Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Adrián Fernández Colmenero

Estudio y Aplicación de Modelos para el Análisis de Riesgos y Gestión de Carteras

Study and application of models for risk analysis and portfolio management

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2019

Dirigido por
David Alcaide López de Pablo

David Alcaide López de Pablo
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias a mi tutor David Alcaide, por su dedicación y constancia durante todo el proceso de realización de este trabajo final de grado.

A mis padres, María del Carmen y Agustín, y a mi hermana, Patricia, por toda la ayuda, ánimos y consejos durante este tiempo.

A Rebeca, gracias por estar ahí, por ser mi fuente de inspiración.

Adrián Fernández Colmenero
La Laguna, 12 de septiembre de 2019

Resumen · Abstract

Resumen

Los modelos de gestión de carteras y las estrategias de arbitraje estadístico son dos opciones existentes para controlar y administrar las inversiones de grandes,medianos y pequeños inversores. En este trabajo se estudian dichas opciones considerando conceptos propios de la Economía Financiera desde una perspectiva matemática con especial énfasis y atención a las técnicas y planteamiento de la Estadística e Investigación Operativa. Además el presente trabajo incorpora el estudio de situaciones concretas en las que se aplica el Modelo de Markowitz y el Arbitraje Estadístico (estrategía Trading Pairs).

Palabras clave: *Activo ,Cartera, Riesgo, Rendimiento, Diversificación, Arbitraje Estadístico*

Abstract

Portfolio management models and statistical arbitration strategies are two options for controlling and managing investments by large, medium and small investors. This work explores these options by considering concepts of the Financial Economy from a mathematical perspective with special emphasis and attention to the techniques and approach of Statistics and Operational Research. In addition, it also incorporates the study of specific situations in which the Markowitz Model and the Statistical Arbitration (Trading Pairs Strategy) are applied.

Keywords: *Asset, Portfolio, Risk, Performance, Diversification, Statistical Arbitration*

Contenido

Agradecimientos III

Resumen/Abstract V

Introducción IX

1. Conceptos Básicos para el Análisis de Riesgos y Gestión de Carteras 1
- 1.1. El valor temporal del Dinero 1
- 1.2. El riesgo 3
- 1.3. Conceptos de Finanzas 3
  - 1.3.1. Series Temporales 3
  - 1.3.2. Activo Financiero 4
  - 1.3.3. Beta de un Activo Financiero 9
  - 1.3.4. Covarianza y Correlación 11
- 1.4. Cartera 13
  - 1.4.1. Rendimiento de una Cartera 14
  - 1.4.2. Riesgo de una Cartera 15
  - 1.4.3. Beta de una Cartera 17
  - 1.4.4. Diversificación de una Cartera 18
- 1.5. Análisis y Gestión de Carteras 19

2. Teoría de Carteras y Modelos de Valoración 23
- 2.1. Modelo de Markowitz 24
- 2.2. Modelo de diagonal de Sharpe 26
- 2.3. Modelo de valoración de Activos (CAPM) 27
- 2.4. Teoría de valoración por Arbitraje o APT 31

3. Arbitraje Estadístico 33
3.1. Trading Pairs 34

4. Caso Aplicado 37
4.1. Cartera de Markowitz 37
4.2. Trading Pairs 40

5. Conclusiones 45

Bibliografía 47

Poster 51

Introducción

Desde un punto de vista general, las Matemáticas ofrecen un amplio potencial para el diseño de herramientas que facilitan el cálculo y la esttimación de parámetros de numerosas disciplinas científicas y no científicas. Entre estas disciplinas podemos citar la Economía Financiera que se preocupa del estudio de los mercados financieros mediante el análisis económico de los activos que componen las inversiones presentes en dichos mercados.

En este contexto y con esta perspectiva se sitúa el presente Trabajo de Fin de Grado, centrado en el Análisis de Riesgos y Gestión de Carteras. Los objetivos y metodología de éste se resumen a continuación:

Objetivos

Dentro de la dinámica de la asignatura de Trabajo de Fin de Grado se ha desarrollado la presente memoria. Con ella se ha pretendido aplicar los conocimientos adquiridos durante los estudios de Grado a situaciones prácticas cotidianas como lo que se presentan en los textos de matemáticas financieras y la elección de criterios de inversión de capitales que resulten beneficiosos. En este contexto han resultado particularmente útiles muchas de las asignaturas cursadas en el Grado con mención especial a las del área de conocimiento de Estadística e Investigación.

Podemos concretar estas ideas comentando los **principales objetivos** son:

- Conocer las relaciones entre las matemáticas y la economía financiera.
- Visualizar y aplicar los conocimientos obtenidos en Estadística e Investigación Operativa, rama del Grado de Matemáticas, en términos de economía financiera.

y los **objetivos específicos** son:

- El estudio del análisis y de la gestión de carteras a través de diferentes modelos de valoración.
- Conocer el arbitraje estadístico como alternativa a los modelos de valoración de carteras.
- Plantear y estudiar dos propuestas de gestión de cartera utilizando un método de valoración de activos y el arbitraje estadístico respectivamente y comparar los resultados obtenidos.

Metodología

La metodología de trabajo para alcanzar dichos objetivos se estructura en distintas fases:

En primer lugar, se desarrolló un estudio y comprensión de conceptos de economía financiera generales y específicos de la gestión de carteras, a través de la búsqueda y selección de documentación bibliográfica.

A continuación, conociendo los conceptos mencionados, se estudió la teoría de carteras y modelos de valoración de activos para una cartera de inversión.

Por último, a través de un caso aplicado, se crearon dos carteras de activos con dos modelos de gestión diferentes que permitieron comparar y analizar los resultados obtenidos.

Así pues, la presente memoria se estructura en esta sección introductoria y 4 capítulos. El primero de ellos, sumariza los conceptos básicos para el Análisis de Riesgos y la Gestión de Carteras. El capítulo 2, versa sobre la Teoría de Carteras y los Modelos de Valoración. El tercer capítulo trata sobre el Arbitraje Estadístico. Los casos aplicados se incorporan en el Capítulo 4. Finalmente el capítulo 5 recoge algunas conclusiones obtenidas.

1

Conceptos Básicos para el Análisis de Riesgos y Gestión de Carteras

1.1. El valor temporal del Dinero

A lo largo de nuestra etapa financiera, todas las decisiones a tomar a la hora de invertir estarán fundamentadas por la estrecha relación entre el valor del dinero y el tiempo. Para poder medir esta variación, se utilizan los *números indice* que se definen, según palabras de González [7],"como un parámetro (estadístico) que mide la variación relativa en el tiempo de una magnitud simple, precio de un artículo, o compleja, precios de un conjunto de artículos, durante el periodo del estudio". Atendiendo a su naturaleza estadística, se clasifican en:

- Números índices simples: miden la evolución de la magnitud X (relación entre los valores de un artículo en diferentes instantes de tiempo):

$$I_{t,0} = \frac{X_t}{X_0} \cdot 100$$

  donde X_t, es la magnitud en un periodo t y X_0 periodo base. El periodo t_0 puede fijarse de manera arbitraria y el índice se expresa en porcentajes.

- Números índices complejos: se obtienen a través de la combinación de índices simples de manera que el índice resultante sea sencillo de calcular y contenga la mayor cantidad posible de información.

[7]

Un ejemplo significativo de los números índices es el IPC[1], elaborado por el INE[2] haciendo uso de la fórmula del índice de precios de Laspeyres(número índice complejo referido a precios y cantidades).

El IPC es un indicador que mide la evolución de los precios de bienes y servicios en un lugar concreto y durante un periodo de tiempo determinado. A menudo es utilizado como indicador de la Inflación de una economía, dada la dificultad de calcular la variación de todos los bienes y servicios ya que la Inflación es una medida macroeconómica (tiene en cuenta exportaciones) y el IPC no. Aunque el IPC e Inflación son indicadores de precios, la diferencia entre ellos radica en que cada uno toma diferentes consideraciones para medir los incrementos de precios.

Estos indicadores revelan información a tener en cuenta cuando se dispone a realizar una inversión; cuando un país no presenta inflación, los precios disminuirían (deflación) y los inversionistas evitarán ese escenario.

Es por ello que, a la hora de invertir, debemos tener presente la variación del tiempo y su relación con el valor del dinero, es decir, hay que considerar el valor temporal del dinero. Este concepto es sencillo de entender:

"10 € recibidos hoy tienen más valor que 10€ recibidos en el futuro"

Los motivos que nos llevan a esta afirmación son:

- Riesgo: Incertidumbre en el futuro. Existe la posibilidad de no recibirlo.
- Riesgo de Inflación: Puedes comprar más cosas hoy con 10€ que dentro de diez años con la misma cantidad de dinero.
- Rentabilidad Real: Si se reciben 10 € dentro de un año no se podrían invertir para obtener rentabilidad. Sin embargo, 10€ hoy sí se pueden invertir y obtener una rentabilidad mediante intereses.

Por tanto, el valor temporal del dinero expresa la diferencia entre el valor actual en unidades monetarias y su valor futuro. Es por ello que dos cantidades monetarias son comparables si se encuentran en el mismo momento.

Para poder comparar el valor actual con el valor futuro del dinero se define el Factor de descuento. Éste depende del valor temporal del dinero y del tipo de interés: donde cuanto más alto es el tipo de interés o más largo es el plazo, menor es el factor de descuento.

$$\text{Valor Actual} = \text{Valor Futuro} \times \text{Factor de Descuento}$$

[1] Indice de Precios de Consumo
[2] Instituto Nacional de Estadística

El factor de descuento nos permite obtener el valor del capital en diferentes momentos, es decir, poder comparar los euros de hoy con los euros que recibiremos en un futuro:

$$F_t = \frac{1}{(1+r)^t}$$

donde:
F_t: Factor descuento
t: 1,2,3... años
r: es el tipo de interés que se aplica.

Este valor oscila siempre entre 0 y 1. Canto más próximo sea a 1, el dinero tendrá casi el mismo valor en el futuro que en el presente. Cuanto más próximo sea a 0, el dinero tendrá menor valor en el futuro respecto al presente.

1.2. El riesgo

El *riesgo* se define, según el Diccionario de la Real Academia Española, como "contingencia o proximidad de un daño". En vistas a esta definición tan escueta, parece que se trata de un concepto fácil de entender. De hecho, el riesgo es una realidad que está presente en todas las decisiones que tomamos día a día: valoramos continuamente las ventajas y desventajas de las consecuencias ante un hecho concreto asumiendo, o no, el riesgo que puedan tener. Sin embargo, el riesgo no se puede reducir a una definición tan simple dado que se trata de un"concepto dinámico con ramificaciones científicas, económicas, sociales y políticas"íntimamente ligado a las complejidades de cambio y globalización actuales. [4].

En el mundo financiero, el riesgo toma especial protagonismo ya que es uno de los principales parámetros de estudio a la hora de realizar cualquier inversión. Tal es su importancia, que los modelos que lo analizan tratan de aproximar su valor de la manera más objetiva con el fin de conocer la realidad existente en ese momento.

1.3. Conceptos de Finanzas

1.3.1. Series Temporales

Las series temporales son de gran importancia en el mundo financiero puesto que la mayoría de las variables que se utilizan se recogen a lo largo del tiempo. Para el análisis y estudio de éstas, resulta más efectivo ver la variabilidad durante un periodo que en un instante determinado.

Una *serie temporal* es una secuencia de datos de una variable recogidos y ordenados en el tiempo. El objetivo de estas series, como dice González[7]"es poder explicar las fluctuaciones de la variable Y, utilizar este conocimiento para pronosticar sus variaciones en el futuro(predecir), y si fuera posible analizar las relaciones que pudiera presentar con otras series".

Dentro de las series temporales podemos encontrar dos tipos en función de su comportamiento:[12]

- Serie temporal *estacionaria*: Son aquellas que mantienen su media, varianza y covarianza constantes en el tiempo.

  Media: $E(x_t) = cte \ \forall t$
  Varianza: $Var(x_t) = cte \ \forall t$
  Covarianza: $Cov(x_t, x_{t-k}) = cte \ \forall t \forall k$

- Serie temporal *no estacionaria*: Son aquellas que sufren cambios en su media, varianza y covarianza a lo largo del tiempo.

1.3.2. Activo Financiero

Un *activo financiero* es un instrumento financiero intangible que representa un derecho sobre una cantidad monetaria futura. Existen diferentes tipos: acciones, fondos de inversión, bonos, letras, opciones, futuros,...).

Los activos se pueden clasificar en cuatro grupos: liquidez, renta fija, renta variable y otros, aunque éstos se pueden subdividir. Así pues, en la liquidez se distingue entre pura liquidez(cuenta corriente) y activos financieros(depósitos); la renta variable se estratifica por áreas geográficas(Área Euro, EEUU, países emergentes), por temáticas(bancos,tecnología,etc...), por estilo de gestión, por tamaño(pequeñas,medianas y grandes empresas) u otros (alta rentabilidad, baja volatilibidad); la renta fija se suele catalogar entre deuda pública y renta fija privada. En ésta última, aparece el grado de inversión y el high yield; este activo es el nivel más bajo de calificación crediticio, es decir, existe una mayor probabilidad de riesgo de impago. Por ejemplo, las agencias de evaluación de riesgos como Standard and Poor's, Moody's o Fitch,... califican los activos emitidos por países o empresas según la seguridad que le ofrecen al inversor. Es por ello que, para los activos de tipo high yield se ofrece un elevado interés para atraer a los inversores.

Por otra parte, los tres principales parámetros que presenta los activos financieros son la rentabilidad, riesgo y liquidez:[22]

(a) Rentabilidad

La *rentabilidad* es el rendimiento de un activo durante un periodo de tiempo determinado.

Dicho rendimiento puede ser conocido de una manera determinística o desconocido: cuando es conocido de manera determinística se calcula usando una fórmula matemática, sin embargo, cuando es desconocido puede ocurrir que el valor de la variable rendimiento siga una determinada distribución aleatoria conocida. El caso más desfavorable es cuando el rendimiento es desconocido y su valor no sigue ninguna distribución aleatoria conocida.

(a.1) Cálculo del rendimiento cuando éste es conocido de mantera determinística.

Cuando el rendimiento puede calcularse de manera determinística, resulta ser el cociente entre el beneficio obtenido en el periodo y el capital inicial invertido en el activo, es decir:

$$Beneficio\, del\, activo\; = C_f - C_i$$

donde:

C_f: Capital final(valor de la inversión en el activo al final del periodo).

C_i: Capital inicial (capital invertido en el activo al principio del periodo).
y entendiéndose el beneficio negativo como una pérdida. Estas magnitudes se expresan en unidades monetarias.

El cálculo del *rendimiento de un activo i* en un periodo t en este ambiente de certeza es:

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

donde:

$R_{i,t}$: es el rendimiento del activo i en el periodo t.

$P_{i,t}$: precio del activo financiero al final del periodo t.

$P_{i,t-1}$:precio del activo financiero al final del periodo $t-1$.

$D_{i,t}$: Dividendos (si los hay) pagados durante el periodo t, valorados en el momento t.

Ejemplo.1.3.2.1

Supongamos que compramos acciones de la empresa Matemathics SL, con un valor de 24,37 € por acción, y se cobra durante el tiempo de la inversión 1,17

€ por dividendos[3]. Vendemos la acción a los 14 meses a un precio de 27,12 €. ¿cuál ha sido la rentabilidad?

$$R = \frac{27,12 - 24,37 + 1,17}{24,37} = 0,16085 \Rightarrow 16,08\,\%$$

□

(a.2) Cálculo del rendimiento en ambiente de incertidumbre cuando el valor del rendimiento es una variable aleatoria de distribución conocida.

En la notación estándar, dada una variable aleatoria discreta $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (siendo Ω el espacio muestral). Su esperanza matemática es:

$$E[\xi] = \sum_{k \in Im(\xi)} k\, P(\xi = k)$$

donde $Im(\xi)$ es el conjunto discreto de valores que puede tomar la variable aleatoria ξ y

$$V(\xi) = E[(\xi - E[\xi])^2]$$

es su varianza.

Es nuestro caso concreto, si $\xi = R_{i,t}$ es el rendimiento del activo i en el periodo t, dicho rendimiento es una variable aleatoria discreta con distribución conocida.

Su esperanza matemática o rendimiento esperado es:

$$E[R_{i,t}] = \sum_{k \in Im(R_{i,t})} k\, P(R_{i,t} = k)$$

donde $Im(R_{i,t})$ es el conjunto (discreto) de rendimientos posibles del activo i en el periodo t.

Ejemplo.1.3.2.2

Para la acción Z se espera, con un 60 % de probabilidad, que se revalorice un 7 % y como escenarios alternativos se maneja una ganancia del 25 % y una pérdida del 15 %, asignándoles a cada uno de ellos la misma probabilidad de ocurrencia (20 %). ¿Cuál es la expectativa de rentabilidad de la acción?

$$E[R_{z,t}] = 0,6 \cdot 0,07 + 0,2 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,15 = 0,062 \Rightarrow 6,20\,\%$$

□

[3] Cuota de ganancias repartidas entre los accionistas

La rentabilidad es uno de los factores más importantes que debemos considerar como inversores, por ello a la hora adquirir un activo, observamos que no es lo mismo ganar 200 um [4] con un capital de 100 um que con 10000 um, ni de conseguirlo en el plazo de 1 mes o en 3 años. Por tanto debemos tener claro el concepto de rentabilidad anualizada, la cual nos permite comparar de forma teórica la rentabilidad de estos.

$$R_a = (1 + rentabilidad)^{\frac{1}{t}} - 1$$

donde la *rentabilidad* puede ser aquella que responda a un ambiente de certeza, $R_{i,t}$ o, un ambiente de incertidumbre, $E[R_{i,t}]$ y t es un periodo de tiempo determinado (días, meses, años...)

Ejemplo.1.3.2.3

Supongamos que invertimos 1.000€ en un fondo de renta variable el 1 de Enero de 2008. El fondo perdió un importante 37 % ese año. Pero al año siguiente se recuperó y subió un 26,5 %. En el 2010 prosiguió con su tendencia alcista y se apreció otro 15 %. ¿Cuál sería la rentabilidad anualizada a 3 años de nuestra inversión? ¿Habríamos ganado dinero?.

$$R_a = [(1 - 0,37) + (1 + 0,265) + (1 + 0,15)]^{\frac{1}{3}} - 1 = -0,0286 \Rightarrow -2,86\,\%$$

Así, resulta que al final del 3 año, el capital final es de 920€, esto se debe a que la rentabilidad anualizada no es un media aritmética, sino una media geométrica, donde las rentabilidades de no son independientes unas de otras.

□

Dentro de los tipos de rentabilidad, cabe señalar la rentabilidad nominal y real (expresados en %)y la diferencia existente entre ellas. La primera de ellas se ciñe al incremento del valor de la inversión realizada, mientras que la segunda alude al valor real en un momento en concreto teniendo en cuenta la inflación [5], determinando en ese instante el valor real de la rentabilidad: si invertimos 100€ en un activo que ofrece un interés nominal del 10 % anual y durante ese año la inflación ha sido del 4 %, obtenemos:

Rentabilidad nominal $= \frac{C_f}{C_i} - 1 \Rightarrow (\frac{110}{100}) - 1 = 0.1 = 10\,\%$

[4] Unidades monetarias
[5] Medido a través del IPC

Rentabilidad real= $\frac{1+R.nominal}{1+Inflacion} - 1 \Rightarrow \frac{1.1}{1.04} - 1 = 0.0576 = 5.76\,\%$

La rentabilidad nominal es del 10 %, sin embargo, debido a la inflación, la rentabilidad real va a ser menor, pues, los bienes que se compraban por 100€, ahora se comprarían por 104€. Un factor que no se tiene en cuenta en al calcular la rentabilidad real son los impuestos (IRPF[6],...), puesto que se escapa del contenido de este Trabajo Final de Grado (aunque debería tenerse en cuenta a la hora de cobrarlo). Por tanto, la rentabilidad real de la inversión será del 5,76 %.

(b) Riesgo

El *riesgo de un activo financiero* se puede definir como la exposición a la incertidumbre ante un resultado, en otras palabras, es la existencia de una oscilación de la rentabilidad del activo respecto a la esperada. Es por ello que se hace el uso de la Estadística para medir el riesgo de un activo utilizando la varianza o la desviación típica, también conocida en finanzas como **volatilidad**:

- La desviación típica y la rentabilidad esperada son dos medidas necesarias para describir una distribución normal de probabilidad de activos.

- A través de los estudios empíricos realizados, la desviación típica y la rentabilidad demuestran que las distribuciones de frecuencia de la mayoría de los activos siguen una distribución normal o muy próxima a la misma.

La *varianza* es la suma de los cuadrados de las dispersiones alrededor de un rendimiento esperado $E(R_{i,t})$,ponderadas por sus probabilidades:

$$V(\xi) = V(R_{i,t}) = \sum_{k \in Im(R_{i,t})} (k - E[R_{i,t}])^2 \, P(R_{i,t} = k)$$

donde $E[R_{i,t}] = \sum_{k \in Im(R_{i,t})} kP(R_{i,t} = k)$

Calculando dicha varianza con datos basados del pasado, indica que el riesgo se va a mantener en el futuro. Sin embargo, esto no siempre se cumple y menos con activos muy arriesgados: el cálculo de la varianza es más objetivo aunque no más exacto. Por ello, el riesgo se mide normalmente con la desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Siguiendo con el ejemplo 1.3.2, podemos calcular el riesgo de la acción Z mediante la desviación típica:

$$\sigma^2(R_Z) = [0,07-0,062]^2 \cdot 0,6 + [0,25-0,062]^2 \cdot 0,2 + [0,15-0,062]^2 \cdot 0,2 = 0,008655$$

[6] Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas

$$\sigma(R_Z) = 9,3\,\%$$

Obtenemos que la volatilidad esperada del activo Z es del 9,3 %, considerándose un activo de riesgo alto, adecuado para un perfil de inversor medio.

□

(c) Liquidez

Por último, la liquidez que presenta un activo financiero es la disposición del activo para convertirse en dinero de manera inmediata y sin sufrir pérdidas. Esta capacidad varía en los diferentes activos, siendo los más líquidos más atractivos para nosotros como inversores.

Estas propiedades presentan una relación entre ellas, importante a tener en cuenta a la hora de valorar ciertos escenarios futuros en la toma de decisiones:

- *Liquidez y Rentabilidad*: Estos conceptos están correlacionados negativamente, puesto que un activo que presente menor liquidez tendrá una mayor rentabilidad. Al no poder disponer del capital, el inversor exige a este activo que la rentabilidad sea elevada puesto que él, pierde la capacidad de compra o inversión en la actualidad.

- *Liquidez y Riesgo*: Estos conceptos también están correlacionados negativamente, ya que a mayor liquidez menor es el riesgo del activo. El poder disponer del capital invertido, en un instante de tiempo relativamente corto minimiza el riesgo del activo.

- *Rentabilidad y Riesgo*: Este binomio, fundamental a tener en cuenta al realizar cualquier tipo de inversión, presenta una correlación positiva, dado que a mayor riesgo mayor rentabilidad. De esta manera, un inversor al invertir en un producto (activo), con un nivel alto de riesgo, esta asumiendo una alta probabilidad de impago de las rentabilidades pactadas, incluso de la pérdida del capital invertido. Por ello, el inversor exigirá una alta rentabilidad como pago por asumir el riesgo. De manera análoga, menor riesgo implicará menor rentabilidad.

1.3.3. Beta de un Activo Financiero

A la hora de buscar diferentes opciones de inversión, se debe considerar el riesgo de éstos como uno de los factores más relevantes. De hecho, se debe considerar la volatilidad de un activo (su riesgo) y no escogerlos sólo porque pertenezcan a una empresa conocida o que tenga, aparentemente, una imagen sólida.

Es necesario buscar información que permita poder tomar decisiones acertadas para realizar una buena inversión del capital y obtener los mejores rendimientos.

La β de un activo mide la volatilidad del activo en comparación a la volatilidad del mercado[7], calculada en base a datos históricos, o lo que es lo mismo, mide la sensibilidad de la rentabilidad del activo respecto a la rentabilidad de su índice de referencia (mercado).

La β es el coeficiente de regresión entre dos variables:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

donde:
β_i: Beta del activo i
σ_{xy}: covarianza de los rendimientos del activo y el rendimiento del mercado x.
σ_x^2: varianza de los rendimientos del mercado.

Conforme con los valores que puede tomar la β se distinguen varias interpretaciones:

- $\beta > 1$ Indica que la volatilidad del activo es mayor a la del mercado, es decir, el activo tiende a oscilar más que el índice del mercado.

- $\beta < 1$ Indica que la volatilidad del activo es menor a la del mercado, el activo tiende a oscilar menos que el índice del que el mercado.

- $\beta = 1$ Indica que la volatilidad del activo es igual a la del mercado, soportan las mismas variaciones.

Hay que tener en cuenta que este valor beta sólo mide los riesgos sistemáticos o de mercado, no mide los riesgo diversificables.[8]

Ejemplo.1.3.3.1

En la siguiente tabla, se observan 3 activos con sus correspondiente β.¿Qué interpretación puedes dar de cada uno de ellos?

[7] Es un espacio, físico o virtual, en el que se intercambian activos financieros y en el que se definen los precios de dichos activos

[8] Los riesgos sistemáticos y diversificables se explican en el apartado 2.2

Activo	Activo 1	Activo 2	Activo 3
β	$0,5$	1	$1,3$

En primer lugar, observamos que el Activo 1 muestra una menor variabilidad que el mercado, más concretamente, es un 50 % menos volátil que el índice de referencia del mercado($\beta = 0,5$). Los activos que se encuentran en este escenario se catalogan como "títulos defensivos".

En cuanto el Activo 2, presenta el mismo comportamiento que el índice de referencia, es decir, replica el movimiento de éste ($\beta = 1$). Por tanto si el índice sube un 10 %, el activo también aumentará un 10 %. Análogamente, en el caso de que el índice descienda un 10 %, el activo descenderá en la misma proporción. Los activos que se encuentran en este escenario se catalogan como "títulos neutros".

Por último, el Activo 3 presenta una mayor variabilidad que el índice de referencia, por lo que sus variaciones serán mayores que este tanto alza como a la baja. De esta forma, con $\beta = 1,3$, el Activo 3 es un 30 % mas variable que el índice, esto es cuando el índice baje un 5 % el activo descenderá un 7,5 % y viceversa. Los activos que se encuentran en este escenario se catalogan como "títulos agresivos".

□

1.3.4. Covarianza y Correlación

En un ambiente de incertidumbre del binomio rentabilidad y riesgo, descrito en el apartado anterior, es necesario hacer un estudio detallado de su comportamiento, dado que para invertir se necesita saber el grado de relación existente entre ellos con el fin de tomar decisiones ventajosas a la hora de adquirir activos. La *covarianza* es una medida estadística que informa sobre el movimiento conjunto entre 2 variables (x e y): es la media aritmética de los productos de las diferencias entre las observaciones de cada una de las variables y su valor medio.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

donde:
x_i, y_i: representan los rendimientos en el periodo i de dichos activos con $i = 1, 2...n$.

- Covarianza(con datos históricos/frecuencias)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot n_i$$

donde:
$x_i \, e \, y_i$: representan los rendimientos en el periodo i de dichos activos con $i = 1, 2...n$.
n_i: frecuencias.

- Covarianza(con datos futuros/probabilidades)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \cdot p_i$$

donde:
$x_i \, e \, y_i$: representan los rendimientos en el periodo i de dichos activos con $i = 1, 2...n$.
p_i: probabilidades.

La covarianza “permite estudiar el grado de relación existente entre las variaciones de dos conjuntos de datos, y se aplica para análisis de correlación”[17], obteniendo distintos escenarios en función de si la covarianza es positiva, negativa o nula:

- Covarianza positiva. Ambas variables se mueven en el mismo sentido. Supongamos el caso de dos activos, si el activo A sube el activo B también sube y, en caso contrario, si A baja B también. Por lo tanto, si la covarianza de A y B es positiva, los rendimientos de los activos están relacionados entre sí.

- Covarianza negativa. Las variables están relacionadas entre sí moviéndose en sentido contrario. Si el activo A sube el activo B cae y viceversa.

- Covarianza nula. Las variables se comportan de forma diferente sin relación alguna.

El *coeficiente de correlación* permite también conocer si dos variables tienen un comportamiento parecido o muy dispar. Es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas de las variables, donde el resultado puede tomar valores comprendidos entre -1 y 1.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

donde,
σ_{xy}: covarianza de las variables x e y.

σ_x: desviación típica de la variable x.
σ_y: desviación típica de la variable y.

- Si el valor es positivo, existe una correlación positiva; las variables tienen un comportamiento semejante cuanto más próximo sea a 1. Si es igual a 1, estamos ante un correlación perfectamente positiva.

- Si el valor es negativo, existe una correlación negativa; las variables presentan comportamientos opuestos cuanto más próximo sea a -1. Si es igual a -1, hablamos de correlación perfectamente negativa.

- Si el valor es nulo, no existe ningún tipo de relación entre las variables; se puede decir que son independientes.

En resumen la covarianza y el coeficiente de correlación son indicadores del sentido y fortaleza de la relación lineal entre dos variables, en términos absolutos y relativos respectivamente, pero con ellos no se puede deducir las relaciones de causalidad entre el comportamiento de las mismas, sino que se puede comprobar qué tipo de relación presentan dos activos pero no el origen de esa relación.

1.4. Cartera

La cartera de inversión (investment portfolio) se define como la composición de una serie activos financieros en los que se invierte un capital. Los activos pueden ser de distinta naturaleza: de renta fija (letras, bonos,deuda publica,deuda privada) y de renta variable(acciones, fondos de inversión,...), entre otros. Por ello, existen múltiples configuraciones de carteras, donde su composición marca su identidad.

Se considera la cartera p y las proporciones de los activos individuales $x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np}$, que la componen, donde n es el número total de activos seleccionados, que cotizan en un mercado.

En cualquier caso, para todo p deberá cumplirse que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip} = 1$$

donde x_{ip} es la proporción del cada activo i en la cartera p, cumpliéndose que

$$0 \leq x_{ip} \leq 1 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cuando no haya confusión a qué cartera p nos referimos, la notación x_{ip} puede simplificarse a la notación $x_i \;\; i = 1, 2, \ldots, n$.

1.4.1. Rendimiento de una Cartera

El rendimiento de una cartera p se define como la suma de las rentabilidades individuales de cada título ponderadas por el peso de los activos.

Como hemos visto en el apartado 1.3.2., a la hora de calcular la rentabilidad de un activo se presentan dos escenarios diferentes, ocurriendo algo similar ocurre con la rentabilidad de un cartera:

Ambiente de certeza(*ex-post*):

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_{i,t}$$

donde:
R_p: es la rentabilidad de la cartera p.
x_i: proporción del activo i dentro de la cartera p.
$R_{i,t}$: es la rentabilidad ex-post del activo i.
n: es el número de activos de la cartera.

Ambiente de incertidumbre(*ex-ante*):

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[R_{i,t}]$$

donde:
$E[R_p]$: es la rentabilidad esperada de la cartera p.
x_i: es la proporción del activo i dentro de la p.
$E_{i,t}$: es la rentabilidad esperada del activo i.
n: es el número de activos de la cartera.

El rendimiento de la cartera también se puede expresar en forma matricial:sea X el vector de proporciones o ponderaciones de un activo:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y sea E el vector de rendimientos:

$$E = \begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_n] \end{pmatrix}$$

donde n es el número de activos da una cartera.
La expresión de la rentabilidad de una cartera p se expresa como:

$$E[R_p] = \big(x_1, x_2, ..., x_n\big) \begin{pmatrix} E[R_1] \\ E[R_2] \\ \vdots \\ E[R_n] \end{pmatrix}$$

donde n es el número de activos da una cartera.

Ejemplo.1.4.1.1

Sean los activos 1 y 2, que conforman la cartera p, donde el rendimiento de cada uno de ellos es $E[R_1] = 22.8\,\%$ y $E[R_2] = 16,2\,\%$ y, $x_1 = 64\,\%$ y $x_2 = 36\,\%$ sus respectivas proporciones. ¿Cuál será el rendimiento esperado de la cartera p?

$$\begin{aligned} E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[R_i] &= x_1 \cdot E[R_1] + x_2 \cdot E[R_2] \\ &= 0,64 \cdot 0,228 + 0,34 \cdot 0,162 \\ &= 0,14592 + 0,05508 \\ &= 0,201 \end{aligned}$$

La rentabilidad de la cartera p es de un $20,1\,\%$.

Al comparar el rendimiento de la cartera p con los rendimientos de los activos individualmente cabe esperar que, si queremos incrementar la rentabilidad de la careta, se debería destinar un porcentaje mayor del capital de inversión al activo 1, es decir, aumentar su peso en la cartera. Sin embargo, esta decisión no tiene por qué ser la más acertada, dado que, una mayor rentabilidad llevará asociada un mayor riesgo.

□

1.4.2. Riesgo de una Cartera

Al igual que en los activos financieros, el riesgo de una cartera representa la volatilidad de la misma, o lo que es decir, la varianza de su rentabilidad. Si nos situamos en un ambiente de incertidumbre (ex-ante), el riesgo se determina por la varianza de su rentabilidad esperada:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \quad \forall\, i, j, = 1 \ldots n$$

donde x_i, x_j son las proporciones del presupuesto de inversión destinada a la inversión i y j, respectivamente y σ_{ij}: es la covarianza del rendimiento del activo i con el rendimiento del activo j. n el número total de activos.

Para el caso de dos activos ($n = 2$), el riesgo de una cartera es:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_{12}$$

donde σ_1, σ_2 son las varianzas de los activos x_1, x_2 respectivamente y σ_{12} es la covarianza del activo 1 y 2.

En caso de que la cartera tenga un número elevado de activos (n grande), se incrementa el número de operaciones para calcular el riesgo, por ello se puede hablar de la matriz de covarianzas (matriz simétrica).

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

donde
σ_i^2: es varianza del activo i con $i = 1 \cdots n$.
σ_{ij}: Covarianza de los activos ij con $i \neq j, \forall i, j = 1, \cdots n$.
n: es el número de activos da una cartera.

El riesgo de una cartera siempre es menor o igual que la media ponderada de los riesgos de los activos que la componen y la diversificación de la misma reduce el riesgo actuando en mayor medida cuanto menor es la correlación entre los activos.

Ejemplo.1.4.2.1

Los activos 1 y 2 tienen un riesgo (desviación estándar) del 12 % y del 23 % respectivamente y su correlación es -1. ¿Cuál será la volatilidad de una cartera p compuesta por un 50 % por el activo 1 y el otro 50 % por el activo 2?

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_{12} \\ &= 0,50^2 \cdot 0,12^2 + 0,5^2 \cdot 0,23^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,12 \cdot 0,23 \cdot -1 \\ &= 0,002805\end{aligned}$$

$$\sigma_p = 0,0529$$

La cartera tiene una volatilidad (riesgo) del 5,3 % mucho menor que los riesgos de los activos 1 y 2 respectivamente.

□

1.4.3. Beta de una Cartera

Como se indica en el apartado 1.3.3, es necesario saber calcular e interpretar la β de un activo financiero a la hora de crear una cartera, ya que es importante conocer la volatilidad que va a tener respecto al índice de referencia. De igual forma, es imprescindible saber cual es la β de la cartera. La beta de una cartera p es la media ponderada de las betas de los activos en esa cartera.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta_i$$

donde:
β_p: es la β de la cartera p.
x_i: proporción del activo i dentro de la cartera p.
β_i: es la β del activo i.
n: es el número de activos de la cartera.

Ejemplo.1.4.3.1

Supongamos la cartera p formada por los tres activos del ejemplo 1.3.3, donde sus proporciones se muestran en la siguiente tabla .¿Cuál es la β de la cartera?

Activo	x_i	β
1	35 %	0, 5
2	25 %	1
3	40 %	1, 3

$$\begin{aligned}\beta_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta_i &= x_1 \cdot \beta_1 + x_2 \cdot \beta_2 + x_3\beta_3 \\ &= 0,5 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,35 + 1,3 \cdot 0,4 \\ &= 0,125 + 0,35 + 0,52 \\ &= 0,995\end{aligned}$$

A la vista del resultado, se observa que la volatilidad de la cartera es similar a la del mercado.

□

1.4.4. Diversificación de una Cartera

El riesgo y la incertidumbre son indicadores esenciales en toda inversión, ya que generan intranquilidad en los inversores haciendo que se replanteen la composición de las carteras. La diversificación aparece como una herramienta para disminuir esta preocupación.

La diversificación de una cartera consiste en invertir el capital en una combinación de activos diferentes(renta fija, renta variable, fondos,...), con el fin de reducir el riesgo de la inversión. Cuando se lleva a cabo la configuración de un *portfolio*, concentrar toda la inversión en un único activo no va a resultar la mejor opción desde el punto de vista del binomio rentabilidad/ riesgo. Por ello, incorporar a la cartera acciones de empresas de diferentes sectores(sector bancario,energías renovables) y de activos distinta naturaleza (renta fija y variable) y distinta duración(a corto y largo plazo), cuyos rendimientos no estén correlacionados o incluso que tengan correlación cero, va a ayudar a reducir el riesgo total de la misma.

"Una cartera debe estar preparada para soportar cualquier situación, para un colapso de mercado y para un boom alcista, para la inflación y deflación; para todo. Tenemos que hacerla ágil y resistente a cualquier eventualidad"[5]

Los beneficios de la diversificación son:

- Aumento de la rentabilidad disminuyendo el riesgo.
- Aumento de la rentabilidad asumiendo un mismo nivel de riesgo.
- Aumento de la rentabilidad más de lo que aumente el nivel de riesgo o lograr reducir el riesgo más de lo que disminuye la rentabilidad.

Teniendo en cuenta la diversificación (o no), las carteras presentan dos tipos de riesgos fundamentales: el *riesgo no diversificable o sistemático* y el *riesgo diversificable o específico.*

1. Riesgo no *diversificable o sistemático*, es el que no se puede eliminar pues es el riesgo del mercado(caída bursátil, recesión económica), si bien podemos reducirlo sensiblemente a través de la diversificación, es decir, no adquiriendo activos de ese mercado. Para poder reducir el riesgo sistemático, se optará por seleccionar activos con β menores, así la exposición a las fluctuaciones del mercado será menor.

2. Riesgo *diversificable o específico*, diversificable o específico, es el propio riesgo de los activos, depende directamente de ellos y se puede reducir mediante la diversificación, es decir, cuanto mayor sea el número de activos de la cartera menor será el riesgo.

Más adelante en el Modelo de Diagonal de Sharpe veremos su formulación (2.2).

1.5. Análisis y Gestión de Carteras

La gestión de carteras (portfolio management)es el proceso de toma de decisiones de inversión y diversificación de activos financieros con el fin de poder obtener la cartera con mayor rentabilidad y menor riesgo posible. Dicha gestión requiere el mantenimiento y vigilancia de las inversiones y de los factores que afectan a la evolución de los precios de las mismas.

En otras palabras, es un proceso continuo que exige intervenciones cuya frecuencia dependerá de los objetivos marcados y de los riesgos que se vayan a asumir, así como cambios en la economía y en los mercados financieros.

Dentro de la gestión se diferencian tres tipologías:[22]

- Gestión activa. Es aquella gestión dinámica que asume más riesgo cuando los mercados se revalorizan o menos riesgo (posición defensiva) cuando el mercado se devalúa. Trata de alejarse del Benchmark[9] y cuanto mas activa se la gestión el gestor,asume mas tracking error.[10]

- Gestión pasiva. Es aquella gestión en la que no se realizan cambios en la composición de la cartera. Se trata de replicar un Benchmark y alejarse lo menos posible de él(no presenta tranking error), de forma que la rentabilidad y el riesgo serán los mismos que en el Benchmark.

- Gestión alternativa. Es aquella gestión que busca un rendimiento absoluto, independientemente de la evolución de los mercados financieros, es decir, conseguir rentabilidad positiva en todo contexto de mercados.

En la gestión de carteras se debe definir una estrategia teniendo en cuenta la economía, el mercado y el objetivo del inversor, quien puede tener un perfil conservador, medio o agresivo. Según la CNMV[11], el perfil del inversor se define por la relación que existe entre los riesgos que está dispuesto a asumir y los rendimientos que espera obtener". [24]

---

[9] Indicador financiero de referencia en una cartera

[10] Es la desviación típica de los diferenciales de rentabilidad de un fondo frente a su índice de referencia en un periodo de tiempo determinado.

[11] Comisión Nacional del Mercado de Valores

Así, atendiendo al binomio rentabilidad/riesgo se puede decir que un *inversor conservador*, es el que acepta un nivel mínimo de riesgo que lleva condicionado un rendimiento bajo; un *inversor medio* es el que acepta un riesgo más alto previendo aumentar la rentabilidad y; un *inversor agresivo* es aquel que asume un elevado riesgo a la espera de una elevada rentabilidad. Se puede apreciar que al analizar estos dos parámetros, riesgo y rentabilidad, existe una correlación positiva.

La gestión de carteras se divide en dos fases:

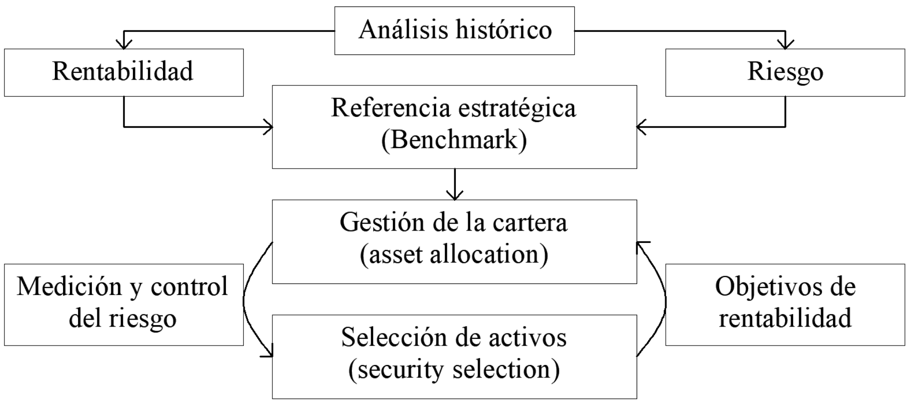

Figura 1.1. Esquema Fases de Gestión. Fuente:[22]

En la primera fase o ”fase inicial”, se define la filosofía de inversión, se marcan los objetivos que se quieren alcanzar, se delimita la exposición al riesgo, se seleccionan los activos financieros en los que vamos a invertir y se define el horizonte de inversión. Además, en esta fase se realiza un análisis histórico a través del que se comprueba cuál habría sido la evolución de la cartera propuesta en el pasado, en el que se destacan los parámetros de la rentabilidad y el riesgo. Teniendo la cartera definida, se debe tomar un indicador financiero de referencia para comparar y evaluar el rendimiento de la cartera: el *benchmark*.

El *benchmark* se debe elegir atendiendo al mercado en el que se orienta la inversión, al tipo de perfil del inversor y los tipos de activos que se vayan a considerar.

En el caso de construir una cartera con activos de renta variable española, se puede tomar como *Benchmark* el *Ibex*35[12]para poder contrastar, si se ha obtenido más o menos rentabilidad. *Objetivo: ¡batir el benchmark!*[13][22]

Las ventajas que aporta tomar un *Benchmark* como referencia son:

- Ayudar a comparar y evaluar los ejercicios actuales e históricos.
- Contribuir a identificar los riesgos de la inversión.
- Sintetizar la interpretación de los rendimientos.

La segunda fase supone la construcción y gestión de la cartera de inversión atendiendo a las directrices de inversión establecidas anteriormente. Considerando variables, como la evolución de los mercados y la situación económica, se hará una selección de los activos que se ajusten a los objetivos, en términos de rentabilidad y riesgo, que se desean alcanzar con la inversión. En otras palabras, el *asset allocation*, o asignación estratégica de activos, mide y controla los riesgos y materializa los objetivos de rentabilidad de una inversión fijados para una distribución o combinación del patrimonio de una cartera en función del tipo de activos y la proporción en la que se encuentran incluidos.

[12] El IBEX 35 es el principal índice bursátil de referencia de la bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Español (SIBE) en las cuatro bolsas españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia)

[13] Obtener una rentabilidad mayor que el índice de referencia

2

Teoría de Carteras y Modelos de Valoración

Tomando como base los trabajos de Juan Mascareñas(2012,veáse [10][11]) se han redactado los apartados del presente capítulo.

A lo largo del tiempo los inversores se han encontrado con la complicada decisión de crear una cartera de activos. Con el fin de ayudar con esa decisión, el economista americano Harry Markowitz escribe en 1952[8]. Aunque el artículo no despertó mucho interés, Markowitz continuó investigando sobre este nuevo campo, que recibe el nombre de Teoría moderna de Carteras. Así, en 1959[9], fundamenta la teoría moderna de carteras, donde estudia el proceso de selección de carteras atendiendo al rendimiento y riesgo de los activos, la correlación entre ambos e introduce el concepto de diversificación.

En 1964, William Sharpe[16], alumno de doctorado de Markowitz, investigó sobre las correlaciones existentes entre los activos de una cartera, comprobando que existe una correlación positiva entre ellos y un factor externo. Este trabajo de investigación provocó la aparición del Modelo diagonal de Sharpe y, posteriormente, junto con otros economistas, el modelo CAPM[1]. Este último argumenta la relación entre el riesgo sistemático y el rendimiento esperado de un activo suponiendo mercados eficientes.[2]

En 1976, el economista Stephen Ross[18] escribe un nuevo modelo de valoración, el Arbitraje Princing Theory (APT), asegurando que"los precios de los activos se ajustan conforme los inversores construyen carteras de valores que persiguen la consecución de beneficios de arbitraje. Cuando ya no existan dichas

[1] "Capital Asset Pricing Model"

[2] Para considerar un mercado como eficiente, deben cumplirse los siguientes supuestos básicos: "los inversores son diversificadores eficientes, el dinero puede invertirse o pedirse prestado al tipo de interés libre de riesgo, los inversores tienen expectativas homogéneas, no hay impuestos ni costes de transacción y el mercado de capitales se encuentra en equilibrio". [10]

oportunidades se alcanzará el equilibrio en los precios de los activos financieros". [11]

2.1. Modelo de Markowitz

Markowitz, premio Nobel de Economía en 1990, formaliza de manera matemática la idea de la diversificación de inversiones con la finalidad de optimizar la relación rentabildiad-riesgo. El modelo parte de los siguientes aspectos:

- "El rendimiento de cualquier título o cartera es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocido por el inversor. El rendimiento de título o cartera será medido a través de su esperanza matemática.
- El riesgo de un título, o cartera, viene medido por la varianza (o desviación típica) de la variable aleatoria representativa de su rendimiento.
- El inversor preferirá aquellos activos financieros que tengan un mayor rendimiento para un riesgo dado, o un menor riesgo para un rendimiento conocido. A esta regla de decisión se le denomina conducta racional del inversor."[10]

El propósito del modelo de Markowitz es la creación de la frontera eficiente formada por las carteras eficientes[3]. Para ello, utiliza la varianza, la media y la correlación de las rentabilidades de los activos en los que se va invertir.

Markowitz formula los dos siguientes problemas, uno maximizando el rendimiento (1) y otro minimizando el riesgo(2), cuya resolución permite obtener el conjunto de carteras eficientes:

$$Max\ \ E[R_p] = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i E[R_{i,t}] \qquad (1)$$

Sujeto a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\forall x_i \geqslant 0$$

donde las variables de decisión $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, son las proporciones de cada activo i en la cartera, cumpliéndose que $0 \leq x_{ip} \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

[3] Carteras que generan el mayor rendimiento para un riesgo determinado o presentan un riesgo mínimo para un nivel determinado de rentabilidad.

$$Min\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (2)$$

Sujeto a:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i E[R_{i,t}] = E^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$\forall x_i \geqslant 0$$

donde aplicando valores a E^* y V^*, el modelo indicará cual es la mejor opción de cartera. En la siguiente figura, la cartera p se representa con el punto $(\sigma_p^2, E[R_p])$

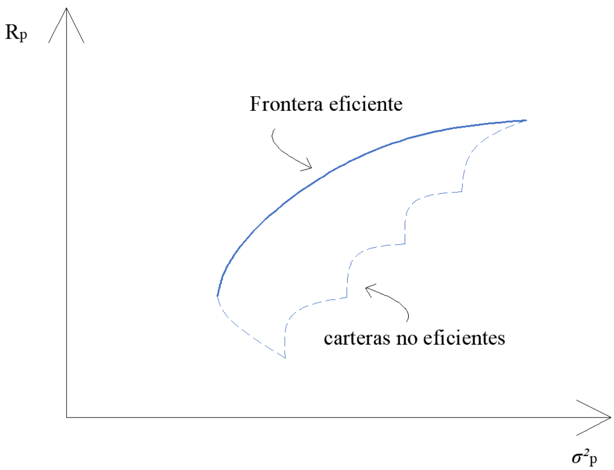

Figura 2.1. Frontera Eficiente.

La representación gráfica de la solución de los problemas (1) y (2) nos muestra la frontera eficiente, la cual tiene una forma cóncava, pues no existe una correlación perfecta entre los activos.

Observamos que en el eje de abscisas esta representado por el riesgo de la cartera y en el eje de ordenadas muestra el rendimiento esperado de la misma, la linea azul muestra la frontera eficiente donde están presentes todas las carteras óptimas. Por debajo de ella, se encuentran las carteras que no ofrecen un rendimiento lo bastante alto para compensar el riesgo. Atendiendo al perfil del inversor, éste se desplazará sobre la frontera eficiente aumentando o disminuyendo la rentabilidad de la cartera aceptando el riesgo asociado.

2.2. Modelo de diagonal de Sharpe

De acuerdo al modelo de Markowitz, para una cartera con 1.000 activos necesitaríamos calcular 1.000 rendimientos, 1.000 varianzas y $1.000^2 - 1.000 = 999.000$ covarianzas. Hoy en día sería sencillo llevar a cabo todas esas operaciones gracias a las nuevas tecnologías, pero en la década de los 60-80 los ordenadores no eran lo suficientemente potentes, y por tanto, la viabilidad del modelo de Markowitz era cuestionable.

"Sharpe observó que los títulos que componen las carteras de valores parecían estar sujetos a influencias comunes, por lo que postuló que los rendimientos de los títulos suelen estar positivamente relacionados. Esto le llevó a introducir una importante simplificación al considerar que los rendimientos de los diferentes valores están relacionados con un índice general (el de la Bolsa, el índice general de precios, etc.), y que la correlación entre los rendimientos de los diversos valores se deriva de su relación con dicho índice."[10] Así, el modelo de diagonal de Sharpe surge como una solución al Modelo de Markowitz:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

donde:
R_i: Rendimiento del activo i.
α_i: Rendimiento del activo i independiente del mercado.
β_i: Beta del activo i.
R_m: Rendimiento del índice del mercado.
ε_i: Perturbación aleatoria del activo i por factores desconocidos.

El coeficiente α_i, en otras palabras, es el rendimiento que podría tener el activo i si la rentabilidad del mercado (o índice) fuese cero.Se calcula como:

$$\alpha_i = R_i - \beta_i R_m$$

Por su parte, el *rendimiento del índice de mercado* R_m se entiende como:

$$R_m = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$$

donde: I_t: Valor del índice bursátil en el periodo t.
I_{t-1}: Valor del índice bursátil en el periodo t-1.
t: periodo de tiempo.

De igual forma, Sharpe formula el riesgo de un activo en dos partes: el riesgo específico y el riesgo sistemático, vistos en el apartado1.4.4, así el riesgo del activo i será:

$$\sigma_i^2 = \sigma_{\varepsilon i}^2 + \beta_i^2\,\sigma_m^2$$

donde:

- El riesgo específico : $\sigma^2_{\varepsilon i}$, es el riesgo del activo i,independiente a los cambios de mercado, riesgo que afecta al activo o empresa(solvencia, impagos).

- El riesgo sistemático: $\beta_i^2\,\sigma_I^2$, es el riesgo del mercado, donde β_i^2 es la beta del activo i elevado al cuadrado y σ_m^2 es el riesgo del índice de mercado.

A la hora de gestionar una cartera siguiendo el modelo de Sharpe, conforme se añaden activos a la cartera, que estén poco correlacionados y que tengan iguales ponderaciones $\frac{1}{n}$ (n número de activos), se está aumentando la diversificación de la cartera por lo que se disminuye el riesgo total de la misma hasta alcanzar un valor mínimo: ese valor es el riesgo sistemático. Esta situación se ilustra en la Figura 2.2, donde el eje de abscisas se representa una cartera tipo con n activos y en el eje de ordenadas, el riesgo asociado. Se observa que aunque se aumente el número de activos de la cartera p, no se podrá obtener un riesgo menor que el riesgo sistemático.

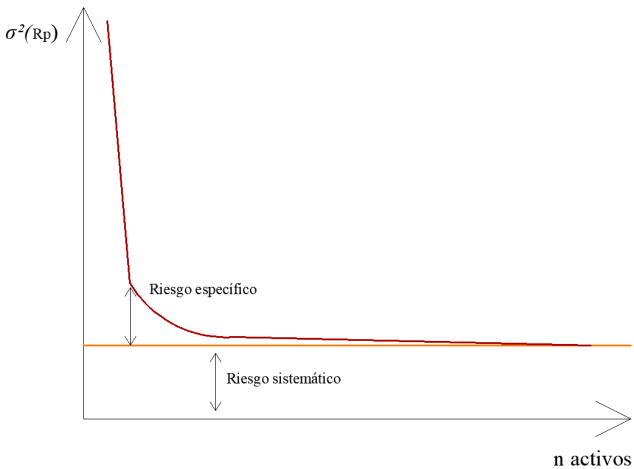

Figura 2.2. Riesgo específico, Riesgo sistemático y riesgo de una cartera tipo compuesta por n acitvos.

2.3. Modelo de valoración de Activos (CAPM)

En el mercado existen *activos financieros libres de riesgo*, normalmente presentes en países occidentales. Son aquellos que tienen una rentabilidad conocida de antemano, con riesgo igual a cero (o próximo a él), como pueden ser los Bonos del Tesoro, Deuda Pública,etc. Hay que tener en cuenta que aunque se consideren “libres de riesgo”, pueden tener otros asociados como el riesgo de precio y el riesgo de reinversión. Por ejemplo, con la crisis económica, las agencias como Moody's o Standard and Poors califican a estos activos en función de la solvencia del país emisor. Vamos a fijarnos en el caso de Grecia durante la crisis económica comenzada en 2009: El país, debido a la situación crítica en la que se encontraba, contaba con un alto riesgo de impago (entre otros) lo que provocó que sus activos de deuda pública llegasen a ser activos high yield[4]

Entonces, ¿es recomendable incorporar activos libres de riesgo a nuestra cartera? Quizás fuese esta la pregunta que pudeo plantearse James Tobin(1958)[19], dado que a lo largo de su investigación, profundizando sobre la frontera eficiente a partir del Modelo de Markowitz, desarrolló la "Capital Market Line"(CML)[5] (recta $R_f MZ$) en la que aparece la posibilidad de añadir un activo libre de riesgo a la composición de las carteras. Esto permitió a los inversores destinar parte de su capital hacia activos libres de riesgo manteniendo carteras óptimas [6]

Como se dice en el apartado 2.1, se sabe que la *frontera eficiente* esta formada por todas las *carteras eficientes*. Sin embargo, ante la posibilidad de añadir un activo libre de riesgo aparecen carteras que son mejores que otras. (Figura 2.3)

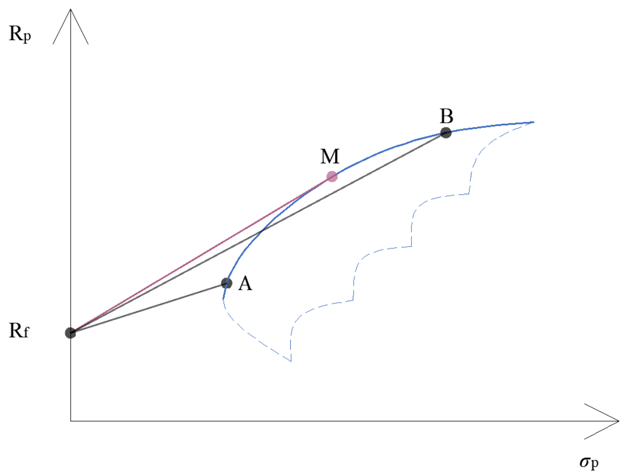

Figura 2.3. Introducción de activo sin riesgo (R_f)

.

[4] high yield es el nivel más bajo de calificación crediticio.sección1.3.2
[5] Línea del Mercado de Capitales
[6] Cartera cuya combinación riesgo-rentabilidad es perfecta de acuerdo a las preferencias del inversor.

Observamos las carteras A,B y M [7], que están formadas por activos con riesgo y situadas en la frontera eficiente. Si optamos por la combinación de la cartera A con un activo libre de riesgo, recta $R_f A$, veremos que aporta peor resultado respecto a la combinación de la cartera B y el mismo activo libre, $R_f B$. Si seleccionamos la combinación $R_f M$, vemos que estamos ante la mejor elección de las tres combinaciones: maximizamos el rendimiento para el menor riesgo posible, siendo la cartera M (cartera de Mercado[8]) una *cartera óptima*.

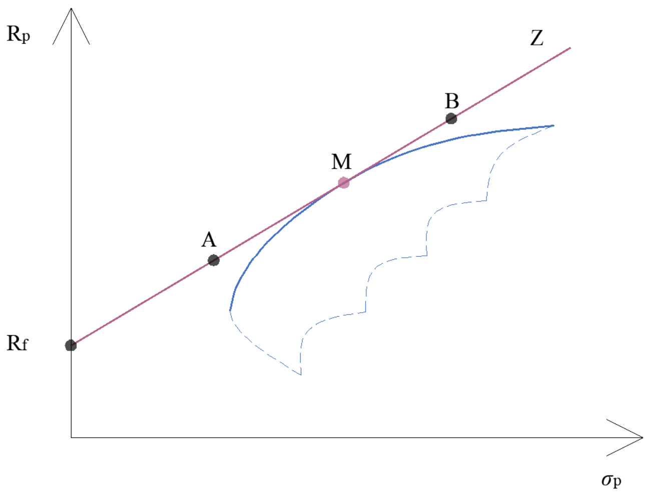

Figura 2.4. Linea de Mercado de Capitales (CML).

De acuerdo al *Teorema de la Separación* enunciado por James Tobin, "en el equilibrio todos los inversores adquieren la cartera M, que estará formada por el conjunto de todos los activos con riesgo del mercado en la misma proporción que se encuentran en dicho mercado. Si los inversores desean un mayor rendimiento que el ofrecido por el propio mercado deberán pedir prestado para poder desplazarse hacia la derecha de la línea $R_f MZ$ [9] (punto B); si, por el contrario, desean un menor riesgo deberán prestar con lo que se situarán a la izquierda de M (punto A)."[11] (Ver figura 2.4). De hecho, $R_f MZ$ representa la línea CML.

Este nuevo planteamiento se suma a las investigaciones llevadas a cabo por Jack Treynor (1961)[20], John Linther(1965)[14] y Jan Mossin(1966)[13], que a

[7] M es el punto de tangencia con la frontera eficiente

[8] "Podemos definirla como la combinación de todos los títulos con riesgo en la misma proporción que tienen en el mercado de valores"[11].

[9] La frontera eficiente de Markowitz se transforma en una línea recta al incorporar activos sin riesgo, tangente en el punto de cartera óptima

partir del Modelo de Markowitz y junto con William Sharpe, están considerados los fundadores del modelo CAPM(Capital Asset Princing Model).

Este modelo esta basado en que el mercado de capitales está en equilibrio, es decir, la oferta es igual a la demanda, lo que nos permite poder estimar la rentabilidad de un activo atendiendo al riesgo sistemático (no diversificable). Su formulación matemática es la siguiente:

$$R_i = R_f + \beta_i \cdot (R_m - R_f)$$

donde
R_i Rendimiento del activo i.
R_f Rentabilidad de un activo libre de riesgo.
R_m Rentabilidad del mercado.
$R_m - R_f$ Prima de rentabilidad por unidad de más de riesgo.
β_i beta del activo i.

En la figura 2.5, se representa la rentabilidad de un activo o cartera respecto al riesgo sistemático, siendo los puntos de la recta de la forma $(\beta_i, E[R_i])$:

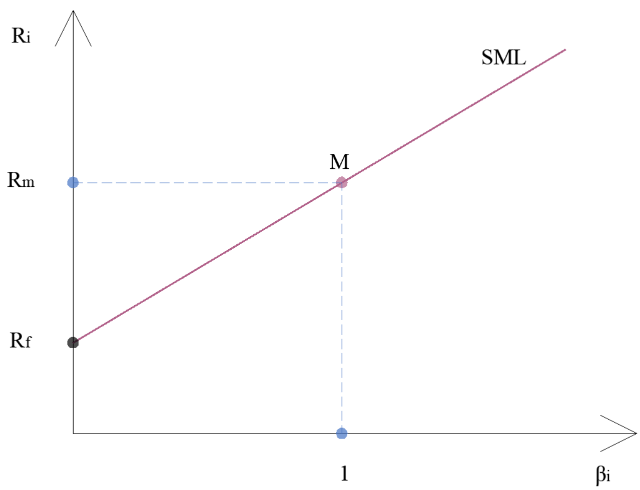

Figura 2.5. Línea de Mercado de Títulos (SML).

Donde SML (Security Market Line) es la línea de Merado de Títulos, que representa el rendimiento esperado de un activo (o cartera) en función del riesgo sistemático. Las diferencias apreciables entre la SML y la CML, son que la primera de ellas mide solo el riesgo sistemático y puede aplicarse tanto a carteras como activos(β), mientras que la CML mide el riesgo total a través de la desviación típica y solo se puede utilizar con una cartera de mercado.

2.4. Teoría de valoración por Arbitraje o APT

La teoría de valoración por Arbitraje (APT) fue desarrollada por Sthephen Ross(1976)[18], quien considera que los precios de los activos financieros se ajustan a medida que los inversores construyen sus carteras. Esta percepción se basa en que en un mercado el arbitraje garantizará que los rendimientos esperados de los activos libres de riesgo sean iguales.

Según este método, el riesgo sistemático es el factor explicativo fundamental del comportamiento de la rentabilidad de los activos financieros, si bien aquel no se mide únicamente por el coeficiente beta de la rentabilidad de un activo individual con respecto a la rentabilidad de la cartera de mercado, sino por una serie de coeficientes beta asociados a otros tantos factores explicativos no especificados a priori que operan de forma aditiva y que deberán ser fijados a posteriori. [17]

La Teoría de valoración por Arbitraje o APT, es distinta del Arbitraje Estadístico o StarArb sobre el que trata el siguiente capítulo.

3

Arbitraje Estadístico

En el mercado financiero se pueden generar ganancias comprando a precios bajos y vendiendo a precios altos en cortos intervalos de tiempo. Los diferentes productos financieros de empresas(activos, acciones, fondos,...) pueden estar presentes en diferentes mercados, por ejemplo, el Banco Santander cotiza en los mercados de España, Varsovia, Nueva York y Londres, pudiendo llegar a existir una diferencia de precio por la misma acción al estar cotizando en distintos mercados. A esta circunstancia, causada por la variación de la oferta y la demanda de acciones, se le conoce como *grietas o brechas*, en donde los precios de compra no van a ser los mismos en un mercado que en otro hasta que no se consiga el punto de equilibrio entre ambos.

Esto ocurre naturalmente porque al ofrecerse acciones a la venta a un precio más alto de lo que se está dispuesto a pagar por ellas, los compradores y vendedores más urgentes se ven obligados a aceptar los términos del mercado en ese momento. Este tipo de estrategias de compra-venta se denomina arbitraje estadístico, o stat arb, y puede ser estudiado en el contexto del comportamiento de la cartera. [3]

Entonces, arbitraje estadístico "se refiere a la compra de un activo en un mercado con el propósito de venderlo de inmediato, a precio más alto, en otro mercado. El arbitraje es un factor importante en el funcionamiento eficiente de cualquier mercado, pero sobre todo de un mercado de capital"[2], aprovechando las ineficiencias del mercado y generando operaciones con un beneficio libre de riesgo. Para poder ejecutar estas acciones de compra-venta, se analizan y estudian las series temporales de los activos teniendo en cuenta los desequilibrios de mercado y siendo conscientes de que el precio de los activos volverán al equilibrio.

Es cierto que las operaciones en el arbitraje estadístico están libres de riesgo, pero se deben tener en cuenta las comisiones de los brokers[1] de la compra-

[1] Agente intermediario en operaciones financieras o comerciales que percibe una comisión por su intervención.

venta y mantenimiento de acciones: si la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra es mayor que la suma de las comisiones, se obtiene un beneficio. Si la diferencia entre el precio de venta y el precio de compra es menor que la suma de las comisiones por realizar la operación, se obtendría una pérdida. Esta circunstancia es una de las particularidades que podríamos considerar como riesgo.

Por tanto, el arbitraje estadístico se ofrece como una herramienta con la que establecer estrategias de operatividad en los mercados que trabaja con movimientos rápidos de activos creando carteras de corta duración que se mantienen abiertas el tiempo que dura la operación del arbitraje.

Dentro de las operaciones de compra-venta de activos financieros en los mercados existen dos opciones:

Operación $CALL$(Abrir largos): Es aquella que consiste en comprar un activo financiero a un precio determinado con la previsión de que va a aumentar su valor de tal forma que se obtenga un beneficio con su venta en el futuro. Es rentable utilizar esta operación cuando los mercados tienen comportamiento a la alza.

Operación PUT(Abrir cortos): Es aquella que consiste en vender un activo financiero a un precio determinado con la previsión de que va a disminuir su valor de tal forma que se obtenga un beneficio con su compra en el futuro, siendo dicho beneficio la diferencia entre el valor de venta y compra. Es rentable utilizar esta operación cuando los mercados tienen comportamiento a la baja.

Existen varios métodos de stat arb, pero en este Trabajo Final de Grado se ha atendido al Trading pairs.

3.1. Trading Pairs

La estrategia Trading Pairs analiza la correlación histórica de dos activos financieros para, a través de un modelo de matemático de regresión lineal simple, obtener una rentabilidad.

Para poder realizar arbitraje, y que éste sea rentable, se debe prestar atención a la relación existente entre las series temporales de los activos mediante modelos estadísticos, incluso pudiendo crear un algoritmo que disminuya los inconvenientes de esta estrategia, aproveche las ineficiencias del mercado y ejecute operaciones de la compra-venta de acciones, divisas u otros.

Para desarrollar la estrategia de Trading Pairs primero se seleccionan dos (o más) activos financieros que estén correlacionados de alguna forma, que cuanto mayor sea mejor será, y observar su evolución en el tiempo a corto o medio. En segundo lugar, se transforman las series con un modelo aditivo, de tal forma que ambas comiencen en un mismo punto. En tercer lugar, se generan la gráficas en las que se visualizan las series y se comienza a operar. Se comprará (apertura de la operación) el activo que este más bajo y se venderá el que está más alto (cierre de la operación). Cuando se equilibre el valor de los activos, o incluso genere desequilibrios beneficiosos, se ejecutará la operación a la inversa, es decir, se vende y se compra.

Por ejemplo, de acuerdo a la figura 3.1[2] y tomando dos activos del mismo sector dentro del mercado de divisas[3] consideramos la serie temporal de divisas de EUR/USD (euro-dólar, representada por la línea negra) y la serie temporal de divisas GBP/USD (libra-dólar, representada por la línea roja, en las que se observan patrones de comportamiento similar. En el punto 1 se ejecuta la operación de compra de EUR/USD (se están vendiendo dólares), y simultáneamente en el punto 2 se venden GBP/USD (se están comprando dólares) debido a que, tal y como se aprecia en la gráfica, en el caso de los euro dólares, al subir el precio del euro, bajará el del dólar, por lo que es el momento idóneo para realizar esta venta. Por otro lado, se vende la libra, está perdiendo fuerza, aumentando el precio del dólar y, en consecuencia, obteniendo una ganancia en la próxima operación (punto 3).

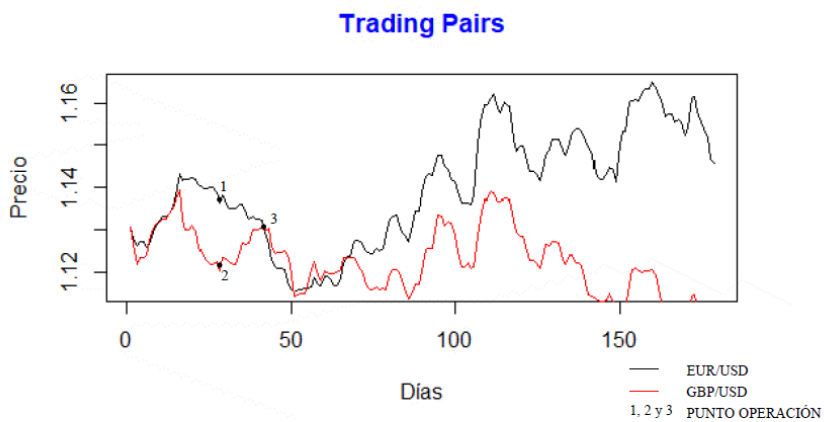

Figura 3.1. Ejemplo de Trading de dos pares de divisas. Elaboración Propia

Cabe señalar que también existen correlaciones entre activos financieros que en principio no se suponen como tales. Tal y como se aprecia en la figura 3.2,

[2] La gráfica representa la variación del dólar respecto al euro y dólar respecto a libra

[3] El mercado de divisas, que se conoce también como Forex (Foreign Exchange) es aquel en el que se venden y compran pares de divisas. Dichos pares se conforman con una divisa base, que es la primera que aparece en el par, y una divisa que cotiza que corresponde a la segunda, de tal forma que el valor de la base se refleja a través del valor de la que cotiza.

se establece una representación gráfica de las series temporales de las acciones de BBVA (línea negra) frente a las de Telefónica (línea roja). Ambas series temporales tienen comportamientos similares pero no iguales, cruzandose en varias ocasiones favoreciendo la práctica de la estrategia Trading Pairs, aunque no pertenezcan al mismo sector.

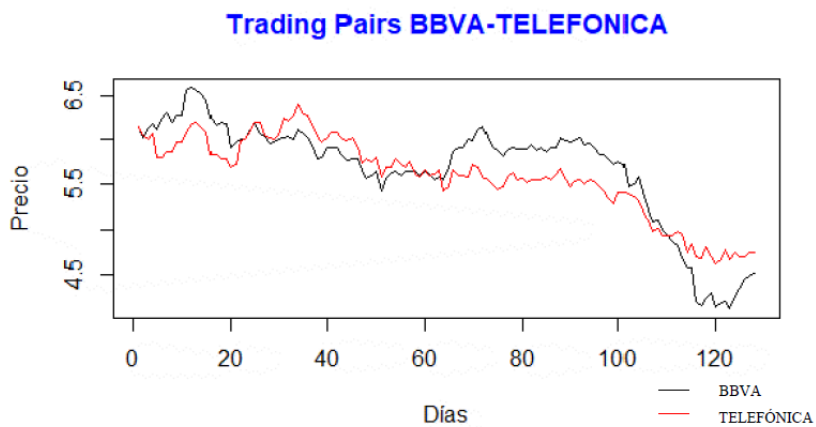

Figura 3.2. Ejemplo de Trading de dos pares de acciones: BBVA y Telefónica. Elaboración Propia

Se observa que ambas series siguen un patrón similar de comportamiento dificultando la estrategia de arbitraje al moverse en paralelo, presentando, en este caso, un único punto (1) de cruce de las series (de equilibrio)[4]. Ante esta situación, no es recomendable operar con este par de activos dado que no se prevé una tendencia futura de múltiples puntos de equilibrio con los que poder operar.

Sin embargo, este modelo de arbitraje presenta desventajas, dado que las series temporales no son estacionarias, y en consecuencia, el sistema no es estable: las series pueden estar mucho tiempo en desequilibrio. También hay que tener en cuenta que a través de este método se desconoce cuál es el punto óptimo para comenzar con las operaciones de arbitraje debido a la incertidumbre señalada.

[4] Se entiende como punto de equilibrio aquel que representa el cruce de las series temporales al igualarse los precios de las acciones

4

Caso Aplicado

Como objeto del presente Trabajo Final de Grado, y tras haber profundizado en conceptos financieros y sobre gestión de carteras, se desarrrolla en el caso aplicado, por un lado, la creación de una cartera con varios activos utilizando el Modelo de Markowitz (modelo de gestión de carteras) y, por otro, el uso del arbitraje trading pairs como herramienta estratégica operando con dos activos financieros, y en consecuencia, creando una cartera durante la operación. Dicho caso aplicado no tiene en cuenta la cantidad de capital a invertir, sino que se tiene en cuenta los parámetros necesarios para la gestión de carteras independiente del capital invertido.

4.1. Cartera de Markowitz

De acuerdo con el modelo de Markowitz, el objetivo de la cartera es que sea eficiente, y para este caso concreto, se gestionará de una forma pasiva para un perfil de inversor con un perfil arriesgado invirtiendo en la bolsa española.

Para construir la cartera se ha utilizado la herramienta Excel y Morningstar[1],este proveedor nos facilitará la búsqueda de acciones, además de poder ser usada para buscar activos de todo tipo: fondos de inversión, acciones, renta fija, renta variable, fondo cotizados o ETFs[2].

Atendiendo a las fases de gestión de carteras, vistas en el apartado **??**, el primer paso que se debe llevar a cabo es establecer los parámetros de partida:

- Filosofía de inversión: Estratégica a través de la elección de activos poco correlacionados entre sí con el fin de reducir el riesgo.

[1] Es un proveedor online de análisis y evaluaciones de productos financieros

[2] Instrumentos de inversión híbridos entre los fondos y las acciones, de tal manera que reúnen la diversificación que ofrece la cartera de un fondo con la flexibilidad que supone poder entrar y salir de ese fondo con una simple operación en Bolsa.

- Objetivos a alcanzar: Obtener una rentabilidad que suponga un riesgo bajo.
- Exposición al riesgo: El inversor quiere mantener entre un 1 y un 4 % de riesgo en la cartera.
- Análisis de activos: Evolución del rendimiento y riesgo de los activos en los últimos 10 años.
- Horizonte de inversión: 10 años.
- Índice de referencia (benchmark): IBEX 35

Teniendo ya presente la idea de la cartera, se utilizó la herramienta Morningstar para la búsqueda y selección de acciones de empresas de distintos sectores para poder conseguir activos poco correlacionados. Para este caso, se han elegido las acciones de las empresas de Telefónica (telecomunicaciones), BBVA (bancario), Mediaset (información y comunicaciones), Endesa (eléctrico y gasístico), Grifols (farmacéutico) y Meliá (hotelero).

A continuación, se comprouean las rentabilidades y riesgos de cada una de ellas el periodo de tiempo seleccionado con el fin de realizar su análisis histórico. Para ello, los datos se obtuvieron a través de la página Yahoo Finances, un portal fiable y de acceso libre. Con todo ello, ya tenemos la cartera definida. Por tanto, se calculó la matriz de rendimientos y los riesgos y los beta de cada una de las acciones.

Indicadores	IBEX35	TELEFONICA	BBVA	MEDIASET	ENDESA	GRIFOLS	MELIA
Proporción	-	17%	17%	17%	17%	17%	17%
Rendimiento	-0,11%	-0,21%	-0,05%	0,47%	0,81%	1,73%	0,46%
Riesgo (Volatilidad)	5,34%	7,01%	8,15%	9,47%	7,68%	8,01%	8,41%
Beta	-	1,08	1,37	1,00	0,85	0,42	1,12

Figura 4.1. Rendimientos y Riesgos de Activos.Elaboración Propia

Tal y como se observa en la tabla, la cartera, atendiendo a los betas de las acciones, presenta títulos agresivos (mayor variabilidad respecto al índice de referencia): BBVA, Telefónica y Meliá, títulos neutros (igual variabilidad que el índice de referencia): Mediaset, y títulos defensivos (menor variabilidad respecto al índice de referencia): Endesa y Grifols.

Con esa información, se pudo determinar la correlación entre las acciones a través del cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas, la cual presenta los siguientes datos:

Matriz de Varianzas y Covarianzas						
	TELEFONICA	BBVA	MEDIASET	ENDESA	GRIFOLS	MELIA
TELEFONICA	0,0049	0,0039	0,0028	0,0027	0,0011	0,0033
BBVA	0,0039	0,0066	0,0038	0,0031	0,0010	0,0042
MEDIASET	0,0028	0,0038	0,0090	0,0022	0,0014	0,0044
ENDESA	0,0027	0,0031	0,0022	0,0059	0,0012	0,0031
GRIFOLS	0,0011	0,0010	0,0014	0,0012	0,0064	0,0020
MELIA	0,0033	0,0042	0,0044	0,0031	0,0020	0,0071

Figura 4.2. Varianzas y Covarianzas.Elaboración Propia

y muestra que, efectivamente, los activos están poco relacionados unos con otros cumpliendo con uno de los parámetros establecidos. Seguidamente, mediante la función solver de Excel se aplicó la formula de Markowitz con la que se buscaba obtener la frontera eficiente, donde se encuentran todas las carteras eficientes para el caso estudiado, siendo los puntos de la gráfica (de la frontera eficiente) dichas carteras.

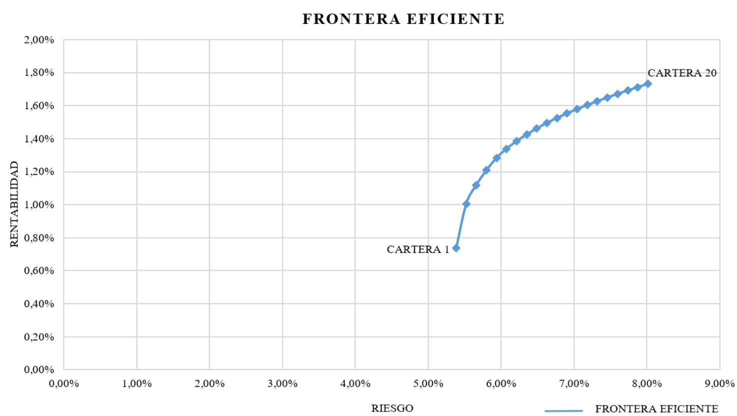

Figura 4.3. Frontera Eficiente.Elaboración Propia

De todo ello, se concluye que la cartera que aporta el menor riesgo pero con menor rentabilidad es la cartera 1, mientras que la cartera 20 es la que aporta mayor rendimiento pero con mayor riesgo. A la vista de los resultados, el riesgo a asumir es elevado respecto a los objetivos marcados en cuanto a volatilidad y las preferencias del inversor.

CARTERA	RIESGO CARTERA	RENTABILIDAD CARTERA
CARTERA 1	5,38%	0,74%
CARTERA 2	5,52%	1,00%
CARTERA 3	5,66%	1,12%
CARTERA 4	5,80%	1,21%
CARTERA 5	5,94%	1,28%
CARTERA 6	6,07%	1,34%
CARTERA 7	6,21%	1,38%
CARTERA 8	6,35%	1,42%
CARTERA 9	6,49%	1,46%
CARTERA 10	6,63%	1,50%
CARTERA 11	6,77%	1,53%
CARTERA 12	6,91%	1,55%
CARTERA 13	7,04%	1,58%
CARTERA 14	7,18%	1,60%
CARTERA 15	7,32%	1,63%
CARTERA 16	7,46%	1,65%
CARTERA 17	7,60%	1,67%
CARTERA 18	7,74%	1,69%
CARTERA 19	7,87%	1,71%
CARTERA 20	8,01%	1,73%

Figura 4.4. Carteras eficientes obtenidas con el modelo de Markowitz.Elaboración Propia

4.2. Trading Pairs

Para la aplicación de la estrategia Trading Pairs se ha escogido un periodo de tiempo más reducido, dado que con este modelo de arbitraje no es interesante estudiar el comportamiento de las series temporales en un análisis histórico amplio, sino conocer y valorar cómo evolucionan dichas series en periodos más cortos de tiempo con el fin de aprovechar los desequilibrios de mercado realizando operaciones de compraventa continuas.

Así mismo, y tal y como se indicaba en el apartado 3.1, en el Trading Pairs se aconseja utilizar activos financieros que presenten una correlación entre ellos, de tal forma que si son de igual sector se presuponen mayores relaciones. Sin embargo, a través de este caso práctico observaremos que dicha afirmación no siempre se cumple.

Para este caso, se han escogido los siguientes parámetros:

- Activos financieros: acciones.
- Sector de mercado: bancario.
- Empresas objeto: BBVA, Santander y Bankinter.
- Periodo de tiempo: 6 meses.

y se ha utilizado la herramienta R-studio con la que se ha generado un algoritmo con el que estudiar las series temporales de los activos. Esto nos permite conocer el comportamiento de las mismas para realizar previsiones de comportamiento en relación a los desequilibrios del mercado.

El paquete de R *quantmod*[3], da acceso a los datos desde Yahoo Finance, Oanda, Google Finance o FRED(Reserva Federal de los Estados Unidos), necesario para desarrollar modelos de trading estadístico.

Para este caso aplicado se han estudiado activos financieros del sector bancario en dos casos concretos en los que se aprecian diferencias de comportamiento (a pesar de que se prevea, en principio, una correlación entre ellos).

En primer lugar, se estudia el comportamiento de la series temporales de los precios de las acciones de BBVA y Banco Santander, transformando dichas series con un modelo aditivo que consiste en que ambas series tengan el mismo punto de partida. Al generar las gráficas en las que se visualizan las series podemos comenzar el análisis.

Las series graficadas en la figura 4.4, muestran el comportamiento de los precios de las acciones de BBVA y Santander durante el periodo obtetivo. Se observa que ambas series siguen un patrón similar de comportamiento dificultando la estrategia de arbitraje al moverse en paralelo, presentando, en este caso, un único punto (1) de cruce de las series (de equilibrio)[4]. Ante esta situación, no es recomendable operar con este par de activos dado que no se prevé una tendencia futura de múltiples puntos de equilibrio con los que poder operar.

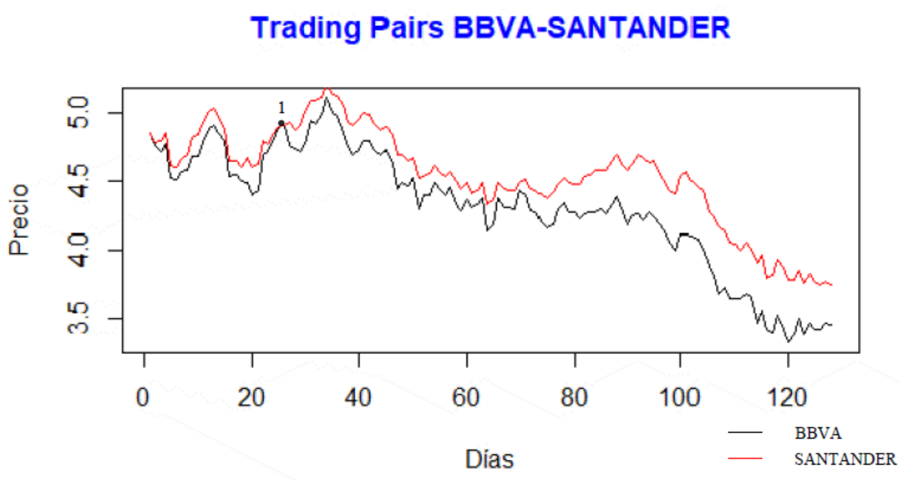

Figura 4.5. Trading de dos pares de acciones: BBVA y Santander.Elaboración Propia

[3] Quantitative Financial Modeling and Trading Framework for R

[4] Se entiende como punto de equilibrio aquel que representa el cruce de las series temporales al igualarse los precios de las acciones

Para el estudio del comportamiento de las series temporales de los precios de las acciones de BBVA y Bankinter se sigue el mismo procedimiento empleado anteriormente. En este caso, se observa que las series temporales no siguen el mismo patrón de comportamiento, de tal forma que gracias a las oscilaciones y cruces entre las series existentes se puede operar.

Considerando 1, 2, 3 y 4 puntos para empezar a operar con las acciones de estos dos bancos, se plantean dos casos.

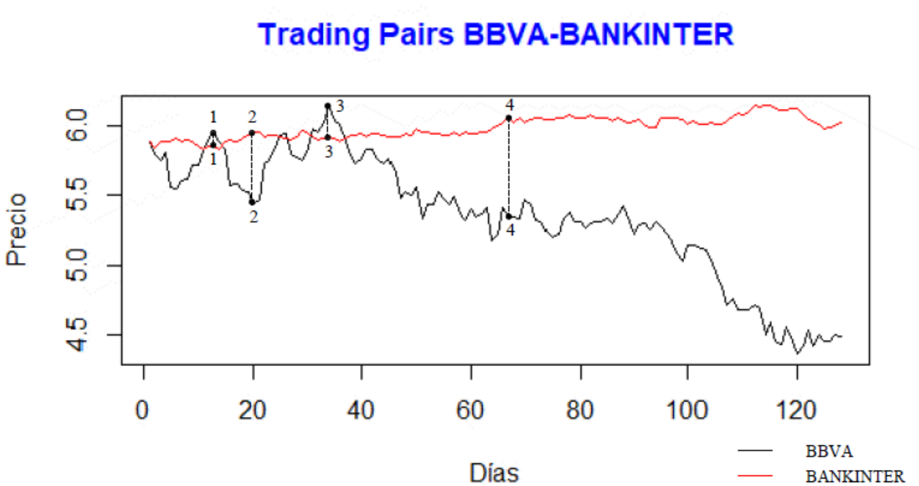

Figura 4.6. Trading de dos pares de acciones: BBVA y Bankinter.Elaboración Propia

CASO 1:

Comenzando la operación en el punto 1, se empezará vendiendo acciones de BBVA (PUT[5]) previendo una baja, y comprando acciones de Bankinter (CALL[6]) previendo una subida. En el punto 2 se decide mantener las acciones de Bankinter dado que se observa que se mantiene bastante estable con una tendencia se subida mientras que BBVA parece que tiende a seguir cayendo. Sin embargo, a medida que pasan los días, se observa que el precio de las acciones de BBVA comienza a aumentar y que las de Bankinter no sufren grandes cambios, incluso, empezando a bajar levemente su precio. Es por ello, que de acuerdo a lo observado, se decide en el punto 3 vender las acciones de Bankinter y comprar las de BBVA para cerrar la operación dado que se está perdiendo dinero

[5] Acción de venta. 3.1
[6] Acción de compra. 3.1

al no haber decidido cerrar la opración antes. Sin embargo, esta decisión no fue acertada, dado que BBVA comienza a decaer y Bankinter sigue en su tendencia estable, por lo que si se hubiese esperado se habrían conseguido grandes beneficios. (Por un lado, se vendieron las acciones de BBVA en el punto 1 y se podrían comprar en el punto 4 obteniendo un gran beneficio. Por otro lado, se compraron las de Bankinter y al mantenerlas en el tiempo, se hubiese conseguido un cierto beneficio por la leve subida de su precio).

CASO 2:

Para este caso, comenzaremos en el mismo punto de partida pero las decisiones a tomar son distintas. De igual igual forma que en el caso 1, se inicia la operación en el punto 1, donde se venden acciones de BBVA (PUT) previendo una baja, y se compran acciones de Bankinter (CALL) previendo una subida. En el punto 2 se decide vender las acciones de Bankinter y se compran las acciones de BBVA dado que se prevé que suba, cerrando así la operación. Comenzamos de nuevo a operar en el punto 3 y se hará de la siguiente manera: se compran acciones de Bankinter (CALL) y se venden las acciones de BBVA (PUT). Manteniendo esta opreación abierta, se observa que la decisión tomada genera grandes beneficios. En el punto 4, se decide cerrar la operación comprando las acciones de BBVA y vendiendo las de Bankinter.

Se confirma la previsión de subida hasta que en el punto 3 se prevé, por las posibles circunstancias que existen en el mercado, que BBVA va a sufrir un periodo de caída de precio. Esto hace que se tome la decisión de vender las acciones de BBVA.

5

Conclusiones

La Estadística, en sus vertientes de Estadística Descriptiva y de Inferencia Estadística, nos permite describir situaciones y realidades pasadas, presentes, futuras y nos facilita la obtención e inferencia de conclusiones sobre dichas situaciones y realidades.

Así, la Estadística permite la cuantificación y cálculo de valores asociados a conceptos como la rentabilidad, el riesgo y otro muchos. Dichas valoraciones facilitan la toma de decisiones.

es una disciplina matemática que nos permite a través del estudio de datos obtener, por un lado, gráficas y parámetros con los que poder llegar a conclusiones, y por otro lado, inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.

Así, con la estadística como herramienta, la economía financiera desarrolla todos los cálculos necesarios para conocer los parámetros que afectan a una inversión como pueden ser rentabildiad, riesgo o beneficio, entre otros, con los que poder tomar decisiones a través del análisis de los datos obtenidos mediante dicho cálculo numérico. Dichas decisiones pueden estar basadas, por ejemplo, en un análisis histórico que nos indique el comportamiento de una serie de activos o pueden estar basadas en predicciones en base a la *probabilidad* de que algo ocurra.

Advertir esta realidad me ha permitido darme cuenta de que el grado de matemáticas ofrece una base teórica y práctica muy versátil que se puede aplicar a cualquier campo científico, y con ello, conocer la potencialidad de las competencias adquiridas en el grado.

Atendiendo a la gestión de carteras y el arbitraje estadístico en base al modelo y estrategia desarrollados en el caso aplicado, se observa que existen distintas formas de invertir el capital con distinta dedicación, tiempo y riesgos a asumir, pudiendo tener una amplia oferta de acuerdo a cada tipo de inversor.

A la vista de los resultados obtenidos, se obtienen, al menos, dos escenarios:

Por una lado, el Modelo de Markowitz se presenta como un modelo de gestión en el que se debe realizar un trabajo exhaustivo de búsqueda y estudio de activos. Esto supone un esfuerzo al principio de la inversión. Sin embargo, una vez conformada la cartera, la gestión de la misma se hace una manera pasiva, dejándola actuar e interviniendo solo en caso necesario (una recesión económica, fuerte crisis en un sector derterminado,...). Además, a pesar de que en la cartera se puedan asumir riesgos, de acuerdo Markowitz, la diversificación es un punto clave a tener en cuenta a la hora de conformar una cartera dado que se minimiza el riesgo de la misma, aspecto comprobado en el caso aplicado.

Por otro lado, el arbitraje estadístico Trading Pairs es una estrategia de inversión que requiere una gestión activa que permita desarrollar operaciones de compra venta de manera más o menos regular aprovechando las diferencias del mercado, como se observa en el caso aplicado. Esto implica que no es necesario invertir mucho tiempo a la hora de conformar una cartera pero sí en estudiar las posibles tendencias y comportamientos de las series temporales de precios de los activos. Cabe añadir que, a pesar de que en principio y desde un punto de vista teórico esta estrategia está libre de riesgo, en el caso aplicado se ha comprobado que esta circunstancia puede ser subjetiva dado que, al no conocer el mejor momento para comenzar una operación, se puede tener como resultado no obtener los beneficios previstos o que podrían haberse conseguido. Además, no se ha tenido en cuenta las comisiones que cobran los brokers por operar en el mercado, aspecto que supone también un riesgo ya que, aunque la compra venta dé ganancias, si el procentaje que se lleva el broker es mayor que el beneficio obtenido, se habría operado bien pero no de forma eficiente.

Bibliografía

[1] D. ALCAIDE LÓPEZ DE PABLO, “Ranking of ecological risks related to wastewater management”, *Wastewater Reuse-risk Assessment, Decision Making and Environmental Security* M.K Zaidi(ed.),pp.111-120, Springer, 2007

[2] D.R. EMERY,J.D. FINNERTY,J.D.STOWE, *Fundamentos de administración financiera*, Pearson, 2000

[3] R. FERNHOLZ, Y JR. CARY MAGUIRE, “The Statistics of Statistical Arbitrage”, *Financial Analysts Journal*, vol. 63, nº 5, CFA Institute, 2007

[4] B. ECHEMENDÍA TOCABENS “Definiciones acerca del riesgo y sus implicaciones”, *Revista Cubana de Higiene y Epidemiología*, vol. 49, nº 3, sep.-dic, 2011

[5] F. GARCÍA, *Invirtiendo a largo plazo*, Barcelona: Deusto, 2016

[6] B. GRAHAM, *El inversor inteligente*, Lugar, Deusto, 1973

[7] M.A. GONZÁLEZ, *Estadística Descriptiva*, San Cristóbal de la Laguna: Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, 2005

[8] H. MARKOWITZ, “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, vol 7, nº1, pp. 77-91, Marzo, 1952

[9] H. MARKOWITZ, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, vol 7, nº1, pp. 77-91, Marzo, 1959

[10] J. Mascareñas, *Gestión de Carteras I. Selección de Carteras*, Madrid: Universidad Complutense de Madrid, Versión original: ene-86. última versión: dic-12, 2012

[11] J. Mascareñas, *Gestión de Carteras II. Modelo de Valoración de Activos*, Madrid: Universidad Complutense de Madrid. Versión original: feb-86. última versión: dic-12, 2012

[12] R.Montero, *Variables no estacionarias y cointegración. Documentos de Trabajo en Economía Aplicada*, Universidad de Granada, España, 2013

[13] J. Mossin, "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, vol 34, nº4, pp. 768-783, Oct, 1966

[14] J. Linther,"Security Prices, Risk, And Maximal Gains from Diversification", *The Journal of Finance*, vol 20, nº4, pp. 587-615, Dec,1965

[15] E. Sáez, *Curso básico sobre Bolsa: Mercados financieros, aspectos fiscales e informáticos*, Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2000

[16] W. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risks", *The Journal of Finance*, vol 19, nº3, pp. 425-442, Sept, 1964

[17] M. Solórzano García y E. Pérez-Gorostegui, *Gestión patrimonial y banca privada*, Coordinadores de edición: Vallejo Alonso, B. y Solórzano García, M. Pirámide, Madrid: Anaya, 2013

[18] R. Stephen, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, nº13, pp.341-360, May, 1976

[19] J. Tobin, "Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables", *Econometrica*, vol 26, nº1, pp. 24-36, Enero, 1958

[20] J. Treynor, "Market Value, Time, and Risk", Unpublished manuscript, Aug, 1961

[21] AFI, *Curso de Introducción al Data Science en R*, Madrid: Escuela de Finanzas AFI, 2019

[22] AFI, *Curso de Introducción a la gestión de carteras*, Madrid: Escuela de Finanzas AFI, 2019

[23] Diccionario de la Real Academia Española

[24] CNMV *https://www.cnmv.es/portal/home.aspx*

[25] Excel *https://products.office.com/es-es/excel*

[26] Rstudio *https://www.rstudio.com/products/rstudio*

[27] Morningstar *http://tools.morningstar.es/es*

[28] Yahoo Finanzas *https://es.finance.yahoo.com*

Study and application of models for risk analysis and portfolio management

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Adrián Fernández Colmenero
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101002606@ull.edu.es

Abstract

Portfolio management models and statistical arbitration strategies are two options for controlling and managing investments by large, medium and small investors. This work explores these options by considering concepts of the Financial Economy from a mathematical perspective with special emphasis and attention to the techniques and approach of Statistics and Operational Research. In addition, it also incorporates the study of specific situations in which the Markowitz Model and the Statistical Arbitration (Trading Pairs Strategy) are applied.

1. Introduction

From a general point of view, Mathematics offers a wide potential for the design of tools that facilitate the calculation and determination of parameters of numerous scientific and nonscientific disciplines. Among these disciplines we can mention the Financial Economy that worries the study of the financial markets through the economic analysis of the assets that make up the investments present in those markets. In this context and with this perspective the present Work of End of Degree, focused on Risk Analysis and Portfolio Management, is situated.

2. Basic Concepts

Summary of the basic concepts for Risk Analysis and Portfolio Management.

3. The Theory of Portfolios

Description of Portfolio Theory and Valuation Models: The model of Markowitz, the diagonal model of Sharpe, the Capital Asset pricing Model (CAPM) and Arbitrage Pricing Theory.

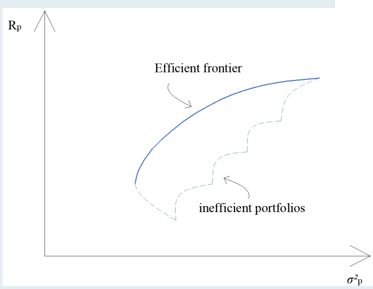

Figure 1: *Frontera Eficiente.*

4. Statistical Arbitration

Study the Trading Pairs strategy that analyzes the Historical correlation of two financial assets for, through a simple mathematical model of linear regression, to obtain a profitability.

5. Case Applied

In the applied case, the creation of a portfolio is developed, on the one hand, using the Markowitz model and on the other hand, the analysis of the Trading Pairs strategy.

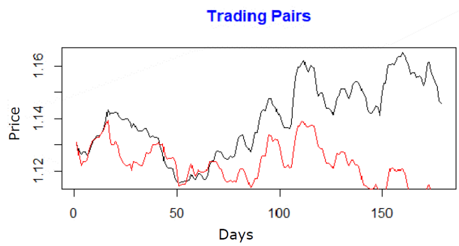

Figure 2: *Example of Trading Pairs. Own elaboration.*

References

[1] D. Alcaide López de Pablo, "Ranking of ecological risks related to wastewater management", *Wastewater Reuse-risk Assessment, Decision Making and Environmental Security* M.K Zaidi(ed.),pp.111-120, Springer, 2007

[2] D.R. Emery,J.D. Finnerty,J.D.Stowe, *Fundamentos de administración financiera*, Pearson, 2000

[3] R. Fernholz, y Jr. Cary Maguire, "The Statistics of Statistical Arbitrage", *Financial Analysts Journal*, vol. 63, nº 5, CFA Institute, 2007

[4] B. Echemendía Tocabens "Definiciones acerca del riesgo y sus implicaciones", *Revista Cubana de Higiene y Epidemiología*, vol. 49, nº 3, sep.-dic, 2011

[5] F. García, *Invirtiendo a largo plazo*, Barcelona: Deusto, 2016

[6] B. Graham, *El inversor inteligente*, Lugar, Deusto, 1973

[7] M.A. González, *Estadística Descriptiva*, San Cristóbal de la Laguna: Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, 2005

[8] H. Markowitz, "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, vol 7, nº1, pp. 77-91, Marzo, 1952

[9] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, vol 7, nº1, pp. 77-91, Marzo, 1959