

**TRABAJO DE FIN DE GRADO  
DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

**PLANTEAR PROBLEMAS MATEMÁTICOS  
EN 4º DE EDUCACIÓN PRIMARIA  
UTILIZANDO IMÁGENES**

DUNIA AMGHAR TOSTE  
VANESA DELGADO HERNÁNDEZ  
CLAUDIA GARCÍA HERNÁNDEZ

TUTOR: PROF. ISRAEL GARCÍA ALONSO

CURSO ACADÉMICO 2019/2020  
CONVOCATORIA: JUNIO

## **Resumen**

Este Trabajo de Fin de Grado (TFG) desarrolla un proyecto de innovación, centrado en la configuración de problemas a partir de imágenes y utilizando las estrategias de resolución de problemas desarrolladas en una formación seguida en el proyecto de innovación docente denominado "ProyectoMates", y su posterior utilización en el aula de Primaria para el desarrollo de la materia de Matemáticas. El objetivo principal de este TFG es presentar una propuesta que recoja problemas que resulten motivadores e interesantes para el alumnado, a la vez que ayuden a la adquisición de contenidos matemáticos. Tras analizar este tipo de actividades en Primaria, presentamos una guía docente junto con sus actividades para llevar al aula este tipo de problemas que hacen uso de fotografías.

**Palabras claves:** problemas con imágenes, resolución de problemas, estrategias de resolución, problemas de matemáticas.

## **Abstract**

This dissertation develops an innovation project, focused on the configuration of problems using photography and different strategies emerging from the problem solving developed in a formation followed in the teaching innovation project called "ProyectoMates", for its later use in the field of Mathematics in Primary Education. The main objective of this dissertation is to present a proposal which collects problems that motivates, and students find interesting, while helping them acquire mathematical content. After analysing this type of activities in Primary, we present a teaching guide together with some activities to introduce this kind of problems to the classroom which uses photographs.

**Keywords:** problems with images, problems resolution, resolution strategy, mathematical problems.

## Índice

1. INTRODUCCIÓN.....	4
2. MARCO CONCEPTUAL.....	6
2.1 Problemas matemáticos.....	6
2.2. Fases y heurísticos de resolución de problemas.....	9
2.3. La base de orientación.....	11
2.4. La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje como organizador del docente.....	13
3. IMÁGENES QUE PLANTEAN PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS.....	14
4. PROPUESTA DE INNOVACIÓN.....	17
5. CONCLUSIÓN.....	26
6. BIBLIOGRAFÍA.....	28
ANEXOS.....	32

## 1. INTRODUCCIÓN.

Este Trabajo de Fin de Grado lo podemos situar en la categoría de proyecto de innovación. El estudio va dirigido al alumnado de Educación Primaria pues plantea novedades respecto a la estructura de los problemas matemáticos y su resolución. Vamos a presentar una investigación a través de la cual poder crear nuevas propuestas didácticas atractivas para el alumnado.

*“La resolución de problemas y el trabajo científico, a través de situaciones de aprendizaje, son el mejor camino para desarrollar estas competencias, ya que activan las capacidades básicas del individuo, como son plantearse interrogantes, leer comprensivamente, cuantificar, estimar, analizar la información, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, experimentar, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de las soluciones, argumentar, representar y comunicar, e integrar los conocimientos adquiridos.”* (Decreto 89/2014).

El currículo nos inspira y nos sirve de punto de arranque cuando localiza los problemas matemáticos como el marco general por el que se rige la enseñanza de las Matemáticas; a partir de esto pretendemos ofrecer una propuesta de enseñanza centrada en la resolución de problemas matemáticos para el alumnado de Educación Primaria. Se trata de utilizar la imagen como elemento motivador, atractivo y que logre captar la atención del alumnado. Mediante la conjugación de imágenes y Matemáticas. Las imágenes jugarán el papel del enunciado de un problema pasando a ser fuente de actividades que inviten al estudiante y lo motiven. Pero antes, debemos realizar el análisis de estudios relacionados o semejantes que, aunque no son equivalentes, pues no hablan del uso de imágenes en problemas de matemáticas, se acercan a nuestra propuesta de innovación. Así, Beltrán (2016), en su estudio, analiza el uso de los memes en el área de las Matemáticas. Este autor define un meme como un chiste sumamente breve, en el que no es posible separar la imagen del texto, pues lo que se pretende transmitir es el conjunto que forman ambos elementos; en cambio, los problemas con imágenes son una propuesta más visual, en donde la imagen es el enunciado del problema y contiene todos los elementos necesarios para su resolución.

Por otra parte, Beltrán (2019) en otro estudio, esta vez sobre una serie de dibujos animados, tiene en cuenta los resultados que provocan el uso de las historias infantiles en la enseñanza de contenidos matemáticos en educación infantil y sus posibles beneficios. Otros autores exponen su exitoso resultado con el uso de apoyo visual en edades tempranas, utilizando, tanto dibujos animados conocidos, como no conocidos, mostrando un alto nivel de

motivación a la hora de resolver las tareas. Además, el análisis de las actividades indica que los dibujos animados son un recurso muy interesante para trabajar en las aulas de educación infantil, pues los niños y niñas relacionan inmediatamente estas imágenes con su ocio y tiempo libre.

Por otro lado, las autoras de este trabajo hemos participado durante este curso en el proyecto denominado “ProyectaMates”, proyecto impulsado por el Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de La Laguna (ULL), la Sociedad Canaria “Isaac Newton” de profesores de Matemáticas (SCPM Isaac Newton), el Cabildo de Tenerife, en concreto el Servicio de Educación y la Fundación General de la Universidad de La Laguna. Es un proyecto de innovación educativa que pretende unir esfuerzos de diferentes entidades para promover la innovación en el aula en lo referente al pensamiento matemático y que permita ofrecer estrategias a los estudiantes de manera que sean capaces de resolver problemas matemáticos. A su vez, desarrolla diferentes acciones con profesores, estudiantes e investigadores. Una de las acciones es ofrecer un curso de formación a los docentes encaminado al desarrollo profesional mediante la creación de auténticas comunidades de aprendizaje en los centros, de manera que se diseñe una forma común de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en torno a la resolución de problemas.

Uno de los objetivos principales del proyecto son la formación de docentes en activo y en formación, la reflexión sobre la práctica docente e investigación en las acciones realizadas.

Los procesos desarrollados en la formación se organizan de la siguiente forma, en primer lugar, una fase teórica basada en la formación en estrategias de resolución de problemas en la comunidad de aprendizaje, en donde se abordan las fases de resolución de problemas de Polya (1945) que también se utilizan en “ProyectaMates”. Una segunda fase basada en la ejemplificación y práctica de dicha estrategia con nuevos problemas. Del mismo modo, también se lleva a cabo la elaboración de una propuesta conjunta para ser llevada al aula. Para la reflexión sobre la práctica se propone que se realice la grabación de la intervención para posteriormente analizar tanto la implementación de la estrategia de resolución como los pasos seguidos para su desarrollo en el aula, como pueden ser agrupamientos, intervenciones, etc., con el fin de incorporar nuevas ideas de mejora entre todos los docentes participantes. Lo que pretendemos con el desarrollo de cada una de estas partes es que estos conocimientos sean trasladados al aula para dotar al alumnado de habilidades e instrumentos que le permitan ser más consciente del proceso que está llevando a cabo.

De esta forma, lo que perseguimos es generar una propuesta didáctica basada en ofrecer problemas con imágenes que actúen como gancho y cuyo uso a la hora de resolver problemas sea un reclamo por parte del alumnado. Generando un material que pueda ser utilizado por los docentes para trabajar con el alumnado cualquier tipo de contenido matemático recogido en el currículum de Educación Primaria.

## **2. MARCO CONCEPTUAL.**

Antes de describir la propuesta analizamos algunos conceptos y términos que utilizamos y que la literatura de Educación Matemática recoge. Es lo que conformará nuestro marco conceptual.

### **2.1 Problemas matemáticos.**

Un problema matemático, según la Real Academia Española es:

*5.m. “Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos” (DRAE, 2014).*

De este modo, se entiende como problema la tarea por la cual se obtiene respuesta para una situación que plantea una incógnita y haciendo uso de métodos científicos se llega a su resolución. En nuestro caso, el método científico que aplicamos para obtener una solución sería el método de resolución de problemas de Polya (1945).

Cuando hablamos de problema debemos diferenciarlo de un ejercicio, en ese sentido Blanco y Pino (2015) exponen que un ejercicio es aquella actividad que surge como resultado de un proceso o la puesta en práctica de una propiedad. En cambio, en un problema matemático aparece un enigma a resolver dentro de un contexto que puede estar implícito o explícito.

Del mismo modo, numerosos autores, como Blanco y Pino (2015) nos advierten sobre la necesidad de precisar a qué nos referimos cuando hablamos de los problemas y la necesidad de cuestionar algunas de las actividades que han sido tradicionalmente tomada como referencia de problema matemático. Así, Schoenfeld (1985) ilustra la diferencia existente entre problema y ejercicio mediante el análisis del siguiente ejemplo: “Juan tiene siete manzanas, le da tres a María. ¿Cuántas manzanas le quedan a Juan?”, ante esto el autor plantea una tarea relacionada con el mundo real, pues hace que tenga más relevancia que el resolver ejercicios numéricos sin ningún contexto, como es el caso de “ $7-3=?$ ”. Aún así, no llega a situarlo como problema, pues el autor defiende que es imprescindible que presente una dificultad. De esta forma, Schoenfeld (1985) entiende que

*Tales ejercicios son, en verdad, más relevantes que los puramente numéricos, pero, en el fondo, todavía son ejercicios del tipo algorítmico o de fórmulas; hay muy poco de “problema” en resolver uno de estos ejercicios, cuando ya se han hecho docenas de tipo parecido (Schoenfeld, 1985, p.28).*

Mediante las ideas aportadas por el autor, entendemos la diferencia y estamos de acuerdo con la afirmación que dice que *un problema es una relación particular entre la tarea y la persona que trata de resolverla* (Blanco y Pino, 2015, p. 82).

A partir de lo anterior, podemos entender que la diferencia entre un ejercicio y un problema es relativa. Lo que para un estudiante constituye un problema puede muy bien ser un simple ejercicio para otro; pues todo dependerá de los conocimientos y experiencias anteriores del alumnado.

Una diferencia la ofrecen los tipos de pensamiento, de tal forma que en el caso de los ejercicios se produce lo que conocemos como “pensamiento reproductivo”, caracterizado por la reproducción de métodos y comportamientos conocidos; por otra parte, en el caso de los problemas matemáticos se produce un tipo de pensamiento denominado “pensamiento productivo”, que supone el desarrollo de un proceso de análisis de la situación que se le presenta para crear nuevas producciones, crear algo nuevo, hacer conjeturas, etcétera.

Consideramos que la definición que mejor se adapta al uso que damos de problema matemático es la elaborada por House, Wallace y Johnson (1983), porque recoge todos los elementos que vamos a trabajar con los problemas.

*“Problema matemático es una **situación** que supone una **meta para ser alcanzada** donde existen **obstáculos** para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parta del **desconocimiento del algoritmo** útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas Matemáticas para su resolución, y debe **ser aceptado como problema** por alguien antes de que pueda ser llamado problema”* (p.10).

Tras entender el concepto de problema matemático, debemos abordar los tipos de problemas matemáticos con los que podemos encontrarnos. Existen múltiples clasificaciones, sin embargo, hemos decidido centrarnos en la idea de Blanco (1991), quien elabora una clasificación sobre tipos de problemas (Anexo 1), utilizando las ideas de otros autores (Borasi, 1986; Butts, 1980; Charles y Lester, 1982).

A través de la clasificación llevada a cabo por Blanco (1991), nos parece importante indicar la dificultad para hacer una clasificación única de los problemas, puesto que hay problemas que pueden incorporarse en más de una categoría. Un ejemplo de ello sería el siguiente problema (Figura 1), que el cual puede considerarse tanto en la categoría de “Problemas sobre situaciones reales” como “Problemas de procesos”.

*“Queremos cambiar los pupitres de dos clases y de la sala medusa, ¿cuántos pupitres necesitaremos?, ¿podremos hacer una estimación del costo sabiendo que cada mesa cuesta 40 euros?”*

**Figura 1.** Problema matemático (Elaboración propia).

Consideramos que los problemas que nosotras vamos a trabajar se pueden incluir en diferentes categorías (Tabla 1). Esto se debe a que podríamos hablar de “Problemas de procesos”, pues en los problemas que planteamos el objetivo principal es que el alumnado determine cómo resolver el problema, dotándolos de un guión, el cual ellos tienen total libertad cuando lo siguen a la hora de plantear una solución. Pero, además, también podrían situarse en la categoría problema que se definen como “Problemas sobre situaciones reales”, porque las tareas que planteamos intentan llevar al estudiante a situaciones reales que podrían producirse en su vida cotidiana. La finalidad es que sean capaces de conectar y entender el papel que juegan las Matemáticas en su día a día, al mismo tiempo, que adquieren e interiorizan conceptos y procesos matemáticos.

<b>TIPOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS QUE ABORDAMOS EN NUESTRA PROPUESTA DE INNOVACIÓN.</b>	
<b><i>Problemas de procesos</i></b>	<p>Este tipo de problemas se caracteriza porque el enunciado no anticipa una forma de cálculo o resolución determinada. De forma que deja una puerta abierta a diferentes formas de afrontar la tarea para obtener una solución. Por tanto, ayudan a desarrollar en los discentes estrategias generales de comprensión, planificación y resolución de problemas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p><i>“En un club de ajedrez hay 15 miembros. Si cada uno juega una partida contra cada uno de los demás miembros, ¿cuántas partidas podrían jugarse?”</i></p> </div>
<b><i>Problemas sobre situaciones reales</i></b>	<p>A través de este tipo de problemas lo que se pretende es plantear actividades que se aproximen lo máximo posible a situaciones reales para el estudiante. Requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. De esta forma, aunque no sean típicamente matemáticos, las Matemáticas juegan un papel primordial a la hora de obtener una solución.</p>



	<p><i>“Queremos cambiar las baldosas de dos clases y del pasillo del colegio, ¿cuántas baldosas necesitaremos?, ¿podremos hacer una estimación del costo?”</i></p>
--	--

**Tabla 1.** Clasificación de problemas según Blanco (1991).

## 2.2. Fases y heurísticos de resolución de problemas.

Desde “ProyectaMates” se sigue una estrategia general a la hora de enfrentarse a un problema matemático, la cual hemos adoptado para resolver los problemas matemáticos que desarrollamos. Esta estrategia concibe la resolución de problemas según las cuatro fases de Polya (1945), en las que incorporan algunas preguntas según el modelo propuesto en el proyecto (Tabla 2).

<p><b><i>Fase 1. Comprender.</i></b></p>
<p>Esta fase se subdivide en tres pasos por los que deben pasar los estudiantes para desarrollar una comprensión completa del problema planteado. El primero de ellos, son los <b>datos</b>, definidos como aquella información que te da el problema. El <b>objetivo</b>, que consiste en determinar qué nos pide el problema. A continuación, aparecen las <b>relaciones</b>, conectan los datos con el objetivo. Y por último aparece el <b>diagrama</b>, un espacio donde el alumno realiza una representación gráfica del problema.</p> <p>En esta fase es fundamental definir correctamente el objetivo y los datos para, a partir de ellos, poder configurar un método de acción. Para ello, se presenta en forma de preguntas al alumnado como: ¿qué información nos da el problema?, ¿qué datos tenemos?, ¿cuál es el objetivo?, ¿qué tenemos que averiguar?, ¿hay algo muy importante que debemos tener en cuenta?, ¿existen relaciones entre los datos?</p>
<p><b><i>Fase 2. Pensar.</i></b></p>
<p>En esta fase se <b>selecciona la estrategia</b> que mejor se adapta a la información que tenemos. Para el desarrollo adecuado de esta fase es conveniente contar con múltiples estrategias de resolución, que desde ProyectaMates se clasifican en <b>básicas</b> (modelización, ensayo-error, organización de la información), <b>auxiliares</b> (simplificar, analogía) y <b>específicas</b> (buscar patrones, eliminar, ir hacia atrás, generalizar).</p> <p>Esta fase también se plantea al alumnado en forma de preguntas que justifiquen la elección de la estrategia, como: ¿por qué eliges esa estrategia?, ¿crees que te permitirá llegar al resultado?, ¿qué diagrama vas a utilizar?, ¿consideras que el diagrama elegido es el más correcto?</p>
<p><b><i>Fase 3. Ejecutar.</i></b></p>
<p>En esta fase se <b>aplica la estrategia</b> elegida. Por ello, se realiza las operaciones necesarias hasta obtener la solución o soluciones. Del mismo modo, si se llega a un punto muerto, el alumno vuelve a empezar desde el principio, utilizando otra estrategia que lleve a la solución. Es decir, se trata de abordar formas posibles o planes que le permiten determinar de qué manera puede abordar el problema para obtener una solución.</p> <p>Lo más importante, en esta fase es que el alumnado sea consciente del proceso que está llevando a cabo y, para ello, el docente debe optar por plantearles a los estudiantes preguntas como: ¿la estrategia de resolución que habías planteado es la correcta?, ¿hay algo nuevo a lo que no hayas prestado atención antes?, etcétera.</p>
<p><b><i>Fase 4. Responder.</i></b></p>
<p>Esta es la última de las fases que se plantean dentro de este tipo de estrategia de resolución, esta se basa en el desarrollo de varios pasos. El primero de ellos sería la <b>comprobación</b>, en este el alumno debe comprobar si las soluciones cumplen con todas las premisas del enunciado, de esta manera cerciorarse si el resultado es correcto. Para ello el docente puede preguntar: ¿están seguros de que las respuestas son correctas?, ¿la solución es lógica?, ¿se cumplen las relaciones que nos ofrecía el problema?, etcétera.</p> <p>El segundo sería el <b>análisis</b>, se trata de verificar si la solución que hemos encontrado es única o si existe más de una solución. En este punto el docente debe de ir observando si los alumnos llegan al mismo resultado o si</p>

hay resultados distintos a los correctos. Del mismo modo, este proceso se puede llevar a cabo a través de preguntas planteadas por el docente como: ¿no hay más resultados?, ¿por qué creen que no hay más resultados?, etcétera.

Y, por último, la **respuesta**, se trata de redactar la solución en forma de una oración que responda a la pregunta planteada en el problema. A la vez que permita plantearnos nuevas preguntas como: ¿hay una solución o pueden aparecer más de una?, ¿de qué forma debemos responder?, ¿qué nos pregunta el problema?

**Tabla 2.** Fases de resolución de problemas según Polya (1945).

A su vez, para el desarrollo de estas fases se hará uso de algunos de los principios heurísticos definidos por Polya (1945). Según este autor, un principio heurístico es un conjunto de técnicas o métodos para resolver un problema. Es lo que hemos denominado estrategia de resolución. En la formación recibida en “ProyectaMates” se describen y clasifican las estrategias de la siguiente forma (Tabla 3). Sin embargo, de las expuestas a continuación, para afrontar los problemas con imágenes únicamente haremos uso de lo que se denomina estrategias básicas.

<b>HEURÍSTICOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS</b>
<b>Estrategias básicas</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <u>Ensayo y error</u>. Esta estrategia tiene dos fases: animar al alumno a hacer conjeturas y aplicar la estrategia a la resolución de problemas. Se puede hacer de forma fortuita, sistemática o dirigida.</li> <li>- <u>Modelización</u>. Un modelo es un objeto o dibujo que sirve como ayuda o apoyo para comprender y resolver un problema matemático. Muchos problemas se pueden resolver si se busca o construye el modelo apropiado.</li> <li>- <u>Organización de la información</u>. Se desarrolla mediante la clasificación de la información en tablas, con las que llegamos a la solución del problema.</li> </ul>
<b>Estrategias específicas</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <u>Búsqueda de patrones</u>. Al intentar resolver un problema matemático, sus datos y sus preguntas son como un conjunto de elementos disgregados en aparente desorden que oculta una regularidad, unas leyes, unos patrones que constituyen la estructura de su organización. Su búsqueda es una llave para la comprensión de muchos problemas.</li> <li>- <u>Generalizar</u>. Esta estrategia viene dada una vez se constituye la búsqueda de regularidades para después demostrarlas.</li> <li>- <u>Eliminar</u>. Se utiliza diariamente por el consumidor cuando elige un producto y elimina los otros, requiere el uso de la lógica en el nivel de entendimiento de los alumnos.</li> <li>- <u>Empezar un problema desde atrás</u>. A veces es de gran utilidad, a la hora de resolver problemas, no encadenar las secuencias de acciones desde la información que se nos da hasta el objetivo, sino al revés. El objetivo ya se conoce, por lo tanto, debemos determinar las operaciones que nos llevan al estado inicial del que se ha derivado el mismo.</li> </ul>
<b>Estrategias auxiliares.</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <u>Simplificar</u>. Este tipo requiere plantear una situación equivalente a la dada pero más simple, facilitando la comprensión, descubriendo el método de solución o facilitando su proceso.</li> <li>- <u>Analogía</u>. Este tipo de problema requiere que el alumnado busque una alternativa cuando no sepa resolver el problema.</li> </ul>

**Tabla 3.** Heurísticos de resolución de problemas utilizados por “ProyectaMates”.

### 2.3. La base de orientación.

Las cuatro principales fases de resolución de problemas planteadas por Polya (1945), descritas con anterioridad, se recogen en lo que se denomina base de orientación. Según Sanmartí (2007)

*“Una base de orientación es aquel instrumento que resume de manera gráfica y ordenada la acción a realizar, con el fin de promover que los alumnos anticipen y planifiquen por sí mismos las operaciones que deben llevar a cabo para resolver con éxito los diferentes tipos de tareas escolares”.*

Además, entiende que a lo largo del proceso de enseñanza se tiene que promover su construcción de manera que cada alumno desarrolle la suya propia. De esta forma, tal como entienden Villalonga y Deulofeu (2015) en su estudio, la base de orientación se concibe en la resolución de problemas como una secuencia resumida y ordenada de acciones cuidadosamente pensadas.

En un estudio previo realizado por Villalonga y Deulofeu (2015), se analizó cómo el uso adecuado de la base de orientación al resolver un problema puede servir como buena herramienta y, además, ofrece al estudiante una guía de pensamiento que facilita la resolución. Se presenta como un instrumento que ayuda al alumnado no experto a resolver problemas con más facilidad, haciendo uso de las herramientas y procedimientos apropiados para la resolución de los problemas, dotándolos de seguridad, control, serenidad y ayudándoles a la organización de las tareas. De esta forma, con el tiempo y la práctica, el alumnado no experto podrá mejorar su capacidad para resolver los problemas matemáticos, además de averiguar cuáles son las dificultades a la hora de realizar el problema. Por otra parte, la base de orientación guiará al docente a adecuar su propuesta didáctica y su desarrollo en el aula, teniendo en cuenta sus posibles dificultades, como comentamos anteriormente.

Para Villalonga y Deulofeu (2015) las fases y pasos anteriormente descritos los denominan dominios. Estos dominios se desglosan en las diferentes dimensiones que son consideradas como necesarios para afrontar un problema (Tabla 4).

Resolución del Problema	
Dominios	Dimensiones
Comprendo el problema	D1. Identifico y entiendo los datos, las magnitudes y las unidades que aparecen en el problema.
	D2. Expreso (pienso y reescribo) el problema de alguna manera (resumen, esquema, gráfico, dibujo...) que me ayude a entenderlo lo mejor posible.

Estructuro y llevo a cabo un plan de acción	D3. Planifico y llevo a cabo cómo resolver el problema.
	D4. Busco (recuerdo, diseño...) y aplico estrategias que me puedan ayudar a resolver el problema siguiendo la planificación que he fijado.
	D5. Busco (recuerdo, diseño...) y aplico algoritmos y mecanismos para abordar las diferentes estrategias.
Reviso	D6. Reviso lo hecho. Puedo seguir los diferentes pasos de resolución, están bien explicados y los puedo entender.
	D7. Si no me sale, detecto donde me equivoqué o donde me pierdo y vuelvo a plantear y trabajar estas partes.
	D8. Una vez resuelto, razono si se podría hacer de otras maneras.
	D9. Me aseguro de si puede haber otras soluciones o si solamente hay una.
	D10. Doy todas las soluciones posibles, explicando si son o no correctas y si tienen o no sentido.

**Tabla 4.** Ejemplo de base de orientación propuesta por Villalonga y Deulofeu (2015)

Desde *ProyectaMates* se facilita una base de orientación semejante a la propuesta en la Tabla 2. A diferencia de la anterior, desde el proyecto se presenta mediante preguntas a responder en cada uno de los dominios, facilitando la comprensión y resolución de problemas. Nosotras realizamos una adaptación para los problemas que planteamos (Tabla 5).

<b>Resolución de los Problemas con imágenes</b>	
<i>Dominios</i>	<i>Dimensiones</i>
<b>Datos</b>	D1. ¿Qué ves en la imagen?
	D2. ¿Qué información nos da el enunciado?
	D3. ¿Cuántas estanterías hay?
	D4. ¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros?
	D5. ¿Todos los libros son iguales?
<b>Relaciones</b>	D6. ¿Qué nos pide el problema?
	D7. ¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta?
	D8. ¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías? ¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías?
<b>Plan</b>	D9. ¿Cómo podemos ayudar a la directora a estimar el número de libros?
	D10. ¿Qué pasos seguirías?
<b>Ejecución del plan</b>	D11. Desarrolla los pasos que has creado en el plan.
<b>Solución</b>	D12. ¿Estás de acuerdo con la estimación de la directora?
	D13. ¿Cuántos libros estimas tú que hay?
	D14. ¿La solución que has puesto es igual a la de tu compañero?

**Tabla 5.** Base de orientación propuesta para afrontar el problema número 1 del documento del alumno.

#### **2.4. La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje como organizador del docente.**

En toda propuesta de enseñanza consideramos que es muy importante la trayectoria hipotética de aprendizaje que el docente tiene en mente antes de su desarrollo y que describe en su organización.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje ha sido concebida como organizador del aprendizaje mediante la cual el docente predetermina los avances y/o niveles progresivos que pretende el niño alcance a través de la enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004; Gómez y Lupiáñez, 2007; Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2002; León, Díaz y Guilombo, 2014).

Según Simón (1995), los primero en utilizar el término de THA fueron Steffe y Cobb (1988), quienes hablaban de un modelo para la enseñanza de las matemáticas, dentro del cual el docente describe el desarrollo de los procesos de aprendizaje para los estudiantes y hace uso de otro componente didáctico (las tareas) que pretenden atender a las necesidades que puedan mostrar los estudiantes durante el transcurso de la puesta en práctica. Del mismo modo, entienden que el uso por parte del docente de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje genera que el alumnado desarrolle y adquiera habilidades matemáticas en cada uno de los niveles de enseñanza, por tanto, suponen un apoyo para el docente a lo largo del proceso de enseñanza.

A partir de lo anterior, tal como entiende Barrera (2018) en su estudio, podemos entender las THA como una secuencia o camino matemático que actúa como guía para el docente ayudándole a comprender qué es lo que el niño conoce, es decir, determinar cuáles son sus conocimientos previos; además, permiten elaborar ambientes de aprendizaje significativos, a través de los cuales se explora en el desarrollo de habilidades y ayudan en la construcción de conceptos matemáticos.

Por otra parte, Clements y Samara (2015) entienden que, al ejecutarse las diferentes tareas propuestas para cada uno de los diferentes niveles de la THA, los resultados o respuestas del alumnado pasan a ser su propia Trayectoria Real de Aprendizaje.

La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje supone el reconocimiento por parte del docente del nivel de conocimientos actual en el que se encuentran los alumnos con los que se va a trabajar. A través de esto, el docente configura una secuencia de tareas matemáticas que configuran la base para la adquisición por parte del alumnado de unos conceptos matemáticos concretos. Del mismo modo, tal como entienden León, Díaz y Guilombo (2014) las metas, niveles y tareas propuestas en la THA favorecen la planeación del

docente para la enseñanza, pero por su naturaleza de carácter hipotético, el docente puede verse en la obligación de plantear modificaciones sistemáticas de cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje, en la movilización de pensamiento y desarrollo matemático en los niños.

En conclusión, el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje actúa como organizador del profesor que le permite una reflexión a priori del proceso de enseñanza y aprendizaje. De esta forma, el docente construye el proceso de enseñanza y aprendizaje partiendo de la determinación de los contenidos que se van a trabajar, por tanto, establece qué es lo que el alumnado aprende; y, para ello crea una secuencia que permita la consecución del aprendizaje.

### **3. IMÁGENES QUE PLANTEAN PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS.**

El uso de imágenes es la forma de trabajo más habitual en Educación Infantil. Sin embargo, esta se pierde con el tiempo y en Primaria se abandona rápidamente este recurso.

En Educación Infantil las imágenes se utilizan en el área de las matemáticas fundamentalmente para contar historias e introducir contenidos o procedimientos. Una muestra de ello lo podemos encontrar en el estudio realizado por Modrego y Beltrán (2019); en dicho trabajo se analiza el uso de dibujos animados para la enseñanza de contenidos matemáticos, promoviendo el uso de elementos visuales y, aunque no se habla de su utilidad para la resolución de problemas matemáticos y, por tanto, no es equivalente a lo que nosotras planteamos, consideramos que ofrece un enfoque cercano a nuestra propuesta de innovación. Por tanto, los autores investigan, a través de la puesta en práctica, los efectos que generan el uso de dibujos animados para la enseñanza de contenidos matemáticos en Educación Infantil y valoran si uso resulta adecuado. A través de este estudio se puede conocer los beneficios del uso de apoyo visual desde edades tan tempranas. Los autores exponen que tanto utilizando dibujos animados conocidos por los niños, como no conocidos, el alumnado se muestra motivado hacia la ejecución de la tarea, pues tal como exponen, los niños relacionan el visionado de dibujos animados con su tiempo libre y/o de juego. A partir de lo anterior, entendemos que plantear problemas haciendo uso de este formato, es decir, incorporando fotografías o imágenes, puede resultar motivante para el alumnado.

Por otra parte, Beltrán (2016) realiza un estudio acerca del uso de los memes, en la Educación Secundaria para trabajar el área de las matemáticas. Expone que el uso de este tipo de recurso es beneficioso porque además de captar la atención de alumnado consiguen que el alumnado adquiera y recuerde reglas y procedimientos que causan dificultades en el alumnado

generando errores. Del mismo modo, el autor expone que estos no son los únicos beneficios que genera el uso de este recurso pues, además, proponer al alumnado generar sus propios memes puede generar beneficios, como reconocer las propias dificultades y elaborar una forma de afrontarlas; además, se ha probado que el uso de memes en los exámenes ejerce una influencia positiva en el desarrollo de la prueba.

Por último, hemos estudiado el uso de imágenes cómicas según el estudio de innovación desarrollado por Aparicio, Marrero y Camacho (2019), aunque este no trata de forma directa la resolución de problemas utilizando imágenes. Los autores analizan y verifican que el uso del humor gráfico en el aula sirve como herramienta para adquirir y reforzar conceptos matemáticos.

En resumen, tras la lectura de los diferentes estudios que aparecen con anterioridad sobre el uso de recursos, como memes o dibujos animados en los diferentes cursos de las matemáticas en la educación, podemos afirmar que el uso de las imágenes genera una serie de ventajas:

- a. Es una forma de asociar una imagen a un contexto lúdico.
- b. Puede ser un elemento motivacional para el alumnado, ya que el uso de imágenes suele estar relacionada con el tiempo de ocio, por lo tanto, muestran una mayor predisposición a las actividades.
- c. Permite contextualizar los contenidos con el entorno más cercano del alumnado.
- d. Al ser un recurso diferente no genera rechazo por los estudiantes.
- e. Haciendo una buena selección de la imagen, puede resultar cercana al estudiante, dando pie a desarrollar otras competencias y habilidades.

En base a lo anterior, planteamos una propuesta de innovación que rescate el uso de imágenes para la enseñanza de las Matemáticas. Para ello, hemos planteado problemas que surgen a través de imágenes; la categoría de problemas que planteamos serían los problemas matemáticos que Blanco (1991) denomina “Problemas de procesos” y/o “Problemas sobre situaciones reales”; pues, tal como hemos explicado con anterioridad, en función de qué elemento tomemos en consideración podría tratarse de uno u otro. Sin embargo, dentro de este tipo de problemas incorporamos como novedad utilizar las imágenes en sustitución total o parcial del enunciado del problema. Por tanto, presentamos a los estudiantes un problema en el cual la imagen es un elemento imprescindible para poder conocer lo que se pregunta y, a

continuación, llevar a cabo el proceso de resolución. Esta imagen conforma parte del enunciado, dando total o parcialmente la información necesaria para poder abordar el problema (Figura 2). Además, el problema se aborda a través de situaciones que podrían producirse en la vida cotidiana, es decir, utilizando imágenes y fotografías de situaciones reales.



**Figura 2.** Ejemplo de problema con imagen.

Para su resolución seguiremos el esquema previamente planificado por el docente. A través de este, se crea un guión que ayuda al alumnado en la obtención de una respuesta o solución para el problema.

Esta propuesta de los problemas utilizando fotografías del entorno o imágenes de situaciones cotidianas, que acercan la actividad a los estudiantes y, consecuentemente, consideramos que será atractiva por el formato que se utiliza para presentar el problema y logrará captar la atención del alumnado, y que resulten motivadoras.

- **Características de las imágenes para plantear problemas matemáticos.**

Observamos que no todas las imágenes son adecuadas para plantear un problema matemático. En nuestro análisis hemos tomado en consideración algunas características que creemos que deben cumplir las imágenes para que sean apropiadas cuando se utilizan como planteamiento del problema matemático en el aula:

- a. La imagen cuenta una historia: la imagen debe ser necesaria para resolver el problema, es decir, que la imagen te ayuda a comprender visualmente el enunciado, y este se apoye en la misma para ser resuelto, por ello, la imagen es importante y debe estar vinculada a la realidad. El profesor/a puede ayudarse de esa narración para enriquecer el problema que se presenta mediante esa fotografía.



- b. La imagen relaciona ideas o cantidades: las imágenes elegidas deben tener un significado, pues se pretende ofrecer una información necesaria para su resolución.
- c. El reto presentado no es evidente: debemos escoger imágenes claras, que no confundan, ya que puede llevar a que el alumnado presente problemas a la hora de resolver el problema. No obstante, en algunas ocasiones se puede acompañar la imagen de una pequeña frase o enunciado que ayude al alumnado a focalizar aspectos de la fotografía y que nos centren en lo que queremos resolver.
- d. La solución no es trivial: la imagen no debe revelar, a priori, el resultado, es decir, debe pretender que el estudiante se pregunte e indague en busca de alternativas y respuesta.

Además, consideramos que se deben tener en cuenta que la imagen integra una serie de aspectos más técnicos, como la calidad de la imagen, el enfoque, el ángulo, etc. Tenerlos en consideración a la hora de seleccionar la fotografía o imagen que vamos a utilizar, es igualmente importante, pues una imagen de mala calidad puede producir pérdida de interés por parte de los estudiantes y, consecuentemente, no lograr el objetivo propuesto.

#### **4. PROPUESTA DE INNOVACIÓN.**

Como hemos expresado con anterioridad, una de las finalidades principales de nuestro estudio es generar una propuesta de trabajo que pueda ser utilizada por los docentes en su práctica diaria y crear problemas utilizando imágenes. Este planteamiento innovador está configurado por un total de 3 problemas matemáticos que abordan el contenido de estimación en el área de Matemáticas de 4º de Primaria; esta se encuentra acorde al currículo de la Educación Primaria de la Comunidad Autónoma de Canarias.

Para elaborar la propuesta hemos creado dos documentos imprescindibles, el **documento del alumno** y el **documento del docente** que establece qué vamos a hacer, en qué consiste la propuesta, cómo vamos a trabajar con el alumnado y las dificultades que pueden aparecer durante el proceso.

##### **A) Documento del alumno. Base de orientación.**

El documento del alumno (Anexo 2) ha sido elaborado siguiendo diferentes pasos. Para comenzar, realizamos un análisis de diferentes problemas que se podrían trabajar con imágenes. Tras ello, optamos por seleccionar imágenes que cumpliesen las características que concretamos como necesarias para poder ser utilizadas en los problemas con imágenes que recogimos en una tabla de comprobación (Figura 3).

CARACTERÍSTICAS	SI	¿POR QUÉ?
Las imágenes cuentan una historia	X	Plantea un contexto necesario para resolver el problema.
Las imágenes relacionan ideas	X	Ofrece ideas necesarias para su resolución.
Los retos presentados no son evidentes	X	No causa confusión y está acompañada de un pequeño enunciado.
Las soluciones no son triviales	X	Supone un reto para el alumnado.


**Figura 3.** Análisis de características de las imágenes para su uso en problemas visuales.

A continuación, determinamos la estrategia a seguir para llevar a la práctica esta propuesta. Consideramos que, a lo largo de las 3 primeras fases, se debe de seguir un proceso de resolución que pasa en un primer momento, por la individualidad, para a continuación, trabajar en grupo. De esta forma, el alumnado se enfrenta a cada uno de los pasos haciendo primero una reflexión individual que después debatirá con sus compañeros. Sin embargo, a diferencia del resto de fases, la última, será llevada a cabo en gran grupo.

Para desarrollar la propuesta hemos optado por el uso de la rutina de pensamiento veo, pienso, me pregunto. Con todo lo anterior, y siguiendo la base de orientación propuesta, surge el documento del alumnado (Figura 4).

**PROBLEMA 1: LA BIBLIOTECA DEL COLE.**

El bibliotecario del colegio quiere conocer el número aproximado de libros que hay en la biblioteca. La directora estima que deben de haber alrededor de 890 libros. ¿Estás de acuerdo con esta estimación? Haz tu propia estimación de la cantidad de libros que hay en la biblioteca.



INDIVIDUAL		REFLEXIÓN DE EQUIPO	
<b>DATOS</b>			
¿Qué ven en la imagen?	¿Qué ven en la imagen?	¿Qué nos pide el problema?	¿Qué nos pide el problema?
¿Qué información nos da el enunciado?	¿Qué información nos da el enunciado?	¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta?	¿Qué información necesitamos para poder dar una respuesta?
¿Cuántas estanterías hay?	¿Cuántas estanterías hay?	¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías? ¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías?	¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías? ¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías?
¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros?	¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros?		
¿Todos los libros son iguales?	¿Todos los libros son iguales?		

**Figura 4.** Problema 1 de la propuesta de innovación.

## B) Documento del profesor. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

El documento del docente (Anexo 3) consiste en desarrollar una trayectoria hipotética de aprendizaje, que servirá de instrumento organizador para el docente. Es decir, este documento lo que pretende es que el maestro sea capaz de adelantar posibles dificultades en el aprendizaje pretendido y, además, contar con diferentes formas para llevar a cabo el desarrollo del proceso de resolución.

Es importante que los docentes hayan resuelto previamente los problemas, antes de presentarlos al alumnado, para poder observar y estudiar posibles respuestas de los estudiantes y con ello construir la THA. Por ello, antes de generar este documento realizamos, individualmente, cada uno de los problemas que habíamos planteado, para conseguir determinar qué elementos debemos de tener en cuenta.

A partir de lo anterior, establecemos la organización temporal que debemos seguir para llevar al aula la propuesta. La propuesta será desarrollada en un total de 6 sesiones, las cuales tendrán una duración de 55 minutos. Además, hemos decretado la metodología que tendremos que utilizar para llevar los problemas al aula. Los estudiantes se organizarían en grupos, utilizando la estrategia 1-2-4, de forma que se abordará previamente de manera individual y después en equipos. A excepción, de la última fase, la cual se abordará en gran grupo.

La primera sesión tendrá una función motivacional, es decir, se introduce a través del uso de ejemplos el concepto de estimación. Para ello utilizaremos la estrategia que nos ofrece la rutina de pensamiento: veo, pienso, me pregunto. Por tanto, se tratará de una exposición con alta carga visual.

Se mostrarán dos imágenes como las que se muestran a continuación, con las que proponemos al alumnado distinguir en qué situación resulta más conveniente llevar a cabo un proceso de estimación. De esta forma buscamos diferenciar conteo de estimación.



Se añadirán diferentes tipos de situaciones en las que se les mostrará otros ejemplos vinculados con capacidad, unidades monetarias, etcétera, donde lo importante no es la cantidad exacta sino la necesidad de poder hacer una estimación y que a la vez construya el sentido numérico de la magnitud, por lo que se vean obligados a estimar.

En las tres sesiones siguientes, el docente introducirá los problemas planteados haciendo uso del documento del alumno. De esta forma, lo que se pretende es establecer el proceso de resolución siguiendo los pasos descritos anteriormente. A continuación, a modo de ejemplo, exponemos el problema de la biblioteca para determinar a qué debe de atender el docente cuando lleve los problemas que hemos desarrollado a la práctica, puesto que las otras son equivalentes.

En primer lugar, para introducir la **fase de comprender** se leerá el problema en voz alta, tras ello se realizarán preguntas que nos permitan conocer que el alumnado ha comprendido correctamente el problema, estas cuestiones se llevarán a cabo de forma oral. Preguntas como:

¿Qué nos pide el problema?

Tras ello, el alumnado deberá identificar cuáles son los **datos** que nos da el problema, para conseguir que el alumnado obtenga toda la información que será necesaria para resolver el problema. Para ello, el alumnado deberá dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué ves en la imagen?

¿Qué información nos da el enunciado?

¿Cuántas estanterías hay?

¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros?

Dichas cuestiones serán planteadas de forma escrita y se realizarán de forma individual y grupal, pues lo que se pretende es que a través de la estrategia cooperativa 1-2-4, en primer lugar, el alumnado razone sobre las cuestiones planteadas y a continuación en parejas, discutan sobre las respuestas planteadas, para después, tras haber determinado qué propuesta es más

adecuada, en grupos de 4 personas debatan de nuevo estableciendo finalmente una propuesta, la cual será la que expongan de manera escrita; de esta forma entre todos aportan ideas que pueden resultar complementarias y a partir de ello, generar conclusiones. Dentro de este apartado el alumnado debe reflejar tanto la información que el problema presenta de forma explícita como la información implícita, o comúnmente conocida como información oculta, la cual estará presente en la imagen.

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos. Por tanto, consideraremos como datos los siguientes elementos:

- **Elementos que aparecen en la imagen:** La biblioteca se divide en 9 estanterías, cada una de ellas con un total de 9 estantes, a excepción de 1, que únicamente tiene 4. Cada estante tiene alrededor de 10 o 11 libros. Los libros tienen diferentes anchos, no todas las estanterías están llenas. Aparecen estanterías que no se ven de manera completa. Se pedirá al alumnado que resuelva el problema contando también con aquello que no se ve.
- **Información que nos da el enunciado:** En un centro escolar, un bibliotecario quiere conocer el número aproximado de libros que hay en la biblioteca. La directora cree que hay aproximadamente 890 libros.
- **Cuántos estantes hay:** La biblioteca consta de un total de 70 estantes.
- **Determinar si existe variación en el número de libros en cada estante:** Existe variación entre el nº de libros de cada estante, pues en algunas estanterías hay 14 libros, mientras que en otras aparecen como mínimo 8 libros.
- **Datos específicos de cada problema, determinar si son iguales o no todos los libros:** No, unos libros son más anchos que otros.

A continuación, utilizando la misma estrategia que en el apartado anterior. Se definirán cuáles son las *relaciones* existentes en el problema, es decir, de qué forma se interconectan los datos. Para ello, se emplearán cuestiones a resolver de manera escrita. Las preguntas que deberán responder son las siguientes:

¿Qué nos pide el problema?

¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta?

¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías?

¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías?

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos.

- **Qué nos pide el problema:** Determinar si estamos o no de acuerdo con la estimación realizada por la directora y realizando para ello, nuestra propia estimación sobre el número de libros con el que cuenta la biblioteca.
- **Información que necesitamos para poder dar una respuesta:** Conocer el número de estantes y el número aproximado de libros por estante.
- **Relación existente entre los elementos que aparecen en el problema:** Conociendo el número de estantes por el que se conforma la biblioteca y el número aproximado de libros que hay en cada estante, podremos conocer cuántos libros hay aproximadamente en la biblioteca.

Por otro parte, tenemos el *plan*, en este apartado el alumnado deberá redactar los pasos a seguir para elaborar el problema. Siguiendo la estrategia de trabajo planteada anteriormente, primero lo harán individualmente, luego debatirán en parejas y posteriormente, en grupos de cuatro personas, los posibles pasos a seguir para resolver el problema. Del mismo modo, se introducen preguntas que el alumnado deberá responder:

¿Cómo podemos ayudar a la directora a estimar el número de libros?

¿Qué pasos seguirías?

Este apartado anterior a la ejecución del problema se ha incluido porque es importante que el alumnado no elimine el proceso de ejecución del plan a pesar de que haya errores evidentes, ya que es importante para el desarrollo de nuestro proyecto. Esto nos permitirá analizar donde se presentan las principales dificultades y qué aspectos debemos reforzar. En la resolución podemos establecer tres formas principales que se pueden dar, aunque debemos ser conscientes que se trata de un problema abierto, donde la solución no va a ser única, sino que será el uso de una estrategia u otra, la que defina una buena aproximación. Esto, enfrenta a los estudiantes a problemas que no son de respuesta única. Algunas de las posibles formas para abordar el problema pueden ser:

**Opción A:** Para poder ayudar al bibliotecario a conocer el número aproximado de libros que hay en la biblioteca del colegio debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar un número medio de libros por estante.

2. Conociendo cuántos libros hay aproximadamente en cada estante, el siguiente paso es conocer cuál es el número total de estantes.
3. Finalmente, a través de una operación numérica, en este caso, una multiplicación, podremos conocer cuál es el número aproximado de libros. Los múltiplos de la multiplicación deben ser el nº aproximado de libros que hay por estante y el nº de estantes de la biblioteca.

**Opción B:** Para ayudar a la directora a estimar el número aproximado de libros que hay en la biblioteca hay que seguir los siguientes pasos.

1. Mirar qué columnas son iguales y tienen las mismas filas.
2. Una vez clasificadas las columnas, tenemos que calcular cuántos libros hay según la clasificación de cada columna. Para ello, contamos los libros de una estantería de una de esas columnas y suponemos que todas las estanterías tienen los mismos libros. A su vez, lo multiplicamos por el número de filas que tiene esa columna.
3. Por último, sumamos el número total de las 9 columnas que encontramos.

**Opción C:** Para poder determinar cuántos libros hay aproximadamente y así ayudar al bibliotecario, debemos de:

1. Calculamos el número de libros que hay aproximadamente en cada fila.
2. Establecer el número de baldas que componen una estantería.
3. Determinar cuántas estanterías componen la habitación.
4. Para finalizar multiplicamos el número de libros por las baldas y el resultado por el número de estanterías que hay en la habitación.

Después de determinar cuál será nuestro plan de acción, se llevará a cabo la **ejecución del plan**, es decir, el alumnado deberá desarrollar los pasos planteados para resolver el problema. En este apartado el alumnado dispone de un espacio en blanco para que de forma libre desarrolle su plan, lo que se pretende es que el alumnado no se encuentre con una predisposición por parte del docente a la realización de operaciones, sino que las realice si considera que son necesarias u opte por cualquier otro tipo de estrategia de resolución.

**Opción A:** *Ejecución del plan*

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"><li>1. <math>14 + 8 = 22</math>; <math>2 = 11</math> libros aprox. por estante.</li><li>2. En total la biblioteca consta de 70 estantes.</li></ol> |
|--|

3.  $11 \text{ (libros/estante)} \times 70 \text{ (estantes)} = 770 \text{ libros aproximadamente en la biblioteca}$

**Opción B: Ejecución del plan**

1. Columnas con las mismas filas:
  - a. Columnas 1 y 9: 5 filas
  - b. Columnas 2 y 8: 7 filas
  - c. Columnas 3, 4, 6 y 7: 9 filas
  - d. Columna 5: 4 filas
2. Libros según las columnas:
  - a. Columnas 1 y 9:  
 $7 \text{ libros} \times 5 \text{ filas} = 35 \text{ libros}$   
 $35 \text{ libros} \times 2 \text{ columnas} = 70 \text{ libros}$
  - b. Columnas 2 y 8:  
 $11 \text{ libros} \times 7 \text{ filas} = 77 \text{ libros}$   
 $77 \text{ libros} \times 2 \text{ columnas} = 154 \text{ libros}$
  - c. Columnas 3, 4, 6 y 7:  
 $13 \text{ libros} \times 9 \text{ filas} = 117 \text{ libros}$   
 $117 \text{ libros} \times 4 \text{ columnas} = 468 \text{ libros}$
  - d. Columna 5:  $14 \text{ libros} \times 4 \text{ filas} = 56 \text{ libros}$
3. Número total de columnas:  $70 + 154 + 468 + 56 = 748 \text{ libros aproximadamente en la biblioteca.}$

**Opción C: Ejecución del plan**

1. Calculamos el número de libros que hay aproximadamente en cada balda.  
12 libros en cada balda aproximadamente.
2. Establecer el número de baldas que componen una estantería.  
Una estantería está compuesta por 8 baldas aproximadamente.
3. Determinar cuántas estanterías componen la habitación.  
La habitación está compuesta por 9 estanterías.
4. Multiplicar el número de libros por las baldas y el resultado por el número de estanterías que hay en la habitación.  
 $12 \text{ libros} \times 8 \text{ baldas} = 96 \text{ libros.}$   
 $96 \text{ libros} \times 9 \text{ estanterías} = 864 \text{ libros.}$

Por último, debemos dar la **solución**, donde el alumnado tratará de responder a las cuestiones que plantea el problema. Las cuestiones a resolver son las siguientes:

¿Estás de acuerdo con la estimación de la directora?

¿Cuántos libros estimas tú que hay?

¿La solución que has puesto es igual a la de tus compañeros?

Como es evidente, habrá diferentes soluciones. Por ello habrá que buscar la forma de gestionar y acordar cómo validamos una respuesta frente a otra de forma que se debe establecer un diálogo en el que en todo momento estará la estimación en el centro de la cuestión a determinar. Algunos criterios que puede tener en cuenta el profesor para tomar la decisión sobre la validez de la estimación serán, principalmente tres:

- El **método** empleado para la resolución del problema. En este caso, la explicación de lo realizado, aquello que nos permitirá justificar el resultado obtenido, es decir, que los



pasos desarrollados en el plan presenten coherencia con los resultados y permitan explicar por qué se ha generado ese resultado y no otro.

- Un **rango de cantidades**, determinar qué es lo que vamos a tomar como válido. Este rango de cantidades varía en cada uno de los problemas, por tanto, entenderemos como valores válidos aquellos que rondan entre los 10 a 11 como número de libros que hay como media en cada estante. A partir de lo anterior, el número aproximado de libros que hay en la biblioteca debe estar entre 700 y 800 libros.
- Que la **toma de decisiones sea coherente** con la respuesta que obtuvieron. Que interpreten correctamente el resultado, por tanto, sean capaces de responder a las cuestiones que plantean cada uno de los problemas. En el caso del problema 1, deben llegar a la conclusión de que la estimación de la directora no es fina.

Esta propuesta, que incluye el análisis desarrollado a través de la THA facilita que el profesor tome conciencia de dónde pueden mostrar dificultades los estudiantes a la hora de resolver el problema de forma que pueda anticiparse y atender dichas dificultades. Para ello, hemos descrito las diferentes dificultades que se podrían presentar durante el proceso de resolución de los problemas.

La quinta sesión estará destinada tanto a la evaluación del alumnado, como de la propuesta en sí. Para la evaluación de la propuesta hemos configurado una lista de control (Anexo 4), a través de la cual el profesorado podrá comprobar si la propuesta genera resultados positivos o negativos, y en qué medida. Por otro lado, para llevar a cabo la evaluación del alumnado, hemos optado por llevar a cabo una prueba objetiva, en la cual deberán de configurar, individualmente, un problema visual siguiendo la estrategia de resolución de problemas que se plantea en la propuesta.

En la sexta sesión y última sesión, se intercambiarán los problemas planteados en la sesión anterior con alguno de sus compañeros, para que resuelvan el problema. A continuación, serán sus propios compañeros, a través de la coevaluación (Anexo 5), los que evaluarán la propuesta resultante.

### **C) Dificultades recogidas en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.**

Teniendo en cuenta lo explicado con anterioridad, resulta necesario establecer por adelantado qué momentos del aprendizaje de los estudiantes pueden generar dificultades, y definir cómo desarrollar la enseñanza de forma que ayude a su superación.

Se pueden desarrollar dificultades relacionadas con la comprensión del enunciado, pues puede ocurrir que el alumnado no entienda el enunciado o no identifique correctamente los datos. Del mismo modo, como se trata de una técnica de resolución de problemas novedosa donde la imagen juega un papel primordial, puede que el alumnado por sí mismo no utilice la imagen como un elemento más que incorpora datos del problema. Por ello, es importante el uso correcto del documento del alumno, que en unión con el apoyo del docente actúan como guía en el proceso de resolución, consiguiendo que el alumnado desarrolle el problema correctamente.

Pueden aparecer dificultades a la hora de resolver el problema, es decir, que el alumnado no sepa qué estrategia utilizar para afrontar el problema. Ante esta situación proponemos como estrategia para el docente que se produzcan este tipo de situaciones hemos desarrollado el documento del alumno, es decir, un documento que actúe como guía. Del mismo modo, este documento está planteado para que el alumnado, trabajando de manera cooperativa, se ayuden entre ellos; por ese motivo, proponemos que cada una de las cuestiones planteadas sean realizadas en primer lugar, de manera individual y a continuación, en pequeños grupos, para poder así debatir y conocer otras posibilidades. Esta puesta en grupo va a generar en el alumnado diferentes respuestas a las preguntas que aparecen en los problemas, necesarias para poder llegar a determinadas conclusiones, como, por ejemplo, la existencia de diferentes soluciones o maneras de abordar el problema.

Además, hemos desarrollado los dos primeros problemas de una forma más guiada, pero para conseguir que el alumnado trabaje de una forma más autónoma, el último de los problemas presenta menos indicaciones, de esta forma pretendemos que el alumnado ponga en práctica la toma de referentes como estrategia. Utilizando los mecanismos de resolución aplicados en los problemas anteriores para buscar y determinar la forma por la cual puede obtener una solución.

## **5. CONCLUSIÓN.**

En conclusión, debemos entender que plantear problemas con imágenes como construcciones que parten de “problemas sobre situaciones reales” o “problemas de procesos”, es decir, problemas en los que el enunciado lo ofrece una imagen o fotografía que buscaremos que sea cercana a los estudiantes, por tanto, la imagen y fotografía será un elemento imprescindible para poder comprender y resolver un problema.

Este tipo de problema trata situaciones reales o de la vida cotidiana con las que puede encontrarse el niño, además, para su resolución se llevan a cabo estrategias de resolución de problemas descritas en los trabajos de Polya (1945) e incluidas y trabajadas a través del proyecto “ProyectaMates”. Este planteamiento está compuesto por 4 fases, las cuales han sido adaptadas en nuestra propuesta para facilitar al alumnado a descubrir los elementos de la imagen que son claves, ayudándoles a reconocer dichos elementos y adquirir los contenidos que se trabajan en el problema. Del mismo modo, estas cuatro fases están descritas en la base de orientación, cuyo objetivo es que el alumnado pueda anticipar y planificar los pasos a seguir para la resolución de los problemas matemáticos.

A partir de lo anterior, proponemos el desarrollo de THA como organizador del docente, pues a través de esta, se genera una secuencia de actividades basadas en las metas de aprendizaje que se persiguen; a la vez que ayuda al docente a identificar cuáles son los conocimientos previos del alumnado. De esta forma el docente conforma lo que se define como propuesta de trabajo.

Centrándonos en el proceso de elaboración de esta propuesta consideramos que debemos compartir que buscar imágenes que puedan ser generadoras de problemas no ha sido una tarea sencilla y requiere también, que el profesor desarrolle habilidades para ello. Entre las dificultades encontradas, destacamos:

- **La imagen no es esencial.** en ocasiones ocurre que, aunque el planteamiento del problema parece estar bien, pues cumple todos los propósitos marcados, la imagen que lo acompaña no aporta información sino es una simple representación de la información que da el enunciado. Por tanto, estaríamos ante un problema en el que la resolución se puede hacer sin problema sin necesidad de hacer uso de la imagen.
- **La imagen no es clara o tiene muchos distractores.** Es importante tener en cuenta el nivel al que nos dirigimos. Algunas imágenes contienen información que no es necesaria para resolver el problema, lo cual puede producir dificultades en el alumnado de algunos cursos de la Educación Primaria cuando deben segregar la información necesaria de la información adicional. Sin embargo, si hablamos de cursos más avanzados el uso de estas imágenes pueden ser positivo para el alumnado, pues dota el problema de otro elemento importante, la capacidad de discernir y rescatar de la imagen únicamente la información que necesito.

- **Perspectiva que ofrece la imagen:** El uso de imágenes con una determinada perspectiva puede generar dificultades en el alumnado pues no supone un problema para el desarrollo del aprendizaje que planteamos. Por ello, es importante optar por imágenes con una perspectiva frontal o de plano aéreo.
- **Problema, Imagen y currículo.** Pueden presentarse dificultades para adaptar las imágenes a los contenidos del currículo de Matemáticas de Educación Primaria.

Finalmente, nos gustaría comentar una limitación que tiene esta propuesta. Inicialmente, la propuesta fue diseñada para ponerla en práctica en el aula, no obstante, debido a la crisis sanitaria ocasionada por la COVID-19 nos vimos en la obligación de reconducirla, por lo que quedaría pendiente su puesta en práctica para observar los posibles resultados de la propuesta en el aula.

En definitiva, el uso de problemas con imágenes supone la introducción en el aula de un elemento innovador y motivador para el alumnado, a su vez, genera un modelo de enseñanza-aprendizaje a través del cual el niño realiza problemas matemáticos para aprender matemáticas, por tanto, deja atrás la idea de aprender matemáticas para resolver problemas.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Aparicio, P., Marrero, I. y Camacho, M. (2019) El humor gráfico como recurso didáctico en el aula de Matemáticas: Una propuesta adaptada a los currículos LOMCE de ESO y Bachillerato. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 101,151-157. Recuperado de [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/101/Propuestas\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/101/Propuestas_01.pdf)
- Barrera, R. (2018). *Caracterización de la subitización perceptual y conceptual en niños de grado primero, a través de una serie de tareas bajo el enfoque de trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, D.C.
- Beltrán, P. (2019). Algunas tareas de estimación en series de dibujos animados. *Educación Matemática en la Infancia*, 7(2), 113-122. Recuperado de <http://edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/67/62>
- Beltrán, P. (2016). Utilizando memes con tus alumnos. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 91, 129-134. Recuperado de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/91/Experaula.pdf>

- Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. & Lozano, M. J. (2002). *PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Ed. Complutense.
- Blanco, L. J. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiantes para profesores*. Badajoz: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura.
- Blanco, L. J., Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas? En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero. (1ª Ed.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 81-91). Cáceres: España.
- Borasi, R. (1986). On the nature of Problem. *Educational Studies in Mathematics*. 17, pp. 125-141.
- Boscán, M. M., Klever, K. L. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*. 10(2), pp. 7-19. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4496526>
- Butts, T. (1980). *Posing problems property*. NCTM Yearbook, 1980, pp. 23-34.
- Charles, R; Lester, F. (1982). *Teaching problem solving. What, Why, How*. Palo Alto: California
- Decreto 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la Ordenación y el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias*, 156, pp. 323-385. Recuperado de <http://www.gobiernodecanarias.org/boc/2014/156/001.html>
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), pp. 79-98.
- House, PA; Wallace, ML; Johnson, MA. (1983). Problem Solving as a Focus: How? When? Whose Responsibility? *The agenda in action*, pp. 9-19
- León, O. L., Díaz, F. y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), pp. 9-28.

- Modrego, A., Beltrán, P. (2019). Una propuesta para la enseñanza de situaciones aditivas en infantil con dibujos animados. *Entorno abierto*, 29, pp. 7-12. Recuperado de <https://tierradenumeros.com/publication/201907-ea-dibujos/201907-ea-dibujos.pdf>
- Pino, J. (2015). Tipos de problemas de Matemáticas. En L. J. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero. (1ª Ed.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria*, pp. 187-207. Cáceres: España.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Real Academia Española (2019). *Diccionario de la lengua española*. Recuperado de <https://dle.rae.es>
- Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender: 10 ideas clave*. Barcelona, España: GRAÓ.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press Inc.
- Simon, M.A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), pp. 114-145.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), pp. 91-104.
- Steffe, L., & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer-Verlag.
- Villalonga, J., & Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.) *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp.36, n.68). Cartagena: España.

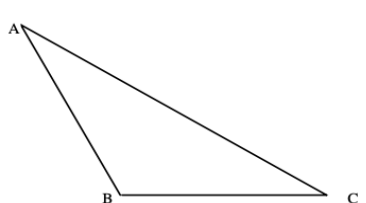


## ANEXOS

### ANEXO 1. TABLA. CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN BLANCO (1991).

<b>TIPOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.</b>	
<b><i>Ejercicios de reconocimiento</i></b>	<p>Este tipo de ejercicios pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <math>3+7 &gt; 2+5</math>. ¿Verdadero o falso?         </div>
<b><i>Ejercicios algorítmicos</i></b>	<p>Son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">           Encontrar el factor que falta: <math>25 \times 4 = 20 \times \underline{\quad}</math> </div>
<b><i>Problemas de traducción simple o compleja</i></b>	<p>Problemas formulados en un contexto determinado y que contienen en su propio enunciado el mecanismo de resolución, la estrategia a seguir.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><i>“Un salón para realizar reuniones o ceremonias tiene una tarifa fija de 100 euros, más un cobro adicional de 30 euros por hora. Si se contrata el salón para hacer una ceremonia de 2 horas y 15 minutos, ¿cuánto habrá que pagar por el arriendo del salón?”</i></p> </div>
<b><i>Problemas de procesos</i></b>	<p>Son problemas que se diferencian de los anteriormente expuestos en el hecho de que el enunciado de este no anticipa una forma de cálculo o resolución determinada. De forma que deja una puerta abierta a diferentes formas de afrontar la tarea para obtener una solución. Por tanto, ayudan a desarrollar en los discentes estrategias generales de comprensión, planificación y resolución de problemas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p><i>“En un club de ajedrez hay 15 miembros. Si cada uno juega una partida contra cada uno de los demás miembros, ¿cuántas partidas podrían jugarse?”</i></p> </div>
<b><i>Problemas sobre situaciones reales</i></b>	<p>A través de este tipo de problemas lo que se pretende es plantear actividades que se aproximen lo máximo posible a situaciones reales para el estudiante. Requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. De esta forma, aunque no sean típicamente matemáticos, las Matemáticas juegan un papel primordial a la hora de obtener una solución.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <p><i>“Queremos cambiar las baldosas de dos clases y del pasillo del colegio, ¿cuántas baldosas necesitaremos?, ¿podremos hacer una estimación del costo?”</i></p> </div>



<p><b><i>Problemas de investigación matemática</i></b></p>	<p>Son problemas directamente relacionados con contenidos matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener una estrategia de resolución, por tanto, pretenden que sea el estudiante quien indague sobre algún modelo útil para obtener una solución.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p><i>“Probar que, si los tres términos de una progresión aritmética es 36, el término del medio vale 12”.</i></p> </div>
<p><b><i>Problemas de puzles</i></b></p>	<p>Este tipo de problemas pretende hacer evidente el potencial recreativo de las Matemáticas. Pues se trata de problemas engañosos en los que el discente debe considerar diferentes perspectivas y mantener la mente abierta ante diversas formas de resolución. En este tipo de problemas es común que la resolución no pase por la elaboración de procesos matemáticos, sino lo que Blanco (1991) define como una “chispa” o “idea feliz”.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p><i>“Dividir un triángulo obtusángulo en triángulo acutángulos”</i></p>  </div>
<p><b><i>Historias matemáticas</i></b></p>	<p>Este tipo de problemas está presente en cuentos o novelas, en los cuales podemos encontrar planteamientos que requieren para su resolución realizar un esfuerzo que implica a su vez algún concepto matemático. Del mismo modo, Blanco (1991) expone el uso de ciertas situaciones de la literatura que, aunque en algunos casos no fueron escritas con esa finalidad pueden aprovecharse como material didáctico en la enseñanza de las Matemáticas.</p>

## ANEXO 2. DOCUMENTO DEL ALUMNO.

### PROBLEMA 1: LA BIBLIOTECA DEL COLE.

El bibliotecario del colegio quiere conocer el número aproximado de libros que hay en la biblioteca. La directora estima que deben de haber alrededor de 890 libros. ¿Estás de acuerdo con esta estimación? Haz tu propia estimación de la cantidad de libros que hay en la biblioteca.



INDIVIDUAL

**DATOS**

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Qué ven en la imagen? <hr/> ¿Qué información nos da el enunciado? <hr/> ¿Cuántas estanterías hay? <hr/> ¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros? <hr/> ¿Todos los libros son iguales? <hr/>
---

¿Qué ven en la imagen? <hr/> ¿Qué información nos da el enunciado? <hr/> ¿Cuántas estanterías hay? <hr/> ¿Todas las estanterías tienen el mismo número de libros? <hr/> ¿Todos los libros son iguales? <hr/>
---

INDIVIDUAL

**RELACIONES**

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Qué nos pide el problema? <hr/> ¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta? <hr/> ¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías? ¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías? <hr/> <hr/> <hr/>
--

¿Qué nos pide el problema? <hr/> ¿Qué información necesitamos para poder dar una respuesta? <hr/> ¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías? ¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías? <hr/> <hr/> <hr/>
--

**PLAN**

INDIVIDUAL

¿Cómo podemos ayudar a la directora a estimar el número de libros? ¿qué pasos seguirías?

---

---

---

---

---

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Cómo podemos ayudar a la directora a estimar el número de libros? ¿qué pasos seguirán?

---

---

---

---

---

**EJECUCIÓN DEL PLAN**

En este espacio debes desarrollar los pasos que has creado en el plan

**SOLUCIÓN**

INDIVIDUAL

¿Estás de acuerdo con la estimación de la directora?

---

---

---

¿Cuántos libros estimas tú que hay?

---

---

---

¿La solución que has puesto es igual a la de tu compañero?

---

---

---

---

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Están de acuerdo con la estimación de la directora?

---

---

---

¿Cuántos libros estiman ustedes que hay?

---

---

---

¿La solución que han puesto es igual a la de sus compañeros?

---

---

---

---

**PROBLEMA 2 SALÓN DE ALEXANDRA PALACE.**

Este salón en Alexandra Palace en el norte de Londres se ha llenado de sillas. El preparador de eventos estima que en la sala deben de haber alrededor de 200 sillas ¿Habrà llevado a cabo correctamente el preparador su estimación? ¿Podrías estimar el número de sillas que hay en el salón?



**DATOS**

INDIVIDUAL	REFLEXIÓN DE EQUIPO
¿Qué ves en la imagen? _____	¿Qué ven en la imagen? _____
¿Qué información nos da el enunciado? _____ _____	¿Qué información nos da el enunciado? _____ _____
¿Cuántas filas hay? _____	¿Cuántas filas hay? _____
¿Todas las filas tienen el mismo número de sillas? _____	¿Todas las filas tienen el mismo número de sillas? _____

**RELACIONES**

INDIVIDUAL	REFLEXIÓN DE EQUIPO
¿Qué nos pide el problema? _____	¿Qué nos pide el problema? _____
¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta? _____ _____	¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta? _____ _____
¿Qué relación hay entre las filas y las sillas? ¿Podemos conocer el número de sillas aproximado a través del número de filas? _____ _____	¿Qué relación hay entre las filas y las sillas? ¿Podemos conocer el número de sillas aproximado a través del número de filas? _____ _____

**PLAN**

INDIVIDUAL

¿Cómo podemos conocer el número de sillas que hay? ¿qué pasos seguirías?

---

---

---

---

---

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Cómo podemos conocer el número de sillas que hay? ¿qué pasos seguirías?

---

---

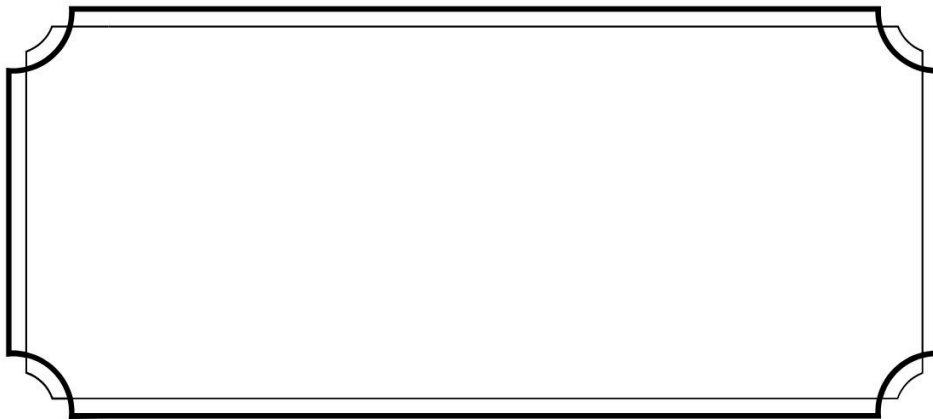
---

---

---

**EJECUCIÓN DEL PLAN**

En este espacio debes desarrollar los pasos que has creado en el plan



**SOLUCIÓN**

INDIVIDUAL

¿Estás de acuerdo con la estimación del preparador de eventos?

---

¿Cuántas sillas estimas tú que hay?

---

¿La solución que has puesto es igual a la de tu compañero?

---

---

---

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Están de acuerdo con la estimación del preparador de eventos?

---

¿Cuántas sillas estimas que hay?

---

¿La solución que han puesto es igual a la de tu compañero?

---

---

---

### PROBLEMA 3: EL CARNAVAL

En el carnaval de este año se concentraron alrededor de 6.000 personas entre las palmeras de la plaza según la información aportada por un periódico local. Sabiendo que entre cada palmera (de adelante a atrás) que aparecen en la imagen hay una distancia de 7 metros, ¿podrías estimar la cantidad de personas que se encuentran en el rectángulo formado por las palmeras? ¿La estimación del periódico era correcta?



#### DATOS

INDIVIDUAL

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Qué ves en la imagen?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Qué información nos da el enunciado?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cuántas palmeras hay?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Todas las palmeras están a la misma distancia?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cuántas personas hay aproximadamente en la primera fila desde el escenario?  
 \_\_\_\_\_

¿Qué ven en la imagen?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Qué información nos da el enunciado?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cuántas palmeras hay en la imagen?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Todas las palmeras están a la misma distancia?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Cuántas personas hay aproximadamente en la primera fila desde el escenario?  
 \_\_\_\_\_

#### RELACIONES

INDIVIDUAL

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Cuántas personas caben en 1 metro? ¿Y en 7 metros?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Algo de lo que has hecho en los problemas anteriores te sirve para este?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

¿Cuántas personas caben en 1 metro? ¿Y en 7 metros?  
 \_\_\_\_\_  
 ¿Algo de lo que han hecho en los problemas anteriores te sirve para este?  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**PLAN**

INDIVIDUAL

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Qué pasos seguirías para saber el número de personas que hay?

---

---

---

---

---

¿Qué pasos seguirían para saber el número de personas que hay?

---

---

---

---

---

**EJECUCIÓN DEL PLAN**

En este espacio debes desarrollar los pasos que has creado en el plan

**SOLUCIÓN**

INDIVIDUAL

REFLEXIÓN DE EQUIPO

¿Estás de acuerdo con la estimación del periódico local?

---

¿Cuántas personas estimas tú que hay?

---

¿La solución que has puesto es igual a la de tu compañero?

---

---

---

---

¿Estás de acuerdo con la estimación del periódico local?

---

¿Cuántas personas estimas tú que hay?

---

¿La solución que has puesto es igual a la de tu compañero?

---

---

---

---

### ANEXO 3. DOCUMENTO DEL DOCENTE.

#### I. ¿QUÉ VAMOS A HACER?

Vamos a llevar al aula de 4º de Primaria 3 problemas matemáticos en los cuales la imagen actuará como soporte principal para la resolución, con la finalidad de analizar la motivación y aceptación por parte del alumnado.

#### II. JUSTIFICACIÓN CURRICULAR DE LA PROPUESTA.

La propuesta (Anexo 2) está conformada por 3 problemas que abordan el contenido de estimación:

**Criterio de Evaluación número 6:** Estimar, comparar, medir y expresar cantidades en situaciones relacionadas con magnitudes de longitud, peso/masa, superficie, capacidad y tiempo para resolver situaciones problemáticas.

Dentro de este abordaremos el contenido 3: Conocimiento y uso de las unidades principales de tiempo (hora, minuto, día, mes y año), longitud (m, cm, mm, km), masa (g, kg), capacidad (l, cl, ml), y superficies rectangulares (con unidades no convencionales). Utilización de las unidades de uso habitual del sistema métrico decimal. Comparación y ordenación de unidades, y cantidades de una misma magnitud. Y evaluaremos los siguientes estándares:

- 4. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc.
- 71. Estima longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos, eligiendo la unidad y los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida, explicando de forma oral el proceso seguido y la estrategia utilizada.
- 72. Mide con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida.
- 89. Resuelve problemas de medida, utilizando estrategias heurísticas de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando y tomando decisiones y valorando las consecuencias de estas y la conveniencia de su utilización.

Para finalizar, las competencias que trabajaremos son las siguientes:



- **CMCT:** “Habilidad de interacción, de exponer sus propias ideas, dudas y explicaciones, pero se hará necesario el respeto de los puntos de vista diferentes y la capacidad para reorganizar las ideas a partir de las aportaciones de las demás personas, generando nuevas propuestas que mejoren las reflexiones anteriores”.
- **AA:** “Desarrollo de técnicas para organizar, memorizar y recuperar la información, tales como resúmenes, esquemas o mapas mentales que resultan especialmente útiles en los procesos de aprendizaje”.
- **SIEE:** “Habilidad de las personas a optar por criterio propio y espíritu crítico y llevar a cabo las iniciativas necesarias para desarrollar la opción elegida y hacerse responsable de ella. Incluye la capacidad emprendedora para idear, planificar, desarrollar y evaluar un proyecto”.

### III. ¿QUÉ VAMOS A HACER CON EL ALUMNADO?

Para la realización de la propuesta el alumnado dispondrá de un total de 55 minutos (1 sesión). Durante el transcurso de la sesión se le indicará al alumnado una serie de pautas necesarias para la resolución.

En primer lugar, introduciremos el contenido de estimación a través de una breve explicación. Para ello utilizaremos la rutina de pensamiento: **veo, pienso, me pregunto**. Por tanto, se tratará de una exposición con alta carga visual. El alumnado debe de comprender que es una buena aproximación y que no lo es. Para ello, se les preguntará cuántos caramelos le hemos entregado a Carlos tomando como referencia la primera imagen, ante esto, el alumnado lo primero que hará es observar la imagen, a continuación, pensará y se preguntará de qué forma puedo resolver el problema, respondiendo finalmente que le hemos entregado a Carlos un total de 14 caramelos.



A continuación, les preguntaremos por la cantidad de caramelos que le entregamos a Carlos si le damos la bolsa que aparece en la segunda imagen. Ante esto, se repetirá el mismo

proceso que en el ejercicio anterior, es decir, en primer lugar, observarán la imagen, pensarán sobre qué es lo que deben de hacer y finalmente se preguntarán cómo puedo hacerlo. Frente a esta última cuestión el alumnado se dará cuenta de que resulta imposible contar todos los caramelos de la bolsa y realizarán una estimación del total de caramelos.



Después, se realizarán al alumnado las siguientes preguntas; con la finalidad, de que ellos razonen sobre los procesos seguidos para resolver las cuestiones planteadas e intenten llegar a una conclusión.

- ¿Qué le viene a la mente si les digo la palabra estimar?
- ¿Alguno o alguna me podría explicar que significa?
- ¿Qué estrategias podemos adoptar a la hora de estimar?

Posteriormente, se le darán algunos ejemplos para que ellos identifiquen en qué casos se lleva a cabo una correcta aproximación y en qué casos no:

- ¿Cuántos litros de agua hay en la piscina?



- ¿Cuánto dinero hay en la hucha?



- ¿Cuántos coches hay en la calle?



- ¿Cuántos coches hay en el aparcamiento?



- ¿Cuántos lápices hay?



Para continuar, se les presentará la ficha del alumno y, por tanto, los problemas que vamos a trabajar. Dentro de la ficha aparecen diversos apartados que el alumnado debe de abordar, para ello, el profesorado tendrá que actuar como guía. El proceso seguido será el mismo en todos los problemas que vamos a abordar, pudiendo aparecer variantes en las cuestiones que realizaremos al alumnado. Seguidamente, abordaremos cada uno de los problemas de manera individual.

### ***Problema 1.***

Para introducir la **fase de comprender** se leerá el problema en voz alta, tras ello se realizarán preguntas que nos permitan conocer que el alumnado ha comprendido correctamente el problema, estas cuestiones se llevarán a cabo de forma oral. Se pueden hacer preguntas del tipo:

¿Qué nos pide el problema?

Tras ello, el alumnado deberá identificar cuáles son los **datos** que nos da el problema, para conseguir que el alumnado obtenga toda la información que será necesaria para resolver el problema. Dichas cuestiones serán planteadas de forma escrita y se realizarán de forma individual y grupal, pues lo que se pretende es que a través de la estrategia cooperativa 1-2-4, en primer lugar, el alumnado razone sobre las cuestiones planteadas y a continuación en parejas, discutan sobre las respuestas planteadas, para después, tras haber determinado que propuesta es más fina, en grupos de 4 personas debatan de nuevo estableciendo finalmente una propuesta, la cual será la que expongan de manera escrita. Dentro de este apartado el alumnado debe reflejar tanto la información que el problema presenta de forma explícita como la información implícita, o comúnmente conocida como información oculta, la cual estará presente en la imagen.

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos. Por tanto, consideraremos como datos los siguientes elementos:

- El **método** empleado para la resolución del problema. En este caso, la explicación de lo realizado, aquello que nos permitirá justificar el resultado obtenido, es decir, que los pasos desarrollados en el plan presenten coherencia con los resultados y permitan explicar por qué se ha generado ese resultado y no otro.
- Un **rango de cantidades**, determinar qué es lo que vamos a tomar como válido. Este rango de cantidades varía en cada uno de los problemas, por tanto, entenderemos como valores válidos aquellos que rondan entre los 10 a 11 como número de libros que hay como media en cada estante. A partir de lo anterior, el número aproximado de libros que hay en la biblioteca debe estar entre 700 y 800 libros.
- Que la **toma de decisiones sea coherente** con la respuesta que obtuvieron. Que interpreten correctamente el resultado, por tanto, sean capaces de responder a las cuestiones que plantean cada uno de los problemas. En el caso del problema 1, deben llegar a la conclusión de que la estimación de la directora no es fina.

A continuación, utilizando la misma estrategia que en el apartado anterior, la cual estará presente a lo largo de todo el problema. Se definirán cuáles son las **relaciones** existentes en el problema, es decir, de qué forma se interconectan los datos. Para ello, se emplearán cuestiones a resolver de manera escrita. Las preguntas que deberán responder son las siguientes:

¿Qué nos pide el problema?

¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta?

¿Qué relación hay entre los libros y las estanterías?

¿Podemos conocer el número de libros aproximado a través del número de estanterías?

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos.

- **Qué nos pide el problema:** Determinar si estamos o no de acuerdo con la estimación realizada por la directora y realizando para ello, nuestra propia estimación sobre el número de libros con el que cuenta la biblioteca.
- **Información que necesitamos para poder dar una respuesta:** Conocer el número de estantes y el número aproximado de libros por estante.
- **Relación existente entre los elementos que aparecen en el problema:** Conociendo el número de estantes por el que se conforma la biblioteca y el número aproximado de libros que hay en cada estante, podremos conocer cuántos libros hay aproximadamente en la biblioteca.

Por otro parte, tenemos el *plan*, en este apartado el alumnado deberá redactar los pasos a seguir para elaborar el problema. Siguiendo la estrategia de trabajo planteada anteriormente, primero lo harán individualmente, luego debatirán en parejas y posteriormente, en grupos de cuatro personas, los posibles pasos a seguir para resolver el problema. Del mismo modo, se introducen preguntas que el alumnado deberá responder:

¿Cómo podemos ayudar a la directora a estimar el número de libros?

¿Qué pasos seguirías?

Este apartado anterior a la ejecución del problema se ha incluido porque es importante que el alumnado no elimine el proceso de ejecución del plan a pesar de que haya errores evidentes, ya que es importante para el desarrollo de nuestro proyecto. Esto nos permitirá analizar donde se presentan las principales dificultades y qué aspectos debemos reforzar. En la resolución podemos establecer tres formas principales que se pueden dar, aunque debemos ser conscientes que se trata de un problema abierto, donde la solución no va a ser única, sino que será el uso de una estrategia u otra, la que defina una buena aproximación. Esto, enfrenta a los

estudiantes a problemas que no son de respuesta única. Algunas de las posibles formas para abordar el problema pueden ser:

**Opción A:** Para poder ayudar al bibliotecario a conocer el número aproximado de libros que hay en la biblioteca del colegio debemos seguir los siguientes pasos:

4. Determinar un número medio de libros por estante.
5. Conociendo cuántos libros hay aproximadamente en cada estante, el siguiente paso es conocer cuál es el número total de estantes.
6. Finalmente, a través de una operación numérica, en este caso, una multiplicación, podremos conocer cuál es el número aproximado de libros. Los múltiplos de la multiplicación deben ser el n° aproximado de libros que hay por estante y el n° de estantes de la biblioteca.

**Opción B:** Para ayudar a la directora a estimar el número aproximado de libros que hay en la biblioteca hay que seguir los siguientes pasos.

4. Mirar qué columnas son iguales y tienen las mismas filas.
5. Una vez clasificadas las columnas, tenemos que calcular cuántos libros hay según la clasificación de cada columna. Para ello, contamos los libros de una estantería de una de esas columnas y suponemos que todas las estanterías tienen los mismos libros. A su vez, lo multiplicamos por el número de filas que tiene esa columna.
6. Por último, sumamos el número total de las 9 columnas que encontramos.

**Opción C:** Para poder determinar cuántos libros hay aproximadamente y así ayudar al bibliotecario, debemos de:

5. Calculamos el número de libros que hay aproximadamente en cada balda.
6. Establecer el número de baldas que componen una estantería.
7. Determinar cuántas estanterías componen la habitación.
8. Para finalizar multiplicamos el número de libros por las baldas y el resultado por el número de estanterías que hay en la habitación.

Después de determinar cuál será nuestro plan de acción, se llevará a cabo la **ejecución del plan**, es decir, el alumnado deberá desarrollar los pasos planteados para resolver el

problema. En este apartado el alumnado dispone de un espacio en blanco para que de forma libre desarrolle su plan, lo que se pretende es que el alumnado no se encuentre con una predisposición por parte del docente a la realización de operaciones, sino que las realice si considera que son necesarias u opte por cualquier otro tipo de estrategia de resolución.

**Opción A: Ejecución del plan**

1°  $8 = 22 : 2 = 11$  libros aprox. por estante.

2° En total la biblioteca consta de 70 estantes.

3°  $11$  (libros/estante)  $\times$   $70$  (estantes) =  $770$  libros aproximadamente en la biblioteca

**Opción B: Ejecución del plan**

1° Columnas con las mismas filas:

- a. Columnas 1 y 9: 5 filas
- b. Columnas 2 y 8: 7 filas
- c. Columnas 3, 4, 6 y 7: 9 filas
- d. Columna 5: 4 filas

2° Libros según las columnas:

- e. Columnas 1 y 9:  
 $7$  libros  $\times$   $5$  filas =  $35$  libros  
 $35$  libros  $\times$   $2$  columnas =  $70$  libros
- f. Columnas 2 y 8:  
 $11$  libros  $\times$   $7$  filas =  $77$  libros  
 $77$  libros  $\times$   $2$  columnas =  $154$  libros
- g. Columnas 3, 4, 6 y 7:  
 $13$  libros  $\times$   $9$  filas =  $117$  libros  
 $117$  libros  $\times$   $4$  columnas =  $468$  libros
- h. Columna 5:  
 $14$  libros  $\times$   $4$  filas =  $56$  libros

3° Total de columnas:

$70 + 154 + 468 + 56 = 748$  libros aproximadamente en la biblioteca.

**Opción C: Ejecución del plan**

1° Calculamos el número de libros que hay aproximadamente en cada balda.

$12$  libros en cada balda aproximadamente.

2° Establecer el número de baldas que componen una estantería.

Una estantería está compuesta por  $8$  baldas aproximadamente.

3° Determinar cuántas estanterías componen la habitación.

La habitación está compuesta por  $9$  estanterías.

4º Multiplicar el número de libros por las baldas y el resultado por el número de estanterías que hay en la habitación.

$$12 \text{ libros} \times 8 \text{ baldas} = 96 \text{ libros.}$$

$$96 \text{ libros} \times 9 \text{ estanterías} = 864 \text{ libros.}$$

Por último, aparece el apartado de **solución**, donde el alumnado deberá responder a las cuestiones que plantea el problema. Las cuestiones a resolver son las siguientes:

¿Estás de acuerdo con la estimación de la directora?

¿Cuántos libros estimas tú que hay?

¿La solución que has puesto es igual a la de tus compañeros?

Como es evidente, habrá diferentes soluciones, para gestionar esto y determinar cuáles de las soluciones son válidas y cuáles no. Para ello, se tendrán en cuenta 3 elementos:

- El **método** empleado para la resolución del problema. En este caso, la explicación de lo realizado, aquello que nos permitirá justificar el resultado obtenido, es decir, que los pasos desarrollados en el plan presenten coherencia con los resultados y permitan explicar por qué se ha generado ese resultado y no otro.
- Un **rango de cantidades**. Determinar qué es lo que vamos a tomar como válido. Este rango de cantidades varía en cada uno de los problemas, por tanto, entenderemos como valores válidos aquellos que rondan entre los 10 a 11 libros como número de libros que hay como media en cada estante. Por consiguiente, el número aproximado de libros que hay en la biblioteca debe estar entre 700 y 800 libros.
- Que la **toma de decisiones sea coherente** con la respuesta que obtuvieron. Interpretar correctamente el resultado, por tanto, sean capaces de responder a las cuestiones que plantean cada uno de los problemas. En el caso del problema 1, deben llegar a la conclusión de que la estimación de la directora no es fina.

### ***Problema 2.***

Para introducir la **fase de comprender** se leerá el problema en voz alta, tras ello se realizarán preguntas que nos permitan conocer que el alumnado ha comprendido correctamente el problema, estas cuestiones se llevarán a cabo de forma oral. Se pueden llevar a cabo preguntas del tipo:

¿Qué nos pide el problema?



Tras ello, el alumnado deberá identificar cuáles son los **datos** que nos da el problema, para conseguir que el alumnado obtenga toda la información que será necesaria para resolver el problema. Para ello, el alumnado deberá responder las siguientes preguntas:

¿Qué ves en la imagen?

¿Qué información nos da el enunciado?

¿Cuántas filas hay?

¿Todas las filas tienen el mismo número de sillas?

Dichas cuestiones serán planteadas de forma escrita y se realizarán de forma individual y grupal, pues lo que se pretende es que a través de la estrategia cooperativa 1-2-4, en primer lugar, el alumnado razone sobre las cuestiones planteadas y a continuación en parejas, discutan sobre las respuestas planteadas, para después, tras haber determinado que propuesta es más fina, en grupos de 4 personas, debatan de nuevo estableciendo finalmente una propuesta, la cual será la que expongan de manera escrita. Dentro de este apartado el alumnado debe reflejar tanto la información que el problema presenta de forma explícita como la información implícita, o comúnmente conocida como información oculta, la cual estará presente en la imagen.

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos. Por tanto, consideraremos como datos los siguientes elementos:

- **Elementos que aparecen en la imagen:** En el salón donde se observan 3 grupos de sillas. El grupo central está compuesto por alrededor de 14 filas y 16 sillas en cada una de ellas. A cada lado se aprecian 2 grupos más, los cuales no se ven al completo. Se pedirá al alumnado que resuelva el problema contando también con aquello que no se ve, utilizando como base el grupo central de sillas.
- **Información que nos da el enunciado:** En un salón lleno de sillas, un preparador de eventos estima que hay 200 sillas en un salón.
- **Cuántas filas hay:** hay 14 filas.
- **Determinar si existe variación en el número de sillas por cada fila:** Partiendo de que los tres grupos de sillas son iguales, no existe variación.

A continuación, utilizando la misma estrategia que en el apartado anterior, la cual estará presente a lo largo de todo el problema. Se definirán cuáles son las **relaciones** existentes en el problema, es decir, de qué forma se interconectan los datos. Para ello, se emplearán cuestiones a resolver de manera escrita. Las preguntas que deberán responder son las siguientes:

¿Qué nos pide el problema?

¿Qué información necesitas para poder dar una respuesta?

¿Qué relación hay entre las filas y las sillas?

¿Podemos conocer el número de sillas aproximado a través del número de filas?

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos.

- **Qué nos pide el problema:** Determinar si el preparador de eventos ha llevado a cabo o no de forma fina la estimación sobre el total de sillas que hay en la sala, realizando para ello nuestra propia aproximación.
- **Información que necesitamos para poder dar una respuesta:** El número de grupo de sillas, el número de filas de cada grupo y el número aproximado de sillas que hay en cada una de las filas.
- **Relación existente entre los elementos que aparecen en el problema:** A través del número de filas de las cuales están compuestos los 3 grupos de sillas y el número de sillas aproximado por el que está compuesto cada una de estas filas, podremos conocer el número aproximado de sillas que hay en total.

Por otro parte, tenemos el **plan**, en este apartado el alumnado deberá redactar los pasos a seguir para elaborar el problema. Siguiendo la estrategia de trabajo planteada anteriormente, primero lo harán individualmente, luego debatirán en parejas y posteriormente, en grupos de cuatro personas, los posibles pasos a seguir para resolver el problema. Del mismo modo, se introducen preguntas que el alumnado deberá responder:

¿Cómo podemos conocer el número de sillas que hay?

¿Qué pasos seguirías?

Este apartado anterior a la ejecución del problema se ha incluido porque es importante que el alumnado no elimine el proceso de ejecución del plan a pesar de que haya errores evidentes, ya que es importante para el desarrollo de nuestro proyecto. Esto nos permitirá

analizar donde se presentan las principales dificultades y qué aspectos debemos reforzar. En la resolución podemos establecer tres formas principales que se pueden dar, aunque debemos ser conscientes que se trata de un problema abierto, donde la solución no va a ser única, sino que será el uso de una estrategia u otra, la que defina una buena aproximación. Esto, enfrenta a los estudiantes a problemas que no son de respuesta única. Algunas de las posibles formas para abordar el problema pueden ser:

**Opción A:** Para poder estimar el número de sillas que hay en el salón del palacio, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar el número aproximado de filas en cada grupo de sillas.
2. Determinar el número aproximado de sillas que hay en cada fila.
3. A través de una operación numérica, en este caso, una multiplicación, conocer cuál es el número aproximado de sillas en el grupo central.
4. Por último, multiplicar el paso anterior por los 3 grupos de silla que hay en el salón.

**Opción B:** Para estimar el número aproximado de sillas que encontramos en el salón, hay que seguir una serie de pasos:

1. Señalar el número de sillas que hay de un lado al otro del salón.
2. Calcular el número de sillas que hay a lo largo del salón, es decir, de atrás hacia la pantalla.
3. Una vez calculada el número de sillas que hay a lo largo y de un lado a otro, lo multiplicamos.
4. Por último, el resultado de la multiplicación anterior lo volvemos a multiplicar por 3, pues hay 3 tandas de sillas en el salón.

**Opción C:** Para determinar si el preparador de eventos ha estimado bien la cantidad de sillas que hay en el salón debemos:

1. Contar cuántas sillas componen la última fila.
2. Calcular el número de sillas que hay una detrás de otra desde el inicio del escenario hasta el final.

3. Multiplicar ambos resultados para hallar el número de sillas que hay en el grupo central.
4. Multiplicar la cantidad de sillas en el grupo central por 3, ya que son tres grupos iguales.

Después de determinar cuál será nuestro plan de acción, se llevará a cabo la **ejecución del plan**, es decir, el alumnado deberá desarrollar los pasos planteados para resolver el problema. En este apartado el alumnado dispone de un espacio en blanco para que de forma libre desarrolle su plan, lo que se pretende es que el alumnado no se encuentre con una predisposición por parte del docente a la realización de operaciones, sino que las realice si considera que son necesarias u opte por cualquier otro tipo de estrategia de resolución.

**Opción A:** *Ejecución del plan*

1. Teniendo en cuenta que el grupo central de sillas tiene un total de 14 filas aproximadamente y que todos los grupos de sillas que aparecen en la imagen, en total 3, son exactamente iguales al central, podemos determinar que cada grupo tiene un total de 14 filas aproximadamente.
2. Cada fila de sillas consta de 16 sillas en total.
3.  $14 \text{ (filas)} \times 16 \text{ (sillas/fila)} = 224 \text{ sillas}$
4.  $224 \text{ (sillas)} \times 3 \text{ (grupos de sillas)} = 672 \text{ sillas aproximadamente en el salón.}$

**Opción B:** *Ejecución del plan*

1. De un lado al otro del salón encontramos 16 sillas.
2. A lo largo del salón, de atrás hacia la pantalla, se calcula que hay 14 sillas.
3.  $16 \text{ sillas} \times 14 \text{ sillas} = 224 \text{ sillas}$
4.  $224 \text{ sillas} \times 3 \text{ tandas} = 672 \text{ sillas aproximadas en el salón.}$

**Opción C:** *Ejecución del plan*

1. Contar cuántas sillas componen la última fila.  
Las filas están compuestas de 16 sillas.
2. Calcular el número de sillas que hay una detrás de otra desde el inicio del escenario hasta el final.  
Hay 14 sillas una detrás de otra.
3. Multiplicar ambos resultados para hallar el número de sillas que hay en el grupo central.  
 $16 \times 14 = 224 \text{ sillas en el grupo central.}$
4. Multiplicar la cantidad de sillas en el grupo central por 3, ya que son tres grupos iguales.  
 $224 \text{ sillas en el grupo central} \times 3 \text{ grupos} = 672 \text{ sillas aproximadamente en el salón.}$

Por último, aparece el apartado de **solución**, donde el alumnado deberá responder a las cuestiones que plantea el problema. Las cuestiones a resolver son las siguientes:

¿Estás de acuerdo con la estimación dada por el preparador de eventos?

¿Cuántas sillas estimas tú que hay?

¿La solución que has puesto es igual a la de tus compañeros?

Como es evidente, habrá diferentes soluciones, para gestionar esto y determinar cuáles de las soluciones son válidas y cuáles no. Para ello, se tendrán en cuenta 3 elementos:

- El **método** empleado para la resolución del problema. En este caso, la explicación de lo realizado, aquello que nos permitirá justificar el resultado obtenido, es decir, que los pasos desarrollados en el plan presenten coherencia con los resultados y permitan explicar por qué se ha generado ese resultado y no otro.
- Un **rango de cantidades**. Determinar qué es lo que vamos a tomar como válido. Este rango de cantidades varía en cada uno de los problemas, por tanto, entenderemos como valores válidos aquellos que rondan entre los 190 a las 230 sillas. Por consiguiente, establecer que el número de filas de sillas en cada uno de los grupos estén entre 12 y 14. Y no pueden producirse variaciones de los datos entre los grupos de sillas, porque el docente de forma oral establece que se deben de contar con que los grupos de sillas de los lados (las que podrían generar variaciones en los resultados) son iguales a el grupo de sillas central. Entendiendo, que la aproximación realizada por el preparador de eventos es fina.
- Que la **toma de decisiones sea coherente** con la respuesta que obtuvieron. Que interpreten correctamente el resultado, siendo capaces de responder a las cuestiones que plantean cada uno de los problemas. En este caso, el alumnado debe determinar que la estimación del organizador de eventos es fina.

### ***Problema 3.***

Para introducir la **fase de comprender** se leerá el problema en voz alta, tras ello se realizarán preguntas que nos permitan conocer que el alumnado ha comprendido correctamente el problema, estas cuestiones se llevarán a cabo de forma oral. Para ello, se pueden plantear preguntas como:

¿Qué nos pide el problema?

Tras ello, el alumnado deberá identificar cuáles son los **datos** que nos da el problema, para conseguir que el alumnado obtenga toda la información que será necesaria para resolver el problema. Para ello, el alumnado deberá dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué ves en la imagen?

¿Cuántas palmeras hay?

¿Todas las palmeras están a la misma distancia?

¿Cuántas personas hay aproximadamente en la primera fila desde el escenario?

Dichas cuestiones serán planteadas de forma escrita y se realizarán de forma individual y grupal, pues lo que se pretende es que a través de la estrategia cooperativa 1-2-4, en primer lugar, el alumnado razone sobre las cuestiones planteadas y a continuación en parejas, discutan sobre las respuestas planteadas, para después, tras haber determinado que propuesta es más fina, en grupos de 4 personas debatan de nuevo estableciendo finalmente una propuesta, la cual será la que expongan de manera escrita. Dentro de este apartado el alumnado debe reflejar tanto la información que el problema presenta de forma explícita como la información implícita, o comúnmente conocida como información oculta, la cual estará presente en la imagen.

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos. Por tanto, consideraremos como datos los siguientes elementos:

- **Elementos que aparecen en la imagen:** En la imagen se observa una plaza llena de gente, dos filas de palmeras, compuesta por 6 palmeras cada una. Aparecen 5 huecos entre las palmeras. En la primera fila desde el escenario aparecen entre 25 y 30 personas.
- **Información que nos da el enunciado:** En el carnaval se concentraron alrededor de 6.000 personas. Entre cada una de las palmeras de delante a atrás hay 7 metros de distancia.
- **Cuántas palmeras hay:** En la imagen se observan un total de 12 palmeras.
- **Determinar si existe variación en el número de distancia entre palmeras:** Existe variación entre la distancia que hay (de un lado a otro) entre las filas de palmeras.
- **Datos específicos de cada problema (cuántas personas hay en la 1º fila):** En la 1º fila hay aproximadamente entre 20 y 30 personas.

A continuación, se definirán cuáles son las *relaciones* existentes en el problema, es decir, de qué forma se interconectan los datos. Para ello, se emplearán cuestiones a resolver de manera escrita. Las preguntas que deberán responder son las siguientes:

¿Cuántas personas caben en 1 metro? ¿Y en 7 metros?

¿Algo de lo que has hecho en los problemas anteriores te sirve para este?

Incluiremos las posibles respuestas dadas por el alumnado, de forma que puede que los elementos que se presentan aparezcan o no o solo algunos de ellos. Además, debemos de tener en cuenta que en el caso del problema 3, se plantean cuestiones específicas. Las cuales pretenden guiar al alumnado para la resolución del problema, porque en este problema se implanta, además, el uso del referente.

- **Qué nos pide el problema:** Realizar nuestra propia estimación sobre el total de personas que acudieron al carnaval y a través del resultado obtenido determinar si la aproximación dada por el periódico local es fina o no.
- **Información que necesitamos para poder dar una respuesta:** El número de palmeras, la distancia existente entre cada una de estas palmeras, el número aproximado de personas que caben en esa distancia. El número aproximado de personas que hay en la primera fila.
- **Cuántas personas caben en 1 metro y, por tanto, cuántas personas caben en 7 metros:**
  - Opción A:** En un metro caben aproximadamente 3 personas, por tanto, en 7 metros caben alrededor de 21 personas.
  - Opción B:** En un metro caben aproximadamente 2 personas, por tanto, en 7 metros caben alrededor de 14 personas.
  - Opción C:** En un metro caben alrededor de 4 personas, por lo que, en 7 metros caben 28 personas.
- **Información de problemas anteriores que nos pueden ser de utilidad para resolver este problema:** La finalidad de este apartado es que tomen como referente los problemas anteriores para resolver este. Las posibles preguntas que podrían rescatar serían:

¿Qué relación existe entre las personas de la primera fila y las que caben en 7 metros?

Por otro parte, tenemos el *plan*, en este apartado el alumnado deberá redactar los pasos a seguir para elaborar el problema. Siguiendo la estrategia de trabajo planteada anteriormente, primero lo harán individualmente, luego debatirán en parejas y posteriormente, en grupos de cuatro personas, los posibles pasos a seguir para resolver el problema. Del mismo modo, se introduce una pregunta que el alumnado deberá responder:

¿Qué pasos seguirías para saber el número de personas que hay?

Este apartado anterior a la ejecución del problema se ha incluido porque es importante que el alumnado no elimine el proceso de ejecución del plan a pesar de que haya errores evidentes, ya que es importante para el desarrollo de nuestro proyecto. Esto nos permitirá analizar donde se presentan las principales dificultades y qué aspectos debemos reforzar. En la resolución podemos establecer tres formas principales que se pueden dar, aunque debemos ser conscientes que se trata de un problema abierto, donde la solución no va a ser única, sino que será el uso de una estrategia u otra, la que defina una buena aproximación. Esto, enfrenta a los estudiantes a problemas que no son de respuesta única. Algunas de las posibles formas para abordar el problema pueden ser:

**Opción A:** Para poder hallar el número aproximado de personas que asistieron al carnaval, debemos de seguir los siguientes pasos:

1. Determinar el número aproximado de personas que hay en la primera fila desde el escenario, para que nos sirvan de guía a la hora de hallar el número aproximado de personas en total.
2. Aproximar cuántas personas caben en 1 metro, y, por tanto, cuántas caben en 7 metros.
3. Conocer el número de espacios existentes entre las palmeras.
4. Multiplicar el número de personas que puede haber aproximadamente en la primera fila por el número de personas que caben en 7 metros. El resultado obtenido de este producto debe de multiplicarse por el número de espacios que se observan entre las palmeras.

**Opción B:** Para conocer el número de personas que hay en esta plaza hay que seguir los siguientes pasos:



1. Calcular el cuántas personas caben en 1 metro, y luego, calcular cuántas caben en 7.
2. Hacer una aproximación de cuántas personas hay en la primera fila, pegada al escenario.
3. Contar cuántas palmeras hay y saber que entre cada una de ellas hay una distancia de 7 metros, por lo que habría que multiplicar 7 por el número de palmeras que hay.
4. Teniendo en cuenta el número de personas que caben en 7 metros, tendríamos que multiplicarlo por la aproximación del número de personas que calculamos que había en la primera fila.
5. Por último, habría que multiplicar el resultado del paso anterior por el número de espacios que se encuentra entre las palmeras.

**Opción C:** Para saber si la estimación del periodista es correcta debemos:

1. Determinar cuántas personas caben en 1 metro.
2. Calcular cuántos metros de largo compone la superficie y multiplicarlo por el número de personas que caben en un metro.
3. Multiplicar el resultado obtenido por el número de personas que se ubican en la primera fila.

Después de determinar cuál será nuestro plan de acción, se llevará a cabo la **ejecución del plan**, es decir, el alumnado deberá desarrollar los pasos planteados para resolver el problema. En este apartado el alumnado dispone de un espacio en blanco para que de forma libre desarrolle su plan, lo que se pretende es que el alumnado no se encuentre con una predisposición por parte del docente a la realización de operaciones, sino que las realice si considera que son necesarias u opte por cualquier otro tipo de estrategia de resolución.

**Opción A:** *Ejecución del plan*

1. Estimo que el número de personas que puede haber en la primera fila hay alrededor de 26 personas.
2. Considero que en 1 metro caben alrededor de 3 personas, por tanto, en 7 metros caben más o menos 21 personas.
3. Entre las palmeras hay un total de 5 espacios.
4.  $26$  (personas aprox. en la primera fila)  $\times$   $21$  (personas que caben aproximadamente en 7

metros) = 546.

$546$  (nº de personas)  $\times$   $5$  (nº de espacios totales) =  $2.730$  nº de personas que acudieron al carnaval aproximadamente.

### **Opción B:** *Ejecución del plan*

1. En 1 metro caben 3 personas, por lo tanto, en 7 metros caben 21 personas.
2. En la primera fila, pegada al escenario, hay aproximadamente 29 personas.
3. Se puede ver, que hay 6 palmeras, pues hay 5 espacios entre ellas.  
 $5$  espacios entre palmeras  $\times$   $7$  metros =  $35$  metros
4.  $35$  metros  $\times$   $3$  personas que caben en 1 metro =  $105$  personas
5. Por lo tanto,  $105$  personas  $\times$   $29$  personas que hay en la primera fila =  $3.045$  personas aproximadamente acudieron al carnaval.

### **Opción C:** *Ejecución del plan*

1. Determinar cuántas personas caben en 1 metro. En un metro caben 3 personas.
2. Calcular cuántos metros de largo compone la superficie y multiplicarlo por el número de personas que caben en un metro.  
La plaza está compuesta por 5 huecos de 7 metros por tanto  $7 \times 5 = 35$  metros.  
 $35 \times 3 = 105$  personas caben en 35 metros.
3. Multiplicar el resultado obtenido por el número de personas que se ubican en la primera fila.  
En la primera fila podemos ver que hay 25 personas aproximadamente.  
 $25 \times 105 = 2625$  personas aproximadamente

Por último, aparece el apartado de **solución**, donde el alumnado deberá responder a las cuestiones que plantea el problema. Las cuestiones para resolver son las siguientes:

¿Estás de acuerdo con la estimación realizada por el periódico local?

¿Cuántas personas estimas tú que hay?

¿La solución que has puesto es igual que la de tu compañero?

Como es evidente, habrá diferentes soluciones, para gestionar esto y determinar cuáles de las soluciones son válidas y cuáles no. Para ello, se tendrán en cuenta 3 elementos:

- El **método** empleado para la resolución del problema. En este caso, la explicación de lo realizado, aquello que nos permitirá justificar el resultado obtenido, es decir, que los pasos desarrollados en el plan presenten coherencia con los resultados y permitan explicar por qué se ha generado ese resultado y no otro.
- Un **rango de cantidades**, es decir, determinar qué es lo que vamos a tomar como válido. Este rango de cantidades varía en cada uno de los problemas, por tanto, entenderemos

como valores válidos aquellos que rondan entre las 25 y 30 personas en la primera fila. Del mismo modo, entenderemos que los niños pueden presentar variaciones al estimar que número de personas caben en 1 metro, por ello, hemos planteado que los valores deben de estar entre 2-4 personas. En base a esto, los resultados obtenidos deberán estar entre 1.750 y 5.040 personas, como el total de asistentes al carnaval. Decretando, por tanto, que la aproximación realizada por el periódico no es fina.

- Que la **toma de decisiones sea coherente** con la respuesta que obtuvieron. Es decir, que interpreten correctamente el resultado, por tanto, sean capaces de responder a las cuestiones que plantean cada uno de los problemas. En este caso, el alumnado debe determinar que la estimación realizada por el periódico local no es fina.

#### **IV. DIFICULTADES DEL ALUMNADO.**

El desarrollo de este tipo de planteamiento puede generar dificultades en el alumnado a la hora de resolver la actividad planteada. Por consiguiente, resulta necesario establecer qué momentos pueden generar dificultades por parte del alumnado, y definir cómo pueden solucionarse.

Se pueden desarrollar dificultades relacionadas con la comprensión del enunciado, pues puede ocurrir que el alumnado no entienda el enunciado o no identifique correctamente los datos. Del mismo modo, como se trata de una técnica de resolución de problemas novedosa donde la imagen juega un papel primordial, puede que el alumnado por sí mismo no utilice la imagen como un elemento más que incorpora datos del problema. Por ello, es importante el uso correcto del documento del alumno, que en unión con el apoyo del docente actúan como guía en el proceso de resolución, consiguiendo que el alumnado desarrolle el problema correctamente.

Pueden aparecer dificultades a la hora de resolver el problema, es decir, que el alumnado no sepa qué estrategia utilizar para afrontar el problema. Ante esta situación proponemos como estrategia para el docente que se produzcan este tipo de situaciones hemos desarrollado el documento del alumno, es decir, un documento que actúe como guía. Del mismo modo, este documento está planteado para que el alumnado, trabajando de manera cooperativa, se ayuden entre ellos; por ese motivo, proponemos que cada una de las cuestiones planteadas sean realizadas en primer lugar, de manera individual y a continuación, en pequeños grupos, para poder así debatir y conocer otras posibilidades. Esta puesta en grupo va a generar en el alumnado diferentes respuestas a las preguntas que aparecen en los problemas, necesarias

para poder llegar a determinadas conclusiones, como, por ejemplo, la existencia de diferentes soluciones o maneras de abordar el problema.

Además, hemos desarrollado los dos primeros problemas de una forma más guiada, pero para conseguir que el alumnado trabaje de una forma más autónoma, el último de los problemas presenta menos indicaciones, de esta forma pretendemos que el alumnado ponga en práctica la toma de referentes como estrategia. Utilizando los mecanismos de resolución aplicados en los problemas anteriores para buscar y determinar la forma por la cual puede obtener una solución.

**ANEXO 3. LISTA DE CONTROL.**

	<b>POCO ADECUADO</b>	<b>ADECUADO</b>	<b>MUY ADECUADO</b>
La imagen es un elemento imprescindible para llevar a cabo los procesos de resolución			
La imagen conforma parte del enunciado, dando información necesaria para poder abordar el problema			
Se aplica correctamente la estrategia de resolución de problemas			
El contenido del problema es vinculable con la vida cotidiana			
El problema resulta atractivo y diferente para el alumnado			
El alumnado es capaz de utilizar la información de la imagen para resolver el problema			

**ANEXO 4. TABLA DE COEVALUACIÓN.**

<b>ELEMENTOS A EVALUAR</b>	<b>SÍ</b>	<b>NO</b>
¿Pueden hacer el problema sin utilizar la imagen?		
¿La imagen aporta información necesaria que no aparece en el enunciado del problema?		
¿El problema trata situaciones de la vida cotidiana?		
¿El problema es atractivo? ¿Realizarían más problemas de este tipo?		
¿La información que aporta la imagen ha permitido resolver el problema?		