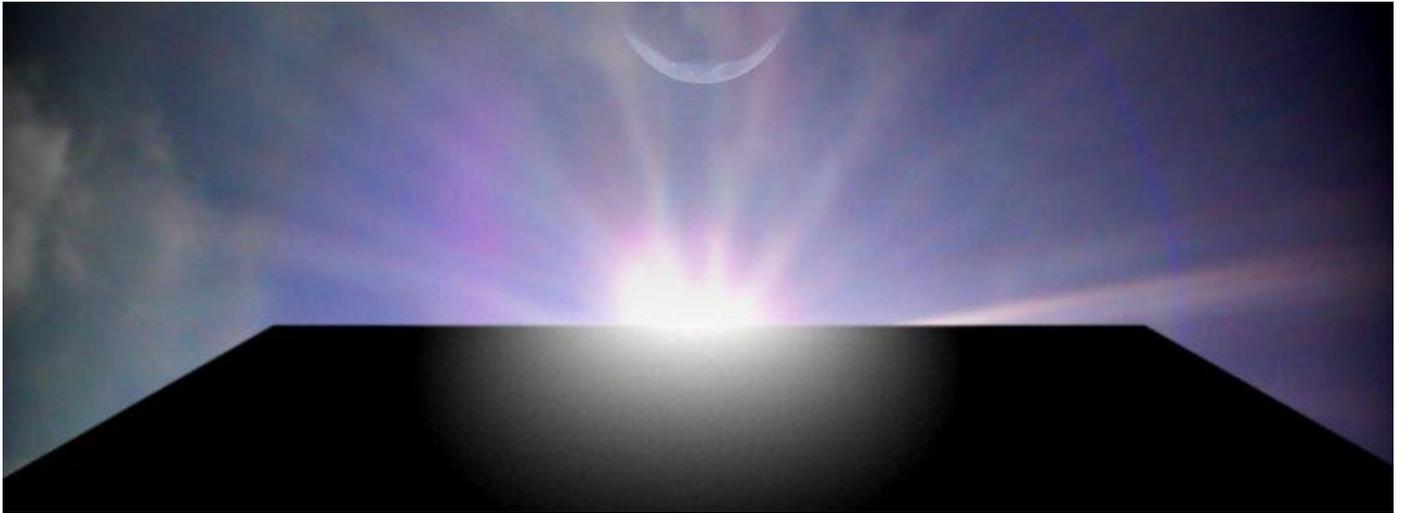


Trabajo de Fin de Máster

Simulación de technosignatures y otros patrones
inusuales en tránsitos extrasolares



Alberto Álvarez Saavedra

Máster en Astrofísica

Universidad de la Laguna

Tutor del trabajo: Enric Pallé



**Universidad
de La Laguna**

Índice

1	Abstract	3.
1.1.	Summary.....	3.
2	Objetivo.....	3.
3	Introducción	3.
3.1.	Estado del arte en investigación en exoplanetas	5.
3.2.	Métodos de detección de exoplanetas.....	5.
3.2.1	Imagen directa.....	5.
3.2.2	Velocidad radial	6.
3.2.3	Tránsito	7.
4	Profundización en el método del tránsito	8.
4.1	Etapas del tránsito.....	8.
4.2	Ecuaciones fundamentales.....	10.
4.3	Construcción de una curva de luz.....	12.
4.4	Área efectiva eclipsada	13.
4.4	Oscurecimiento del limbo.....	13.
5	Caso de Estudio: Tránsitos no planetarios.....	17.
5.1	Método para el cálculo del área efectiva.....	17.
5.2	Suposiciones del proyecto	19.
5.2.1	Funciones y parámetros de ‘Host Star’	20.
5.2.3	Función respuesta del telescopio	20.
5.2.2	Funciones y parámetros de ‘transiting object’	21.
5.2.5	Catálogo de objetos.....	21.
6	Resultados.....	23.
6.1.	Comprobación de funcionamiento.....	23.
6.2.	Comparación de tránsitos para distintas formas geométricas	25.
6.2.1	Curvas con y sin limb darkening	26.
6.2.2	Planeta con anillo y la opacidad.....	26.
6.3.	Simulación de ruido fotónico.....	27.
6.4	Ampliaciones y mejoras futuras.....	31.
7	Conclusiones.....	32.
8	Referencias y Bibliografía	33.

1. Abstract

En este trabajo se ofrece una visión actualizada del estado de la investigación en el campo de la detección de exoplanetas, así como de otros objetos tanto de origen natural como posible origen artificial. Se ahonda en la explicación del método del tránsito para la detección de estos objetos, así como se elabora, mediante el lenguaje de programación *Python*, una herramienta de simulación de curvas fotométricas correspondientes a tránsitos de una variedad de formas, desde la más tradicional, como son los discos planetarios, a triángulos, elipses u objetos compuestos, como planetas con anillos o anomalías en su entorno. En esta simulación se ha tenido en cuenta la variabilidad del mayor número de parámetros posible, tanto en las características de la estrella anfitriona, como de los propios objetos, pudiendo ser fácilmente manipulables para observar su efecto en los tránsitos. En último lugar, se ha procurado la comparación con datos reales, así como el contraste de diversas geometrías, tanto con ruido generado artificialmente como sin él, para estudiar la detectabilidad de sus patrones en las curvas de luz.

1.1. Summary (in English)

In this project an algorithm of simulation of transits of extrasolar objects with different geometries was developed. Previously, an exploration of the current state of research in simulation of exoplanets was carried out, being detailed some methods of calculation of eclipsed area and limb darkening coefficients. Finally, the results of the own simulations for specific cases are offered, contrasting different geometries and values of synthetic noise of photonic origin. In this section the detectability of the differences between forms is discussed.

2. Objetivo

Este trabajo ha dispuesto de varios objetivos:

- La descripción del estado actual de investigación en exoplanetas, así como del estado de la búsqueda de vida e inteligencia más allá de la Tierra.
- La elaboración de una herramienta de simulación de tránsitos para objetos de formas variables, especialmente debido a las escasas opciones y referencias a este aspecto ofrecidas en las principales fuentes y códigos utilizados, más centrados en la detección precisa de exoplanetas, no en otros objetos.
- El aprovechamiento de esta herramienta para la detección y clasificación de objetos y exoplanetas a partir de datos reales.

3. Introducción

La pregunta sobre si estamos solos o acompañados en el Universo, tanto por formas de vida simples como complejas, ha sido una de las más antiguas de la Humanidad, probablemente presente desde el surgimiento de la conciencia, la percepción de la individualidad como ente separado del entorno natural, y la conceptualización de todo aquello que nos rodeaba. Desde que comenzamos a entender la existencia de la vida como algo ajeno y diferente a los minerales, terrenos y atmósfera que nos rodeaba, nos hemos preguntado qué hace tan especial la vida en este preciso lugar y entorno, su antigüedad, e incluso, su significado. En paralelo a nuestra evolución biológica, y posteriormente, social

y tecnológica, ha crecido nuestro afán de entender el orden y significado tras los eventos naturales que tanta dicha o tragedia traían a las vidas de nuestros antepasados: entender el movimiento del Sol, su naturaleza, el origen de su luz; entender el significado del día y la noche, del cambio de posición del Sol en el cielo; entender la furia de una tormenta, o la aridez de un desierto; entender el origen de la luz de las estrellas, y su cambio de posición en el cielo a lo largo de esos periodos cíclicos llamados años. No fue hasta etapas relativamente recientes de la civilización cuando se produjo la sinergia de varias de estas cuestiones, cuando convergió el estudio de los astros, tanto los planetas como las estrellas del sistema solar, con el estudio de nuestro propio planeta, entendiéndolo como otro planeta más que no ocupaba el centro del Universo, sino que giraba en torno al Sol. Este hecho comenzó a vislumbrarse con la teoría heliocéntrica de Copérnico, pero tardó en asentarse hasta que Galileo Galilei observó Júpiter a través de su telescopio (1609), defendiendo y consolidando un modelo heliocentrista a pesar del escarnio que para él supuso en la sociedad de la época. Tras Galileo, Kepler fue el siguiente en facilitar una revolución en la comprensión del movimiento de los planetas con sus tres leyes. En los siglos venideros fueron descubiertas y desarrolladas las leyes fundamentales que rigen – de forma sorprendentemente precisa – el movimiento de los astros. En el siglo XIX, Maxwell desarrolló ampliamente la teoría que rige el comportamiento de las ondas electromagnéticas, y en el siglo XX, se desarrolló la teoría cuántica, así como la relatividad general, llevando el estudio del Universo a una nueva dimensión en el conocimiento humano. Estas teorías establecieron predicciones e impulsaron el desarrollo de instrumentos para su confirmación, habiéndose producido ya en numerosas ocasiones hasta ámbitos sorprendentes, como en el más reciente, de las ondas gravitacionales, predichas por la relatividad general.

De forma simultánea al incremento de nuestra capacidad tecnológica y a la comprensión de nuestro Universo, revivió el interés en profundizar en cuestiones de naturaleza prácticamente existenciales como es si en algún lugar del Universo se produjo otra génesis de la vida, fuese a un nivel microbiano, o a un nivel de vida compleja, como en la Tierra. Fue entonces cuando tuvo lugar el nacimiento de la Astrobiología, una amalgama de ciencias, desde la biología hasta la astrofísica o la geología, que buscan entender al máximo las condiciones idóneas para la proliferación de la vida, así como si esas condiciones ya se dan en algunas partes del Universo, y con qué frecuencia. En este sentido, es notorio el esfuerzo realizado por la organización SETI (*Search of Extraterrestrial Intelligence*), un programa fundado por la NASA para la búsqueda de vida inteligente, hasta ahora especialmente centrando este esfuerzo en la búsqueda (y emisión) de señales de radio, propias de civilizaciones al menos con nuestro nivel de desarrollo, pero también realizando labores más invisibles para el gran público, como el estudio de asteroides, formación de sistemas planetarios, fenómenos muy energéticos etc.

No fue hasta la década de 1990 cuando comenzó oficialmente la observación de planetas fuera de nuestro sistema solar, con la detección de los primeros planetas en torno a un púlsar (1992) y la confirmación del primer planeta en torno a una estrella de la secuencia principal (1995). Hasta entonces era motivo de especulación y hasta cierto punto se daba por sentado, pero aún restaba mucho que decir al respecto de la estadística y abundancia de estos, así como de sus características más habituales. En estas últimas 3 décadas se han producido un avance, con el descubrimiento y clasificación de decenas de miles de planetas, impulsado por el lanzamiento de la misión Kepler, y otras más recientes como CHEOPS, o TESS, así como complementado por medidas desde telescopios terrestres y sus instrumentos, como HARPS. Sin embargo, aún nos encontramos limitados tecnológicamente para su observación en condiciones óptimas en estrellas de un cierto tamaño, como nuestro Sol, estando sesgadas nuestras observaciones, especialmente en

zonas de habitabilidad y para planetas pequeños, a estrellas más pequeñas y rojas. La superación de estas limitaciones ha propiciado la planificación prioritaria de misiones para los años próximos, como el telescopio James Webb (con una gran variedad de objetivos astrofísicos), o la misión Plato (centrada en la observación de planetas de tipo Tierra en torno a estrellas del tamaño del Sol, así como en la caracterización de la asterosismología de las estrellas). Otro de los objetivos principales del campo de investigación de los exoplanetas, aparte de su detección y caracterización morfológica y material, es la composición de su atmósfera, que está comenzando a ser posible gracias a instrumentos de última generación (como HARPS, ESPRESSO, CRILES [+]....) que permiten el análisis espectroscópico de la luz que atraviesa a estas de canto durante los tránsitos, así como a través del análisis de las variaciones en la luz reflejada en cada fase de su órbita.

Si bien, como se ha dicho, los principales esfuerzos hasta el momento en el ámbito de la búsqueda de vida inteligente han transcurrido en el campo de la detección de señales de radio (destacando la señal "WoW!"), recientemente se han comenzado a explorar otras posibilidades, como las comunicaciones mediante láser, o las potencialidades que ofrecen sistemas como los de detección indirecta de exoplanetas: método del tránsito y método de la velocidad radial. Es en este ámbito donde se ubica este trabajo, que procura aportar una herramienta para la simulación de tránsitos de objetos que no se restrinjan solo a los habituales exoplanetas (discos), sino a una cierta variedad de objetos de origen tanto natural como posiblemente artificial. Se tratará de objetos de formas geométricas simples, pero que sirvan de base para un refinamiento posterior, o para denotar la presencia de tránsitos no correspondientes a planetas.

3.1 Estado de la Investigación: Detección de Exoplanetas

Como se avanza en la introducción, actualmente el campo de la detección de exoplanetas se encuentra en un estado de gran florecimiento. Hasta el momento han sido confirmados 4058 planetas distribuidos en 3033 sistemas, con 658 sistemas disponiendo de más de un solo planeta (fuente: *Nasa Exoplanet Archive*). Asimismo, existe una notable variedad de métodos de detección de exoplanetas: imagen directa, microlentes, tránsito, 'timing', y velocidad radial. A continuación se detallarán las características principales de los métodos más relevantes.

3.2 Métodos de detección de exoplanetas

3.2.1 Imagen directa

Este método obtuvo sus primeros resultados en 2004, con la observación de un exoplaneta en órbita en torno a una enana marrón, aunque generó debate en torno a si la naturaleza del objeto orbitante se trataba de un exoplaneta. Posteriormente, en 2008, ofreció los primeros resultados inequívocos en la detección de un planeta con un sistema de anillos varias veces más brillante que Saturno en torno a la estrella Fomalhaut b.

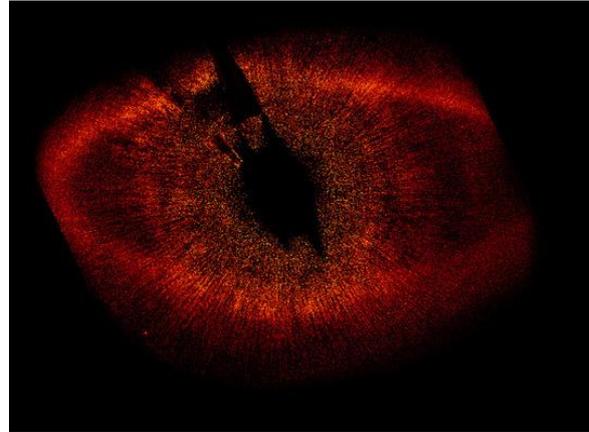
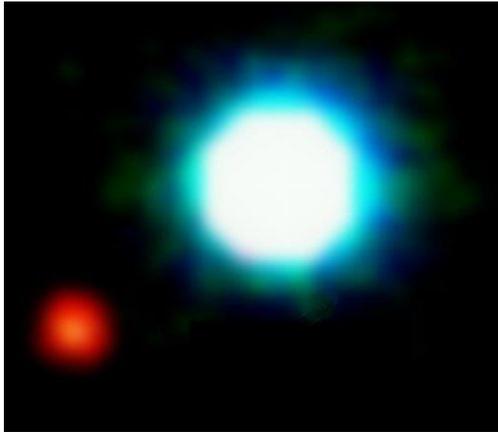


Ilustración 1: Primera imagen directa de un exoplaneta orbitando en torno a la enana marrón 2M1207. Fuente: VLT, ESO.

Ilustración 2: Imagen mediante coronógrafo del planeta que orbita Formalhaut b. Fuente: Planetary Society, ESA, NASA.

La imagen directa no es un método reproducible en la mayoría de los casos, al menos con las capacidades de detección actuales. Sin embargo, en los casos en que es posible, proporciona información valiosa, que permite acotar parámetros del planeta en combinación con los demás métodos de detección. Por ejemplo, el estudio de la imagen directa en varias bandas y rangos de frecuencias permite saber si el objeto es visible en todas ellas o solo en algunas, lo que da cuenta de su masa, o de su composición. Del mismo modo, el origen de su brillo puede estar relacionado con otros detalles inapreciables mediante otros métodos, como la presencia de sistemas de anillos que reflejan la luz (caso de Fomalhaut b, 2008).

El método es especialmente eficiente para planetas a gran distancia de su estrella, por su mayor contraste, y de tal modo que estén situados de canto con respecto a la Tierra (en la línea de visión). Esto permite que sea complementario con el método de velocidad radial y con el tránsito.

Sin embargo, las condiciones que debe satisfacer este método son muy limitantes, en tanto que es eficiente para planetas brillantes, de gran tamaño (varias masas jovianas), alejados de su estrella, y estando esta en el vecindario solar. Esto provoca que sea un método excepcional y no recomendable para la realización de grandes búsquedas sistemáticas.

3.2.2 Método de la velocidad radial

Se trata del método que ha contribuido a la gran mayoría de descubrimientos y caracterizaciones de exoplanetas hasta el momento.

El método se basa en que la estrella no permanece estable durante el movimiento orbital de un planeta o conjunto de planetas u objetos alrededor, sino que describe movimientos circulares o elípticos en torno a su centro de masas, debido al impulso gravitacional de estos objetos. Cuando es observada desde cierta distancia, este movimiento es detectado a lo largo de la línea de visión del observador en forma de desplazamientos Doppler en el espectro de la estrella. Un desplazamiento en dirección al observador provocará un corrimiento al azul, mientras que será al rojo en dirección opuesta.

Mediante espectrógrafos de alta sensibilidad, este espectro puede ser estudiado, y sus variaciones periódicas detectadas. A partir de este método es posible detectar la masa del

cuerpo que provoca este desplazamiento, en función de la cuantía de este respecto al valor central de las líneas espectrales. La sensibilidad de los espectrógrafos más modernos alcanza a detectar movimientos de la estrella de apenas 1 m/s, como en el caso de HARPS (*High Accuracy Radial Velocity Planet Searcher*), o CRRES + (en torno a 1 m/s).

3.2.3 Método del tránsito

Método consistente en la observación de la disminución de la luz de la estrella de forma periódica, correspondiendo estas disminuciones al tránsito de objetos entre el observador y la estrella. Se trata actualmente del método más efectivo y sensible para la detección de exoplanetas, especialmente desde observatorios espaciales y a la hora de realizar búsquedas en regiones relativamente grandes del cielo.

El método del tránsito proporciona información inasequible y complementaria a otros métodos. Principalmente, suponiendo que la estrella anfitriona está caracterizada con un grado de precisión razonablemente alto, puede deducirse el tamaño del planeta a partir del 'dip' o pozo generado en la curva de luz cuando el disco planetario se encuentra en eclipse total con respecto al disco estelar, desde el punto de vista del observador. Las ecuaciones serán detalladas más adelante. Por otro lado, es posible realizar una estimación de la cota inferior de la masa del planeta, siendo este resultado combinado con las medidas de velocidad radial para obtener una estimación de la masa total del planeta. Esto es debido a que la posición relativa del planeta con respecto a la estrella y el observador es 'edge-on' para ser observable por este método. Bajo estas condiciones, el valor de la masa deducido de las medidas de velocidad radial será la verdadera masa del planeta. Mediante la combinación de valores de masa y tamaño del planeta, se obtiene la densidad, que proporciona una primera información sobre la composición del planeta, al permitir distinguir si es rocoso o gaseoso.

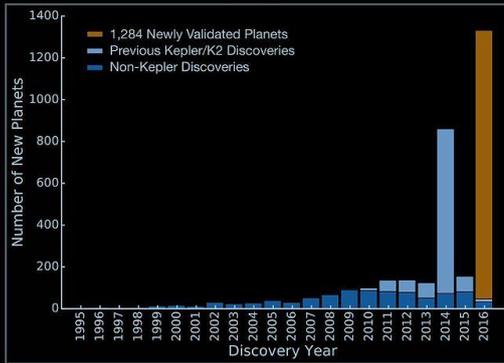
Por otro lado, el tránsito de un planeta permite observar distintos grados de absorción de la luz estelar a su paso por la fina capa atmosférica. Su absorción dependerá de la composición de dicha atmósfera, y por tanto variará según la longitud de onda. Mediante el estudio del tránsito en varias bandas fotométricas, a través de distintos valores de la profundidad del pozo del eclipse, es posible recrear el espectro de absorción y deducir la composición atmosférica.

Además de los conocidos como tránsitos 'primarios' o principales, que tienen lugar cuando el planeta produce un eclipse al cruzar entre la estrella y el observador, también son de gran interés los tránsitos 'secundarios', correspondientes al paso del planeta por la parte oculta de la estrella para el observador. Los valores de flujo obtenidos para la estrella cuando el planeta está completamente oculto son los correspondientes exclusivamente a la estrella, dando cuenta de su fotometría y su espectro. Los cambios en estos debidos al tránsito primario permiten deducir el espectro del propio planeta, obtenido a partir de la transmisión de la luz a través de su atmósfera. De esta información se deduce tanto la composición como la temperatura de la atmósfera.

Asimismo, el método de tránsito permite estudiar simultáneamente un gran número de curvas de luz, a escala masiva. Entre las principales búsquedas destacan, desde tierra, TrES, OGLE, HAT y WASP, y desde el espacio, TESS y la exitosa misión Kepler, así como su extensión K2.

Exoplanet Discoveries Through the Years

As of May 10, 2016



Total confirmed exoplanets = 3,567
Total Kepler = 2,525

Exoplanet Discoveries

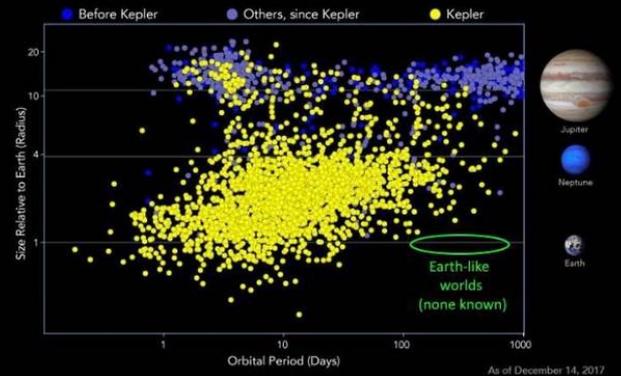


Ilustración 3: Ilustraciones que muestran, a mayo de 2016, los descubrimientos de exoplanetas por cada año, resaltando claramente el valor de las misiones más recientes. En la imagen de la derecha se muestran las características de los planetas descubiertos. Fuente: Kepler and K2, NASA.

En este proyecto ha sido escogido el método del tránsito como vía de estudio y simulación de curvas de luz correspondientes tanto a exoplanetas como a objetos de diversas formas. Es por ello que en el siguiente apartado se profundizará en los detalles de los cálculos que caracterizan al método. Posteriormente, se detallará el algoritmo desarrollado para simular las curvas.

4 Profundización en el método del tránsito

4.1. Etapas de un tránsito

El método del tránsito consiste en el estudio del eclipse que produce el objeto en la luz de la estrella para el observador. Por lo tanto, se distinguen varias etapas:

1. Momento previo al desplazamiento del objeto al interior del disco estelar. En este punto, el objeto o exoplaneta puede reflejar parte de la luz de la estrella, siendo una pequeña fuente emisora de luz que afectará ligeramente con un pequeño incremento respecto a la luz propia del disco estelar.
2. Transición del objeto hacia el interior del disco estelar. Esta fase está caracterizada por la progresiva disminución del flujo recibido desde la estrella, a medida que el objeto se interpone entre la estrella y el observador, es decir, a medida que el objeto o exoplaneta comienza a adentrarse en el intervalo de ángulo sólido que ocupa la estrella emisora. Esta etapa culminará cuando el objeto o exoplaneta se encuentre totalmente contenido en el interior de la estrella.

Es importante resaltar que en este punto cobra especial relevancia la consideración o no del **limb darkening**, u **oscurecimiento del limbo**. Es habitual no considerarlo en simulaciones sencillas, en que se pretenda destacar ciertos aspectos del tránsito, como la geometría del objeto, pero es necesario considerarlo si se pretende contrastar las simulaciones con datos reales.

El oscurecimiento del limbo se trata de un fenómeno óptico característico de un cuerpo emisor de luz relativamente homogéneo y tridimensional como es una

estrella. Se trata de una disminución del flujo a medida que nos alejamos radialmente desde el centro del disco estelar. Será detallado posteriormente.

3. Etapa de transición del objeto, completamente inmerso, a través del disco estelar. Durante esta etapa se produce la mayor disminución de brillo de todo el eclipse primario. El factor que principalmente afecta en esta etapa a la modulación de la curva de luz es el oscurecimiento del limbo.
4. Etapa de abandono del disco estelar. La variación de la curva de luz es similar a la de ingreso en el disco estelar.
5. Etapa posterior al abandono del disco estelar. De forma similar a la primera etapa, el objeto o exoplaneta puede reflejar parte de la luz de la estrella, dejando un pequeño aumento en el flujo recibido. Este tipo de aumentos es muy liviano, requiriendo de una gran sensibilidad y relación señal-ruido para ser detectados.
6. Etapa de desplazamiento hacia la parte posterior (oculta) de la estrella. En esta fase, el planeta u objeto reflejará una mayor cantidad de luz a medida que exponga su cara iluminada en la dirección del observador. El objeto se desplazará por una órbita elíptica hacia la cara oculta de la estrella.
7. Ingreso en el eclipse secundario. El objeto se oculta detrás de la estrella progresivamente, provocando una disminución gradual en el brillo debido a la disminución de la contribución de su luz reflejada.
8. Eclipse secundario. El objeto se encuentra totalmente oculto tras la estrella. Todo el flujo recibido corresponderá a esta, siendo el mejor momento para caracterizarla fotométrica y espectralmente.
9. Abandono del eclipse secundario. El objeto abandona progresivamente la cara oculta de la estrella. En esta etapa, comenzará con un máximo de luz reflejada por el objeto, disminuyendo progresivamente a medida que su cara reflejada se oculta al avanzar en la fase de su órbita. Esta etapa finaliza con el comienzo de la primera etapa descrita, repitiéndose el ciclo.

Las distintas etapas pueden ser visualizadas en la siguiente ilustración:

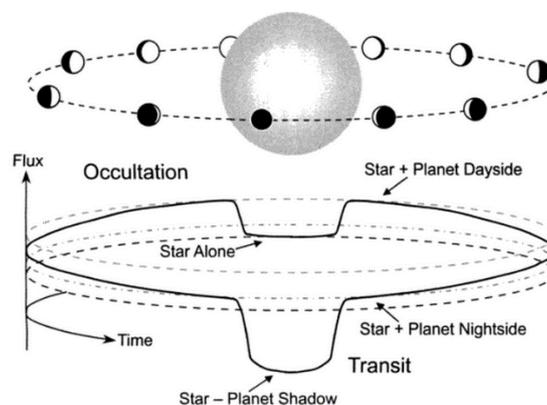


Ilustración 4: Ilustración que muestra la correspondencia entre el movimiento orbital del planeta, transcurriendo entre los tránsitos primario (frontal) y secundario (posterior), y la curva de luz generada. Fuente: 'A new discovery of a secondary eclipse, K.F.Huber, S.Czesla, J.H.M.M.Schmitt', Astrobites. Image Credit: Josh Winn.

Sin embargo, el impacto del reflejo de la luz por parte del objeto o planeta es muy pequeño en comparación con la estrella, así como la energía térmica emitida por el objeto orbitante, y corresponden a estudios más específicos que el atañe a este trabajo. Concretamente, es habitual estudiar los eclipses secundarios y otras fases de la órbita del planeta no correspondientes al eclipse primario como parte de estudios de la espectroscopía del planeta, pudiendo ser analizada la composición de la atmósfera, la presencia de nubes, o incluso el gradiente de presión. Algunos de los trabajos más recientes proponen el estudio de la existencia de océanos y continentes a través de la luz reflejada por los planetas, mediante el método de imagen directa, de análisis espectroscópico, y de las variaciones en la luz reflejada por este no atribuibles al ruido, que es muy notable respecto a la señal y conlleva que este tipo de estudios sólo estén al alcance de instrumentos de última generación. Actualmente numerosos artículos abordan simulaciones y planifican observaciones para un tiempo en que estén disponibles telescopios terrestres de un tamaño mucho mayor que los actuales (*'Surface Imaging of Proxima B and other exoplanets: Topography, Biosignatures and Artificial mega-structures'*, S. V. Berdyugina, J. R. Kruhn, 2017).

4.2. Ecuaciones del método del tránsito

En el método del tránsito cabe definir varias ecuaciones y parámetros esenciales.

- Semieje mayor de la órbita, 'a'.
- Profundidad del pozo:

$$\Delta F \sim \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2 \quad (1)$$

Donde R_p es el radio del exoplaneta, y R_* es el radio de la estrella. Convencionalmente esta fórmula viene expresada dando por sentado que el objeto que transita es un exoplaneta, y por tanto un disco circular, pero en este trabajo se tendrán en cuenta formas diversas, con lo que la profundidad del tránsito vendrá dado de la siguiente manera:

$$\Delta F = \left(\frac{\text{Area de objeto transitante}}{\text{Area de la estrella}}\right)^2 \quad (2)$$

- Parámetro de impacto, 'b'.

$$b = \frac{a}{R_*} \cos(i) \quad (3)$$

En este sentido, el ángulo 'i' nos da cuenta de la altura con respecto al ecuador al que se produce el tránsito. Cuanto más se aleje del ecuador, más corta será la duración del tránsito. Un tránsito por el ecuador corresponde a $i=90^\circ$.

- Duración del tránsito, 't_s'.

$$t_T = \frac{P}{\pi} \arcsin \left(\frac{R_*}{a \cdot \sin(i)} \left\{ \left[1 + \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{a}{R_*} \right) \cos(i) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4)$$

Por otro lado, también se tiene en cuenta el tiempo de tránsito exclusivamente por el interior del disco estelar, 't_v', es decir, descontando el tiempo que el objeto orbitante emplea en salir y entrar en el eclipse. Estos conceptos pueden comprenderse mejor a través de la siguiente imagen:

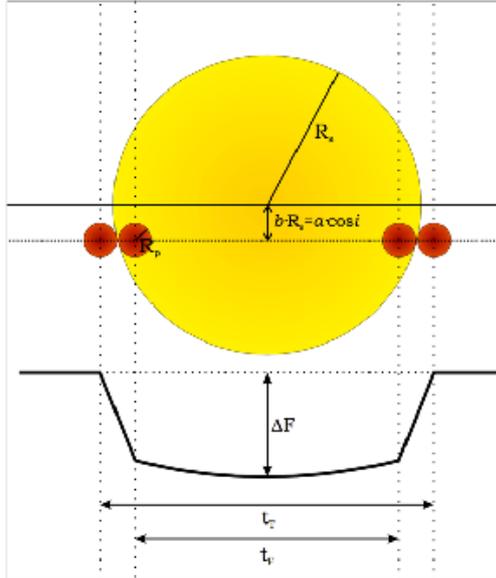


Ilustración 5: Ilustración que muestra el tránsito de un planeta en relación a conceptos del tránsito como el parámetro de impacto, los radios de la estrella y planeta, la profundidad del tránsito, y las duraciones del tránsito, o eclipse primario. Fuente: Asignatura de Exoplanetas y Exobiología, Máster de Astrofísica, Universidad de la Laguna, 2018.

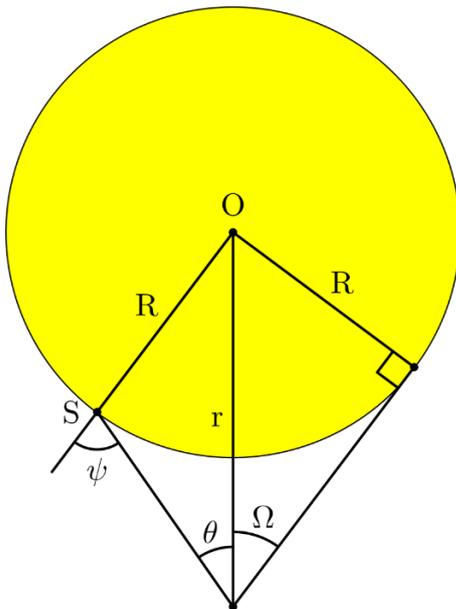


Ilustración 6: Representación de varios ángulos medidos con respecto al centro de la estrella, la normal en cada punto, y el observador. Fuente: Wikipedia.

En este trabajo se han tenido en cuenta asimismo conceptos de astrofísica del campo de las atmósferas estelares, especialmente a la hora de programar el tránsito durante el eclipse primario y computar el efecto del *limb darkening*, como se explicará en un apartado posterior. En este sentido, resulta vital el **ángulo ψ**, definido a partir de la siguiente figura.

En la imagen de la izquierda, el punto P corresponde al observador. El ángulo ψ está definido como el ángulo subtendido entre la línea de emisión y la dirección de la intensidad emergente en ese punto de la estrella.

Haciendo uso de este esquema y definiciones para el estudio de exoplanetas, supongamos que nos encontramos a una distancia suficiente a la estrella como para que las líneas que parten desde P a cualquiera de sus puntos de la

cara visible sean prácticamente paralelas, lo cual podría aplicarse a la inversa: todos los rayos de luz emitidos por la superficie de la estrella de la cara visible llegan paralelos al observador y su telescopio. En ese caso, el ángulo ψ será el subtendido entre un rayo incidente en la estrella que puede entenderse como la dirección de la línea de visión, y una normal a su superficie en cada punto, en dirección radial desde el centro de la estrella.

Definiremos $\mu = \cos(\psi)$ para a continuación definir las fórmulas de oscurecimiento del limbo.

4.3. Construcción de una curva de luz

La luminosidad total correspondiente al sistema observado desde la Tierra cuenta con varias componentes, pues recibimos luz procedente tanto de la estrella, el planeta que refleja parte de su luz, así como la 'tercera luz', correspondiente a luz residual, del fondo de la imagen captada.

$$l(t) = L_s(t) + L_p(t) - \alpha(t) \cdot L_s(t) \quad (5)$$

Que también puede expresarse a partir de la fase orbital θ , definida a partir del punto de conjunción principal t_0 como:

$$\theta = 2\pi/(t - t_0) \quad (6)$$

Siendo P el periodo orbital. Teniendo en cuenta esto, da lugar a la expresión:

$$l(\theta) = L_s(\theta) + L_p(\theta) - \alpha(\theta) \cdot L_s(\theta) \quad (7)$$

Es en el punto de la órbita opuesto a la conjunción, cuando $\theta=\pi$, cuando el planeta u objeto está completamente oculto y la intensidad medida es la de la estrella. Realmente, dado que la intensidad de la luz reflejada por el planeta es baja, si el instrumento es capaz de detectar el decremento de esa fase del tránsito (eclipse secundario), ese valor de la intensidad será el adecuado con respecto al que normalizar el resto de valores de la curva de luz. Como decimos, en la mayoría de casos el brillo del planeta con respecto a la estrella será despreciable, pudiendo reducirse la expresión de la intensidad luminosa normalizada a:

$$l(t) = 1 - \alpha(t) \quad (8)$$

O en función de la fase,

$$l(\theta) = 1 - \alpha(\theta) \quad (9)$$

Siendo el objetivo de un tratamiento de los datos fotométricos de un tránsito planetario el de obtener un conjunto de valores $l(t)$ y/o $l(\theta)$, que permitan una caracterización del planeta u objeto que transita.

4.4. Área efectiva eclipsada

Definiremos el área efectiva eclipsada en cada momento como:

$$\alpha = \int I \cdot \cos(\psi) \cdot d\sigma \quad (10)$$

Siendo I la distribución de brillo de la estrella; ψ el ángulo de *foreshortening* subtendido entre la línea de visión y la normal a la superficie de la estrella; y $d\sigma$ el diferencial de superficie de la estrella en cada punto de la integral. La forma en que sea calculada esta área definirá el método con el que se programa el tránsito, esencialmente.

4.5. Oscurecimiento del limbo

Como se comentó anteriormente, el oscurecimiento del limbo es un fenómeno óptico a tener en cuenta a medida que nos desplazamos radialmente desde el centro del disco estelar observado. Será esencial incluirlo la hora de calcular la intensidad lumínica recibida y a la hora de computar el tránsito del planeta y el bloqueo de luz en cada parte del disco estelar.

Existen varios modelos utilizados ampliamente para reproducir el oscurecimiento del limbo. Los más habituales y simples son el oscurecimiento del limbo lineal, y el cuadrático, aunque algunos autores proponen leyes no lineales más complejas con el objetivo de generalizar al mayor número de casos posibles, y con un mayor número de parámetros, que si bien consiguen mayor precisión en sus ajustes, pueden requerir mayor tiempo de cálculo por su mayor espacio de parámetros.

- Oscurecimiento del limbo lineal:

$$I(\mu) = I(1)[1 - u \cdot (1 - \mu)] \quad (11)$$

La función fuente es lineal con la profundidad óptica. Implícita en la fórmula está la dependencia con la longitud de onda, λ , del parámetro u (aunque $u=0.6$ para todas las longitudes de onda en una atmósfera gris, tal como se especifica en el artículo de Milne de 1921).

- Oscurecimiento del limbo cuadrático:

$$I(\mu) = I(1)[1 - u_a \cdot (1 - \mu) - u_b \cdot (1 - \mu)^2] \quad (12)$$

Esta ley hay sido ampliamente adoptada para los cálculos de caracterización de modelos de atmósferas. Tiene especial importancia en la modelización de fotometría de tránsitos exo-planetarios mediante el uso de Cadenas de Monte-Carlo Markov (MCMC), pues permite un buen cálculo analítico de curvas de luz con una buena eficiencia, tal como se explica en el artículo Mandel & Agol (2002).

Algunos de los artículos de referencia a este respecto son el '*Equations for the analysis of the light curves of extra-solar planetary transits*', de A. Giménez (2005), '*Stellar Limb-Darkening Coefficients for CoRot and Kepler*', de K. Sing (2009) basados en el artículo '*A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models*', de Claret (2000), y

en el artículo de Díaz-Cordovés & Giménez de 1992. Normalmente, el origen de los algoritmos y métodos de simulación de curvas utilizados están basados en artículos previos sobre binarias eclipsantes.

Las tabulaciones más ampliamente utilizadas de coeficientes de oscurecimiento del limbo para las distintas leyes son las de los artículos Díaz-Cordovés (1995), y las de Claret de 1995 y 2000.

Por un lado, en el artículo de Díaz-Cordovés & Giménez (1992) se plantea el uso de una ley de oscurecimiento del limbo con un componente de raíz cuadrada para mejorar los ajustes de los datos en algunos casos, con respecto a los mayormente utilizados, modelo lineal y modelo cuadrático. Esta ley propuesta fue extendida por Claret (2000) mediante la adopción de una expresión general que depende de un número arbitrario N en el sumatorio, que permite un grado de precisión arbitrario sin sacrificar su generalidad.

$$I(\mu) = I(1) \left[1 - \sum_1^N u_n (1 - \mu^n) \right] \quad (13)$$

En el artículo de Claret (2000) se establece una nueva ley de oscurecimiento del limbo no lineal a partir del método de mínimos cuadrados (LSM) aplicado al ajuste de datos de modelos de atmósferas frente a datos reales de ajuste, capaz de describir la distribución de intensidad de forma más precisa que las anteriores leyes y es versátil a lo largo de todo el diagrama Herzprung-Russell. Claret, en su artículo, publicó valores teóricos de los coeficientes de limb darkening para varias leyes (lineal, cuadrática, no-lineal) para 12 bandas fotométricas en el óptico e infrarrojo cercano (uyby, UBV y RIJHK), para un amplio rango de temperaturas, gravedades superficiales, abundancias metálicas, y velocidades de micro-turbulencias, haciendo uso de modelos de atmósfera disponibles (ATLAS y PHOENIX).

Esta ley es utilizada también en un artículo anterior, de Kopal (1979), dando lugar a un desarrollo en serie para el área efectiva oculta por el eclipse, α (que se tratará después):

$$\sum_{n=0}^N C_n \alpha_n \quad (13)$$

Donde estos coeficientes C_n dependen a su vez de los coeficientes u_n .

El cálculo de α se realiza por varios métodos. Por un lado, mediante integrales elípticas, tal como se plantea en Deeg et al. (2001) para una ley lineal de *limb darkening*, órbitas circulares, y una profundidad o ratio de radios pequeña. En este caso, se realiza una integración por anillos, siendo constante el brillo en cada anillo, y por tanto condicionando la precisión de la integración y siendo más apto para ajustar a observaciones tomadas desde telescopios en tierra relativamente pequeños. Para los telescopios espaciales y de mayor tamaño, el artículo de referencia es el de Mandel & Agol (2002), que extiende las ecuaciones para incluir leyes de limb darkening de segundo orden y resuelve el valor de α mediante integrales elípticas, bajo diferentes suposiciones sobre el limb-darkening y casos de tránsito, con distintos límites de integración.

Por otro lado, también se plantea otro tipo de solución para la ecuación de α basada en la integración numérica. Esto se lleva a cabo en el análisis de binarias eclipsantes a partir de modelos sintéticos, a partir de un ajuste de datos reales y modelos teóricos de atmósfera

y la realización de mapeados paramétricos simultáneos para encontrar las mejores combinaciones que reducen la función χ^2 del ajuste. En este sentido, el código y artículo de referencia sobre el que se basaron artículos posteriores es el de Ezel (1993), siendo ampliado a limb darkening no lineales por Giménez & Díaz-Cordovés (1993). De nuevo, la limitación de este método es que la precisión está condicionada al tamaño de los anillos de integración y por el método de correcciones diferenciales utilizado para la optimización de elementos. Por un lado, la limitación impuesta por el tamaño de los anillos obliga a utilizar las grids más finas, pero permite alcanzar grandes precisiones que permite trabajar con observaciones tanto de telescopios en tierra como desde el espacio. El problema principal surge con la adaptación del método de correcciones diferenciales para la optimización en datos procedentes de la mayoría de telescopios en tierra puesto que la convergencia no se consigue para precisiones inferiores a 1/10 de la profundidad del tránsito.

Para terminar con la contextualización de los métodos habitualmente aplicados al cálculo del área efectiva eclipsada, α , en el artículo de A. Giménez (2005), con el objetivo de encontrar una ley de limb darkening general, para todo tipo de tránsitos y excentricidades, se plantea el uso del método de correlación cruzada de dos aperturas: una representando la estrella sobre la que ocurre el eclipse; la otra el disco eclipsante (planeta). Este método relaciona la fracción de luz eclipsada con el patrón de difracción de dos aperturas descrito por la óptica física, lo que permite el uso de las herramientas matemáticas asociadas, y permitiendo expresar el área α como una transformada de Hankel (a partir de funciones de Bessel).

En todo momento, en estos métodos se está realizando una suposición necesaria: **el objeto eclipsante tiene forma de disco**. Sin esta asunción, no sería posible el uso de ciertas funciones matemáticas, o por ejemplo, trabajar con una geometría sencilla para el caso de correlación cruzada como el de dos aperturas circulares, de A. Giménez (2005).

En lo que se refiere al oscurecimiento del limbo, para este proyecto, sin embargo, han sido utilizados los coeficientes de oscurecimiento del limbo deducidos en el trabajo de K. Sing, publicado en 2010. Sus archivos de tablas de valores están disponibles en internet para su descarga. En concreto, sus valores de coeficientes de *limb darkening* han sido especialmente calculados para su uso en datos de las misiones CoRoT y Kepler, siendo este último tomado como referencia para la simulación de curvas de luz.

En las curvas de tránsito de gran señal a ruido, el oscurecimiento del limbo puede ser ajustado y comparado a modelos teóricos de atmósferas estelares, proporcionando un método para testear modelos (Soutworth, 2008). En comparación al Sol, Sing et al. (2008) encontró que los modelos ampliamente utilizados 1D ATLAS presentaban las principales diferencias en el limbo, con un gran incremento en intensidad con respecto a los datos reales de oscurecimiento del limbo (Neckel & Labs 1994), con una sobrepredicción por parte de ATLAS de un 20% en el limbo, para valores de $\mu < 0.05$. Los modelos de atmósferas, utilizados en otros métodos para el cálculo de coeficientes de limb darkening, también han probado no ser totalmente satisfactorios para ajustar observaciones de estrellas binarias eclipsantes (Claret 2008), y los datos de tránsito HD209458 (Claret 2009). En el artículo, K. Sing prueba otros métodos de cálculo de los coeficientes, mediante ajuste de valores de estos a partir de datos de tránsitos de HST/NICMOS. En este artículo de referencia para los coeficientes de limb darkening, K. Sing determina unas listas de valores apropiadas para los datos procedentes de las misiones CoRot y Kepler, debido a los tránsitos de alta S/N para varios tipos espectrales, pues estas misiones operan en el óptico, en que los efectos del limb-darkening son intensos, operando en filtros de banda ancha con longitudes de onda entre 4000 y 9000 angstroms. Tal como se especifica en la sección 2 del artículo de K. Sing (2009), se plantean cálculos de coeficientes de oscurecimiento del limbo para 4 leyes: lineal, cuadrática, no-lineal de 4 parámetros (Claret, 2000), y no-lineal

de 3 parámetros, introducida por K. Sing para mejorar el ajuste entre modelos de ATLAS y datos para el caso del Sol cerca del limbo.

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - c_2(1 - \mu) - c_3 \left(1 - \mu^{\frac{3}{2}}\right) - c_4(1 - \mu^2) \quad (15)$$

En esencia, calcula de nuevo los valores de coeficientes, resultando muy similares a los de Claret (2000) para la ley no-lineal de 4 coeficientes, y difiriendo para la ley lineal, cuadrática y de 3 parámetros al tratar mediante su método de cálculo de mejorar el ajuste cerca del limbo. El método consistió en un ajuste por mínimos cuadrados de los coeficientes a partir de modelos de ATLAS. Las intensidades específicas de cada modelo fueron integradas inicialmente para cada ángulo usando las funciones de respuesta de CoRoT PF White-light y Kepler.

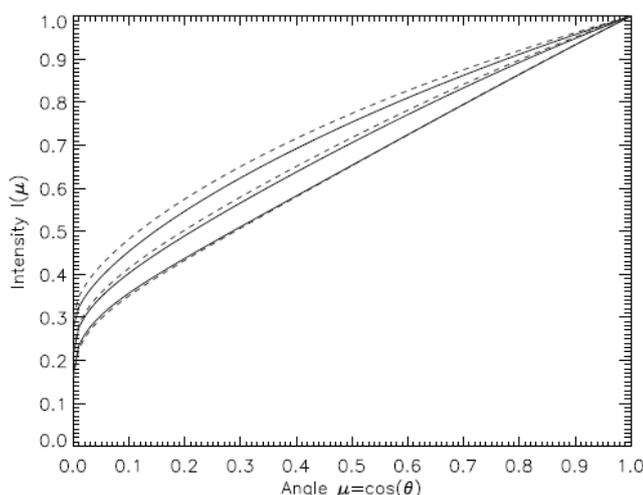


Ilustración 7: Figura del artículo de K. Sing (2009). La línea discontinua corresponde a los valores de intensidad normalizada con limb darkening para Kepler, y la línea continua para CoRoT. Valores calculados a partir de modelos de Atlas para estrellas con metalicidad solar, F5V, G5V y K5V, con temperaturas de 6500, 5500 y 4500 K, de arriba abajo, log(g)=4.5 y [M/H]=0.0. Fuente: K. Sing (2010).

En definitiva, por tratarse de cálculos actualizados, por su fácil disponibilidad, así como pensados para los datos provenientes de dos misiones icónicas como Kepler y CoRoT, fueron tomados como referencia los valores de coeficientes de K. Sing (2010).

5. Caso de Estudio: Tránsitos planetarios & no planetarios

Cabe recordar que el objetivo de este trabajo es el de explorar una vía alternativa de estudiar tanto la existencia de estructuras artificiales creadas por civilizaciones extraterrestres, como podría ser una vela solar de gran tamaño, un dispositivo recolector de energía, una estación espacial situada en la zona de habitabilidad del sistema, etc. así como estudiar nuevos métodos para caracterizar formas atípicas que estén asociadas a fenómenos naturales, como la existencia de un planeta con anillos, como Saturno, o un planeta con una cola de gas a similitud de un cometa, tal como fue descubierto en un artículo reciente, 'Helium in the eroding atmosphere of an exoplanet', de diciembre de 2018,

por J.J. Spake et al., en que se detalla la detección de una cola de helio en el exoplaneta WASP-69b por primera vez.

A la hora de tratar los métodos comentados en los principales artículos de referencia expuestos en este trabajo, el principal condicionante presente es la imposición de que el eclipse primario es causado por un objeto que presenta forma de disco circular, también descrito como una esfera tridimensional en algunos artículos. No resulta sencillo introducir cambios en esta condición, y es por ello que se ha buscado un método alternativo para la reproducción de curvas de luz donde dispongamos de flexibilidad a la hora de definir la forma del objeto que transita, puesto que se trata de abordar la búsqueda de tránsitos atípicos, debidos a geometrías no circulares.

5.1 Método de iteración para calcular el área efectiva eclipsada

El artículo que más información aportó a la hora de desarrollar un método flexible con la forma del tránsito fue *'Possible Photometric Signatures of Moderately Advanced Civilizations: The Clarke Exobelt'*, publicado por el investigador del Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC), Héctor Socas-Navarro en 2018. En este artículo, además de abordar la temática de la detección de señales de inteligencia avanzada en el Universo a través de métodos alternativos, plantea un tipo de estructura con gran probabilidad de ser desarrollada por civilizaciones como la humana en una escala de tiempo relativamente corta desde el punto actual. En concreto, propone examinar la región en torno al planeta en que son posibles las órbitas geosíncronas y geestacionarias que podrían ser pobladas por satélites en tanto que la civilización tuviese interés en hacer uso de su órbita para emplazar allí tecnología (como hoy en día sucede en la Tierra para desarrollar telecomunicaciones a escala global, estudios del clima, o incluso el emplazamiento de laboratorios científicos como es la Estación Espacial Internacional). De acuerdo al artículo, la principal contribución a la impronta en la curva de luz por parte del 'exo-belt' (exocinturón) formado por estos satélites orbitales se encuentra en su borde o extremo, en que la opacidad es máxima, por una cuestión de perspectiva, ya que observado de canto ('edge-on') tendría un mayor número de objetos a lo largo de la línea de visión. En algunos de los casos planteados en el artículo, estos cinturones serían observables con las capacidades tecnológicas actuales si lograsen conseguir una opacidad de apróx. 10^{-4} .

En el artículo se mencionan otras referencias que han estudiado posibles 'technosignatures' en fenómenos habitualmente catalogados como naturales. Se ha llegado a utilizar el Compton Gamma Ray Observatory para estudiar posibles trazas de antimateria utilizada en sistemas de propulsión avanzados (Harris, 2002). Korpela et al. (2015) simuló la traza de posibles espejos gigantes que redirigieran y aprovecharan la luz para iluminar la cara oscura de los planetas (lo que posiblemente tenga sentido en caso de planetas en su zona de habitabilidad que se encuentren bloqueados gravitacionalmente – 'tidally locked'- y roten de forma sincronizada con su traslación, mostrando siempre una cara hacia su estrella, algo probable en el caso de enanas rojas tipo M y K. Una de las technosignatures más características es la propuesta por Dyson en 1960, la conocida como 'esfera de Dyson', que se trataría de una estructura de astroingeniería de un tamaño tal que rodease a su estrella para captar la mayor cantidad de energía que esta emite. Este tipo de estructura produciría grandes ocultaciones en la luz de su estrella y un exceso de emisión infrarroja, y exigiría un nivel de desarrollo tecnológico mucho mayor que el existente actualmente en la Tierra, lo que probablemente hubiese conllevado la expansión de una civilización así a otros lugares del Universo, siendo improbable no haber detectado otro tipo de evidencias hasta el momento.

Un argumento importante a la hora de proponer búsquedas de inteligencia extraterrestre alternativas a la búsqueda en señales de radio es que, en el caso de civilizaciones similares a la nuestra, con una potencia de emisión similar a la actual, sería prácticamente imposible

detectar estas señales y distinguirlos de otras fuentes de radio cósmicas, salvo que estuviesen específicamente dirigidas en la dirección del detector. Es una de las razones más probables por la que las búsquedas del SETI no han fructificado en su objetivo principal, pese a haber aportado descubrimientos en otras vías de investigación.

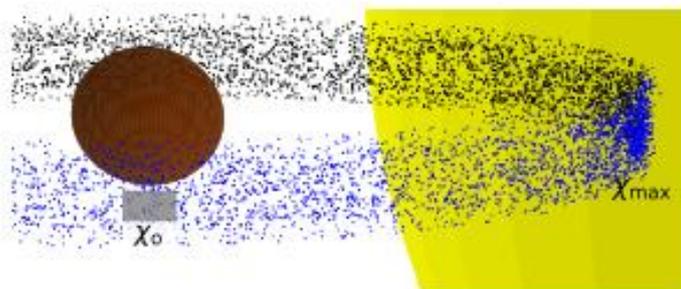


Ilustración 8: Figura del artículo de Héctor Socas-Navarro (2018) en que se muestra el aspecto del tránsito de un cinturón de Clarke por delante de su estrella. En la imagen está indicada la zona de mayor opacidad χ_{max} , así como la representación de la opacidad 'face-on' de una sección, χ_0 . Fuente: artículo de Héctor Socas-Navarro (2018).

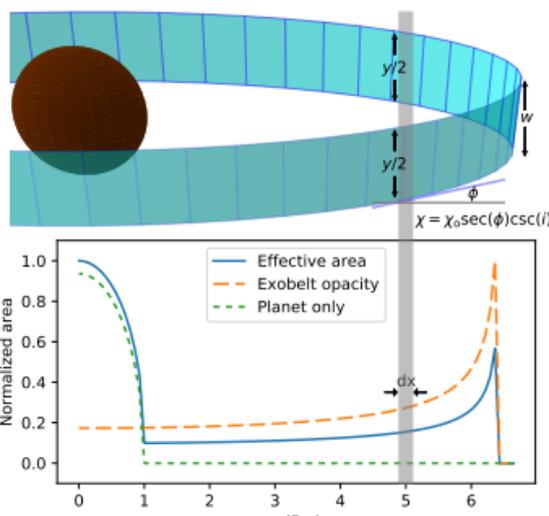


Ilustración 9: Figura en que se muestra la relación de los parámetros que describen el tránsito con la geometría del sistema. En la parte inferior, se encuentra una gráfica que muestra el área efectiva normalizada para el planeta solo, para el cinturón, y para la combinación de los dos, frente a la distancia respecto al centro del sistema (y del planeta). Fuente: artículo de Héctor Socas-Navarro (2018).

Los parámetros más importantes que definen la geometría del cinturón de Clarke en este artículo son: el radio (r_c), la anchura (w), la opacidad 'face-on', o de cara (χ_0), y la inclinación respecto al plano del cielo (i). Un cinturón de Clarke visto de canto tendría una inclinación $i=90^\circ$. Atendiendo a las imágenes 4 y 5, correspondientes al cinturón de Clarke simulado por Héctor Socas en su artículo, puede comprobarse el sentido geométrico de cada parámetro, así como la forma en que realizó la discretización del sistema de planeta con cinturón, de cara a ser programado posteriormente.

Cada diferencial de área efectiva en el artículo fue definido como:

$$d\alpha = y(x) \cdot \chi(x) \cdot dx \quad (16)$$

Es decir, cada diferencial de área es la altura $y(x)$ para cada valor de x del sistema multiplicada por dx (diferencial de longitud), y por la opacidad para ese valor de x . De hecho, dada la complejidad tridimensional del sistema en el artículo, define varias regiones en función de si estamos atendiendo a la parte externa del cinturón, al espacio entre el cinturón y el planeta, o la sección en que se encuentra el planeta con el cinturón arriba y abajo.

En el artículo, se plantea construir la curva (obtener los valores de $l(t)$, de acuerdo a la ecuación 8) realizando dos iteraciones. La primera, una iteración tal que el sistema del planeta con su cinturón de Clarke se desplace por delante de su estrella a una velocidad dada por la tercera ley de Kepler (para órbitas circulares), tal que:

$$r^3 = \frac{G}{4\pi^2} MT^2 \quad (17)$$

Donde el periodo está vinculado a la distancia entre el planeta y la estrella (r) y la masa del planeta se considera despreciable con respecto a la estrella (siendo M la masa de la estrella).

La velocidad vendrá dada por:

$$v = 2\pi r/T \quad (18)$$

Asimismo, se tiene en cuenta el tiempo de integración de las observaciones realizadas desde el telescopio seleccionado. Tras esto, el desplazamiento a lo largo del eje perpendicular a la línea de visión, por delante de la estrella (eje x), tendrá entre cada valor una distancia correspondiente al tiempo de observación multiplicado por la velocidad de desplazamiento, que definiremos como distancia x_1 .

Para cada uno de estos puntos, separados una distancia x_1 , se realiza un segundo bucle, que recorre todo el cinturón y planeta, calculando un valor de área efectiva α teniendo en cuenta las distintas regiones y opacidad debida a la geometría del sistema, generando un valor de $\alpha(t)$.

De acuerdo a la ecuación 8, en un sistema ya normalizado por la luminosidad de la estrella, tan solo será necesario el valor de $\alpha(t)$ para construir la curva de luz.

5.2 Suposiciones de este proyecto

Siendo el objetivo del proyecto la simulación de curvas fotométricas correspondientes a objetos de geometrías variadas, se pretende que estas sean realista y se ciñan con la mayor exactitud al aspecto que presentan series de datos reales. En definitiva, se pretende que tengan una finalidad predictiva, es decir, que las funciones de simulación de curvas puedan ser incorporadas en algoritmos automáticos que, mediante una función de ajuste como pudiera ser los mínimos cuadrados, o más sofisticadas como son los algoritmos habituales de Machine Learning (Random Forest, los basados en Gradient Boosting, Redes Neuronales, etc.), sean sometidas a una exploración de valores de sus parámetros en un 'grid' y de esta forma, contrastando las curvas simuladas en cada iteración con datos reales y mediante la evaluación de un error, converger a los valores que mejor ajusten las curvas a los datos reales.

Si bien esta finalidad no ha sido desarrollada dentro de este proyecto, sí ha sido planeada como aplicación posterior, con lo que las funciones desarrolladas para simular las curvas de luz se ha procurado que tengan la mayor simplicidad de manejo posible. En este sentido, ha sido necesario definir una serie de parámetros y funciones.

Se ha optado por trabajar en el lenguaje Python, en su paradigma orientado a objetos, de forma que cada función cree instancias, u objetos con una serie de parámetros asociados. Fueron creadas dos funciones: **Host_Star**, y **transiting_object**. Uno de estos objetos es invocado en el siguiente, de forma que hereda y utiliza parte de sus parámetros. Cada uno de estos objetos tiene unas funciones muy específicas asociadas a la propia naturaleza de la clase.

5.2.1 Funciones y parámetros de Host Star:

Para caracterizar la estrella, se introducen como parámetros de entrada valores en principio conocidos previamente. Estos son: Temperatura efectiva, porcentaje de radio solar (k), porcentaje de masa solar (M_{coef}), metalicidad (MH), gravedad superficial (\log_g). La introducción de valores de metalicidad (MH), y gravedad superficial (\log_g) es necesaria para la elección de coeficientes de limb darkening a partir de un archivo previamente descargado, con los valores de limb darkening correspondientes a las varias leyes tratadas en el artículo de K. Sing (2010).

Host_Star tiene definidas en su interior las funciones que, a partir de sus parámetros de entrada, calculan la luminosidad de la estrella (L_{estrella}), el flujo recibido a la distancia introducida (F_{estrella}), y generan unos cálculos de parámetros de la zona de habitabilidad correspondientes a las características de la estrella.

Dentro de esta clase Host_Star, cada función calcula una magnitud diferente y recibe nuevos parámetros de entrada que le son específicos a la función, no a la clase. Es necesario inicializar algunas de estas funciones para continuar, como la función L_star, que calcula la luminosidad, teniendo en cuenta la modulación de la función respuesta del telescopio (en este caso, la del telescopio Kepler), así como la ley de limb darkening (se ha trabajado principalmente con la cuadrática, para la mayoría de casos, por su generalidad).

Este es el aspecto que presenta la inicialización de estas funciones:

```
host_star=Host_Star(T_eff=4750, M_coef=0.73, k=0.7,
log_g=0.5, MH=0.5)
host_star.L_star(filename='kepler_response_highres.txt')
host_star.L_star_lb(filename='kepler_response_highres.txt',
limb_darkening_law='quadratic')

host_star.flux_detected(dist_lyrs=3,exposure_time=20)
host_star.habitable_zone_parameters()
```

5.2.2 Función respuesta del Telescopio

En este punto se debe tener en cuenta la función de respuesta del telescopio que vaya a ser utilizado. En este caso, en el del Kepler, existe una tabla de datos con las transmisividades para cada longitud de onda en su rango de detección, resultado de la combinación de todas las respuestas de los distintos componentes y filtros por los que pasa la luz al llegar al telescopio.

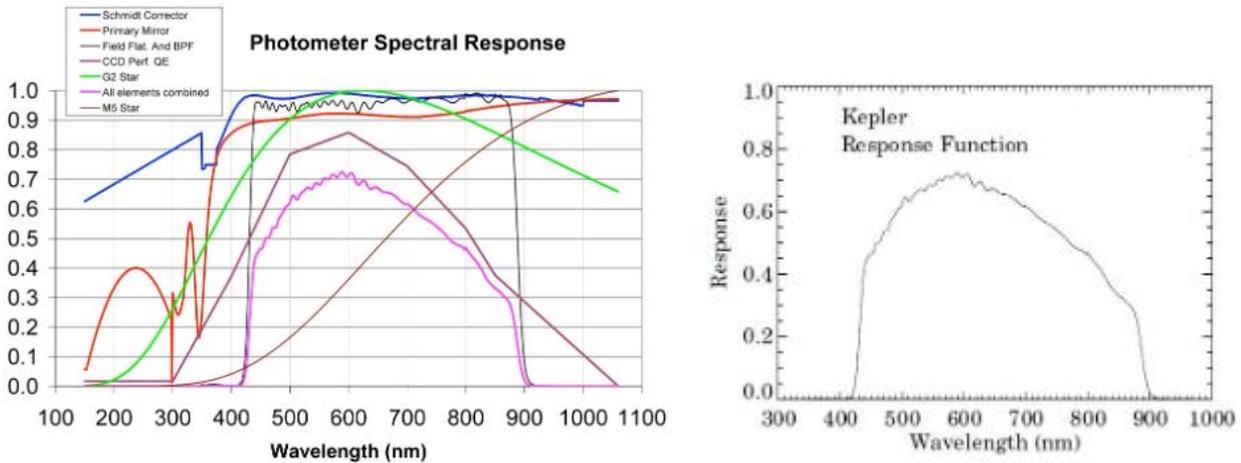


Ilustración 10: Respuesta espectral de cada componente del telescopio Kepler. A la derecha se muestra el resultado de la combinación de todas ellas, la función respuesta, que modula los valores de intensidad que detecta el telescopio. Fuente: Kepler Science Center, NASA.

Para conseguir la máxima sensibilidad posible, el filtro de banda de Kepler es más ancho que el típico filtro de banda ancha usando habitualmente en el óptico ((por ejemplo, Johnson *UBVRI*, Sloan *ugriz*). En el caso de este trabajo, han sido utilizados los valores de la función respuesta para el caso de alta resolución espectral.

5.2.3 Funciones y parámetros de transiting object:

La clase `transiting_object` dispone de las funciones que se encargan de realizar el bucle iterativo de un objeto por delante de la estrella, cuyas condiciones han sido especificadas en la instancia correspondiente, creada con anterioridad.

En la clase se especifican los parámetros de entrada de periodo orbital del objeto (P , en días), la forma del objeto principal que transita (`object_shape`), la longitud y altura (ejes x e y) del objeto que transita (en metros), la opacidad del objeto, y el ángulo de inclinación (90° para un tránsito por el ecuador). Para el caso de un objeto compuesto, hay otra serie de parámetros que tienen en este caso valores por defecto pero que pueden ser introducidos igualmente, correspondientes a la forma, tamaño y opacidad del segundo objeto, como es el caso de un planeta con anillo –elipse superpuesta–.

El aspecto de su ejecución es el siguiente:

```
transitopr1=transiting_object(P=36,
object_shape='disc',object_length=2.8*2*6.37*1e6,object1_opa=1,
object_height=2.8*2*6.37*1e6, inclination_angle=90)
transitopr1.transit()
```

5.2.4 Catálogo de objetos

Se ha considerado un catálogo de formas sencillas y dos formas más complejas, composición de dos más sencillas. El método de computación del tránsito ha sido similar al expuesto relativo al artículo de Héctor Socas-Navarro (2018), en que se discretiza cada objeto con un dx determinado de forma arbitraria según el número de particiones que queramos efectuar del objeto –influirá en el tiempo de cómputo del programa– y se recorre

para obtener un valor de área efectiva, teniendo en cuenta la opacidad de cada zona del objeto. Tras generar un valor de área efectiva, es sustraído al valor unidad correspondiente a la estrella normalizada, y se procede a calcular el siguiente valor, tras haber realizado un desplazamiento del objeto de DX , generado a partir de su velocidad orbital multiplicada por el tiempo de exposición utilizado en nuestra observación.

Los parámetros modificables son: longitud del objeto principal en el eje x , longitud del objeto principal en el eje y , forma del objeto principal (perteneciente al catálogo de formas), opacidad de la forma principal, y los mismos parámetros para el objeto secundario. En el caso de las formas simples, tan solo se describe la forma principal, con unos parámetros nulos por defecto para la secundaria. En caso de formas compuestas, se indican valores para ambos objetos.

El catálogo de formas es: **cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, disco (caso de un exoplaneta), elipse y planeta con anillo** (composición de disco circular y elipse con baja opacidad a su alrededor).

En el caso de los objetos compuestos, en este trabajo tan solo se ha planteado una aproximación a su forma, sin tener en cuenta una proyección geométrica, como sucede en el caso del cinturón de Clarke de Héctor Socas-Navarro (2018). Del mismo modo, en el caso de planeta con cola, puede elegirse la excentricidad de la elipse modificando el tamaño del semi-eje mayor (a), que es el parámetro de longitud en el eje x , pues el tamaño de su semi-eje menor (eje y) es igual al radio del planeta, y por tanto la longitud en el eje y estará fijada en el objeto secundario –elipse, el anillo- por el radio del planeta –objeto primario-.

6 RESULTADOS

En este apartado se muestran los resultados de las simulaciones para tránsitos de formas variadas, mediante diversas comparativas y casos.

6.1 Comprobación de funcionamiento

Se han tomado como referencia para la elaboración y comparación de las curvas los parámetros del planeta HD21749b, y su estrella anfitriona. Se han tomado las curvas de su tránsito a través del artículo de Dragomir et al. (2019). También se detalla en revistas de divulgación científica como scyfy.com. Se trata de un planeta de interés por su densidad, entre la de un planeta rocoso y la de uno gaseoso, que se sospecha que puede ser similar a Neptuno. Su curva de tránsito se ha utilizado para corroborar que el algoritmo de simulación de curvas funciona correctamente, que el *limb darkening* se ejecuta dando la forma suavizada del tránsito, y que el valor del área bloqueada provoca el mismo 'dim', u oscurecimiento, en la simulación que en los datos reales.

Parámetros reales de la estrella:

T_{eff} (± 100 K)	% M_{sol} (± 0.007)	% R_{sol} (± 0.01)	[M/H] (± 0.006)	Log(g)	Distancia (años luz)
4640	0.76	0.73	0.003	-	53

Parámetros de la simulación:

T_{eff}	% M_{sol}	% R_{sol}	[M/H]	Log(g)	Distancia (años luz)	Ley de Limb darkening	Tiempo exposición (s)
4750	0.76	0.7	0.0	0.5	53	Cuadrática	20

Estrella de temperatura 4750 K, 0.76 masas solares, 0.7 radios solares, metalicidad [M/H]=0.0, y $\log_g=0.5$ (gravedad superficial). Los parámetros \log_g y metalicidad solar fueron escogidos como valores genéricos para filtrar el valor concreto de los coeficientes de limb darkening a partir de los datos deducidos por Sing (2010), tomados de referencia en este proyecto, sin unos cambios reseñables en los valores de los coeficientes de oscurecimiento del limbo para metalicidades bajas. Por otro lado, si bien la temperatura real de la estrella es de 4640 K, el valor más próximo a este disponible en las tablas es 4750 K, en este rango de temperaturas.

Para la primera simulación se ha escogido la distancia de 53 años luz y un tiempo de exposición de 20 s, pues de esa manera se minimiza el efecto del ruido debido a los fotones, tal como se describirá más adelante. Tal como funciona el algoritmo, un menor tiempo de exposición proporciona un mayor número de puntos generados en la curva, lo que la suaviza y facilita ver las diferencias entre las distintas geometrías al ingresar al eclipse.

Parámetros reales del tránsito del planeta:

Periodo (días)	Forma	Radio (radios terrestres)	Inclinación órbita (grados)
35.61	Disco	2.84	Apróx. 90

Parámetros de la simulación del objeto:

Periodo (días)	Forma	Tamaño eje x (Radios terrestres)	Tamaño eje y (Radios terrestres)	Inclinación obital (grados)	Opacidad
35.61	Disco	2.8	2.8	90	1

Periodo de 36 días, diámetro de 2.8 veces el de la Tierra, opacidad=1, forma de disco planetario, ángulo de inclinación 90, de tal forma que transita por el ecuador de la estrella.

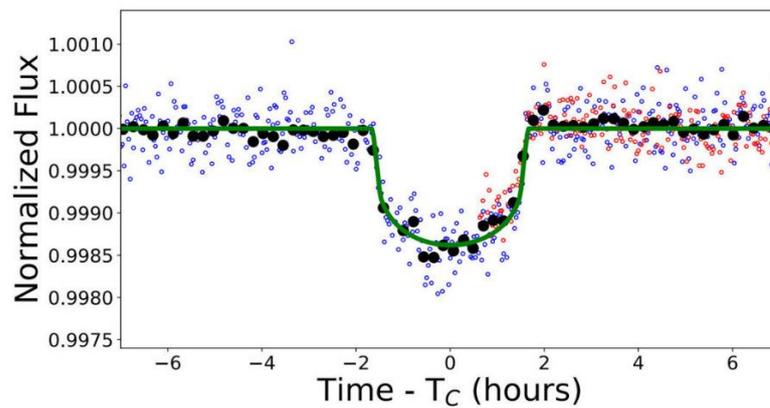


Ilustración 11: En la gráfica superior, figura del artículo de Dragomir et. al (2019) correspondiente al tránsito del planeta de tipo Neptuno HD21749b.

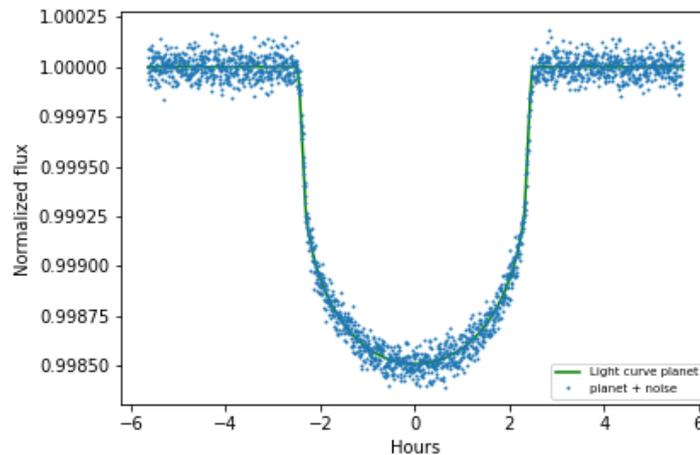


Ilustración 12: Gráfica de elaboración propia para simular el tránsito del planeta HD21749b. Se simula ruido en base a tiempos de exposición de 20 segundos, y suponiendo una distancia ficticia de 53 años luz, para mejorar la relación señal a ruido.

Tal como se puede comprobar, el aspecto que presenta el tránsito es muy similar, en tanto a la forma del decaimiento de intensidad para un limb darkening cuadrático, como a la profundidad del pozo, con lo que sirve de una primera validación para el correcto funcionamiento del algoritmo.

El 'dip' de caída de flujo es el prácticamente el mismo, de 0.9985.

6.2 Comparación de tránsitos de distintas formas geométricas

A continuación se muestra una comparación de la forma de las curvas de luz para distintas formas geométricas simples sin el efecto del *limb darkening*, para apreciar mejor sus diferencias en el ingreso al eclipse primario.

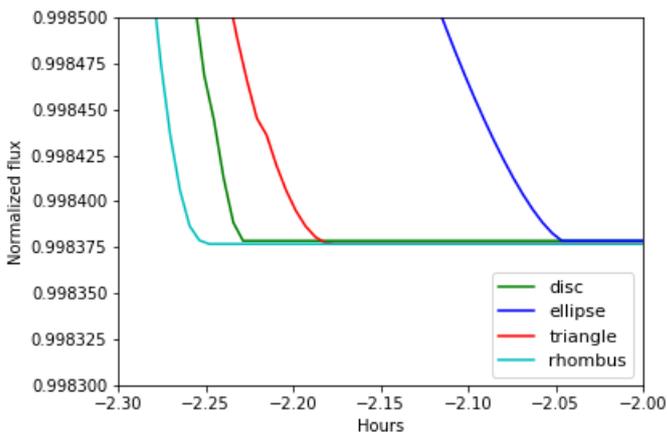
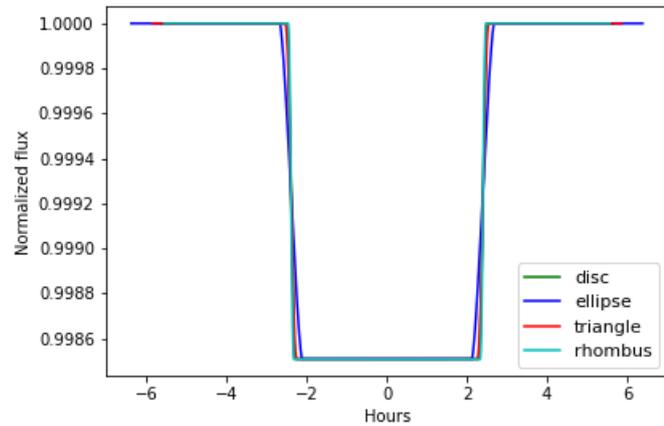
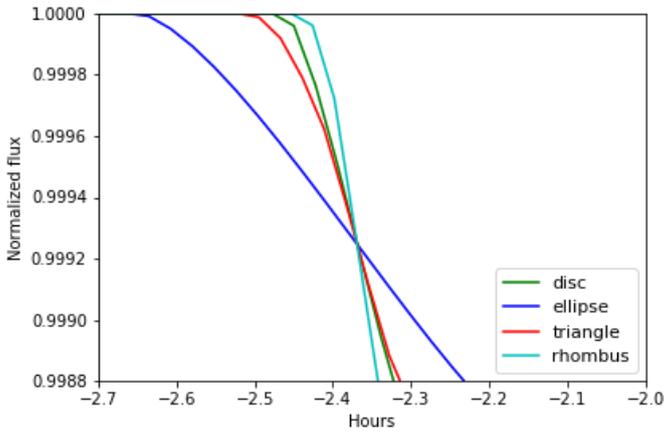


Ilustración 13: En la parte superior-izquierda se muestra el ingreso al eclipse primario para cuatro formas: disco, elipse, triángulo y rombo.

Ilustración 14: En la parte inferior izquierda, se muestra su ingreso completo.

Ilustración 15: En la imagen superior derecha, se muestra el aspecto sin ampliación de todos los tránsitos superpuestos.

Elaboraciones propias.

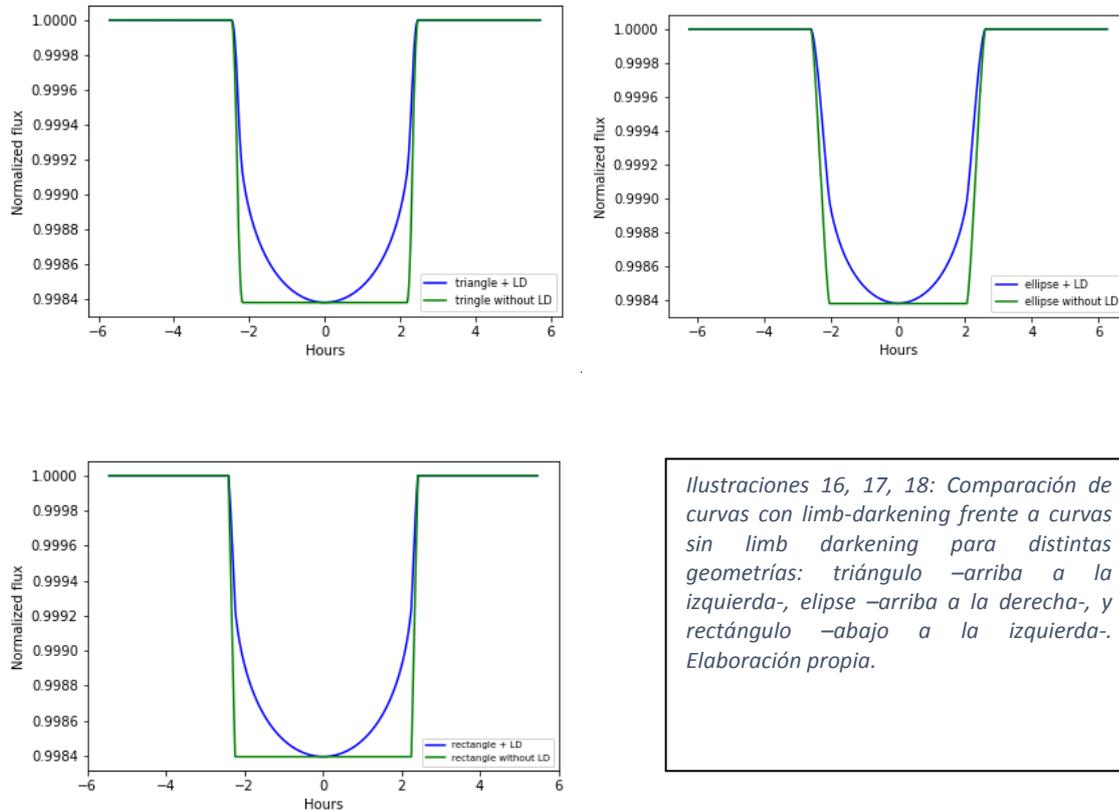
En las gráficas 13, 14 y 15 anteriores, se muestran dos etapas del ingreso al eclipse ampliadas, así como el aspecto del total del tránsito primario para cuatro formas geométricas diferentes, con áreas similares: triángulo, disco, rombo y elipse. Puede comprobarse que el área total de los objetos es similar a partir de la zona plana de la curva una vez están eclipsando. El rombo se ha programado de forma que sea más alto que ancho, de modo que la duración de su transición hacia el interior del disco es menor, y la pendiente es mayor. El disco, en comparación con la elipse, que es 3 veces más larga en el eje x, tiene un tránsito más rápido aunque la imagen da cuenta de la diferencia entre su forma y la del triángulo, el cual genera una forma característica.

Se ha procurado escoger tiempos de exposición reducidos (20 s) para que el algoritmo genere un mayor número de puntos, estando las curvas más suavizadas y con mayor detalle.

Posteriormente, en el apartado 6.3, se estudia la detectabilidad de las diferencias observadas en las gráficas.

6.2.1 Comparación entre curvas con y sin *limb darkening*

Es conveniente resaltar el efecto de suavizado que tiene el *limb darkening* sobre las diferencias sutiles en el acceso al eclipse. Los detalles del borde se pierden a simple vista y es por ello que en algunos artículos, como en el caso de Héctor Socas (2018) se sustrae el *limb darkening* para diferenciar con más claridad entre el tránsito de un planeta y un cinturón de Clarke.



El efecto resulta más apreciable en objetos alargados en el eje x, como es el caso de la elipse, con respecto al triángulo o el disco. En estas gráficas 16, 17 y 18, se ha situado un valor de metalicidad para la estrella diferente al de la primera simulación, siendo $[M/H]=0.5$. La profundidad del pozo cambia ligeramente, de 0.9985 a 0.9984.

6.2.2 Comparación de planeta con anillo vs planeta. El efecto de la opacidad

Además de experimentar con formas geométricas alternativas a discos y ensayar su detección, este trabajo plantea la simulación de otros objetos de origen claramente natural como son los planetas con un sistema de anillos. Es un ámbito de especial interés, puesto que apenas han sido detectados cuerpos o trazas ajenas al planeta que incidan en el tránsito hasta hace relativamente poco tiempo.

Como se comentó anteriormente, sin necesidad de tener en cuenta proyecciones de la geometría en tres dimensiones, lo que dificultaría la detección automática y aumentaría el número de parámetros sobre los que hacer un barrido, resulta útil recurrir a la superposición de una elipse y un disco circular, asignando a cada objeto una opacidad diferente. Se trata de una primera

aproximación con la que filtrar planetas con, por ejemplo, un anillo de polvo acompañante, que en este trabajo se ha probado distinguible respecto al cuerpo central del planeta.

A continuación se muestra, para un planeta circular más una elipse con el triple de semi-eje mayor que el radio del planeta, una comparación de simulaciones para varios valores de la opacidad, desde la nula (planeta solitario), hasta prácticamente 1 (anillo muy denso en el óptico, o presencia de otros objetos indeterminados).

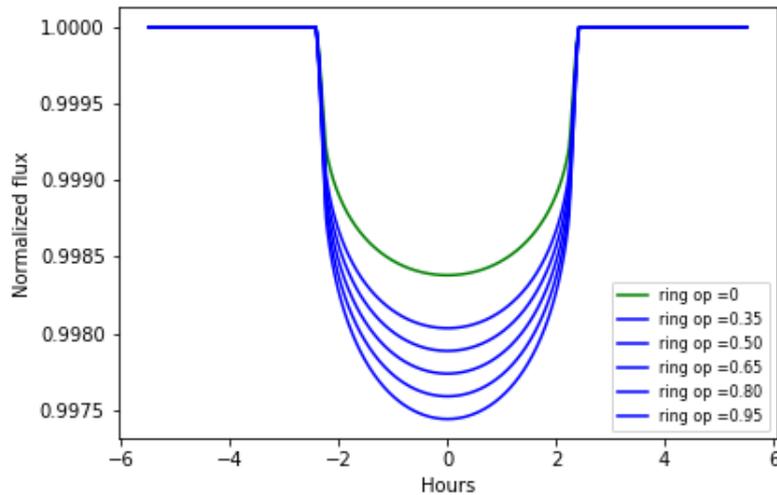


Ilustración 19: Comparación de las curvas de luz correspondientes a distintas opacidades de un anillo elíptico para un sistema formado por un planeta con 2.8 radios terrestres, de órbita 36 días, y un anillo o disco a su alrededor. Elaboración propia.

Las diferencias de cada mínimo con respecto al mayor de ellos (correspondiente a la menor disminución del brillo de un planeta sin anillo, o con opacidad nula del anillo) se muestran en la siguiente tabla:

Op.=0.35 vs 0	Op.=0.50 vs 0	Op.=0.65 vs 0	Op.=0.80 vs 0	Op.=0.95 vs 0
0.00031805	0.0004543	0.00059068	0.000726	0.0008633

6.3 Simulación de ruido fotónico

A estas curvas, tal como se ve en la gráfica 1, se les ha añadido una simulación de ruido de origen fotónico, para darle una mayor dosis de realismo a la hora de ser comparadas con datos reales. Si bien en la mayoría de artículos se realizan integraciones de imágenes y no siempre se especifican los tiempos de exposición, o los valores de señal a ruido, suelen seguirse varios métodos de reducción y eliminación de ruido, ya sea promediando imágenes o integrándolas. En este trabajo se ha tenido en cuenta una aproximación sencilla a partir del flujo recibido de la estrella en un tiempo de exposición determinado, y a partir de las características del telescopio Kepler.

En concreto, teniendo en cuenta que Kepler tiene un diámetro de apertura de 0.95 m, se toma en cuenta el tamaño de la apertura del telescopio tal que:

$$Señal\ recibida = (Fotones\ recibidos\ en\ t_{exposición}) \cdot \pi \cdot (0.95\ m / 2)^2 \quad (17)$$

A partir de este valor de señal se calcula el ruido fotónico correspondiente como:

$$Ruido = \sqrt{Señal\ recibida} \quad (18)$$

Y por último la señal a ruido (SNR) como:

$$SNR = \frac{Señal\ recibida}{Ruido} = \sqrt{Señal\ recibida} \quad (19)$$

Por último, este valor de SNR es utilizado para generar el ruido a partir de los valores de área eclipsada que habían sido generados previamente en las curvas de luz. El ruido es generado a partir de la correspondiente SNR y con una modulación de ruido gaussiano, tal que:

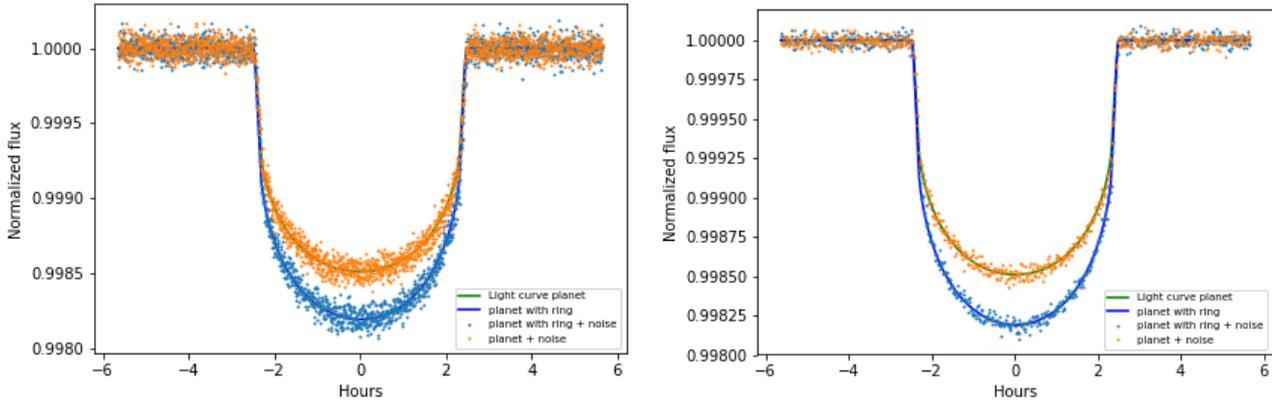
$$y = y + \left(\frac{y}{snr}\right) * ruido\ normal\ entre\ 0\ y\ 1 \quad (20)$$

Siendo 'y' el valor de flujo normalizado.

De acuerdo a esta definición del ruido, los elementos más influyentes en el valor de la SNR son el tiempo de exposición y la distancia (i.e. brillo, flujo), asumiendo una estrella de magnitud fija.

Fueron generadas curvas para varios tiempos de exposición a la distancia real a la que se encuentra la estrella y el planeta que se han tomado como referencia en esta sección (HD21749). El objetivo ha sido dar cuenta de la influencia de cada SNR en la curva de luz, y su posible efecto en la detectabilidad de las diferencias entre objetos.

A continuación se muestra la comparación entre un planeta y el planeta con un anillo elíptico de opacidad 0.35 con las mismas características que el anteriormente mencionado HD21749b (similar a Neptuno) a la distancia de 53 años luz, para un tiempo de exposición de 20 s (izquierda) y para un tiempo de exposición de 60 s (derecha).



Ilustraciones 20 y 21: A la izquierda, comparativa para una forma de planeta con anillo con respecto a un planeta solitario, para exposición de 20 s y a 53 años luz. A la derecha, la misma configuración pero con un tiempo de exposición de 60 s.

En ambos casos, a simple vista puede apreciarse la diferencia entre el caso que incluye un anillo elíptico y el caso que no lo incluye. El ruido para ambas curvas no impide que sean distinguibles tanto en el ingreso al eclipse como en la zona de mayor área eclipsada. Por tanto, un objeto del tamaño de Neptuno que dispusiese de un anillo aproximable por una elipse de semi-eje mayor el doble que el radio del planeta sería distinguible a 53 años luz para el telescopio Kepler. Aunque sería difícil distinguirlo del tránsito de un planeta simplemente más grande, en este caso, medidas precisas de velocidad radial de estos objetos podrían llevar a medir densidades muy bajas que indicarían que se trata posiblemente de un planeta más compacto con un anillo

Por otro lado, se han simulado las curvas para un planeta con anillo de forma elíptica y distintos valores de opacidad, incluyendo el ruido para el planeta y para el anillo de mayor opacidad. En este caso, de nuevo, ha sido escogido un tiempo de exposición de 20 s, pues no es necesaria una mayor exposición y este valor beneficia una mayor suavidad de la curva y un mayor número de puntos generados.

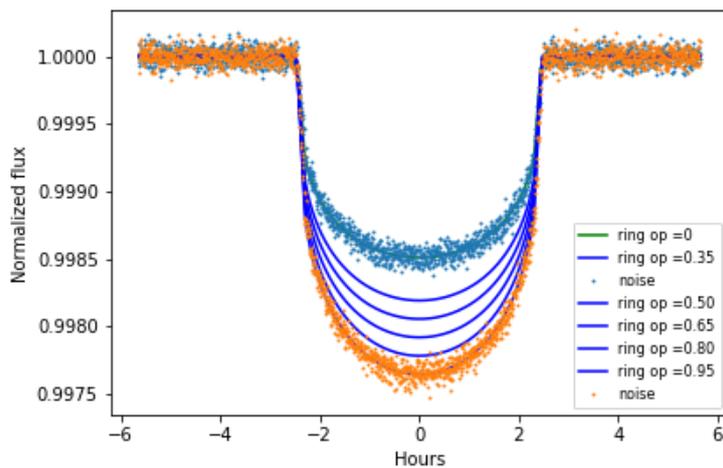
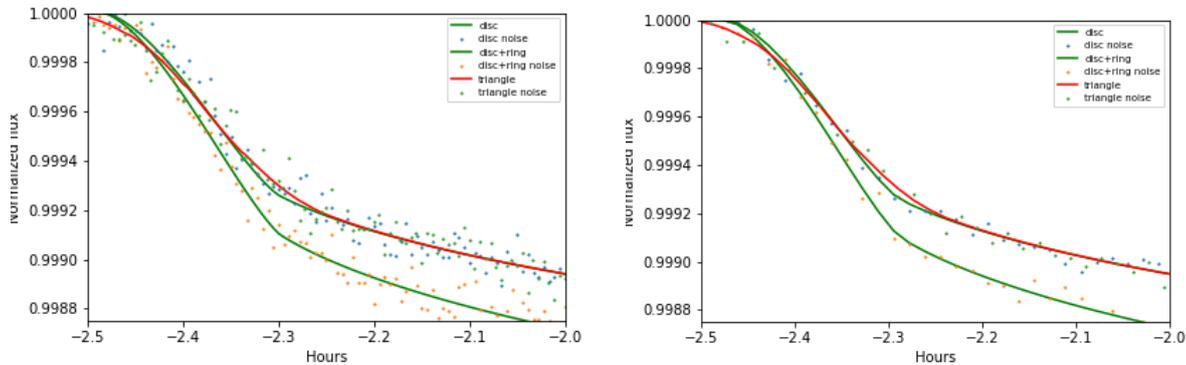


Ilustración 22: Comparación de opacidades del anillo elíptico con ruido fotónico incluido. Elaboración propia.

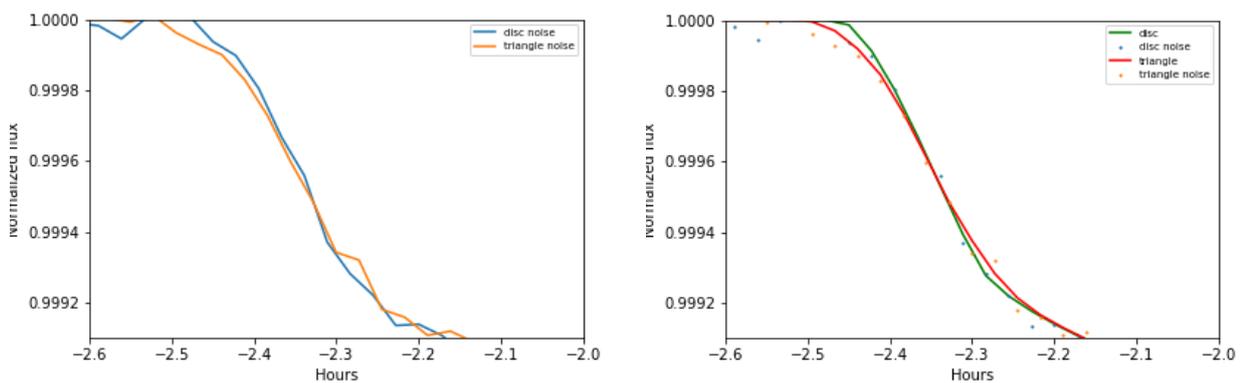
Dado que la región más crítica a la hora de determinar la forma del objeto que transita es la entrada al eclipse, se hará una comparación de la forma de la curva al comienzo de esta fase de entrada, donde el limb-darkening es más tenue, para el caso de un planeta solitario (disco), un triángulo de área similar (forma que podría adoptar una vela solar o captador de energía de origen

artificial) y el mismo planeta con elipse a modo de anillo o disco. Si bien las diferencias una vez ingresado el objeto al disco estelar son notorias para cada configuración, realmente sería posible confundir el planeta con disco por otro sin disco de mayor tamaño si no se atendiese al ingreso. Se muestran a continuación las comparaciones en esta zona para las tres geometrías mencionadas y para varios tiempos de exposición.



Ilustraciones 23 y 24: Se muestra una comparativa de la forma triangular, disco y disco con anillo en la zona de ingreso al tránsito. En la izquierda, tiempo de exposición de 20 s. En la derecha, tiempo de exposición de 60 s. Elaboración propia.

En estas gráficas queda patente la detectabilidad a una distancia de 53 años luz y tiempo de exposición de 20 segundos de un planeta con anillo con respecto a geometrías más simples como un planeta solitario. El ruido (amarillo) de la geometría del primer objeto no interfiere con el ruido de la curva de luz correspondiente al planeta. En este caso, ambos planetas tienen el mismo área, difiriendo tan solo en la presencia de una elipse con opacidad de 0.35. Sin embargo, en estas condiciones no es distinguible un disco planetario de un triángulo o vela de la misma área. Para ello es necesario ir a tiempos de exposición mayores (>60 s), o buscar este tipo de tránsitos en estrellas más cercanas. A 100 s de exposición, el resultado es el siguiente:



Ilustraciones 25 y 26: Comparación de las curvas con ruido para un disco y un triángulo de igual área en la zona de ingreso al eclipse, para tiempo de exposición de 100 s. A la izquierda, curva continua; a la derecha, el ruido en forma de puntos. Elaboración propia.

Donde podría darse por detectable la diferencia entre ambas geometrías (disco y triángulo) al principio del eclipse.

6.4 Ampliación y aplicaciones futuras

Este trabajo ha servido como punto de partida para la simulación de geometrías alternativas a las clásicas circulares habitualmente utilizadas en el ajuste de parámetros de datos de tránsitos exoplanetarios. Han sido simuladas con éxito varias formas geométricas sencillas y una compuesta (planeta con anillo) a partir de la superposición de dos más sencillas, facilitando que estas formas puedan ser incluidas en un bucle para distinguir tránsitos anómalos.

El siguiente paso natural a seguir con este proyecto será la inclusión de las características del telescopio espacial TESS, actualmente en funcionamiento, para el contraste de sus resultados con los de Kepler y la aplicación directa en detección de tránsitos reales mediante algoritmos de *machine learning* a sus bases de datos.

Asimismo, se procurará evaluar nuevas formas de modelización del ruido real de los datos de tránsitos para su adecuación satisfactoria a ajustes con datos reales.

7. Conclusiones

Este proyecto ha servido al propósito de realizar una revisión del estado de investigación general en exoplanetas, en especial en el ámbito de la simulación de tránsitos con el fin de su uso último en la detección automática sobre datos reales.

Se ha realizado un análisis de los métodos más reseñados y populares de simulación tanto de los tránsitos como de cálculo de coeficientes de oscurecimiento del limbo apropiados para el estudio de exoplanetas. Se realizó una búsqueda de la bibliografía idónea para tratar la simulación de tránsitos diferentes a los planetarios, siendo tomado como referencia el artículo que describía en mayor profundidad el método desarrollado y más fácilmente implementable, estando este artículo de referencia también vinculado con el tema de la búsqueda de patrones anómalos en los tránsitos.

Una vez explicado este método, se han generado varios resultados que, en algunos casos han sido comparados satisfactoriamente con datos reales, y en otros, han servido como guía para entender el efecto de factores como la distancia, el tiempo de exposición, y las características del telescopio en la mejora de la sensibilidad y de la SNR.

Asimismo, se ha tratado de ajustar las simulaciones, dentro de unas hipótesis y simplificaciones de partida, como no tener en cuenta la excentricidad de las órbitas, a uno de los telescopios más importantes y prolíficos en este ámbito, el telescopio Kepler, siendo proyectado a futuro la aplicación de este procedimiento a simulaciones con las características del telescopio TESS.

Este proyecto ofrece una casuística muy variada en tanto a la variedad de simulaciones y resultados posibles a mostrar. Se ha optado por ceñirse a los parámetros estelares y de tránsito de un caso conocido y fácilmente accesible, y a partir de este punto de partida, mostrar las diferencias entre geometrías, opacidades, tiempos de exposición y distancias para que sus efectos se contrasten de forma aislada. Del mismo modo, este trabajo puede ser continuado con la ampliación a un gran número de casos, idealmente mediante la inclusión de series temporales de datos reales, y con suposiciones más rigurosas sobre la naturaleza del ruido y otras condiciones de simulación.

En definitiva, este proyecto se presenta como una oportunidad de iniciar una vía de investigación en el ámbito de los exoplanetas y los objetos anómalos y complejos capaces de producir tránsitos, sean de naturaleza artificial o no, a partir de la combinación de simulaciones y datos reales para elaborar predicciones y trabajar simultáneamente con grandes cantidades de datos, filtrando aquellos que se presenten mejores ajustes.

8. Bibliografía y Referencias

- ‘Equations for the analysis of the light curves of extra-solar planetary transits’, de A. Giménez (2005).
- ‘Stellar Limb-Darkening Coefficients for CoRoT and Kepler’, de K. Sing (2009).
- ‘Tess delivers its first Earth-sized planet and a warm sub-Neptun’, Dragomir et al. (2019).
- ‘Gravity and limb-darkening coefficients for the Kepler, CoRoT, Spitzer, uvby, UBVRIJHK, and Sloan photometric systems’, Claret (2012).
- Possible photometric signatures of moderately advanced civilizations: The Clarke Exobelt’, Héctor-Socas Navarro (2018).
- ‘A new nonlinear approximation to the limb-darkening of hot stars’, Díaz Cordovés, Giménez A. (1992).
- ‘Exoplanet Biosignatures: A Review of Remotely Detectable Signs of Life’, Edward W. Schwieterman et al. 2018.
- ‘Reflected Light Curves, Spherical and Bond Albedos of Jupiter and Saturn-like Exoplanets’, Ulyana Dyudina, 2015.
- ‘Surface Imaging of Proxima B and other exoplanets: Topography, Biosignatures, and artificial mega-structures’, S. V. Berdyugina, J. R. Kuhn, 2017.
- Exoplanet Transits: Light Curve Photometry, Lydia Shannon *Center for Astrophysics, Space Physics and Engineering Research at Baylor University*.
- Diapositivas de clase de ‘Exoplanetas y Exobiología’, Máster en Astrofísica, Universidad de la Laguna, 2018.
- Diapositivas de clase de ‘Instrumentación Avanzada’, Máster en Astrofísica, Universidad de la Laguna, 2018.
- ‘Analytic Lightcurves for Planetary Transit Searches’, K. Mandel, E. Agol (2002).
- Kepler Instrument Handbook, NASA, 2009.
- Información complementaria acerca del cálculo de la Signal-to-Noise:
<http://slittlefair.staff.shef.ac.uk/teaching/phy217/lectures/instruments/L14/index.html>
- Kepler and K2: Spacecraft and Instrument, NASA. Enlace:
https://www.nasa.gov/mission_pages/kepler/spacecraft/index.html