



Universidad  
de La Laguna

# POLINOMIOS ORTOGONALES PROPIEDADES Y APLICACIONES

*Orthogonal Polynomials  
Properties and applications*

Polinomios  
Interpolación  
Fórmulas  
de cuadratura  
...  
Electrostática

Jiaqi Wang

*Trabajo de Fin de Grado*

Departamento de Análisis  
Matemático

Facultad de Matemáticas

La Laguna, 18 de junio de 2014



Dr. D. **Ramón Ángel Orive Rodríguez**, con N.I.F. 42059801-P Catedrático de Universidad, adscrito al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

**C E R T I F I C A**

Que la presente memoria titulada:

*“Polinomios Ortogonales. Propiedades y aplicaciones”*

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Jiaqi Wang**, con N.I.E. X3679099-L.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 18 de junio de 2014.



王佳琦

# Agradecimientos

A mi tía Aiqiong Shi,  
por su cuidado durante mi infancia,

a Ramón,  
por su inestimable ayuda durante la realización de este trabajo,

y a mis amigos,  
por apoyarme en los momentos más difíciles de la carrera.

## Resumen

*El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado ha sido introducirnos en una de las teorías más relevantes y fecundas de la Matemática Aplicada: los Polinomios Ortogonales. Este tema, aunque se introduce brevemente como parte de la asignatura Métodos Numéricos II, del actual Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna, se caracteriza por su naturaleza esencialmente multidisciplinar, tanto en lo referente a su desarrollo teórico como a su amplio y variado campo de aplicaciones.*

*En el presente trabajo, hemos sintetizado algunas de las propiedades más representativas de las familias generales de Polinomios Ortogonales (norma cuadrática mínima, comportamiento de ceros, relación de recurrencia), para tratar con más detalle el caso particular de los denominados Polinomios Ortogonales Clásicos, entre los que destaca especialmente el caso de los Polinomios de Chebyshev de primera especie.*

*Finalmente, se desarrollan brevemente algunas de las principales aplicaciones de estas familias de polinomios (interpolación, integración numérica) para concluir mostrando una interesante conexión con las aplicaciones físicas, a través de la interpretación electrostática de los ceros, debida originariamente a T. J. Stieltjes (1856-1894). Este último aspecto, especialmente, permite conectar este trabajo con un posible tema futuro de investigación de Máster y Doctorado por nuestra parte.*

**Palabras clave:** Polinomios ortogonales, Polinomios de Chebyshev, Interpolación, Fórmulas de Cuadratura, Interpretación electrostática.



## Abstract

The main purpose of this report has been introducing one of the most important and fruitful theories of the Applied Mathematics, namely, the theory of Orthogonal Polynomials. It is well known that this issue, though formally introduced within the contents of “Métodos Numéricos II” (Third Course of the Degree in Mathematics at ULL), is essentially interdisciplinary by its theoretical development as well as its wide range of applications.

The current report starts summarizing some of the most basic and useful properties of these families of polynomials (minimal quadratic norm, behavior of zeros, recurrence relations). Then, the particular case of the so-called Classical Orthogonal Polynomials, amongst them the case of the first kind Chebyshev polynomials deserves special attention, is analyzed with more detail.

Finally, some of the most important applications of the Orthogonal Polynomials (interpolation, numerical integration) are handled, to end showing a very interesting connection with the physical applications: the electrostatic interpretation of the zeros of certain families of Classical Orthogonal Polynomials, due to some seminal papers by T. J. Stieltjes (1856-1894). Moreover, we hope that this last topic may be the link with further researches in the context of a Master or Doctorship in Mathematics.

**Keywords:** *Orthogonal Polynomials, Chebyshev Polynomials, Interpolation, Quadrature Formulas, Electrostatic Interpretation.*

# Índice general

<b>1. Motivación y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Definición y propiedades generales</b>	<b>3</b>
2.1. Definición . . . . .	3
2.2. Propiedades . . . . .	6
<b>3. Polinomios ortogonales clásicos</b>	<b>11</b>
3.1. Polinomios de Jacobi . . . . .	11
3.1.1. Polinomios de Chebyshev (Primera especie) . . . . .	13
3.2. Polinomios de Laguerre . . . . .	19
3.3. Polinomios de Hermite . . . . .	20
<b>4. Aplicación a la interpolación</b>	<b>23</b>
<b>5. Aplicación a las fórmulas de cuadratura</b>	<b>27</b>
<b>6. Aplicación física: interpretación electrostática de ceros</b>	<b>35</b>
6.1. El problema de Stieltjes . . . . .	37



# Capítulo 1

## Motivación y objetivos

Como suele ser habitual, no existe una única razón para elegir este tema para la realización del Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas. No obstante, entre el conjunto de posibles argumentos en favor de esta elección hemos considerado oportuno destacar los siguientes:

- Se trata de un tema claramente transversal en cuanto a contenidos de muchas asignaturas y materias del actual Grado. Si bien, se introduce brevemente en los contenidos de la asignatura de Métodos Numéricos II (tercer curso), tanto en su desarrollo teórico como en sus aplicaciones conecta con gran cantidad de materias: desde Álgebra a todas las asignaturas de Análisis Matemático (I-VI), pasando por las de Ecuaciones Diferenciales, las restantes materias de Métodos Numéricos, la Física y la asignatura de Modelización, por citar solamente las conexiones más evidentes. Este carácter marcadamente interdisciplinar creemos que convierte a este tema en un magnífico candidato para poner broche de oro final al Grado en Matemáticas con un TFG.
- Por otra parte, y aunque sus contenidos están claramente encuadrados dentro de las capacidades y destrezas adquiridas durante la realización del Grado en Matemáticas, creemos que este estudio introductorio, cuya naturaleza y carácter global nos ha permitido a su vez analizar algunos aspectos concretos con más detalle, posibilita el puente hacia el inicio en tareas de investigación por nuestra parte en un futuro a corto plazo.

En cuanto a los objetivos de presente trabajo, cabe destacar:

- Conocer la definición de los polinomios ortogonales, así como sus propiedades básicas.

- Conocer los distintos tipos de polinomios ortogonales clásicos, entre ellos los polinomios de Chebyshev de primera especie.
- Aplicar los conocimientos en otros ámbitos de la ciencia, tanto matemáticos (interpolación y fórmulas de cuadratura) como físicos (electrostática).



# Capítulo 2

## Definición y propiedades generales

Comenzamos dando la definición de los polinomios ortogonales para luego extraer de ella algunas propiedades. Para más detalles sobre el contenido de este capítulo pueden consultarse las referencias [1],[2] y [3].

### 2.1. Definición

Sea  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , donde  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , contemplando, por tanto, también los intervalos no acotados. Sea  $\omega(x)$  una función peso en  $[a, b]$ , que verifica las siguientes propiedades:

- $\omega(x) > 0$  en  $(a, b)$ .
- $\omega(x)$  es integrable en  $(a, b)$ , es decir,  $\omega(x) \in \mathcal{L}_1(x)$ :  $\int_a^b \omega(x)dx < \infty$ .

A partir de esta función peso se define un producto escalar para el espacio vectorial de los polinomios  $\mathbb{P}$ . Sean  $p, q \in \mathbb{P}$ ,

$$\langle p, q \rangle_\omega := \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx$$

y su correspondiente norma:

$$\|p\|_\omega = \sqrt{\int_a^b p(x)^2 \omega(x)dx},$$

que es clave para definir los polinomios ortogonales.

**Definición 2.1.1 (Polinomios ortogonales)**  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto del peso  $\omega$  si verifica:

1.  $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \deg(p_n(x)) = n.$
2.  $\langle p_n, p_m \rangle_{\omega} = 0 \iff n \neq m.$

Esta definición es equivalente a la siguiente condición, debido a la estructura de espacio vectorial de  $\mathbb{P}_n$ , que admite como base  $\{p_n(x)\}_{k=0}^n$ :

$$\langle p_n, x^k \rangle_{\omega} = \int_a^b p_n(x) x^k \omega(x) dx = C_n \delta_{nk} = \begin{cases} C_n, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

donde  $C_n \neq 0$  es una constante arbitraria. Esta última determina un sistema de ecuaciones con  $n$  ecuaciones y  $n + 1$  incógnitas que son los coeficientes del polinomio. Esto indica que estos últimos están determinados salvo una constante multiplicativa. Todo lo dicho anteriormente se recoge en el siguiente teorema de existencia y unicidad.

**Teorema 2.1.1 (Existencia y unicidad de polinomios ortogonales)** Para cada  $\omega$  función peso, existe una única sucesión de polinomios ortonormales  $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ , con coeficiente principal positivo. Es decir:

1.  $\deg(p_n(x)) = n, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$
2.  $p_n(x) = \gamma_n x^n + \dots + \gamma_0$ , donde  $\gamma_n > 0$ .
3.  $\langle p_n, p_m \rangle_{\omega} = \int_a^b p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = \delta_{n,m}.$

[DEMOSTRACIÓN]: Veamos la existencia y la unicidad.

◦ EXISTENCIA.

Razonamos por inducción:

- ◊  $k = 0$ . Basta tomar el polinomio constante  $\frac{1}{\sqrt{\int_a^b \omega(x) dx}}$  y claramente verifican las tres propiedades.
- ◊ Supongamos cierto esto para  $k < n$ . Es decir,  $\forall k < n$ , existe  $p_k(x)$  que cumple las propiedades. Formamos el conjunto  $\{p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)\}$ .



◊ Veamos para el caso  $k = n$ . Utilizamos un argumento parecido a la ortogonalización de Gram- Schmidt. Construimos el polinomio de grado  $n + 1$ :

$$p_{n+1}^*(x) = x^{n+1} - \sum_{i=0}^n a_i p_i(x), \text{ donde } a_i = \int_a^b x^{n+1} p_i(x) \omega(x) dx.$$

La primera propiedad es evidente que la verifica, pues tiene un término de grado  $n + 1$  que no se anula con los demás. La segunda propiedad también es evidente que se satisface, puesto que  $\gamma_n = 1 > 0$ . Solo hace falta comprobar que se dé la última, pues:

$$\begin{aligned} \langle p_{n+1}^*, p_i \rangle_\omega &= \int_a^b p_{n+1}^*(x) p_i(x) \omega(x) dx = \int_a^b [x^{n+1} - \sum_{j=0}^n a_j p_j(x)] p_i(x) \omega(x) dx \\ &= \int_a^b x^{n+1} p_i(x) \omega(x) dx - \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b p_j(x) p_i(x) \omega(x) dx \\ &= a_i - a_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\langle p_{n+1}^*, p_{n+1}^* \rangle_\omega = \int_a^b (p_{n+1}^*(x))^2 \omega(x) dx = I > 0$  al ser la integral de un polinomio no negativo y no nulo.

Por tanto, si tomáramos  $p_{n+1}(x) = \frac{p_{n+1}^*(x)}{\sqrt{I}}$ , obtendríamos un polinomio que verifica las tres propiedades y, por tanto, concluimos la prueba por inducción, justificando así la existencia.

○ UNICIDAD.

Supongamos que  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de polinomios ortogonales que verifica las propiedades y sea  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  otra sucesión de polinomios que satisface las mismas. Veamos entonces que  $p_n = q_n, \forall n \in \mathbb{N}$ :

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  forma una base del subespacio  $\mathbb{P}_n$ :

$$\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} / p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i q_i(x).$$

Por verificar la propiedad 2 se tiene que:

$$\forall j < n, 0 = \langle p_n, q_j \rangle_\omega = \left\langle \sum_{i=0}^n a_i q_i(x), q_j \right\rangle_\omega = a_j.$$

Con lo cual se tiene  $p_n(x) = a_n q_n(x)$ . Por otro lado,

$$1 = \langle p_n, p_n \rangle_\omega = \langle a_n q_n, a_n q_n \rangle_\omega = a_n^2 \implies a_n = 1,$$

al ser una sucesión de polinomios que verifica la primera propiedad. Con esto

tenemos que  $p_n(x) = q_n(x), \forall n \in \mathbb{N} \iff \{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , luego se verifica la unicidad.

A continuación veremos algunas propiedades importantes que satisfacen los polinomios ortogonales.

## 2.2. Propiedades

### 1. NORMA CUADRÁTICA MÍNIMA

Los polinomios ortogonales tienen la norma  $\|\cdot\|_{\omega}$  definida en la sección 2.1 mínima, como se refleja en la siguiente proposición:

**Proposición 2.2.1 (Norma cuadrática mínima)** *Sea  $p_n(x)$  el enésimo polinomio ortogonal mónico. Entonces, para cualquier  $q_n(x)$  polinomio mónico de grado  $n$  se tiene:*

$$\|q_n\|_{\omega} \geq \|p_n\|_{\omega}.$$

O lo que es equivalente,  $\|p_n\|_{\omega} = \min_{q_n=x^n+\dots} \|q_n\|_{\omega}$ .

[DEMOSTRACIÓN]: Sea  $q_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  un polinomio mónico de grado  $n$  y sea  $p_n(x)$  el polinomio de grado  $n$  ortogonal mónico. Está claro que  $\exists t_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1} : q_n(x) = p_n(x) + t_{n-1}(x)$ . Ahora bien:

$$\|q_n\|_{\omega}^2 = \langle p_n, p_n \rangle_{\omega} = \langle p_n, p_n \rangle_{\omega} + 2\langle p_n, t_{n-1} \rangle_{\omega} + \langle t_{n-1}, t_{n-1} \rangle_{\omega}.$$

Por ortogonalidad se tiene que  $\langle p_n, t_{n-1} \rangle_{\omega} = 0$ , luego:

$$\|q_n\|_{\omega}^2 = \langle p_n, p_n \rangle_{\omega} + \langle t_{n-1}, t_{n-1} \rangle_{\omega} = \|p_n\|_{\omega}^2 + \|t_{n-1}\|_{\omega}^2 \geq \|p_n\|_{\omega}^2.$$

Tomando raíces cuadradas en la desigualdad anterior obtendríamos que:

$$\forall q_n = x^n + \dots, \|q_n\|_{\omega} \geq \|p_n\|_{\omega} \iff \|p_n\|_{\omega} = \min_{q_n=x^n+\dots} \|q_n\|_{\omega}.$$

## 2. FÓRMULA DE RECURRENCIA

**Teorema 2.2.1 (Fórmula de recurrencia a tres términos)** *Sea la función peso  $\omega$  y  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  su sucesión de polinomios ortonormales asociados. Entonces, se verifica:*

$$\forall n \geq 1, xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad (2.1)$$

siendo  $p_n(x) = \gamma_n x^n + \dots$ ,  $a_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0$ ,  $b_n = \int_a^b xp_n^2(x)\omega(x)dx$ .

[DEMOSTRACIÓN]: Observamos que, por ser  $\{p_0, \dots, p_n\}$  una base de  $\mathbb{P}_n$ , existen  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tales que:

$$xp_n(x) = \gamma_n x^{n+1} + \dots = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} p_{n+1} + \sum_{k=0}^n c_k p_k(x). \quad (2.2)$$

A esto se añade que si  $j < n \implies \deg(xp_j(x)) < n+1$ , y como consecuencia de la ortogonalidad:

$$0 = \int_a^b xp_n(x)p_j(x)\omega(x)dx = c_j \int_a^b p_j^2(x)\omega(x)dx = c_j \|p_j\|_{\omega} = c_j,$$

lo que nos ayuda a reducir nuestra expresión (2.2):

$$xp_n(x) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x). \quad (2.3)$$

Si multiplicamos por  $p_n(x)\omega(x)$  en ambos lados de la igualdad e integramos respecto de  $x$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b xp_n^2(x)\omega(x)dx &= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \int_a^b p_{n+1}(x)p_n(x)\omega(x)dx + c_n \int_a^b xp_n^2(x)\omega(x)dx \\ &\quad + c_{n-1} \int_a^b p_{n-1}(x)p_n(x)\omega(x)dx \\ &= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \langle p_{n+1}, p_n \rangle_{\omega} + c_n \langle p_n, p_n \rangle_{\omega} + c_{n-1} \langle p_{n-1}, p_n \rangle_{\omega} = c_n = b_n. \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo, esta vez multiplicando por  $p_{n-1}(x)$  en ambos miembros de la igualdad, se tendría que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b xp_{n-1}(x)p_n(x)\omega(x)dx &= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \int_a^b p_{n-1}(x)p_{n+1}(x)\omega(x)dx + c_n \int_a^b p_n(x)p_{n-1}(x) \\
&\quad + c_{n-1} \int_a^b xp_{n-1}(x)p_{n-1}(x)\omega(x)dx \\
&= \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \langle p_{n-1}, p_{n+1} \rangle_\omega + c_n \langle p_n, p_{n-1} \rangle_\omega + c_{n-1} \|p_{n-1}\|_\omega^2 = c_{n-1}.
\end{aligned}$$

Utilizando ahora la igualdad

$$xp_{n-1}(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} p_n(x) + \sum_{k=0}^{n+1} \delta_k p_k(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} p_n(x) + \alpha p_{n-1} + \beta p_{n-2}$$

y la ortogonalidad, obtenemos:

$$\begin{aligned}
c_{n-1} &= \int_a^b xp_{n-1}(x)p_n(x)\omega(x)dx = \int_a^b \left[ \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} p_n(x) + \alpha p_{n-1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \beta p_{n-2}(x) \right] p_n(x)\omega(x)dx = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} \int_a^b p_n^2(x)\omega(x)dx = a_n.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la ecuación (2.3) se obtiene el resultado pedido.

Además, existe un resultado de tipo inverso que incluimos seguidamente sin demostración. Si cierta sucesión de polinomios satisface esta relación de recurrencia será ortogonal, resultado que se recoge en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.2 (Teorema de Favard)** *Sea  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de polinomios que satisface la relación de recurrencia a tres términos, con  $a_0 > 0$ , con las condiciones iniciales  $p_0(x) = \frac{2}{a_0}$ ;  $p_1(x) = \frac{1}{a_1 a_0}(x - b_0)$ . Entonces, existe una función  $\omega(x)$  tal que la sucesión es ortonormal respecto de dicha función peso.*

### 3. CEROS DE LOS POLINOMIOS ORTOGONALES

**Teorema 2.2.3** *Dos polinomios ortogonales consecutivos no tienen ceros comunes. Es decir,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $C_{p_n} \cap C_{p_{n+1}} = \emptyset$ , donde  $C_q$  denota el conjunto de ceros de un polinomio  $q$ .*

[DEMOSTRACIÓN]: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe  $n \in \mathbb{N}, x_0 \in [a, b]/p_n(x_0) = p_{n+1}(x_0) = 0$ . Utilizando la fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 p_n(x_0) = a_{n+1} p_{n+1}(x_0) + b_n p_n(x_0) + a_n p_{n-1}(x_0) = a_n p_{n-1}(x_0) \Rightarrow p_{n-1}(x_0) = 0, \\ &\vdots \\ 0 &= x_0 p_1(x_0) = a_2 + b_2 p_2(x_0) + a_1 p_0(x_0) \Rightarrow p_0(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Lo cual es claramente un absurdo puesto que  $p_0 \equiv \frac{1}{a_0} > 0$ .

**Proposición 2.2.2**  $p_n$ , el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal respecto de la función peso  $\omega$ , tiene exactamente  $n$  ceros en el intervalo  $(a, b)$ .

[DEMOSTRACIÓN]: Supongamos, por reducción al absurdo, que  $C_{p_n} = \{x_1, \dots, x_m\}$ ,  $m < n$  es el conjunto de ceros de  $p_n$  en  $(a, b)$ . Construimos el polinomio  $\prod_{i=1}^m (x - x_i)$ , que es de grado  $m$ . Por ortogonalidad se tendría entonces que:

$$\int_a^b \prod_{i=1}^m (x - x_i) p_n(x) \omega(x) dx = \left\langle \prod_{i=1}^m (x - x_i), p_n \right\rangle_\omega = 0.$$

Por otro lado, al ser:

$$C_{p_n} = \{x_1, \dots, x_m\} \implies \exists q_{n-m} \in \mathbb{P}_{n-m}/p_n(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i) q_{n-m}(x).$$

Además,  $C_{q_{n-m}} \cap [a, b] = \emptyset$ . Sustituyendo esto en nuestra ecuación:

$$\int_a^b \prod_{i=1}^m (x - x_i) p_n(x) \omega(x) dx = \int_a^b \prod_{i=1}^m (x - x_i)^2 q_{n-m}(x) \omega(x) dx = 0.$$

Lo cual es un absurdo puesto la integral un polinomio que no cambia de signo en  $[a, b]$ , un intervalo de medida no nula, se anula  $\#$ .

Por último, otro teorema nos asegura que los ceros de dos polinomios ortogonales están “entrelazados”. Para ello, denotemos por  $x_{m,k}$  el  $k$ -ésimo cero de  $p_m(x)$ , y supongamos que ordenamos en forma decreciente los ceros de los polinomios  $p_n, p_{n+1}$ , esto es:

$$\begin{aligned} x_{n,n} &< x_{n,n-1} < \dots < x_{n,1}, \\ x_{n+1,n+1} &< x_{n+1,n} < \dots < x_{n+1,1}. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene:

**Proposición 2.2.3 (Separación de ceros)** Sean  $p_n, p_{n+1}$  dos polinomios ortogonales consecutivos respecto de la función peso  $\omega$ . Entonces, sus ceros están ordenados de modo que verifican las inecuaciones:

$$x_{n+1,k+1} < x_{n,k} < x_{n+1,k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

La idea de la proposición queda recogida en la siguiente imagen.

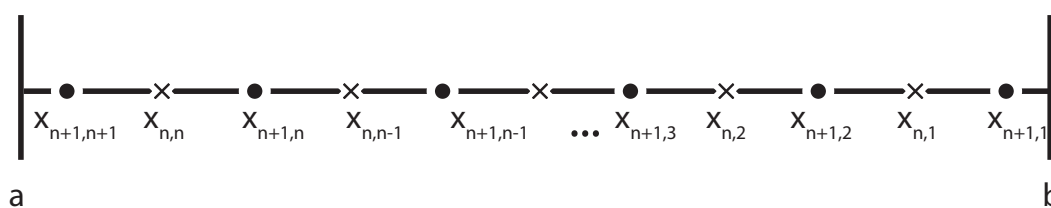


Figura 2.1: Distribución de los ceros de dos polinomios ortogonales consecutivos, de grados  $n$  y  $n + 1$ , respectivamente, en el intervalo  $(a, b)$ .



# Capítulo 3

## Polinomios ortogonales clásicos

Hablaremos en esta sección sobre algunos de los polinomios ortogonales clásicos que tuvieron una importancia no sólo en el desarrollo de esta teoría sino también en las aplicaciones a otras ciencias. Para mayor información, pueden consultarse, entre otras, las referencias [4] y [6].

Se clasifican en tres grandes familias: *Jacobi*, *Laguerre* y *Hermite*. En función de las características del intervalo de definición  $[a, b]$ , según se trate de un intervalo acotado  $[a, b]$ , semi- infinito  $[a, \infty)$  o infinito  $(\mathbb{R})$ .

Haciendo uso, si fuese necesario, de transformaciones lineales elementales, basta estudiar los intervalos  $[-1, 1]$ ,  $[0, \infty)$  y  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ , quedando así cubiertos todos los casos posibles.

### 3.1. Polinomios de Jacobi

En este caso el intervalo de soporte es  $[-1, 1]$ . Dependen de dos parámetros  $(\alpha > -1, \beta > -1)$ , a partir de los cuales se construye la función peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, x \in (-1, 1)$ . Surgen de la necesidad del estudio del movimiento de los planetas en trabajos de Legendre y de Gauss, quienes introdujeron el caso particular  $(\alpha = \beta = 0)$ . El  $n$ -ésimo polinomio de Jacobi se denota por  $P_n^{(\alpha, \beta)}$ .

Satisfacen las siguientes propiedades:

## 1. RELACIÓN DE ORTOGONALIDAD

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \rangle_\omega &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \omega(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

## 2. FÓRMULA DE RODRIGUES

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(-2)^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

que, mediante la regla de Leibniz permite obtener una expresión explícita:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

## 3. COEFICIENTE PRINCIPAL O DIRECTOR

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

## 4. SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.

El polinomio de Jacobi de orden  $n$  es solución de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos:

$$(x^2 - 1)y''(x) + [(2 + \alpha + \beta)x + \alpha - \beta]y'(x) - n[n + 1 + \alpha + \beta]y(x) = 0. \quad (3.1)$$

Cuando los parámetros cumplen la igualdad  $\alpha = \beta$  se denominarán **Polinomios de Gegenbauer** o **Polinomios Ultraesféricos**. Entre ellos se encuentran las siguientes subfamilias de polinomios:

- Polinomios de Chebyshev de primera especie ( $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ). Se denotan por  $T_n(x)$ . A estos les dedicaremos un estudio más profundo por la riqueza de sus propiedades.
- Polinomios de Chebyshev de segunda especie ( $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ). Se denotan por  $U_n(x)$ .
- Polinomios de Legendre ( $\alpha = \beta = 0$ ). Se denota por  $P_n(x)$ .

### 3.1.1. Polinomios de Chebyshev (Primera especie)

Como ya mencionamos en el apartado 3.1, se trata de un caso particular de los polinomios de Jacobi con  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ . Con lo cual nuestra función peso queda:

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Estos polinomios los introduciremos de un modo diferente para probar seguidamente su ortogonalidad respecto de la función peso anterior.

Empecemos haciendo uso de las identidades trigonométricas para deducir las ecuaciones explícitas de estos polinomios.

1. Usando la expresión del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\cos((n+1)t) = \cos(t)\cos(nt) - \sin(t)\sin(nt). \quad (3.2)$$

2. Usando la expresión del coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$\cos((n-1)t) = \cos(t)\cos(nt) + \sin(t)\sin(nt). \quad (3.3)$$

Sumando las ecuaciones (3.2) y (3.3), y despejando  $\cos((n+1)t)$ , se tendría que:

$$\cos((n+1)t) = 2\cos(t)\cos(nt) - \cos((n-1)t). \quad (3.4)$$

Como la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \cos : & [0, 2\pi] & \mapsto & [-1, 1] \\ & t & \mapsto & \cos(t) \end{array}$$

es una biyección de conjuntos, haciendo el cambio de variable  $x = \cos(t) \iff t = \arccos(x)$  en la ecuación (3.4), si denotamos por  $T_k(x) := \cos(k \arccos(x))$ , se tendría que  $T_k(x)$  es un polinomio en la variable  $x$  y obtendríamos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall x \in [-1, 1]. \quad (3.5)$$

Utilizando dicha fórmula de recurrencia (3.5), podemos calcular los primeros términos:

$$\circ n = 0 \implies T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = \cos(0) = 1.$$

$$\circ n = 1 \implies T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Y así sucesivamente, aplicando la recursividad:

$$\circ n = 2 \implies T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1.$$

$$\circ n = 3 \implies T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x.$$

$$\circ n = 4 \implies T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

$\circ \vdots$

$$\circ n = k \implies T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x).$$

Por tanto, se tiene que  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$\circ T_n$  es un polinomio de grado  $n$ .

$\circ$  El coeficiente principal es  $2^{n-1}$ .

$\circ T_n$  es par  $\iff n$  es par.

$T_n$  es impar  $\iff n$  es impar.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

[DEMOSTRACIÓN]: Procedemos por inducción:

$\circ$  Para  $k = 1$ ,  $T_k(x) = x$ , que es un polinomio de grado 1, su coeficiente principal es  $2^{1-1} = 1$  y además la función es impar como lo es  $k = 1$ .

$\circ$  Supongamos cierto para  $k \leq n$ :

$T_k$  es un polinomio de grado  $k$ , su coeficiente principal es  $2^{k-1}$ , y además su paridad coincide con la del número  $k$ :

$$\diamond \deg(T_k) = k.$$

$$\diamond T_k(x) = 2^{k-1}x^k + \dots$$

$$\diamond T_k(-x) = (-1)^k T_k(x).$$

$\circ$  Veamos para el caso  $k = n$ . Usando la *fórmula de recurrencia a tres términos* (3.5) y las hipótesis de inducción, obtenemos:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x(2^{n-1}x^n + \dots) + 2^{n-2}x^{n-1} + \dots = 2^n x^{n+1} + \dots$$

Luego es trivial que verifica las propiedades 1 y 2, pues claramente es un polinomio de grado  $n + 1$  y además su coeficiente principal es  $2^n = 2^{(n+1)-1}$ . Además, usando otra vez la *fórmula de recurrencia a tres términos* se comprueba que conserva la simetría:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x) &= -2xT_n(-x) - T_{n-1}(-x) = -2x(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) \\ &= (-1)^{n+1} (2xT_n(x) - T_{n-1}(x)) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Con esto concluimos por inducción que las tres propiedades se verifican.

Estamos en condiciones para dar una definición de los polinomios de Chebyshev de primera especie.

**Definición 3.1.1 (Polinomios de Chebyshev de primera especie)** *La sucesión de polinomios  $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$  que verifican la fórmula de recurrencia (3.5) con las condiciones iniciales  $T_0 \equiv 1, T_1(x) = x$  se denominan polinomios de Chebyshev de primera especie.*

Además, si  $x \in [-1, 1]$ , los polinomios de Chebyshev se representa por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Denotamos por  $t_n(x) := \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$  al  $n$ -ésimo polinomio mónico de dicha sucesión.

Además otra representación de  $T_n(x), |x| > 1$ , se describe en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.1** *Sea  $x \in \mathbb{C}, |x| > 1$ . Entonces, el polinomio de Chebyshev de primera especie puede ser representado mediante la expresión:*

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n - (x - \sqrt{x^2 - 1})^n], \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.6)$$

Desarrollando (3.6), usando el binomio de Newton, se tiene la fórmula explícita de los polinomios de Chebyshev de primera especie:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\sqrt{x^2 - 1})^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-1)^k (\sqrt{x^2 - 1})^k \\ &= \dots = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k. \end{aligned}$$

Veamos ahora que  $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , definidos en el (3.1.1), son efectivamente una sucesión de polinomios ortogonales. Para ello, es suficiente hacer el cambio de variable  $x = \cos \theta$  en las integrales correspondientes.

**Proposición 3.1.2 (Ortogonalidad)** *Para todos  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ , los polinomios definidos en 3.1.1 cumplen que:*

$$\langle T_n, T_m \rangle_{\omega} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & n = m > 0, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Por tanto, además:

$$\|T_n\|_{\omega} = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n = m = 0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & n = m > 0. \end{cases}$$

A continuación, daremos más propiedades de los polinomios ortogonales de Chebyshev: *la localización de ceros y la norma uniforme mínima.*

**Proposición 3.1.3 (Localización de ceros del polinomio de Chebyshev)**

*El  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  tiene  $n$  ceros simples en los puntos:*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

*todos ellos en el abierto  $(-1, 1)$ .*

[DEMOSTRACIÓN]: En  $(-1, 1)$  los polinomios de Chebyshev se representan por:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Luego, los posibles ceros de  $T_n$  en  $(-1, 1)$  verifican:

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff \cos(n \arccos(x)) = 0 \iff n \arccos(x) \in \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, observamos que para  $k = 0, \dots, n-1$ , se tiene

$\left\{x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \dots, x_{n-1} = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right\}$ , que es un conjunto de  $n$  ceros distintos para  $T_n$ . Aplicando el *teorema fundamental de álgebra*,  $T_n$  tiene exactamente



$n$  ceros en  $\mathbb{C}$ , luego el número de ceros de  $T_n$  en  $(-1, 1)$  es a lo sumo  $n$ . Por tanto, concluimos que

$C_{T_n} = \left\{ x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \dots, x_{n-1} = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \right\}$  constituyen todos los ceros del polinomio ortogonal de Chebyshev de grado  $n$ .

**Proposición 3.1.4 (Máximos del polinomio de Chebyshev)** *El enésimo polinomio mónico de Tchebyshev  $t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$  verifica que:*

$$\|t_n\|_{[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}.$$

Además, dicho máximo se alcanza en los puntos:

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n,$$

situados en el abierto  $(-1, 1)$ .

[DEMOSTRACIÓN]: .

1. COTA SUPERIOR

Basta usar la definición de los polinomios de Chebyshev:

$$\|t_n\|_{[-1,1]} = \frac{\|T_n\|_{[-1,1]}}{2^{n-1}} = \frac{|\cos(n \arccos(x))|}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. EXTREMOS

Veamos que los puntos en los que se alcanzan dicho máximo son efectivamente los citados.

$$\begin{aligned} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} &\iff |T_n(x)| = 1 \iff |\cos(n \arccos(x))| = 1 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Pero teniendo en cuenta la periodicidad de la función  $\cos(x)$ , se tiene la igualdad de conjuntos:

$$\left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) / k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

El lema anterior nos ayudará a demostrar el siguiente teorema de suma importancia.

**Teorema 3.1.1 (Norma uniforme mínima)** *La norma uniforme (en el intervalo  $[-1, 1]$ , denotado por  $\|\cdot\|_{[-1,1]}$ ) de un polinomio de Chebyshev mónico de grado  $n$  es mínima en relación a todos los polinomios mónicos de grado  $n$ . Esto es:*

$$\forall P_n(x) = x^n + \dots, \|P_n\|_{[-1,1]} \geq \|t_n\|_{[-1,1]},$$

donde la desigualdad es estricta salvo el caso de igualdad  $P_n \equiv t_n$ .

De manera equivalente, se tiene:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \min_{P_n=x^n+\dots} \|P_n\|_{[-1,1]} = \|t_n\|_{[-1,1]}. \quad (3.7)$$

El significado de esta proposición consiste en que los polinomios ortogonales de Chebyshev mónicos de grado  $n$  tienen la menor desviación en  $[-1, 1]$  respecto de la métrica uniforme.

[DEMOSTRACIÓN]: Sea  $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \neq t_n(x)$  un polinomio mónico arbitrario de grado  $n$ . Supongamos que, por reducción al absurdo:

$$\|P_n\|_{[-1,1]} \leq \|t_n\|_{[-1,1]}.$$

Está claro que existe  $l_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$  tal que  $P_n(x) = t_n(x) + l_{n-1}(x)$ . Consideremos ahora  $\left\{x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\}_{k=0}^{n-1}$ . Evaluando en dichos puntos obtenemos que:

$$P_n(x_k) = t_n(x_k) + l_{n-1}(x_k) \implies l_{n-1}(x_k) = P_n(x_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}. \quad (3.8)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad (3.8) por  $(-1)^k$  obtendríamos, usando nuestra hipótesis:

$$(-1)^k l_{n-1}(x_k) = (-1)^k P_n(x_k) + \frac{1}{2^{n-1}} = \|t_n\|_{[-1,1]} + (-1)^k P_n(x_k).$$

Acotando la expresión anterior por la desigualdad triangular y usando nuestra hipótesis:

$$(-1)^k l_{n-1}(x_k) = \|t_n\|_{[-1,1]} + (-1)^k P_n(x_k) \geq \|t_n\|_{[-1,1]} - \|P_n\|_{[-1,1]} > 0, k = 0, \dots, n-1. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) nos dice que:

$$(-1)^k l_{n-1}(x_k) > 0 \implies \begin{cases} l_{n-1}(x_k) > 0, & k \text{ par}, \\ l_{n-1}(x_k) < 0, & k \text{ impar}. \end{cases}$$

Esto viene a decir que el polinomio  $l_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$  cambia de signo al menos  $n$  veces en  $[-1, 1]$ , concretamente en cada uno de los subintervalos  $(x_k, x_{k+1}), k = 0, \dots, n-1$ . Por el teorema de Bolzano, para cada  $k, \exists c_k \in (x_k, x_{k+1}) : l_{n-1}(x_k) = 0, k = 0, \dots, n-1$ . Luego se tendría un polinomio de grado a lo sumo  $n-1$  que se anula  $n$  veces en  $[-1, 1]$ , de donde concluimos que  $l_{n-1}(x) \equiv 0 \implies t_n \equiv P_n \#$ . Esto último es un absurdo puesto que supusimos  $t_n \neq P_n$ . Así concluimos que:

$$\|P_n\|_{[-1,1]} \geq \|t_n\|_{[-1,1]}.$$

### 3.2. Polinomios de Laguerre

El intervalo de soporte en este caso es  $(0, \infty)$ , es decir, semi- infinito. La función peso depende de un parámetro,  $\alpha > -1$ , siendo  $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}, x \in (0, \infty)$ . El  $n$ -ésimo polinomio de Laguerre se denota por  $L_n^\alpha$ .

Verifican las siguientes propiedades:

#### 1. RELACIÓN DE ORTOGONALIDAD

$$\langle L_n^\alpha(x), L_m^\alpha(x) \rangle_\omega = \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) \omega(x) dx = \begin{cases} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

#### 2. FÓRMULA DE RODRIGUES

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{n! x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}],$$

de donde, utilizando la fórmula de Leibniz:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n - k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

### 3. COEFICIENTE PRINCIPAL

$$k_n^\alpha = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

### 4. SOLUCIÓN DE E.D.O.

El  $n$ -ésimo polinomio de Laguerre es solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0.$$

## 3.3. Polinomios de Hermite

Fueron utilizados por Laplace, en su “*Tratado de Mecánica Celeste*”. También fueron objeto de estudio para Chebyshev y Hermite, cuyo nombre se empleó para bautizarlos. La notación habitual es, para estos polinomios,  $H_n(x)$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Cumplen las siguientes propiedades:

#### 1. RELACIÓN DE ORTOGONALIDAD

$$\langle H_n(x), H_m(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\omega(x)dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}2^n n!, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

#### 2. GENERACIÓN POR LA FÓRMULA DE RODRIGUES

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

Utilizando la regla de Leibniz obtenemos que:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!}.$$

#### 3. COEFICIENTE PRINCIPAL

$$k_n = 2^n.$$

Resumimos las principales propiedades de los polinomios ortogonales clásicos en la siguiente tabla.

Tipo	Notación	Dominio	Peso $\omega(x)$	Cte. principal	
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha(1-x)^\beta,$ $\alpha, \beta > -1$	$\frac{1}{2^n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}$	
	Chebyshev 1		$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{2^n} \binom{2n-1}{n}$
	Chebyshev 2		$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2^n} \binom{2n+1}{n}$
	Gegenbauer		$C_n(x)$	$(1-x^2)^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{1}{2^n} \binom{2n+2\alpha}{n}$
	Legendre		$P_n(x)$	1	$\frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$
Laguerre	$L_n^\alpha(x)$	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	
Hermite	$H_n(x)$	$\mathbb{R}$	$e^{-x^2}$	$2^n$	

Cuadro 3.1: Principales tipos de polinomios ortogonales y sus propiedades.





# Capítulo 4

## Aplicación a la interpolación

Una de las aplicaciones de los polinomios ortogonales es el uso de sus ceros como nodos de interpolación. Empezaremos por describir brevemente el problema de interpolación de Lagrange. Para más detalles, véanse las referencias [1] y [2].

Queremos aproximar funciones mediante polinomios. El problema consiste en, dado un vector  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  de nodos y una función  $f$ , con el correspondiente vector de imágenes  $y = (y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n))^t$ , hallar el polinomio  $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , o, lo que es lo mismo, el vector coeficientes  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)^t$ ,  $p_n \in \mathbb{P}$ , de manera que:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 & \iff a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0, \\ p_n(x_1) = y_1 & \iff a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1, \\ & \vdots \\ p_n(x_n) = y_n & \iff a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

De manera matricial, este último sistema quedará:

$$Ma = y. \tag{4.1}$$

Siendo:

$$M = VAND[x_0, x_1, \dots, x_n] = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Ésta última es una matriz de Vandermonde, y como además los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$

son distintos,  $\det(M) = \det(VAND[x_0, x_1, \dots, x_n]) = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \neq 0$ , y concluimos por el teorema de Rouché- Frobenius que existe una única solución para el sistema (4.1). Luego, al ser  $\mathbb{P}_n$  un espacio vectorial isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , tendríamos que el polinomio  $p_n(x)$  también es único.

Ahora bien, sabemos que el polinomio obtenido  $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  interpola a la función  $f(x)$  en los puntos nodos escogidos  $x_0, \dots, x_n$ . Nos interesa estudiar cómo se comporta dicho polinomio en el resto de los puntos, y para ello, procedemos a estimar el error que comete nuestra aproximación, es decir, hallar el “tamaño” de  $f(x) - p_n(x)$ , que viene dado por la norma del máximo. Nuestra meta es encontrar una matriz triangular de nodos, que corresponderá a una sucesión de polinomios, de modo que dicha sucesión converja a la función  $f$  uniformemente, esto es, si denotamos  $x_{i,j}$  al  $j$ -ésimo nodo del polinomio interpolador de grado  $i$ :

$$\begin{pmatrix} x_{0,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_{1,0} & x_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,0} & x_{n,1} & \cdots & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}.$$

De modo que  $p_n \rightarrow f$  uniformemente, o lo que es equivalente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ .

Utilizamos para estimar el error, un resultado conocido: la fórmula de Lagrange para estimar el error.

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Donde  $a < \epsilon(x) < b$ . Tomando normas en ambos lados de la igualdad, encontramos la siguiente cota del error:

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty = \frac{\|f^{(n+1)}(\epsilon(x))\|_\infty}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_\infty \leq \frac{M_n}{(n+1)!} \left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_\infty. \quad (4.2)$$

Siendo  $M_n = \|f^{(n+1)}(\epsilon(x))\|_\infty$ .

De esta última observamos que el término que depende únicamente de la elección de nodos es  $\left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_\infty$ , pues la otra depende de cada función concreta. De manera que una buena elección de nodos disminuirá dicho término, y consiguientemente, el error. Cuanto mejor es la elección de nodos, mejor aproximación conseguiremos para la función  $f(x)$  y por tanto mayor rapidez para la convergencia. Aquí es donde entran

en juego los polinomios ortogonales.

Este término calcula la norma del máximo de un cierto polinomio mónico de grado  $n + 1$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que estamos trabajando en el intervalo  $[-1, 1]$ . Sabemos que el polinomio de Chebyshev mónico de grado  $n + 1$  es el que tiene la norma del máximo mínima entre todos los polinomios mónicos de grado  $n + 1$ . Por tanto, si tomamos los nodos como los ceros del  $n + 1$ -ésimo polinomio de Chebyshev, es decir, para cada  $i$ ,  $x_i = \cos\left(\frac{2i + 1}{2(n + 1)}\right) \in C_{T_{n+1}}$ , la igualdad (4.2) quedará:

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty = \frac{\|f^{(n+1)}(\epsilon(x))\|_\infty}{(n + 1)!} \left\| \prod_{i=0}^n \left( x - \cos\left(\frac{2i + 1}{2(n + 1)}\right) \right) \right\|_\infty,$$

y como los  $x_i = \cos\frac{2i + 1}{2(n + 1)}$  son los ceros del polinomio  $(n + 1)$ -ésimo, se tendrá por definición que:

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty = \frac{\|f^{(n+1)}(\epsilon(x))\|_\infty}{(n + 1)!} \|t_n\|_\infty = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n + 1)! 2^n}.$$

Esta última cota parece muy razonable para nuestro propósito de controlar el error de aproximación. En la práctica, se observa que obtiene resultados realmente interesantes. Ilustraremos lo anterior con un ejemplo: utilizando estos nodos se obtiene una aproximación la función de Runge  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Dado que utilizamos 9 nodos en cada caso, denotamos por  $p_8(f)$  el polinomio obtenido por interpolación y por  $q_8(f)$  usando los nodos de Chebyshev. Los gráficos mostrados a continuación han sido realizados con la ayuda del programa *Mathematica*.

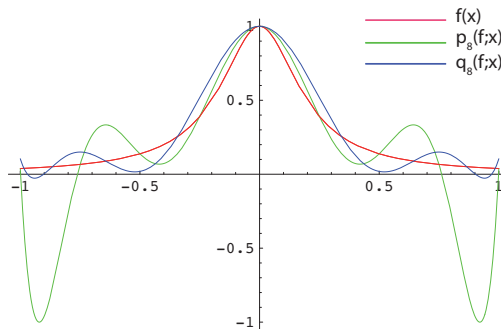


Figura 4.1: Comparación entre los polinomios interpoladores obtenidos mediante dos clases de nodos, equiespaciados y nodos de Chebyshev.

La Figura 4.1 refleja la enorme calidad de aproximación mediante el uso de los ceros de los polinomios de Chebyshev como nodos. Observamos claramente que  $p_8(f)$  es una buena aproximación en el centro del intervalo, pero ésta va empeorando conforme nos acercamos a los extremos:  $-1$  y  $1$ . El polinomio  $q_8(f)$ , por su parte, realiza una buena aproximación tanto en los extremos como en los centros del intervalo. Podemos observar que en el centro del intervalo es ligeramente mejor usando los nodos equiespaciados que los de Chebyshev, pero dicha “pequeña ventaja” no compensa la mala aproximación en los extremos.

Si representamos los errores de aproximación, véase la Figura 4.2, observamos aún mejor este comportamiento.

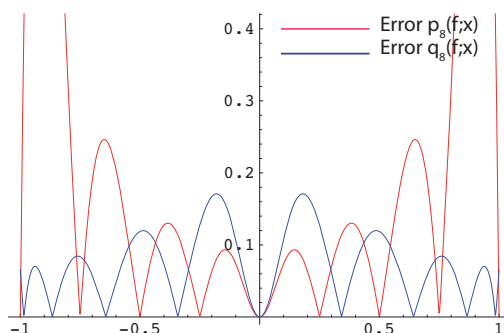


Figura 4.2: Comparación entre los errores de los polinomios interpoladores con nodos equiespaciados y nodos de Chebyshev para aproximar la función de Runge.

Observamos que los errores del polinomio  $q_8(f)$  se pueden acotar y se distribuyen más o menos uniformemente a lo largo del intervalo  $[-1, 1]$ . Mientras tanto, los errores de aproximación de  $p_8(f)$  se disparan conforme nos acercamos a los extremos.

# Capítulo 5

## Aplicación a las fórmulas de cuadratura

El contenido de este capítulo trata sobre las denominadas fórmulas de cuadratura. Para una mayor información sobre este tema puede consultarse, por ejemplo, la referencia [2].

En los cursos elementales de análisis hemos utilizado las sumas de Riemann para aproximar las integrales definidas. Esto es, dado una *función integrable*  $f$  en un intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ :

$$\int_a^b f(x)dx = S_n(f) \approx \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}),$$

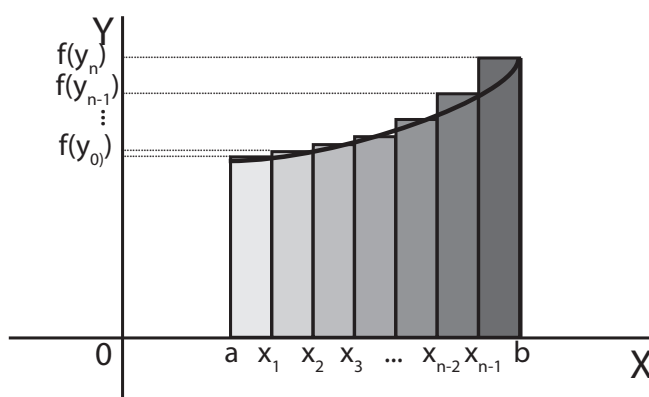


Figura 5.1: Idea de la suma de Riemann.

donde  $\{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$  constituye una partición del intervalo  $(a, b)$ , y  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , una elección arbitraria de  $n$  puntos. Al aumentar  $n$ , la aproximación se vuelve mejor hasta converger al valor de la integral cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Las fórmulas de cuadratura tienen el mismo objetivo que esta última: aproximar el valor de una integral definida.

Para su introducción nos basaremos en un caso más general, incluyendo una función peso  $\omega(x)$  como factor en el integrando, cuya utilidad se basa en absorber las posibles singularidades del integrando. Es decir, estudiaremos aproximar la integral

$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$ . Esta última recibe el nombre de *integral de Riemann-Stieltjes*.

La función peso  $\omega$  ha de verificar ciertas propiedades:

1.  $\omega(x) \geq 0$ , c.t.p..

2.  $\int_a^b \omega(t)dt < \infty$ .

3. Además queremos que permita integrar cualquier polinomio, esto es,

$$\left| \int_a^b f(t)\omega(t)dt \right| < \infty, \forall f \in \mathbb{P}. \text{ Para ello, es equivalente exigir que los momentos de orden } s, \mu_s, \text{ sean finitos, esto es, } \mu_s := \left| \int_a^b t^s \omega(t)dt \right| < \infty, \forall s \in \mathbb{Z}^+.$$

Empecemos nuestro estudio dando una definición.

**Definición 5.0.1 (Fórmula de cuadratura lineal)** *Es una fórmula de cuadratura del tipo:*

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(t_k).$$

*Luego podemos escribir la integral como:*

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = I_n(f) + E_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(t_k) + E_n(f). \quad (5.1)$$

La fórmula (5.1) nos proporciona una aproximación de la integral:

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt \approx \sum_{k=1}^n \omega_k f(t_k).$$

Claramente, la bondad de ésta última depende del término de error  $E_n(f)$ . Un buen criterio para evaluar la bondad de una fórmula de cuadratura consiste en valorar el grado máximo de polinomios que es capaz de integrar exactamente. Nuestro objetivo es conseguir  $E_n(f) = 0$  para los polinomios de hasta cierto grado. Esta idea se recoge en la siguiente definición:

**Definición 5.0.2 (Exactitud de la fórmula de cuadratura)** *La fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud o precisión mayor o igual que  $d$  si  $E_n(f) = 0, \forall f \in \mathbb{P}_d$ .*

Una vez hecho esto, podremos caracterizar un caso particular y muy importante de las fórmulas de cuadratura, aquellas que se consiguen por medio de la interpolación. Sea  $P_{n-1}(f; t_1, \dots, t_n; t)$  el polinomio interpolador de grado  $n - 1$  de  $f$  en los nodos  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$  y sea  $G_n(f)$  el error. Entonces:

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt = \int_a^b (P_{n-1}(t) + G_n(f))\omega(t)dt = \int_a^b P_{n-1}(t)\omega(t)dt + E_n(f).$$

**Definición 5.0.3 (Fórmula de cuadratura interpolatoria)** *Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura. Decimos que es interpolatoria si es obtenida integrando el polinomio interpolador de  $f$  en  $n$  nodos del intervalo.*

Históricamente, las primeras fórmulas interpolatorias consideradas fueron las llamadas fórmulas de Newton- Cotes, que corresponden al caso particular cuando  $\omega \equiv 1$  y los nodos son equiespaciados. Los casos más conocidos son los casos  $n = 2$  y  $n = 3$ , que reciben el nombre de *Regla del trapecio* y la *Regla de Simpson*, respectivamente.

Para deducir los coeficientes  $\omega_k$ , recordemos la expresión del polinomio interpolador:

$$P_{n-1}(f; t_1, \dots, t_n; t) = \sum_{k=1}^n \rho_k(t)\omega(t),$$

donde  $\rho_k(t) = \prod_{l=1, l \neq k}^n \left( \frac{t - t_l}{t_k - t_l} \right)$ .

Luego deducimos que  $\omega_k = \int_a^b \rho_k(t)\omega(t)dt, k = 1, \dots, n$ . Podemos establecer una caracterización para este tipo de fórmula.

**Proposición 5.0.1 (Caracterización de las interpolatorias)** Dada una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$ , son equivalentes:

1.  $I_n(f)$  es interpolatoria.
2. El grado de exactitud de  $I_n(f)$  es al menos  $n - 1$ .

[DEMOSTRACIÓN]: Probemos la equivalencia.

1)  $\implies$  2): Sabemos que:

$$\forall f \in \mathbb{P}_{n-1}, P_{n-1}(f; t) = f \implies \int_a^b f(t)\omega(t)dt = \int_a^b P_{n-1}(t) \implies E_n(f) = 0.$$

2)  $\implies$  1): Basta ver que  $\omega_r = \int_a^b \rho_r(t)\omega(t)dt, r = 1, \dots, n$ . Sabemos que la fórmula tiene grado de exactitud mayor o igual que  $n - 1$ . Para cada  $r = 1, \dots, n$  tomemos  $f(t) = \rho_r(t)$  y por exactitud se tiene que:

$$\int_a^b \rho_r(t)\omega(t)dt = \sum_{k=1}^n \omega_k \rho_r(t_k) = \omega_r.$$

Notemos además que para la demostración de este resultado no hemos utilizado ninguna restricción sobre la elección de los nodos, de aquí que ésta es independiente de ellos.

Afrontamos el reto de mejorar el grado de exactitud obtenido en la proposición, y para ello, pondremos condiciones sobre los nodos  $t_1, \dots, t_n$  con el fin de obtener un grado de exactitud  $d > n - 1$ . Definimos  $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (t - t_i)$ , siendo  $\{t_i\}_{i=1}^n$  el conjunto de nodos. La siguiente proposición da respuesta a nuestro problema.

**Proposición 5.0.2** Dada una fórmula de cuadratura obtenida por interpolación, son equivalentes:

1.  $\omega_n(t)$  satisface la ecuación  $\int_a^b \omega_n(t)p(t)\omega(t)dt = 0, \forall p \in \mathbb{P}_{k-1}, k = 1, \dots, n$ .
2. El grado de exactitud de la fórmula es exactamente  $n - 1 + k, k = 1, \dots, n$ .

[DEMOSTRACIÓN]: Probemos la equivalencia.

1)  $\implies$  2) :

Sea  $p \in \mathbb{P}_{n-1+k}$ . Por el algoritmo de la división en el anillo de los polinomios



concluimos que:

$$\exists q \in P_{k-1}, r \in P_{n-1} : p(x) = q(x)\omega_n(x) + r(x).$$

Apoyándonos en esta división podemos concluir que:

$$\int_a^b p(t)\omega(t)dt = \int_a^b \omega_n(t)q(t)\omega(t)dt + \int_a^b r(t)\omega(t)dt. \quad (5.2)$$

Ahora bien, el primer término de (5.2) es claramente nulo mientras que el segundo podemos escribirlo de otra manera, utilizando la interpolación. Supongamos que  $P_{n-1}(r(t); t) = \sum_{i=1}^n r(t_i)\rho_i(t)$  es el polinomio interpolador de  $r(t) \in \mathbb{P}_{n-1}$ , entonces,

$$\int_a^b r(t)\omega(t)dt = \int_a^b p_{n-1}(r(t); t)dt = \sum_{i=1}^n r(t_i) \int_a^b \rho_i(t)\omega(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega_i r(t_i).$$

Ahora utilizando la definición del resto:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i r(t_i) = \sum_{k=1}^n \omega_k [p(t_k) - q(t_k)\omega_n(t_k)] = \sum_{k=1}^n \omega_k p(t_k) = 0.$$

Donde la última igualdad se concluye por  $\omega_n(t_k) = 0, k = 1, \dots, n$ .

2)  $\implies$  1) :

Sea  $p \in \mathbb{P}_{k-1} \implies p\omega_n \in \mathbb{P}_{n-1+k}$ , luego por exactitud se tiene que:

$$\int_a^b \omega_n(t)p(t)\omega(t)dt = \sum_{k=1}^n \omega_k \omega_n(t_k)p(t_k) = 0,$$

donde concluimos utilizando otra vez la definición de  $\omega_n$ .

Este teorema nos dice que si queremos obtener grados de exactitud mayores tendríamos que imponer condiciones sobre los nodos  $\{t_1, \dots, t_n\}$ . Además, nos da información para saber el mayor grado de exactitud que podemos obtener. Concluimos que, cualesquiera  $n$  nodos que tomemos, el grado de exactitud es como máximo  $2n - 1$ . Esto se debe a que si fuera exacto para  $2n$ , entonces 2) se verificaría para  $k = n$ . Como  $\omega_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ ,  $\int_a^b \omega_n^2(t)\omega(t)dt = 0$ , es decir,  $\langle \omega_n, \omega_n \rangle_\omega = 0$ , por tanto,  $\omega_n \perp \omega_n$  respecto a la función

peso no negativa  $\omega$ , lo cual es un absurdo.

Trataremos de conseguir este máximo nivel de exactitud,  $d = 2n - 1$ . Aplicando la equivalencia, se ha de verificar que:

$$\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}, \int_a^b \omega_n(t)p(t)\omega(t) dt = 0 \iff \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}, \langle \omega_n, p \rangle_\omega = 0.$$

Esta condición nos indica que en realidad  $\omega_n(t) = \pi_n(t; \omega)$  es el enésimo polinomio ortogonal respecto a la función peso  $\omega(t)$ . Esto significa, por construcción, que los nodos que debemos tomar son los ceros del enésimo polinomio ortogonal. La fórmula de cuadratura con el grado de precisión, máxima,  $2n - 1$ , recibe el nombre de *cuadratura gaussiana*, pues fue Gauss quien primero descubrió para el caso  $\omega \equiv 1$  y más tarde Christoffel lo extendió. Además, podemos hallar la expresión de los coeficientes  $\omega_k$ :

$$\omega_k = \int_a^b \frac{\pi_n(t; \omega)}{(t - t_k)\pi_n'(t_k; \omega)} dt, \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Concluimos el capítulo comentando algunas características de la cuadratura gaussiana.

1. Los nodos de interpolación  $t_k$  son distintos, fruto de que éstos son los ceros del polinomio ortogonal correspondiente.
2. Los pesos  $\omega_k$  son todos positivos. Esto último se prueba fácilmente gracias a una observación realizada por Stieltjes. En efecto, como  $\rho_j^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$  y el grado de exactitud es  $2n - 1$ :

$$\int_a^b \rho_j^2 \omega(t) dt = \sum_{k=1}^n \omega_k \rho_j^2(t_k) = \omega_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

De esta última igualdad se observa claramente que  $\omega_j$  son mayores que cero pues constituyen la integral de una función no negativa.

3. Convergencia uniforme para toda función continua. La fórmula de cuadratura de Gauss converge para cualquier función continua. En realidad, esto es una consecuencia del *teorema de aproximación de Weierstrass*. Este último permite deducir que si  $p_{2n-1}(f; \cdot)$  denota el polinomio de grado  $2n - 1$  que mejor aproxima a  $f$  en  $[a, b]$  en el sentido de la norma uniforme, entonces:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_{2n-1}\|_\infty = 0$ .

Para justificarlo, bastaría estudiar el comportamiento asintótico del error  $E_n(f)$ . Teniendo en cuenta que el grado de exactitud es  $d = 2n - 1$ , se sigue que, utilizando la definición del error:

$$|E_n(f)| = |E_n(f - p_{2n-1})| = |I(f - p_{2n-1}) - I_n(f - p_{2n-1})|.$$

Aplicando la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |E_n(f)| &\leq |I(f - p_{2n-1})| + |I_n(f - p_{2n-1})| \\ &= \int_a^b |f(t) - p_{2n-1}(f; \cdot)| dt + \sum_{k=1}^n \omega_k |f(t_k) - p_{2n-1}(f; t_k)|, \end{aligned}$$

donde esta última nos da una cota del error:

$$|E_n(f)| \leq \|f - p_{2n-1}\|_\infty \left[ \int_a^b \omega(t) dt + \sum_{k=1}^n \omega_k \right] \rightarrow 0.$$

El último razonamiento se ha hecho en virtud de la positividad de los  $\omega_k$ , establecidos en la propiedad 2) y de la integral  $\int_a^b \omega(t) dt$ , que se trata del área que encierra la función peso  $\omega$  en el intervalo  $(a, b)$ .

Para completar el capítulo incluimos un ejemplo práctico. Utilizaremos las fórmulas de cuadratura para aproximar ciertas integrales.

Sean  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ , y sea  $f(x)$  la función a integrar. Vamos a aproximar  $I_\omega(f) = \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  por medio de

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(t_k) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right),$$

la fórmula de cuadratura de Gauss- Chebyshev. Haremos para cada función una tabla con los errores. Los cálculos han sido realizados con la ayuda de *MatLab*.

○  $f(x) = e^x$

Los resultados obtenidos son magníficos: con sólo 10 puntos el error es despreciable para el ordenador. Sin embargo, esto invita pensar que la razón

$n$	$ I_\omega(f) - I_n(f) $
2	0,0155606
4	$5,92 \cdot 10^{-7}$
6	$3,14 \cdot 10^{-12}$
8	$4,44 \cdot 10^{-16}$
10	0.

Cuadro 5.1: Tabla de errores de la fórmula gaussiana para  $f(x) = e^x$ .

para dicha convergencia es debido a que  $f(x) = e^x \in C_\infty$  es una función regular y muy suave.

Probemos con una función que no es derivable para ver su bondad.

◦  $f(x) = |x|$

$n$	$ I_\omega(f) - I_n(f) $
4	0,0523443
8	0,0129091
16	0,00321638
30	0,000914145
60	0,000228481
80	0,000128516
100	0,0000822491

Cuadro 5.2: Tabla de errores de la fórmula Gaussiana.

A pesar de que no sea una función derivable siquiera, la convergencia también se da en este caso, aunque de forma más lenta. Es decir, necesitamos tomar un mayor número de puntos para obtener errores cada vez menores. No obstante, podemos concluir que la estimación es bastante buena.

# Capítulo 6

## Aplicación física: interpretación electrostática de ceros

En este capítulo trataremos de aplicar lo aprendido sobre los polinomios ortogonales para estudiar un tema conocido de la física: el campo eléctrico. En un curso elemental de física, se han introducido las primeras nociones de fuerza eléctrica entre dos cargas  $q_1, q_2$  de la forma:

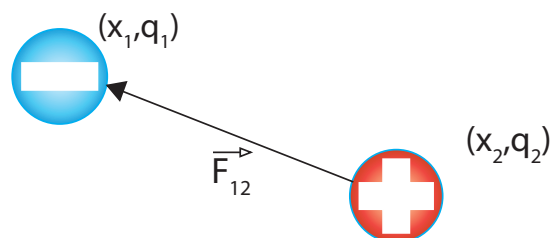


Figura 6.1: Fuerza electrostática entre dos cargas.

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = k \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|^2},$$

siendo  $k$  la constante de Coulomb,  $r$  la distancia entre ambas cargas. Dicha fuerza lleva asociado un potencial eléctrico, dado por la expresión:

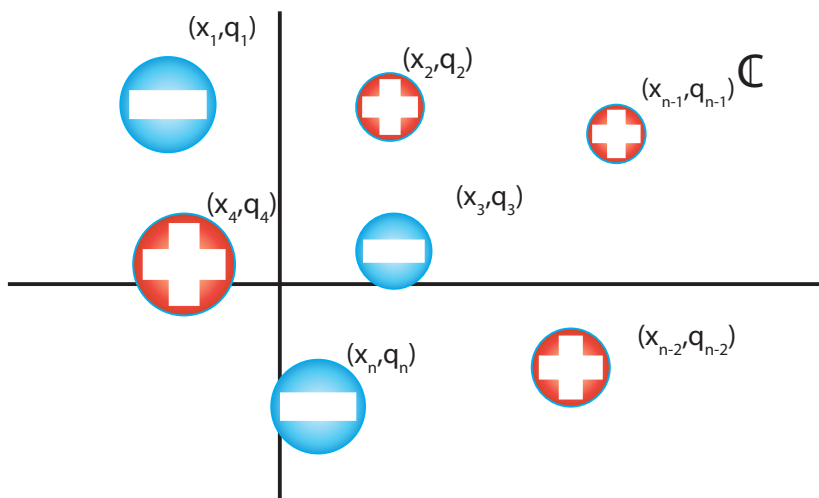


Figura 6.2:  $n$  cargas distribuidas aleatoriamente en el plano complejo.

$$V_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r} = k \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|},$$

Ahora bien, supongamos que nuestro estudio se desarrolla en un espacio donde reina un modelo diferente, en el cual la expresión de la fuerza eléctrica entre dos cargas  $q_1, q_2$  (con posiciones  $x_1$  e  $x_2$  respectivamente) es, en módulo:

$$|\vec{F}_{12}| = k \frac{|q_1 q_2|}{|x_1 - x_2|},$$

siendo su correspondiente potencial asociado:

$$V_{12} = -k q_1 q_2 \log |x_1 - x_2|.$$

Trabajaremos en el plano complejo. Para simplificar nuestro estudio, normalizando si fuese necesario, obtendríamos el potencial como:

$$V_{12} = -q_1 q_2 \log |x_1 - x_2|.$$

Si en lugar de 2 disponemos de  $n$  cargas  $q_1, \dots, q_n$ , con sus respectivas posiciones  $x_1, \dots, x_n$ , podemos establecer la energía mutua del sistema como:

$$E(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} v_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_i q_j \log \frac{1}{|x_i - x_j|} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_i q_j \log |x_i - x_j|.$$

A continuación, describiremos algunos de los problemas clásicos planteados en las condiciones anteriormente citadas y utilizaremos los polinomios ortogonales clásicos para estudiar uno de ellos. El contenido del siguiente epígrafe está basado en el trabajo original de T. J. Stieltjes [5], así como en la revisión realizada posteriormente por G. Szegő [6] y G. Valent – W. Van Assche [7].

### 6.1. El problema de Stieltjes

Supongamos que dejamos  $n$  cargas unitarias ( $q_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$ ) moverse libremente en el intervalo  $[-1, 1]$ , en cuyo extremo situamos dos cargas positivas  $a, b > 0$ . Definimos la energía total como la suma de la energía mutua entre las cargas  $q_1, \dots, q_n$  y la energía debida a los extremos:

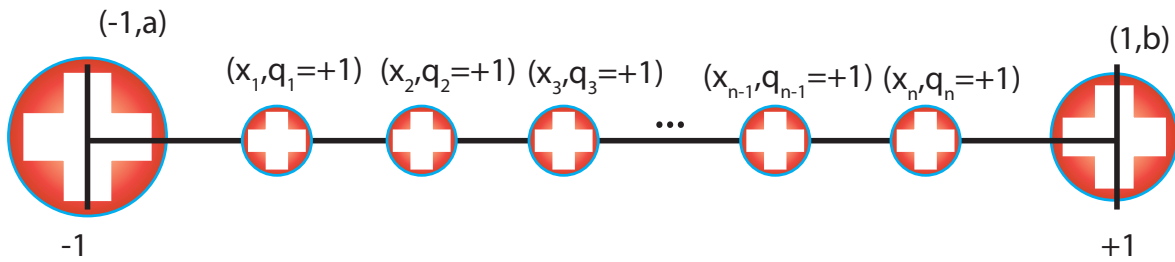


Figura 6.3:  $n$  cargas positivas en  $[-1, 1]$ .

$$\begin{aligned}
 E_T(x_1, \dots, x_n) &= E(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n v_{ia} + \sum_{i=1}^n v_{ib} \\
 &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log |x_i - x_j| - a \sum_{i=1}^n \log |x_i - 1| - b \sum_{i=1}^n \log |x_i + 1|.
 \end{aligned}$$

Nuestro propósito es describir las posiciones de equilibrio de nuestro sistema. Esto es, trataremos buscar las posiciones  $x_1, \dots, x_n$  para las cuales se verifican que la energía total es mínima. Esto es, queremos hallar  $\min_{(x_1, \dots, x_n) \in K} E_T(x_1, \dots, x_n)$ . Si ordenamos las cargas, podemos observar que el subconjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  donde se busca dicho mínimo es:

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) / -1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

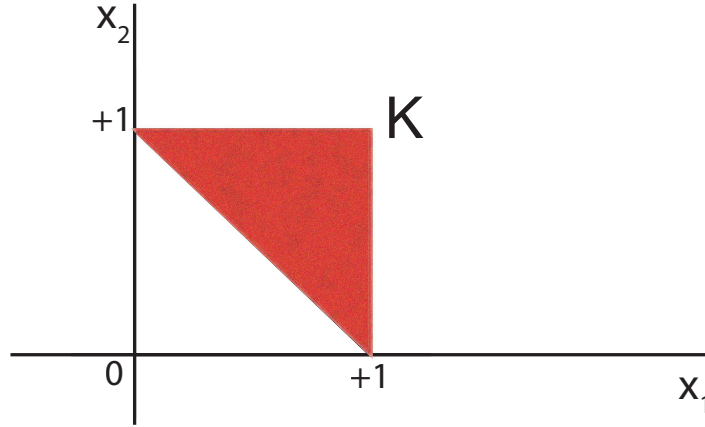


Figura 6.4: Subconjunto  $K$  en el caso  $n = 2$ .

No es difícil justificar la existencia de dicho mínimo. Para ello, es equivalente probar que la función  $L(x_1, \dots, x_n) = e^{-E_T(x_1, \dots, x_n)}$  alcanza un máximo absoluto en  $K$ . Pero esto es evidente dado que:

1.  $K$  es compacto, al ser cerrado y acotado.
2.  $L(x_1, \dots, x_n)$  es una función continua en  $K$ .

Luego existirá al menos una  $n$ -upla:  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in K$  tal que:

$$E_T(x_1^*, \dots, x_n^*) = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in K} E_T(x_1, \dots, x_n).$$

Observamos que, de hecho, el máximo de  $L$ , es decir, el mínimo de nuestra energía  $E_T$ , no se alcanza en la frontera de  $K$ . Esto es debido a que:

- Si  $\exists i \neq j : x_i = x_j \implies L(x_1, \dots, x_n) = 0$ .
- Si  $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_i| = 1 \implies E_T(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Luego ha de alcanzarse en el interior de  $K$ . Esto implica que en realidad hablamos de un mínimo absoluto y a la vez local. Por tanto, en dicho punto  $(x_1, \dots, x_n)$  el vector gradiente de  $E_T$  ha de ser nulo, esto se traduce en:

$$\nabla E_T = 0 \iff \frac{\partial E_T}{\partial x_k} = 0, \forall k = 1, \dots, n. \quad (6.1)$$



Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{|x-y|} = -\frac{1}{x-y}$ , sustituyendo esto en la igualdad (6.1) obtenemos:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} E_T(x_1^*, \dots, x_n^*) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k^* - x_j^*} + \frac{a}{x_k^* - 1} + \frac{b}{x_k^* + 1} = 0, \forall k = 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

que se trata de un sistema no lineal de  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas. Además, si denotamos por  $p(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^*)$  al polinomio cuyos ceros son las posiciones de las cargas que optimizan la energía total, no es difícil comprobar que:

$$\frac{p''(x_k^*)}{p'(x_k^*)} = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k^* - x_j^*}.$$

Con esto podemos reescribir (6.2):

$$\frac{1}{2} \frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} + \frac{p}{x_k^* - 1} + \frac{q}{x_k^* + 1} = 0, \forall k = 1, \dots, n.$$

Quitando los denominadores, multiplicando por el producto de los mismos, nos queda:

$$((x_k^*)^2 - 1)p''(x_k^*) + 2(a(x_k^* + 1) + b(x_k^* - 1))p'(x_k^*) = 0, \forall k = 1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Si denotamos por  $Q(x) = (x^2 - 1)p''(x) + 2(a(x + 1) + b(x - 1))p'(x)$ , la condición (6.3) es equivalente a que  $Q(x_k^*) = 0, \forall k = 1, \dots, n$ . Como  $\deg(p) = n$ :

- $\deg(Q) \leq n \implies Q \in \mathbb{P}_n$ .
- $Q(x_k) = 0, \forall k = 1, \dots, n$ .

Luego en realidad  $Q$  es igual a  $p$  salvo un factor escalar, es decir,  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : Q = \lambda p$ . Para determinar  $\lambda$  bastaría igualar los coeficientes de los monomios de mayor grado a ambos lados de la igualdad:

$$\lambda = 2(a + b)n + n(n - 1). \quad (6.4)$$

Sustituyendo esta información (6.4) en la ecuación (6.3) tenemos que:

$$(x^2 - 1)p''(x) + 2(a(x + 1) + b(x - 1))p' = \lambda p. \quad (6.5)$$

Que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes polinómicos. Sabemos que los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  constituyen una solución para

la ecuación ya estudiada en (3.1):

$$(x^2 - 1)y'' + [(\alpha + \beta + 2)x - (\beta - \alpha)]y' - n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

Ajustando los parámetros de manera adecuada, comparando (6.5) y (3.1), se obtienen:

$$\begin{cases} \alpha = 2a - 1 > -1. \\ \beta = 2b - 1 > -1. \end{cases}$$

Se tiene, así, que el polinomio enésimo ortogonal de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}$ , con  $\alpha = 2a - 1$ ,  $\beta = 2b - 1$  es una solución para nuestra ecuación diferencial.

Es decir, las posiciones óptimas de las cargas vienen dadas en términos de los ceros del polinomio de Jacobi  $P_n^{(2a-1, 2b-1)}$ . Además, esta solución es única por construcción, dado que hay un único punto crítico, puesto que la ecuación diferencial (3.1) tiene una única solución polinómica; concluimos, así, que se trata mínimo absoluto buscado.

En trabajos posteriores, T. J. Stieltjes extendió este análisis al caso de varias cargas repulsivas fijas en el eje real (problema de Heine- Stieltjes), y al caso de intervalos no acotados (Laguerre y Hermite). No obstante, más de un siglo después de los trabajos pioneros de Stieltjes sigue habiendo numerosos e interesantes problemas abiertos en el campo de la interpretación electrostática de ceros de polinomios.

# Bibliografía

- [1] Cheney, E. W.. *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, Ont.-London, 1966.
- [2] W. Gautschi. *Numerical analysis. An introduction*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Ma, 1997.
- [3] G. López Lagomasino, Héctor Pijeira. Polinomios ortogonales. *XIV Escuela Venezolana de Matemáticas 2001. Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela*.
- [4] H. Michael Moller. *Introduction to Orthogonal Polynomials, Lecture held at University of Dortmund in summer 2002/03*, University of Dortmund, Dortmund, 2003.
- [5] T. J. Stieltjes. Sur les polynomes de Jacobi. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris 100 (1885), pp. 620–622*.
- [6] G. Szegő. *Orthogonal Polynomials*, volume 23 of *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, fourth edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [7] G. Valent, W. Van Assche. The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional remarks. *J. Comput. Appl. Math.* 65 (1995), 419-447.

# Orthogonal Polynomials.

## Properties and applications

Jiaqi Wang

June 26<sup>th</sup> 12:00 AM

Facultad de Matemáticas

Orthogonal Polynomials  
Interpolation  
Quadrature  
Formulas  
.....  
Electrostatic  
Interpretation

### Abstract

*The main purpose of this report has been introducing one of the most important and fruitful theories of the Applied Mathematics, namely, the theory of Orthogonal Polynomials. It is well known that this issue, though formally introduced within the contents of "Metodos Numericos II" (Third Course of the Degree in Mathematics at ULL), is essentially interdisciplinary by its theoretical development as well as its wide range of applications.*

*The current report starts summarizing some of the most basic and useful properties of these families of polynomials (minimal quadratic norm, behavior of zeros, recurrence relations). Then, the particular case of the so-called Classical Orthogonal Polynomials, amongst them the case of the first kind Chebyshev polynomials deserves special attention, is analyzed with more detail.*

*Finally, some of the most important applications of the Orthogonal Polynomials (interpolation, numerical integration) are handled, to end showing a very interesting connection with the physical applications: the electrostatic interpretation of the zeros of certain families of Classical Orthogonal Polynomials, due to some seminal papers by T. J. Stieltjes (1856-1894). Moreover, we hope that this last topic may be the link with further researchs in the context of a Master or Doctorship in Mathematics.*

### Contents

- + Aims and motivations
- + Definitions and properties
  - Definitions
  - Properties
- + Classical Orthogonal Polynomials
  - Jacobi Polynomials
    - \* Chebyshev Polynomials (First kind)
  - Laguerre Polynomials
  - Hermite Polynomials
- + Applications to Interpolation
- + Applications to Quadrature Formulas
- + Physical application: Electrostatic interpretation of zeros
  - Stieltjes' Problem