



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Oscar Andrés Díaz Sánchez

Fundamentos de la homología persistente y su código de barras asociado

Foundations of persistence homology and its
associated barcode

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2019

DIRIGIDO POR
José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines
Departamento de Matemáticas,
Estadística e I.O.
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

El Análisis Topológico de Datos es un campo reciente de la matemática aplicada cuyo objetivo es determinar, mediante técnicas topológicas, propiedades cualitativas de conjuntos de datos. En este trabajo se desarrollan los fundamentos topológicos y algebraicos de la Homología Persistente, una de las herramientas principales del Análisis Topológico de Datos. La homología persistente mide la evolución de las características topológicas de una filtración de complejos simpliciales. Dicha evolución puede ser representada mediante una colección de segmentos, conformando el denominado código de barras. A partir del código de barras se puede decidir qué datos pueden ser considerados como ruido y cuáles son fundamentales. En la última parte de la memoria se proporciona un algoritmo que calcula el código de barras de una filtración de complejos simpliciales de forma eficiente.

Palabras clave: *Análisis Topológico de Datos – Complejo Simplicial – Filtración – Homología Persistente – Código de Barras*

Abstract

Topological Data Analysis is a recent field in applied mathematics whose goal is to determine –through topological techniques– qualitative properties of data sets. This memoir expands on the topologic and algebraic foundations of Persistent Homology – one of the principal tools of Topological Data Analysis–. Persistent Homology measures the evolution of topological features of a filtration of a simplicial complex. This evolution can be represented by a collection of segments, forming the so-called barcode. From the barcode it is possible to decide which features can be considered as noise and which ones are essential. The last part of the memoir provides an algorithm that calculates the barcode of a simplicial complex efficiently.

Keywords: *Topological Data Analysis – Simplicial Complex – Filtration – Persistent Homology – Barcode*

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	V
1. Complejos simpliciales en el Análisis Topológico de Datos ...	1
1.1. Complejos simpliciales geométricos	1
1.2. Complejos simpliciales abstractos	3
1.3. Complejos simpliciales notables para el Análisis Topológico de Datos	5
1.3.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips	6
1.3.2. Filtraciones en un complejo simplicial	7
2. R-módulos de homología simplicial	9
2.1. Generalidades sobre R -módulos	9
2.2. Teorema de Estructura sobre dominio de ideales principales	11
2.3. Algoritmo de cálculo de la homología en complejos de cadenas ..	17
2.4. Homología simplicial	22
3. Homología Persistente	26
3.1. Homología Persistente	26
3.2. Módulos de Persistencia	30
3.3. R -módulos graduados	31
3.4. Relación entre Módulos Graduados y Módulos de Persistencia ...	33
3.5. Códigos de barras asociado a un módulo de persistencia sobre un cuerpo	35
3.6. Algoritmo de cálculo para los códigos de barras	40
Bibliografía	51
Poster	53

Introducción

En la actualidad, debido a las mejoras de la computación y las nuevas técnicas experimentales, se está generando de forma constante una cantidad masiva de datos. Dichos datos son mucho más complejos y por lo general de mayor dimensión que en el pasado, lo que dificulta tanto su tratamiento como su visualización. Para este último fin, una de las técnicas usadas más recientes es el Análisis Topológico de Datos (o ATD, para abreviar), la cual permite extraer información a partir de conjuntos de datos métricos, también denominados nubes de puntos. El objetivo del ATD es determinar propiedades cualitativas o estructuras a través del estudio topológico de su forma. Una de las herramientas principales del ATD es la Homología Persistente, introducida en el año 2002 por Edelsbrunner, Letscher y Zomorodian [7] y poco más tarde, en el año 2005, por el trabajo de Zomorodian y Carlsson [14]. La Homología Persistente está siendo utilizada en diversos campos interdisciplinarios como, por ejemplo, el estudio del cáncer de mama [13], el estudio de la actividad en la corteza visual en primates [3] o el procesamiento de imágenes [4]. La idea detrás de la Homología Persistente se basa en la construcción de una sucesión anidada de complejos simpliciales, denominada filtración, cuyo conjunto de vértices es la nube de datos original. Concretamente, mide cómo evoluciona la forma (desde el punto de vista topológico) de los complejos simpliciales a lo largo de la filtración mediante la homología simplicial, una poderosa herramienta usada en Topología Algebraica. Esta herramienta detecta las etapas en la que (la clase de) un ciclo nace y muere. Los ciclos que duren poco podrán ser considerado ruido y mientras más persistan en la filtración mejor representarán ciertas propiedades de la nube de puntos. La forma original de representar gráficamente la Homología Persistente es mediante los Diagramas de Persistencia. No obstante, la más usada y extendida está determinada por los Códigos de Barras, que se basan en representar la persistencia de los ciclos mediante segmentos. En su trabajo, Zomorodian y Carlsson dan un algoritmo para calcular los diagramas por Códigos de Barras de forma eficiente.

En esta memoria hemos realizado un estudio de los fundamentos topológicos y algebraicos en los que está basada la Homología Persistente, así como la de su Código de Barras asociado. Para este estudio nos hemos basado en los trabajos antes citados de Edelsbrunner, Letscher, Zomorodian y Carlsson.

En el primer capítulo de la memoria, se hará una introducción de las cuestiones más importantes de los complejos simpliciales adaptado al Análisis Topológico de Datos. En particular, haremos un breve análisis de los complejos de Čech y de los complejos de Vietoris-Rips. Finalmente, se verá la noción de filtración de un complejo simplicial. En el segundo capítulo, revisaremos ciertas cuestiones de la homología simplicial. Generalmente la homología simplicial se construye usando grupos abelianos, sin embargo, usaremos coeficientes en un anillo R , obteniéndose R -módulos. Por consiguiente empezamos viendo generali-

dades sobre R -módulos. Es de destacar el Teorema de Estructura para R -módulos finitamente generados cuando R es un dominio de ideales principales. Para la demostración de dicho teorema será fundamental la noción de Forma Normal de Smith de una matriz con coeficientes en el dicho anillo. Además, se proporciona un algoritmo de cálculo para dicha forma cuando el anillo sea un dominio euclídeo. Se finaliza el capítulo comprobando que la homología simplicial es algorítmicamente computable. El tercer y último capítulo constituye el corazón de la memoria. En él se introducirá la Homología Persistente y, después de ver sus propiedades más relevantes, veremos la construcción de su Código de Barras asociado y la forma de representarla. La Homología Persistente viene asociada a una filtración de complejos simpliciales originada por una nube de puntos. A su vez dicha filtración de complejos simpliciales determina una sucesión de R -módulos de homología junto con homomorfismos de transición que los conectan. En esta construcción algebraica se detectan los momentos de la filtración en que los elementos de la homología nacen y mueren. Son estos intervalos, comenzando con el nacimiento y acabando con la muerte de cada elemento, los que conforman el Código de Barras de la filtración y, por ende, de la nube de datos original. Con el fin de dar un algoritmo de cálculo del Código de Barras, se presenta a continuación una generalización de la construcción anterior, los módulos de persistencia (de tipo finitamente generado sobre un anillo R) y se ve que son, en cierto sentido, equivalentes a los $R[t]$ -módulos graduados (finitamente generados), donde $R[t]$ denota el anillo de polinomios en una variable t y con coeficientes en R . Esta equivalencia vendrá dada por el Teorema de Representación de Zomorodian y Carlsson. Haciendo uso de una versión graduada del Teorema de Estructura obtendremos el Código de Barras para cualquier módulo de persistencia de tipo finitamente generado. Finalizamos la memoria presentando un algoritmo de cálculo del Código de Barras, establecido por Zomorodian y Carlsson.

Complejos simpliciales en el Análisis Topológico de Datos

En este capítulo revisaremos las nociones básicas y necesarias de los complejos simpliciales. Veremos también dos de los complejos simpliciales más usados en el Análisis Topológico de Datos: el Complejo de Čech y el Complejo de Vietoris-Rips. Con estos se originarán filtraciones de complejos simpliciales importantes para la determinación de la Homología Persistente. Puesto que ciertas nociones de este capítulo están ya vistas en el Grado de Matemáticas, esencialmente en la asignatura de *Topología Algebraica y Aplicaciones*, solo demostraremos aquellas que no estén recogidas dentro del mismo o las que se vean con más profundidad. Para más detalles se recomienda el libro de Munkres [12] y el de Ayala, Domínguez y Quintero [1].

1.1. Complejos simpliciales geométricos

Comenzamos introduciendo los complejos simpliciales desde un punto de vista geométrico. Una primera noción viene dada por los símlices, que podría decirse que son los “*bloques de construcción*” del complejo simplicial. Instintivamente hablando son puntos, segmentos, triángulos, tetraedros y sus análogos de dimensión superior. Diremos que un conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$ de puntos en \mathbb{R}^N es **geoméricamente independiente** si los vectores $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ son linealmente independientes. Un **n -símplice** en \mathbb{R}^N generado por $\{a_0, \dots, a_n\}$, denotado por $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$, es la envolvente convexa del conjunto $\{a_0, \dots, a_n\}$, es decir, σ es el conjunto de puntos de \mathbb{R}^N de la forma:

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \text{ para todo } i = 0, \dots, n$$

Los puntos a_0, \dots, a_n se denominan **vértices** de σ , y a n se le denomina **dimensión** del símplex σ , denotado como $\dim(\sigma) = n$. Todo símplex τ generado por un subconjunto no vacío de $\{a_0, \dots, a_n\}$ se dice que es una **cara** de σ , y se denota por $\tau \leq \sigma$. En particular, las caras que sean distintas a σ se denominan **caras propias** y se usa la notación $\tau < \sigma$.

Como se comentó, los símlices construyen a los complejos simpliciales. Estos no son más que una familia de símlices que cumplen unas ciertas condiciones de compatibilidad:

Definición 1.1. Un **complejo simplicial geométrico** K en \mathbb{R}^N consiste en una colección finita de **símplices** en \mathbb{R}^N que cumplen dos condiciones:

- i. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.
- ii. Dados $\sigma, \sigma' \in K$ entonces $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ o bien $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ y $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$.

La **dimensión** de K se define como el máximo de las dimensiones de todos los **símplices** que componen el complejo. Un **subcomplejo simplicial** de K (o simplemente denominado subcomplejo) consiste en un complejo simplicial L en el que todo **símplice** de L es **símplice** de K . Se usará la notación $L \subseteq K$ para decir que L es subcomplejo de K . Un subcomplejo relevante es el **p -esqueleto**, denotado $K^{(p)}$. El p -esqueleto está compuesto por todos los **símplices** de K de dimensión menor o igual que p . Obsérvese que $K^{(0)}$ está compuesto por todos los **vértices** de K .

Observación 1.2. La noción de complejo simplicial se puede extender al caso infinito. Se puede considerar en la definición un número infinito de **símplices**, incluso pudiendo aumentar indefinidamente la dimensión de estos. Además, se hace la distinción de si el complejo simplicial es finito o no. Hay toda una teoría que considerar, la cual presenta sus diferencias al caso finito. No obstante, en esta memoria solamente consideraremos complejos simpliciales con un número finito de **símplices**, denominándose simplemente complejos simpliciales, sin hacer uso del adjetivo “finitos”.

El **poliedro** asociado a K , definido como $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$, es un espacio topológico con la topología inducida por la usual de \mathbb{R}^N . Además, es un espacio compacto y de Hausdorff. Los complejos simpliciales geométricos se suelen representar mediante su poliedro asociado, pues es mucho más fácil que considerar toda la lista de **símplices** por separado. Diremos que un espacio topológico X es **triangulable** si existen un complejo simplicial K y un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$. Entonces se dice que el par (K, h) es una **triangulación** de X .

Ejemplo 1.3. El siguiente complejo simplicial geométrico en \mathbb{R}^2

$$K = \{ \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_4 \rangle, \langle a_5 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_0, a_5 \rangle, \langle a_0, a_4 \rangle, \\ \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle, \langle a_2, a_5 \rangle, \langle a_3, a_4 \rangle, \langle a_3, a_5 \rangle, \langle a_0, a_2 a_5 \rangle, \langle a_2, a_3 a_5 \rangle \}$$

donde $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (-0.5, 0.5)$, $a_2 = (0, 1)$, $a_3 = (1, 1)$, $a_4 = (1, 0)$ y $a_5 = (0.5, 0.5)$, queda representado en la Figura 1.1

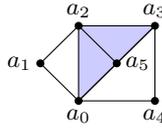


Figura 1.1. Representación gráfica del complejo simplicial K en \mathbb{R}^2 mediante su poliedro $|K|$.

Una forma de comparar dos complejos simpliciales K y L es mediante las denominadas aplicaciones simpliciales. Una **aplicación simplicial** $\varphi : K \rightarrow L$ no es más que una aplicación $\varphi : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$ de tal forma que para cada $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in K$, los vértices $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_n)$ pertenecen a un mismo símplex de L . Es inmediato comprobar que la identidad en K , $1_K : K \rightarrow K$, determinada por la identidad en $K^{(0)}$, es una aplicación simplicial. Por otro lado, dadas dos aplicaciones simpliciales $\varphi : K \rightarrow L$ y $\psi : L \rightarrow M$, su composición, $\psi \circ \varphi$, viene dada por la composición de sus correspondientes aplicaciones entre vértices, y es una aplicación simplicial. Un **isomorfismo simplicial** es una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ en la que existe otra aplicación simplicial $\psi : L \rightarrow K$ verificando $\psi \circ \varphi = 1_K$ y $\varphi \circ \psi = 1_L$. En este caso se dice que K y L son **simplicialmente isomorfos**.

Toda aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ induce una aplicación continua $|\varphi| : |K| \rightarrow |L|$. En efecto, dado $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \in \sigma$ con $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in K$, se define $|\varphi|(x) := \sum_{i=0}^n t_i \varphi(a_i)$.

No es difícil comprobar que $|1_K| = 1_{|K|}$ y si $\varphi : K \rightarrow L$ y $\psi : L \rightarrow M$ son aplicaciones simpliciales entonces $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$. Teniendo en cuenta esto, es fácil de ver que si K y L son complejos simpliciales isomorfos entonces $|K|$ y $|L|$ son espacios topológicos homeomorfos.

1.2. Complejos simpliciales abstractos

Todo lo visto anteriormente se puede extraer del ámbito geométrico y llevarlo a uno de naturaleza abstracta combinatorial. Será mucho más fácil y cómodo de manejar y además de ser más práctico. En este nuevo ámbito definiremos los denominados complejos simpliciales abstractos, los cuales veremos que en realidad son equivalentes a los complejos simpliciales geométricos.

Definición 1.4. Un **complejo simplicial abstracto** \mathcal{K} consiste en un conjunto finito $V_{\mathcal{K}}$ junto a una colección $S_{\mathcal{K}}$ de subconjuntos no vacíos de $V_{\mathcal{K}}$ tal que cumplen:

- i. $\{v\} \in S_{\mathcal{K}}$, para todo $v \in V_{\mathcal{K}}$
- ii. Si $\sigma \in S_{\mathcal{K}}$ y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in S_{\mathcal{K}}$

A $V_{\mathcal{K}}$ se le denomina conjunto de vértices de \mathcal{K} y a $S_{\mathcal{K}}$ conjunto de simplices. Para un simple $\sigma \in S_{\mathcal{K}}$ se define su **dimensión** como $\dim(\sigma) := \text{card}(\sigma) - 1$. Por otro lado, la dimensión del complejo simplicial se define como $\dim(\mathcal{K}) := \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{K}\}$. Un **subcomplejo** \mathcal{L} de \mathcal{K} es un complejo simplicial abstracto para el que todo simple de \mathcal{L} es simple de \mathcal{K} .

Observación 1.5. Al igual que con los complejos simpliciales geométricos, existe una noción más general de complejo simplicial abstracto donde el número de simplices puede ser infinito (por tanto, también el de vértices). Esta memoria trabajaremos con el caso finito, es decir, con la Definición 1.4. Además, por simplicidad se identificará $\mathcal{K} \equiv S_{\mathcal{K}}$ y $v \equiv \{v\}$. Así, $\sigma \in K$ significa $\sigma \in S_{\mathcal{K}}$.

La noción de **aplicación simplicial** también está presente en los complejos abstractos y se define de forma análoga al caso geométrico. En efecto, una aplicación simplicial abstracta $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ consiste en una aplicación $\varphi : V_{\mathcal{K}} \rightarrow V_{\mathcal{L}}$ tal que para cada $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\} \in K$, los vértices $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_n)$ pertenecen a un mismo simple de \mathcal{L} .

Es lógico plantearse cómo se relacionan los dos tipos de complejos simpliciales. A todo complejo simplicial geométrico K se le puede asociar un complejo simplicial abstracto $\mathcal{A}(K)$, denominado **esquema** de K . El conjunto de vértices de $\mathcal{A}(K)$ es $K^{(0)}$ y $\{a_0, \dots, a_n\} \in \mathcal{A}(K)$ si y solo si $\sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle \in K$. Por otro lado, una **realización geométrica** de un complejo simplicial abstracto \mathcal{K} es un complejo simplicial geométrico K en \mathbb{R}^N para algún N , de tal manera que $\mathcal{A}(K)$ y \mathcal{K} son simplicialmente isomorfos. Esta construcción siempre existe:

Proposición 1.6. *Todo complejo simplicial abstracto \mathcal{K} admite una realización geométrica K . Además, dos complejos simpliciales geométricos K y L son simplicialmente isomorfos si y solo si $\mathcal{A}(K)$ y $\mathcal{A}(L)$ son también simplicialmente isomorfos.*

Demostración. Sea \mathcal{K} un complejo simplicial finito. Si $V_{\mathcal{K}} = \{v_0, \dots, v_n\}$ es su conjunto de vértices, definimos una aplicación inyectiva $\varphi : V_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}^N$, tomando $N \geq n$, como $\varphi(v_i) := a_i$ donde $\{a_i\}_{i=0}^n$ es un conjunto geoméricamente independiente de \mathbb{R}^N . Entonces definimos el complejo simplicial geométrico K , donde $\langle \varphi(v_{i_0}), \dots, \varphi(v_{i_p}) \rangle \in K$ si y solo si $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_p}\} \in \mathcal{K}$. La segunda afirmación del enunciado de la proposición se demuestra con una simple comprobación. \square

Teniendo en cuenta la proposición anterior, trabajar con complejos simpliciales abstractos es esencialmente lo mismo que con complejos simpliciales geométricos.

Observación 1.7. En esta memoria usaremos la notación K para hablar de complejos simpliciales abstractos y se omitirá la palabra la palabra “abstracto” cuando no haya lugar a confusión. Por otro lado, si \mathcal{K} es un complejo simplicial abstracto se podrá hablar de su poliedro asociado $|\mathcal{K}|$ sin más que considerar el

poliedro asociado a su realización geométrica. Teniendo en cuenta la proposición anterior, $|\mathcal{K}|$ está únicamente determinado salvo homeomorfismo.

1.3. Complejos simpliciales notables para el Análisis Topológico de Datos

Para crear un complejo simplicial en base a una nube de datos primero se suele tomar como conjunto de vértices el conjunto de datos. Luego existen diferentes formas de relacionar los datos para crear los símlices. En esta sección veremos algunas maneras de crear complejos simpliciales que aproximan a los datos y cómo se relacionan unos con otros. Los complejos simpliciales que se verán son el complejo de Čech [2], el cual es de bastante provecho teóricamente aunque no es eficiente en la parte computable, y el complejo de Vietoris-Rips [2], que es más eficaz computacionalmente que el de Čech. Como veremos ambos complejos están fuertemente relacionados. En particular, en el Análisis Topológico de Datos se podría trabajar con nubes de datos en un espacio métrico (X, d) , aunque usaremos \mathbb{R}^N con la distancia usual al ser el más común y amigable al momento de llevarlo a la computación.

Nervio de un recubrimiento

Con el fin de ver ciertas propiedades de algunos de estos complejos se necesita la noción de nervio de un recubrimiento. Se trata de una construcción fundamental que nos permite asociar un complejo simplicial a todo espacio topológico con un recubrimiento. En este sentido, dado un recubrimiento finito $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de un espacio topológico X (podemos suponer que $U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$) el **nervio** de \mathcal{U} , denotado $N(\mathcal{U})$, es el complejo simplicial que tiene a I como conjunto de vértices y $\sigma = \{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subset I$ es un símlice de $N(\mathcal{U})$ si y solo si $\bigcap_{k=0}^n U_{i_k} \neq \emptyset$. En efecto, $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial abstracto ya que por un lado $U_i \neq \emptyset$ implica que $\{i\} \in N(\mathcal{U})$ para todo $i \in I$; por otro lado, si $\sigma \in N(\mathcal{U})$ con $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\bigcap_{i \in \tau} U_i \neq \emptyset$, es decir, $\tau \in N(\mathcal{U})$.

Para el siguiente resultado conviene recordar la noción de equivalencia de homotopía. Dadas dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dirá que son **homótopas**, denotado por $f \simeq g$, si existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de tal manera que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Esta noción de homotopía verifica las propiedades de una relación de equivalencia, la cual es compatible con la composición de aplicaciones continuas. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dice que es una **equivalencia de homotopía** si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En este caso diremos que X e Y son **homotópicamente equivalentes**. En particular, un espacio X es contráctil si es homotópicamente equivalente al espacio unipuntual.

Lema 1.8 (Teorema del Nervio). Sean X un espacio métrico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento finito y abierto de X tal que toda intersección de elementos de \mathcal{U} es vacía o contráctil. Entonces, $|N(\mathcal{U})|$ es homotópicamente equivalente a X .

Observación 1.9. En realidad, el enunciado del Teorema del Nervio es bastante más general. En dicho enunciado general el espacio X se requiere que sea paracompacto (noción que engloba a la de ser métrico); además el recubrimiento abierto \mathcal{U} no es necesariamente finito, pero debe cumplir que cualquier intersección finita de elementos del recubrimiento sea vacía o contráctil. Nótese que entonces el nervio puede resultar un complejo simplicial no necesariamente finito. Una prueba para el Teorema del Nervio se puede consultar en el libro de Hatcher [8]. En la Figura 1.2 se puede observar un gráfico que ilustra el uso de este lema.

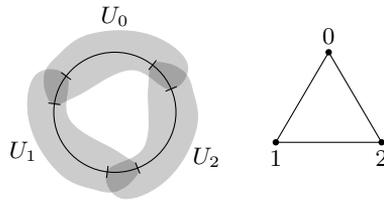


Figura 1.2. A la izquierda se puede ver una circunferencia y un recubrimiento \mathcal{U} que tiene la propiedad del Lema 1.8. A la derecha, el poliedro asociado al nervio del recubrimiento \mathcal{U} . Nótese que el recubrimiento \mathcal{U} es la intersección de los U_i con la circunferencia.

1.3.1. Complejos de Čech y Vietoris-Rips

El primer complejo en dar uso al nervio es el **complejo de Čech** asociado a un subconjunto finito S de \mathbb{R}^N y un parámetro $\varepsilon > 0$. Este complejo se define como el nervio

$$\check{C}_\varepsilon(S) := N(\mathcal{U})$$

siendo \mathcal{U} recubrimiento dado por el conjunto de bolas abiertas $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in S}$.

Nótese que la intersección de bolas es vacía o convexa y por ende contráctil. Entonces por el Teorema del Nervio se tiene que $X = \cup_{x \in S} B(x, \varepsilon)$ y $|N(\mathcal{U})|$ son homotópicamente equivalentes.

El segundo complejo es el denominado **complejo de Vietoris-Rips** asociado a un subconjunto finito S de \mathbb{R}^N y un parámetro $\varepsilon > 0$, definido como:

$$VR_\varepsilon(S) := \{\sigma \subset S \mid d(x_i, x_j) \leq \varepsilon, \text{ para todo } x_i, x_j \in \sigma\}$$

siendo d la métrica usual en \mathbb{R}^N . Es inmediato demostrar que es un complejo simplicial abstracto, pues $d(x, x) = 0 < \varepsilon$ para todo $x \in S$ y por lo tanto

$\{x\} \in VR_\varepsilon(S)$; además, si $\sigma \in VR_\varepsilon(S)$ es trivial que cualquier subconjunto también pertenece a $VR_\varepsilon(S)$ pues ya se sabe que la distancia entre todos los vértices es menor o igual que ε .

De la definición se puede intuir que los complejos de Čech y Vietoris-Rips están relacionados de alguna forma pues ambos tienen el mismo conjunto de vértices y están determinados por las distancias entre estos vértices.

Proposición 1.10. Sean $S \subset \mathbb{R}^N$ finito y $\varepsilon > 0$. Entonces

$$\check{C}_{\frac{\varepsilon}{2}}(S) \subseteq VR_\varepsilon(S) \subseteq \check{C}_\varepsilon(S)$$

Demostración. Sea $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \in \check{C}_{\frac{\varepsilon}{2}}(L)$. Por definición $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$; por lo tanto existe $x \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$ y así $d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x) + d(x, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por otro lado, si $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \in VR_\varepsilon(S)$ entonces $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ para todo x_i y x_j , con lo cual $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) \neq \emptyset$. Así es, ya que en el caso que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ entonces $x_j \in B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon)$. En el caso que $d(x_i, x_j) = \varepsilon$, entonces $x_j \notin B(x_i, \varepsilon)$ y $x_i \notin B(x_j, \varepsilon)$. Sin embargo, $t \cdot x_i + (1 - t) \cdot x_j \in B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon)$ para todo $t \in (0, 1)$. \square

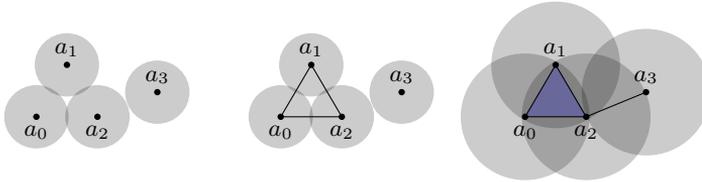


Figura 1.3. El complejo de la izquierda es el complejo de Vietoris-Rips para ε . El del centro es el complejo de Čech para el mismo ε . Finalmente, el complejo de la derecha es el de Vietoris-Rips para 2ε .

Como se puede observar en la Figura 1.3, para formar un simple en el complejo de Čech basta con que las circunferencias tengan intersección, mientras que para los del complejo de Vietoris-Rips se necesita que los vértices del simple estén dentro de dicha intersección (tomando las bolas cerradas). En general, para el mismo $\varepsilon > 0$ el complejo de Vietoris-Rips suele tener menor dimensión que el de Čech, aunque se puede dar la igualdad en alguna de las inclusiones y por lo tanto tener la misma dimensión.

1.3.2. Filtraciones en un complejo simplicial

Para la construcción de la Homología Persistente, que veremos en el Capítulo 3, será necesario considerar filtraciones de complejos simpliciales. Una

filtración en un complejo simplicial (abstracto) K consiste en una familia de subcomplejos de K

$$\mathcal{F} = \{K_i\}_{i \in I}$$

indexada sobre un conjunto totalmente ordenado I tal que si $i \leq j$, entonces $K_i \subseteq K_j$. Además, debe cumplirse también que $\emptyset, K \in \mathcal{F}$.

Nótese que al tener K un número finito de simplices, en la filtración habrá siempre un número finito de subcomplejos de K distintos. De este modo la filtración se puede reescribir como una cadena finita de inclusiones estrictas de subcomplejos de K :

$$\emptyset \subset K_{i_0} \subset K_{i_1} \subset \dots \subset K_{i_n} = K$$

Ejemplo 1.11. Continuando con el Ejemplo 1.3 podemos considerar la siguiente filtración del complejo simplicial $K = K_5$.

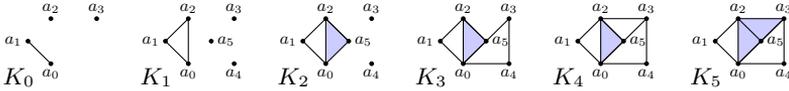


Figura 1.4. Filtración sobre un complejo simplicial K .

Se pueden considerar filtraciones en base a los complejos de Čech y Vietoris-Rips. Al variar el parámetro ε del complejo de Čech asociado a S y recopilar los distintos complejos resultantes se obtiene una filtración del complejo simplicial $\mathcal{P}(S)$ formado por todos los posibles subconjuntos de S (partes de S). Esta es la **filtración de Čech** asociada a S del complejo $\mathcal{P}(S)$ y se escribe como

$$\check{C}(S) = \{\check{C}_\varepsilon(S)\}_{\varepsilon \geq 0}$$

Si los radios de dos bolas centradas en el mismo punto x cumplen que $\varepsilon' < \varepsilon$, entonces $B(x, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon)$ y por tanto si $B(x, \varepsilon')$ se interseca con otra bola distinta, también lo hacen las respectivas bolas con radio ε y por lo tanto un símplex de $\check{C}_{\varepsilon'}(S)$ tiene que estar en $\check{C}_\varepsilon(S)$. Si $\varepsilon = 0$, por convenio $\check{C}_0(S) = \emptyset$. Además, a partir de cierto ε suficientemente grande todas las bolas se intersecan y se obtiene constantemente el complejo simplicial $\mathcal{P}(S)$.

De la misma forma que con los complejos de Čech se tiene una **filtración de Vietoris-Rips**, \mathcal{VR} , asociada a S del complejo simplicial $\mathcal{P}(S)$. De nuevo, por convenio $\mathcal{VR}_0(S) = \emptyset$:

$$\mathcal{VR}(S) = \{\mathcal{VR}_\varepsilon(S)\}_{\varepsilon \geq 0}$$

R -módulos de homología simplicial

La herramienta principal de la Topología Algebraica que usará la Homología Persistente es la Homología Simplicial. Esta última está definida para complejos simpliciales con una orientación definida. La idea intuitiva es detectar los agujeros n -dimensionales que tiene su poliedro asociado (más generalmente un espacio triangulable). Como se ha visto en el Grado de Matemáticas, concretamente en la asignatura de *Topología Algebraica y Aplicaciones*, se suele considerar homología con coeficientes enteros, obteniéndose grupos abelianos. Sin embargo, en esta memoria se considerará homología con coeficientes en un anillo general R , obteniendo así R -módulos. Estos son una generalización de los grupos abelianos y los espacios vectoriales. Se supondrá que el lector está familiarizado con la teoría básica de R -módulos. No obstante, para favorecer la comprensión de la memoria se repasará algunos conceptos y resultados de esta teoría algebraica. Entre estos resultados se destacan la Forma Normal de Smith y el Teorema de Estructura. Como veremos, la homología simplicial es algorítmicamente computable. Este resultado se verá de forma más general para complejos de cadenas de R -módulos cumpliendo ciertas condiciones no muy restrictivas.

2.1. Generalidades sobre R -módulos

Comenzamos este capítulo viendo algunas propiedades básicas sobre R -módulos. Para una lectura más profunda de esta teoría se recomienda [6]. Fijaremos R un anillo conmutativo y unitario fijo. Un grupo abeliano M se llama **R -módulo** si existe una operación externa

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto r \cdot m \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

- $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$, para todo $r \in R$ y $m_1, m_2 \in M$
- $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$, para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$
- $(r_1 \cdot r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$, para todo $r_1, r_2 \in R$ y $m \in M$
- $1 \cdot m = m$, para todo $m \in M$

A los elementos de R se le denominan **escalares**.

Observación 2.1. La definición anterior de R -módulo se suele denominar R -módulo a izquierda. Si el anillo R no es conmutativo tiene sentido hablar de R -módulo a derecha, donde la multiplicación por el escalar es por la derecha. No obstante, cuando R es conmutativo ambas nociones coinciden. Es por ello que se ha optado por usar la denominación de R -módulo. Por otro lado, es fácil comprobar que el elemento neutro tanto de M como el de R son el elemento neutro para la operación externa, de modo que $r \cdot 0_M = 0_M$, $0_R \cdot m = 0_M$. Indistintamente se denotará como 0. En consecuencia, $-(r \cdot m) = r \cdot (-m) = (-r) \cdot m$, para todo $r \in R$ y $m \in M$.

Un subgrupo N de M se dice que es un **R -submódulo** si $r \cdot n \in N$ para todo $r \in R$ y $n \in N$. Se define el **R -módulo cociente** M/N como el conjunto de las clases de equivalencia con la relación $m \sim m'$ si y solo si $m - m' \in N$. La operación externa en M induce una operación externa que dota al cociente de estructura de R -módulo..

Una aplicación $f : M \rightarrow M'$ es un **homomorfismo de R -módulos** si es homomorfismo de grupos y para todo $m, n \in M$ y $r, s \in R$ se cumple que $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$. Si además es biyectivo, se dice que es un **isomorfismo de R -módulos**, o simplemente isomorfismo si no hay lugar a confusión. En este caso se dice que M y M' son **isomorfos**. Dado un homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow M'$ se define la **imagen** de f como $Im(f) := \{y \in M' : \text{existe } x \in M, f(x) = y\}$ y el **núcleo** de f como $Ker(f) := \{x \in M : f(x) = 0\}$. Se tiene el **Primer Teorema de Isomorfía** para R -módulos, cuya demostración es análoga al de grupos abelianos: Si $f : M \rightarrow M'$ es un homomorfismo de R -módulos entonces $M/Ker(f) \cong Im(f)$.

Ejemplo 2.2.

- i. Todo grupo abeliano G puede considerarse como \mathbb{Z} -módulo. La operación externa se define para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $g \in G$ como $n \cdot g := g + \dots + g$ si $n > 0$, $n \cdot g := 0$ si $n = 0$ y $n \cdot g := (-g) + \dots + (-g)$ si $n < 0$.
- ii. Es inmediato que, si R es un cuerpo K , entonces la noción de K -módulo coincide con la de K -espacio vectorial.
- iii. Un ideal I de un anillo conmutativo y unitario R es un R -módulo donde la operación externa es la propia multiplicación del anillo. En particular, R es un R -módulo.

Otra construcción usual es el **producto directo** de una familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de R -módulos, denotada $\prod_{i \in I} M_i$. Los elementos de $\prod_{i \in I} M_i$ son tuplas $(m_i)_{i \in I}$ tales que $m_i \in M_i$ para todo $i \in I$. Las operaciones de $\prod_{i \in I} M_i$ son las siguientes:

- i. $(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$
- ii. $r \cdot (m_i)_{i \in I} = (r \cdot m_i)_{i \in I}$

Para cada $j \in I$ existe un homomorfismo de R -módulos $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$ llamado **j -proyección** y definido como $\pi_j((m_i)_{i \in I}) = m_j$. Por otro lado, la **suma directa** (externa) de dicha familia es el R -submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$ formado por aquellas tuplas que tienen todas sus componentes nulas salvo para un número finito de ellas. Este R -submódulo se denota por $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Si la familia de R -módulos $\{M_i\}_{i=1}^n$ es finita, el producto se puede denotar como $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ y coincide trivialmente con su suma directa $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$. En el caso particular que $M_i = M$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se usará la notación M^n .

Observación 2.3. Como $\bigoplus_{i \in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$, la forma habitual de representar un elemento $m \in \bigoplus_{i \in I} M_i$ es por tuplas, $m = (m_i)_{i \in I}$. Sin embargo, otra forma de representar a m es mediante sumas, $m = \sum_{i \in I} m_i$. En esta memoria usaremos indistintamente las dos notaciones.

2.2. Teorema de Estructura sobre dominio de ideales principales

Uno de los resultados más importantes para la Homología Simplicial, y concretamente en la teoría de R -módulos, es el Teorema de Estructura para R -módulos finitamente generados, donde R es un dominio de ideales principales. Antes de llegar a este teorema se introducen varias nociones:

Diremos que un R -módulo M está **generado** por un subconjunto $\Lambda = \{m_i\}_{i \in I}$ de M si todo $x \in M$ se puede poner como una combinación lineal finita $x = \sum_{i=1}^n r_i m_i$, donde $r_i \in R$ y $m_i \in \Lambda$. Al conjunto Λ se le denomina **sistema generador** de M . Si M está generado por $\Lambda = \{m_i\}_{i \in I}$ usaremos la notación $M = \langle m_i \rangle_{i \in I}$. Diremos que M está **finitamente generado** si tiene un sistema generador finito. Un sistema generador de M se dice que es **base** si es linealmente independiente, es decir, toda combinación lineal finita igualada a cero implica que los escalares deben ser nulos. Diremos que un R -módulo es **libre** si tiene una base. En este caso, el **rango** de M es el cardinal de una base, denotado $\text{rang}(M)$. Como en álgebra lineal, este número no depende de la base elegida y es invariante por la clase de isomorfismo de M . A continuación veremos un resultado útil que caracteriza a los R -módulos finitamente generados y libres.

Lema 2.4. *Un R -módulo M está finitamente generado por n elementos si y solo si existe un homomorfismo sobreyectivo $\mu : R^n \rightarrow M$. Además, M es libre si y solo si μ es una biyección.*

Demostración. Si M está finitamente generado por $\{m_i\}_{i=1}^n$ entonces se puede definir el homomorfismo de R -módulos $\mu : R^n \rightarrow M$ como $\mu((r_i)_{i=1}^n) := \sum_{i=1}^n r_i \cdot m_i$, el cual es trivialmente sobreyectivo. Por otro lado, dado un homomorfismo

sobreyectivo cualquiera $\mu : R^n \rightarrow M$, todo $x \in M$ se puede poner como $x = \sum_{i=1}^n r_i \mu(e_i)$, donde $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}_R, \dots, 0)$. Es trivial que M es libre si y solo si μ es también inyectivo. \square

En el caso particular que $Ker(\mu)$ esté también finitamente generado entonces M se dice que está **finitamente presentado**. Por este lema y por el Primer Teorema de Isomorfía es obvio que $R^n/Ker(\mu) \cong M$. Para poder descomponer M en R -módulos más sencillos necesitaremos considerar, para las siguientes nociones y resultados, que R sea un **dominio de ideales principales**. Recordemos que un anillo R es un dominio de ideales principales (o DIP, para abreviar) si todo ideal de R está generado por un único elemento.

Proposición 2.5. *Sea M un R -módulo libre de rango n . Entonces todo R -submódulo N de M es libre y de rango menor o igual que n .*

Una demostración de este resultado se puede consultar en [6]. En virtud de esta proposición, todo R -submódulo de R^n tiene una base. En particular, nos interesa encontrar la base de $Ker(\mu)$. Esto se conseguirá mediante las siguientes nociones:

Todo homomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ entre dos R -módulos libres y finitamente generados se puede representar matricialmente. Sean $A_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $A_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de M_1 y M_2 , respectivamente. Entonces $f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ para todo $j = 1, \dots, n$. Se define la **matriz asociada** a f relativa a las bases de A_1 y A_2 como la matriz con coeficientes en R siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Denotaremos por $M_n(R)$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n con coeficientes en R .

Definición 2.6. *Sea A una matriz $m \times n$ con coeficientes en R . La **forma normal de Smith** de A es una matriz S de tamaño $m \times n$ en la que existen matrices invertibles $P \in M_m(R)$ y $Q \in M_n(R)$ verificando que $S = PAQ$ y además es de la forma*

$$S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & s_r & \\ \hline & & & \\ & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

donde $s_i \neq 0$, para todo $1 \leq i < r$, y cada s_i divide a s_{i+1} . Los elementos s_i son únicos salvo multiplicación por unidades (elementos invertibles).

Toda matriz A con coeficientes en un dominio de ideales principales admite una forma normal de Smith S . Existe un procedimiento para hallar S en un dominio de ideales principales general. No obstante, en esta memoria expondremos un algoritmo que permite encontrarla en el caso particular de los dominios euclídeos (por simplicidad y además de ser utilizados en el Capítulo 3). Recordemos que un **dominio euclídeo** R es un dominio de integridad junto a una aplicación $\psi : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, llamada norma, que verifica que si $a, b \in R$, con $ab \neq 0$, entonces se tiene que $\psi(ab) \geq \psi(a)$; además para todo par de elementos $a, b \in R$, con $b \neq 0$, existen $q, r \in R$ tales que $a = q \cdot b + r$ y $r = 0$ o bien $\psi(r) < \psi(b)$. Debido a esta propiedad de la norma existe un algoritmo de división en los dominios euclídeos. Obsérvese que estamos considerando a \mathbb{N} como al conjunto de los números naturales con el 0 incluido.

Si f_i denota la fila i -ésima y c_i denota la columna i -ésima de la matriz, entonces podemos considerar las siguientes operaciones elementales por filas:

1. **Intercambiar f_i por f_j .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la izquierda la matriz invertible definida por la matriz identidad con f_i y f_j intercambiadas. En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos asociado, equivale a intercambiar w_i por w_j en la base A_2 .
2. **Reemplazar f_i por uf_i , donde u es una unidad de R .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la izquierda la matriz invertible definida por la matriz identidad con f_i reemplazada por uf_i . En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos, equivale a reemplazar w_i por uw_i en la base A_2 .
3. **Reemplazar f_i por $f_i + kf_j$, con k un elemento cualquiera de R .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la izquierda la matriz invertible definida por la matriz identidad con f_i reemplazada por $w_j - kw_i$. En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos, equivale a reemplazar w_i por $w_j - kw_i$ en la base A_2 .

También se tienen las correspondientes operaciones elementales por columnas:

- 1'. **Intercambiar c_i por c_j .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la derecha la matriz invertible definida por la matriz identidad con c_i y c_j intercambiadas. En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos, equivale a intercambiar e_i por e_j en la base A_1 .
- 2'. **Reemplazar c_i por uc_i , donde u es una unidad de R .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la derecha la matriz invertible definida por la matriz identidad con c_i reemplazada por uc_i . En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos, equivale a reemplazar e_i por ue_i en la base A_1 .
- 3'. **Reemplazar c_i por $c_i + kc_j$, con k un elemento cualquiera de R .** Esta operación es equivalente a multiplicar por la derecha la matriz invertible

definida por la matriz identidad con c_i reemplazada por $c_i + kc_j$. En el lenguaje de homomorfismo de R -módulos, equivale a reemplazar e_i por $e_i + ke_j$ en la base A_1 .

Observación 2.7. Cuando R sea un dominio de ideales principales general, el siguiente procedimiento es algo diferente al no tener por qué existir un algoritmo de la división. En este caso general es necesaria una cuarta operación no elemental por filas y por columnas que no veremos en esta memoria. El procedimiento general puede ser consultado en [9].

ALGORITMO:

- Paso 1. Elegir un pivote a_{ij} , siendo este el elemento de la matriz de menor norma.
- Paso 2. Mejorar el pivote; se dan varios casos:
- Si el pivote divide a todo elemento de la matriz A entonces se pasa directamente al siguiente paso.
 - Si el pivote no divide a algún elemento a_{ik} de su misma fila entonces se aplica la operación $c_k - q \cdot c_i$ para cierto $q \in R$ tal que $r = a_{ik} - q \cdot a_{ij}$. Ahora r es el nuevo pivote. Si r divide a todo elemento de la matriz se pasa al siguiente paso, en el caso contrario se realiza el *Paso 2* a r .
 - Si el pivote no divide a algún elemento a_{kj} de su misma columna entonces se aplica la operación $f_k - q \cdot f_j$ para cierto $q \in R$ tal que $r = a_{kj} - q \cdot a_{ij}$. Ahora r es el nuevo pivote. Si r divide a todo elemento de la matriz se pasa al siguiente paso, en el caso contrario se realiza el *Paso 2* a r .
 - Si el pivote divide a todo elemento de su misma fila o columna pero no a algún otro elemento a_{st} entonces se aplica $f_s - q \cdot f_j$ para cierto $q \in R$ tal que $a_{sj} - q \cdot a_{ij} = 0$. Luego a la matriz resultante se realiza $f_j + f_s$. En consecuencia, a_{ij} se ve inalterado y no divide a un elemento de su misma fila y así continuar con el caso *a)* del *Paso 2*, con a_{ij} como pivote.
- Paso 3. El pivote es trasladado mediante intercambios de filas y columnas a la posición $(1, 1)$.
- Paso 4. Se realizan las operaciones 3 y 3' oportunas con el fin de anular todo elemento de la misma fila y columna del pivote.
- Paso 5. Se sigue con el *Paso 1* para el menor resultante de eliminar la fila y la columna en la que pertenece el pivote. Si no existe dicho menor o es nulo, el algoritmo termina.

Es inmediato ver que el pivote obtenido al final del segundo paso, denotado s_1 , divide al siguiente pivote, s_2 . Al dividir a todo elemento de la matriz esto seguirá siendo cierto al aplicar las operaciones elementales. El mismo argumento funciona para los siguientes pivotes. La demostración de la unicidad de los coeficientes s_i puede consultarse en [9] (viéndose para el caso general de que R sea DIP).

Observación 2.8. Existe software para calcular la forma normal de Smith. Por ejemplo, en *MATLAB* existe el comando $smithForm(A)$ para calcular la forma normal de Smith de una matriz cuadrada A con coeficientes enteros, aunque hay funciones creadas por diferentes usuarios que permiten calcular la forma normal de Smith para matrices no necesariamente cuadradas.

Ejemplo 2.9.

Consideremos la matriz con coeficientes en el dominio euclídeo \mathbb{Z} :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Siendo la norma el valor absoluto, el procedimiento sería:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_4 - 5 \cdot c_1 \\ c_3 - 4 \cdot c_1 \\ c_2 - 5 \cdot c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 - 1 \cdot c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_4 - 1 \cdot c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_4 - 2 \cdot c_2 \\ c_2 - 5 \cdot c_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S \end{aligned}$$

Así queda que $s_1 = 1$ y $s_2 = -1$. Nótese que s_1 y s_2 son únicos salvo multiplicación por unidades, es decir también se podría haber dado que $s_1 = 1 = s_2$.

Consideremos ahora la matriz con coeficientes en el dominio euclídeo $\mathbb{Z}_2[t]$, el anillo de polinomios de una variable con coeficientes en \mathbb{Z}_2 :

$$B = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^3 + 1 \end{pmatrix}$$

Siendo la norma el grado del polinomio, el procedimiento sería:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^3 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + t^2 \cdot f_4} \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t^4 + t^3 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + f_2} \begin{pmatrix} t & t^4 + t^3 + t^2 + 1 \\ 0 & t^4 + t^3 + 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{c_2 - (t^3 + t^2 + t) \cdot c_1} \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^4 + t^3 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^4 + t^3 + 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{f_2 + (t^4 + t^3) \cdot f_1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t^5 + t^4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 + t \cdot c_1 \\ f_2 + f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^5 + t^4 + t \end{pmatrix} = \bar{S} \end{aligned}$$

Así queda que $\bar{s}_1 = 1$ y $\bar{s}_2 = t^5 + t^4 + t$.

La Forma Normal de Smith será utilizada en el siguiente lema. Esto permitirá demostrar el Teorema de Estructura para R -módulos finitamente generados.

Lema 2.10. *Sea M un R -módulo libre de rango n y sea N un R -submódulo de M de rango $m \leq n$. Entonces existe una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M y existen elementos $s_1, \dots, s_m \in R$, verificando que cada s_i divide a s_{i+1} , y $\{s_1 e_1, \dots, s_m e_m\}$ es base de N .*

Demostración. Se considera una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de M y una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de N de tal modo que la matriz asociada a la inclusión $i : N \hookrightarrow M$ está en la forma normal de Smith. Así $i(w_j) = s_j e_j$, donde s_i divide a s_{i+1} para todo $i = 1, \dots, m$. Como $i(w_j) = w_j$, se tiene que $\{s_1 e_1, \dots, s_m e_m\}$ es base de N . \square

Teorema 2.11 (Teorema de estructura para R -módulos). *Sea M un R -módulo finitamente generado por n elementos, siendo R un dominio de ideales principales. Entonces existen s_1, \dots, s_r elementos de R para algún $0 \leq r \leq n$ tales que*

$$M \cong R/\langle s_1 \rangle \oplus R/\langle s_2 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle s_r \rangle \oplus R^{n-r}$$

y cumpliéndose que $\langle s_r \rangle \subseteq \langle s_{r-1} \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle s_1 \rangle$. Aquí $\langle s_j \rangle$ denota al ideal de R generado por $s_j \in R$. Cada s_i es único salvo multiplicación por unidades.

La **parte libre** de M , denotada por L_M , es R^{n-r} y $\beta := n-r$ es el número de Betti de M . La **parte de torsión** de M es $R/\langle s_1 \rangle \oplus R/\langle s_2 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle s_r \rangle$ y se denota por T_M .

Demostración. Como consecuencia del Lema 2.4, sabemos que $M \cong R^n / \text{Ker}(\mu)$. A su vez, por el Lema 2.10, $\text{Ker}(\mu)$ tiene una base $\{s_1 e_1, \dots, s_r e_r\}$ donde $\{e_1, \dots, e_m\}$ es base de R^n . Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base de R^n , se tiene que $R^n \cong \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle$ pues existe el isomorfismo $\varphi : R^n \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle$ definido como $\varphi(\sum_{i=1}^n r_i e_i) := r_1 e_1, r_2 e_2, \dots, r_n e_n$. Por el mismo argumento, $\text{Ker}(\mu) \cong \bigoplus_{i=1}^m \langle s_i e_i \rangle$. Por lo tanto $M \cong R^n / \text{Ker}(\mu) \cong \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle / \bigoplus_{i=1}^m \langle s_i e_i \rangle$.

Por otro lado, consideramos el homomorfismo

$$\phi : \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle / \bigoplus_{i=1}^m \langle s_i e_i \rangle$$

definido como $\phi(r_1 e_1, \dots, r_n e_n) := (r_1 e_1 + \langle s_1 e_1 \rangle, \dots, r_m e_m + \langle s_m e_m \rangle, 0, \dots, 0)$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfía se tiene:

$$\bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle / \bigoplus_{i=1}^m \langle s_i e_i \rangle \cong \langle e_1 \rangle / \langle s_1 e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_m \rangle / \langle s_m e_m \rangle \oplus R^{n-m}$$

Aplicando una última vez el Primer Teorema de Isomorfía al homomorfismo $\theta_i : R \rightarrow \langle e_i \rangle / \langle s_i e_i \rangle$, definido como $\theta_i(r) := r e_i + \langle s_i e_i \rangle$, se tiene que $\langle e_i \rangle / \langle s_i e_i \rangle \cong R / \langle s_i \rangle$. Finalmente, recopilando todo lo anterior se tiene el isomorfismo $M \cong R/\langle s_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle s_m \rangle \oplus R^{n-m}$ \square

Observación 2.12. Realmente la parte de torsión de un R -módulo arbitrario M consiste en el siguiente submódulo de M :

$$T_M = \{m \in M \mid \text{existe } r \in R \setminus \{0\} : r \cdot m = 0\}$$

En el Teorema 2.11, lo que se está diciendo en realidad es que existe un isomorfismo de R -módulos $T_M \cong R/\langle s_1 \rangle \oplus R/\langle s_2 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle s_r \rangle$

2.3. Algoritmo de cálculo de la homología en complejos de cadenas

La homología simplicial, que se verá en la Sección 2.4, se basa en la homología de ciertos complejos de cadenas. Es por ello que empezaremos viendo previamente nociones básicas sobre complejos de cadenas.

Un **complejo de cadenas** de R -módulos es un par (C, δ) donde $C = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una colección de R -módulos y $\delta = \{\delta_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una familia de homomorfismos de R -módulos tal que $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Un complejo de cadenas se suele representar por el diagrama

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\delta_0} C_{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}} C_{-2} \xrightarrow{\delta_{-2}} \cdots$$

y si no hay lugar a confusión se le puede denotar simplemente por C . Los elementos de C_n se denominan **n -cadenas** y el homomorfismo δ_n se denomina **operador borde** de dimensión n . Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideramos los siguientes R -submódulos de C_n dados por los homomorfismos δ_n y δ_{n+1} :

$$Z_n(C) := \text{Ker}(\delta_n)$$

$$B_n(C) := \text{Im}(\delta_{n+1})$$

denominados R -módulo de **n -ciclos** y R -módulo de **n -bordes**, respectivamente. Como $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$, está claro que $B_n(C)$ es también R -submódulo de $Z_n(C)$ y se puede hacer su cociente:

$$H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$$

que denominaremos **R -módulo de homología de dimensión n** de C (o simplemente n -homología de C , si no hay lugar a confusión. Es posible relacionar dos complejos de cadenas C y C' mediante un **homomorfismo de complejos de cadenas**, esto es, una colección de homomorfismos de R -módulos $f = \{f_n : C_n \rightarrow C'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ \delta_n \downarrow & & \downarrow \delta'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

es conmutativo. La notación utilizada para tal colección es $f : C \rightarrow C'$. El ejemplo más claro es la colección formada por la identidad en cada C_n , la cual se denota por 1_C y se denomina identidad en C . La composición de dos homomorfismos de complejos de cadenas $f : C \rightarrow C'$ y $g : C' \rightarrow C''$ es la familia

$g \circ f := \{(g \circ f)_n : C_n \rightarrow C''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Es fácil comprobar que también es un homomorfismo de complejos de cadenas. Los homomorfismos de complejos de cadenas inducen homomorfismos entre los correspondientes R -módulos de homología. El homomorfismo en dimensión n inducido por $f : C \rightarrow C'$ se define como

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C) &\longrightarrow H_n(C') \\ [z] &\longmapsto [f_n(z)] \end{aligned}$$

Para comprobar su buena definición, basta con tener en cuenta que $f_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(C')$ y $f_n(B_n(C)) \subseteq B_n(C')$. Además se comprueba sin dificultad que, fijado $n \in \mathbb{Z}$:

- i. $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$ para todo $f : C \rightarrow C'$, $g : C' \rightarrow C''$ homomorfismos de complejos de cadenas.
- ii. $H_n(1_C) = 1_{H_n(C)}$, para todo C complejo de cadenas.

Por simplicidad, a $H_n(f)$ también se le suele denotar por f_* , siempre que no haya lugar a confusión con la dimensión considerada.

A continuación veremos una serie de resultados que desembocarán en el algoritmo de cálculo de la homología de un complejo de cadenas de R -módulos libres y finitamente generados, con R un dominio de ideales principales. Para simplificar notación consideraremos $Z_n := Z_n(C)$, $B_n := B_n(C)$ y $H_n := H_n(C)$.

Para el primer resultado consideraremos el R -módulo de los **n -bordes débiles**. Este consiste en el conjunto $W_n := \{c \in C_n \mid \text{existe } \lambda \in R \setminus \{0\}, \lambda \cdot c \in B_n\}$. Se tiene que W_n es un R -submódulo de Z_n pues todo elemento de W_n es un n -ciclo y la operación externa está bien definida. Obsérvese que si cada C_n es libre y finitamente generado, al ser W_n un R -submódulo de Z_n y este es un R -módulo libre finitamente generado, entonces W_n también es libre y finitamente generado. Finalmente, hacemos notar también que el cociente Z_n/W_n es libre y finitamente generado. Este hecho se demostrará en el teorema siguiente, independientemente del próximo lema, al comprobarse que, en realidad Z_n/W_n es isomorfo a la parte libre de H_n .

Lema 2.13. *Se consideran bases $A_1 = \{c_1 + W_n, \dots, c_k + W_n\}$ de Z_n/W_n y $A_2 = \{d_1, \dots, d_l\}$ de W_n . Entonces $A = \{c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l\}$ es base de Z_n .*

Demostración. Es necesario ver que A es tanto sistema generador de Z_n como linealmente independiente. Si $z \in Z_n$ entonces $z + W_n \in Z_n/W_n$. Por lo tanto, $z + W_n$ se puede poner como combinación lineal de elementos de A_1 :

$$z + W_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i + W_n) = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \right) + W_n$$

Por definición $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \in W_n$, el cual se escribe como combinación lineal de elementos de A_2 : $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i = \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$. Entonces z es combinación lineal de elementos de la base A :

$$z = \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

Ahora supongamos que $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j = 0$. Entonces se tiene $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i = -\sum_{j=1}^l \mu_j d_j \in W_n$ y por lo tanto

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i\right) + W_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i (c_i + W_n) = 0 + W_n$$

Puesto que A_1 es base de Z_n/W_n y A_2 base de W_n concluimos que $\lambda_i = \mu_j = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, l$. □

Cuando en un complejo de cadenas todos los R -módulos son libres y finitamente generados con R un DIP es posible desarrollar un algoritmo de cálculo de sus R -módulos de homología. El siguiente resultado así como Teorema de Estructura 2.11 serán primordiales para este fin.

Teorema 2.14. *Sea C un complejo de cadenas de R -módulos libres y finitamente generados donde R es un DIP. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existen R -submódulos $U_n, V_n, W_n \subseteq C_n$ tales que*

$$C_n \cong U_n \oplus V_n \oplus W_n$$

$$Z_n \cong V_n \oplus W_n$$

Además si L_n y T_n denotan, respectivamente, la parte libre y de torsión de H_n entonces $L_n \cong Z_n/W_n$ y $T_n \cong W_n/B_n$.

Demostración. Sea la siguiente sucesión exacta de R -módulos

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow{i_n} C_n \xrightarrow{\delta_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Esto es, i_n es inyectiva, δ_n sobreyectiva y $\text{Ker}(\delta_n) = \text{Im}(i_n)$. Entonces se afirma que existe un homomorfismo $s_n : B_{n-1} \rightarrow C_n$ tal que $C_n = Z_n \oplus \text{Im}(s_n)$. En efecto, para $\delta_n : C_n \rightarrow B_{n-1}$ y $1_{B_{n-1}} : B_{n-1} \rightarrow B_{n-1}$ podemos encontrar un homomorfismo $s_n : B_{n-1} \rightarrow C_n$ tal que $\delta_n \circ s_n = 1_{B_{n-1}}$. Esto es así pues al ser B_{n-1} libre y δ_n sobreyectiva, para cada elemento e de la base A_{n-1} de B_{n-1} existe $c_e \in C_n$ tal que $\delta_n(c_e) = e = 1_{B_{n-1}}(e)$. Si definimos $s_n : B_{n-1} \rightarrow C_n$ como $s_n(e) := c_e$ y se extiende por linealidad para todo elemento de B_{n-1} , entonces $\delta_n(s_n(e)) = 1_{B_{n-1}}(e)$. De la igualdad $\delta_n \circ s_n = 1_{B_{n-1}}$ se deduce que

$C_n = Z_n \oplus \text{Im}(s_n)$ pues para todo $c \in C_n$, $c = c - s_n(\delta_n(c)) + s_n(\delta_n(c))$ con $c - s_n(\delta_n(c)) \in \text{Ker}(\delta_n) = \text{Im}(i_n) = Z_n$ y $s_n(\delta_n(c)) \in \text{Im}(s_n)$.

Definimos $U_n := \text{Im}(s_n)$ y $V_n := \langle \{c_i\}_{i=1}^k \rangle$ donde $\{c_i + W_n\}_{i=1}^k$ es base de Z_n/W_n . Es obvio entonces que $Z_n \cong V_n \oplus W_n$ por la Proposición 2.13 y teniendo en cuenta el isomorfismo $C_n \cong V_n \oplus W_n \oplus U_n$.

Para demostrar los correspondientes isomorfismos de la parte libre y de torsión tómesese primero los homomorfismos

$$\pi_1 : Z_n \longrightarrow H_n, f_1(z) = [z]$$

$$\pi_2 : H_n \longrightarrow H_n/T_n, f_2([z]) = [z] + T_n$$

y el isomorfismo $h : H_n/T_n \xrightarrow{\cong} L_n$. Si consideramos el homomorfismo sobre-yectivo $g := h \circ \pi_2 \circ \pi_1$, entonces por el Primer Teorema de Isomorfía se tiene $Z_n/\text{Ker}(g) \cong L_n$. Además se puede afirmar que $\text{Ker}(g) = W_n$. Efectivamente, si $z \in \text{Ker}(g)$ entonces $h([z] + T_n) = 0$ y al ser h un isomorfismo necesariamente $[z] + T_n = [0] + T_n$; equivalentemente $[z] \in T_n$. Esto quiere decir que existe $\lambda \in R/\{0\}$ tal que $\lambda[z] = [\lambda z] = [0]$ y así $\lambda z \in B_n$ y, por definición, $z \in W_n$. Es obvio que por un procedimiento análogo, todo z perteneciente a W_n también pertenece a $\text{Ker}(g)$. Para el isomorfismo $T_n \cong W_n/B_n$ se toma el n -ésimo R -módulo de homología $H_n = Z_n/B_n$ y desarrollamos

$$\begin{aligned} H_n = Z_n/B_n &= (V_n \oplus W_n)/B_n \cong V_n \oplus (W_n/B_n) \\ &\cong (Z_n/W_n) \oplus (W_n/B_n) \cong L_n \oplus (W_n/B_n) \end{aligned}$$

Necesariamente, $W_n/B_n \cong T_n$. □

Si se halla la forma normal de Smith del operador borde $\delta_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, la matriz resultante deja tres hechos que permiten construir las bases de Z_n , B_{n-1} y W_{n-1} .

Proposición 2.15. *Sea $M(\delta_n)$ la matriz asociada a δ_n respecto de las respectivas bases $\{e_1, \dots, e_q\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_q\}$ de C_n y C_{n-1} que hacen que $M(\delta_n)$ esté en la forma normal de Smith. Si s_1, \dots, s_k son los elementos no nulos de $M(\delta_n)$, entonces:*

1. $\{e_{k+1}, \dots, e_q\}$ es base de Z_n .
2. $\{s_1 e'_1, \dots, s_k e'_k\}$ es base de B_{n-1} .
3. $\{e'_1, \dots, e'_k\}$ es base de W_{n-1} .

Demostración.

Sea $c = \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i \in C_n$; aplicándole el operador borde a c tenemos que $\delta_n(c) = \sum_{i=1}^q \lambda_i \delta(e_i)$. Por definición de la matriz asociada, $\delta_n(c) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \delta(e_i)$

$$\delta_n(e_i) = \begin{cases} s_i e'_i, & 1 \leq i \leq k \\ 0, & k+1 \leq i \leq q \end{cases}$$

1. Sea $c \in Z_n$. Por la matriz asociada, $\delta_n(c) = 0$ si y solo si $\lambda_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$. Esto significa que $c = \sum_{i=k+1}^q \lambda_i e_i$. Como $\{e_{k+1}, \dots, e_q\}$ es un sistema generador de Z_n y además es linealmente independiente (al ser subconjunto de una base), vemos que es base de Z_n .

2. Todo $b \in B_{n-1}$ es de la forma $b = \delta_n(c) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (s_i e'_i)$. En particular, $\delta_n(c) = 0$ si y solo si $\lambda_i s_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$. Como los $s_i \neq 0$ y R es un dominio de integridad, necesariamente $\lambda_i = 0$. Así $\{s_1 e'_1, \dots, s_k e'_k\}$ es base de B_{n-1} .

3. Sabemos que $\delta_n(e_i) = s_i e'_i \in B_{n-1}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, y por definición de W_{n-1} , también que $e'_i \in W_{n-1}$. Solo tenemos que ver que $\{e'_1, \dots, e'_k\}$ genera a todo elemento de W_{n-1} . En efecto, si $c \in W_{n-1}$ entonces existe un $\lambda \in R \setminus \{0\}$ tal que $\lambda \cdot c \in B_{n-1}$. Por tanto existe $\bar{c} = \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i \in C_n$ tal que $\delta_n(\bar{c}) = \lambda \cdot c$. Gracias a la demostración de la segunda afirmación, $\lambda \cdot c = \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i e'_i$. Como c pertenece a C_{n-1} se tiene que $c = \sum_{i=1}^p \mu_i e'_i$ y $\lambda \cdot c = \sum_{i=1}^p \lambda \mu_i e'_i$. Usando la anterior ecuación obtenemos que $\lambda \mu_i = 0$ para todo $i = k+1, \dots, p$. Al ser λ no nulo, necesariamente, $\mu_i = 0$ para todo $i = k+1, \dots, p$. Así, si $c \in W_{n-1}$, $c = \sum_{i=1}^k \mu_i e'_i$. \square

Esta proposición nos garantiza que con solo saber la forma normal de Smith de las matrices asociadas al operador borde en dimensión n y $n+1$ obtenemos la n -homología del complejo de cadenas. El número de columnas cero de la matriz nos dice el rango de Z_n y el número de filas no nulas nos dice tanto el rango de W_{n-1} como el de B_{n-1} . Con esto obtenemos un algoritmo sencillo para calcular H_n .

ALGORITMO:

Paso 1. Se toman $M(\delta_n)$ y $M(\delta_{n+1})$ las matrices asociadas a los operadores bordes respecto a unas bases arbitrarias fijadas de C_{n+1} , C_n y C_{n-1} .

Paso 2. Se le halla a cada una su forma normal de Smith, $S(\delta_n)$ y $S(\delta_{n+1})$. Entonces:

a) El número de Betti β_n de H_n es:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \text{rang}(Z_n/W_n) = \text{rang}(Z_n) - \text{rang}(W_n) \\ &= \text{card}(\text{columnas cero de } S(\delta_n)) - \text{card}(\text{filas no nulas de } S(\delta_{n+1})) \end{aligned}$$

b) Los coeficientes de torsión s_1, \dots, s_k son las entradas no nulas de $S(\delta_{n+1})$ y distintas a las unidades.

Paso 3. Finalmente, $H_n \cong R^{\beta_n} \oplus R/\langle s_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle s_k \rangle$.

2.4. Homología simplicial

En esta sección se hará una breve descripción de la homología simplicial. Esta se origina a partir de los denominados complejos de cadenas simpliciales. Esta descripción, si bien se dio en el Grado de Matemáticas con coeficientes enteros, aquí la veremos con coeficientes en un anillo unitario cualquiera. Ya que las demostraciones son totalmente análogas al caso entero ya visto, hemos decidido omitirlas. Lo primero que se necesita es orientar los símlices de un complejo simplicial abstracto K . Esto se lleva a cabo mediante una relación de equivalencia sobre el conjunto de las ordenaciones de los vértices de cada símlice $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$. El símlice $\{v_0, \dots, v_n\}$ está relacionado con $\{v_{\pi(0)}, \dots, v_{\pi(n)}\}$ si y solo si $\pi : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ es una permutación par. Esta relación, cuando $n \geq 1$, da a lugar a dos clases de equivalencia para cada símlice. Cada una de las clases se llama **orientación** de σ . Nótese que cuando $n = 0$ solo existe una única clase. Un símlice $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ junto con una orientación elegida se denomina **símlice orientado** y se denotará por $[\sigma]$. Cuando esté claro el contexto, se usará la notación σ para designar tanto el símlice como al símlice orientado. Por otro lado denotaremos por $-\sigma$ al símlice con la orientación opuesta a la elegida. Si a cada símlice de un complejo simplicial K se le ha elegido una orientación, entonces K se dice que es un **complejo simplicial orientado**. En este caso se define, para cada $n \geq 0$, el R -módulo de **n -cadenas simpliciales orientadas** de dimensión n , denotado por

$$C_n(K; R)$$

cuyos elementos, denominados **n -cadenas**, son aplicaciones c_n desde el conjunto de los n -símlices orientados de K a R que verifican $c_n(-\sigma) = -c_n(\sigma)$ con σ una orientación de un símlice. Si σ es un n -símlice orientado, la **n -cadena elemental** c_σ asociada a σ está definida como $c_\sigma(\sigma) = 1$, $c_\sigma(-\sigma) = -1$ y $c_\sigma(\tau) = 0$ para cualquier otro símlice orientado τ . Claramente, toda n -cadena c_n se puede poner como combinación lineal de n -cadenas elementales. Además, es inmediato comprobar que $C_n(K; R)$ es un R -módulo libre con base el conjunto de sus n -cadenas elementales.

Observación 2.16. Si $K = \emptyset$ entonces $C_n(K; R) = 0$. Del mismo modo, si $n > \dim(K)$, o bien $n < 0$, entonces $C_n(K; R) = 0$. Además, si σ es un 0-símlice, σ tiene solo una orientación y $C_0(K; R)$ es el R -módulo libre generado por los vértices de K . En esta memoria, abusando un poco del lenguaje, usaremos indistintamente la notación σ tanto para un símlice orientado como para su cadena elemental asociada, siempre que no haya lugar a confusión.

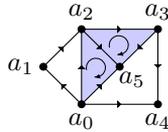
Sea el homomorfismo $\delta_n : C_n(K; R) \rightarrow C_{n-1}(K; R)$ definido como la extensión lineal de

$$\delta_n([v_0, \dots, v_n]) := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

donde \hat{v}_i significa que se elimina el vértice v_i . No es difícil comprobar que $\delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ (véase, por ejemplo, [1]). Entonces, se define el complejo de cadenas simplicial con coeficientes en R , denotado por $C(K; R)$. La homología de este complejo de cadenas origina la homología simplicial del complejo simplicial (orientado) K . Usaremos la notación $H_n(K; R) := H_n(C(K; R))$. No es difícil comprobar que la homología simplicial es independiente de la orientación elegida para el complejo simplicial K .

Observación 2.17. También cabe destacar que $H_0(K; R)$ es igual, salvo isomorfismo, a una suma directa de tantas copias de R como componentes conexas por caminos tenga el poliedro asociado a K [8]. Además, a grosso modo, podemos decir que, si $n \geq 1$, $H_n(K; R)$ captura el número de agujeros n -dimensionales del poliedro asociado a K . Finalmente, observamos que $H_n(K; R)$ es un R -módulo finitamente generado. Por tanto, si R es un dominio de ideales principales, se puede descomponer en una parte libre y otra de torsión.

Ejemplo 2.18. Sea el complejo simplicial K representado por el diagrama



donde las flechas representan la orientación de cada símplice. Por ejemplo, $[a_0, a_2, a_5] = [a_5, a_0, a_2]$ y $[a_0, a_2, a_5] = -[a_0, a_5, a_2]$. Los elementos de las bases de $C_1(K; R)$ y $C_2(K; R)$ son los símplices orientados de la correspondiente dimensión. Como solo hay una componente conexa por caminos, entonces

$$H_0(K; R) \cong R$$

Hallemos $H_1(K; R)$ y $H_2(K; R)$ mediante el algoritmo presentado al final de la sección anterior. Primero hay que hallar las matrices asociadas a δ_1 y δ_2 . Aplicando δ_1 a cada elemento básico tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_2([a_0, a_1]) &= a_1 - a_0, & \delta_2([a_0, a_2]) &= a_2 - a_0, & \delta_2([a_1, a_2]) &= a_2 - a_1, \\ \delta_2([a_0, a_5]) &= a_5 - a_0, & \delta_2([a_2, a_5]) &= a_5 - a_2, & \delta_2([a_0, a_4]) &= a_4 - a_0, \\ \delta_2([a_3, a_4]) &= a_4 - a_3, & \delta_2([a_3, a_5]) &= a_5 - a_3, & \delta_2([a_2, a_3]) &= a_3 - a_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

del mismo modo tenemos que

$$\delta_2([a_0, a_2, a_5]) = [a_2, a_5] - [a_0, a_5] + [a_0, a_2]$$

$$\delta_2([a_2, a_3, a_5]) = [a_3, a_5] - [a_2, a_5] + [a_2, a_3]$$

Así, las matrices asociadas son:

$$M(\delta_1) = \left(\begin{array}{c|cccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \hline a_0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad M(\delta_2) = \left(\begin{array}{c|cc} & w_1 & w_2 \\ \hline e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \\ e_4 & -1 & 0 \\ e_5 & 1 & -1 \\ e_6 & 0 & 0 \\ e_7 & 0 & 0 \\ e_8 & 0 & 1 \\ e_9 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

donde los e_i corresponden a las 1-cadenas a las que en (2.1) se les aplica el operador borde δ_2 por orden de lectura (por ejemplo $e_4 = [a_0, a_5]$), y $w_1 = [a_0, a_2, a_5]$ y $w_2 = [a_2, a_3, a_5]$. A estas matrices se les calcula su forma normal de Smith, resultando en:

$$S(\delta_1) = \left(\begin{array}{c|cccccccc} & e'_1 & e'_2 & e'_3 & e'_4 & e'_5 & e'_6 & e'_7 & e'_8 & e'_9 \\ \hline a'_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad S(\delta_2) = \left(\begin{array}{c|cc} & w'_1 & w'_2 \\ \hline e'_1 & 1 & 0 \\ e'_2 & 0 & 1 \\ e'_3 & 0 & 0 \\ e'_4 & 0 & 0 \\ e'_5 & 0 & 0 \\ e'_6 & 0 & 0 \\ e'_7 & 0 & 0 \\ e'_8 & 0 & 0 \\ e'_9 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

donde e'_i , w'_j y a'_k son elementos de las nuevas bases que se obtienen al realizar las operaciones elementales para obtener la forma normal de Smith.

Finalmente, se examina estas matrices para hallar la estructura de $H_1(K; R)$. En este caso, $\beta_1 = (\text{card}(\text{columnas cero de } S(\delta_1))) - (\text{card}(\text{filas no nulas de } S(\delta_2))) = 4 - 2 = 2$ y $s_i = 1$, para todo $i = 1, \dots, 5$. Como $R/\langle 1 \rangle = 0$, obtenemos que

$$H_1(K; R) \cong R^2$$

Para $H_2(K; R)$ solo necesitaremos δ_2 , puesto que no existen 3-símplices y por lo tanto $\delta_3 = 0$. Así, $\beta_2 = 0$ y $s_1 = 1 = s_2$. Por lo tanto,

$$H_2(K; R) \cong 0$$

Además, los R -módulos de homología de dimensión menos que 0 o mayor que 2 son triviales.

Toda aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ induce un **homomorfismo de complejos de cadenas simpliciales** $\varphi_{\#} : C(K; R) \rightarrow C(L; R)$. En efecto, para

cada $n \geq 0$, el correspondiente homomorfismo viene definido como la extensión lineal de la aplicación $(\varphi\#)_n : C_n(K; R) \rightarrow C_n(L; R)$ definida como

$$(\varphi\#)_n([v_0, \dots, v_n]) := \begin{cases} [\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n)] & \text{si } \varphi(v_i) \neq \varphi(v_j), \text{ para todo } i \neq j \\ 0 & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Nótese que, según esta definición, $(\varphi\#)_0 : C_0(K; R) \rightarrow C_0(L; R)$ viene dado por $(\varphi\#)_0(v) = \varphi(v)$, para cada vértice v de K .

Por otro lado, es sencillo comprobar que $(1_K)\# = 1_{C(K;R)}$ y dadas dos aplicaciones simpliciales $\varphi : K \rightarrow L$ y $\psi : L \rightarrow M$ entonces $(\psi \circ \varphi)\# = (\psi\#) \circ (\varphi\#)$.

Teniendo en cuenta esta descripción y la sección anterior, toda aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ induce un homomorfismo de R -módulos en homología para cada entero $n \geq 0$:

$$H_n(\varphi) := H_n(\varphi\#) : H_n(K; R) \rightarrow H_n(L; R)$$

Se suele denotar también por φ_* . Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

1. $(1_K)_* = 1_{H_n(K)}$
2. $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*$

A todo espacio triangulable se le puede considerar sus R -módulos de homología. Si K es una triangulación de X , entonces se puede definir, para una orientación cualquiera de K

$$H_n(X; R) := H_n(K; R)$$

Esta definición no depende de la triangulación escogida. Es más, si dos espacios triangulables X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $H_n(X; R)$ y $H_n(Y; R)$ son R -módulos isomorfos, para cada entero $n \geq 0$. Para una demostración más detallada de este resultado se puede consultar [1] o también [8].

Observación 2.19. Como es de esperar, y habida cuenta de todo lo visto en este capítulo, existe una variedad de software para calcular la homología simplicial de cualquier complejo simplicial (abstracto). Un ejemplo es el paquete para *GAP*, un programa de computación para álgebra discreta, llamado *Simplicial Homology* el cual hace uso de la forma normal de Smith.

Homología Persistente

En este último capítulo de la memoria se introducirá la homología persistente asociada a una filtración de complejos simpliciales originada por una nube de datos. Como ya se ha comentado en la introducción, la homología persistente mide la evolución de la homología en dicha filtración. Todo ciclo nace en una etapa de la filtración y puede desaparecer en alguna otra y, como veremos, esto se puede codificar de cierta manera.

Originalmente la representación gráfica de la homología persistente venía dada por los diagramas de persistencia. Pero más tarde, Zomorodian y Carlsson introducen una nueva representación, los códigos de barras, así como un algoritmo para determinarlos. Fue esta última la que se impuso de forma más contundente, y hoy en día es la más extendida, aunque se siguen usando las dos. Es por esto que se ha decidido desarrollar en este capítulo central de la memoria el artículo de Zomorodian y Carlsson [14].

Empezaremos viendo la descripción de la homología persistente, así como los diagramas de persistencia y los códigos de barras. Para ello, a toda filtración de complejos simpliciales se le va a asociar un objeto algebraico, denominado módulo de persistencia, sin más que aplicar la homología a dicha filtración. Con el fin de obtener de forma algorítmica los códigos de barras, veremos que todo módulo de persistencia de tipo finitamente generado sobre un anillo R puede verse como un $R[t]$ -módulo graduado finitamente generado. Aquí R debe ser un anillo conmutativo, unitario y noetheriano y $R[t]$ denota al correspondiente anillo de polinomios. Tomando como caso particular un cuerpo F , $F[t]$ es un dominio euclídeo por lo que se podrá usar el teorema de estructura para el caso graduado. Es en este teorema de estructura donde se podrá codificar los códigos de barras de la filtración original. Para acabar el capítulo y con él la memoria, veremos el algoritmo de cálculo de los códigos de barras dado por Zomorodian y Carlsson.

3.1. Homología Persistente

Partimos de una filtración de complejos simpliciales complejos simpliciales, presumiblemente una filtración de Čech o de Vietoris-Rips construida a partir de una nube de datos (ver Capítulo 1 de la memoria):

$$\mathcal{F} \equiv \emptyset \subset K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$$

Para cada entero $p \geq 0$ y todo $0 \leq i \leq j \leq n$, podemos considerar la familia de los R -módulos de homología de dimensión p en cada complejo simplicial de la filtración junto a la familia de homomorfismos $f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ inducidos por las inclusiones $\rho_{i,j} : K_i \hookrightarrow K_j$. Claramente $f_p^{i,j}$ tiene las siguientes propiedades:

1. $f_p^{i,i} = 1_{H_p(K_i)} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_i)$.
2. $f_p^{i,l} = f_p^{j,l} \circ f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_l)$ si $i \leq j \leq l$.

Obsérvese que esta construcción está perfectamente definida por la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow H_p(K_0) \xrightarrow{f_p^0} H_p(K_1) \xrightarrow{f_p^1} \dots \xrightarrow{f_p^{n-1}} H_p(K_n) = H_p(K)$$

donde $f_p^i := f_p^{i,i+1}$.

Definición 3.1. *Dados $p \geq 0$ y $0 \leq i \leq j \leq n$, se define el (i, j) -ésimo **R-módulo de homología persistente** de nivel p de la filtración \mathcal{F} a*

$$H_p^{i,j}(\mathcal{F}) = \text{Im}(f_p^{i,j})$$

Además, $\beta_p^{i,j} = \text{rang}(H_p^{i,j}(\mathcal{F}))$ es el **(i, j) -número de Betti** de nivel p de \mathcal{F} y en el caso específico (i, i) coincide con el número de Betti de $H_p(K_i)$.

El R -módulo de homología persistente $H_p^{i,j}(\mathcal{F})$ se puede reescribir considerando p -ciclos y p -bordes, de tal forma que se pueda apreciar cómo son los elementos de estos:

Proposición 3.2. *Sea \mathcal{F} una filtración de complejos simpliciales. Entonces se tiene un isomorfismo de R -módulos*

$$H_p^{i,j}(\mathcal{F}) \cong Z_p(K_i)/(B_p(K_j) \cap Z_p(K_i))$$

Demostración. En primer lugar, $Z_p(K_i)/(B_p(K_j) \cap Z_p(K_i))$ está bien definido pues tanto $B_p(K_j)$ como $Z_p(K_i)$ son submódulos de $C_p(K_j)$ y, por consiguiente $B_p(K_j) \cap Z_p(K_i)$ es submódulo de $Z_p(K_i)$. Luego por el Primer Teorema de Isomorfía, si tomamos el homomorfismo de R -módulos

$$\begin{array}{ccc} \eta_i : Z_p(K_i) & \longrightarrow & H_p(K_j) \\ z & \longmapsto & [z] \end{array}$$

tenemos que $Z_p(K_i)/\text{Ker}(\eta_i) \cong \text{Im}(\eta_i)$. Pero se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\eta_i) &= \{z \in Z_p(K_i) \mid \eta_i(z) = [0]\} = \{z \in Z_p(K_i) \mid [z] = [0]\} \\ &= \{z \in Z_p(K_i) \mid z \in B_p(K_j)\} = B_p(K_j) \cap Z_p(K_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_p^{i,j}) &= \{f_p^{i,j}([z]) \mid [z] \in H_p(K_i)\} = \{[\rho_{i,j}(z)] \mid z \in Z_p(K_i)\} \\ &= \{[z] \in H_p(K_j) \mid z \in Z_p(K_i)\} = \text{Im}(\eta_i) \end{aligned}$$

con lo que finalmente $Z_p(K_i)/(B_p(K_j) \cap Z_p(K_i)) \cong H_p^{i,j}(\mathcal{F})$. □

Usando homología persistente podemos ir viendo la evolución de las clases de homología a lo largo de la filtración:

Definición 3.3. Sean \mathcal{F} una filtración y un elemento no nulo $\alpha \in H_p(K_i)$. Diremos que α **nace** en K_i si

$$\alpha \notin H_p^{i-1,i}(\mathcal{F})$$

y que **muere entrando** en K_j si se dan las siguientes condiciones:

$$f_p^{i,j-1}(\alpha) \notin H_p^{i-1,j-1}(\mathcal{F}) \quad \text{y} \quad f_p^{i,j}(\alpha) \in H_p^{i-1,j}(\mathcal{F})$$

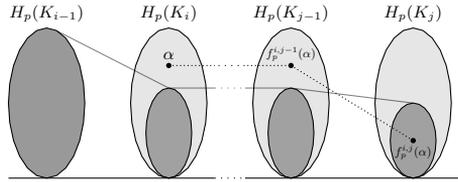


Figura 3.1. Esquema del nacimiento y muerte del elemento α , el cual nace en K_i y muere entrando en K_j .

En este caso el **índice de persistencia** de α es $\text{pers}(\alpha) = j - i$. Puede suceder que α nunca muera y por lo tanto su índice de persistencia sería $\text{pers}(\alpha) = \infty$.

La forma original de representar la homología persistente de una filtración \mathcal{F} es mediante los diagramas de persistencia. Para ello fijamos un sistema generador para cada $H_p(K_i)$ (recordemos que es un R -módulo finitamente generado). Si $\alpha \in H_p(K_i)$ es una clase generadora que nace en i y muere entrando en $j > i$, se considera el punto $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ (j puede tomar el valor $+\infty$ si α no muere nunca). Nótese que como $i < j$ todo punto (i, j) está por encima de la diagonal, además el índice de persistencia de α coincide con la distancia vertical del punto (i, j) a la diagonal. Es posible que existan otros generadores con punto asignado (i, j) . Es por esto que (i, j) viene dado con una multiplicidad. Concretamente, la multiplicidad $\mu_p^{i,j}$ de (i, j) es el número de clases generadoras independientes que nacen en i y mueren entrando en j .

Observación 3.4. No es difícil ver que la multiplicidad también se puede obtener con la siguiente fórmula:

$$\mu_p^{i,j} = (\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}) - (\beta_p^{i-1,j} - \beta_p^{i-1,j-1})$$

donde la primera diferencia del segundo miembro de la igualdad es el número de clases generadoras independientes que nacen en, o antes de, K_i y mueren entrando en K_j . La segunda es el número de clases generadoras independientes que nacen en, o antes de, K_{i-1} y mueren entrando en K_j . Así, la diferencia de estas dos diferencias da el número de clases generadoras independientes que nacen en K_i y mueren entrando en K_j . Para todo par de índices $0 \leq k \leq l \leq n$ y para todo $p \geq 0$, el (k, l) -número de Betti verifica

$$\beta_p^{k,l} = \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} \mu_p^{i,j}$$

Para mayor comodidad y evitar elementos de torsión se suele considerar homología con coeficientes en un cuerpo F , obteniéndose F -espacios vectoriales. Se puede considerar así una base para cada $H_p(K_i)$. Otra razón para tomar F -espacios vectoriales es con el fin de aplicar el teorema de estructura a $F[t]$ -módulos (debido que $F[t]$ es dominio de ideales principales al ser F un cuerpo). Esto se verá más claramente en las siguientes secciones.

Mientras mayor sea el índice de persistencia de α , más tiempo persiste α en la filtración. Si el índice de persistencia es pequeño, la clase se puede llegar a considerar "ruido". En el diagrama de persistencia, mientras más cerca esté el punto de la diagonal D más pequeño es el índice de persistencia.

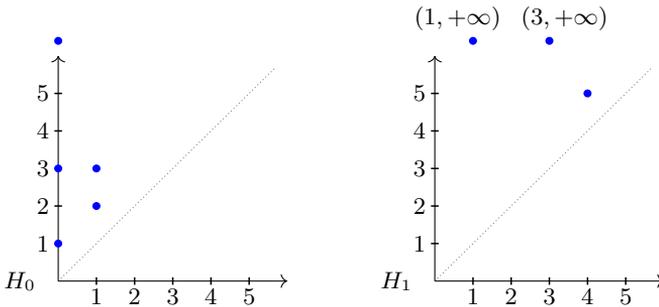


Figura 3.2. Diagramas de persistencia en dimensión $p = 0$ (a la izquierda) y en dimensión $p = 1$ (a la derecha) de la filtración del Ejemplo 1.11. A lo largo de la filtración se puede observar cómo van apareciendo partes conexas y uniéndose hasta quedar una sola. Esto queda reflejado por el diagrama de persistencia en dimensión 0. Lo mismo se puede apreciar con los agujeros 1-dimensionales, en las etapas 1, 3 y 4 aparecen estos agujeros, aunque solo uno se “rellena”, muriendo entrando en 5. En particular, aquí la multiplicidad es 1 para todos los puntos.

Como hemos comentado, la otra forma de representar la homología persistente es mediante los Códigos de Barras. La idea es la misma, representar las etapas de nacimiento y muerte de las clases generadoras, pero usando segmentos en vez de puntos. Claramente, las clases que más persisten son las que tienen segmentos más largos. Tiene la ventaja de poder representar en el mismo gráfico homología de diferentes dimensiones y además de poder observar las distintas clases que nacen y mueren en las mismas etapas.

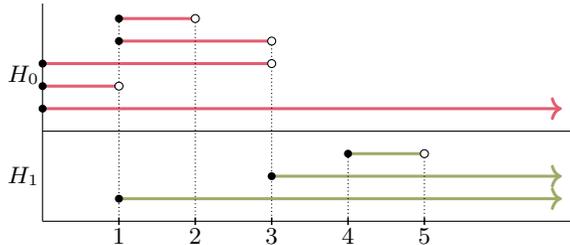


Figura 3.3. Código de barras del Ejemplo 1.11. En rojo se representa el código de barras 0-dimensional y en verde el 1-dimensional. Se puede observar las mismas particularidades que en el diagrama de persistencia.

Los códigos de barras tienen una base algebraica implícita importante. Esto se verá en las siguientes secciones mediante los denominados módulos de persistencia sobre R , o sus $R[t]$ -módulos graduados asociados.

3.2. Módulos de Persistencia

Podemos tomar una generalización de la homología persistente si en lugar de los R -módulos de homología y la inclusión inducida consideramos una colección general de R -módulos y una colección de homomorfismos que cumpla las propiedades análogas.

Por motivos que se verán claramente más adelante, en esta sección y en las siguientes haremos uso de teoría de categorías a un nivel elemental. Aparecerán términos como categoría, funtor o isomorfismo de categorías. Para el lector que no esté familiarizado con esta terminología puede consultarse el libro de Saunders MacLane [11].

Observación 3.5. Es importante hacer notar que en realidad se ha estado considerando la teoría de categorías de forma implícita en esta memoria, en los Capítulos 1 y 2. A partir de esta sección será ineludible su uso explícito.

Definición 3.6. *Un módulo de persistencia sobre R consiste en un par*

$$\mathcal{M} = (\{M_i\}_{i=0}^{\infty}, \{\varphi_{i,j}\}_{0 \leq i \leq j})$$

donde cada M_i es un R -módulo y, para cada $i \leq j$, $\varphi_{i,j} : M_i \rightarrow M_j$ es un homomorfismo de R -módulos que satisface las siguientes propiedades:

1. $\varphi_{i,i} = 1_{M_i} : M_i \rightarrow M_i$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$
2. $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$ si $i \leq j \leq k$.

Obsérvese que todo módulo de persistencia está perfectamente determinado por la sucesión

$$\mathcal{M} : M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$$

donde $\varphi_i := \varphi_{i,i+1} : M_i \rightarrow M_{i+1}$. Esto es evidente teniendo en cuenta que $\varphi_{i,j} := \varphi_i \circ \dots \circ \varphi_{j-1}$.

Podemos relacionar los módulos de persistencia entre sí mediante homomorfismos.

Definición 3.7. *Un homomorfismo de módulos de persistencia $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ consiste en una familia de homomorfismos de R -módulos $\xi = \{\xi_i : M_i \rightarrow M'_i\}_{i=0}^{\infty}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo para todo $i \leq j$:*

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_{i,j}} & M_j \\ \xi_i \downarrow & & \downarrow \xi_j \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_{i,j}} & M'_j \end{array}$$

La identidad en \mathcal{M} , $1_{\mathcal{M}}$, consiste en la familia de identidades $\{1_{M_i} : M_i \rightarrow M_i\}_{i=0}^{\infty}$. No hay dificultad en ver que para dos homomorfismos de módulos de persistencia $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ y $\xi' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}''$, la aplicación $\xi' \circ \xi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_3$ definida como la familia $\xi' \circ \xi = \{\xi'_i \circ \xi_i : M_i \rightarrow M''_i\}$ es un homomorfismo de módulos de persistencia. Con esto tenemos la categoría de módulos de persistencia sobre R , denotada por **R-PersMod**.

Definición 3.8. *Un módulo de persistencia \mathcal{M} se dice que es de **tipo finito** si existe $D \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $D \leq i \leq j$, $\varphi_{i,j} : M_i \xrightarrow{\cong} M_j$ es un isomorfismo de R -módulos. Además, \mathcal{M} es de **tipo finitamente generado** si es de tipo finito y cada M_i es finitamente generado. En el caso de que cada M_i está finitamente presentado entonces se dice que \mathcal{M} es de **tipo finitamente presentado**.*

3.3. R -módulos graduados

En esta sección veremos una forma diferente, pero equivalente, de representar los módulos de persistencia. Esta forma será a través de los llamados

R -módulos graduados. Como veremos en secciones posteriores esto será de gran importancia a la hora del cálculo de los códigos de barras. Comenzamos con la definición de anillo graduado.

Definición 3.9. *Un anillo unitario R se dice que es \mathbb{N} -graduado, o simplemente **graduado**, si R admite una descomposición*

$$R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$$

donde cada R_i es un grupo abeliano y además se cumple que $r_i \cdot r_j \in R_{i+j}$, para todo $r_i \in R_i$ y $r_j \in R_j$.

Los elementos de R son pues de la forma $r = \sum_{i=0}^{\infty} r_i$ con $r_i \in R_i$ y $r_i = 0$ excepto un número finito de ellos. A todo elemento de R_i se le denomina **elemento homogéneo** de grado i . Un **ideal graduado** es un ideal generado por elementos homogéneos.

Observación 3.10. Obsérvese que hemos considerado a \mathbb{N} como el conjunto de los números naturales con el 0 incluido.

Ejemplo 3.11. Sea R un anillo arbitrario. El anillo de polinomios con coeficientes con coeficientes en R de una variable, $R[t]$, es un anillo graduado donde

$$R_i = R \cdot t^i = \{r \cdot t^i \mid r \in R\}$$

De forma similar los módulos también pueden ser graduados:

Definición 3.12. *Sea un anillo graduado R . Un R -módulo M se dice que es un **R -módulo graduado** si admite una descomposición por grupos abelianos:*

$$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$$

tal que para todo $r_i \in R_i$ y $m_j \in M_j$ se tiene que $r_i \cdot m_j \in M_{i+j}$. A todo $m_i \in M_i$ se le dice que es un **elemento homogéneo** de grado i .

Observación 3.13. Nótese que, por definición, todo R -módulo graduado es, en particular, un R -módulo.

Si M y N son R -módulos graduados, un homomorfismo de R -módulos graduados $f : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de R -módulos tal que conserva la graduación, es decir, $f(M_i) \subseteq N_i$, para cada i . En particular, la identidad en un módulo graduado y la composición entre homomorfismos de R -módulos graduados están bien definidas. Esto nos da la estructura de la categoría de R -módulos graduados, que denotaremos por **R -Gr-Mod**.

Las condiciones de finitud en módulos graduados es la misma que para R -módulos generales. Es decir, M se dice **finitamente generado** si M es finitamente generado como R -módulo, al igual que si está **finitamente presentado**. Un R -módulo graduado M es **libre** si lo es como R -módulo. Si todos los elementos de la base de M son homogéneos esta se dice que es una **base homogénea**. Cabe decir que finitamente presentado implica que es finitamente generado, pero no se asegura la otra implicación, salvo que R sea noetheriano como se indica en el siguiente lema. Recordemos que un anillo unitario R se dice que es **noetheriano** si se satisface la condición de cadena ascendente para toda cadena de ideales; equivalentemente, si todo ideal de R está finitamente generado.

Lema 3.14. *Si R es un anillo unitario y noetheriano, entonces todo R -módulo finitamente generado es finitamente presentado. Si además R es conmutativo, entonces el anillo de polinomios $R[t]$ es también noetheriano.*

La demostración de la primera afirmación puede ser consultada en [10]. Mientras que la segunda es el Teorema de la Base de Hilbert y se puede ver una demostración en [6].

3.4. Relación entre Módulos Graduados y Módulos de Persistencia

Veremos en esta sección que las categorías $R\text{-PersMod}$ y $R[t]\text{-Gr-Mod}$ son isomorfas. Así, trabajar con módulos de persistencia sobre un anillo R será equivalente a trabajar con $R[t]$ -módulo graduados. Además las condiciones de finitud se “*trasladan*” entre las categorías. Esto nos permitirá, mediante el teorema de estructura en el caso particular graduado, conectar con el cálculo de los códigos de barras.

Será de gran importancia las propiedades que verifique el anillo R . En el trabajo de Zomorodian y Carlsson [14], se introduce un teorema sin demostración (aunque hacen referencia a la teoría de Artin-Rees en álgebra conmutativa) en el que se relacionan mediante un isomorfismo la categoría de los módulos de persistencia de tipo finitamente generado y la categoría de los $R[t]$ -módulos graduados finitamente generados. Sin embargo, el enunciado de dicho teorema no es rigurosamente cierto puesto que al anillo R le faltan propiedades para que se verifique. En [5], Corbet y Kerber dan con el enunciado correcto al exigir que el anillo R , además de conmutativo y unitario, tenga que ser noetheriano. Si no se le exige nada al anillo (solamente ser unitario), Corbet y Kerber dan un enunciado alternativo sustituyendo finitamente generado por finitamente presentado. A continuación veremos un resultado general.

Proposición 3.15. *Para R un anillo unitario, las categorías $R\text{-PersMod}$ y $R[t]\text{-Gr-Mod}$ son isomorfas.*

Demostración. En primer lugar, definiremos un funtor $\alpha : R\text{-PersMod} \rightarrow R[t]\text{-Gr-Mod}$. Si $\mathcal{M} = (\{M_i\}_{i=0}^{\infty}, \{\varphi_{i,j}\}_{0 \leq i \leq j})$ es un módulo de persistencia, se define

$$\alpha(\mathcal{M}) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$$

La estructura de $R[t]$ -módulo graduada viene dada con la siguiente fórmula

$$t \cdot m_i := \varphi_i(m_i)$$

obsérvese que se extiende de forma evidente para cualquier polinomio $p \in R[t]$ y cualquier elemento de $\bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$, dando lugar a una operación externa.

Por otro lado, si $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ es un homomorfismo de módulos de persistencia sobre R entonces se define $\alpha(\xi) : \alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \alpha(\mathcal{M}')$ como:

$$\alpha(\xi) \left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i \right) := \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(m_i)$$

No es difícil ver que $\alpha(\xi)$ es un homomorfismo de $R[t]$ -módulos graduados. En efecto, por un lado se comprueba que es un homomorfismo de grupos. Además es homomorfismo de $R[t]$ -módulos:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi)(t \cdot m_i) &= \alpha(\xi)(\varphi_i(m_i)) = \xi_{i+1}(\varphi_i(m_i)) = \varphi'_i(\xi_i(m_i)) \\ &= t \cdot \xi_i(m_i) = t \cdot \alpha(\xi)(m_i) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que $\alpha(\xi)(M_i) \subseteq M'_i$ pues $\alpha(\xi)(M_i) = \xi_i(M_i) \subseteq M'_i$.

Una rápida comprobación demuestra que $\alpha(1_{\mathcal{M}}) = 1_{\alpha(\mathcal{M})}$ y si $\xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ y $\xi' : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}''$ son homomorfismos de módulos de persistencia, entonces $\alpha(\xi' \circ \xi) = \alpha(\xi') \circ \alpha(\xi)$.

A continuación se define otro funtor $\beta : R[t]\text{-Gr-Mod} \rightarrow R\text{-PersMod}$, que será el inverso de α . Si $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ es un $R[t]$ -módulo graduado, entonces se considera el siguiente módulo de persistencia:

$$\beta(M) := M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots$$

donde $\varphi_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ es el homomorfismo de R -módulos definido como $\varphi_i(m_i) := t \cdot m_i$.

Dado un homomorfismo de $R[t]$ -módulos graduados $\eta : M \rightarrow M'$ se considera la restricción $\eta_i := \eta|_{M_i} : M_i \rightarrow M'_i$ (recordemos que por definición $\eta(M_i) \subseteq M'_i$). Así podemos construir $\beta(\eta) = \{\eta_i : M_i \rightarrow M'_i\}_{i=0}^{\infty}$ y como $\eta(t \cdot m_i) = t \cdot \eta(m_i)$, el siguiente cuadrado es conmutativo para cada i :

$$\begin{array}{ccc}
 M_i & \xrightarrow{\varphi_i} & M_{i+1} \\
 \eta_i \downarrow & & \downarrow \eta_{i+1} \\
 M'_i & \xrightarrow{\varphi'_i} & M'_{i+1}
 \end{array}$$

Finalmente, una simple comprobación demuestra que

$$\beta \circ \alpha = 1_{R\text{-PersMod}} \text{ y } \alpha \circ \beta = 1_{R[t]\text{-Gr-Mod}}$$

y por tanto $R\text{-PersMod}$ y $R[t]\text{-Gr-Mod}$ son categorías isomorfas. \square

Con el lema siguiente veremos que las condiciones de finitud se trasladan entre las categorías mediante el isomorfismo anteriormente descrito. Aunque no es complicada, por motivos de extensión la demostración del siguiente lema se omite, pero puede ser consultada en el trabajo de Corbet y Kerber [5].

Lema 3.16. *Sea R un anillo unitario. Si un módulo de persistencia \mathcal{M} sobre R es de tipo finitamente presentado, entonces $\alpha(\mathcal{M})$ es finitamente presentado. Recíprocamente, si un $R[t]$ -módulo graduado M es finitamente presentado, entonces $\beta(M)$ es de tipo finitamente presentado.*

El siguiente resultado es la versión corregida del teorema que enunciaron Zomorodian y Carlsson en el trabajo [14]:

Teorema 3.17 (Representación de Zomorodian-Carlsson). *Sea R un anillo unitario. La categoría de los $R[t]$ -módulos graduados finitamente presentados es isomorfa a la categoría de los módulos de persistencia sobre R de tipo finitamente presentados.*

Demostración. Por la Proposición 3.15, $\alpha : R\text{-PersMod} \rightarrow R[t]\text{-Gr-Mod}$ es isomorfismo, por lo que teniendo en cuenta el Lema 3.16, la restricción de α entre los correspondientes objetos finitamente presentados es un funtor bien definido. De forma análoga se razona para β . El resto de la demostración es evidente. \square

Un enunciado alternativo es el siguiente (que por el Lema 3.14 y el Teorema 3.17 la demostración es también inmediata):

Teorema 3.18. *Sea R un anillo conmutativo y noetheriano. Entonces la categoría de los $R[t]$ -módulos graduados finitamente generados es isomorfa a la categoría de los módulos de persistencia de tipo finitamente generados.*

3.5. Códigos de barras asociado a un módulo de persistencia sobre un cuerpo

Dado \mathcal{M} un módulo de persistencia finitamente generado sobre un anillo conmutativo, unitario y noetheriano, vimos en el Teorema 3.18 que $\alpha(\mathcal{M})$ es un

$R[t]$ -módulo graduado finitamente generado. El siguiente paso es hacer uso del teorema de estructura para el caso graduado. Sin embargo $R[t]$ en general no es un dominio de ideales principales. Una condición suficiente para que se de esta condición es que el anillo R sea un cuerpo. Concretamente, si denotamos por F a tal cuerpo entonces es bien conocido que $F[t]$ es un dominio euclídeo y en particular un dominio de ideales principales.

Comenzamos viendo el enunciado del teorema de estructura para el caso graduado. Para su demostración se aplica el teorema de estructura general ajustando de modo adecuado las graduaciones. Por tanto no insistimos en dar muchos más detalles para su demostración.

Teorema 3.19 (Teorema de estructura para módulos graduados). *Sea M un $F[t]$ -módulo graduado finitamente generado. Entonces M se puede descomponer de forma única salvo isomorfismos como*

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{n-m} t^{a_i} \cdot F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m t^{b_j} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{c_j} \rangle} \right)$$

con $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$ y $c_j > 0$.

Demostración. Al aplicar a M el Teorema de Estructura 2.11, este se descompone en la parte libre y en la de torsión.

La parte libre está formada por un número de copias de $F[t]$. La parte de torsión es otro número de copias de $\frac{F[t]}{\langle s_i \rangle}$, en los que el ideal $\langle s_i \rangle$ es un ideal graduado y por lo tanto está generado por elementos homogéneos así que $\langle s_i \rangle = \langle t^c \rangle$ para cierto $c \in \mathbb{N}$. Para que el isomorfismo mantenga la graduación hay que ajustar los grados. Esto se consigue con los elementos de la forma t^{a_i} y t^{b_i} . Se dejan los detalles al lector. \square

Observación 3.20. El teorema de estructura para R -módulos graduados se puede generalizar más para un R -módulo graduado M sobre un dominio de ideales principales graduado D , descomponiéndose de forma única en la forma:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n \Sigma^{\alpha_i} D \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^m \Sigma^{\beta_j} \frac{D}{d_j D} \right)$$

donde $d_j \in D$ son elementos homogéneos de tal manera que d_j divide a d_{j+1} , $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$ y Σ^α denota la correspondiente traslación de grado por α .

Esta descomposición es la que nos permitirá más adelante obtener los momentos de nacimiento y muerte de las clases de homología persistente. Primero introduciremos un módulo de persistencia particular: el intervalo de persistencia.

Definición 3.21. Un *intervalo de persistencia*, o \mathcal{P} -*intervalo*, es un par ordenado $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ con $m < n$. Para cada intervalo de persistencia se define su módulo de persistencia asociado, denotado por $I(m, n)$, como el par $(\{I(m, n)_i\}_{i=0}^\infty, \{\varphi_i\}_{i=0}^\infty)$ donde:

$$I(m, n)_i = \begin{cases} F & \text{si } m \leq i < n \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}, \quad \varphi_i = \begin{cases} 1_F & \text{si } m \leq i < n \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

siempre que $n < +\infty$. Para el caso que $n = +\infty$ se define:

$$I(m, +\infty)_i = \begin{cases} F & \text{si } m \leq i \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}, \quad \varphi_i = \begin{cases} 1_F & \text{si } m \leq i \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

Observación 3.22. Como se puede entrever, los intervalos de persistencia son cada uno de los segmentos del código de barras asociado a un módulo de persistencia de tipo finitamente generado.

Definición 3.23. La suma directa entre dos módulos de persistencia se define como

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} := (\{M_i \oplus N_i\}_{i=0}^n, \{\varphi_{i,j} \oplus \psi_{i,j}\}_{i \leq j})$$

Análogamente, se define para una familia arbitraria de módulos de persistencia.

Si $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}'$ y ninguno de los dos es nulo se dice que \mathcal{M} es **descomponible**. Por otro lado, se dice que \mathcal{M} es **indescomponible** si no es posible ponerlo como suma directa de dos módulos de persistencia no nulos.

Los tres siguientes lemas nos permitirán asociar a un módulo graduado finitamente generado una colección de intervalos de persistencia indescomponibles.

Lema 3.24. $I(m, n)$ y $I(m, +\infty)$ son módulos de persistencia indescomponibles para naturales cualesquiera n, m con $n < m$.

Demostración. Si $I(m, n)$ o $I(m, +\infty)$ fueran descomponibles entonces en particular se tendría una descomposición

$$F \cong A \oplus B$$

para ciertos F -espacios vectoriales A y B . Necesariamente, al ser espacios vectoriales, no existe parte de torsión y por lo tanto $A \cong F^p$ y $B \cong F^q$. Así, $F \cong F^{p+q}$ y por criterios de dimensión $p = 1$ y $q = 0$, o bien, $p = 0$ y $q = 1$. \square

Para el siguiente lema se recuerda que la suma directa de dos R -módulos graduados M y N es un R -módulo graduado $M \oplus N = \bigoplus_{i=0}^\infty (M \oplus N)_i$ donde

$$(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i$$

y la operación externa viene definida por

$$r \cdot (m_i, n_i) = (r \cdot m_i, r \cdot n_i), \text{ o equivalentemente, } r \cdot (m_i + n_i) = r \cdot m_i + r \cdot n_i$$

Lema 3.25. *El funtor $\alpha : F\text{-PersMod} \rightarrow F[t]\text{-Gr-Mod}$ y su inverso conservan las sumas directas finitas, salvo isomorfismos.*

Demostración. Basta ver el resultado para las sumas directas binarias. Sean dos módulos de persistencia

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= N_0 \xrightarrow{\varphi_0} N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \\ \mathcal{N}' &= N'_0 \xrightarrow{\varphi'_0} N'_1 \xrightarrow{\varphi'_1} N'_2 \xrightarrow{\varphi'_2} \dots \end{aligned}$$

Definimos la aplicación $f : \alpha(\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}') \rightarrow \alpha(\mathcal{N}) \oplus \alpha(\mathcal{N}')$ como

$$f \left(\sum_{i=0}^{\infty} (n_i, n'_i) \right) := \left(\sum_{i=0}^{\infty} n_i, \sum_{i=0}^{\infty} n'_i \right)$$

Es sencillo comprobar que esta aplicación es biyectiva, conserva el grado y es un homomorfismo de grupos. Además, es un homomorfismo de $F[t]$ -módulos puesto que

$$\begin{aligned} f \left(t \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (n_i, n'_i) \right) &= f \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_i \oplus \varphi'_i)(n_i, n'_i) \right) = f \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_i(n_i), \varphi'_i(n'_i)) \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(n_i), \sum_{i=0}^{\infty} \varphi'_i(n'_i) \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} t \cdot n_i, \sum_{i=0}^{\infty} t \cdot n'_i \right) \\ &= t \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} n_i, \sum_{i=0}^{\infty} n'_i \right) = t \cdot f \left(\sum_{i=0}^{\infty} (n_i, n'_i) \right) \end{aligned}$$

El hecho que β conserve las sumas directas finitas es consecuencia de que α las conserva y uno es funtor inverso del otro. \square

Observación 3.26. Nótese que el lema es igualmente válido si se trabaja para cualquier anillo R .

Lema 3.27. *Se tienen los siguientes isomorfismos de $F[t]$ -módulos graduados.*

$$\begin{aligned} \alpha(I(m, n)) &\cong t^m \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n-m} \rangle} \\ \alpha(I(m, +\infty)) &\cong t^m \cdot F[t] \end{aligned}$$

Demostración. Por definición,

$$\alpha(I(m, n)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} I(m, n)_i = \bigoplus_{i=m}^{n-1} F \cong \bigoplus_{i=0}^{n-m-1} F$$

Hacemos notar que los elementos de $t^m \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n-m} \rangle}$ son de la forma

$$t^m \cdot (a_0 + a_1 \cdot t + \dots a_{n-m-1} t^{n-m-1}) = a_0 \cdot t^m + a_1 \cdot t^{m+1} + \dots a_{n-m-1} t^{n-1}$$

Por tanto existe el isomorfismo de $F[t]$ -módulos graduados

$$f : \bigoplus_{i=0}^{n-m-1} F \rightarrow t^m \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n-m} \rangle}$$

definido como $f(a_0, \dots, a_{n-m-1}) = a_0 \cdot t^m + a_1 \cdot t^{m+1} + \dots a_{n-m-1} t^{n-1}$.

De forma análoga también se puede ver que

$$\alpha(I(m, +\infty)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} I(m, +\infty)_i = \bigoplus_{i=m}^{\infty} F \cong t^m \cdot F[t]$$

□

Teniendo en cuenta los lemas anteriores, se tiene que todo módulo de persistencia de tipo finitamente generado y sobre un cuerpo, tiene una descomposición singular. Dicha descomposición determina los códigos de barras del módulo de persistencia original:

Teorema 3.28. *Sea \mathcal{M} un módulo de persistencia sobre F de tipo finitamente generado. Entonces \mathcal{M} se descompone en una suma directa finita de módulos de persistencia indescomponibles de la forma $I(m, n)$ y $I(m, +\infty)$. La multiplicidad de cada módulo indescomponible está únicamente determinada.*

Demostración. Sea un módulo de persistencia \mathcal{M} . Teniendo en cuenta el Teorema 3.19 aplicado al $R[t]$ -módulo graduado $\alpha(\mathcal{M})$ y los lemas 3.25 y 3.27, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{M}) &\cong \left(\bigoplus_{i=1}^r t^{a_i} \cdot F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s t^{b_j} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{c_j} \rangle} \right) \\ &\cong \left(\bigoplus_{i=1}^r \alpha(I(a_i, +\infty)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s \alpha(I(b_j, c_j + b_j)) \right) \\ &\cong \alpha \left(\left(\bigoplus_{i=1}^r I(a_i, +\infty) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s I(b_j, c_j + b_j) \right) \right) \end{aligned}$$

Aplicando el functor β a ambos miembros del isomorfismo, y teniendo en cuenta que todo functor conserva isomorfismos, obtenemos el isomorfismo

$$\mathcal{M} \cong \left(\bigoplus_{i=1}^r I(a_i, +\infty) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s I(b_j, c_j + b_j) \right)$$

□

Observación 3.29. Nótese que si en el teorema anterior \mathcal{M} es el módulo de persistencia proveniente de aplicar homología simplicial (con coeficientes en un cuerpo) a una filtración de complejos simpliciales, entonces cada uno de los módulos de persistencia indescomponibles que conforman a \mathcal{M} se corresponde exactamente con un segmento de su código de barras asociado. Así, por el teorema anterior se puede definir de forma obvia el código de barras de cualquier módulo de persistencia (sobre un cuerpo) de tipo finitamente generado. Evidentemente, este código de barras es un invariante por la clase de isomorfismo del módulo de persistencia \mathcal{M} .

3.6. Algoritmo de cálculo para los códigos de barras

En esta sección expondremos un algoritmo, introducido por Carlsson y Zomorodian, que nos permitirá calcular el código de barras (o intervalos de persistencia) de un módulo de persistencia originado al aplicar homología simplicial (con coeficientes en un cuerpo) a una filtración de complejos simpliciales. No obstante, lo haremos con un poco más de generalidad, comenzando a partir de los denominados complejos de persistencia. Estos no son más que una sucesión de complejos de cadenas junto con homomorfismos de transición entre ellos. Al comenzar a partir de un complejo de persistencia (sobre un cuerpo F) podremos ser capaces de construir un complejo de cadenas de $F[t]$ -módulos graduados específico, cuya homología coincide exactamente con el $F[t]$ -módulo graduado asociado a la homología del complejo de persistencia original. Por tanto, para calcular los códigos de barras deberemos hallar la parte libre y la parte de torsión de este $F[t]$ -módulo de homología. Aquí, el algoritmo visto en la Sección 2.3 del Capítulo 2 entrará en juego. Sin embargo no haremos uso de la forma normal de Smith del operador borde. En su lugar calcularemos su Forma Escalonada por Columnas. Como veremos, esta es una forma equivalente pero mucho menos costosa computacionalmente que la forma normal de Smith. Terminaremos la memoria dando un ejemplo ilustrativo de este algoritmo.

Seguiremos suponiendo que el anillo R es un cuerpo F , aunque se hace notar que ciertos resultados funcionan igualmente para un anillo conmutativo y unitario R arbitrario.

Definición 3.30. *Un complejo de persistencia consiste en un par*

$$C = (\{(C^i, \delta^i)\}_{i=0}^{\infty}, \{\varphi^{i,j}\}_{0 \leq i \leq j})$$

donde (C^i, δ^i) es un complejo de cadenas de F -espacios vectoriales y $\varphi^{i,j} : C^i \rightarrow C^j$ es un homomorfismo de complejos de cadenas que cumple

- i. $\varphi^{i,i} = 1_{C^i}$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$
- ii. $\varphi^{j,k} \circ \varphi^{i,j} = \varphi^{i,k}$, si $0 \leq i \leq j \leq k$.

Al complejo de persistencia se le dice que es de **tipo finitamente generado** si para cada complejo de cadenas C^i se tiene que C_j^i es un F -espacio vectorial de dimensión finita para todo j y existe $m \geq 0$ tal que $\varphi^i := \varphi^{i,i+1} : C^i \rightarrow C^{i+1}$ es isomorfismo de complejos de cadenas, para todo $i \geq m$. Se dice que C es de **tipo no negativo** si cada $C_j^i = 0$ para todo $j < 0$ e $i \geq 0$.

Un complejo de persistencia puede representarse gráficamente por un diagrama de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \delta_3^0 \downarrow & & \delta_3^1 \downarrow & & \delta_3^2 \downarrow & & \\
 C_2^0 & \xrightarrow{\varphi_2^0} & C_2^1 & \xrightarrow{\varphi_2^1} & C_2^2 & \xrightarrow{\varphi_2^2} & \dots \\
 \delta_2^0 \downarrow & & \downarrow \delta_2^1 & & \downarrow \delta_2^2 & & \\
 C_1^0 & \xrightarrow{\varphi_1^0} & C_1^1 & \xrightarrow{\varphi_1^1} & C_1^2 & \xrightarrow{\varphi_1^2} & \dots \\
 \delta_1^0 \downarrow & & \downarrow \delta_1^1 & & \downarrow \delta_1^2 & & \\
 C_0^0 & \xrightarrow{\varphi_0^0} & C_0^1 & \xrightarrow{\varphi_0^1} & C_0^2 & \xrightarrow{\varphi_0^2} & \dots \\
 \delta_0^0 \downarrow & & \downarrow \delta_0^1 & & \downarrow \delta_0^2 & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

o de forma más compacta

$$C \equiv C^0 \xrightarrow{\varphi^0} C^1 \xrightarrow{\varphi^1} C^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

donde $\varphi^i := \varphi^{i,i+1}$ para todo entero $i = 0, 1, 2, \dots$

Nótese que C^i no es F -espacio vectorial sino un complejo de cadenas. Así, al no ser C un módulo de persistencia no se puede aplicar el funtor α . Sin embargo, fijando cada nivel j del complejo de persistencia sí existe un módulo de persistencia determinado por

$$C_j^\bullet \equiv C_j^0 \xrightarrow{\varphi_j^0} C_j^1 \xrightarrow{\varphi_j^1} C_j^2 \xrightarrow{\varphi_j^2} \dots$$

y así a cada C_j^\bullet se le puede aplicar el funtor α :

$$\alpha(C_j^\bullet) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} C_j^i, \quad t \cdot m_i = \varphi_j^i(m_i) \in C_j^{i+1}$$

Además podemos considerar el homomorfismo de módulos de persistencia definido como $\delta_j^\bullet = \{\delta_j^i\}_{i=0}^\infty$ y por lo tanto $\alpha(\delta_j^\bullet) = \bigoplus_{i=0}^\infty \delta_j^i$. Obsérvese que como $\alpha(\delta_{j-1}^\bullet) \circ \alpha(\delta_j^\bullet) = \alpha(\delta_{j-1}^\bullet \circ \delta_j^\bullet) = \alpha(0) = 0$, la familia formada por cada $\alpha(C_j^\bullet)$ constituye un complejo de cadenas de $F[t]$ -módulos graduados. Por abuso de lenguaje denotaremos a dicho complejo de cadenas por $\alpha(C)$:

$$\alpha(C) \equiv \cdots \xrightarrow{\alpha(\delta_3^\bullet)} \alpha(C_2^\bullet) \xrightarrow{\alpha(\delta_2^\bullet)} \alpha(C_1^\bullet) \xrightarrow{\alpha(\delta_1^\bullet)} \alpha(C_0^\bullet) \xrightarrow{\alpha(\delta_0^\bullet)} \alpha(C_{-1}^\bullet) \xrightarrow{\alpha(\delta_{-1}^\bullet)} \cdots$$

donde el nivel p de $\alpha(C)$ está definido como

$$\alpha(C)_p := \alpha(C_p^\bullet)$$

Observación 3.31. Al ser F un anillo noetheriano, se tiene como consecuencia del Teorema 3.18 que, si C es un complejo de persistencia de tipo finitamente generado sobre F entonces $\alpha(C)$ es un complejo de cadenas de $F[t]$ -módulos (graduados) libres de rango finito. En efecto, si para cada $p \in \mathbb{Z}$, tomamos la unión de las bases de C_p^i y eliminamos los elementos que pertenezcan a $Im(\varphi_p^i)$ para todo i , tenemos así una base de $\alpha(C)_p$.

Por otro lado, la homología de dimensión p de cada complejo de cadenas del complejo de persistencia obtenemos el siguiente módulo de persistencia de F -espacios vectoriales:

$$H_p(C) \equiv H_p(C^0) \xrightarrow{f_p^0} H_p(C^1) \xrightarrow{f_p^1} H_p(C^2) \xrightarrow{f_p^2} \cdots$$

donde $f_p^i := H_p(\varphi_p^i)$.

Observación 3.32. Si el complejo de cadenas está determinado por una filtración de complejos simpliciales, con φ_p^i siendo la inclusión $\rho_{i,i+1}$, tenemos la construcción que se dio al comienzo de capítulo que desemboca en la homología persistente. Por esta razón, los complejos de persistencia que nos interesan serán de tipo finito y de tipo no negativo.

A este módulo de persistencia se le puede aplicar el funtor α construyendo así el $F[t]$ -módulo graduado $\alpha(H_p(C))$. Un sistema generador de $\alpha(H_p(C))$ consiste en la unión de las bases de cada $H_p(C_i)$. Podemos detectar el nacimiento y muerte de estas clases en la homología persistente si vemos el grado de estos elementos y si tienen o no torsión. Esto es posible mediante el Teorema de Estructura graduado junto a lo ya probado en la sección anterior.

Como veremos en el siguiente resultado, es indiferente hallar primero $\alpha(H_p(C))$ que hallar la homología a $\alpha(C)$, es decir, $H_p(\alpha(C))$.

Proposición 3.33. *Si C es un complejo de persistencia sobre F y $p \geq 0$ entonces se tiene un isomorfismo de $F[t]$ -módulos graduados:*

$$H_p(\alpha(C)) \cong \alpha(H_p(C))$$

Demostración. Es sencillo establecer la siguiente cadena de isomorfismos de $F[t]$ -módulos graduados:

$$\begin{aligned} H_p(\alpha(C)) &= Z_p(\alpha(C))/B_p(\alpha(C)) = Ker(\alpha(\delta_p^\bullet))/Im(\alpha(\delta_{p+1}^\bullet)) \\ &= Ker\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \delta_p^i\right)/Im\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \delta_{p+1}^i\right) \cong \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} Ker(\delta_p^i)\right)/\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} Im(\delta_{p+1}^i)\right) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} (Ker(\delta_p^i)/Im(\delta_{p+1}^i)) = \alpha(H_p(C)) \end{aligned}$$

□

Observación 3.34. Por comodidad y evitar más engorro en la notación identificaremos $\alpha(\delta)$ con δ a partir del siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.35. Sea C el complejo de persistencia asociado a la filtración de complejos simpliciales del Ejemplo 1.11. Podemos construir la siguiente tabla donde especificamos los elementos generadores e indicamos la graduación de cada elemento. Nótese que si un generador a aparece por primera vez en la posición i de la filtración (es decir, aparece por primera vez en $C(K_i)$) entonces tiene grado i . Por consiguiente, el generador $t \cdot a$ de $C(K_{i+1})$ tendrá grado $i + 1$. Además, por motivos de espacio en este ejemplo haremos uso de una notación más compacta para los generadores en la filtración, de tal modo que $a \cdot [a_1, a_2]$ lo denotaremos por ta_1a_2 y así para el resto de los generadores.

	$C(K_0)$	$C(K_1)$	$C(K_2)$	$C(K_3)$	$C(K_4)$	$C(K_5)$
0-cadenas elementales	a_0, a_1, a_2, a_3	$ta_0, ta_1, ta_2, ta_3, a_4, a_5$	$t^2a_0, t^2a_1, t^2a_2, t^2a_3, ta_4, ta_5$	${}^3ta_0, t^3a_1, t^3ta_2, t^3a_3, t^2a_4, t^2a_5$	$t^4a_0, t^4a_1, t^4a_2, t^4a_3, t^3a_4, t^3a_5$	$t^5a_0, t^5a_1, t^5a_2, t^5a_3, t^4a_4, t^4a_5$
1-cadenas elementales	a_0a_1	ta_0a_1, a_0a_2, a_1a_2	$t^2a_0a_1, ta_0a_2, ta_1a_2, a_0a_5, a_2a_5$	$t^3a_0a_1, t^2a_0a_2, t^2a_1a_2, ta_0a_5, t^2a_2a_5, a_0a_4, a_3a_4, a_3a_5$	$t^4a_0a_1, t^3a_0a_2, t^3a_1a_2, t^2a_0a_5, t^2a_2a_5, ta_0a_4, ta_3a_4, ta_3a_5, a_2a_3$	$t^5a_0a_1, t^4a_0a_2, t^4a_1a_2, t^3a_0a_5, t^3a_2a_5, t^2a_3a_4, t^2a_3a_5, ta_2a_3$
2-cadenas elementales			$a_0a_2a_5$	$ta_0a_2a_5$	$t^2a_0a_2a_5$	$t^3a_0, a_2a_5, a_2a_3a_5$

Con esta tabla podemos ver las bases de cada complejo de cadenas simplicial y cómo se comportan los simplices con la graduación. Se construyen las bases de $\alpha(C)_0, \alpha(C)_1$ y $\alpha(C)_2$ a partir de esta tabla, denotadas $\Lambda(\alpha(C)_i)$ con $i = 1, 2, 3$. Los elementos de las bases son las p -cadenas elementales de la tabla que no tienen coeficiente en t , es decir,

$$\Lambda(\alpha(C)_0) = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\alpha(C)_1) &= \{a_0a_1, a_0a_2, a_1a_2, a_0a_5, a_2a_5, a_0a_4, \\ &\quad a_3a_4, a_2a_5, a_3a_5\} \\ \Lambda(\alpha(C)_2) &= \{a_0a_2a_5, a_2a_3a_5\} \end{aligned}$$

Los $F[t]$ -módulos graduados $\alpha(C)_0$, $\alpha(C)_1$ y $\alpha(C)_2$ forman un complejo de cadenas $\alpha(C)$ junto al operador borde δ definido a partir del operador borde de cada complejo $C(K_i)$. Así, por ejemplo, $\delta_2 : \alpha(C)_2 \rightarrow \alpha(C)_1$ sería

$$\delta_2(a_0a_2a_5 + a_2a_3a_5) = \delta_2^2(a_0a_2a_5) + \delta_2^5(a_2a_3a_5)$$

siendo

$$\begin{aligned} \delta_2^2(a_0a_2a_5) &= a_2a_5 - a_0a_5 + ta_0a_2 \\ \delta_2^5(a_2a_3a_5) &= t^2a_3a_5 - t^3a_2a_5 + ta_2a_3 \end{aligned}$$

son los operadores bordes de dimensión 2 para los complejos $C(K_2)$ y $C(K_5)$, respectivamente.

Para hallar la homología de dimensión p de $\alpha(C)$ procederemos a hallar lo que denominaremos la Forma Escalonada por Columnas de δ_p . Veremos previamente unos lemas necesarios para ello.

Lema 3.36. *Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de $F[t]$ -módulos graduados libres de rango finito y sean $\{e_j\}_{j=1}^n$ y $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^m$ bases homogéneas de A y B respectivamente. Entonces todos los elementos de la matriz asociada $M = (M_{i,j})$ a f son homogéneos. Además se tiene que*

$$\deg(e_j) = \deg(M_{i,j}) + \deg(\hat{e}_i)$$

Demostración. Por definición, para cada j se tiene

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m M_{i,j} \hat{e}_i$$

Como f es un homomorfismo de $F[t]$ -módulos graduados, se tiene por conservación de grados que $\deg(f(e_j)) = \deg(e_j)$. Por lo tanto $\sum_{i=1}^m M_{i,j} \hat{e}_i$ es homogéneo de grado $\deg(e_j)$ pues no es posible que ningún sumando tenga un grado diferente. Así, necesariamente todo $M_{i,j}$ es homogéneo y además

$$\deg(e_j) = \deg(M_{i,j} \hat{e}_i) = \deg(M_{i,j}) + \deg(\hat{e}_i)$$

□

Lema 3.37. *Con las condiciones del lema anterior, la homogeneidad de la base de A y de los elementos de la matriz no se ve afectada por operaciones elementales por columnas de tipo 1 y 3, donde la operación de tipo 3 tiene que eliminar un elemento de la otra columna.*

Además, las mismas operaciones de tipo 1 y 3, pero por filas, mantienen la homogeneidad de la base de B .

Demostración. En ambos casos (columnas o filas) la operación de tipo 1 se tiene el resultado trivialmente pues no afecta a los grados.

Por cómo es la operación de tipo 3 existe un polinomio $q \in F[t]$ homogéneo tal que $M_{kj} = -q \cdot M_{ki}$. Entonces $\deg(M_{kj}) = \deg(q \cdot M_{ki}) = \deg(q) + \deg(M_{ki})$.

Es decir,

$$\deg(q) = \deg(M_{kj}) - \deg(M_{ki})$$

Si el elemento e_j se sustituye por $e_j + q \cdot e_i$, entonces este nuevo elemento es homogéneo:

$$\begin{aligned} \deg(qe_i) &= \deg(q) + \deg(e_i) = \deg(M_{kj}) - \deg(M_{ki}) + \deg(e_i) \\ &= (\deg(e_j) - \deg(\hat{e}_k)) - (\deg(e_i) - \deg(\hat{e}_k)) + \deg(e_i) \\ &= \deg(e_j) \end{aligned}$$

Por el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} \deg(qM_i) &= \deg(q) + \deg(M_i) = \deg(M_{kj}) - \deg(M_{ki}) + \deg(M_i) \\ &= (\deg(e_j) - \deg(\hat{e}_k)) - (\deg(e_i) - \deg(\hat{e}_k)) + (\deg(e_i) - \deg(\hat{e}_i)) \\ &= \deg(e_j) - \deg(\hat{e}_i) = \deg(M_{lj}) \end{aligned}$$

Finalmente, operando por filas con la operación 3 tenemos que $\deg(q) = \deg(M_{jk}) - \deg(M_{ik})$ pues $M_{jk} + qM_{ik} = 0$ y el elemento \hat{e}_i se sustituye por $\hat{e}_i - q\hat{e}_j$. Así que comprobemos finalmente que es homogéneo:

$$\begin{aligned} \deg(q\hat{e}_j) &= \deg(q) + \deg(\hat{e}_j) = \deg(M_{jk}) - \deg(M_{ik}) + \deg(\hat{e}_j) \\ &= (\deg(e_k) - \deg(\hat{e}_j)) - (\deg(e_k) - \deg(\hat{e}_i)) + \deg(\hat{e}_j) \\ &= \deg(\hat{e}_j) \end{aligned}$$

□

Si ordenamos la base de B por orden decreciente de grados entonces, claramente, los elementos de una misma columna se ordenan por orden creciente de grados. Como veremos a continuación, esta matriz se puede transformar en su **Forma Escalonada por Columnas**, que es una forma equivalente a la forma normal de Smith y menos costosa que ésta computacionalmente. De hecho solo se usan operaciones por columnas y no hay necesidad de anular todo elemento de la misma columna del pivote. La segunda parte de lema anterior nos sirve para comprobar que la Forma Escalonada por Columnas nos proporciona toda la información suficiente para obtener la Forma Normal de Smith.

El algoritmo para transformar la matriz en la Forma Escalonada por Columnas es el siguiente. Destacamos de nuevo que todas las operaciones elementales que se realizan son por columnas de tipo 1 y 3 según el Lema 3.37:

1. Elegir un pivote buscando el elemento de menor grado de la primera fila e intercambiar la columna en la que esté con la primera columna. Si se da el caso que no hay elemento no nulo en la primera fila se pasa al siguiente menor eliminando esta y la primera columna.
2. Eliminar los elementos de la misma fila mediante las operaciones de tipo 3 adecuadas, a la columna c_j se le resta la columna $q \cdot c_1$, donde

$$q = a_{1j} \cdot a_{11}^{-1} \cdot t^{d_j - d_1}, \text{ donde } d_i = \deg(M_{1j}) \text{ y } d_i = \deg(M_{11})$$

3. Una vez anulada la primera fila, excepto el pivote, se sigue con el siguiente menor del mismo modo hasta que no se pueda seguir más.

Al aplicarle este método a una matriz M asociada a un homomorfismo de $F[t]$ -módulos graduados libres de rango finito, la matriz final \tilde{M} quedaría de la forma:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \boxed{*} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ * & \boxed{*} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \boxed{*} & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde los asteriscos son elementos no nulos y los que están dentro de los cuadrados son los pivotes.

Lema 3.38. *Los pivotes de la matriz escalonada por columnas, que son el primer elemento no nulo de cada columna, coinciden con los elementos de la diagonal de la forma normal de Smith. Además los elementos de las bases tienen el mismo grado en ambas matrices.*

Demostración. Como el orden de la base $\{\hat{e}_i\}$ es decreciente por grados, al fijar una columna j el grado de los elementos de esa columna aumenta ya que $\deg(e_j)$ es también fijo. Por tanto

$$\deg(M_{ij}) = c - \deg(\hat{e}_i)$$

es monótona creciente, donde $c = \deg(e_j)$ está fijo. Con operaciones elementales por filas de tipo 3 se eliminan todos los elementos que estén por debajo del pivote ya que son todos elementos homogéneos de $F[t]$ con mayor grado y existe algún $q \in F[t]$ homogéneo que los anulen. Aseguramos que q es de la forma

$$q = b \cdot a^{-1} \cdot t^{(j-k)}$$

donde $a \cdot t^k$ es el pivote, $b \cdot t^j$ es un elemento arbitrario de la columna, y a^{-1} es el elemento inverso de $a \in F$ que existe al ser F cuerpo. Finalmente usando

operaciones de tipo 1 (tanto por filas como columnas) se ordenan los pivotes en la diagonal y de tal manera que dividan al siguiente. Por el Lema 3.37 sabemos que la homogeneidad y el grado de los elementos básicos se mantienen. \square

Sea C el complejo de persistencia asociado a una filtración de complejos simpliciales de K al tomar los complejos de cadenas simpliciales correspondientes. Consideremos el operador borde $\delta_p : \alpha(C)_p \rightarrow Z_{p-1}(\alpha(C))$. Obsérvese que podemos suponer que el codominio de δ_p es $Z_{p-1}(\alpha(C))$ puesto que $\delta_p((\alpha(C))_p) = B_{p-1}(\alpha(C)) \subseteq Z_{p-1}(\alpha(C))$. La **base estándar** de $\alpha(C)_p$ es la base homogénea determinada por la colección de las p -cadenas elementales de K , siendo K el mayor complejo de la filtración. El grado de una p -cadena elemental es el grado en el que aparece por primera vez.

Proposición 3.39. *Sea C un complejo de persistencia de tipo finitamente generado y no negativo sobre F , si $p \geq 0$ entonces δ_p se puede representar matricialmente en forma homogénea respecto de la base estándar de $\alpha(C)_p$ y una base homogénea de $Z_{p-1}(\alpha(C))$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre p y usaremos los lemas anteriores. Para $p = 1$,

$$\delta_1 : \alpha(C)_1 \longrightarrow \alpha(C)_0 = Z_0(\alpha(C))$$

es trivial pues la base estándar de $\alpha(C)_0$ funciona como base homogénea de $Z_0(\alpha(C))$. Supongamos que M^p es la representación matricial de δ_p respecto a una base estándar de $\alpha(C)_p$ y una base homogénea de $Z_{p-1}(\alpha(C))$.

Calcularemos una base homogénea de $Z_p(\alpha(C))$ a partir de la base estándar de $\alpha(C)_0$. Primero se ordena la base de $Z_{p-1}(\alpha(C))$ por orden decreciente de grados y tomamos la matriz M^p (la representación matricial de δ_p) y se transforma en su forma escalonada por columnas \tilde{M}^p . Por el Lema 3.38 tenemos que los elementos básicos correspondientes a las columnas sin pivotes, es decir nulas, de \tilde{M}^p son los elementos básicos de las columnas no nulas de la forma normal de Smith de M^p y por la Proposición 2.15 estos elementos forman la base de $Z_p(\alpha(C))$.

Finalmente, para representar δ_{p+1} respecto a la base estándar de $\alpha(C)_{p+1}$ y la base de $Z_p(\alpha(C))$ es suficiente con eliminar las filas de M^{p+1} que se corresponden a las columnas pivotes de \tilde{M}^p . En efecto, nótese que al tenerse $\delta_p \circ \delta_{p+1} = 0$ se tiene que el correspondiente producto matricial es cero: $M^p \cdot M^{p+1} = 0$. Esta relación se mantiene para toda operación elemental de tipo 1 y 3 que se aplique y por lo tanto a toda base. Supongamos que se sustituye c_i por $c_i + q \cdot c_j$. Entonces el elemento e_i se sustituye por $e_i + q \cdot e_j$. Pero al ser el dominio de δ_p el codominio de δ_{p+1} , en M^{p+1} se aplica una operación por filas que sustituye f_j por $f_j - q \cdot f_i$. Estas operaciones además cancelan las filas correspondientes a las columnas pivotes. \square

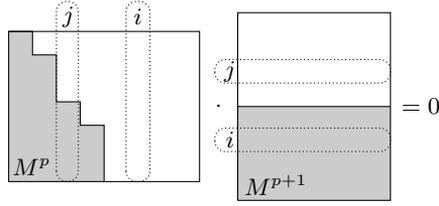


Figura 3.4. Esquema de la relación entre las matrices M^p y M^{p+1} .

Con todo esto, podemos finalmente hallar la estructura de $H_p(\alpha(C))$ la cual nos dará los intervalos de persistencia (o códigos de barras).

Proposición 3.40. *Sea C un complejo de persistencia de tipo finitamente generado y de tipo no negativo sobre un cuerpo F . Sea M^p la matriz en forma escalonada por columnas asociada a δ_p respecto de la base estándar de $\alpha(C)_p$ y una base homogénea $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^q$ de $Z_{p-1}(\alpha(C))$. Si la fila i tiene un pivote de grado $n_i \geq 0$ entonces esta contribuye a la descripción de $H_{p-1}(\alpha(C))$ mediante*

$$t^{\deg(\hat{e}_i)} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n_i} \rangle}$$

en caso de que no tenga pivote, esta contribuye con

$$t^{\deg(\hat{e}_i)} \cdot F[t]$$

Equivalentemente, tenemos los intervalos de persistencia:

$$[\deg(\hat{e}_i), \deg(\hat{e}_i) + n_i] \text{ o } [\deg(\hat{e}_i), +\infty)$$

Demostración. Interpretando el Teorema 2.14, la Proposición 2.15 y el Lema 3.38 tenemos que $H_{n-1}(\alpha(C)) \cong L_{n-1} \oplus T_{n-1}$ donde

$$\begin{aligned} L_{n-1} &\cong Z_{n-1}(\alpha(C))/W_{n-1}(\alpha(C)) \cong \bigoplus_{j=k+1}^q \langle \hat{e}_j \rangle \\ &\cong \bigoplus_{j=k+1}^q \langle t^{\deg(\hat{e}_j)} \rangle \cong \bigoplus_{j=k+1}^q \left(t^{\deg(\hat{e}_j)} \cdot F[t] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n-1} &\cong W_{n-1}(\alpha(C))/B_{n-1}(\alpha(C)) \cong \bigoplus_{j=1}^k \langle \hat{e}_j \rangle / \langle s_j \hat{e}_j \rangle \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^k \left(\frac{t^{\deg(\hat{e}_j)} \cdot F[t]}{\langle t^{n_i + \deg(\hat{e}_i)} \cdot F[t] \rangle} \right) \cong \bigoplus_{j=1}^k \left(t^{\deg(\hat{e}_j)} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n_i} \rangle} \right) \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\langle t^{deg(\hat{e}_j)} \rangle \cong t^{deg(\hat{e}_j)} \cdot F[t]$ para todo j . Del mismo modo, se ve sin dificultad que los elementos tanto de $\frac{t^{deg(\hat{e}_j)} \cdot F[t]}{t^{n_i + deg(\hat{e}_i)} \cdot F[t]}$ como de $t^{deg(\hat{e}_j)} \cdot \frac{F[t]}{\langle t^{n_i} \rangle}$ son las clases con representante los polinomios de la forma $t^{deg(\hat{e}_i)} \cdot a_0 + \dots + t^{deg(\hat{e}_i) + n_i - 1} \cdot a_{n_i}$. Finalmente, por el Teorema 3.28 se tienen los correspondientes intervalos de persistencia.

$$[deg(\hat{e}_i), deg(\hat{e}_i) + n_i) \text{ y } [deg(\hat{e}_i), +\infty)$$

□

Ejemplo 3.41. Hallemos las matrices correspondientes a las bases que se construyeron en el Ejemplo 3.35 para contrastar el código de barras de la Figura 3.3. Construyamos la matriz asociada a δ_1 y hallemos su forma escalonada por columnas para hallar los intervalos de persistencia. Para eso veamos la imagen de los elementos de la base de $\alpha(C)_1$:

$$\begin{aligned} \delta_2(a_0a_1) &= a_1 - a_0, \quad \delta_2(a_0a_2) = ta_2 - ta_0, \quad \delta_2(a_1a_2) = ta_2 - ta_1, \\ \delta_2(a_0a_5) &= ta_5 - t^2a_0, \quad \delta_2(a_2a_5) = ta_5 - t^2a_2, \quad \delta_2(a_0a_4) = t^2a_4 - t^3a_0, \\ \delta_2(a_3a_4) &= t^2a_4 - t^3a_3, \quad \delta_2(a_3a_5) = t^2a_5 - t^3a_3, \quad \delta_2(a_2a_3) = t^4a_3 - t^4a_2 \end{aligned}$$

luego,

$$M^1 = \begin{pmatrix} & a_0a_1 & a_0a_2 & a_1a_2 & a_0a_5 & a_2a_5 & a_0a_4 & a_3a_4 & a_3a_5 & a_2a_3 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & t & t & 0 & 0 & t^2 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 & t^2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^3 & -t^3 & t^4 \\ a_2 & 0 & t & t & 0 & -t^2 & 0 & 0 & 0 & -t^4 \\ a_1 & 1 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & -1 & -t & 0 & -t^2 & 0 & -t^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de eliminación gaussiana por columnas tenemos la matriz escalonada

$$\tilde{M}^1 = \begin{pmatrix} & a_0a_5 & a_0a_4 & a_3a_4 - a_0a_4 & a_0a_2 & a_0a_1 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_5 & \boxed{t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & \boxed{t^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \boxed{-t^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & \boxed{t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & -t^2 & -t^3 & t^3 & -t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde los elementos metidos en las cajas son los pivotes y los z_1 son los elementos de la base de $Z_1(\alpha(C))$ definidos como

$$z_1 = a_2a_5 + ta_0a_2 - a_0a_5, z_2 = a_1a_2 + ta_0a_1 - a_0a_2$$

$$z_3 = a_3a_5 - ta_0a_5 + a_0a_4 - a_3a_4, z_4 = a_2a_3 + t^3a_0a_2 - ta_0a_4 + ta_3a_4$$

Los intervalos de persistencia en dimensión 0 según el Teorema 3.40 son los siguientes:

$$[1, 2), [1, 3), [0, 3), [0, 2), [0, 0), [0, +\infty)$$

Nótese que al intervalo $[0, 0)$ le corresponde $\frac{F[t]}{F[t]} = 0$ con lo que no aporta nada a $H_0(\alpha(C))$ y se obvia. Por último, la matriz asociada a δ_2 es

$$M^2 = \left(\begin{array}{c|cc} & a_0a_2a_5 & a_2a_3a_5 \\ \hline a_2a_3 & 0 & t \\ a_3a_5 & 0 & t^2 \\ a_3a_4 & 0 & 0 \\ a_0a_4 & 0 & 0 \\ a_2a_5 & 1 & -t^3 \\ a_0a_5 & -1 & 0 \\ a_1a_2 & 0 & 0 \\ a_0a_2 & t & 0 \\ a_0a_1 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow M^2 = \left(\begin{array}{c|cc} & a_0a_2a_5 & a_2a_3a_5 \\ \hline a_3a_4 - a_0a_4 & 0 & 0 \\ a_0a_4 & 0 & 0 \\ a_0a_5 & 0 & 0 \\ a_0a_2 & 0 & 0 \\ a_0a_1 & 0 & 0 \\ \hline z_4 & 0 & t \\ z_3 & 0 & t^2 \\ z_2 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & -t^3 \end{array} \right)$$

$$\tilde{M}^2 = \left(\begin{array}{c|cc} & a_0a_2a_5 & a_2a_3a_5 \\ \hline z_4 & 0 & t \\ z_3 & 0 & t^2 \\ z_2 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & -t^3 \end{array} \right) \longrightarrow \tilde{M}^2 = \left(\begin{array}{c|cc} & a_0a_2a_5 & a_2a_3a_5 \\ \hline z_4 & \boxed{t} & 0 \\ z_3 & t^2 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \\ z_1 & -t^3 & \boxed{1} \end{array} \right)$$

Los intervalos son

$$[2, 2), [4, 5), [1, +\infty), [3, +\infty)$$

pues $\deg(z_1) = 2$ y $\deg(z_4) = 4$ junto a los respectivos pivotes 1 y t , además $\deg(z_2) = 1$, $\deg(z_3) = 3$ que no tienen pivotes. Coincidiendo también con el código de barras para H_1 de la Figura 3.3.

Observación 3.42. En la actualidad existe una variedad de software para el cálculo de la homología persistente que está al alcance de los usuarios. Como por ejemplo: *The Perseus Software Project for Rapid Computation of Persistent Homology*, *Plex* y *TDA: Statistical Tools for Topological Data Analysis*.

Bibliografía

- [1] AYALA, R., DOMÍNGUEZ, E. & QUINTERO, A. *Elementos de la teoría de homología clásica*. Sevilla: Universidad de Sevilla. Secretariado de publicaciones (2002).
- [2] CARLSSON, G. Topology and Data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(2), pp. 255-308 (2009).
- [3] SINGH, G., MEMOLI, F., ISHKHANOV, T., SAPIRO, G., CARLSSON, G., & RINGACH, D. L. Topological analysis of population activity in visual cortex. *Journal of vision*, 8(8), pp. 1-18 (2008).
- [4] CARLSSON, G., ISHKHANOV, DE SILVA, V., RINGACH, D. & ZOMORODIAN, A. On the Local Behavior of Spaces of Natural Images. *International Journal of Computer Vision*, 76(1) pp. 1-12 (2008).
- [5] CORBET, R. & KERVER, M. The Representation Theorem of Persistence Revisited and Generalized. *Journal of Applied and Computational Topology*, 2 (1), pp. 1-31 (2017).
- [6] DUMMIT, D. S. & FOOTE, R. M. *Abstract Algebra*. Wiley, Hoboken (2004).
- [7] EDELSBRUNNER, H., LETSCHER, D. & ZOMORODIAN, A. Topological Persistence and Simplification. *Discrete & Computational Geometry* 28(4) pp. 511-533 (2002).
- [8] HATCHER, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002).
- [9] JACOBSON, N. *Basic algebra I, second edition*. W. H. Freeman, San Francisco (1985).
- [10] LAM, T.Y. *Lectures on Modules and Rings. Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York (1999).
- [11] MACLANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York (1998).
- [12] MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. Addison Wesley, Massachusetts (1984).
- [13] TAKIYAMA, A., TERAMOTO, T., SUZUKI, H., YAMASHIRO, K., & TANAKA, S. Persistent homology index as a robust quantitative measure of immunohistochemical scoring. *Scientific Reports*, 7(1):14002 (2017).
- [14] ZOMORODIAN, A. & CARLSSON, G. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2) pp. 249-274 (2005).

Foundations of persistence homology and its associated barcode

Abstract

Topological Data Analysis is a recent field in applied mathematics whose goal is to determine –through topological techniques– qualitative properties of data sets. This memoir expands on the topologic and algebraic foundations of Persistent Homology – one of the principal tools of Topological Data Analysis–. Persistent Homology measures the evolution of topological features of a filtration of a simplicial complex. This evolution can be represented by a collection of segments, forming the so-called barcode. From the barcode it is possible to decide which features can be considered as noise and which ones are essential. The last part of the memoir provides an algorithm that calculates the barcode of a simplicial complex efficiently.

1. Filtrations of simplicial complexes

The most basic notion is the one of n -simplex that can be intuitively viewed as the n -dimensional analogues of a triangle.

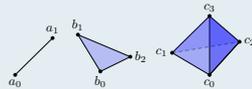


Figure 1: A 1-simplex, 2-simplex and a 3-simplex, respectively. The points a_i, b_i and c_i are the vertices of the simplices. A 0-simplex its formed only by a point.

By grouping simplices that follows some specific rules of compatibility we get a simplicial complex. A topological space can be associated to a simplicial complex and its usually used as a visual representation. This space is usually called a polyhedron if the simplicial complex is finite.

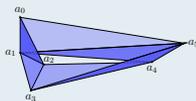


Figure 2: Polyhedron homeomorphic to a Möbius strip (also known as a Möbius strip triangulation).

A simplicial complex can be associated to a data cloud (a set of data points in \mathbb{R}^n) but there are many ways to make this association, two of the best known are the Čech Complex and the Vietoris-Rips Complex.

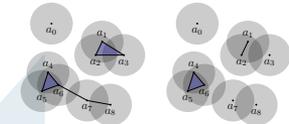


Figure 3: Left: Čech complex, a simplex is formed if the intersection of all balls centered in the vertices with radius $\epsilon > 0$ is not empty. Right: Vietoris-Rips complex, a simplex is formed if the vertices are in intersection of all balls centered in the vertices with radius $\epsilon > 0$.

To find the topological space that best represents the data cloud, a filtration \mathcal{F} of simplicial complex (a nested sequence of simplicial complexes) is needed.

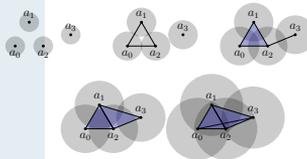


Figure 4: A Čech filtration associated to the points a_0, a_1, a_2 and a_3 .

2. Simplicial homology

The intuitive idea behind the simplicial homology is to detect the holes of dimension n in a polyhedron associated to a simplicial complex K . The first step is to orientate all its n -simplices, ordering the vertices to obtain a specific R -module $C_n(K)$ for each n , with R -modules being a generalization of vector spaces. Together with certain homomorphisms called boundary operators the next sequence is given:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+2}} C_{n+1}(K) \xrightarrow{\delta_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots$$

The n -simplicial homology R -modules are the quotients between the images and kernels of the boundary operators:

$$H_n(K) := Z_n(K) / B_n(K) \text{ where}$$

$$Z_n(K) := \text{Ker}(\delta_n) \text{ and } B_n(K) := \text{Im}(\delta_{n+1})$$

For finite simplicial complexes, $H_n(K)$ is the finite product of certain submodules of R .

Theorem 1 Let R be a principal ideal domain and let M be any finitely generated R -module. Then

$$M \cong R/(s_1) \oplus R/(s_2) \oplus \dots \oplus R/(s_r) \oplus R^{n-r}$$

for some s_i satisfying s_i divides s_{i+1} .

This gives an algorithm to calculate the n -homology R -modules.

3. Persistent homology

Given \mathcal{F} a filtration of simplicial complexes, $H_n(K_i)$ can be calculated for each of the simplicial complexes in the filtration denoted as K_i , with $i \in I$. Using this the n -persistent (i, j) -homology module is defined as:

$$H_n^{i,j}(\mathcal{F}) = \text{im}(f_n^{i,j})$$

where $f_n^{i,j} : K_n(K_i) \rightarrow H_n(K_j)$ is the homomorphism defined as the induced injection $\rho_{i,j} : K_i \rightarrow K_j$.

This allows one to obtain the birth -first appearance- and death -last appearance- of elements in the homology modules of \mathcal{F} .

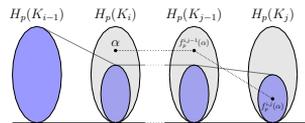
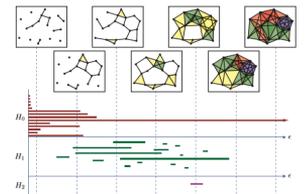


Figure 5: Representation of birth and death of the element α . The element α is born at K_i and dies entering K_j . It would be possible that α never dies.

The birth and death of the elements can be represented by barcodes as follows:



Source: Robert Ghrist (2008). Barcodes: The Persistent Topology of Data.

While calculating the homologies of all simplicial complexes can be difficult and a long process, using the algebraic structure of the barcodes allows to obtain an algorithm with the use of persistence modules and graded R -modules.

References

[1] Edelsbrunner, H., Letscher, D. & Zomorodian, A. Topological Persistence and Simplification. *Discrete & Computational Geometry* 28(4) pp. 511-533 (2002).
[2] Zomorodian, A. & Carlsson, G. Computing Persistent Homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2) pp. 249-274 (2005).