



FACULTAD DE CIENCIAS, SECCIÓN DE FÍSICA

Detección de exoplanetas en sistemas binarios.

Desarrollo de la metodología.

MEMORIA DEL TRABAJO DE FIN DE GRADO

Autora: Dña. Victoria Sánchez Sánchez

Tutor: Dr. Teodoro Roca Cortés

Septiembre, 2019

Índice

ABSTRACT	5
1. INTRODUCCIÓN	7
1.1 <i>Exoplanetas</i>	7
1.2 <i>Telescopios</i>	7
1.3 <i>Métodos de detección</i>	8
a) Imagen directa.....	8
b) Velocidad radial.....	9
c) Astrometría.....	10
d) Microlentes gravitacionales	11
e) Púlsares	12
f) Tránsitos	13
1.4 <i>Objetivos</i>	14
2. METODOLOGÍA	15
2.1 <i>Dinámica de la atracción de dos cuerpos</i>	15
2.2 <i>Determinación de eclipses</i>	16
2.3 <i>Determinación de las efemérides</i>	18
2.3.1 <i>Ajuste parabólico</i>	18
2.3.2 <i>Diferencial del flujo</i>	19
2.4 <i>Determinación del timing O-C</i>	20
2.4.1 <i>Buscando regularidades en el residuo O-C: aplicación de la transformada de Fourier</i>	21
2.5 <i>Discusión de resultados</i>	22
3. Análisis de la binaria KIC 9637299	23
4. Conclusiones	27
5. Bibliografía	29

ABSTRACT

Exoplanet detection is a field of science to which many resources are currently being allocated. The first exoplanet was discovered was in 1992 and orbited the pulsar PSR B1257 + 12 of 6.22 milliseconds. Subsequently two other planets were detected in this system. There are many telescopes destined to searching for Far Earths, such as the Very Large Telescope, in Chile, the 3.6 meter telescope with the HARPS spectrograph, also in Chile, the Keck and Gemini observatories in Hawaii, etc. Among the missions carried out in this field are the WASP, TrES (with telescopes in Tenerife, Arizona and California) and the missions of Kepler and its K2 extension. To detect these celestial bodies, several methods that require very precise instrumentation are used. The direct image method is very limited since it is no useful at great distances and the difficulty of capturing the faint brightness of planets in front of the stars which are so bright that they eclipse their surroundings. However, there are several techniques to solve these problems, such as the use of coronagraphs to hide the central and brightest part of the stars, thus allowing to observe objects in the vicinity that were previously imperceptible; and the starshade, structures that are attached to space telescopes to hide unwanted light before it enters the telescope. Astrometry measures the variation in the apparent position of the stars in the plane of the sky, being more useful for little massive nearby stars that house planets with wide orbits. Another method of detection is by measuring the period of pulsars, neutron stars that emit jets of light through the magnetic poles that are detectable when they coincide with the direction of observation. Any variation in this period will indicate the possible existence of a body orbiting the star. The first exoplanet was detected by this method. On the other hand, the phenomenon of gravitational microlensing is also used, which is difficult to observe since the stars must be aligned with the observer's direction of vision. One of the most used methods is the calculation of the radial velocity of the star by Doppler displacement of the absorption lines. This method is commonly used in conjunction with transits / eclipses to confirm the existence of exoplanets. This technique consists in determining the times in which the observed eclipses are produced from the light curve and the times calculated by means of a linear adjustment of the order of the eclipse number versus the observed time. The residue is then calculated, subtracting the observed times with the calculated ones, O-C, for later analysis with the Fourier transform, FFT.

In this work a comparison is made between two different methods of analyzing the light curves of two different binaries, KIC 10191056 and KIC 9637299. The first presents a peak in the representation of FFT modules in both primary eclipses and in the secondary ones with the method of parabolic adjustment of the eclipses. However, they are not visible with the differential flow method of the lowest part of the eclipses. The second binary has a peak in secondary eclipses with both methods but due to the noise it is not predominantly visible in the primary ones. The results are inconclusive, so if there is evidence of a third body, a complementary method would be required to confirm its existence.

RESUMEN

La detección de exoplanetas es un campo de la ciencia al que se está destinando muchos recursos en la actualidad. El primer exoplaneta descubierto fue en 1992 y orbitaba el pulsar PSR B1257+12 de 6.22 milisegundos. Posteriormente se detectaron otros dos planetas en este sistema. Hay muchos telescopios destinados a esta búsqueda de Tierras lejanas, tales como el Very Large Telescope, en Chile, el telescopio de 3,6 metros con el espectrógrafo HARPS, también en Chile, los observatorios Keck y Gemini en Hawaii, etc. Entre las misiones realizadas en este campo destacan el WASP, TrES (con telescopios en Tenerife, Arizona y California) y las misiones de Kepler y su extensión K2.

Para detectar estos cuerpos celestes se utilizan varios métodos que requieren de una instrumentación muy precisa. El método de la imagen directa es muy limitada puesto que deja de ser útil a grandes distancias y es difícil captar el tenue brillo de los planetas frente a las estrellas tan luminosas que eclipsan lo que tienen alrededor. Sin embargo, existen varias técnicas para solventar en gran medida estos problemas, como el uso de coronógrafos que ocultan la parte central y más brillante de las estrellas, permitiendo así observar objetos en las inmediaciones que antes eran imperceptibles; y los starshade, estructuras que se acoplan a los telescopios espaciales para ocultar la luz que no interesa antes de que entre al telescopio. La astrometría mide la variación en la posición aparente de las estrellas en el plano del cielo, siendo más útil para estrellas cercanas poco masivas que albergan planetas con amplias órbitas. Otro método de detección es mediante la medición del periodo de púlsares, estrellas de neutrones que lanzan chorros de luz por los polos magnéticos detectables cuando coinciden con la dirección de observación. Cualquier variación en este periodo indicará la posible existencia de un cuerpo orbitando la estrella. El primer exoplaneta fue detectado mediante este método. Por otro lado, también se utiliza el fenómeno de la microlente gravitacional, el cual es difícil de observar ya que deben alinearse las estrellas con la dirección de visión del observador. Uno de los métodos más utilizados es el cálculo de la velocidad radial de la estrella mediante el desplazamiento Doppler de las líneas de absorción. Este método suele utilizarse en conjunto con el de los tránsitos/eclipses para confirmar la existencia de exoplanetas. Esta técnica consiste en determinar los tiempos en los que se producen los eclipses observados a partir de la curva de luz y los tiempos calculados mediante un ajuste lineal del orden del número de eclipse frente al tiempo observado. Después se calcula el residuo de estos tiempos observados menos los calculados, O-C, para su posterior análisis con la transformada de Fourier, FFT.

En este trabajo se hace una comparativa entre dos métodos distintos de analizar las curvas de luz de dos binarias diferentes, la KIC 10191056 y la KIC 9637299. La primera presenta un pico en la representación de los módulos de la FFT tanto en los eclipses primarios como en los secundarios con el método del ajuste parabólico de los eclipses. Sin embargo, no son visibles con el método de la diferencial del flujo de la parte más baja de los eclipses. La segunda binaria presenta un pico en los secundarios con ambos métodos pero debido al ruido no es visible de forma predominante en los primarios. Los resultados no son concluyentes por lo que de haber indicios de un tercer cuerpo se requeriría de un método complementario para confirmar su existencia.

1. INTRODUCCIÓN.

Planets outside the solar system are called exoplanets. The first one was discovered in 1992 and there are currently more than 4000 confirmed existing ones. The most important mission dedicated to the search is the Kepler and its K2 extension, which until 2018 discovered more than 2600 exoplanets. Several methods are used in order to find these bodies, such as direct image, which is very limited due to the great luminosity of stars in comparison with planets and the astrometry that measures changes in the apparent position of stars. Therefore, very precise optical instrumentation is required. Another method used for the detection of exoplanets are gravitational microlenses, but capturing these phenomena is tremendously difficult because several stars must be aligned in the direction of observation. Pulsars are also used for detecting exoplanets, since the neutron star period can be measured very accurately and any variation would be an indication of an existing body orbiting it. The most commonly used methods are radial velocity, which measures velocity by Doppler displacement of absorption lines and the transits/eclipses method. In the latter, the period when eclipses occur is determined from light curves of stars and the radius of the body orbiting the star can be calculated. With this method, more than 75% of exoplanets have been discovered. The other ones are required to verify their existence.

1.1 Exoplanetas.

Desde hace cientos de años muchos astrónomos y astrónomas han creído en la existencia de planetas que orbitaban otras estrellas fuera de nuestro sistema solar, pero no fue hasta el siglo XX que la tecnología permitió su detección y confirmación. Estos planetas son denominados exoplanetas [1].

La primera detección confirmada de un exoplaneta fue en 1992 gracias al radiotelescopio de 305 metros de Arecibo, Puerto Rico, tras descubrir el pulsar PSR B1257+12 de 6.22 milisegundos. Este púlsar está orbitado por tres planetas: Draugr con un periodo de 25.262 días, Poltergeist con un periodo de 66.542 y Phobetor con un periodo de 98.211 [2].

Posteriormente, en 1995, se descubrió el gigante gaseoso Dimidio [3] con un periodo de 4.2307 días (anteriormente llamado 51 pegasi b) orbitando la estrella tipo solar Helvetios, en la constelación de Pegaso [4]. Su detección fue gracias al espectrógrafo ELODIE del observatorio de Haute-Provence (Francia) mediante el método de la velocidad radial.

Por otro lado, en 1996, los astrónomos G. Marcy y R. P. Butler descubrieron otro gigante gaseoso, Thapao Thong o 47 Uma b, orbitando la estrella 47 Ursae Majoris, con un periodo de casi tres años [5]. A día de hoy es el planeta más interno del sistema, el cual está formado por tres planetas: Taphao Thong, Thapao Kaew y 47 Uma d, siendo éste el más externo.

1.2 Telescopios.

A parte de los ya mencionados espectrógrafo ELODIE y el radiotelescopio de Arecibo, existen otros telescopios, tanto terrestres como espaciales, que han contribuido al descubrimiento de exoplanetas. Entre los principales telescopios terrestres están el Very Large Telescope de Chile (Fig. 1), el espectrógrafo High Accuracy Radial velocity Planet Searcher (HARPS) del telescopio de 3,6 metros de La Silla, Chile (Fig. 1), los telescopios de los observatorios Keck y Gemini en Hawaii. También se pueden incluir los siguientes proyectos:

- El WASP (Wide Angle Search for Planets), con 118 exoplanetas descubiertos mediante el método del tránsito desde sus dos observatorios de Sudáfrica y La Palma.

- El HAT (Hungarian Automated Telescope), una red de 7 telescopios en Arizona, Australia, Namibia y Chile que ha descubierto 61 exoplanetas con la técnica del tránsito.
- El TrES (Trans-Atlantic Exoplanet Survey), con tres telescopios de 10 cm en Tenerife, Arizona y California, ha detectado 5 exoplanetas en tránsito.
- El TRAPPIST (TRAnsiting Planets and Planetesimal Smalls Telescope) tiene un solo sistema planetario descubierto hasta la fecha, pero posiblemente sea el más famoso y emocionante de todos los sistemas puesto que consta de al menos 7 planetas de los cuales 3 son del tamaño de La Tierra.

Por otro lado, los telescopios espaciales más destacados son el COROT, dirigido por la agencia espacial de Francia en conjunto con la ESA, cuyos objetivos son la detección de exoplanetas con el método del tránsito (32 descubiertos hasta 2013) y el estudio de la estructura interna de las estrellas pulsantes (astrosismología); las misiones de la NASA Kepler y K2 ya finalizadas que descubrieron 2662 exoplanetas. También hay que nombrar al más famoso de los telescopios espaciales, el Hubble, que produjo una imagen del planeta Fomalhaut-b dentro de un anillo de polvo alrededor de su estrella madre, una de las estrellas más brillantes del cielo nocturno.

1.3 Métodos de detección.

a) Imagen directa.

La forma más sencilla de detectar exoplanetas es mediante la imagen directa, aunque deja de ser útil al aumentar la distancia del objeto a La Tierra. Los exoplanetas son millones de veces más tenues que las estrellas a las que orbitan por lo que es bastante difícil tomar imágenes de la misma forma que se toman las de las estrellas.

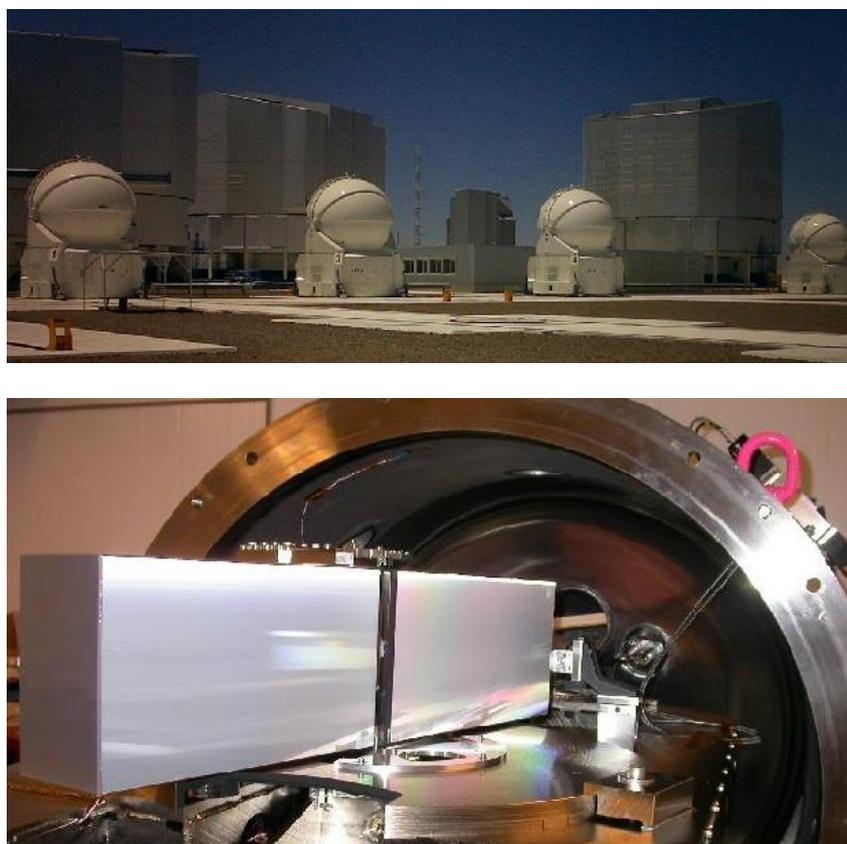


Figura 1. La imagen de arriba es una panorámica del Very Large Telescope (VLT), sacado de https://es.wikipedia.org/wiki/Very_Large_Telescope y la de abajo es una parte del espectrógrafo HARPS de La Silla, Chile. Obtenida de <https://www.eso.org/sci/facilities/lasilla/instruments/harps.html>

Cualquier luz que pueda reflejar el planeta o cualquier radiación caliente procedente de él, queda prácticamente ahogada por el brillo de su estrella anfitriona. Sin embargo, la tecnología ha avanzado rápidamente y este método tiene cada vez menos limitaciones.

Los instrumentos se diseñan para poder bloquear parte de este brillo excesivo de la estrella y así poder ver planetas u objetos que podrían estar orbitándolas.

Hay dos métodos para conseguir el bloqueo de la luz:

- **Coronografía.** Los coronógrafos (Fig. 2) estelares producen eclipses artificiales mediante un obstáculo que obstruye la luz de la estrella y permiten observar su entorno. Están compuestos por tres lentes y un disco opaco que oculta la imagen de la estrella formada por la primera lente provocando el eclipse. B. Lyot mejoró la técnica incluyendo un diafragma que eliminaba la luz difractada por los bordes del disco [6].
- **Starshade.** Se pueden utilizar unos bloqueadores externos que ocultan la luz de la estrella antes de que llegue al telescopio. Para telescopios espaciales, estos "starshade" (Fig. 2) son naves espaciales que están diseñadas para posicionarse a una distancia y a un ángulo en concreto para bloquear la luz correctamente [7].

b) *Velocidad radial.*

Las estrellas que albergan algún planeta describen órbitas alrededor del centro de masas, el cual suele estar localizado muy cerca de éstas, ya que la masa de una estrella es mucho mayor que la masa de un planeta. El método de la velocidad radial determina dicha velocidad estelar a partir de una serie temporal de espectros de alta resolución de la cual se medirán las variaciones periódicas en las líneas de absorción debidas al desplazamiento Doppler. Según se acerque o se aleje la estrella, el espectro se detectará desplazado al azul o al rojo. Por convenio, cuando el objeto celeste se acerca al observador la velocidad radial es negativa y cuando se está alejando es positiva.

Para aplicar este método se tienen que considerar órbitas excéntricas o elípticas de los planetas alrededor de sus estrellas, lo cual es más preciso que considerarlas órbitas circulares. Teniendo en cuenta que la masa de la estrella M_* es mucho mayor que la masa del planeta M_p se puede obtener la amplitud del movimiento reflejo de la velocidad radial de la estrella:

$$A_{RV} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{M_p}{M_*} \right) \sqrt{\frac{GM_*}{a}} \sin i \quad (1)$$

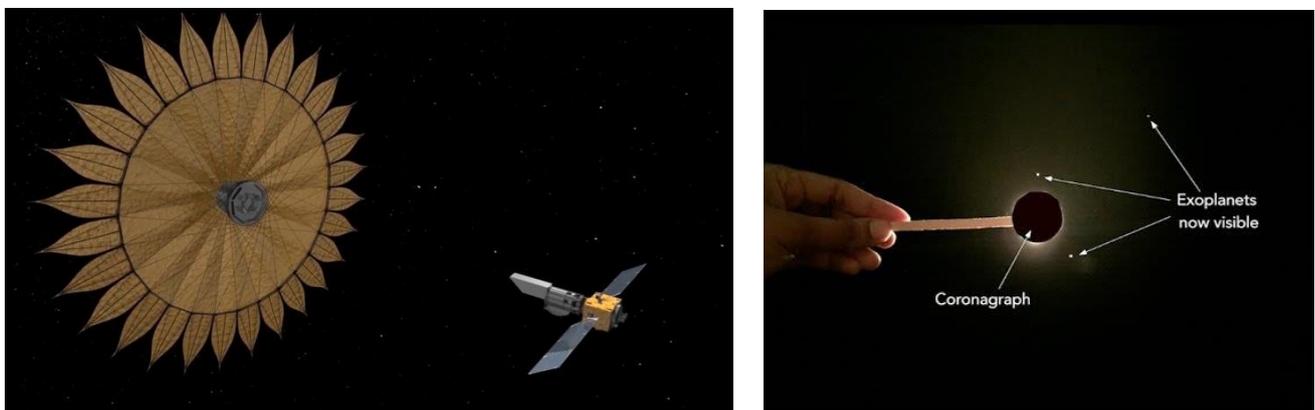


Figura 2. A la izquierda una animación de lo que sería un prototipo de starshade acoplado con el telescopio. Sacado de <https://www.nasa.gov/feature/jpl/starshade-would-take-formation-flying-to-extremes>. A la derecha el efecto que haría el coronógrafo del telescopio, haciendo más visible el entorno que rodea la estrella. Sacado de <https://www.youtube.com/watch?v=XilfCOBZLY>.

Donde e es la excentricidad, a el semieje mayor de la órbita, G la constante gravitacional e i el ángulo que forma la normal al plano de la órbita con la dirección de observación. Cuanto más masivo sea el planeta, mayor será la amplitud, es decir, la velocidad radial de la estrella. También se obtiene el periodo de tal forma que:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_*}} \quad (2)$$

En la figura 3 se muestra la variación de la velocidad radial al tener una órbita circular (curva sinusoidal simétrica, $e=0$) y órbitas elípticas con distinta excentricidad e [8].

Con este método se han descubierto 763 exoplanetas y también se usa para confirmar planetas encontrados mediante otro método.

a) Astrometría.

Este método se basa en la medición de la posición aparente de las estrellas en el cielo y es un método complementario para la detección de exoplanetas. Se toman múltiples imágenes tomando como referencia las distancias entre las estrellas de los alrededores. Si alguna de esta distancia cambia sutilmente con respecto a una estrella en alguna de las imágenes será muy probable que dicha estrella esté orbitada por algún cuerpo celeste. Este método es extraordinariamente difícil y requiere de una instrumentación óptica muy precisa. A día de hoy se puede llegar a conseguir una precisión en las medidas de 10 microarcoregundos (satélite Gaia lanzado por la Agencia Espacial Europea).

Si la estrella está a una distancia d de La Tierra y tiene una órbita con semieje mayor a_* , su desplazamiento angular visto en el plano del cielo será

$$\beta = \frac{a_*}{d}$$

Y teniendo en cuenta que

$$a_* \cdot M_* = a_p \cdot M_p$$

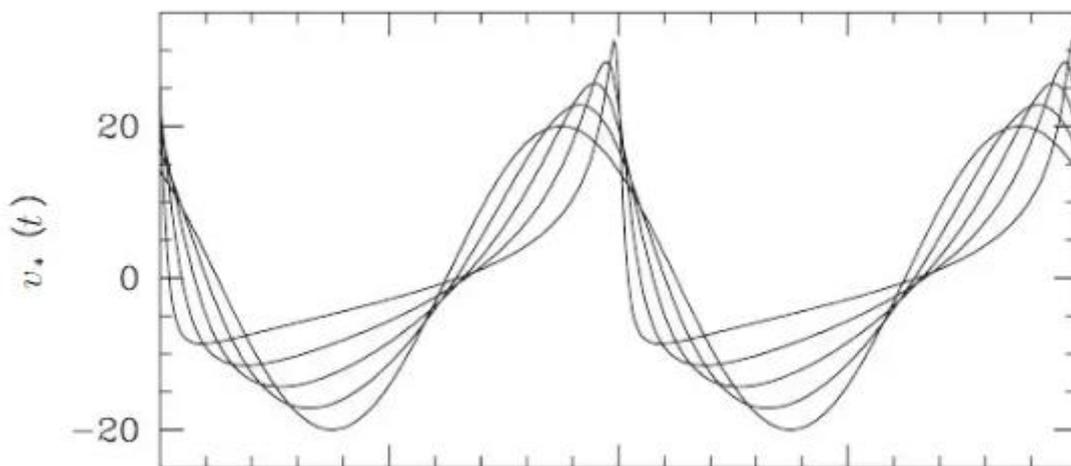


Figura 3. Velocidad radial en función del tiempo con órbita circular (curva sinusoidal simétrica) y con distintos valores de la excentricidad. Imagen obtenida del libro *Astrophysics of Planet Formation*, P.J. ARMITAGE.

Se llega a la expresión

$$\beta = \frac{M_P \cdot a_P}{M_* \cdot d} \quad (3)$$

De ella se puede observar que este método funciona mejor para planetas masivos en amplias órbitas alrededor de estrellas relativamente cercanas y poco masivas. Algunas grandes desventajas de este método son la necesidad de largos periodos de tiempo de observación (años, décadas...) para detectar planetas lejos de su estrella y la influencia de la atmósfera sobre las posiciones aparentes de las estrellas. Por ello solo se ha conseguido encontrar un planeta con esta técnica, el HD176051b, descubierto en 2010, con una masa de $1.5 M_J$, un periodo P de 1016 días y un semieje mayor de 1.76 UA; cuya estrella se encuentra a unos 15 parsec aproximadamente.

b) Microlentes gravitacionales .

Las lentes gravitacionales son una consecuencia de la curvatura del espacio tiempo de la relatividad general producida por objetos astronómicos masivos. Este método se basa en la continua observación de extensas áreas del espacio y requiere la alineación de estrellas en la dirección de observación. Se analizan múltiples curvas de luz con el objetivo de encontrar aumentos en la luminosidad, por lo que es más probable encontrar estas microlentes gravitacionales en regiones densamente pobladas de estrellas, como lo son los bulbos galácticos en el centro de las galaxias espirales.

Un rayo de luz que pasa por una estrella de masa M_* con un parámetro de impacto ξ (distancia de la lente al paso del rayo de luz) sufrirá una desviación con un ángulo

$$\alpha = \frac{4GM_*}{\xi c^2} \quad (4)$$

La ecuación de la lente relaciona la posición verdadera β de la fuente luminosa con la posición observada en el cielo θ (fig. 4), de tal forma que

$$\beta = \theta - \alpha$$

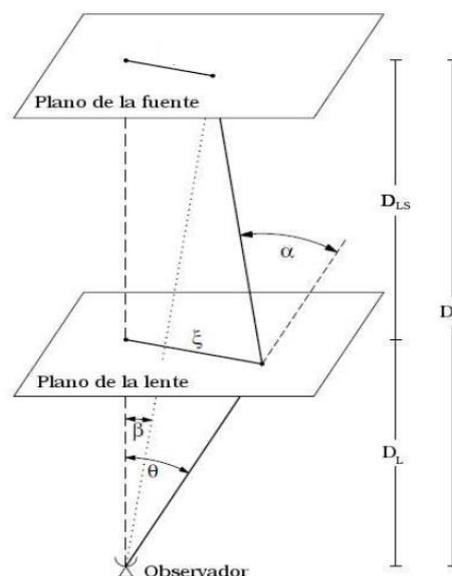


Figura 4. Geometría de la microlente gravitacional en aproximación de lente fina. [9]

Puesto que los ángulos α , β y θ son coplanares, se consideran en una única dimensión y como las distancias entre la fuente, la lente y el observador son mucho mayores que el tamaño de la lente, se puede aproximar ésta como lente fina para simplificar el análisis.

Si hay una alineación exacta entre fuente-lente-observador la desviación angular θ_E se denomina radio o anillo de Einstein y estará dada por la expresión [9]

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM D_{LS}}{c^2 D_L D_S}} \quad (5)$$

Donde D_{LS} es la distancia de la fuente a la lente, D_S es la distancia de la fuente al observador y D_L de la lente al observador.

El primer exoplaneta descubierto con esta técnica fue el OGLE-2003-BLG-235Lb en 2003 a 19 000 años luz y hasta el momento se han detectado 78 exoplanetas. El principal inconveniente de utilizar este método es que solo se puede observar la alineación una vez y la confirmación del descubrimiento debe verificarse mediante otros métodos.

c) *Púlsares.*

Los Púlsares son estrellas de neutrones que se forman tras una supernova, por esta razón la comunidad científica se sorprendió al descubrir un planeta que orbitaba un objeto como este, ya que se pensaba que los posibles planetas que se encontraran en las cercanías de la supernova serían destruidos o expulsados hacia el espacio debido a la onda expansiva. Todos los púlsares son estrellas de neutrones, pero no todas las estrellas de neutrones llegan a convertirse en púlsares.

Estas estrellas tienen un campo magnético entre 10^9 y 10^{12} veces más intenso que el del Sol y el campo eléctrico que se forma es tan intenso que los electrones de la superficie son acelerados y fluyen por los polos magnéticos. La radiación producida sale en forma de chorro por los polos magnéticos debido a la rotación de la estrella [10]. Esta radiación puede verse sólo en la dirección del chorro, por ello desde La Tierra percibimos este fenómeno en forma de pulsos (fig.5). Los periodos de estos pulsos se miden con mucha precisión (de relojes atómicos) de esta forma cualquier tipo de variación en el tiempo del periodo provocada por otro cuerpo celeste se detectará. El primer exoplaneta descubierto y confirmado fue también el primer exoplaneta detectado que orbitaba un pulsar (PSR B1257+12), nombrado anteriormente.

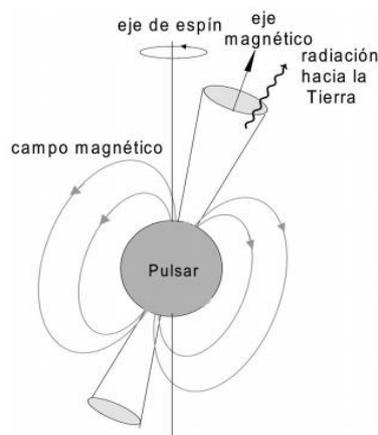


Figura 5. Rotación de un púlsar. [10]

d) **Tránsitos.**

Este método utiliza el fenómeno de los eclipses, al igual que la luna disminuye la luz procedente del sol en un eclipse solar, cuando un objeto celeste pasa por delante de una estrella que se está observando se detecta una caída en la intensidad de luz que se recibe, la cual se denomina tránsito. Estos tránsitos se analizan en las curvas de luz de las estrellas y a partir del tamaño y longitud de éstos se puede determinar si el segundo cuerpo es más o menos grande y si su órbita está más o menos lejos de su estrella.

Si el segundo cuerpo se trata de un planeta, también se puede obtener información de la composición de su atmósfera y de su temperatura. Se puede estimar el tamaño del planeta en función del tamaño de su estrella madre a partir de la siguiente relación:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{R_P^2}{R_*^2} \quad (6)$$

Donde F es el flujo medido procedente de la estrella y ΔF es el cambio observado en este flujo durante el tránsito. Esta expresión es válida cuando se tratan distancias interestelares ya que la geometría de los tránsitos en los planetas del sistema solar es más complicada.

Si se considera un sistema aleatorio estrella-planeta visto con una inclinación i y una órbita circular, la distancia que habrá entre los centros de los discos de los dos objetos cuando el planeta está más cerca del observador (fig. 6) será

$$d(\phi = 0.0) = a \cdot \cos i \quad (7)$$

Siendo a el semieje mayor de la órbita y ϕ la fase orbital a la que ocurre la conjunción inferior (el planeta está más cerca del observador) siendo ésta por convención a $\phi = 0$.

Entonces, para que el disco del planeta llegue a ocultar el disco de la estrella se debe cumplir

$$a \cdot \cos i \leq R_p + R_* \quad (8)$$

Como $\cos i$ toma valores entre $0 < \cos i < 1$, la probabilidad geométrica de que se produzca un tránsito es

$$P = \frac{\int_0^{(R_p+R_*)/a} dx}{\int_0^1 dx} = \frac{R_p + R_*}{a} \approx \frac{R_*}{a}$$

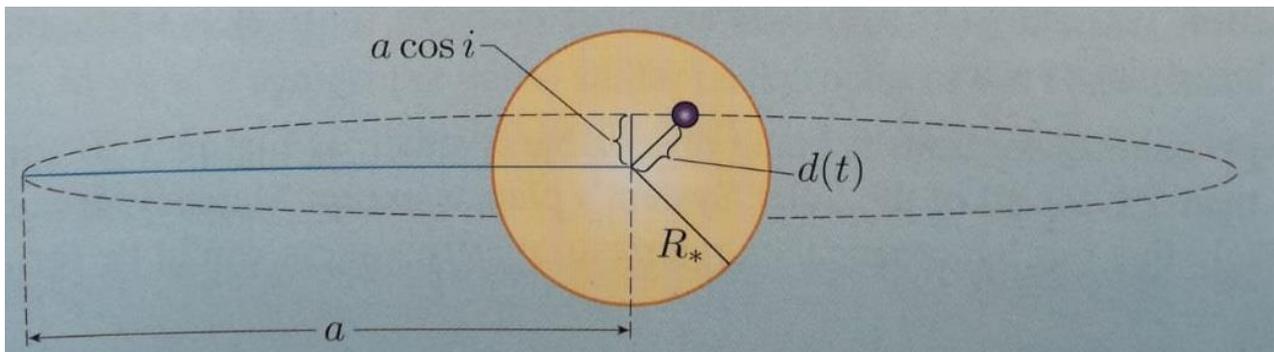


Figura 6. Geometría de un sistema estrella-planeta con órbita circular en la dirección de visión del observador. Imagen obtenida del libro *Transiting Exoplanets*, A. CAROLE.

Donde se ha hecho el cambio de variable $x = \cos i$ y se ha tenido en cuenta que $R_p \ll R_*$ [11]. Puede observarse que los tránsitos son más probables para planetas con órbitas pequeñas de tal modo que $a \approx R_*$. Para órbitas no circulares la expresión quedaría simplemente de la siguiente forma:

$$P = \frac{R_p + R_*}{a(1 - e^2)} \quad (9)$$

1.4. Objetivos.

Con este trabajo se pretende dar una visión de las distintas formas que existen en la actualidad de detectar exoplanetas, haciendo hincapié en el método de los tránsitos/eclipses y analizando dos curvas de luz de estrellas binarias. A partir de éstas curvas, determinar si dichas estrellas pudieran estar orbitadas por un tercer cuerpo, mediante varios procedimientos que se utilizan para calcular los periodos orbitales de las binarias y de los planetas que pudieran acoger. Hacer una comparación entre dichos métodos y determinar cuál es más conveniente de utilizar.

2. METODOLOGÍA.

The analysis of the light curve consists, first of all, in determining the times (observed) in which the eclipses or transits occur and the period with which they occur. This can be calculated by a parabolic adjustment of the eclipse peak or by a linear adjustment of the flow differential of the lowest part of the eclipse. Both methods are valid but the parabolic adjustment has a calculation error 10 times less than the other method. Secondly, the calculated times are obtained through the equation of a line, the period being the slope, the independent variable the order of the eclipse number and the independent term the time of the first eclipse (P and t_0 obtained previously). This adjustment is made with both methods for comparison. These observed and calculated times are subtracted and the $O-C$ residue is obtained to which the FFT discrete Fourier transform will be applied. The amplitude spectrum, obtained with the module of the values returned by the FFT, since they are complex values in general, is represented against the frequency and if there were any type of periodic signal in the OC it would be observed in the FFT graph with a predominant peak. The inverse of the frequency at which this signal would be given is the period in days.

At the same time that the methodology is explained, the KIC 10191056 binary has been analyzed, observed by the Kepler telescope, in which a peak is observed in the FFT of the primary and secondary eclipses, although with a lot of noise, with the adjustment method parabolic. However, it is not observed in the FFT of the flow differential. Then the meaning of these peaks is inconclusive and requires a deeper and statistical analysis.

2.1. Dinámica de la atracción de dos cuerpos.

Los cuerpos celestes, planetas y estrellas, debido a sus grandes masas se ven atraídos por otros cuerpos creándose así órbitas alrededor de los centros de masa. Suponiendo un sistema de dos cuerpos con masas M_1 y M_2 que se encuentran a una distancia d_{12} el uno del otro, la fuerza newtoniana gravitacional que experimenta el cuerpo de masa M_1 es

$$\vec{F}_1 = G \frac{M_1 M_2}{d_{12}^2} \hat{u}_{12} \quad (10)$$

Donde G es la constante universal gravitacional y \hat{u}_{12} es el vector unitario entre los dos cuerpos. Teniendo en cuenta un origen de coordenadas arbitrario, la expresión anterior puede reescribirse como

$$\vec{F}_1 = G \frac{M_1 M_2}{|\vec{d}_2 - \vec{d}_1|^3} (\vec{d}_2 - \vec{d}_1) = -\vec{F}_2 \quad (11)$$

La fuerza que actúa sobre los dos cuerpos es de igual magnitud pero de signo contrario. A partir de la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ se puede obtener la aceleración de cada cuerpo dividiendo la fuerza entre la masa de dicho cuerpo, entonces

$$\vec{a}_1 = \ddot{\vec{d}}_1 = GM_2 \frac{(\vec{d}_2 - \vec{d}_1)}{|\vec{d}_2 - \vec{d}_1|^3} \quad y \quad \vec{a}_2 = \ddot{\vec{d}}_2 = GM_1 \frac{(\vec{d}_1 - \vec{d}_2)}{|\vec{d}_1 - \vec{d}_2|^3} \quad (12)$$

La solución a estas ecuaciones requieren de una matemática sencilla pero es una demostración larga aunque

conocida [12] , por lo que se pasará directamente a dicha solución, obteniendo la órbita plana de un cuerpo (planeta) alrededor de otro (estrella):

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (13)$$

donde r es la distancia relativa de un cuerpo a otro, a el semieje mayor de la órbita, e la excentricidad y el ángulo θ la anomalía verdadera. Este ángulo mide cuánto se aleja el cuerpo sobre la trayectoria de la órbita del periastro (punto de la órbita del planeta más cercano a la estrella).

Cuando el plano de la órbita coincide con la línea de visión del observador se producirán eclipses o tránsitos de ambos cuerpos de forma regular en el tiempo. El tiempo entre dos de estos eclipses consecutivos del mismo objeto será constante y será el periodo de la órbita.

2.2. Determinación de eclipses.

Una curva de luz es una representación gráfica del flujo de radiación que se detecta de una estrella en función del tiempo. Si hay algún cuerpo transitando la estrella se producirán caídas en el flujo cada cierto periodo. Para la determinación de este periodo se ha desarrollado un código informático en Python y se ha aplicado a modo de ejemplo la binaria con KIC (Kepler Input Catalog) 10191056, observada por el satélite Kepler. Los datos se han obtenido del Kepler Eclipsing Binary Catalog en su tercera revisión a través de <http://keplerebs.villanova.edu/>.

En la figura 7 está representada la curva de luz donde pueden apreciarse a simple vista unos eclipses primarios, los más profundos, y otros eclipses secundarios, con menos caída del flujo. Dicho flujo está normalizado a la unidad y es la cantidad de fotones por segundo que se detectan. El tiempo está representado en días julianos. Los espacios vacíos se deben a cuestiones técnicas del satélite. El código de Python funciona como sigue.

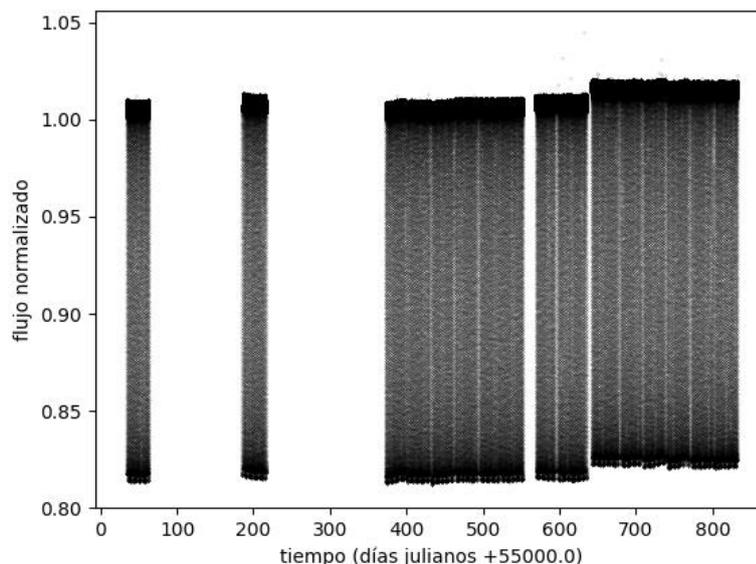


Figura 7. Curva de luz de la binaria KIC 10191056 observada por el satélite Kepler y catalogada en el Kepler Eclipsing Binary Catalog. Véanse los eclipses primarios (mas profundos) y los secundarios.

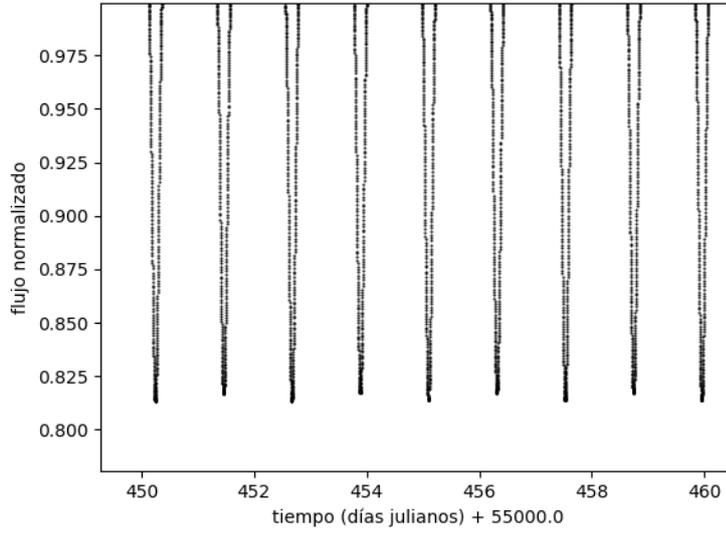


Figura 8. Zoom de la figura 7 donde se puede apreciar mejor la profundidad de los eclipses primarios y secundarios de la binaria KIC 10191056.

En primer lugar, se separan los eclipses (fig. 8) del resto de datos que no interesan de la curva mediante un bucle. Se definen varios parámetros como el umbral (valor del flujo a partir del cual se seleccionan los datos) y la localización del punto del bucle sobre la curva, es decir, si ese punto está dentro o fuera de un eclipse. Para que el bucle agrupe los datos de un mismo eclipse los parámetros del umbral y de la localización deben ser concordantes, es decir, que el flujo del punto esté por debajo del umbral definido. Después de haber seleccionado los eclipses se separan los primarios de los secundarios dependiendo de la profundidad que tengan. Los eclipses deben tener suficientes puntos, pero no demasiados, como para minimizar el error en la determinación de los tiempos a los que ocurren dichos eclipses.

Una vez agrupados los eclipses, interesa determinar los mínimos de éstos para obtener posteriormente las efemérides de la binaria. Debido al ruido presente en los datos observados, los mínimos pueden estar desplazados hacia la izquierda o hacia la derecha del pico por lo que se requiere de un ajuste a un polinomio de segundo grado para obtener de una forma más precisa el instante del eclipse. La forma del ajuste es una parábola de modo que $f = at^2 + bt + c$, donde t es el tiempo, f el flujo y los parámetros a , b y c se obtienen a partir de un ajuste de mínimos cuadrados y sus errores a partir de los valores de la diagonal de la matriz de covarianza del ajuste. El vértice de la parábola es aquel punto cuya pendiente es cero, es decir:

$$\frac{df}{dt} = 2a \cdot t_{min} + b = 0 \quad \rightarrow \quad t_{min} = -\frac{b}{2a}$$

Donde t_{min} corresponde al tiempo del mínimo del eclipse. Luego los mínimos se calculan simplemente con los coeficientes a y b que nos devuelve el ajuste.

El error en t_{min} se calcula a partir de la expresión:

$$\left(\frac{\Delta t_{min}}{t_{min}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \Delta t_{min} = \pm t_{min} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} \quad (14)$$

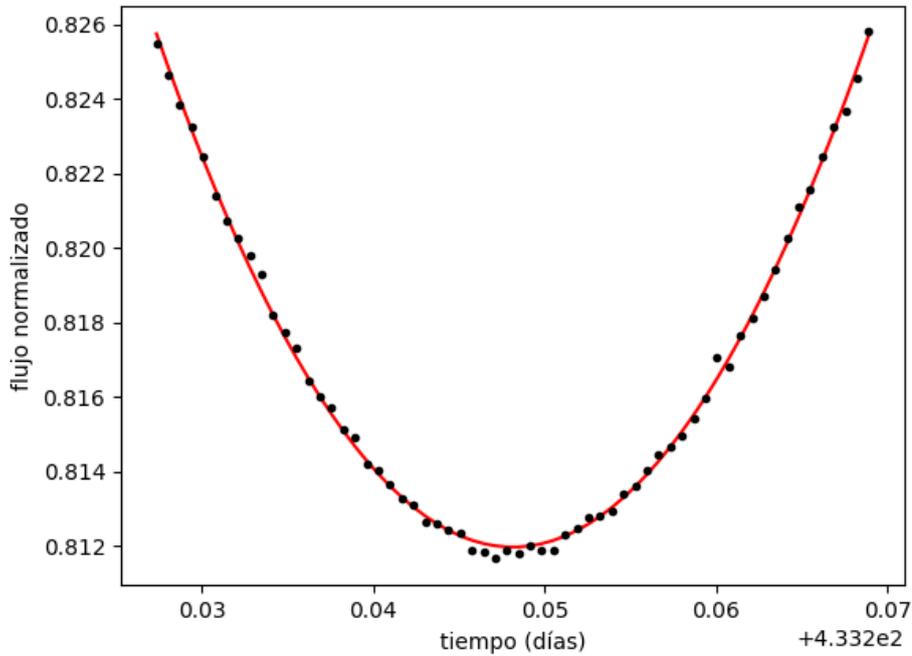


Figura 9. Ajuste a una parábola de un eclipse secundario de la curva de luz.

En la figura 9 queda representado uno de los ajustes parabólicos.

2.3 Determinación de las efemérides

2.3.1 Ajuste parabólico.

La efeméride de una binaria es el conocimiento de los tiempos en los que se han producido y se producirán los eclipses. Para conocer estos tiempos y poder predecir cuándo ocurrirán los tránsitos es necesario calcular el periodo orbital de la binaria y el tiempo en el que ocurre uno de los eclipses. En esta fase del código se realiza un ajuste lineal de los tiempos de los mínimos de los eclipses primarios y secundarios que se calcularon anteriormente frente al número de eclipse. Este número de eclipse se determina a partir de un valor aproximado para el periodo p : la diferencia entre dos t_{min} consecutivos que no tengan intervalos vacíos (sin datos) en la curva de luz. Teniendo este valor se ejecuta un bucle que recorra todos los valores de los tiempos de los mínimos en los primarios y secundarios. El primer t_{min} tendrá número de eclipse 0 y el resto se calcula en cada iteración i con la diferencia de los tiempos mínimos consecutivos y dividiéndolo entre el valor de referencia:

$$N_{ecl} = \text{int} \left(\frac{t_{min}[i] - t_{min}[i - 1]}{p} \right)$$

donde 'int' significa número entero. El ajuste tiene la forma:

$$t_{min} = P \cdot N_{ecl} + t_0$$

Donde la pendiente P es el periodo de la binaria y t_0 el tiempo del primer eclipse observado (fig. 10). Obviamente los periodos obtenidos con los eclipses primarios y secundarios deben ser iguales dentro de los márgenes de los errores.

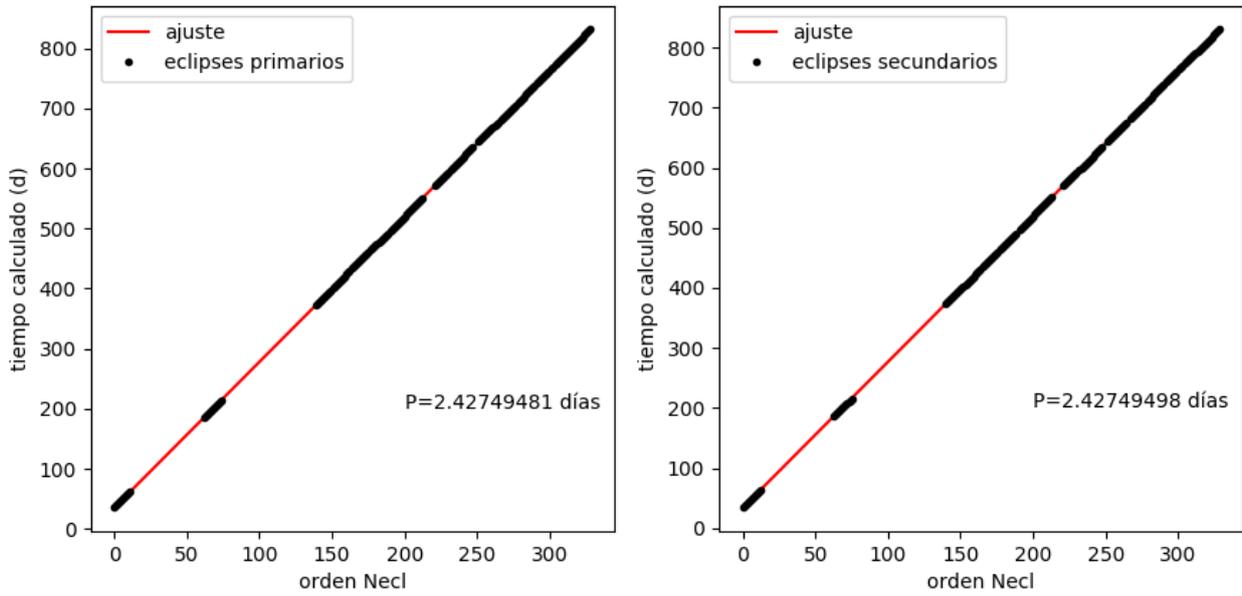


Figura 10. Ajuste lineal de los eclipses primarios y secundarios. El valor que presentan corresponden al periodo ajustado.

Para el ejemplo escogido se han obtenido los siguientes resultados:

	Periodo P (días)	$t_0 - 55000.0$ (días)
Eclipses primarios	$2.42749481 \pm 4.4e-08$	$35.139040 \pm 9.9e-06$
Eclipses secundarios	$2.42749498 \pm 4.5e-08$	$33.92656 \pm 1.0e-05$

Tabla 1. Periodos y tiempos de los eclipses de la binaria 10191056 mediante el ajuste de las parábolas.

2.3.2 Diferencial del flujo.

Para la determinación de los t_{min} de los eclipses se ha utilizado un segundo camino a efectos de comparación. Este consiste en calcular la diferencial de los puntos de la curva de luz de tal forma que:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

Donde Δt es constante puesto que los datos del flujo se han tomado a igual intervalo de tiempo (salvo en los que faltan datos), luego los nuevos puntos serán a $f_i - f_{i-1}$ frente a t_i .

En la figura 11 está representada la diferencial de uno de los eclipses primarios y la zona donde los puntos diferenciales están más próximos a 0. Con estos puntos se calculan los t_{min} realizando un ajuste lineal $m \cdot t + n = df$, y obteniendo el punto donde corta al eje $df=0$, es decir, $t_{min} = -\frac{n}{m}$, siendo m y n los coeficientes del ajuste.

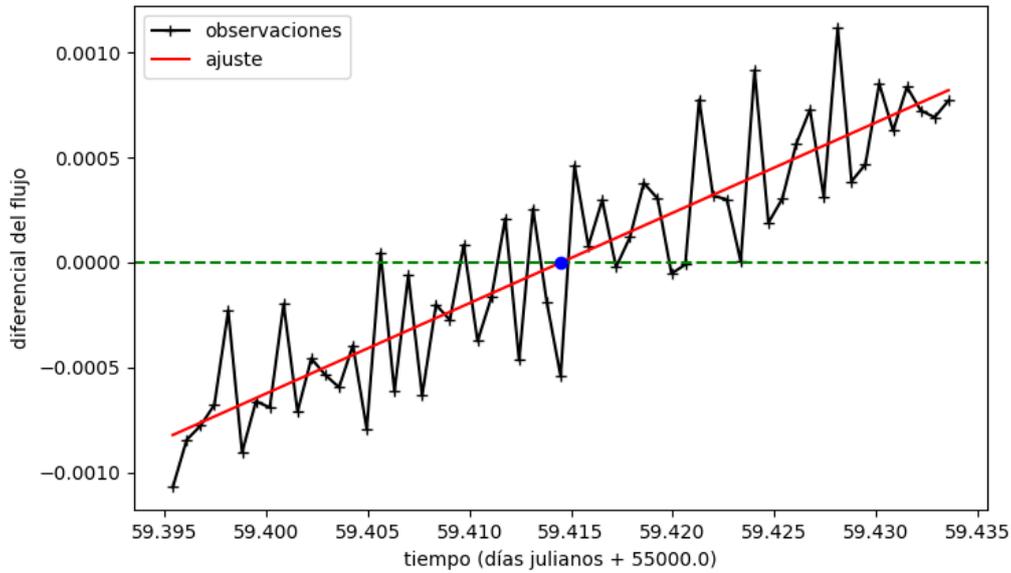


Figura 11. Zona del mínimo de un eclipse alrededor del eje $Y=0$ (línea discontinua horizontal verde) de la diferencial de un eclipse primario. El punto azul corresponde con el t_{min} observado determinado por el ajuste lineal.

A partir de aquí se sigue el mismo procedimiento que en el ajuste parabólico para determinar los periodos y el tiempo del primer eclipse, obteniendo los siguientes resultados:

	Periodo P (días)	$t_0 + 55000.0$ (días)
Eclipses primarios	$2.4274944 \pm 5.23e-07$	$35.1393 \pm 1.18e-04$
Eclipses secundarios	$2.4274941 \pm 6.80e-07$	$33.9270 \pm 1.53e-04$

Tabla 2. Periodos de los eclipses de la binaria 10191056 mediante la diferencial de los puntos de la curva de luz.

Mediante este método se obtiene una precisión 10 veces menor que con el método anterior, tanto para el periodo como para el t_0 .

2.4 Determinación del timing O-C

Para poder saber si hay alguna perturbación en la órbita de la binaria debido a un tercer cuerpo es necesario analizar el timing del residuo de los tiempos observados y calculados. Este residuo no es más que la diferencia entre los tiempos de los eclipses observados menos los calculados. Los eclipses observados son los t_{min}^{obs} obtenidos en la fase anterior, ya sea mediante el ajuste de parábolas o mediante la diferencial de los puntos. Los eclipses calculados se determinan mediante los valores obtenidos del periodo y del t_0 del primer eclipse usando la expresión $t_{min}^{cal} = P \cdot N_{ecl} + t_0$.

Teniendo estos dos arrays de tiempos, se hace una representación gráfica de los observados menos los calculados (O-C) frente a los observados. Si en esta representación se puede advertir alguna señal periódica significaría que algún cuerpo está influyendo en la órbita de la binaria alrededor del centro de masa.

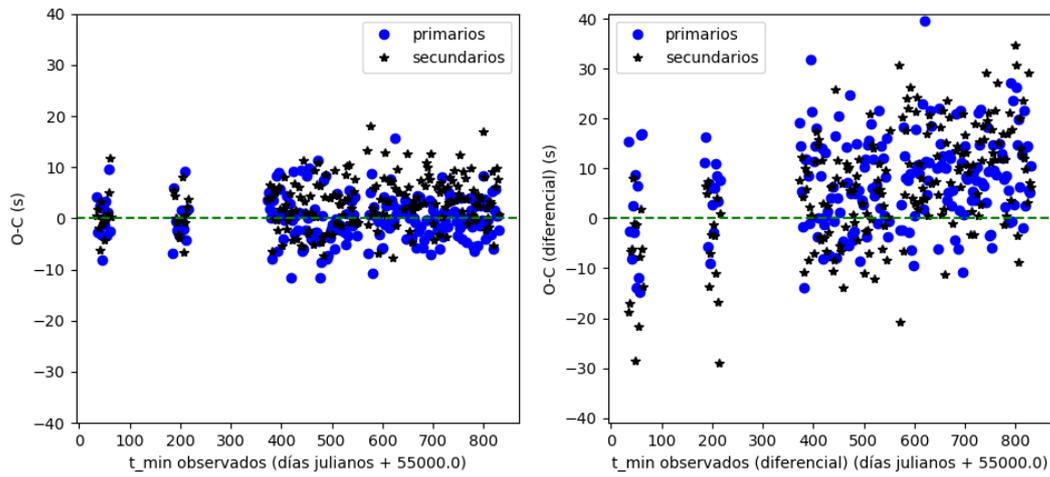


Figura 12. A la izquierda el residuo del O-C por el método del ajuste parabólico y a la derecha el residuo del O-C por el método de la diferencial del flujo. Los puntos azules corresponden a los eclipses primarios y los negros a los secundarios. Binaria 10191056.

En la figura 12 están representados los residuos del ejemplo tratado con el método de las parábolas y con el método de la diferencial. En ambas no puede observarse a simple vista ninguna variación periódica del residuo O-C por lo que "a priori" parece que no hay indicios de un tercer cuerpo.

La dispersión del O-C del ajuste parabólico para los eclipses primarios y secundarios es de $\sigma_{1, O-C}^{aj.parab} = 4.48 \text{ s}$ y $\sigma_{2, O-C}^{aj.parab} = 4.67 \text{ s}$. Por otro lado, la dispersión de la diferencial del flujo es de $\sigma_{1, O-C}^{dif} = 53.18 \text{ s}$ y $\sigma_{2, O-C}^{dif} = 69.88 \text{ s}$, por lo que el primer método ofrece mejores resultados en términos de la amplitud del O-C.

2.4.1 Buscando regularidades en el residuo O-C: aplicación de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una señal cualquiera muestra cómo se comporta dicha señal en el dominio de las frecuencias. De esta forma, si en la representación del residuo de O-C hubiera alguna variación periódica, con la transformada de Fourier de señales discretas (FFT en adelante) se puede saber la frecuencia con la que varía y así determinar el periodo de la órbita del tercer cuerpo que pudiera provocar esta variación.

El array de las frecuencias se han determinado simplemente multiplicando un array con los valores enteros de 0 a $n/2$ por $\frac{1}{p \cdot n}$, siendo p el periodo calculado anteriormente y n la longitud del array del O-C. Puesto que la FFT se da para frecuencias positivas y negativas, en la representación se han escogido solo las positivas, es decir la primera mitad del array de la FFT, por este motivo la longitud del array de las frecuencias es de $n/2$. Con los valores (complejos en general) que devuelve la transformada de Fourier, se calcula el módulo de ellos y se obtiene el espectro de amplitud, con unidades de segundos ya que O-C está en segundos. Para obtener el espectro de energía basta con elevar al cuadrado estas amplitudes.

Para el ejemplo de la binaria, en la figura 13 queda representado el espectro de amplitudes de la FFT del O-C de los eclipses primarios y secundarios con el método de las parábolas y con el método de la diferencial. En un primer momento se seleccionó solamente el intervalo donde hay más concentración de puntos, ya que hay varios espacios vacíos y la FFT no lo tiene en cuenta, puesto que la calcularía considerando los datos igualmente espaciados.

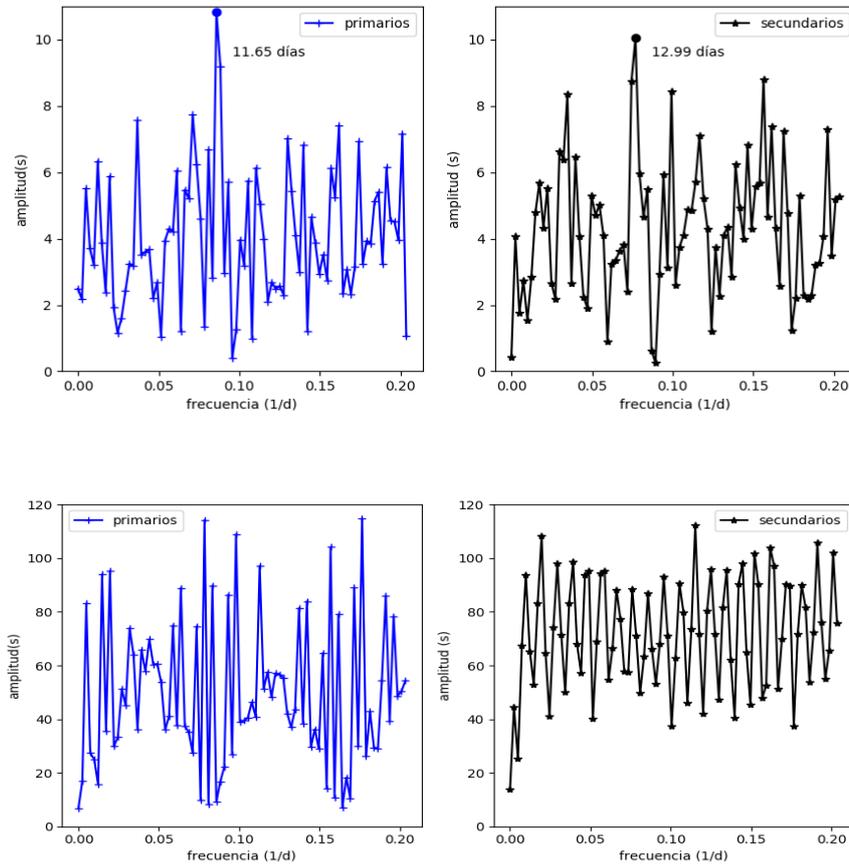


Figura 13. Arriba la FFT de los eclipses primarios (azul) y de los secundarios (negro) de los residuos del O-C obtenidos por el método de ajuste parabólico. Los puntos indican el periodo de la señal a la frecuencia del pico. Abajo la FFT de los eclipses primarios y secundarios por el método de la diferencial del flujo. Binaria KIC 10191056.

Sin embargo no había diferencia alguna en la gráfica ya que eran pocos datos, por lo que se dejó la representación de la amplitud de la FFT de todos los puntos. En este caso se aprecia una señal con el primer método en los eclipses primarios con una frecuencia de $0.086 d^{-1}$ (11.65 días) y una amplitud 10.4 . Para los eclipses secundarios la señal se da a una frecuencia de $0.077 d^{-1}$ (12.99 días) y con una amplitud de 10.1 segundos.

2.5 Discusión de resultados.

Una vez calculados los periodos y los tiempos del primer eclipse con los dos métodos propuestos se puede observar que el del ajuste parabólico tiene un error diez veces más pequeño que el método de la diferencial del flujo, por tanto sería el más conveniente de usar para el análisis de binarias en futuros proyectos.

Al comparar las representaciones del residuo del O-C resulta que la del diferencial tiene bastante más dispersión (unas 15 veces más) que la otra y tampoco puede observarse a simple vista ninguna señal, luego este método no aporta nada nuevo al análisis de los eclipses. La amplitud del O-C del ajuste parabólico es de ~ 10 s que, comparado con el periodo en segundos: 209735.48, corresponde a un 0.00476 %. Por último, después de analizar la transformada de Fourier del O-C se obtuvo una señal en los eclipses primarios y secundarios aproximadamente con la misma frecuencia y amplitud con el primer método. Sin embargo, con la FFT del método de la diferencial no puede observarse esta señal puesto que hay mayor ruido, luego el significado de esos picos es discutible y habría que realizar un análisis más profundo.

3. Análisis de la binaria KIC 9637299.

The binary KIC 9637299 has been analyzed with the parabolic adjustment method, obtaining a period of 1.88 days. The dispersion of the O-C in the primary eclipses is of the same order as in the secondary ones. On the other hand, in the FFT analysis of the O-C residue, a prominent peak is observed in the secondary eclipses which is not clearly seen in the primary ones due to noise. However, other peaks seem to be observed at the same frequency but different amplitudes in both primary and secondary eclipses.

En la figura 14 está representada la curva de luz "real" de la binaria KIC 9637299. Se ha escogido esta binaria por tener posibilidades de albergar algún exoplaneta tras un primer análisis mediante este mismo método [13].

La fase 0.0 corresponde a la conjunción inferior, o dicho de otra forma, cuando el cuerpo que transita la estrella está más cerca del observador. Luego cuando está más alejado la fase será 0.5.

Para el análisis de esta binaria mediante el método del ajuste parabólico de los eclipses, se han obtenido los siguientes resultados para el periodo y el tiempo del primer eclipse:

	Periodo P (días)	$t_0 - 55000.0$ (días)
Eclipses primarios	$1.8824402 \pm 5.17e-07$	$466.46853 \pm 6.05e-05$
Eclipses secundarios	$1.8824411 \pm 6.44e-07$	$463.64491 \pm 7.59e-05$

En la figura 15 puede observarse el residuo del O-C y parece haber algún tipo de señal sinusoidal. La dispersión del residuo de los eclipses primarios y secundarios es de $\sigma_{1, O-C}^{aj.parab} = 33.58$ s y $\sigma_{2, O-C}^{aj.parab} = 42.27$ s. Para ver más claramente si hay algún tipo de señal se ha representado la FFT (fig. 16) del O-C de los eclipses primarios y secundarios.

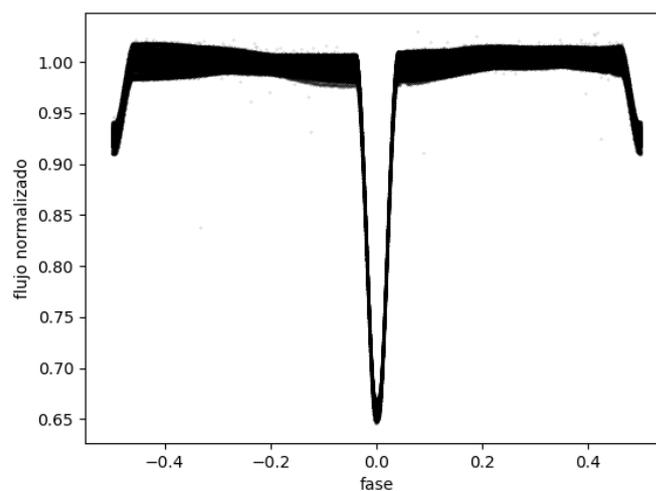


Figura 14. Curva de luz de la binaria KIC 9637299 obtenida del Kepler Eclipsing Binary Catalog.

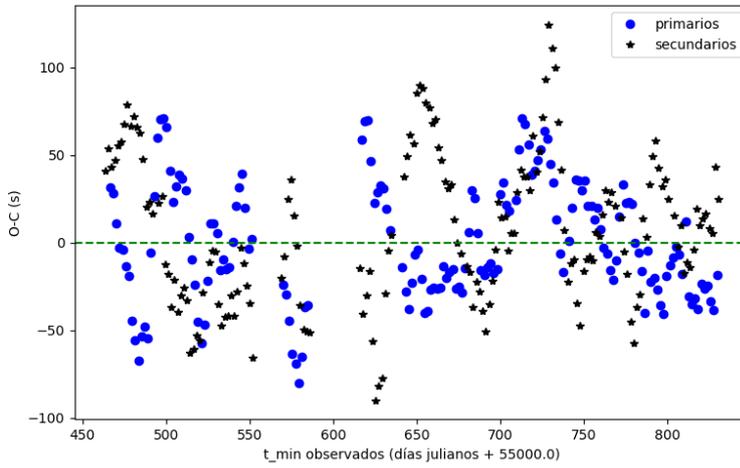


Figura 15. Residuo del O-C mediante el método del ajuste parabólico de los eclipses primarios y secundarios. Binaria KIC 9637299.

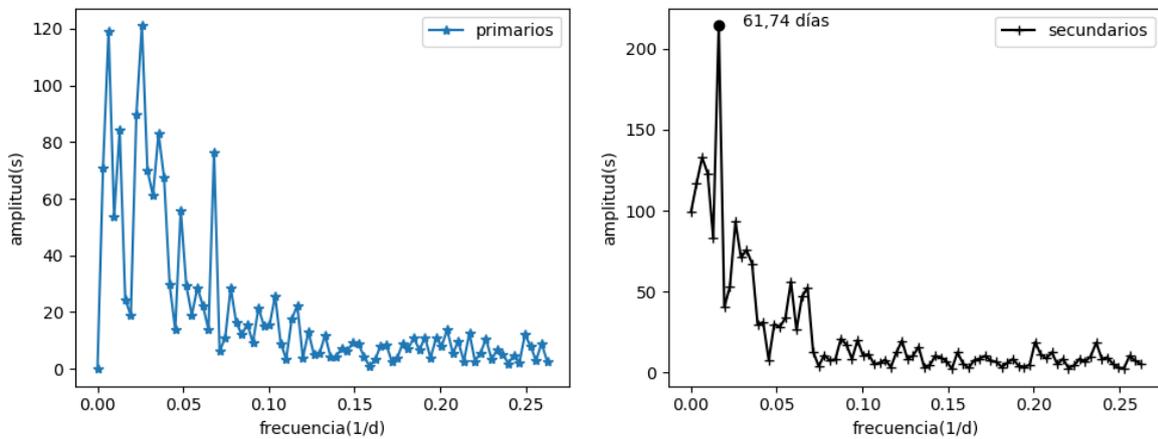


Figura 16. Amplitudes de la FFT para los eclipses primarios y secundarios de la binaria KIC 9637299 con el método del ajuste parabólico. El punto representa el periodo de la señal a la que le corresponde el pico.

En este caso se puede observar un pico bastante prominente en la gráfica de los eclipses secundarios. Esta señal tiene un periodo de ~ 61.74 días con una amplitud de ~ 220 s.

Debería poder observarse de igual forma en los eclipses primarios pero debido al ruido y a su poca amplitud (unos 25 segundos) no puede apreciarse. Parece haber otro pico en los secundarios a una frecuencia de ~ 0.01 s (100 días) con una amplitud de ~ 130 segundos y en los primarios con una amplitud de ~ 85 s.

Con el método de la diferencial del flujo se obtiene una dispersión del O-C (fig.17) para los eclipses primarios y secundarios de $\sigma_{1, o-c}^{dif} = 53.03$ s y $\sigma_{2, o-c}^{dif} = 94.31$ s. Como era de esperar la dispersión es mayor con este método que con el anterior. La FFT de la diferencial (fig.18) da un pico en los eclipses secundarios casi a la misma frecuencia que en los secundarios del primer método con un periodo de 61.77 días y una amplitud de ~ 255 s. Sin embargo, en los primarios sigue sin poder observarse claramente dicho pico. Con respecto a la segunda señal con frecuencia ~ 0.01 s (100 días), se observa un pico en los secundarios y primarios con aproximadamente la misma amplitud, pero no sobresalen por encima del ruido por lo que no se puede concretar su significado.

No obstante, aunque hay indicios, este análisis de la FFT no es suficiente para pensar que hay un tercer cuerpo orbitando la binaria, luego sería interesante seguir analizándola en trabajos futuros.

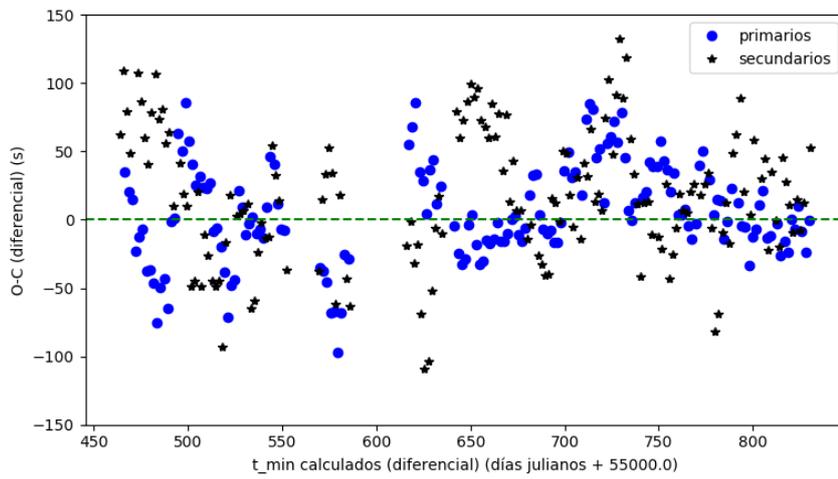


Figura 17. Representación del O-C mediante el método de la diferencial del flujo.

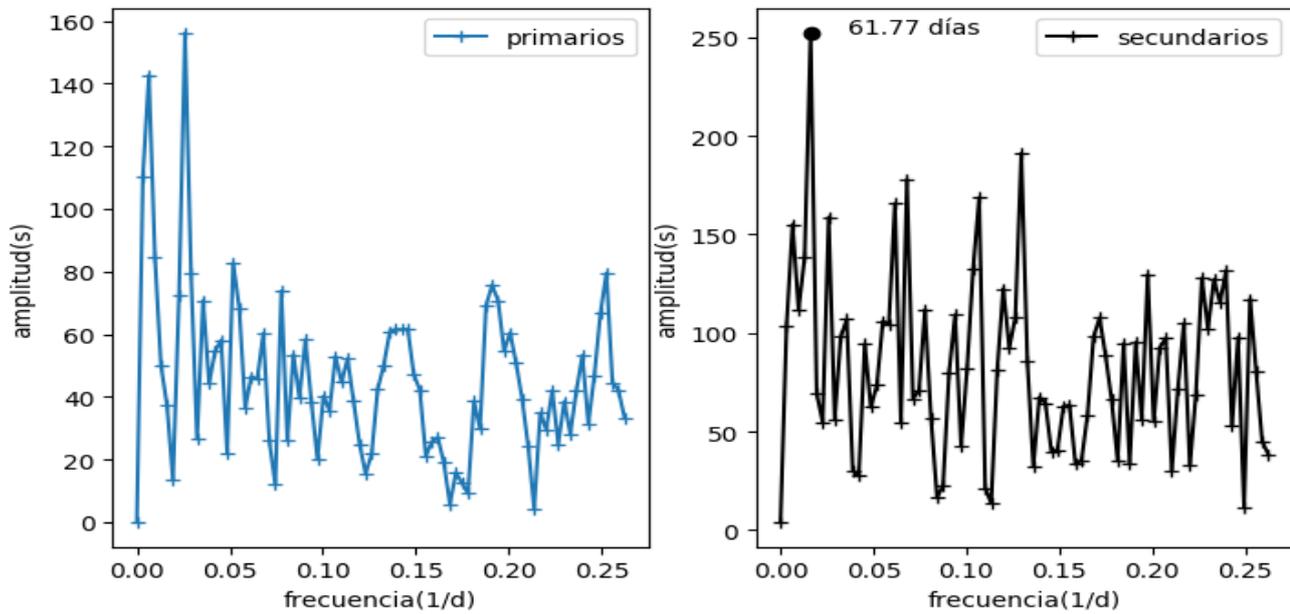


Figura 18. Amplitudes del módulo de la FFT de los eclipses primarios (izquierda) y de los eclipses secundarios (derecha) obtenidos mediante el método de la diferencial del flujo de la binaria KIC 9637299.

4. Conclusiones y propuesta de mejora.

Parabolic adjustment method is more convenient to use since it is more accurate than flow differential method. In the first binary there is no agreement between the results of the amplitude of the FFT obtained by one method and another. However, for the second binary, one signal have been found in the FFT in the secondary eclipses with both methods, but a deeper analysis and other complementary techniques are required to confirm the existence of a third body orbiting this binary .

CONCLUSIONES:

1. Como primer análisis de las curvas de luz pueden utilizarse los métodos descritos en este trabajo, más concretamente el ajuste parabólico, pero no son suficientes para determinar claramente la evidencia (o no evidencia) de un tercer cuerpo orbitando las binarias.
2. El ajuste parabólico de los eclipses es muy susceptible a pequeños cambios del código informático como la elección del número de puntos que se desea ajustar. Aún así, eligiendo correctamente este número se consigue una alta precisión en el cálculo de los periodos orbitales.
3. Con respecto a la primera binaria, aún observando un pico en los eclipses primarios y secundarios, se podría pensar que no hay indicios de un tercer cuerpo orbitándola puesto que con el segundo método no puede observarse dicho pico.
4. En el segundo ejemplo, para la binaria KIC 9637299, parece haber indicios de un tercer cuerpo, tal vez un exoplaneta, puesto que hay un pico predominante que coincide aproximadamente en frecuencia y amplitud de la señal en los eclipses secundarios de ambos métodos.

PROPUESTA DE MEJORA:

Puesto que no existe concordancia de los resultados de la FFT de los eclipses primarios con los secundarios en la binaria KIC 9637299, se necesita de un análisis más profundo y de otros métodos de detección complementarios, así como el método de la velocidad radial, para poder confirmar la existencia de un exoplaneta orbitando este sistema.

5. Bibliografía.

- [1] NEWSAM A., COULBY M., HABERGHAM-MAWSON S., KEEN A., LEIGH C. & LEWIS F. *The history of exoplanets* [en línea]. [Fecha de consulta: 21 de Julio de 2019]. Disponible en internet: <https://www.schoolsobservatory.org/discover/projects/exoplanets/history>
- [2] WOLSZCZAN A. & FRAIL D. A. A planetary system around the millisecond pulsar PSR B1257+12, *Nature*, 1992, Volumen 355, p. 145-147.
- [3] INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION. *Final results of NameExoWorlds public vote released* [en línea]. [Fecha de consulta: 21 de Julio de 2019]. Disponible en internet: <https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau1514/>
- [4] MAYOR M. & QUELOZ D. A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 1995, Volumen 378, p.355-359.
- [5] BUTLER R. P. & MARCY G. W. A planet orbiting 47 Ursae Majoris, *The Astrophysical Journal*, 1996, nº464, p.153-156.
- [6] ENCICLOPEDIA CUBANA. *Coronógrafo* [en línea]. [Fecha de consulta: 26 de Julio de 2019]. Disponible en internet: https://www.ecured.cu/Coron%C3%B3grafo#Detecci.C3.B3n_de_exoplanetas/
- [7] EXOPLANETS EXPLORATION. *Direct imaging* [en línea]. [Fecha de consulta: 26 de Julio de 2019]. Disponible en internet: <https://exoplanets.nasa.gov/alien-worlds/ways-to-find-a-planet/#/3>
- [8] ARMITAGE P.J. *Astrophysics of planet formation*. 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [9] TAGLIAFERRO T. A.. *Lentes gravitacionales fuertes: análisis y detección*. Trabajo especial de Licenciatura en Astronomía, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina ,2015.
- [10] SALAS P. & SOLÍS M.A.. *Estrellas de neutrones*, Revista mexicana de Física, 2006, Volumen 52 nº1, p.37-46.
- [11] HASWELL A. C. *Transiting exoplanets*, 1ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [12] *Problema de los dos cuerpos* [en línea]. [Fecha de consulta: 12 de Septiembre de 2019]. Disponible en internet: https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_dos_cuerpos
- [13] ARTEAGA RÍOS D.J. *Búsqueda de planetas en sistemas binario*. Trabajo fin de Máster, Universidad de La Laguna, España, 2013.