi, \Omega, b) = 0$ por definición, y se concluye que $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. $\square$

Teorema 2.2 (Teorema de existencia de soluciones). *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Si $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, entonces existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = b$.*

Demostración. Sea $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$. Suponemos que no existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = b$. Luego, $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$. Por la proposición anterior, se tiene que $d(\varphi, \Omega, b) = 0$, pero esto no es posible. $\square$

Observación 2.3. En el caso regular el grado topológico da una cota inferior de la cantidad de ceros de la ecuación $\varphi(x) = b$.

Observación 2.4. Si $d(\varphi, \Omega, b) = 0$, no podemos afirmar nada acerca de la existencia de soluciones de $\varphi(x) = b$.

Ejemplo 2.5. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([-3,3], \mathbb{R})$, $\varphi(x) = x^2 - 1$, $\psi(x) = x^2 + 1$. Tenemos que $d(\varphi, (-3,3), 0) = d(\psi, (-3,3), 0) = 0$. Sin embargo, hay dos soluciones de $\varphi(x) = 0$ y ninguna de $\psi(x) = 0$. Véanse las Figuras 2.1 y 2.2.

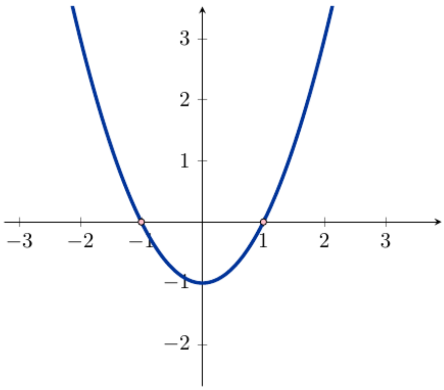

Figura 2.1. Gráfica de $\varphi(x) = x^2 - 1$

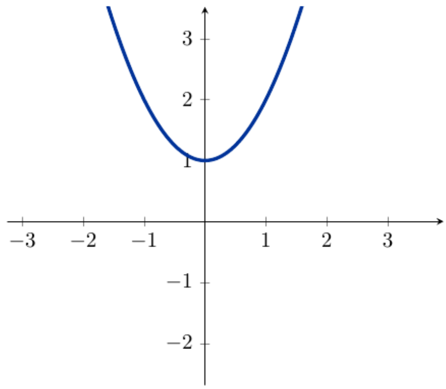

Figura 2.2. Gráfica de $\psi(x) = x^2 + 1$

Proposición 2.6. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Si $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \subset \varphi(\Omega)$.*

Demostración. Si $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, se tiene que $d(\varphi, \Omega, b') \neq 0$ para todo $b' \in B_\varepsilon(b)$. Luego, por el Teorema 2.2, existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = b'$ para todo $b' \in B_\varepsilon(b)$. Por tanto, $B_\varepsilon(b) \subset \varphi(\Omega)$. □

Proposición 2.7. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Si $\varphi(\Omega)$ está contenido en un subespacio propio de $\mathbb{R}^N$, entonces $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Demostración. Si $\varphi(\Omega) \subset E$, $\dim E < N$, no existe $\varepsilon < 0$ tal que $B_\varepsilon(b) \subset \varphi(\Omega)$. Luego, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ por la Proposición 2.6. □

Proposición 2.8. *Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tales que $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Entonces, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.*

Demostración. Como $\psi = \varphi$ en $\partial\Omega$ se tiene $\varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$. Definimos $H \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times I, \mathbb{R}^N)$, $I = [0,1]$, $H(x,t) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x)$. Sea $x \in \partial\Omega$. Tenemos que $H(x,t) = \varphi(x) = \psi(x)$ para todo $t \in I$. Luego, como $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$, se sigue que $b \notin H(\partial\Omega \times I)$. Concluimos así que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ por la propiedad d3) del Teorema 1.33. □

Damos a continuación una versión del teorema de Bolzano para aplicaciones de varias variables. Recordemos que el teorema de Bolzano afirma que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe algún elemento $c \in (a, b)$ satisfaciendo $f(c) = 0$.

Hemos de tener en cuenta que para funciones de una variable, las propiedades fundamentales que permiten probar el teorema de Bolzano son dos: la existencia de supremo de un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente y la conservación local del signo para funciones continuas no nulas. Como ninguna de estas propiedades tienen sentido para funciones con más de una variable haremos uso del grado de Brouwer.

Teorema 2.9 (Teorema de Poincaré-Miranda). *Sean* $Q = \prod_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ *y* $\overline{f} : Q \to \mathbb{R}^N$ *una función continua tal que* $f_{i|x_i=a_i} < 0 < f_{i|x_i=b_i}$ *para todo* $i \in [1, N]$. *Entonces, existe* $x_0 \in \mathring{Q}$ *tal que* $\overline{f}(x_0) = 0$.

Observación 2.10. En las hipótesis del teorema anterior, basta con que f_i tenga signos opuestos en los "lados"$x_i = a_i$ y $x_i = b_i$ para todo $i \in [1, N]$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in \mathring{Q}$, pues en caso de que $0 \notin \mathring{Q}$, tomamos $Q_1 = Q - y_0$ con $y_0 \in \mathring{Q}$ y $\overline{g}(x) = \overline{f}(x + y_0) - y_0$ para todo $x \in Q_1$. De esta forma, se tiene que $a_i < 0 < b_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Definimos $H(x, t) = (1 - t)\overline{f}(x) + tx$ continua para $x \in Q$ y $t \in I = [0, 1]$. Veamos que $H(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \partial Q$ y $t \in I$. Como $f_{i|x_i=a_i} < 0 < f_{i|x_i=b_i}$ y $a_i < 0 < b_i$, $i = 1, \ldots, N$, tenemos que:

$$(1 - t)f_{i|x_i=a_i}(x) + ta_i < 0 < (1 - t)f_{i|x_i=b_i}(x) + tb_i, \quad \forall t \in I, i \in [1, N],$$

por lo que $H(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \partial Q$ y $t \in I$. Por tanto, $d(H(\cdot, t), Q, 0)$ es constante en I, lo que implica que $d(\overline{f}, Q, 0) = d(I, Q, 0) = 1$. Luego, existe $x_0 \in \mathring{Q}$ tal que $\overline{f}(x_0) = 0$. □

Corolario 2.11. *Sean* $Q = \prod_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ *y* $\overline{f} : Q \to \mathbb{R}^N$ *una función continua tal que* $f_{i|x_i=a_i} \leq 0 \leq f_{i|x_i=b_i}$ *para todo* $i \in [1, N]$. *Entonces, existe* $x_0 \in Q$ *tal que* $\overline{f}(x_0) = 0$.

Demostración. Igual que en la demostración anterior, suponemos sin pérdida de generalidad que $0 \in \mathring{Q}$. Sea $\overline{f}_\varepsilon(x) = \overline{f}(x) + \varepsilon x$ una perturbación de $\overline{f}$ en donde $\varepsilon > 0$. Definimos $H(x, t) = (1 - t)\overline{f}_\varepsilon(x) + tx$ que es continua para $x \in Q$ y $t \in I = [0, 1]$. Veamos que $H(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \partial Q$ y $t \in I$. Como $f_{i|x_i=a_i} \leq 0 \leq f_{i|x_i=b_i}$ y $a_i < 0 < b_i$, $i = 1, \ldots, N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(1 - t)(f_\varepsilon)_{i|x_i=a_i}(x) + ta_i &= (1 - t)f_{i|x_i=a_i}(x) + (1 - t)\varepsilon a_i + ta_i < 0 < \\ &< (1 - t)f_{i|x_i=b_i}(x) + (1 - t)\varepsilon b_i + tb_i = (1 - t)(f_\varepsilon)_{i|x_i=b_i}(x) + tb_i,\end{aligned}$$

para todo $t \in I$, $i \in [1, N]$, por lo que $H(x, t) \neq 0$ para todo $x \in \partial Q$ y $t \in I$. Elegimos $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Por el teorema anterior existe $x_n \in \mathring{Q}$ tal que $\overline{f}(x_n) + \frac{1}{n}x_n = 0$. Por la compacidad de Q, existe una subsucesión x'_n de x_n tal que $x'_n \longrightarrow x_0 \in Q$. Tomando límites, concluimos que $\overline{f}(x_0) = 0$. □

2.2. Resultados clásicos de Topología

En esta sección, demostraremos algunos teoremas clásicos de topología. Entre ellos el teorema del punto fijo de Brouwer.

Definición 2.12. *Sean X, Y espacios topológicos, $Y \subset X$. Una retracción de X sobre Y es una aplicación continua $r : X \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.*

Proposición 2.13. *No existe una retracción de $\overline{B_1(0)}$ sobre $S^{N-1} := \partial B_1(0)$.*

Demostración. Supongamos que existe una retracción $r : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$. Entonces, $r_{|\partial B_1(0)} = Id$, por lo que $0 \notin r(\partial B_1(0)) \cup I(\partial B_1(0))$. Aplicando la Proposición 2.8, se tiene que $d(r, B_1(0), 0) = d(Id, B_1(0), 0) = 1$. Por el Teorema 2.2, se sigue que existe $x \in B_1(0)$ tal que $r(x) = 0$, lo que no es posible. □

Teorema 2.14 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Sea*

$$f \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)}).$$

Entonces, f tiene al menos un punto fijo en $\overline{B_1(0)})$, es decir, existe $x \in \overline{B_1(0)}$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{B_1(0)}$. Queremos construir una retracción de $\overline{B_1(0)}$ sobre S^{N-1}. Sea $x \in \overline{B_1(0)}$. Consideramos la semirrecta con origen en $f(x)$ que pasa por x y que interseca a S^{N-1}. Esta intersección se da en un único punto $r(x)$ de S^{N-1}, donde $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$ con $t = \langle x - f(x), f(x) \rangle + \sqrt{\langle x - f(x), f(x) \rangle^2 + 1 - |f(x)|^2}$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa el producto escalar.

De esta forma, hemos construido una función continua $r : \overline{B_1(0)} \to S^{N-1}$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in S^{N-1}$. Concluimos así que r es una retracción de $\overline{B_1(0)}$ sobre S^{N-1}, lo que no es posible por la Proposición 2.13. □

La siguiente proposición establece la equivalencia entre el teorema del punto fijo de Brouwer y la no existencia de retracción de $\overline{B_1(0)}$ sobre S^{N-1}.

Proposición 2.15. *El teorema del punto fijo de Brouwer implica que no existe una retracción de $\overline{B_1(0)}$ sobre S^{N-1}.*

Demostración. Suponemos que existe una retracción $r : \overline{B_1(0)} \to S^{N-1}$. Consideramos $f \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)})$, $f = -r$. Luego, si $f(x) = x$, entonces $x \in S^{N-1}$. Sin embargo, $f(x) = -x$ para todo $x \in S^{N-1}$ por definición. Por tanto, f no tiene ningún punto fijo, lo que no es posible por el teorema del punto fijo de Brouwer. □

Definición 2.16. *Un espacio topológico X posee la propiedad del punto fijo si toda función $f \in \mathcal{C}(X, X)$ admite un punto fijo.*

Lema 2.17. *Sea X un espacio topológico homeomorfo a $\overline{B_1(0)}$. Entonces, X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}(X,X)$ y $h : \overline{B_1(0)} \to X$ un homeomorfismo. Definimos $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\overline{B_1(0)}, \overline{B_1(0)})$ como $\tilde{f} = h^{-1} \circ f \circ h$. Por el teorema del punto fijo de Brouwer, existe $y \in \overline{B_1(0)}$ tal que $\tilde{f}(y) = h^{-1}(f(h(y))) = y$. Tenemos así que $f(h(y)) = h(y)$, con $h(y) \in X$. Por tanto, X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Seguidamente, introducimos el funcional de Minkowski y sus propiedades para demostrar posteriormente que todo compacto convexo de $\mathbb{R}^N$ tiene la propiedad del punto fijo.

Definición 2.18. *Sea $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto convexo y $0 \in \mathring{K}$. Se define el funcional de Minkowski asociado a K como la función $\rho : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ definida así:*

$$\rho(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Proposición 2.19. *El funcional de Minkowski asociado a K cumple las siguientes propiedades:*

i) $\rho(tx) = t\rho(x)$ *para todo* $t \geq 0$, $\rho(0) = 0$.
ii) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.
iii) $\rho(x) \leq \dfrac{|x|}{R}$ *si* $\overline{B_R(0)} \subset K$.
iv) $x \in K$ *si, y sólo si,* $\rho(x) \leq 1$.
v) Para todo $x \in \mathbb{R}^N$, *existe* $k \in K$ *tal que* $x = \rho(x)k$.
vi) $\rho(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}^N$.

Demostración (i). Es inmediata aplicando la definición.

Demostración (ii). Supongamos que $\lambda_1^{-1}x \in K$ y $\lambda_2^{-1}y \in K$. Se tiene que

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1}(x+y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\frac{y}{\lambda_2} \in K,$$

por lo que $x + y \in (\lambda_1 + \lambda_2)K$. Luego, $\rho(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Tomando primero ínfimo en λ_1 y después en λ_2, tenemos que $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Demostración (iii). Definimos $\rho_R = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda\overline{B_R(0)}\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Si $\overline{B_R(0)} \subset K$, entonces $\rho(x) \leq \rho_R(x)$. Además, si $x \in \lambda\overline{B_R(0)}$, tenemos que $|x| \leq \lambda R$, es decir, $\frac{|x|}{R} \leq \lambda$. Luego, $\rho_R(x) = \frac{|x|}{R}$. Como $\lambda\overline{B_R(0)} \subset \lambda K$ para todo $\lambda \geq 0$, concluimos que $\rho(x) \leq \rho_R(x) = \frac{|x|}{R}$.

Demostración (iv). Se sigue de la propiedad v).

Demostración (v). Si $x \in \mathbb{R}^N$, existe una sucesión decreciente $\lambda_n \geq 0$ tal que $\rho(x) = \lim \lambda_n$. Además, $x = \lambda_n k_n$ para $k_n \in K$. Tomando una subsucesión convergente de k_n, se tiene que $k'_n \longrightarrow k \in K$ y $\lambda_n \longrightarrow \rho(x)$, lo que implica que $x = \rho(x)k$.

Demostración (vi). Por la propiedad *iii*), es claro que ρ es continua en $x = 0$. Sean, por tanto, $x \neq 0$ y $x_n \longrightarrow x$. Entonces, $x_n = x + y_n$ con $y_n \longrightarrow 0$. De esta forma, $\rho(x_n) = \rho(x + y_n) \leq \rho(x) + \rho(y_n)$ por la propiedad *ii*). Tomando límites superiores, tenemos que $\limsup \rho(x_n) \leq \rho(x)$.

Supongamos ahora que $\rho(x'_n) \longrightarrow l$ para alguna subsucesión x'_n de x_n. Se tiene que $x'_n = \rho(x'_n)k'_n$ para $k'_n \in K$. Tomando ahora una subsucesión k''_n de k'_n tal que $k''_n \longrightarrow k \in K$, se sigue que $x''_n = \rho(x''_n)k''_n$. Tomando límites, obtenemos que $x = lk$. Luego, $l \geq \rho(x)$, lo que quiere decir que $\liminf \rho(x_n) \geq \rho(x)$. Por tanto, $\lim \rho(x_n) = \rho(x)$, probando que $\rho(x)$ es continua en $\mathbb{R}^N$. □

Teorema 2.20. *Todo compacto convexo K de $\mathbb{R}^N$ es homeomorfo a $\overline{B_1(0)}$.*

Demostración. Queremos construir un homeomorfismo $h : K \to \overline{B_1(0)}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $0 \in K$. En caso de que $0 \notin K$, tomamos $K' = K - \{x_0\}$ con $x_0 \in K$. Además, podemos suponer que $\mathring{K} \neq \emptyset$ y que $0 \in \mathring{K}$. Sean $M = \operatorname{rango} K = \max\{m \geq 1 : \exists\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq K \text{ sistema libre}\}$ y el sistema libre $\{w_1, \ldots, w_M\} \subseteq K \subseteq E_M = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_M\}$. Consideramos la envolvente convexa de $\{w_1, \ldots, w_M\}$, que podemos expresar como:

$$\operatorname{Co}(\{w_1, \ldots, w_M\}) = \{t_1 w_1 + \cdots + t_m w_m : \sum_{i=1}^{M} t_i = 1, t_i \geq 0, i = 1, \ldots, M\}.$$

De esta forma, tenemos que $\operatorname{Co}(\{w_1, \ldots, w_M\}) \subseteq K \subseteq E_M$ y que

$$\mathring{\operatorname{Co}}(\{w_1, \ldots, w_M\}) \neq \emptyset$$

en E_M. Podemos reemplazar E_M por $\mathbb{R}^M$ pues son espacios isomorfos. Por tanto, en caso de que $\mathring{K} = \emptyset$ en $\mathbb{R}^N$, continuamos la prueba en $\mathbb{R}^M$, pues $\mathring{K} \neq \emptyset$ en $\mathbb{R}^M$. Además, $0 \in \mathring{K}$, pues en caso de que $0 \notin \mathring{K}$, tomamos $K' = K - \{x_0\}$ con $x_0 \in \operatorname{Co}(\{w_1, \ldots, w_M\})$.

Definimos $h(x) = \rho(x)\frac{x}{|x|}$ para $x \in K$. Se tiene que $h(x) \in \overline{B_1(0)}$ porque $\rho(x) \leq 1$ en K. Para ver que h es homeomorfismo, basta probar que h es continua y biyectiva. Tenemos así que:

- h es continua en $K \subset \mathbb{R}^N$ porque ρ es continua en $\mathbb{R}^N$.
- h es inyectiva. En efecto $h(x) = h(y)$. Entonces $\rho(x)\frac{x}{|x|} = \rho(y)\frac{y}{|y|}$. Tomando módulos, se tiene que $\rho(x) = \rho(y)$, por lo que $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$. Luego, $y = tx$, $t \in \mathbb{R}^+$, y $\rho(x) = \rho(tx)$, es decir, $\rho(x) = t\rho(x)$, por lo que $t = 1$. Concluimos así que $x = y$.

- h es sobreyectiva pues dado $z \in \overline{B_1(0)}$ existe $x = tz$, $t > 0$, de forma que $x \in K$ y que $h(x) = z$. Para verlo usamos la definición de h y esto requiere que $\rho(tz) = t\rho(z) = |z|$. Por tanto, $t = \frac{|z|}{\rho(z)}$. Como $\rho(x) = \rho(tz) = |z| \leq 1$, se tiene que $x \in K$.

□

Corolario 2.21. *Sean K un compacto convexo de $\mathbb{R}^N$ y $f : K \to K$ una función continua. Entonces, f tiene un punto fijo en K, es decir, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.*

A continuación, como consecuencia de este importante resultado presentamos el teorema de Perron–Frobenius.

Teorema 2.22 (Teorema de Perron–Frobenius). *Sea $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} \geq 0$ para todo i,j. Entonces, existen $\lambda \geq 0$ y $x \neq 0$ tales que $Ax = \lambda x$ y $x_i \geq 0$ para todo i. En otras palabras, A tiene un autovector de componentes no negativas asociado a un autovalor no negativo.*

Demostración. Sea $D = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^N x_i = 1\}$. Si $Ax = 0$ para algún $x \in D$, ya tendríamos un autovector no negativo asociado a $\lambda = 0$. En caso de que $Ax \neq 0$ para todo $x \in D$, existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^N (Ax)_i \geq \alpha$ en D. Por tanto, la aplicación $f(x) = Ax/(\sum_{i=1}^N (Ax)_i)$ es continua en D. Asimismo, se tiene que $f(D) \subset D$, ya que $a_{ij} \geq 0$ para todo i, j. Por el Corolario 2.21 se sigue que f tiene un punto fijo en D, es decir, existe $x_0 \in D$ tal que $Ax_0 = \lambda x_0$, con $\lambda = \sum_{i=1}^N (Ax)_i$.

Por último, recordamos la definición de campo de vectores tangentes en S^N, que es la frontera de la bola unidad en $\mathbb{R}^{N+1}$, y procedemos a dar una prueba del así denominado teorema de la "bola peluda" (o del "erizo").

Definición 2.23. *Un campo de vectores tangentes en S^N consiste en una aplicación continua $F : S^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ tal que $\langle x, F(x)\rangle = 0$ para todo $x \in S^N$. Diremos que F es no nulo si $F(x) \neq 0$ para todo $x \in S^N$.*

Teorema 2.24 (Teorema de Brouwer-Poincaré). *Existe un campo de vectores tangentes no nulo en S^N si y sólo si N es impar.*

Demostración. Supongamos que N es impar. Definimos la aplicación continua $F : S^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ tal que $F(x_1, \ldots, x_{N+1}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{N+1}, x_N)$. Tenemos así que $\langle x, F(x)\rangle = 0$ para todo $x \in S^N$. Luego, F es un campo de vectores tangentes no nulo en S^N.

Supongamos ahora que existe un campo de vectores tangentes $F : S^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ no nulo en S^N. Queremos ver que N es impar. Para ello, definimos $f : S^N \to S^N$ tal que $f(x) = \frac{F(x)}{|F(x)|}$. Tenemos así que $\langle x, f(x)\rangle = 0$ para todo

$x \in S^N$. Definimos asimismo $H : S^N \times I \to S^N$, $I = [0,1]$, tal que $H(x,t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)f(x)$. Comprobemos que H está bien definida. Se tiene que:

$$|H(x,t)|^2 = H(x,t)H(x,t) = \cos^2(\pi t)|x|^2 + 2\sin(\pi t)\cos(\pi t)xf(x)+ \\ + \sin^2(\pi t)|f(x)|^2 = \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1,$$

por lo que $|H(x,t)| = 1$. Luego, $H(x,t) \in S^N$. Además, es claro que H es continua y que $H(x,t) \neq 0$ para todo $x \in S^N$ y $t \in I$. Por tanto, $d(H(\cdot,t), S^N, 0)$ es constante en I. Como $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = -x$ para todo $x \in S^N$, tenemos que $1 = d(I, S^N, 0) = d(-I, S^N, 0) = (-1)^{N+1}$. Por consiguiente, N es impar. □

Teorema 2.25 (Teorema de la "bola peluda"). *Sea $F : S^N \to \mathbb{R}^{N+1}$ un campo de vectores tangentes con N par. Entonces, existe $x_0 \in S^N$ tal que $F(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $F(x) \neq 0$ para todo $x \in S^N$. Luego, F es un campo de vectores tangentes no nulo en S^N. Por el Teorema 2.24, se sigue que N es impar, lo que contradice la hipótesis sobre N. □

2.3. Teorema de separación de Jordan

Abordamos ahora la prueba del teorema de separación de Jordan con ayuda del grado de Brouwer, obteniendo como corolario el célebre teorema de la curva de Jordan. Para ello, presentamos la propiedad multiplicativa, que expresa el grado de la aplicación compuesta $\psi \circ \varphi$ como suma de productos de grados en φ y en ψ.

Recordemos que, según el Lema 1.27, el grado $d(\varphi, \Omega, b)$ es constante sobre cada componente conexa C de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$, por lo que lo denotaremos como $d(\varphi, \Omega, C)$ cuando $b \in C$. Además, como $\varphi(\partial\Omega)$ es compacto, hay una componente conexa no acotada C_∞ de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$. Ya que C_∞ contiene puntos que no pertenecen a $\varphi(\overline{\Omega})$, tenemos que $d(\varphi, \Omega, C_\infty) = 0$.

Proposición 2.26 (Propiedad multiplicativa). *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ las componentes conexas acotadas de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ y $b \notin (\psi \circ \varphi)(\partial\Omega)$, es decir, $\psi^{-1}(b) \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$. Entonces,*

$$d(\psi \circ \varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} d(\varphi, \Omega, C_i) d(\psi, C_i, b), \tag{2.1}$$

en donde solamente hay un número finito de sumandos no nulos.

Demostración. Si $b \notin (\psi \circ \varphi)(\overline{\Omega})$, es decir, $\varphi(\overline{\Omega}) \cap \psi^{-1}(b) = \emptyset$, se tiene que $d(\psi \circ \varphi, \Omega, b) = 0$ y además, $d(\varphi, \Omega, C_i)d(\psi, C_i, b) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego, la igualdad (2.1) se verifica.

Si $b \in (\psi \circ \varphi)(\overline{\Omega})$, existe $R > 0$ tal que $\varphi(\overline{\Omega}) \subset B_R(0)$. Sea $M = \psi^{-1}(b) \cap \overline{B_R(0)}$, que es un compacto. Como $\psi^{-1}(b) \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, $M \subset (\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)) \cap \overline{B_R(0)} \subset (\cup_{i\in\mathbb{N}} C_i) \cup (C_\infty \cap B_{R+1}(0))$. Existe entonces un número finito de índices $i = 1, \ldots, p$ tal que $\cup_{i=1}^{p} C_i$ y $C_{p+1} = C_\infty \cap B_{R+1}(0)$ recubren M. Luego, $d(\varphi, \Omega, C_{p+1}) = 0$ y $d(\psi, C_j, b) = 0$ para todo $j \geq p+2$ porque $C_j \cap \varphi(\overline{\Omega}) = \emptyset$ para todo $j \geq p+2$. De esta forma, se demuestra que la suma en (2.1) es finita.

Veamos que (2.1) es cierta para $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y b un valor regular de $\psi \circ \varphi$. En efecto, se tiene que $(\psi \circ \varphi)'(x) = \psi'(\varphi(x))\varphi'(x)$. Luego,

$$d(\psi \circ \varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in (\psi\circ\varphi)^{-1}(b)} \operatorname{sgn} J_{\psi\circ\varphi}(x) = \sum_{x \in (\psi\circ\varphi)^{-1}(b)} \operatorname{sgn} J_\psi(\varphi(x)) \operatorname{sgn} J_\varphi(x) =$$

$$= \sum_{\substack{x \in \varphi^{-1}(z) \\ z \in \psi^{-1}(b)}} \operatorname{sgn} J_\psi(z) \operatorname{sgn} J_\varphi(x) = \sum_{\substack{z \in \psi^{-1}(b) \\ z \in \varphi(\Omega)}} \operatorname{sgn} J_\psi(z) \left[\sum_{z \in \varphi^{-1}(z)} \operatorname{sgn} J_\varphi(x) \right] =$$

$$= \sum_{\substack{z \in \psi^{-1}(b) \\ z \in \varphi(\Omega)}} \operatorname{sgn} J_\psi(z) d(\varphi, \Omega, z).$$

Como las componentes $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntas, obtenemos que:

$$d(\psi \circ \varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\substack{z \in C_i \\ z \in \psi^{-1}(b)}} \operatorname{sgn} J_\psi(z) d(\varphi, \Omega, z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} d(\varphi, \Omega, C_i) \left[\sum_{\substack{z \in C_i \\ z \in \psi^{-1}(b)}} \operatorname{sgn} J_\psi(z) \right] = \sum_{i \in \mathbb{N}} d(\varphi, \Omega, C_i) d(\psi, C_i, b).$$

Por tanto, la igualdad (2.1) se cumple para $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\psi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y b un valor regular de $\psi \circ \varphi$. El caso b no regular se demuestra de forma análoga. Finalmente, la prueba del caso general, donde $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, se puede encontrar de forma detallada en [1]. □

La propiedad multiplicativa del grado resulta fundamental para demostrar el teorema de separación de Jordan.

Teorema 2.27 (Teorema de separación de Jordan). *Sean $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^N$ compactos homeomorfos, entonces $\mathbb{R}^N \setminus Q_1$ y $\mathbb{R}^N \setminus Q_2$ tienen el mismo número de componentes conexas.*

Demostración. Sean $h : Q_1 \to Q_2$ un homeomorfismo, $\tilde{h}$ una extensión continua de h a $\mathbb{R}^N$ y $\tilde{h}^{-1}$ una extensión continua de h^{-1} a $\mathbb{R}^N$. La existencia de tales extensiones está garantizada por el teorema de Tietze (ver [1]). Llamaremos C_j a las componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus Q_1$ y L_i a las de $\mathbb{R}^N \setminus Q_2$. Asimismo, para j fijado denotaremos por G_q a las componentes conexas de $\mathbb{R}^N \setminus h(\partial C_j)$. Nótese que $\partial C_j \subset Q_1$ y que $\partial L_i \subset Q_2$.

Dado j, se tiene que:

$$\bigcup_i L_i = \mathbb{R}^N \setminus Q_2 \subset \mathbb{R}^N \setminus h(\partial C_j) = \bigcup_q G_q. \tag{2.2}$$

Veamos que para todo i, existe q tal que $L_i \subset G_q$. Sea $y_0 \in \mathbb{R}^N \setminus Q_2$, existe i_0 tal que $y_0 \in L_{i_0}$. De (2.2) se sigue que $y_0 \in \mathbb{R}^N \setminus h(\partial C_j)$, por lo que existe q_0 tal que $y_0 \in G_{q_0}$. Luego, $L_{i_0} \subset G_{q_0}$. En particular, $L_\infty \subset G_\infty$.

Sea $y \in C_j$, se tiene que $d(\tilde{h}^{-1} \circ \tilde{h}, C_j, y) = 1$, pues $\tilde{h}^{-1} \circ \tilde{h}_{|\partial C_j \subset Q_1} = I$. Aplicando la propiedad multiplicativa, se sigue que:

$$1 = d(\tilde{h}^{-1} \circ \tilde{h}, C_j, y) = \sum_q d(\tilde{h}, C_j, G_q) d(\tilde{h}^{-1}, G_q, y).$$

Sea $N_q = \{i : L_i \subset G_q\}$, entonces $d(\tilde{h}^{-1}, G_q, y) = \sum_{i \in N_q} d(\tilde{h}^{-1}, L_i, y)$, ya que $y \notin \tilde{h}^{-1}(\overline{G_q} \setminus \cup_{i \in N_q} L_i)$, y $d(\tilde{h}, C_j, G_q) = d(\tilde{h}, C_j, L_i)$ para todo $i \in N_q$. Por tanto,

$$1 = \sum_q \sum_{i \in N_q} d(\tilde{h}, C_j, L_i) d(\tilde{h}^{-1}, L_i, y) = \sum_i d(\tilde{h}, C_j, L_i) d(\tilde{h}^{-1}, L_i, C_j), \tag{2.3}$$

ya que $y \in C_j \subset \mathbb{R}^N \setminus \tilde{h}^{-1}(Q_2) \subset \mathbb{R}^N \setminus \tilde{h}^{-1}(\partial L_i)$. Fijemos ahora i en vez de j. De forma análoga, obtenemos:

$$1 = \sum_j d(\tilde{h}, C_j, L_i) d(\tilde{h}^{-1}, L_i, C_j). \tag{2.4}$$

Suponemos que hay m componentes C_j. De las igualdades (2.3) y (2.4) se sigue que:

$$m = \sum_{j=1}^m 1 = \sum_{j=1}^m \sum_i d(\tilde{h}, C_j, L_i) d(\tilde{h}^{-1}, L_i, C_j) =$$

$$= \sum_i \sum_{j=1}^m d(\tilde{h}, C_j, L_i) d(\tilde{h}^{-1}, L_i, C_j) = \sum_i 1.$$

Como $\sum_i 1 = m$, el número de componentes L_i es m. Nótese que este razonamiento también es válido cuando el número de componentes C_j es infinito.

Concluimos así que $\mathbb{R}^N \setminus Q_1$ y $\mathbb{R}^N \setminus Q_2$ tienen el mismo número de componentes conexas. $\square$

Definición 2.28. *Un conjunto* $C \subset \mathbb{R}^2$ *es una curva de Jordan si* $C = \{\phi(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ *donde:*

i) $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *es continua.*
ii) $\phi(0) = \phi(2\pi)$.
iii) ϕ *es inyectiva en* $[0, 2\pi)$.

Lema 2.29. *Un espacio topológico* $C \subset \mathbb{R}^2$ *es una curva de Jordan si y sólo si es homeomorfa a* S^1.

Demostración. Veamos que si $h : S^1 \to C$ es un homeomorfismo, entonces C es una curva de Jordan. Sea $\psi : [0, 2\pi] \to S^1$, $\psi(t) = e^{it}$. Definimos $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (h \circ \psi)(t)$. Tenemos que:

- ϕ es continua porque es una composición de funciones continuas.
- $\phi(0) = \phi(2\pi)$ porque $\psi(0) = \psi(2\pi)$.
- ϕ es inyectiva en $[0, 2\pi)$ porque es una composición de funciones inyectivas en $[0, 2\pi)$.

Por tanto, C es una curva de Jordan.

Supongamos ahora que $C = \{\phi(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ es una curva de Jordan. Queremos construir un homeomorfismo $h : C \to S^1$. Definimos $h(\phi(t)) = e^{it}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Es claro que h es sobreyectiva e inyectiva porque $\phi(0) = \phi(2\pi)$. Por otro lado, puede probarse que es continua. Al ser C y S^1 compactos se concluye que h es un homeomorfismo. $\square$

Por último, presentamos el teorema de la curva de Jordan, un teorema clásico cuyo enunciado es simple e intuitivo, pero cuyas demostraciones son largas y complicadas.

Teorema 2.30 (Teorema de la curva de Jordan). *Sea* $C \subset \mathbb{R}^2$ *una curva de Jordan, entonces* $\mathbb{R}^2 \setminus C$ *tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales es no acotada.*

Demostración. Sabemos que C es homeomorfa a S^1 y que $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ tiene dos componentes conexas, una acotada y otra no acotada. Por el teorema de separación de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C$ tiene el mismo número de componentes que $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ y además, una de ellas es no acotada.

3

Unicidad del grado de Brouwer

En este capítulo probaremos que existe una única aplicación:

$$d : \{(\varphi, \Omega, b) : \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ abierto y acotado}, \ \varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \ b \notin \varphi(\partial\Omega)\} \to \mathbb{Z}$$

que cumple las siguientes propiedades:

d1) $d(I, \Omega, b) = 1$ para todo $b \in \Omega$.
d2) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$ si Ω_1, Ω_2 son abiertos disjuntos contenidos en Ω tales que $b \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$.
d3) $d(H(\cdot, t), \Omega, b(t))$ es constante en $[0, 1]$ si $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ y $b : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ son funciones continuas tales que $b(t) \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ para todo $t \in [0, 1]$.

3.1. El grado calculado por aproximación mediante aplicaciones regulares

En primer lugar presentamos dos resultados necesarios para demostrar la unicidad del grado. El primero es un caso particular del teorema de extensión de Tietze.

Lema 3.1. *Sean $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto compacto y $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^N)$. Entonces, existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{f}_{|A} = f$.*

Nos remitimos a [1] para su demostración. El que sigue es un resultado clásico de aproximación cuya demostración incluimos.

Lema 3.2. *Se tiene que:*

a) Sea $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Dado $\eta > 0$, existe una aplicación $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty,\Omega} < \eta.$$

b) Sea $f \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dados $\eta > 0$ y $\delta > 0$, existe una aplicación $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que:

$$\|f - \hat{f}\|_{\infty,\Omega} + \|\nabla f - \nabla \hat{f}\|_{\infty,\Omega_\delta} < \eta,$$

donde $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$.

Demostración (a). Consideramos la familia $\{\rho_\varepsilon\}$ de núcleos regularizantes definida en el primer capítulo. Se tiene que $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{sop} \rho_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\rho_\varepsilon \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(z)dz = 1$.

Por el Lema 3.1, existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Definimos $f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y)\tilde{f}(y)dy$ con $x \in \mathbb{R}^N$. Como $\rho_\varepsilon(z) = 0$ si $|z| \geq \varepsilon$, tenemos que:

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\tilde{f}(y)dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)\tilde{f}(x-z)dz.$$

Veamos ahora que $f_\varepsilon(x) \longrightarrow \tilde{f}(x)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x) &= \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)(\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(x))dz, \\ |f_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)|\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(x)|dz \leq \\ &\leq \sup_{|z|\leq\varepsilon} |\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

si $\varepsilon \longrightarrow 0^+$. En particular,

$$|f_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x)| \leq \sup_{|z|\leq\varepsilon} |\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(x)|$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. Luego,

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x)| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} \sup_{|z|\leq\varepsilon} |\tilde{f}(x-z) - \tilde{f}(x)| \leq \sup_{|y-z|<\varepsilon} |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)|.$$

Como $\tilde{f}$ es uniformemente continua en el compacto

$$B(\overline{\Omega}, \varepsilon) = \{x : d(x, \Omega) < \varepsilon\}$$

para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, se cumple que:

$$\sup_{|y-z|<\varepsilon} |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x)| < \eta, \quad \eta > 0.$$

Ya que $\tilde{f} = f$ en $\overline{\Omega}$, concluimos que $\|f - f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega} < \eta$ para ε lo suficientemente pequeño. Por tanto, basta elegir $\hat{f} = f_\varepsilon$. □

Demostración (b). Ya hemos probado que $\|f - f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega} < \frac{\eta}{2}$ con $\eta > 0$ y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Veamos ahora que $\|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega_\delta} < \frac{\eta}{2}$. Sea $x \in \Omega_\delta$, derivando bajo el signo integral se tiene que:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\tilde{f}(y)dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\tilde{f}(y)dy.$$

Tomamos $0 < \varepsilon < \delta$, por lo que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ y se sigue que:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\tilde{f}(y)dy = \int_{B_\varepsilon(x)} -\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y)f(y)dy.$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} -\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y)f(y)dy =$$
$$= \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z)dz.$$

Luego,

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)dz$$

para todo $x \in \Omega_\delta$. Tenemos ahora que:

$$\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq \sup_{|z|<\varepsilon}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right|,$$

y que

$$\sup_{x\in\Omega_\delta}\left|\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \leq \sup_{|y-x|<\varepsilon}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| < \frac{\eta}{2},$$

pues $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es uniformemente continua en $\Omega_{\delta-\varepsilon} \subset \overline{\Omega}$. Por tanto, $\|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega_\delta} < \frac{\eta}{2}$. Concluimos así que $\|f - f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega} + \|\nabla f - \nabla f_\varepsilon\|_{\infty,\Omega_\delta} < \eta$. □

El que sigue es un resultado auxiliar que empleamos con frecuencia.

Lema 3.3. *Sean $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Si $\varphi^{-1}(b) = \emptyset$, entonces $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Demostración. Podemos escribir $\Omega = \Omega \cup \emptyset$. Como $\overline{\Omega} \setminus (\Omega \cup \emptyset) = \partial\Omega$, tenemos que $b \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus (\Omega \cup \emptyset))$. Luego, por d2), $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b) + d(\varphi, \emptyset, b)$, lo que implica que $d(\varphi, \emptyset, b) = 0$.

Sea $\Omega_1 = \Omega_1 \cup \emptyset \subset \Omega$ un abierto cualquiera. Se sabe que $b \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. Por d2), se tiene que $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \emptyset, b) = d(\varphi, \Omega_1, b)$. En particular, si $\Omega_1 = \emptyset$, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \emptyset, b) = 0$. □

En la siguiente proposición probamos que el valor de la aplicación d para una aplicación continua coincide con el valor de d para una aproximación regular.

Proposición 3.4. *Sean* $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *y* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Entonces, existe* $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *tal que* $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demostración. Sea $\rho_0 = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. Tomamos $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_{\infty,\Omega} < \rho_0$. Definimos $H(x,t) = t\psi(x) + (1-t)\varphi(x) = \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x))$ para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,1]$. Veamos que $H(x,t) \neq b$ para todo $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$. Sean $x \in \partial\Omega$ y $t \in [0,1]$, se tiene que:

$$|b - H(x,t)| = |b - \varphi(x) + t(\psi(x) - \varphi(x))| \geq$$
$$\geq |b - \varphi(x)| - t|\psi(x) - \varphi(x)| \geq \rho_0 - \|\psi - \varphi\|_\infty > 0.$$

Luego, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Por la propiedad d3), $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ es constante para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$. □

Concluimos la sección probando que en el cálculo de la aplicación d para una aplicación regular siempre se puede suponer que b es un valor regular. Recordemos la Definición 1.7.

Proposición 3.5. *Sean* $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ *y* $\rho = d(b, \varphi(\partial\Omega))$. *Entonces, existe* $b' \in B_\rho(b)$ *regular tal que* $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b')$.

Demostración. Por el teorema de Sard (Teorema 1.9), existe $b' \in B_\rho(b)$ regular. Definimos $b : [0,1] \to B_\rho(b)$, $b(t) = b + t(b - b')$. Como $B_\rho(b) \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$, se tiene que $b(t) \notin \varphi(\partial\Omega)$ para todo $t \in [0,1]$. Por d3), $d(\varphi, \Omega, b(t))$ es constante en $[0,1]$. Por tanto, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b')$. □

3.2. Localización del grado: cálculo por linealización

En la siguiente proposición se prueba que el cálculo de la aplicación $d = d(\varphi, \Omega, b)$ se puede localizar en bolas centradas en las contraimágenes de b, con un radio tan pequeño como se desee. A tales efectos podemos considerar que $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ y que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ es un valor regular tal que $\varphi^{-1}(b) \neq \emptyset$.

Proposición 3.6. *Sea* $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, *entonces existe* $\varepsilon > 0$ *tan pequeño como se quiera tal que* $d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^m d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $B_\varepsilon(\xi_i) \cap B_\varepsilon(\xi_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i,j \in \{1, \ldots, m\}$, y $B_\varepsilon(\xi_i) \subset \Omega$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tenemos que $b \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(\xi_i))$, ya que $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Luego, por d2), $d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^m d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b)$. □

Ahora se demuestra que el cálculo de la aplicación d para φ en la bola $B_\varepsilon(\xi_i)$ se reduce al de la aplicación lineal $\varphi'(\xi_i)$. En otras palabras, d se calcula por "linealización".

Proposición 3.7. *Sea* $A_i = \varphi'(\xi_i)$, *entonces* $d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b) = d(A_i, B_\varepsilon(0), 0)$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se tiene que

$$\varphi(x) = b + A_i(x - \xi_i) + g(x), \qquad \frac{g(x)}{|x - \xi_i|} \longrightarrow 0$$

cuando $x \longrightarrow \xi_i$. Como b es un valor regular, $\det A_i \neq 0$ y, por tanto, existe A_i^{-1}. Tenemos así que:

$$|x - \xi_i| = |A_i^{-1} A_i(x - \xi_i)| \leq |A_i^{-1}||A_i(x - \xi_i)|,$$
$$|A_i(x - \xi_i)| \geq c|x - \xi_i|,$$

con c una constante positiva. Además, como $\frac{g(x)}{|x-\xi_i|} \to 0$ cuando $x \to \xi_i$, se cumple que $\frac{|g(x)|}{|x-\xi_i|} \leq \frac{c}{2}$ cuando $|x - \xi_i| < \varepsilon$.

Definimos $H_1(x, t) = b + A_i(x - \xi_i) + tg(x)$ para $(x, t) \in \overline{B_\varepsilon(\xi_i)} \times [0, 1]$. Sean $x \in \partial B_\varepsilon(\xi_i)$ y $t \in [0, 1]$, se tiene que:

$$|H_1(x, t) - b| = |A_i(x - \xi_i) + tg(x)| \geq |A_i(x - \xi_i)| - |g(x)| \geq$$
$$\geq c|x - \xi_i| - \frac{c}{2}|x - \xi_i| = \frac{c}{2}|x - \xi_i| = \frac{c}{2}\varepsilon > 0.$$

Luego, $b \notin H_1(\partial B_\varepsilon(\xi_i) \times [0, 1])$. Por d3), se sigue que $d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b) = d(b + A_i(x - \xi_i), B_\varepsilon(\xi_i), b)$.

Definimos ahora $H_2(x, t) = bt + A_i(x - \xi_i)$ para $(x, t) \in \overline{B_\varepsilon(\xi_i)} \times [0, 1]$. Se tiene que $H_2(x, t) \neq bt$ para todo $(x, t) \in \partial B_\varepsilon(\xi_i) \times [0, 1]$, ya que $bt + A_i(x-\xi_i) = bt$ implica que $x = \xi_i$. Luego, por d3), $d(b + A_i(x - \xi_i), B_\varepsilon(\xi_i), b) = d(bt + A_i(x - \xi_i), B_\varepsilon(\xi_i), bt) = d(A_i(x - \xi_i), B_\varepsilon(\xi_i), 0)$.

Tomamos $R > |\xi_i| + \varepsilon$. Por d2), tenemos que $d(A_i(x - \xi_i), B_\varepsilon(\xi_i), 0) = d(Ax - A\xi_i, B_R(0), 0)$. Definimos $H_3(x, t) = A_i x - tA_i\xi_i$ para $(x, t) \in \overline{B_R(0)} \times [0, 1]$. Como $A_i x - tA_i\xi_i = 0$ implica que $x \in [0, \xi_i]$, se tiene que $0 \notin H_3(\partial B_R(0) \times [0, 1])$. Luego, por d3), $d(A_i - A_i\xi_i, B_R(0), 0) = d(A_i - tA_i\xi_i, B_R(0), 0) = d(A_i, B_R(0), 0)$.

Finalmente, por d2), se sigue que $d(A_i, B_R(0), 0) = d(A_i, B_\varepsilon(0), 0)$, donde ε es tan pequeño como se quiera. Concluimos así que $d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b) = d(A_i, B_\varepsilon(0), 0)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. □

3.3. El grado para aplicaciones lineales

Los próximos resultados requieren algunos hechos básicos de álgebra lineal como la siguiente proposición. Su demostración es consecuencia de la teoría espectral elemental que se recoge en [4].

Proposición 3.8. *Sean* $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$, *y* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *los autovalores negativos de* A *cuyas multiplicidades algebraicas son* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. *Entonces,* $\mathbb{R}^N$ *se puede expresar como la suma directa de dos subespacios* X *e* Y, $\mathbb{R}^N = X \oplus Y$, *tales que:*

i) X *e* Y *son invariantes respecto de* A, *es decir,* $AX \subset X$ *y* $AY \subset Y$.
ii) $A_{|X}$ *tiene como autovalores exactamente los autovalores negativos de* A *y* $A_{|Y}$ *tiene como autovalores exactamente los autovalores no negativos de* A.
iii) $\dim X = \sum_{i=1}^m \alpha_i$.

El siguiente es el resultado fundamental del capítulo.

Teorema 3.9. *Sea* $A \in M_{N\times N}(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$, *entonces* $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A)$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

Observación 3.10. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son los autovalores negativos de A, $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_k$ los autovalores no negativos y $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ los autovalores complejos, tenemos que $\det A$:

$$\det A = \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_m^{\alpha_m} \lambda_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdots \lambda_k^{\alpha_k} (\mu_1 \overline{\mu_1})^{\gamma_1} \cdots (\mu_s \overline{\mu_s})^{\gamma_s},$$

donde α_i es la multiplicidad algebraica de λ_i, $1 \leq i \leq k$, y γ_j es la multiplicidad algebraica del par $\mu_j, \overline{\mu_j}$, $1 \leq j \leq s$. Luego:

$$\operatorname{sgn}(\det A) = \operatorname{sgn}(\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_m^{\alpha_m}) = (-1)^{\alpha_*},$$

donde $\alpha_* = \sum_{i=1}^m \alpha_i$.

La demostración del Teorema 3.9 se sigue de los siguientes resultados auxiliares.

Lema 3.11. *Si* $\alpha_* = 0$, *entonces* $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A) = 1$.

Demostración. Si A no tiene autovalores negativos, $\operatorname{sgn}(\det A) = 1$. Veamos que $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = 1$. Definimos $H(x,t) = tAx + (1-t)x$ para $(x,t) \in \overline{B_\varepsilon(0)} \times [0,1]$. Si $H(x,t) = 0$, entonces $Ax = -\frac{1-t}{t}x$ y, como A no tiene autovalores negativos, $x = 0$. Luego, $0 \notin H(\partial B_\varepsilon(0) \times [0,1])$. Por d1) y d3), obtenemos que $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = d(I, B_\varepsilon(0), 0) = 1$. □

Lema 3.12. *Si* $\alpha_* = 2p$, $p \geq 1$, *entonces* $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A) = 1$.

Demostración. Si A tiene un número par de autovalores negativos, $\operatorname{sgn}(\det A) = 1$. Veamos que $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = 1$. Por la Proposición 3.8, tenemos que $\mathbb{R}^N = X \oplus Y$. Sean $P_1 : \mathbb{R}^N \to X$ y $P_2 = I - P_1 : \mathbb{R}^N \to Y$ las proyecciones asociadas. Se observa que $P_1 + P_2 = I$. Entonces, $A = AP_1 + AP_2$, ya que $AX \subset X$ y $AY \subset Y$.

Definimos $H_1(z,t) = tAz + (1-t)(-P_1 + P_2)(z)$ para $(z,t) \in \overline{B_\varepsilon(0)} \times [0,1]$. Si $H_1(z,t) = 0$, entonces

$$\begin{gathered} H_1(z,t) = t(AP_1(z) + AP_2(z)) - (1-t)P_1(z) + (1-t)P_2(z) = 0, \\ tAP_1(z) - (1-t)P_1(z) + tAP_2(z) + (1-t)P_2(z) = 0. \end{gathered}$$

Esta expresión es de la forma $x + y = 0$, $x \in X$, $y \in Y$. Luego, $x = y = 0$. Así,

$$\begin{aligned} tAP_1(z) - (1-t)P_1(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad AP_1(z) = \frac{1-t}{t} P_1(z), \\ tAP_2(z) + (1-t)P_2(z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad AP_2(z) = -\frac{1-t}{t} P_2(z). \end{aligned}$$

Como A solamente tiene autovalores negativos en X y no tiene autovalores negativos en Y, se sigue que $P_1(z) = P_2(z) = 0$, por lo que $z = 0$. Luego, $H_1(z,t) \neq 0$ para todo $(z,t) \in \partial B_\varepsilon(0) \times [0,1]$. Por d3), $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = d(-P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0)$.

Como $\alpha_* = 2p$, $p \geq 1$, podemos encontrar una aplicación lineal $B : X \to X$ con matriz $B \in M_{\alpha_* \times \alpha_*}(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = -I_{|X}$. Por ejemplo, si $p = 1$, es decir, $\alpha_* = 2$, podemos tomar $B : X \to X$ con matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, pues se cumple que $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_{|X}$. Un ejemplo para $\alpha_* = 2p$, $p \geq 2$, se construye formando la matriz diagonal por bloques donde todos los bloques son $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nótese que B carece de autovalores reales, pues si λ es autovalor de B, se tiene que:

$$Bx = \lambda x \quad \Rightarrow \quad B^2 x = \lambda Bx \quad \Rightarrow \quad -x = \lambda^2 x \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1.$$

Definimos ahora $H_2(z,t) = t(-P_1 + P_2)(z) + (1-t)(BP_1 + P_2)(z) = -tP_1(z) + (1-t)BP_1(z) + P_2(z)$. Veamos que $H_2(z,t) \neq 0$ para todo $(z,t) \in \partial B_\varepsilon(0) \times [0,1]$. Tenemos que $H_2(z,t) = -tP_1(z) + (1-t)BP_1(z) + P_2(z) = 0$ implica que $P_2(z) = 0$ y $BP_1(z) = \dfrac{t}{1-t} P_1(z)$. Como B no tiene autovalores reales, necesariamente $P_1(z) = 0$. Luego, $0 \notin H_2(\partial B_\varepsilon(0) \times [0,1])$ y por d3), se sigue que $d(-P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0) = d(BP_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0)$.

Definimos finalmente $H_3(z,t) = t(BP_1 + P_2)(z) + (1-t)(P_1 + P_2)(z) = tBP_1(z) + (1-t)P_1(z) + P_2(z)$. Si $H_3(z,t) = 0$, entonces $P_2(z) = 0$ y $BP_1(z) = -\dfrac{1-t}{t} P_1(z)$. Por el mismo razonamiento anterior, obtenemos que

$P_1(z) = 0$. Luego, $0 \notin H_3(\partial B_\varepsilon(0) \times [0,1])$ y por d3), $d(BP_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0) = d(P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0)$.

Por d1), concluimos que

$$d(A, B_\varepsilon(0), 0) = d(P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0) = d(I, B_\varepsilon(0), 0) = 1.$$

□

Lema 3.13. *Si* $\alpha_* = 2p+1$, $p \geq 1$, *entonces* $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A) = -1$.

Para demostrar este lema necesitamos el siguiente resultado. Debe notarse que se emplean únicamente las propiedades d1), d2) y d3).

Lema 3.14. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un abierto,* $0 \in \Omega$, *entonces* $d(-I, \Omega, 0) = 1$.

Demostración. Como Ω es un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a 0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega$. Sean $\Omega_1 = \Omega \cap (-\infty, -\varepsilon)$ y $\Omega_2 = \Omega \cap (\varepsilon, +\infty)$, se tiene que $\Omega_1 \cup \Omega_\varepsilon \cup \Omega_2 \subset \Omega$. Por d2), $d(-I, \Omega, 0) = d(-I, \Omega_1, 0) + d(-I, \Omega_\varepsilon, 0) + d(-I, \Omega_2, 0)$. Como $0 \notin -I(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, se sigue que $d(-I, \Omega, 0) = d(-I, \Omega_\varepsilon, 0)$. Además, $d(-I, \Omega_\varepsilon, 0) = d(-I, \Omega_R, 0)$ para todo $R > 0$. En particular, $d(-I, \Omega_\varepsilon, 0) = d(-I, \Omega_2, 0)$.

Tomamos $\varphi(x) = |x| - 1$ definida para $x \in [-2, 2]$. Definimos $H_1(x,t) = t\varphi(x) + (1-t)$ para $(x,t) \in [-2,2] \times [0,1]$. Como $H(\pm 2, t) = 1 \neq 0$, tenemos que $d(\varphi, (-2,2), 0) = d(1, (-2,2), 0) = 0$ por d3).

Aplicando d2), se sigue que $d(\varphi, (-2,2), 0) = d(\varphi, (-2,0), 0) + d(\varphi, (0,2), 0) = d(-x-1, (-2,2), 0) + d(x-1, (-2,2), 0)$. Definimos ahora $H_2(x,t) = t(-x-1) + (1-t)(-x) = -x-t$ para $(x,t) \in [-2,2] \times [0,1]$. Como $H(\pm 2, t) \neq 0$, se tiene que $d(-x-1, (-2,2), 0) = d(-x, (-2,2), 0)$ por d3). Análogamente, se prueba que $d(x-1, (-2,2), 0) = d(x, (-2,2), 0) = 1$ por d1).

Finalmente,

$$0 = d(-x, (-2,2), 0) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad d(-I, \Omega, 0) = -1.$$

□

Procedemos ahora a demostrar el Lema 3.13.

Demostración (Lema 3.13). Vamos a probar que si A tiene un número impar de autovalores negativos, entonces $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \operatorname{sgn}(\det A) = -1$. Para ello, descomponemos $X = X_1 \oplus X_2$, con $\dim X_1 = 1$ y $\dim X_2 = 2p$. Sean $Q_1 : X \to X_1$ y $Q_2 = I - Q_1 : X \to X_2$ las proyecciones asociadas a la suma directa. Entonces, $P_1 = Q_1 P_1 + Q_2 P_1$.

Sabemos que $d(A, B_\varepsilon(0), 0) = d(-P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0))$. Tomamos una aplicación lineal $B : X_2 \to X_2$ con matriz asociada $B \in M_{2p \times 2p}$ tal que $B^2 = -I_{|X_2}$. Definimos $H_1(\cdot, t) = t(-P_1 + P_2) + (1-t)(-Q_1 P_1 + BQ_2 P_1 + P_2) = -tP_1 +$

$(1-t)(-Q_1P_1 + BQ_2P_1) + P_2 = -Q_1P_1 - tQ_2P_1 + (1-t)BQ_2P_1 + P_2$. Sean $z \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ y $t \in [0,1]$. Si $H_1(z,t) = 0$, entonces $-Q_1P_1(z) = 0$, $P_2(z) = 0$ y $B(Q_2P_1(z)) = \dfrac{t}{1-t} Q_2P_1(z)$. Como B carece de autovalores reales, $Q_2P_1(z) = 0$. Luego, $H_1(z,t) = 0$ implica que $z = 0$, por lo que $0 \notin H_1(\partial B_\varepsilon(0) \times [0,1])$. Por d3),

$$d(-P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0) = d(-Q_1P_1 + BQ_2P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0)).$$

Definimos ahora $H_2(\cdot,t) = t(-Q_1P_1 + BQ_2P_1 + P_2) + (1-t)(-Q_1P_1 + Q_2P_1 + P_2) = -Q_1P_1 + tBQ_2P_1 + (1-t)Q_2P_1 + P_2$. Sean $z \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ y $t \in [0,1]$. Tenemos que $H_2(z,t) = 0$ implica que $-Q_1P_1(z) = 0$, $P_2(z) = 0$ y $B(Q_2P_1(z)) = \dfrac{t-1}{t} Q_2P_1(z)$. Por el mismo razonamiento anterior, se sigue que $Q_2P_1(z) = 0$. Luego, $0 \notin H_2(\partial B_\varepsilon(0) \times [0,1])$. Por d3),

$$d(-Q_1P_1 + BQ_2P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0)) = d(-Q_1P_1 + Q_2P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0).$$

Tomamos la descomposición $\mathbb{R}^N = X_1 \oplus (X_2 \oplus Y)$. Sean $\widetilde{Q_1} : \mathbb{R}^N \to X_1$ y $\widetilde{Q_2} : \mathbb{R}^N \to X_2 \oplus Y$ las proyecciones asociadas. Entonces, se tiene que $\widetilde{Q_1} = Q_1P_1$; mientras $\widetilde{Q_2} = Q_2P_1 + P_2$. Así, $-Q_1P_1 + Q_2P_1 + P_2 = -\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2}$ y por consiguiente,

$$d(-Q_1P_1 + Q_2P_1 + P_2, B_\varepsilon(0), 0) = d(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2}, B_\varepsilon(0), 0).$$

Sea $z \in B_\varepsilon(0)$. Si $(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2})(z) = 0$, necesariamente $-\widetilde{Q_1}(z) = 0$ y $\widetilde{Q_2}(z) = 0$. Luego, $z = 0$ es la única solución de $(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2})(z) = 0$. De esta forma, podemos reemplazar $B_\varepsilon(0)$ por cualquier abierto acotado que contenga a $z = 0$ sin modificar el valor de la aplicación d. Tomamos $B_1 = B_\varepsilon(0) \cap X_1$ y $B_2 = B_\varepsilon(0) \cap (X_2 \oplus Y)$. Tenemos que $d(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2}, B_\varepsilon(0), 0) = d(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2}, B_1 + B_2, 0)$, donde $B_1 + B_2 = \{z_1 + z_2 : z_1 \in B_1, z_2 \in B_2\}$. Ahora vamos a trabajar en dimensión uno, por lo que precisamos definir una aplicación $d_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$.

Sean $X_1 = \{t\bar{e} : t \in \mathbb{R}\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto acotado, $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ y $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos $d_{\mathbb{R}}(\varphi, \Omega, b) = d(\overline{\varphi}, \Omega_1 + B_2, b\bar{e})$, donde $\Omega_1 = \Omega\bar{e}$ y $\overline{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(x_1 + (x_2 + y)) = \varphi_1(x_1) + x_2 + y$, $\varphi_1(t\bar{e}) = \varphi(t)\bar{e}$, para todo $\xi = x_1 + x_2 + y \in \mathbb{R}^N$. Se puede comprobar que $d_{\mathbb{R}}$ cumple las propiedades d1), d2) y d3) de la aplicación d. Los detalles se omiten por brevedad. Finalmente, se concluye que:

$$-1 = d_{\mathbb{R}}(-I, (-\varepsilon, \varepsilon), 0) = d(-\widetilde{Q_1} + \widetilde{Q_2}, B_1 + B_2, 0) = d(A, B_\varepsilon(0), 0).$$

□

Demostración (Teorema 3.9). Se sigue de los lemas precedentes.

Una vez probado el Teorema 3.9 concluimos el capítulo demostrando que toda aplicación d que cumple las propiedades d1), d2) y d3) da lugar, en la clase de las aplicaciones regulares φ, a la expresión con la que se definió el grado topológico en el Capítulo 1.

Teorema 3.15. *Sean* $\varphi \in \overline{\mathcal{C}}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$*,* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ *un valor regular y* $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$*. Entonces,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)).$$

Demostración. Empleando las Proposiciones 3.6 y 3.7 junto con el Teorema 3.9 se concluye que:

$$\begin{aligned} d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i=1}^{m} d(\varphi, B_\varepsilon(\xi_i), b) = \sum_{i=1}^{m} d(A_i, B_\varepsilon(0), 0) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(\det A_i) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(J_\varphi(\xi_i)). \end{aligned}$$

□

De esta forma, hemos demostrado que la única aplicación $d : \{(\varphi, \Omega, b) : \Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N),\ b \notin \varphi(\partial\Omega)\} \to \mathbb{Z}$ que cumple las propiedades d1), d2) y d3) es el grado de Brouwer. Este resultado de unicidad se debe a H. Amann y a S. Weiss [5].

Bibliografía

[1] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Nueva York, 1985.

[2] Rabinowitz, P.H., Berestycki, H. *Théorie du degré topologique et applications à des problémes aux limites non linéaires.* Université Paris VI, Laboratoire analyse numérique, París, 1975.

[3] Cañada, A., Villegas, S. *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?* La Gaceta de la RSME, España, 101-121, 2004.

[4] Guzmán, M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alhambra, Madrid, 1975.

[5] Amann, H., Weiss, S. *On the uniqueness of the topological degree.* Math. Z. 130, 39-54, 1973.

Topological degree theory and applications

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

María Jesús Hernández Vega
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100992151@ull.edu.es

Abstract

Let $\varphi(x) = b$ an abstract equation. From its inception, "degree theory" is a mathematical device designed to discuss the existence, number and "stability" (with respect to perturbations) of solutions to these equations. The aim of this memory is to develop the topological degree theory and some of its main applications in analysis and topology.

1. Topological degree and its properties

To construct the so called Brouwer degree is the main concern of the first chapter. Topological degree is first defined for class $\mathscr{C}^1$ mappings and relative to "regular values" of these mappings. For $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ and $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ one of its regular values, the degree $d(\varphi,\Omega,b)$ of φ with respect b in the domain Ω is defined as

$$d(\varphi,\Omega,b) = \sum_{\xi\in\varphi^{-1}(b)} \operatorname{sgn}\,(\det\varphi'(\xi)).$$

In a second step, the restriction "b is a regular value" is removed. To this proposal we deal with class $\mathscr{C}^2$ mappings $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}^2(\Omega,\mathbb{R}^N)$ and arbitrary values $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. We define the degree

$$d(\varphi,\Omega,b) = d(\varphi,\Omega,b') \quad b' \in B_\rho(b) \ \text{ a regular value,}$$

where $\rho = \operatorname{dist}\,(b,\varphi(\partial\Omega))$. The crucial points here are both showing that this definition is coherent together with the existence of regular values b' close to b. In a final stage, the topological degree d is defined for continuous mappings $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$ and arbitrary values $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. This is achieved by setting

$$d(\varphi,\Omega,b) = d(\psi,\Omega,b) \quad \forall\psi \in \overline{\mathscr{C}}^2(\Omega,\mathbb{R}^N) \text{ such that } \|\psi-\varphi\|_\infty < \rho,$$

with $\rho = d(b,\varphi(\partial\Omega))$. Again, the coherence of the definition requires the corresponding checking. In addition, next fundamental properties are shown:

- d1) [Normalization] If $b \in \Omega$ then $d(I,\Omega,b) = 1$, where I is the identity mapping.
- d2) [Additivity] For Ω,Ω_1,Ω_2 bounded open sets such that $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ and $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ the relation $d(\varphi,\Omega,b) = d(\varphi,\Omega_1,b) + d(\varphi,\Omega_2,b)$ holds.
- d3) [Homotopy Invariance] Assuming $H(x,t) \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}\times I,\mathbb{R}^N)$, $I = [0,1]$ and $b \notin H(\partial\Omega,t)$ for all $t \in I$ then $d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ keeps constant in I.
- d4) [Continuity with regard φ] $d(\varphi,\Omega,b) = d(\chi,\Omega,b)$ provided χ is a small perturbation of φ in $\mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$.
- d5) [Continuity on b] $d(\varphi,\Omega,b) = d(\varphi,\Omega,b')$ for b' close to b in $\mathbb{R}^N$.

2. Applications of the Brouwer degree

Some relevant applications of Brouwer degree are addressed in Chapter 2. The fact that $d(\varphi,\Omega,b) \neq 0$ entails the existence of a solution to equation $\varphi(x) = b$ in Ω is shown. This feature turns the degree into a powerful tool in "nonlinear analysis". Next, a N–dimensional version of the well–known Bolzano's theorem in Calculus is proved. In addition some few classical results in topology are derived from Brouwer fixed point theorem, a further fact whose proof is managed by means of the topological degree. Another appealing consequence of the theory is the "Jordan separation theorem". Its proofs first requires proving the multiplicative property of the degree. If $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $\psi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ and $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ stands for the family of bounded components of $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ ($b \notin (\psi\circ\varphi)(\partial\Omega)$) this property states that:

$$d(\psi\circ\varphi,\Omega,b) = \sum_{i\in\mathbb{N}} d(\varphi,\Omega,C_i)\,d(\psi,C_i,b).$$

Jordan's Curve theorem is a paradigm of an "easy–to–state" but "hard–to –prove" assertion in mathematics. Above results permit us to provide a direct proof of this famous theorem.

3. Uniqueness of the Brouwer degree

One of the conspicuous features of the theory is the fact that there only exists a "degree" d exhibiting the properties d1), d2) and d3) listed above. This well known and recent result is due to H. Amann and S. Weiss (1973). The third chapter is just devoted to show this assertion. We assume that "a mapping" $d : \{(\varphi,\Omega,b) : \Omega \subset \mathbb{R}^N$ bounded open $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^N),\ b \notin \varphi(\partial\Omega)\} \to \mathbb{Z}$ fulfills d1), d2) and d3) and first prove that $d(\varphi,\Omega,b)$ can be computed by employing $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ and b a regular value. A second remark reveals that the computation of d can be reduced to that of $d(\varphi,B_i,b)$, $1 \le i \le m$, B_i being a small ball centered at ξ_i where $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$. A further perturbation argument shows that $d(\varphi,B_i,b) = d(\varphi'(\xi_i),B,0)$ where B is an arbitrary ball centered at 0. The main result of the chapter then states that $d(\varphi'(\xi_i),B,0) = \operatorname{sign}(\det(\varphi'(\xi_i)))$. Therefore we arrive at:

$$d(\varphi,\Omega,b) = \sum_{i=1}^m d(\varphi,B_i,b) = \sum_{i=1}^m d(\varphi'(\xi_i),B,0) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}\,(\varphi'(\xi_i)).$$

We find in this way the starting definition of degree introduced in the first stage of Chapter 1.

References

[1] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Nueva York, 1985.

[2] Rabinowitz, P.H., Berestycki, H. *Théorie du degré topologique et applications à des problémes aux limites non linéaires.* Université Paris VI, Laboratoire analyse numérique, París, 1975.

[3] Cañada, A., Villegas, S. *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?* La Gaceta de la RSME, España, 101-121, 2004.

[4] Amann, H., Weiss, S. *On the uniqueness of the topological degree.* Math. Z. 130, 39-54, 1973.