Universidad de La Laguna

TRABAJO DE FIN DE GRADO
DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS: BÚSQUEDA DE PATRONES EN 3º DE EDUCACIÓN PRIMARIA

JAVIER MARTÍN GARCÍA

CURSO ACADÉMICO 2018/2019

CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE

TUTOR: ISRAEL GARCÍA ALONSO

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Grado de investigación está centrado en el análisis de una propuesta de intervención desarrollada en el aula junto con el estudio de algunas entrevistas a estudiantes. Se realiza con alumnado de Tercero de Educación Primaria una secuencia de tareas relacionada con la búsqueda, descripción y construcción de patrones en un entorno de resolución de problemas. La recogida de datos, por un lado, fue mediante una tarea escrita con la finalidad de tener una idea principal de cómo afronta el alumnado las actividades con patrones. Por otro lado, y tras dejar un espacio de tiempo, se profundiza en cuatro alumnos con diferente rendimiento a través de una entrevista semiestructurada. Seguidamente se muestra el análisis y las conclusiones teniendo en cuenta las posibles limitaciones de la propuesta. Como consecuencia del análisis de los resultados, se ha podido constatar la eficacia de la propuesta para desarrollar la generalización en la etapa primaria.

Palabras clave: Resolución de problemas, Matemáticas, Educación Primaria, Estrategia, Patrones.

ABSTRACT

This final research project work is focused on the analysis of an intervention proposal developed in the classroom along with the study of some student interviews. A sequence of tasks related to the search, description and construction of patterns in a problem solving environment is carried out with students of Third Primary Education. The collection of data, on the one hand, was through a written task in order to have a main idea of how students face activities of patterns. On the other hand, and after leaving a period of time, four students with different performance are deepened through a semi-structured interview. Below is the analysis and conclusions taking into account the possible limitations of the proposal. As a consequence of the analysis of the results, it has been possible to verify the effectiveness of the proposal to develop generalization in the primary period.

Keywords: Problem Resolution, Math, Primary Education, Strategy, Patterns.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Desde tiempos inmemoriales los patrones han estado presentes en la Naturaleza y en la formación del Cosmos y, desde hace algo menos tiempo, los seres humanos les hemos sacado partido entre otras cosas para comprender el mundo, facilitarnos la vida e incluso para expresarnos artísticamente. Desde los patrones que escribe el alumnado en Primaria en el borde izquierdo de la libreta para aprender a respetar los márgenes, hasta los registros de variaciones que usan los astrofísicos para estudiar el Sol. Además, este carácter omnipresente de los patrones insta a buscar la conexión entre las distintas áreas en las que se divide el currículo (matemáticas, música, ciencias naturales, entre otras) con el fin de proporcionar una enseñanza que no se limite únicamente a lo matemático, sino que integre conocimiento.

A priori, en el ámbito de Educación Primaria, los patrones pueden parecer elementos algo alejados de estos niveles educativos iniciales, siendo más común que se relacionen con el pensamiento algebraico propio de la Educación Secundaria. Además, el álgebra es una área que presenta muchas críticas debido al grado de dificultad y rechazo que les produce a muchos alumnos (Kaput, 2000, Kieran, 2004).

No obstante, para profundizar en las razones este hecho, se han llevado a cabo numerosas investigaciones por parte de la comunidad internacional para analizar e incentivar la integración del álgebra en el currículum de Educación Primaria (Molina, 2009).

Autores como Mason (1996) y Socas (2011) observaron que las capacidades de generalización son susceptibles de ser potenciadas en el alumnado de Primaria, puesto que éstos ya tienen un pensamiento algebraico primitivo preparado para desarrollarse cada vez con mayor profundidad.

A partir de estas ideas surgieron dos nuevas corrientes, la preálgebra y el Early-Algebra, que plantean la introducción del pensamiento algebraico en la Educación Primaria con actividades que desarrollen la habilidad para generalizar y recomendando, además, el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades. A pesar de que estos dos enfoques están muy relacionados existen algunas diferencias; la preálgebra solo actúa en los dos últimos cursos de primaria y propone facilitar la transición de la aritmética al álgebra y reducir las dificultades en su aprendizaje. Mientras que el Early-Algebra abarca objetivos más amplios al introducir formas de pensamiento algebraico desde los primeros cursos de escolarización (Zapatera, 2015).

Uno de los enfoques en los que se basa el Early-Algebra, y que tiene un gran peso en este trabajo, es el razonamiento inductivo. Según (Pólya, 1990) en este tipo de razonamiento se trabaja con casos particulares, observando regularidades y obteniendo conjeturas, para después comprobarlas con nuevos casos particulares, llegando de esta forma a descubrir leyes generales. Esto, a parte de estar estrechamente ligado con el método científico, es una estrategia muy relevante a la hora de resolver problemas.

A modo de síntesis, la generalización y el uso de patrones en concreto, es una forma eficaz para introducir el pensamiento algebraico en la escuela. En esta investigación se intenta explorar cómo el alumnado de tercero de Primaria se desenvuelve en tareas que, siguiendo esta corriente algebraica, "incluyen la identificación de estructuras, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción" (Kieran, 2004). Además de los modos que tienen de representar dichos conceptos.

2. JUSTIFICACIÓN

Esta propuesta guarda relación con *ProyectaMates*, un proyecto de innovación educativa orientado a formar tanto al profesorado como a futuros docentes en estrategias de resolución de problemas, de forma que fueran incorporándolas a la realidad del aula. A raíz de mi participación en este proyecto, donde he podido formarme en esta serie de herramientas que desarrollan el pensamiento matemático y aportan estrategias para resolver problemas de nuestro día a día, nace la motivación por la temática de este trabajo. De esta manera, esta propuesta de investigación plantea una base de comprensión y acercamiento al aula que puede ser muy útil en la estrategia de búsqueda de patrones para resolver problemas, sabiendo que la identificación y el uso de patrones es una de las estrategias claves para resolver una tarea de generalización (Rico, 1997).

El interés por indagar en tareas de generalización y patrones en el ámbito de la Educación Primaria es considerable, debido a que en España la mayoría de estudios e investigaciones han estado dirigidos a los estudiantes de Educación Secundaria. Así lo demuestran trabajos como el de Cañadas, Castro y Castro (2013) donde describen los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 14 a 16 años en la resolución del problema de las baldosas.

Desde el punto de vista del currículo y siguiendo las ideas de la propuesta Early-Algebra, múltiples países de todo el mundo han revisado sus currículo poniendo énfasis en la relevancia que tienen los patrones. En el currículo de la Comunidad Autónoma de Canarias no se menciona explícitamente el álgebra en Educación Primaria, aunque sí se da visibilidad al pensamiento algebraico al establecer de forma específica el trabajo con patrones en los siguientes estándares de aprendizaje evaluable: *"Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales"* y *"Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen"* (Decreto 89/2014).

También se ven reflejados en el primero de los bloques en el cual se organizan los contenidos (Bloque 1: «Procesos, métodos y actitudes en matemáticas») donde se manifiesta que este bloque se ha formulado con la intención de que el alumnado "*sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, valorando su utilidad para formular e investigar conjeturas, para desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones. Además, a través de la resolución de problemas, el alumnado podrá construir nuevos conocimientos"* (Decreto 89/2014).

Por tanto, la justificación curricular no es excusa para explotar y explorar las enormes posibilidades que poseen los patrones como recursos didácticos.

3. MARCO TEÓRICO

3.1 Razonamiento inductivo

El matemático Poincaré (1902) considera la inducción como el vehículo para llegar al conocimiento de cualquier ciencia y, concretamente en matemáticas, donde se parte de situaciones particulares, se observan las regularidades y se alcanza la generalización. De una forma más relacionada con esta propuesta, Pólya (1954) argumenta que el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la comprobación posterior de dicha conjetura. Siguiendo la línea de estas ideas, Castro y Cañadas (2004) proponen siete fases que complementan las de Pólya: trabajo con casos particulares; organización de casos particulares; identificación de patrones; formulación de conjeturas; justificación de las conjeturas; generalización; demostración. De las cuales en este trabajo realizaremos el análisis en dos de ellas: la identificación de patrones y la generalización.

3.2 Generalización

La generalización, fase fundamental en el razonamiento inductivo, según Pólya (1990) "consiste en pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado". Además, este autor enfatiza que el reconocimiento de patrones es esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar, ya que al partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos (Pólya, 1966). Balacheff (2000) también involucra la noción de patrón cuando afirma que las tareas de generalización radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general. Por tanto, requieren de la identificación de una pauta o patrón de comportamiento de los casos particulares.

Como en todo proceso, hay una series de fases, las cuales Stacey (1989) simplifica distinguiendo tres tipos de tareas:

1) Tareas de generalización cercana, en las que el estudiante debe buscar términos pequeños que se puede obtener mediante recuento, haciendo un dibujo o una tabla.
2) Tareas de generalización lejana, en las que debe calcular términos grandes que requieren la identificación de un patrón o pauta.
3) Obtención y expresión de una regla general que permita calcular el número de elementos de cualquier término de la sucesión y que está determinada por una función lineal o afín.

En relación con la resolución de problemas, según Stacey (1989), se han identificado tres tipos de estrategias que emplea el alumnado a la hora de generalizar:

1) Estrategia recursiva, donde se observa que cada término aumenta con una diferencia constante y calcula un término apoyándose en el anterior.
2) Estrategia funcional, en la que el estudiante identifica la relación funcional entre la posición (término) y el número de elementos que lo componen siendo capaz de hallar un término específico –generalización local– o un término cualquiera –generalización global–.

3) Razonamiento proporcional, donde el estudiante utiliza multiplicaciones o reglas de tres, a veces de forma errónea, para hallar un término. También se ha identificado el uso de una representación gráfica, reproduciendo el término que se pide y contando sus elementos (Radford, 2011).

La generalización, cuando se produce, puede expresarse de formas diferentes: mediante lenguaje verbal, utilizando la representación simbólica o algebraica, o mediante otro tipo de lenguaje como puede ser el gestual (Radford, 2010). Siendo el objeto de estudio de esta propuesta el alumnado de tercero de primaria, cabe señalar las investigaciones de Warren, Miller y Cooper (2013) en el Early Years Generalizing Project (EYGP), donde los resultados señalan que estudiantes de 5 a 9 años utilizan gestos y conversaciones consigo mismos para buscar y expresar la generalización y que, una vez conseguido esto, el uso de conversaciones y gestos tiende a disminuir.

3. 3 Identificación de patrones

Cuando se hizo un tanteo en tercero de primaria sobre los conocimientos previos que tenía el alumnado acerca de la noción de patrón, la gran mayoría estaban más familiarizados con términos como secuencias o series, más que con la idea de patrón en sí. No obstante, estos términos son relevantes y permiten acotar la esencia de lo que es un patrón (Liljedahl, 2004). Un patrón "es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010). Esta sucesión o regularidad puede ser de signos orales, gestuales, de fenómenos naturales, gráficos, numéricos, entre otros, y se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o recurrencia.

Son patrones de repetición aquellos en los que los distintos elementos son presentados en forma periódica. Dichos elementos pueden tener uno o más atributos (color, forma, tamaño…). Según Zapatero (2018) los patrones de repetición son los más fáciles de identificar, por lo que están recomendados en Educación Infantil y en los primeros cursos de Educación Primaria, aunque éstos pueden hacerse más complejos al aumentar sus atributos o hacerlos menos evidentes. Pueden crearse patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo. Un ejemplo de ellos, es el sistema de numeración de las calles y avenidas.

Por otro lado, en los patrones recurrentes el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores de cuyo análisis se infiere su ley de formación. Este tipo de patrones pueden ser geométricos o numéricos y tienen un nivel de dificultad mayor que los patrones repetitivos, por lo que están indicados para los cursos medios y altos de Educación Primaria. Tal como apunta Zapatero (2018): “Los patrones recurrentes se estudian a partir del 3º curso de Educación de Primaria y tienen como objetivo la comprensión de la generalización de patrones”.

3.4 Representaciones

En esta propuesta también hay un interés por analizar la información que proporciona el alumnado a través de las representaciones, entendiendo éstas como “aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009). Las diferentes formas de representación o formas de expresar un determinado concepto matemático da lugar a los sistemas de representación, los cuales Castro, Rico y Romero (1997) definen como una manera de expresar y simbolizar ciertas estructuras numéricas mediante el uso de signos, reglas y enunciados. Los principales sistemas de representación que se aprecian en esta propuesta son el lenguaje verbal, numérico, pictórico y, en menor medida, el simbolismo algebraico. También adquieren relevancia las representaciones múltiples, que implican el proceso de representar un objeto matemático de dos o más formas diferentes y, a su vez, lograr realizar traducciones entre ellas (Janvier, 1987).

4. OBJETIVOS

Esta propuesta de investigación tiene dos grandes objetivos:

1) Llevar al aula el conocimiento de patrones de distinta naturaleza a través de tareas no rutinarias que implican su identificación, descripción y construcción.
2) Analizar y describir las estrategias e inconvenientes que tuvo el alumnado tras la aplicación de la secuencia de tareas y de la entrevista semiestructurada.

5. METODOLOGÍA

Se realizó una investigación de carácter exploratorio y descriptivo en el curso de Tercero de Educación Primaria del CEIP Julián Zafra (Güímar) durante el periodo del Practicum II. Consistió en la preparación y posterior implementación de 5 sesiones en las que se utilizaron diferentes instrumentos de recogida de datos para conocer el avance en el aprendizaje de los patrones. Posteriormente se realizó, meses después, una entrevista para conocer el aprendizaje fijado por los estudiantes.

5.1 Participantes

Se han recogido datos con una muestra de 32 alumnos (8-9 años) de 3º curso de Educación Primaria que proviene de dos clases. Las dos maestras de ambos grupos informaron que no habían trabajado, en este curso académico ni anteriormente, tareas con patrones para iniciarse en la generalización.

<u>Participantes de las entrevistas</u>

Para la entrevista (Anexo V) se eligieron a 4 sujetos (2 de cada clase) con diferentes niveles de rendimiento escolar (B-11, B-16, A-08, A-10).

5.2 Instrumentos de recogida de datos

Se utilizaron 3 instrumentos para recoger los datos. Dos durante la implementación y un tercero dos meses después. Además, 2 fueron escritos y el tercero fue una entrevista semiestructurada.

En primer lugar se elaboró una ficha con la actividad creada por Alberto Zapatera "Las letras crecen y crecen" (Anexo II).

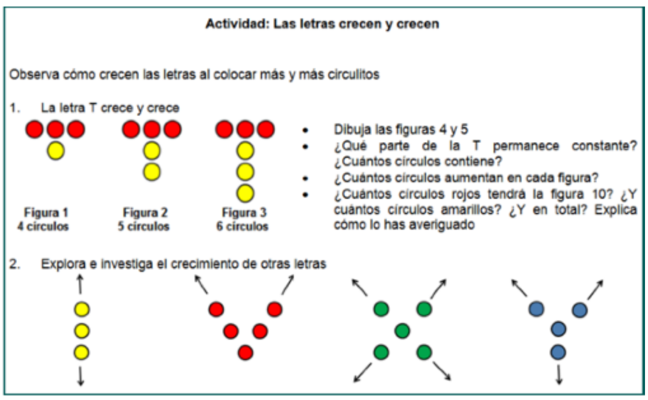


Figura 1.

Esta tarea ha sido elegida porque permite al alumnado explorar los patrones de crecimiento, explicar los elementos que permanecen constantes y el número de elementos que aumenta en cada figura, es decir, el término independiente y el patrón de crecimiento. Los alumnos deben extender el patrón para términos cercanos y no muy lejanos.

El segundo instrumento de recogida de datos, la ficha de *El último trébol* (Anexo III), es una tarea de elaboración propia donde los alumnos en la pregunta 1 deben hallar el patrón de la secuencia numérica del juego. En la pregunta 2 deben buscar el error (con su posterior corrección) que se encuentra en otra secuencia. Finalmente en la pregunta 3, deben desentrañar el funcionamiento del juego, o lo que es lo mismo, buscar la estrategia ganadora a través de una secuencia numérica. Esta pregunta, que la pueden contestar ayudándose mediante la manipulación, es un intento de estimular una generalización.

Por último, el tercer instrumento de recogida de datos —y el que tiene más peso por mostrar unos datos más completos— es la entrevista semiestructurada (Anexo V). Se llevaron a cabo con la finalidad de indagar más en la identificación de patrones y poder analizar más información. Se entrevistaron a 4 alumnos de manera individual y cada entrevista duró una media de 20 minutos. Los participantes rellenaron una serie de tablas y sus respuestas verbales fueron grabadas. Además, todos se ayudaron de material manipulativo.

5.3 Implementación en el aula

A continuación pasamos a describir el desarrollo de las sesiones de clase. Se ha dividido en: conociendo los patrones, patrones con ritmo y juego de patrones.

Conociendo los patrones

En primer lugar, con la idea de conocer los conocimientos previos del alumnado, se les ha preguntado si tenían alguna idea de lo que era un patrón. Nadie de la clase supo contestar, hecho destacable puesto que en el Decreto la palabra *patrón* aparece numerosas veces, incluso desde el primer curso de primaria (Decreto 89/2014). La maestra comentó que estaban más familiarizados con la noción de secuencia, la cual algunos alumnos sí pudieron explicarla con sus palabras.

Seguidamente se explicó el concepto de patrón y se proyectó una serie de imágenes con patrones "enmascarados" que podemos encontrar en nuestro entorno o en la naturaleza (Anexo I), preguntándoles si recordaban otros similares o si reconocían alguno dentro del aula. También, a través de la presentación, recordaron los patrones de repetición (los conocían a través de las secuencias). En segundo lugar se les repartió distintos materiales concretos (botones, tapas, bloques multibase…) para que formaran libremente un patrón. Después, explicaron con sus palabras a los compañeros qué criterio seguía la agrupación de objetos que habían ordenado (patrón).

La segunda parte de estas sesiones introductoras se centró en los patrones que les eran más desconocidos: los recurrentes. Es en este tipo de patrones donde se hizo más hincapié a lo largo de las tareas, así como en el número de elementos que aumentan y en los que permanecen constantes, es decir, en el patrón de crecimiento y en el término independiente.
Se procedió a explicarles con más detalle en qué consistían, mostrándoles un ejemplo similar en la pizarra digital:

Figura 2.

Además, siguiendo el procedimiento anterior, se les dejó espacio para que manipularan y crearan sus propios patrones recurrentes. Después explicaron a sus compañeros la regla de formación de sus patrones.

Por último, se propuso la tarea "Las letras crecen y crecen" (Anexo II) donde se ayudaron de los materiales concretos para realizarla. Esta tarea es original de A. Zapatero Llinares (Anexo II).

<u>Dificultades encontradas</u>:

- En un principio los alumnos únicamente relacionaban los patrones con "algo que se repite", pues estaban más familiarizados con los patrones formados según una regla de repetición y no crearon ninguno recurrente.

- Durante la construcción de esta tarea se pensó que parte del alumnado podría, en lugar de representar manipulativamente su propio patrón recurrente, crear el mismo que vio en la pizarra mostrado por el docente, y así fue. Por ello es interesante mostrarles varios atributos y reglas de formación que pueden seguir este tipo de patrones.

- En la ficha de la tarea “Las letras crecen y crecen” hay algunos errores en el planteamiento de las preguntas que se detallarán más adelante.

<u>Patrones con ritmo</u>

La primera actividad consistió en escuchar una serie de fragmentos de canciones, las cuales fueron seleccionadas porque tienen un ritmo bien definido. El alumnado pudo asignar un número o representar mediante un símbolo cada sonido de percusión que contenía el ritmo y escribirlo en una hoja. Luego contaron en voz alta cuál era el patrón, e identificaron el termino independiente y el patrón de crecimiento en los casos que lo hubieron.

En la segunda tarea, el alumnado creó un ritmo con el propio cuerpo en grupos de 4 personas. Cada alumno del grupo hizo un sonido diferente, por lo que se tuvieron que poner de acuerdo para asignarse el tipo de percusión y las repeticiones que hacía cada uno. Repitieron la secuencia 4 veces (4 compases).

<u>Dificultades encontradas</u>:

- Con algunas canciones puede ser difícil identificar cada sonido diferente y escribirlo a la vez, por eso una buena opción es ralentizar la canción. (Youtube: Configuración > Velocidad > 0,75).
- Durante la construcción de esta tarea se pensó que la mayoría del alumnado solo representaría los sonidos de percusión asignándoles números, sin embargo hubo una riqueza de simbología por parte de los alumnos (figuras geométricas, palitos horizontales y verticales, etc).

<u>Juego de patrones</u>

Para las últimas sesiones, con el fin de trabajar los patrones en un contexto diferente y seguramente más atractivo, se construyó un juego de mesa: *El último trébol* (Anexo III). Es un juego para dos personas, donde tras poner 20 tréboles sobre el tablero las parejas podrán ir retirando 1 o 2 tréboles por turno. Ganará quien logre retirar el último trébol, que será el "verdadero trébol de la suerte".

Figura 3.

Cuando el alumnado se familiarizó con el juego se les entregó una ficha (Anexo IV) con el objetivo de que trabajaran el patrón implicado en la estrategia ganadora.

Dificultades encontradas:

- Cabe destacar que el proceso de familiarizarse con *El último trébol* (Anexo III) fue lento, ya que es un juego de dos jugadores y no pueden participar todos a la vez. En este caso se fue llamando al alumnado por parejas, mientras que los demás desarrollaban la clase de matemáticas normal con la maestra.
- Durante el proceso de elaboración de la tarea se pensó que descubrir la estrategia ganadora con una serie de 20 números (20 tréboles en el juego) resultaría un tanto difícil, y así fue. Por ello, se redujo el número de tréboles a 10 durante el juego.

6. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

A) Instrumento escrito (Fichas)

Hay que precisar que ambas fichas, pertenecientes al primer instrumento de recogida datos, se han visto condicionadas por una errónea corrección conjunta de las mismas en el aula, dando una uniformad a las respuestas en la mayoría del alumnado, especialmente en la clase de *3º A*, donde la corrección que llevó a cabo la maestra, de forma inconsciente, antes de rellenar la ficha con la respuesta final queda más reflejada. No obstante, el hecho de que sean datos que provienen de dos fuentes (dos fichas) permite encontrar algunos indicios relevantes sobre el aprendizaje de los patrones en algunos alumnos, en los que fue interesante indagar más.

Debido a esta uniformidad en las respuestas de ambas fichas, en las tablas se muestran únicamente aquellos alumnos que no contestaron correctamente o que tuvieron alguna peculiaridad, dando por entendido que todos los alumnos que no aparecen contestaron correctamente a las cuestiones.

Se organizaron los resultados en forma tabular (tabla 1 y 2) de manera que se distribuyeron a los alumnos por filas y los errores/observaciones de cada cuestión por columnas. Para referirnos a los alumnos, se utiliza la letra A, si pertenecían a la clase de *3º A*, o bien B, si eran de la clase *3º B*, junto con el número que se les fue asignado aleatoriamente a cada uno (ej., A-07). Para referirnos a los *errores* se emplea la letra E, al igual que para *observaciones* la O. Tanto *errores* como *observaciones* se matizan con un pequeño comentario aclaratorio.

En la ficha de las *Las letras crecen y crecen*, una de las cuestiones que tuvo más errores es la opción *a).* Se puede intuir que se debe a falta de atención, puesto que los alumnos A-13 y B-06 viendo sus marcas de borrado se sabe que corrigieron el error de añadir círculos azules una vez que se fijaron bien, mientras que A-06 añadió un círculo azul en la figura 5 (fallo esperado) y B-16 añadió un círculo amarillo de más a la figura 5 (fallo inesperado). Con estos dos últimos podría haber un aprendizaje puesto que en la siguiente pregunta "¿Qué parte de la T permanece constante?" contestan correctamente.

Las letras crecen y crecen					
Alumnos	**Cuestión a)**	**Cuestión b)**	**Cuestión c)**	**Cuestión d)**	**Cuestión e)**
A-06	E: Añadió 1 círculo azul en la figura 5	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta
A-07	Correcta	E: Contesta que contiene 5 círculos	Correcta	Correcta	Correcta
A-13	O: En un principio añadió 1 círculo azul en la figura 4	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta

Las letras crecen y crecen					
Alumnos	**Cuestión a)**	**Cuestión b)**	**Cuestión c)**	**Cuestión d)**	**Cuestión e)**
B-06	O: En un principio añadió 1 círculo azul en ambas figuras	Correcta	Correcta	Correcta	E: Contesta erróneamente las 3 preguntas
B-08	Correcta	Correcta	Correcta	E: Contesta que aumentan 10 círculos amarillos	E: Suma los círculos de todas las figuras, en lugar de centrarse en la 10
B-12	Correcta	Correcta	Correcta	E: Contesta que aumentan 10 círculos	Correcta
B-16	E: Añadió 1 círculo amarillo de más en la figura 5	Correcta	Correcta	E: Contesta que aumentan 3 círculos	Correcta

Tabla 1

El último trébol						
Alumnos	**Cuestión 1**	**Cuestión 2. a)**	**Cuestión 2. b)**	**Cuestión 3. a)**	**Cuestión 3. b)**	**Cuestión 3. c)**
A-02	Correcta	O: No contesta	E: Contesta que es 6	Correcta	Correcta	Correcta
A-08	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	O: Realiza abstracción para adivinar quién retira los 2 últimos	Correcta
B-03	Correcta	Correcta	Correcta	Correcta	O: Razona diferente, el primer jugador hace 3 jugadas y el segundo 2	Correcta
B-05	Correcta	O: En un principio señaló el 20 y el 36	Correcta	Correcta	O: Representación gráfica acertada	Responde que hay más de 1 patrón
B-08	Correcta	O: En un principio señaló el 36 y el 44	Correcta	Correcta	O: Razona diferente: “lo sé porque es un número par”	Correcta
B-09	Correcta	Correcta	E: Contesta que es de 3 en 3	Correcta	Correcta	Correcta
B-12	Correcta	O: En un principio señaló el 44	Correcta	Correcta	O: Razona diferente: “lo sé porque es un número par”	Correcta

El último trébol						
Alumnos	**Cuestión 1**	**Cuestión 2. a)**	**Cuestión 2. b)**	**Cuestión 3. a)**	**Cuestión 3. b)**	**Cuestión 3. c)**
B-16	Correcta	O: En un principio señaló el 36	Correcta	Correcta	O: Usó representación gráfica	Correcta

Tabla 2

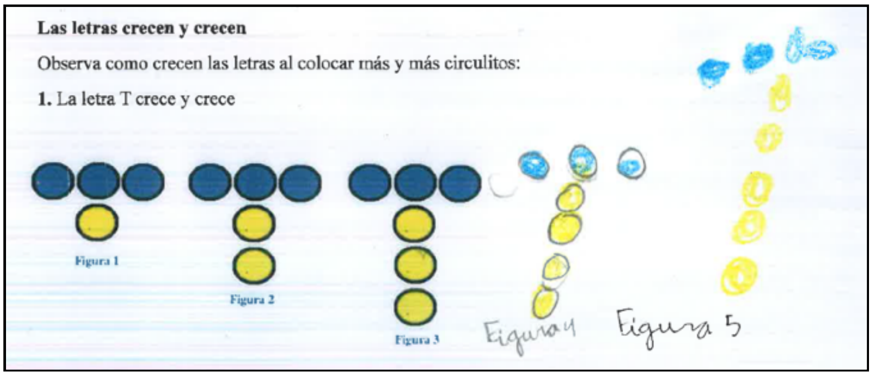


Figura 4. Respuesta de A-06.

Otra cuestión que tuvo errores es la *d)* "¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?"; aquí B-08 y B-12 contestaron que aumentan 10 círculos. La hipótesis más plausible es que les haya confundido la cuestión que viene después: "¿Cuántos círculos azules tendrá la figura 10?".

En la ficha *El último trébol*, la cuestión que más correcciones por parte del alumnado tuvo es la *(2.a)* "Busca el error y escribe correctamente la secuencia". Dado al elevado número de confusiones al señalar el error en un principio, se puede intuir que al alumnado le cuesta más hallar un patrón en forma de secuencia numérica que de manera pictórica. No obstante, salvo dos casos puntuales, todos contestan correctamente a la pregunta posterior sobre cuál es el patrón de esa secuencia.

En la cuestión *(3.a)* "¿Ganará el que empiece primero o el segundo?", todos escriben que gana el primero, por lo que los aspectos relevantes estarán en la siguiente cuestión: (*3.b*) "¿Cómo lo sabes?". Aquí las respuestas más comunes fueron:

- Lo sé porque conté de 2 en 2.
- Los 10 tréboles/bolitas los fui repartiendo de 2 en 2.
- Lo sé porque conté con los dedos.

En la clase de *3ºA* predominó más la idea de demostrarlo escribiendo la secuencia y señalando encima los turnos de los jugadores, puesto que hay varios casos. Ejemplo:

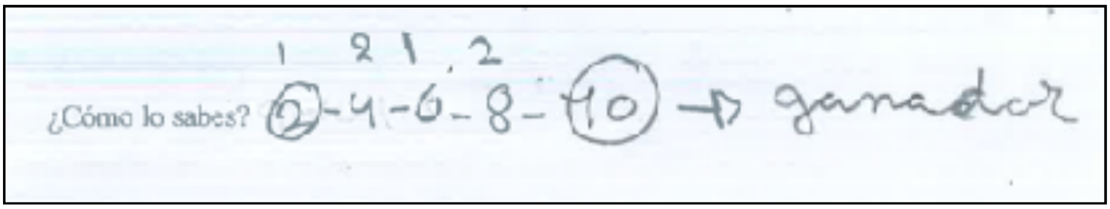


Figura 5.

Cabe destacar que dos alumnos (B-05 y B-16) utilizaron en esta misma cuestión representaciones gráficas para ayudarse.

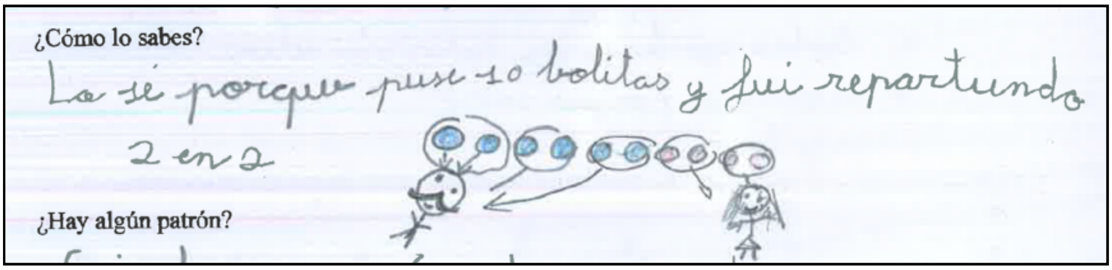


Figura 6. Representación gráfica de B-05.

B) Entrevistas individuales

De las entrevistas realizadas podemos destacar lo siguiente:

1) Estudiante B-11

Realiza correctamente las tablas de la actividad 1.

En la actividad 2, con 15 tréboles en la mesa retirándolos de 5 en 5, responde erróneamente que ganará el que le toca jugar en segundo puesto. Una vez ha jugado corrige su opinión y sabe justificarla. En ambas actividades demuestra un buen cálculo mental.

2) Estudiante B-16

Realiza incorrectamente las tablas de la actividad 1, excepto la primera, pero no es capaz de adivinar cuántos círculos tendrá la figura 6.

En la actividad 2, una vez ha jugado sabe que gana el que empieza cuando se retiran los tréboles de 3 en 3. Pero antes de jugar retirándolos de 5 en 5 anticipa erróneamente que ganará al que le toque jugar en segundo puesto, aunque después corrige.

Que haya respondido igual que el estudiante B-11 en la actividad 2, habiendo respondido incorrectamente en la actividad 1, supone que si se empieza jugando primero es sencillo adivinar quién ganará.

3) Estudiante A-08

Realiza correctamente las tablas de la actividad 1.

En la actividad 2, con 15 tréboles en la mesa retirándolos de 5 en 5, responde erróneamente que ganará al que le toca jugar en segundo puesto. Una vez ha jugado corrige su opinión y sabe justificarla. Al igual que el estudiante B-11, en ambas actividades demuestra un buen cálculo mental.

4) Estudiante A-10

Realiza correctamente la primera tabla de la actividad 1, pero en las demás muestra dificultades. Tiene razonamientos incoherentes similares a los de B-16, pero denota una mejor habilidad para identificar patrones.

En la actividad 2 responde igual que los tres estudiantes anteriores: con 15 tréboles en la mesa retirándolos de 5 en 5, responde erróneamente que ganará al que le toca jugar en segundo puesto. Una vez ha jugado corrige su opinión.

En general, se ha constatado que en la primera actividad hay 2 estudiantes que muestran dificultades al realizar las tablas (B-16 y A-10). En cambio, en la segunda actividad hay una uniformidad en las respuestas.

7. PROPUESTA DE MEJORA DE LA INTERVENCIÓN

Una vez que se ha llevado al aula la secuencia de tareas, es conveniente señalar algunas situaciones problemáticas que han surgido durante su desarrollo, con el objetivo de mejorar futuras intervenciones.

- Respecto a la redacción de las preguntas en ambas fichas (*Las letras crecen y crecen* / *El último trébol*) conviene revisar los enunciados de algunas cuestiones, puesto que pueden dificultar la comprensión y expresión del alumnado. Por ejemplo, evitar poner varias preguntas seguidas: "¿Cuántos círculos azules tendrá la figura 10? ¿Y cuántos círculos amarillos? ¿Y en total?".

- Conviene aclarar los términos que pueden resultar difíciles para el nivel del curso o usar sinónimos más sencillos. En este caso, un término que les resultó desconocido fue “constante”.

- Algunas veces las matizaciones que pretenden ayudar solo consiguen condicionar al alumnado. Un ejemplo de ello fue el comentario “Puedes escribir una secuencia numérica para ayudarte”. Con esta frase se limita la posibilidad de que el alumnado se apoye en otros recursos como una representación gráfica u otra ayuda.

- Conviene aclarar a los docentes que las fichas, que pueden ser instrumentos de recogida de datos, se corrijan una vez éstas se han entregado. De lo contrario se verían alteradas las respuestas finales, que nos sirven para extraer datos, quedando todas uniformemente corregidas y correctas.

8. CONCLUSIONES

Uno de los objetivos que ha tenido este trabajo es llevar al aula el conocimiento de patrones de distinta naturaleza a través de tareas no rutinarias que implican su identificación, descripción y construcción. De esta forma, al llevar a cabo la intervención en el aula, se ha constatado en ambas clases de 3º de Educación Primaria que el concepto de patrón parece estar “escondido” en el currículo y, a la vez, alejado de la realidad del aula. Esto se debe a que en un principio ningún estudiante supo explicar con sus palabras en qué consistía. No obstante, una vez se introdujeron los patrones, les resultaron familiares y no tuvieron dificultades en trabajar con ellos, y es que una cualidad de los patrones es que poseen la adaptabilidad para enseñarlos de menor a mayor dificultad, según se requiera. Como se ha comprobado, también se hizo un esfuerzo por trabajar mediante la manipulación y la verbalización, como herramientas para producir aprendizajes más significativos.

En relación con el otro objetivo del trabajo, se ha tratado de analizar y describir las estrategias e inconvenientes que tuvo el alumnado tras la aplicación de las fichas y de la entrevista semiestructurada. Asimismo, se ha confirmado que la mayoría del alumnado es capaz de realizar generalizaciones cercanas (el estudiante hace recuentos, dibujos, tablas…) y generalizaciones lejanas (que requieren la identificación de un patrón), . Además, al hacer las entrevistas 3 meses después de la intervención en el aula, ha resultado alentador saber que los alumnos seguían familiarizados con los patrones y con el funcionamiento del juego de mesa.

Sin embargo, una limitación del trabajo ha sido no poder formalizar las abstracciones e indagar más en ellas.

Las actividades más clasificadoras para el análisis han sido las de las entrevistas, debido a que tanto el guion de preguntas como las actividades actividades propuestas fueron factibles y acordes al nivel. Por otra parte, al ser una entrevista individual se pudo obtener más información de los pensamientos verbalizados del estudiante.

Se ha demostrado que la vertiente lúdica, con la creación del juego de mesa *El último trébol*, es compatible con trabajar contenidos de manera sistemática y organizada, extrayendo del juego información sobre el aprendizaje relevante.

Finalmente, como dijo el escritor José Saramago "el caos es un orden aún por descifrar", y en nuestros pequeños caos del día a día (entendidos éstos como frustraciones, desconocimiento, desorganización…) los patrones nos pueden ayudar a descifrar ese orden que hace que el mundo que nos rodea —y nosotros mismos— sean más inteligibles.

9. BIBLIOGRAFÍA

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Cañadas, M. C. Y Castro E. (2004). Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII.* (pp. 173-182). La Coruña, España: SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2013). Pensamiento numérico en edades tempranas. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(2), 1-11.

Castro, E., Rico, L. Y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Castro, E, Cañadas, M. C. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Decreto 89/2014 de 1 de agosto por el que se establece la Ordenación y el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias*, Las Palmas de Gran Canaria, España, 13 de agosto de 2014, 22068-22132.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of functions as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-72). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y 1. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. London: Kluwer Academic Publishers.* (pp. 65-86).

Merino, E., Cañadas, M.C y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Poincaré, H. (1902). La ciencia y la hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe. [Traducción al castellano de Besio, A. B. y Banti, J. (1963).]

Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference.* Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4(2), 37-62.*

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and símbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Barcelona: Horsor.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. PNA, 7(2), 183-192.

Zapatera, A. (2015). La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *NÚMEROS*, (Volumen 97), pp.51-67.

10. ANEXOS

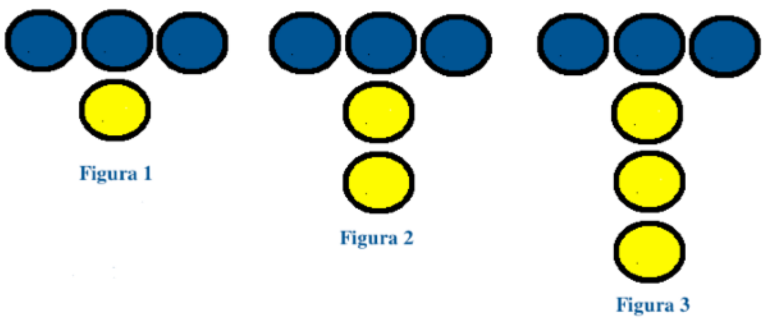
Anexo I

Anexo II

<u>Las letras crecen y crecen</u>

Observa como crecen las letras al colocar más y más circulitos:

1. La letra T crece y crece



e) Dibuja al lado las figuras 4 y 5.

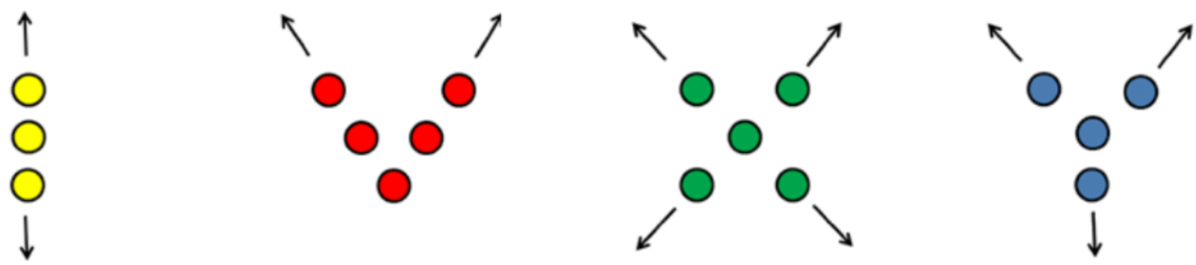
f) ¿Qué parte de la T permanece constante?

g) ¿Cuántos círculos contiene?

h) ¿Cuántos círculos aumentan en cada figura?

i) ¿Cuántos círculos azules tendrá la figura 10? ¿Y cuántos círculos amarillos? ¿Y en total? Explica cómo lo has averiguado.

2. Explora e investiga el crecimiento de otras letras. Puedes ayudarte de materiales concretos.



Anexo III

El último trébol es un juego para dos personas, donde tras poner 20 tréboles sobre el tablero las parejas podrán ir retirando 1 o 2 tréboles por turno. Ganará quien logre retirar el último

trébol, que será el "verdadero trébol de la suerte". Se trata de una variación de "La carrera hasta el 20", el conocido juego donde dos jugadores van diciendo números consecutivos desde el 1 hasta llegar al 20. Aquí en cada turno cada jugador podrá decir 1 o 2 números, y ganará quien diga el 20. Por ejemplo: si Jugador A dice "1, 2" el Jugador B podrá decir "3" o "3, 4" y así sucesivamente hasta llegar al 20. Si nos damos cuenta, cuando el Jugador A acaba su turno diciendo "17", termina ganando ya que Jugador B tendrá que decir "18" o "18, 19". Por el mismo razonamiento si Jugador A dice 14, 11, 8, 5 y finalmente 2 podrá ganar seguro. Es decir, la estrategia ganadora es empezar y decir "1, 2", para seguidamente ir diciendo los números de la secuencia ganadora (2, 5, 11, 14, 17).
En *El último trébol* es un proceso inverso a este juego, sin embargo comparte la misma estrategia ganadora y, por lo tanto, el mismo patrón. Aquí el truco está en ir sumando mentalmente los tréboles que se van retirando, para que cuando te llegue el turno puedas estar "dentro" de la secuencia ganadora. Al final, en lugar de decir "20" retirarás el último trébol y ganarás.

También se introdujo otra variación en el juego, puesto que si los jugadores tienen interiorizado el funcionamiento les puede resultar algo desalentador que siempre gane el que empiece, por ello se instauró una variante con un poco de azar al principio. La nueva regla consiste en que el Jugador A tira un dado y retira tantos tréboles como diga el dado (de 1 a 6), el Jugador B hará lo mismo. Luego el juego seguirá con las reglas de siempre (retirando 1 o 2). De esta manera ganará el jugador que más rápido se enganche a la secuencia ganadora, y no tendrá que ser necesariamente el que empiece.

Regla

- Juegan dos personas, en el tablero hay M tréboles y hay que irlos retirando hasta llegar al último.
- Para empezar el juego, uno de los jugadores retira entre 1 y n tréboles (ambos incluidos).
- Cada jugador, en su turno, seguirá retirando entre 1 y n tréboles.
- Gana quien retire el último trébol.

Generalización

La secuencia de la estrategia ganadora se puede construir de forma decreciente siguiendo este patrón: partiendo de un tablero con M tréboles, se resta sucesivamente n + 1 unidades, hasta que esta resta sea imposible entre números naturales.

Anexo IV

<u>El último trébol</u>

Recuerda: Las secuencias de números son números ordenados según una regla fija o patrón.

En el juego la secuencia de la estrategia ganadora es:

En orden ascendiente: 2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17- 20

En orden descendiente: 20 - 17 - 14 - 11 - 8 - 5 - 2

1. ¿Cuál es el patrón?

2. En esta secuencia hay un error: 4 - 12 - 20 - 26 - 36 - 44

Busca el error y escribe correctamente la secuencia:

¿Cuál es el patrón?

3. Imagina que en el tablero hay 10 tréboles y cada jugador, en su turno, sólo puede retirar 2 tréboles. Ganará quien retire los dos últimos.

¿Ganará el que empiece primero o el segundo? (Puedes escribir una secuencia numérica para ayudarte).

¿Cómo lo sabes?

¿Hay algún patrón?

Ahora compruébalo jugando con un compañero/a. A parte de los tréboles también sirven tapas, botones, etc.

Anexo V

Entrevista

Actividad 1

Llevar una caja de fichas para que puedan hacerlo manipulativamente si lo prefieren y que luego lo dibujen en la tabla.

Completa la tabla:

TABLA 1	1	2	3	4
Figura				
Cantidad				

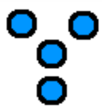
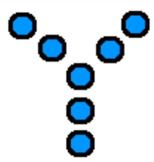
¿Qué ocurrirá en el siguiente, si tuviéramos que hacer uno nuevo?

¿Cuántas bolitas tienes que agregar?

¿Siempre añades los mismos? ¿Cuántos?

Entonces, para el paso 6, ¿cuántas bolitas necesitamos? ¿lo puedes hacer sin usar las fichas?

Ahora tenemos esta nueva forma.

TABLA 2	1	2	3	4
Figura				
Cantidad				

¿Qué ocurrirá en el siguiente paso?

¿Cuántas bolitas tienes que agregar?

¿Siempre añades los mismos? ¿Cuántos?

Entonces, para el paso 6, ¿cuántas bolitas necesitamos? ¿lo puedes hacer sin usar las fichas?

TABLA 3	1	2
Figura		
Cantidad		

¿Es diferente este con el que hicimos antes? ¿Qué diferencia encuentras?

¿Podrías hacer uno con las fichas que fuera como el anterior, pero con otra forma? Representa los dos primeros pasos.

¿Podrías crear uno como este de ahora pero con otra forma? Representa los dos primeros pasos.

TABLA 4	1	2
Figura		
Cantidad		

Actividad 2

Hay 15 tréboles sobre el tablero y sólo se pueden retirar de 3 en 3.

Vamos a jugar. ¿quién empieza?

Después de jugar. ¿quién ganó? ¿Crees que siempre será así?

Escribe los tréboles que van quedando cuando jugamos…Al principio hay….15, … cuando juegas tú quedan 12, …

Si ahora quitamos 5 en 5, ¿quién ganará? ¿lo puedes saber sin jugar? ¿cómo?…

Anexo VI

Respuestas del estudiante B-11

Actividad 1

- Tabla 1: la completa sin problemas, sabe que cada vez se añaden 2 círculos y adivina rápidamente que la figura 6 tendrá 13 círculos antes de representarlo con las fichas.
- Tabla 2: la completa sin dificultades, sabe que cada vez se agregan 3 círculos y sabe que la figura 6 tendrá 19 círculos sin tener que representarlo antes con las fichas. Sigue el siguiente razonamiento: "Sé que hay 19 porque aquí hay 13 (figura 4), le pongo 3 más y son 16, y más otros 3 son 19".
- Tabla 3: hizo una letra V con 5 círculos en el primer paso. En el segundo paso supo reflejar su crecimiento añadiendo un círculo por cada lado.
- Tabla 4: en el primer paso hizo una figura en forma de letra E con 8 círculos. En el segundo paso supo reflejar su crecimiento añadiendo 3 círculos.

Actividad 2

Con 15 tréboles retirándolos de 3 en 3, una vez ha jugado es capaz de adivinar que gana el que empieza. Escribe correctamente el patrón.

Con 15 tréboles retirándolos de 5 en 5, antes de jugar dice que gana el segundo en retirar tréboles. Después de jugar corrige argumentando: "Gana el primero porque quita 5 y quedan 10, el segundo quita 5 y quedan 5, y el primero quita 5 y quedan 0".

Respuestas del estudiante B-16

Actividad 1

- Tabla 1: Requiere más tiempo para completarla pero lo hace sin problemas, sabe que cada vez se añaden 2 círculos. No es capaz de adivinar cuántos círculos tiene la figura 6 sin hacerlo previamente con las fichas, y cuando lo hace con las fichas solo añade 1 a la figura 6 en lugar de 2 (el patrón de crecimiento).

- Tabla 2: En lugar de agregar 3 círculos cada vez, agrega 2, por lo tanto la figura 3 tiene 9 círculos en lugar de 10 y la figura 4 tiene 12 en lugar de 13. Al hacerlo con las fichas comprende el error y sabe llegar hasta la figura 6.

- Tabla 3: hizo una letra T con 6 círculos en el primer paso. En el segundo paso refleja su crecimiento añadiendo 3, pero con argumentos incoherentes: “Crece 3 círculos porque estamos en la tabla 3” o “Crece 3 porque la parte de arriba de la T tiene 3 círculos”.

- Tabla 4: en el primer paso hizo una figura en forma de letra A con 5 círculos. En el segundo paso solo añade 1 círculo en lugar de 2 (uno por cada lado).

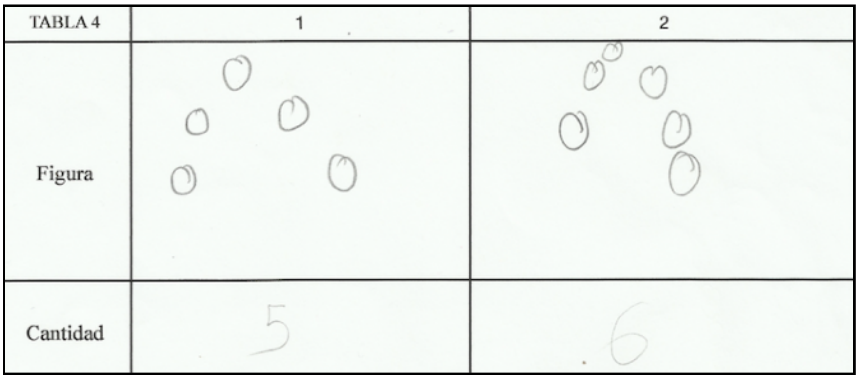


Figura 7.

<u>Actividad 2</u>

Con 15 tréboles retirándolos de 3 en 3, una vez ha jugado es capaz de adivinar que gana el que empieza. Escribe correctamente el patrón.

Con 15 tréboles retirándolos de 5 en 5, antes de jugar dice que gana el segundo en retirar tréboles, como en el caso de antes. Después de jugar corrige.

Respuestas del estudiante A-08

<u>Actividad 1</u>

- Tabla 1: la completa sin problemas, sabe que cada vez se añade 1 círculo por cada parte (2 círculos) y adivina rápidamente que la figura 6 tendrá 13 círculos antes de representarlo con las fichas. Sigue el siguiente razonamiento: “Vi que en la figura 4 hay 9 círculos, y entonces le sume cuatro porque se añaden 2 a cada una y tengo que saltarme la 5, y entonces eso me dio 13”.

- Tabla 2: la completa sin dificultades, sabe que cada vez se agregan 3 círculos y sabe que la figura 6 tendrá 19 círculos sin tener que representarlo antes con las fichas. Sigue el siguiente razonamiento: “La figura 4 tiene 13, entonces le tengo que añadir 6 porque 3 más 3 son 6, y serían 19”.

- Tabla 3: dibuja una figura en forma de X con 5 círculos, y adivina inmediatamente que tiene que añadir 4 (1 por cada lado) en el siguiente paso para que la figura crezca.
- Tabla 4: en el primer paso hizo una figura en forma de letra V acostada con 3 círculos. En el segundo paso supo reflejar su crecimiento añadiendo 2 círculos.

<u>Actividad 2</u>

Con 15 tréboles retirándolos de 3 en 3, una vez ha jugado es capaz de adivinar que gana el que empieza. Escribe correctamente el patrón.

Con 15 tréboles retirándolos de 5 en 5, antes de jugar dice que gana el segundo en retirar tréboles. Una vez que juega cambia de opinión y argumenta que gana el primero.

Respuestas del estudiante A-10

<u>Actividad 1</u>

- Tabla 1: la completa sin problemas, sabe que cada vez se añaden 2 círculos y adivina que la figura 6 tendrá 13 círculos antes de representarlo con las fichas.
- Tabla 2: al principio dice que se agrega 1 círculo cada vez, después, al fijarse mejor, corrige diciendo que se agrega 1 por cada parte (3 círculos). Sabe que la figura 6 tendrá 19 círculos sin tener que representarlo antes con las fichas.
- Tabla 3: dibuja una figura en forma de X con 5 círculos, en el siguiente paso le añadió 3 círculos argumentando que en la ficha ponía “Tabla 3”, curiosamente como B-16. Después corrigió y supo que se añaden 4.
- Tabla 4: dibuja una pirámide formada por 6 círculos, pero no consigue dibujar cómo crecería coherentemente debido a la complejidad de la figura. En esta figura los círculos que se añaden van cambiando (patrón de recurrencia).

<u>Actividad 2</u>

Con 15 tréboles retirándolos de 3 en 3, una vez ha jugado es capaz de adivinar que gana el que empieza. Escribe correctamente el patrón.

Con 15 tréboles retirándolos de 5 en 5, antes de jugar dice que gana el segundo en retirar tréboles. Una vez que juega cambia de opinión y argumenta que gana el primero.

Anexo VII

Secuencia de tareas

1) Introducción a los patrones y ficha *Las letras crecen y crecen.*

Duración: 2 sesiones

Propósito de la sesión: Identificar, describir y construir patrones.

2) Patrones con ritmo.

Duración: 1 sesión

Propósito de la sesión:

- Identificar y construir patrones.
- Aprender concepto de ritmo y compás

3) Juego de patrones

Duración: 2 sesiones

Propósito de la sesión:

- Identificar y construir patrones.
- Comprender la estrategia ganadora