Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paula Pérez Pacheco

Teoría Geométrica de Funciones y Aplicaciones

Geometric Function Theory and Applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2020

Dirigido por
María José Martín Gómez

María José Martín Gómez
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mi tutora, Maria José Martín Gómez, por todo lo que me ha enseñado, transmitido y ayudado en este, mi último año de estudios de Grado en Matemáticas.

A mi tutor de grado, el profesor Fernando Pérez González, por su gran dedicación y confianza en mí durante todos y cada uno de los cuatro años de etapa universitaria.

A mis padres y a mi hermano, por su incesante esfuerzo en mi educación, su paciencia y su tan importante apoyo moral.

En general, gracias a todos lo que hicieron posible mi llegada a este final, realmente, nuevo comienzo.

Paula Pérez Pacheco
La Laguna, 10 de junio de 2020

Resumen · Abstract

Resumen

El estudio de las funciones univalentes (holomorfas e inyectivas) en el disco unidad $\mathbb{D}$, considerado piedra angular en la teoría geométrica de funciones, es un área de investigación ya clásica pero que sigue muy viva a día de hoy. Sin duda, la famosa conjetura de Bieberbach de 1916 (demostrada por de de Branges en 1984), impulsó en gran medida el estudio de este tipo de funciones.

En este trabajo, se revisan las principales propiedades que deben satisfacer las funciones en la célebre clase S de aplicaciones univalentes y normalizadas (de manera estándar) en $\mathbb{D}$ y como muchas de ellas se deducen del teorema de Bieberbach. También se estudia la teoría de Loewner, de gran relevancia en esta área y parte fundamental en la demostración de de Branges de la conjetura de Bieberbach.

Por último, y como muestra de la relación entre la teoría de funciones analíticas y otras áreas de las Matemáticas (concretamente, la Mecánica de Fluidos), se recogen algunos resultados recientes sobre las soluciones explícitas de la ecuación bidimensional de Euler incompresible.

Palabras clave: *Funciones univalentes – Teorema de Bieberbach – Cadenas de Loewner – Ecuaciones de Euler incompresibles.*

Abstract

The study of univalent (holomorphic and injective) functions in the unit disk $\mathbb{D}$*, considered as a milestone in geometric function theory, is a classical subject of research which continues active nowadays. With no doubt, the famous Bieberbach conjecture from 1916 (proved by de Branges in 1984) was one of the main sources for the development of the analysis of the properties of this type of functions.*

In this Bachelor Thesis, we review the main properties that a function in the class S *of univalent mappings in the unit disk (normalized in the standard way) must satisfy. Most of them are derived from the classical Bieberbach theorem. An indepth analysis of Loewner's theory, of great relevance in the area (and a fundamental tool in de Branges' proof of the Bieberbach conjecture) is developed as well.*

Finally, and as a proof of the relationship between Complex Analysis and other areas of Mathematics (in particular, Fluid Mechanics), we review some recent results on explicit solutions of the incompressible Euler equation.

Keywords: *Univalent functions – The Bieberbach theorem – Loewner chains– Incompressible Euler equations.*

Contenido

Introducción

Uno de los principales resultados en el Análisis Complejo es, sin duda, el célebre *Teorema de Representación de Riemann* que establece la existencia, para cada dominio Ω simplemente conexo en el plano complejo $\mathbb{C}$ que es distinto del plano en sí, de una función f, holomorfa e inyectiva en el disco unidad $\mathbb{D}$ que verifica $f(\mathbb{D}) = \Omega$. Más aún, esta aplicación de $\mathbb{D}$ sobre Ω está unívocamente determinada, para cada $w_0 \in \Omega$, por las condiciones $f(0) = w_0$ y $f'(0) > 0$ (entendiendo que esta segunda condición significa que $f'(0)$ es un número real positivo). A tal función se le llama *la* transformación de Riemann sobre el dominio Ω (centrada en w_0).

El teorema de representación de Riemann se completa, años más tarde, con el *Teorema de extensión de Carathéodory* quien demuestra que la aplicación de Riemann se extiende a una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$ si $\partial\Omega$ es una curva localmente conexa.

Así, distintos problemas sobre funciones *univalentes* (es decir, analíticas e inyectivas) en un dominio Ω como el considerado anteriormente, pueden establecerse (trasladando el dominio, si fuese necesario, para hacer que $w_0 = 0 \in \Omega$ y componiendo con la transformación de Riemann) en términos de problemas sobre funciones univalentes en el disco unidad, cuyo desarrollo en serie de Taylor es de la forma $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$, $z \in \mathbb{D}$.

La *normalización* adicional que consiste en asumir que las funciones consideradas satisfacen $a_1 = 1$ da lugar a que no aparezcan parámetros innecesarios y a la simplificación en los enunciados en los teoremas. Estas funciones conforman la clase S de funciones univalentes y normalizadas en el disco unidad cuyo desarrollo en serie de Taylor es de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{0.1}$$

Surge, así, la teoría geométrica de funciones que es el estudio de las propiedades geométricas de las funciones holomorfas (en particular, de aquellas que son inyectivas y están normalizadas en el disco unidad).

Podría decirse que los primeros resultados relevantes al respecto surgen con el comienzo del siglo XX: es en 1907 cuando Koebe [13] prueba la existencia de una constante absoluta $K > 0$ para la que se verifica que el disco $|w| < K$ está contenido en el dominio $f(\mathbb{D})$ para toda función $f \in S$. Koebe [14] también obtiene una forma primitiva para el teorema de distorsión, estableciendo la existencia de cotas inferior y superior de $|f'(z)|$ en términos solo de $|z|$ para funciones de la clase S.

En 1914, Gronwall [10] establece el teorema del área y, en 1916, Bieberbach [3], utilizando el teorema de Gronwall, demuestra la cota precisa para el módulo del segundo coeficiente de Taylor de las funciones de la clase S: si $f \in \mathbb{D}$ tiene desarrollo en serie de Taylor como en (0.1), entonces $|a_2| \leq 2$. Más aún, hay funciones en la clase S con $|a_2| = 2$.

Es quizá sorprendente que el valor preciso de la constante K en el teorema de Koebe y, también, las cotas precisas para el teorema de distorsión puedan obtenerse como consecuencia directa del teorema de Bieberbach. Revisaremos estos resultados (y otros) en el capítulo 1 de este trabajo.

En ese artículo [3], en el que se usa la notación k_n para denotar al supremo de $|a_n|$ en S, es en el que Bieberbach, habiendo probado que $k_2 = 2$, en una nota a pie de página escribe: "*Vielleicht ist überhaupt* $k_n = n$" (que significa: "Quizá, en general, $k_n = n$"). Esta es la fuente de su famosa conjetura, ahora ya conocida como Teorema de de Branges [4].

A lo largo de los casi 70 años que transcurren entre la conjetura de Bieberbach y su demostración por de Branges, el trabajo realizado por los expertos en el área para avanzar en la demostración de la veracidad de la conjetura dio lugar al desarrollo de teorías que provienen de diversas áreas de las matemáticas. Destacamos, en particular, por su relevancia y profundidad matemática (y por su importancia en la demostración del teorema de de Branges), la teoría de Loewner, utilizada para comprobar, en los términos establecidos por Bieberbach, que $k_3 = 3$.

El capítulo 2 recoge los principales resultados de la teoría de Loewner y su aplicación a la demostración de que el tercer coeficiente de Taylor de toda función de la clase S está acotado, en módulo, por 3.

Para concluir el trabajo, y como prueba de que, a pesar de ser ya un tema clásico en Análisis Complejo, la teoría geométrica de funciones (y la variable compleja, más generalmente) es, a día de hoy, un área muy activa de investigación (debido, entre otras cosas a su generalización al caso en el que las funciones consideradas son meramente armónicas, en lugar de analíticas), incluimos diversos resultados recientes en relación con las soluciones de Euler incompresibles. Estos resultados muestran la estrecha relación entre las disciplinas del Análisis Complejo y la Mecánica de Fluidos.

1

Algunas propiedades básicas de las funciones univalentes y normalizadas en el disco

Como se ha mencionado en la introducción, la clase S de funciones *univalentes* y normalizadas en el disco unidad ha sido objeto de estudio por parte de multitud de expertos en el área desde hace ahora más de un siglo.

En este capítulo, se muestran algunos ejemplos de funciones en la clase S y se recogen algunos resultados clásicos y relevantes.

1.1. La clase S: ejemplos y transformaciones que la preservan

Recordemos que la clase S es el conjunto de funciones f univalentes (es decir, holomorfas e inyectivas) en el disco unidad $\mathbb{D}$, normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Toda función $f \in S$ tiene desarrollo en serie de Taylor de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad |z| < 1\,.$$

Es claro que toda función univalente en $\mathbb{D}$ puede normalizarse de manera que obtengamos una función en la clase S. En efecto, dada una función g univalente en $\mathbb{D}$, la función $h = (g - g(0))/g'(0) \in S$.

1.1.1. Ejemplos de funciones en la clase S

(1) La *función identidad*, $I(z) = z$, $z \in \mathbb{D}$, es un ejemplo claro de una función en la clase S. De hecho, como consecuencia del lema de Schwarz, resulta ser la única función en la clase S cuyo rango está contenido en $\mathbb{D}$.

(2) La *función del semiplano*: $h(z) = \frac{z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$. Siendo una transformación de Möbius (no constante) con un único polo en $z = 1$, es claro que h es univalente en $\mathbb{D}$. Puesto que está normalizada, se tiene que $h \in S$. Observemos que $h(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} \colon Re\{w\} > -\frac{1}{2}\}$ es un dominio convexo.

(3) La *función sobre la banda*: $s(z) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$, $z \in \mathbb{D}$, también pertenece a la clase S. Más aún, $s(\mathbb{D})$ es una banda horizontal por lo que, como en el ejemplo anterior, se tiene un dominio convexo. Concretamente, $s(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C}\colon -\pi/4 < Im\{w\} < \pi/4\}$.

(4) Sin duda, uno de los ejemplos más importantes es la *función de Koebe*:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} nz^n, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.1}$$

Esta función transforma de manera inyectiva el disco unidad sobre el plano complejo excepto la semi-recta a lo largo del eje real negativo que va desde ∞ hasta $-1/4$, lo que se comprueba fácilmente observando que

$$k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}\,.$$

Las transformaciones que se describen en el siguiente apartado nos permiten construir más ejemplos de funciones en la clase S. Incluimos en este listado el ejemplo siguiente por su relevancia en los apartados posteriores.

(5) La función $f(z) = \sqrt{k(z^2)}$, $z \in \mathbb{D}$, donde k es la función de Koebe, también pertenece a S.

1.1.2. Transformaciones que preservan la clase *S*

La suma de dos funciones univalentes en el disco unidad no es necesariamente univalente en $\mathbb{D}$. Por ejemplo, sean $f_1(z) = \frac{z}{1-z}$ y $f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$. Es fácil comprobar que f_1 y $f_2 \in S$. Sin embargo, la suma $f_1 + f_2$ no es, ni siquiera, localmente univalente en $\mathbb{D}$. En efecto,

$$(f_1 + f_2)'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1-iz)^2}\,,$$

que resulta ser igual a 0 en $z = \frac{1}{2}(1+i)$.

No obstante, hay una serie de transformaciones que sí preservan la univalencia (y la normalización) y nos permiten construir más ejemplos de funciones en la clase S. Algunas de ellas, que serán utilizadas posteriormente, son las siguientes:

1. *Conjugación.* Si $f \in S$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, entonces, la *conjugada de* f, $\overline{f}$, definida por $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a_n} z^n \in S$.
2. *Rotación.* Si $f \in S$ y $\theta \in \mathbb{R}$, la *rotación* $R_\theta f(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ pertenece a S.
3. *Dilatación.* Si $f \in S$ y $0 < r < 1$, la *dilatación* $D_r f(z) = \frac{1}{r} f(rz) \in S$.
4. *Transformación del rango.* Sea $f \in S$ y sea ψ una función analítica e inyectiva en $f(\mathbb{D})$ con $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 1$. Entonces, la función $T_\psi(f) = \psi \circ f \in S$.

5. *Transformación del valor omitido.* Si $f \in S$ y $f(z) \neq \omega$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces, $T_\omega f = \frac{\omega f}{(\omega - f)} \in S$.
6. *Automorfismos del disco.* Sea $f \in S$ y $a \in \mathbb{D}$. Consideremos el automorfismo del disco
$$\varphi_a(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$
La función
$$f_a(z) = \frac{f \circ \varphi_a(z) - f(a)}{(1-|a|^2)f'(a)} \in S. \tag{1.2}$$
A las funciones f_a así definidas (para $a \in \mathbb{D}$), se las llama *transformaciones de Koebe de la función f.*
7. *Transformación de la raíz cuadrada.* Sea $f \in S$. Definimos la *función raíz cuadrada de f* como $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces $F \in S$.

Quizá, en este caso, y a diferencia de los anteriores, no es inmediato comprobar que F es una función analítica y univalente en el disco unidad. Por ello, incluimos los detalles a continuación.

Como $f \in S$, el desarrollo en serie de Taylor de f es de la forma
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$
Por lo tanto,
$$f(z^2) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n} = z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + ...), \quad z \in \mathbb{D}.$$
Observemos que la función $\alpha(z) = 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + ...$ es analítica en el disco unidad ya que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual a 1. De hecho, se tiene que α no se anula en $\mathbb{D}$. En efecto, supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\alpha(z_0) = 0$. Es claro que $z_0 \neq 0$. En este caso, tomando $w_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ con $w_0^2 = z_0$, tendríamos que $f(w_0) = 0$, lo que es una contradicción puesto que $f \in S$.

Así, siendo α una función analítica en el disco unidad (simplemente conexo) que no tiene ceros en $\mathbb{D}$, se sigue que existe una rama analítica de la función $\sqrt{\alpha}$ con $\sqrt{1} = 1$. Por lo tanto, la función
$$F(z) = z\sqrt{\alpha(z)}, \quad z \in \mathbb{D},$$
(que cumple $F^2(z) = f(z^2)$) es analítica en el disco unidad, como queríamos demostrar.

Observemos que F está normalizada. Por lo tanto, para comprobar que F pertenece a la clase S, hemos de probar que es inyectiva en $\mathbb{D}$. Para ello, observemos, en primer lugar, que como α no tiene ceros en el disco unidad, F solo se anula en $z = 0$. También, que puesto que α es par, la función F es impar:

$$F(-z) = -z\sqrt{\alpha(-z)} = -z\sqrt{\alpha(z)} = -F(z).$$

Supongamos, entonces (y para llegar a contradicción), que existen dos puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tales que $F(z_1) = F(z_2)$. Entonces, $F^2(z_1) = F^2(z_2)$, es decir, $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. Pero $f \in S$, por lo tanto, $z_1^2 = z_2^2$ y, dado que hemos supuesto que $z_1 \neq z_2$, concluimos que $z_1 = -z_2$.

Si $z_1 = -z_2$, resulta $F(z_1) = F(-z_2) = -F(z_2)$. Pero habíamos supuesto que $F(z_1) = F(z_2)$, luego $F(z_2) = 0$, lo que implica que $z_2 = 0$, pues $F(z) = z\sqrt{\alpha(z)}$ y, entonces, resulta $z_1 = z_2$. Esto es una contradicción. Por tanto, F es inyectiva, como queríamos demostrar.

1.2. La clase Σ

Estrechamente relacionada con la clase S, se encuentra la clase Σ de funciones univalentes en el dominio $\Delta = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ con desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + b_2\zeta^{-2} + \dots, \quad \zeta \in \Delta\,.$$

Observemos que las funciones de la clase Σ tienen un polo simple en $\zeta = \infty$ con residuo igual a 1. También, que por el teorema de Liouville, no puede ocurrir que $g(\Delta) = \mathbb{C}$ para ninguna $g \in \Sigma$.

En efecto, si suponemos que existe $g \in \Sigma$ tal que $g(\Delta) = \mathbb{C}$, tendríamos que la función $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ definida por

$$\varphi(z) = \frac{1}{g^{-1}(z)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

es una función holomorfa en el plano complejo (es decir, una función entera) y acotada. Esto no es posible ya que g es univalente en Δ.

Al conjunto $E = E(g)$ de los valores omitidos por una función $g \in \Sigma$ se le llama *conjunto excepcional*. Nótese que E es un compacto ya es que es cerrado y acotado puesto que $g(\Delta)$ es un abierto y g tiene un polo en ∞.

Veamos, en el siguiente lema, cómo obtener funciones de la clase Σ a partir de funciones de la clase S.

Lema 1.1. *Para cada $f \in S$, la función*

$$g(\zeta) = \{f(1/\zeta)\}^{-1} = \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3)\zeta^{-1} + \dots, \quad \zeta \in \Delta\,, \tag{1.3}$$

pertenece a Σ.

La transformación $T : S \to \Sigma$, definida por $f \mapsto g(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$, $\zeta \in \Delta$, se llama *inversión*.

Demostración. Dado que f es analítica en el disco unidad, es claro que g también es holomorfa en Δ. Más aún, se tiene que ∞ es una singularidad aislada de g que clasificaremos calculando la serie de Laurent de esta función.

Para ello, tomemos un punto del plano complejo $|\zeta| > 1$. Es claro que $1/\zeta \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, puesto que f es analítica en el disco unidad, se tiene que

$$f(1/\zeta) = \zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-3} + \dots .$$

Basta aplicar el algoritmo de la división para obtener que

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{1}{f(1/\zeta)} = \frac{1}{\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-3} + \dots} \\ &= \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3)\zeta^{-1} + A_2\zeta^{-2} + A_3\zeta^{-3} + \dots . \end{aligned}$$

Luego, efectivamente, g tiene un polo con residuo igual a 1 en ∞.

Para comprobar que g es inyectiva, supongamos que existen ζ_1 y $\zeta_2 \in \Delta$ tales que $g(\zeta_1) = g(\zeta_2)$. En este caso, los puntos $z_1 = 1/\zeta_1$ y $z_2 = 1/\zeta_2$ pertenecen al disco unidad y se cumple que $f(z_1) = f(z_2)$. Por lo tanto, $z_1 = z_2$ y, entonces, $\zeta_1 = \zeta_2$. Así g es inyectiva en Δ y, por tanto, $g \in \Sigma$. ■

Recordemos que, dada una función $f \in S$, la transformación de la raíz cuadrada, definida en la sección anterior, produce una nueva función

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

que también pertenece a S. Por lo tanto, aplicando el teorema anterior, se tiene que si $g \in \Sigma$ es de la forma $g(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$ para alguna $f \in S$, entonces $G(\zeta) = \sqrt{g(\zeta^2)}$, $\zeta \in \Delta$, también pertenece a Σ.

Concluimos esta sección con el siguiente resultado que muestra que, debido a la posibilidad de que las funciones de la clase Σ puedan tener ceros, no es posible establecer una correspondencia biyectiva entre esta clase y la clase S a través de la inversión. No obstante, una modificación sencilla sí permite producir funciones en la clase S a partir de funciones de la clase Σ. Omitimos la demostración, que no es difícil (véase la página 6 de [9] para los detalles).

Lema 1.2. *Si $g \in \Sigma$ y $c \in E(g)$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{g(1/z) - c}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

pertenece a S.

1.3. Teorema del área y teorema de Bieberbach

La univalencia de la funciones en la clase Σ, es decir, de funciones holomorfas e inyectivas g en $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta| > 1\}$, con desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}, \quad |\zeta| > 1\,, \tag{1.4}$$

da lugar a una fuerte restricción en el tamaño de los coeficientes de Laurent b_n, $n = 1, 2, ...$ Esto se expresa mediante el *teorema del área*, que es fundamental para la teoría de las funciones univalentes de la clase S, como veremos en las secciones siguientes.

La razón del nombre del teorema será evidente a partir de su prueba, debida a Gronwall [10], quien lo demostró en 1914.

Antes de pasar a enunciar y demostrar el teorema del área, es necesario revisar el teorema de Green.

Sea C una curva cerrada simple diferenciable a trozos en el plano y positivamente orientada, sea D la región limitada por C y sea $F = (Q, P)$ un campo vectorial en un abierto Ω que contiene a D. Entonces, el *teorema de Green* muestra que si P y Q tienen derivadas parciales continuas en Ω, se tiene que

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy\,.$$

Como aplicación del teorema de Green al caso particular $Q(x, y) = x$ y $P(x, y) = -y$, resulta:

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy\,. \tag{1.5}$$

Escribamos (1.5) usando notación compleja. Para ello, introducimos la notación $\omega = x + iy$, de manera que $d\omega = dx + idy$ y $\overline{\omega} d\omega = xdx + ydy + i(-ydx + xdy)$. Entonces, utilizando que C es una curva cerrada, se obtiene:

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2i} \int_C \overline{\omega} d\omega - \frac{1}{2i} \int_C x dx + y dy \\ &= \frac{1}{2i} \int_C \overline{\omega} d\omega - \frac{1}{2i} \int_C \frac{d(x^2 + y^2)}{2} = \frac{1}{2i} \int_C \overline{\omega} d\omega\,. \end{aligned}$$

Teorema 1.3 (Teorema del área). *Si $g \in \Sigma$ con desarrollo en serie de Laurent de la forma* (1.4). *Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, |b_n|^2 \leq 1\,.$$

Demostración. Sea $g \in \Sigma$ de la forma (1.4). Para $r > 1$, sea C_r la imagen por g de la circunferencia $|z| = r$. Dado que g es univalente en Δ, se tiene que C_r es una curva analítica cerrada y simple que encierra del dominio acotado E_r.

Por el teorema de Green y el cambio de variable $w = g(z)$, el área de E_r es

$$
\begin{aligned}
A_r &= \frac{1}{2i}\int_{C_r} \overline{\omega} d\omega = \frac{1}{2i}\int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{in\theta} \right\} \times \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} \right\} re^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} e^{i(n+1)\theta} \right\} \times \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_\nu r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} \right\} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \overline{b_n} r^{-n+1} j b_j r^{-j-1} \int_0^{2\pi} e^{i[(n+1)-(j+1)]\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta + \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 r^{-2n} = \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 r^{-2n} \right), \quad r > 1.
\end{aligned}
$$

Dejando que $r \to 1^-$ y teniendo en cuenta que $A(E_r) \geq 0$ para todo $r > 1$, obtenemos

$$
\pi \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 \right\} \geq 0 \, ,
$$

como queríamos demostrar. ■

Observación 1.4. El teorema del área implica que $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. Esta desigualdad no es precisa si $n \geq 2$, dado que, si $g \in \Sigma$ es de la forma (1.4) con $|b_n| = 1$, se sigue que, necesariamente

$$
g(\zeta) = \zeta + b_0 + \lambda n^{-1/2} \zeta^{-n} \, ,
$$

con $|\lambda| = 1$. Pero entonces, su derivada

$$
g'(\zeta) = 1 - \lambda n^{1/2} \zeta^{-n-1}
$$

es igual a 0 en ciertos puntos de Δ si $n \geq 2$, luego g no es univalente y, por tanto, no pertenece a Σ.

No obstante, la desigualdad $|b_1| \leq 1$ sí es precisa para las funciones de la clase Σ, como se demuestra a continuación.

Corolario 1.5. *Si $g \in \Sigma$ es como en (1.4), entonces $|b_1| \leq 1$, con igualdad si y solo si g tiene la forma*

$$
g(\zeta) = \zeta + b_0 + \lambda/\zeta, \ \ |\lambda| = 1 \, .
$$

Así, E(g) es un segmento rectilíneo de longitud 4.

Demostración. La primera parte del corolario es obvia por lo visto anteriormente. Basta, por tanto, ver que $E(g)$ es un segmento rectilíneo de longitud 4. Para ello, sea $\lambda = e^{2i\mu}$, para $\mu \in [0, \pi)$. Tomemos $\theta = \mu$ y definamos la función

$$
\begin{aligned}
G_\theta(\zeta) = e^{-i\theta} g(e^{i\theta}\zeta) &= \zeta + e^{-i\theta} b_0 + \frac{e^{-i\theta}\lambda}{e^{i\theta}\zeta} = \zeta + e^{-i\theta} b_0 + \frac{e^{-2i\theta}\lambda}{\zeta} \\
&= \zeta + e^{-i\theta} b_0 + \frac{1}{\zeta} \,.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que $G_\theta = J + c$, donde J es la *transformación Joukowsky*, $J(z) = z + \frac{1}{z}$, que transforma Δ sobre el complementario del segmento $[-2, 2]$, que tiene longitud 4. Esto termina la demostración. ■

La principal consecuencia del teorema del área (y su corolario 1.5) en relación con el estudio de las funciones en la clase S es el siguiente teorema, probado por Bieberbach en 1916.

Teorema 1.6 (Teorema de Bieberbach). *Sea*

$$
f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \,, \quad z \in \mathbb{D} \,,
$$

una función de la clase S. Entonces, $|a_2| \leq 2$.

La igualdad $|a_2| = 2$ se tiene si y solo si f es una rotación de la función de Koebe k definida en (1.1). De hecho, la única función en la clase S con $a_2 = 2$ es k.

Demostración. Sea $f \in S$. Aplicando la transformación de de la raíz cuadrada definida en la sección 1.1.2 y la inversión (como en (1.3)), obtenemos la función

$$
g(\zeta) = \{f(1/\zeta^2)\}^{-1/2} = \zeta - (a_2/2)\zeta^{-1} + \dots \,, \quad \zeta \in \Delta \,,
$$

que pertenece a la clase Σ por el lema 1.1. Así $|a_2| \leq 2$, por el corolario 1.5.

La igualdad se da si y solo si g tiene la forma

$$
g(\zeta) = \zeta - e^{i\theta}/\zeta
$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi]$.

Puesto que $g(\zeta) = \{f(1/\zeta^2)\}^{-1/2}$, si denotamos por $z = 1/\zeta$, $\zeta \in \Delta$, tenemos que, para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$,

$$
f(z^2) = \frac{z^2}{(1 - e^{i\theta} z^2)^2} \,. \tag{1.6}
$$

Pero como f es holomorfa en el disco, se tiene que (1.6) también se cumple para $z = 0$. Por lo tanto, por el principio de unicidad, resulta

$$
f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)} = e^{-i\theta} k(e^{i\theta} z) = k_\theta(z) \,,
$$

donde k es la función de Koebe definida en (1.1) y k_θ es una rotación de k.

Para terminar la demostración, observemos que $k''(0) = 4$, luego el segundo coeficiente de Taylor de la función k es igual a 2.

Cualquier otra función f de la clase S con segundo coeficiente de Taylor igual a 2 debe ser una rotación k_θ de la función de Koebe. Basta observar que, entonces, $4 = k_\theta''(0) = e^{i\theta} k''(0) = 4e^{i\theta}$, luego $e^{i\theta} = 1$ y $f = k$. ■

1.4. Consecuencias del teorema del Bieberbach en la teoría de funciones de la clase S

La importancia del teorema de Bieberbach (teorema 1.6) no radica únicamente en el hecho de disponer de una cota para el módulo del segundo coeficiente de Taylor de las funciones de la clase S. Veremos en esta sección que este resultado tiene múltiples e importantes consecuencias.

1.4.1. Teorema de recubrimiento

Cada función $f \in S$ es una aplicación abierta con $f(0) = 0$ por lo que su rango contiene un disco centrado en el origen. Ya en 1907, Koebe [13] descubrió que los rangos de todas las funciones en S contienen un disco común $|w| < K$, donde K es una constante absoluta. La función de Koebe k, definida en (1.1), muestra que $K \leq \frac{1}{4}$. Fue Bieberbach [14] quien, como consecuencia de su teorema 1.6, probó que, de hecho, se tiene que el disco abierto $D(0, 1/4)$, centrado en el origen y con radio $\frac{1}{4}$, está contenido en $f(\mathbb{D})$ para toda $f \in S$.

Teorema 1.7 (Teorema de un cuarto de Koebe.). *Si $f \in S$, entonces $D(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sea w un punto del plano complejo con $w \notin f(\mathbb{D})$. Entonces, aplicando la transformación del valor omitido definida en la sección 1.1.2, obtenemos la función

$$g(z) = \frac{\omega f(z)}{\omega - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\omega}\right) z^2 + ...$$

también en la clase S. Aplicando el teorema de Bieberbach, se tiene

$$\left| a_2 + \frac{1}{\omega} \right| \leq 2.$$

Pero el mismo teorema muestra que también $|a_2| \leq 2$. Por lo tanto, resulta que

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| a_2 + \frac{1}{w} - a_2 \right| \leq \left| \frac{1}{w} + a_2 \right| + |a_2| \leq 4\,. \tag{1.7}$$

Esto demuestra que todos los valores omitidos por f tienen módulo mayor o igual a $1/4$. Por lo tanto, $D(0, 1/4) \subset f(\mathbb{D})$. ∎

Nótese que la función de Koebe y sus rotaciones son las únicas funciones en S que omiten un valor de módulo $\frac{1}{4}$. En efecto, en estos casos tendríamos igualdad en la cadena de desigualdades (1.7), lo que implicaría, en particular, que $|a_2| = 2$. Por lo tanto, el rango de cualquier otra función en S contiene a un disco de mayor radio.

Observación 1.8. Debe advertirse que la univalencia en la demostración del teorema de un cuarto de Koebe es fundamental. Por ejemplo, las funciones analíticas

$$f_n(z) = \frac{1}{n}(e^{nz} - 1), \quad n = 1, 2, ...,$$

tienen las propiedades de que $f_n(0) = 0$ y $f_n'(0) = 1$, pero omiten el valor $-\frac{1}{n}$, que puede elegirse arbitrariamente cerca del origen.

1.4.2. Teorema de distorsión

Otra de las consecuencias importantes del teorema de Bieberbach es el llamado *teorema de distorsión de Koebe* (en alemán, "*Verzerrungssatz*"), que enunciamos en esta sección. Para su demostración, utilizaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Para toda función $f \in S$ y todo $z \in \mathbb{D}$, se cumple*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2} \,. \tag{1.8}$$

Demostración. Sea

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

una función en la clase S. Observemos que (1.8) se verifica si $z = 0$. Consideremos, entonces, para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, la transformación de Koebe definida en (1.2) para obtener las funciones

$$f_a(z) = \frac{f\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{f'(a)(1 - |a|^2)} = z + A_2(a) z^2 + \dots\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

que también pertenecen a S. Es fácil comprobar que

$$A_2(a) = \frac{f_a''(0)}{2} = \frac{1}{2}\left[(1 - |a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\overline{a}\right]\,,$$

luego, por el teorema de Bieberbach, resulta que, para todo a en el disco unidad se tiene

$$\left|(1 - |a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - 2\overline{a}\right| \leq 4\,.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $|a|/(1-|a|^2)$, se demuestra que (1.8) se cumple para todo $z \neq 0$ en el disco unidad. ■

Ya disponemos de todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema de distorsión de Koebe que permite acotar el módulo de la derivada de las funciones en la clase S. El nombre del teorema se debe a que el término "distorsión" surge de la interpretación geométrica de $|f'(z)|$ como el factor de variación infinitesimal (distorsión) de la longitud del arco bajo la aplicación f (o del de los jacobianos, $|f'(z)|^2$, como el factor de distorsión infinitesimal del área).

Teorema 1.10 (Teorema de Distorsión). *Para toda $f \in S$,*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{1.9}$$

Se tiene igualdad para algún $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ en cualquiera de las dos desigualdades en (1.9) si y solo si f es una rotación adecuada de la función de Koebe.

Demostración. Está claro que (1.9) se cumple para $z = 0$. Tomemos, entonces, valores de $z \neq 0$.

Dado que la desigualdad $|\alpha| \leq c$ implica $-c \leq \mathrm{Re}\{\alpha\} \leq c$, se sigue de (1.8) que

$$\frac{2s^2-4s}{1-s^2} \leq \mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2s^2+4s}{1-s^2}\,, \quad s = |z|\,.$$

La univalencia de f garantiza que $f' \neq 0$ en $\mathbb{D}$, por lo que existe una rama analítica de $\log f'$ en el disco unidad con $\log f'(0) = \log 1 = 0$. Observemos ahora que

$$\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} = s\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Re}\left\{\log f'(z)\right\}, \quad z = se^{i\theta}\,.$$

Luego

$$\frac{2s-4}{1-s^2} \leq \frac{\partial}{\partial s}\log\left|f'(se^{i\theta})\right| \leq \frac{2s+4}{1-s^2}\,. \tag{1.10}$$

Por lo tanto, para $z = re^{i\theta}$, podemos integrar y obtener

$$\int_0^r \frac{2s-4}{1-s^2}\,ds \leq \int_0^r \frac{\partial}{\partial s}\log\left|f'(se^{i\theta})\right|\,ds \leq \int_0^r \frac{2s+4}{1-s^2}\,ds\,.$$

Basta resolver las integrales para deducir fácilmente (1.9).

Es fácil comprobar que, para $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, se verifica que las rotaciones de la función de Koebe apropiadas cumplen:

$$|k'_{-\theta}(z_0)| = \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad \text{y} \quad |k'_{\pi-\theta}(z_0)| = \frac{1-r}{(1+r)^3}\,,$$

por lo que las desigualdades son precisas.

Para terminar la demostración, hemos de probar que si se da la igualdad en alguna de las desigualdades de (1.9) para alguna $f \in S$ y algún $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Supongamos, en primer lugar, que existen $f \in S$ y $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} = |f'(z)|\,. \tag{1.11}$$

Comprobemos que, en este caso, debemos tener igualdad en la primera desigualdad de (1.10) para todo $0 < s < r$. Para ello, supongamos, para llegar a contradicción, que existe $0 < s_0 < r$ tal que la primera desigualdad en (1.10) es estricta al evaluar en $s = s_0$.

Entonces, por la continuidad de las funciones involucradas, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que para todo $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset (0, r)$ se cumple

$$\frac{2s-4}{1-s^2} < \frac{\partial}{\partial s} \log \left|f'(se^{i\theta})\right| .$$

Pero, entonces,

$$\log \frac{1+r}{(1-r)^3} = \int_0^r \frac{2s-4}{1-s^2}\, ds < \int_0^r \frac{\partial}{\partial s} \log \left|f'(se^{i\theta})\right|\, ds = \log |f'(re^{i\theta})| ,$$

lo que contradice (1.11). Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{2s-4}{1-s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \log \left|f'(se^{i\theta})\right| , \quad 0 < s < r .$$

Usando que

$$\frac{2s-4}{1-s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \log\ \left|f'(se^{i\theta})\right| = \frac{1}{s}\mathrm{Re}\left\{ se^{i\theta}\frac{f''(se^{i\theta})}{f'(se^{i\theta})}\right\} ,$$

se sigue, tomando límites cuando $s \to 0^+$, que $f''(0) = -4$. Es decir, el segundo coeficiente de Taylor de f tiene módulo igual a 2. Por lo tanto (por el teorema de Bieberbach), f es una rotación de la función de Koebe.

La demostración de que si existen $f \in S$ y $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tales que

$$|f'(z)| = \frac{1+r}{(1-r)^3} ,$$

entonces f es una rotación de la función de Koebe es totalmente análoga. Omitimos los detalles. ∎

1.4.3. Teorema de crecimiento

El teorema de distorsión demostrado en la sección anterior se aplicará ahora para determinar cotas sobre el crecimiento de las funciones de la clase S. El resultado concreto es el siguiente.

Teorema 1.11 (Teorema de crecimiento). *Para toda $f \in S$,*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2} , \quad z \in \mathbb{D} . \tag{1.12}$$

Se tiene igualdad para algún $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ en cualquiera de las dos desigualdades en (1.12) si y solo si f es una rotación adecuada de la función de Koebe.

Demostración. Comprobemos, en primer lugar, que se da la cota superior en (1.12) para el módulo de toda función $f \in S$. Para ello, sea $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$f(z) = \int_0^z f'(z)\, dz = e^{i\theta} \int_0^r f'(se^{i\theta})\, ds\,,$$

ya que $f(0) = 0$. Aplicando ahora el teorema 1.10, resulta

$$|f(z)| \leq \int_0^r \left|f'(se^{i\theta})\right| ds \leq \int_0^r \frac{1+s}{(1-s)^3}\, ds = \frac{r}{(1-r)^2}. \tag{1.13}$$

La demostración de la cota inferior en (1.12) es más sutil. Para comprobarlo, de nuevo, tomemos una función $f \in S$ y un punto $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

- Si $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$, la desigualdad $r/(1+r)^2 \leq |f'(z_0)|$ es trivial, ya que $r(1+r)^{-2} < \frac{1}{4}$ para $0 < r < 1$.
- Si $|f(z)| < \frac{1}{4}$, podemos aplicar el teorema de un cuarto de Koebe (teorema 1.7), que implica que el segmento rectilíneo que une los puntos 0 y $f(z)$ se encuentra completamente contenido en el dominio $f(\mathbb{D})$. Sea C la pre-imagen por f de este segmento, de manera que C (por ser $f \in S$) es un arco simple que une 0 y z y, además, para todo $\zeta \in C$ se cumple que $f(\zeta) = Re^{it}$, donde t es un número real constante (de hecho, es el argumento de $f(z)$). Así, $f'(\zeta)\, d\zeta$ tiene argumento constante y, dado que por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$f(z) = \int_C f'(\zeta)\, d\zeta\,,$$

resulta, utilizando el teorema de distorsión,

$$|f(z)| = \int_C |f'(\zeta)|\, |d\zeta| \geq \int_0^r \frac{1-s}{(1+s)^3}\, ds = \frac{r}{(1+r)^2}. \tag{1.14}$$

Observemos que, si existe una función $f \in S$ para la que se cumple la igualdad en alguna de las desigualdades de (1.12), esta función también cumple la igualdad correspondiente en las desigualdades (1.9) del teorema de distorsión, a la vista de (1.13) y (1.14). Por lo tanto, tal función f es, necesariamente, una rotación de la función de Koebe.

Al igual que en la demostración del teorema de distorsión, es fácil ver que las rotaciones apropiadas de k dan la igualdad en (1.12), por lo que estas desigualdades son precisas. ■

1.5. Compacidad de la clase S

Como se ha mencionado al comienzo la sección 1.1, toda función univalente en $\mathbb{D}$ puede normalizarse fácilmente de manera que obtengamos una función en la clase S. Esta normalización evita la aparición de parámetros innecesarios en los enunciados de los teoremas. Además, se cumple que la clase S resulta ser compacta (con respecto a la topología inducida por la convergencia uniforme en subconjuntos compactos del disco), como se enuncia en el teorema 1.13 que estudiaremos en esta sección.

Recordemos la definición de la convergencia mencionada en el párrafo anterior.

Definición 1.12. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en el dominio simplemente conexo Ω. Se dice que f_n converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω si para todo compacto $K \subset \Omega$ se cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$,*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,.$$

En este caso, usamos la notación $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\Omega} f$.

Quizá sea pertinente recordar que si la sucesión de funciones analíticas $\{f_n\}$ cumple que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\Omega} f$, entonces f es analítica y los coeficientes de Taylor de $\{f_n\}$ convergen a los de f.

Teorema 1.13. *La clase S es compacta con respecto a la topología inducida por la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos del disco.*

Por cuestiones de espacio, omitimos la demostración detallada del teorema. No obstante, mencionamos que se sigue del teorema de Montel (véase el teorema 12, en la sección 4.4 de [1]), que podemos aplicar porque el teorema de crecimiento muestra que toda sucesión de funciones en la clase S está uniformemente acotada en subconjuntos compactos del disco, y del teorema de Hurwitz (véase la página 152 de [6]), que dice que el límite de funciones univalentes en la convergencia uniforme en conjuntos compactos del disco es una función univalente o constante. Claramente, ninguna sucesión de funciones con $f_n'(0) = 1$ puede converger uniformemente en los subconjuntos compactos del disco a una función constante.

El ejemplo dado por la sucesión $\{f_n\}$, definida en el disco unidad por $f_n(z) = z/n$, $n \in \mathbb{N}$, muestra que, sin la normalización $f'(0) = 1$ no se cumple la compacidad para la clase completa de funciones univalentes ya que, claramente, $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} 0$.

2

Teoría de Loewner

Una de las técnicas más poderosas en la teoría de las funciones univalentes es la *teoría de Loewner* [16], de principios de la década de 1920. En sus inicios, esta teoría fue desarrollada con el propósito de comprobar la veracidad de la conjetura de Bieberbach. Sin embargo el método de Loewner también arroja resultados geométricos de considerable interés, en relación con las funciones de la clase S.

En este capítulo, se presentan los resultados básicos de la teoría de Loewner. Para más detalles, el lector puede consultar el capítulo 3 de [7] o el capítulo 6 de [17].

2.1. Convergencia del núcleo

Un concepto fundamental en el desarrollo de la teoría de Loewner es la *convergencia del núcleo*, que explicamos en esta sección.

Definición 2.1. *Sea $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de dominios simplemente conexos en el plano, ninguno de ellos igual a $\mathbb{C}$ y tales que $0 \in D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotemos por $Int(\{D_n\})$ al interior de $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$.*

- *Si $0 \in Int(\{D_n\})$, el* núcleo*, D, de esta sucesión de dominios se define como el mayor dominio simplemente conexo (con respecto a la inclusión) que contiene a 0 y cumple que si K es un subconjunto compacto de D, entonces existe un número natural, n_0, tal que $K \subseteq D_n$ para $n \geq n_0$.*
- *Si $0 \notin Int(\{D_n\})$, el* núcleo *$D = \{0\}$.*

El teorema 2.3 permitirá calcular el núcleo D de una sucesión de dominios simplemente conexos con relativa facilidad. Antes de pasar a enunciarlo y demostrarlo, es recesario introducir la siguiente noción de convergencia.

Definición 2.2. *Decimos que la sucesión de dominios simplemente conexos distintos del plano $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\{0\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ y núcleo D* converge (en la convergencia de núcleo) *a D si cada subsucesión de $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene también núcleo D. En este caso, utilizamos la notación $D_n \to_N D$.*

Otra noción de convergencia necesaria para el desarrolo de los contenidos en esta sección es la de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de funciones analíticas en el disco unidad (ya definida en la sección 1.5). Recordemos que esta convergencia implica la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de las derivadas de las funciones en la sucesión a las derivadas de la función límite. Ambas nociones de convergencia quedan relacionadas por el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Teorema del núcleo de Carathéodory). *Sea* $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de dominios simplemente conexos distintos de* $\mathbb{C}$ *con* $\{0\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. *Sea* D *su núcleo. Denotemos por* f_n *a la aplicación de Riemann del disco sobre* D_n *con* $f_n(0) = 0$ *y* $f_n'(0) > 0$. *Entonces,* $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$ *si y solo si* $D_n \to_N D \neq \mathbb{C}$. *En este caso,* $D = f(\mathbb{D})$.

Observemos que, en el caso de convergencia $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$, se tiene, por el teorema de Hurwitz (véase la página 152 de [6]) que, o bien $f \equiv 0$ (en cuyo caso, $D = \{0\}$), o bien f es una aplicación *univalente* de $\mathbb{D}$ sobre D, por lo que $D \neq \{0\}$ es un dominio simplemente conexo.

Demostración. Supongamos que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$. Surgen dos posibilidades.

- *La función* $f \equiv 0$. En este caso, hemos de probar $D_n \to_N \{0\}$. Observemos que cualquier subsucesión de $\{f_n\}$ también converge uniformemente en subconjuntos compactos del disco a f. Por lo tanto, basta comprobar que el núcleo de D_n es $\{0\}$. Para ello, procedemos por contradicción.

Supongamos que $D \neq \{0\}$. Entonces, existe un disco cerrado $\overline{D}(0,r)$ centrado en el origen y con radio $r > 0$ contenido en D. Pero, en este caso, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple $\overline{D}(0,r) \subset D_n$.

Así, podemos considerar las funciones $g_n(z) = f_n^{-1}(rz)$, $z \in \mathbb{D}$, que resultan ser holomorfas en $\mathbb{D}$, fijan el origen y cumplen $g_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Una aplicación directa del lema de Schwarz da lugar a la desigualdad $|g_n'(0)| = r/|f_n'(0)| \leq 1$, por lo tanto, $|f_n'(0)| \geq r$ para todo $n \geq n_0$. Pero esto implica que $f'(0) \neq 0$, lo que es una contradicción puesto que $f \equiv 0$ y, por lo tanto, $f' \equiv 0$.

El mismo argumento prueba, debido a que cualquier subsucesión de $\{f_n\}$ converge a la misma f, que cualquier subsucesión de $\{D_n\}$ tiene núcleo $\{0\}$, luego $D_n \to_N \{0\}$.

- *La función* $f \not\equiv 0$. Sea $\Omega = f(\mathbb{D})$. Siendo f una función holomorfa e inyectiva, se tiene que Ω es un dominio simplemente conexo en el plano distinto de $\mathbb{C}$ (por el teorema de Liouville aplicado a f^{-1}). Tenemos que demostrar que $D = \Omega$ y que $D_n \to_N \Omega$. Dividimos esta demostración en cinco pasos.

$\boxed{\text{Primer paso.}}$ Veamos que $\Omega \subseteq D$. Para este fin, tenemos que demostrar que si K es un subconjunto compacto arbitrario de Ω, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, se cumple $K \subset D_n$.

Para hacerlo, encerramos K dentro de una curva suave cerrada y simple γ contenida en $\Omega \setminus K$. Sea $\eta > 0$ la distancia entre γ y K, de manera que se tiene que si $w \in K$ y si $z \in f^{-1}(\gamma)$, entonces

$$|f(z) - w| \geq \eta\,.$$

Usando que $f^{-1}(\gamma)$ es un compacto en $\mathbb{D}$ y que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$, concluimos que existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces, para todo $z \in f^{-1}(\gamma)$,

$$|f_n(z) - f(z)| < \eta\,.$$

Consecuentemente, se obtiene que, para $n \geq n_0$ y para todo $z \in f^{-1}(\gamma)$,

$$|f_n(z) - f(z)| = |[f(z) - w] - [f_n(z) - w]| < \eta \leq |f(z) - w|\;. \tag{2.1}$$

Observemos que, para $w \in K$, el número de ceros de la función $f(z) - w$ es 1, por ser f univalente. Entonces, usando (2.1) y el teorema de Rouché (véase la sección 5.2 de [1]), se sigue que el número de ceros de $f_n(z) - w$ es también 1 para todo $n \geq n_0$. Así, para estos valores de n, se tiene que $K \subset D_n$. Por lo tanto, $\Omega \subset D$.

$\boxed{\text{Segundo paso.}}$ Como consecuencia del teorema de Montel (véase el teorema 12, en la sección 4.4 de [1]), si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones analíticas en un dominio simplemente conexo Ω cumple que $|f_n(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una función analítica g en Ω y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que cumple que $f_{n_k} \rightrightarrows_{K \Subset \mathbb{D}} g$.

Más aún, como $f(\mathbb{D}) = \Omega \subset D$, se tiene que dado cualquier compacto K contenido en Ω, se cumple que $K \subset f_n(\mathbb{D})$ para $n \geq n_K$, donde n_K depende solo del compacto K. Así, si n es suficientemente grande, la sucesión $\{f_n^{-1}\}$ está bien definida en subconjuntos compactos de Ω y cumple $|f_n^{-1}| \leq 1$ en el conjunto compacto K.

Observemos que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde $K_n = f(\overline{D}(0, \frac{n-1}{n}))$ son subconjuntos compactos de Ω que cumplen $K_n \subset K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, si K es un subconjunto compacto de Ω, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_N$. Se sigue, entonces, que existe una subsucesión $\{f_{n_k}^{-1}\}$ de $\{f_n^{-1}\}$ bien definida en K y una función analítica $g \in \Omega$ tales que $f_{n_k}^{-1}$ converge uniformemente a g en K. Es claro que $g(0) = 0$. Además, $g'(0) > 0$ ya que

$$0 < \frac{1}{f'(0)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{f'_{n_k}(0)} = \lim_{k\to\infty} g'_{n_k}(0) = g'(0).$$

Así g no es constante, y por tanto, usando de nuevo el teorema de Hurwitz se tiene que g es univalente.

$\boxed{\text{Tercer paso.}}$ Ahora probaremos que $g = f^{-1}$. Para este fin, sea $z_0 \in \mathbb{D}$ y $w_0 = f(z_0)$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que el disco cerrado $\overline{D}(z_0, \delta)$ esté contenido en $\mathbb{D}$. Sean $\gamma = \partial D(z_0, \delta)$ y $\Gamma = f(\gamma)$.

Si η denota la distancia entre w_0 y Γ, entonces, claramente, $|f(z) - w_0| \geq \eta$ para todo $z \in \gamma$. Dado que $f_n \rightrightarrows_{K \Subset \mathbb{D}} f$, un argumento similar al usado en el primer paso muestra que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que ambas ecuaciones $f_n(z) - w_0 = 0$ y $f(z) - w_0 = 0$ tienen el mismo número de soluciones (que resulta ser 1) en $D(z_0, \delta)$.

Concluimos entonces que para cada $n_k \geq n_0$, existe un punto $z_k \in D(z_0, \delta)$ tal que $f_{n_k}(z_k) = w_0$. Por lo tanto, usando la sucesión $\{g_{n_k}\} = \{f_{n_k}^{-1}\}$ considerada en el segundo paso y el hecho de que $g_{n_k} \rightrightarrows_{K \Subset \mathbb{D}} g$, se tiene que

$$|g_{n_k}(w_0) - g(w_0)| < \delta.$$

Consecuentemente, obtenemos

$$|g(w_0) - z_0| \leq |g(w_0) - g_{n_k}(w_0)| + |z_k - z_0| < 2\delta.$$

Dado que δ puede tomarse arbitrariamente pequeño, $g(w_0) = z_0$. Puesto que z_0 es arbitrario, se deduce que $g = f^{-1}$.

Nótese que los argumentos utilizados pueden aplicarse a cualquier subsucesión de f_n^{-1}, por lo tanto, se tiene que $f_n^{-1} \rightrightarrows_{K\Subset\Omega} f^{-1}$.

$\boxed{\text{Cuarto paso.}}$ Veamos que $f(\mathbb{D}) = D$.

Exactamente el mismo argumento que el utilizado en los pasos segundo y tercero, muestra que existe una función analítica y univalente ψ en D con $|\psi(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$ y tal que $f_n^{-1} \rightrightarrows_{K\Subset D} \psi$. Pero, entonces, $\psi|_\Omega = f^{-1}$. El principio de unicidad de funciones analíticas muestra que, entonces, f^{-1} puede extenderse de forma analítica a D y $f^{-1} = \psi$ en D.

Supongamos, para llegar a contradicción, que existe $w_0 \in D \setminus \Omega$. Entonces, existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\psi(w_0) = z_0$. Pero, entonces, $f(z_0) = w_0$, luego $w_0 \in f(\mathbb{D}) = \Omega$. Esto es una contradicción que muestra que $\Omega = D$.

$\boxed{\text{Quinto paso.}}$ Podemos repetir los argumentos presentados en los pasos anteriores aplicándolos a cualquier subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ y obtener que el núcleo de cualquier subsucesión de $\{D_n\}$ es $D = f(\mathbb{D})$, lo que prueba que $D_n \to_N D$.

Esto concluye la demostración de que si $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$, entonces $D_n \to_N D \neq \mathbb{C}$.

Supongamos, ahora, que $D_n \to_N D \neq \mathbb{C}$. De nuevo, surgen dos posibilidades.

- Si $D = \{0\}$, entonces es sencillo demostrar que $f_n'(0) \to 0$. En efecto, si no fuese el caso, existirían $\rho > 0$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n_k}'(0) \to \rho$, $k \to \infty$. Aplicando el teorema de un cuarto de Koebe (teorema 1.7) a las funciones $F_k = f_{n_k}/f_{n_k}'(0)$, que pertenecen a la clase S, se seguiría que cada dominio D_{n_k} contiene el disco $D(0, f_{n_k}'(0)/4)$, con radio mayor o igual que $\rho/2$ si k es suficientemente grande. Por lo tanto, existiría un disco abierto contenido en D, lo que es una contradicción.

Por otro lado, usando el teorema de crecimiento (teorema 1.11) para las funciones $F_n = f_n/f_n'(0)$ y teniendo en cuenta que si K es un compacto del disco unidad, entonces existe $0 < R < 1$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in K$, obtenemos que, para todo $z \in K$

$$|f_n(z)| \leq |f_n'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \leq |f_n'(0)|\frac{R}{(1-R)^2} \to 0\,, \quad n \to \infty\,.$$

Por lo tanto, se sigue que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} 0$.

- Supongamos, ahora, que D es un dominio simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$. Veamos, en primer lugar, que la sucesión $\{f_n'(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Para ello, argumentamos por contradicción suponiendo que existe una subsucesión para la que se verifica que $f'_{n_k}(0) \geq k$ para $k \geq 1$. De nuevo, una aplicación del teorema de un cuarto de Koebe, implica que $D(0, k/4) \subset D_{n_k}$. Por lo tanto, la sucesión $\{D_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene núcleo igual a $\mathbb{C}$, lo que contradice nuestra hipótesis. Así, concluimos que existe una constante $M > 0$ tal que $f'_n(0) \leq M$ para todo número natural n.

Considerando las funciones $F_n = f_n/f'_n(0) \in S$ y aplicando el teorema de crecimiento, se sigue, como antes, que para todo subconjunto compacto K del disco unidad y todo $z \in K$

$$|f_n(z)| \leq M\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq M\frac{R}{(1-R)^2}\,.$$

Aplicando el teorema de Montel, podemos obtener una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y una función analítica f en el disco unidad que cumplen que $f_{n_k} \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$.

Basta aplicar la primera parte de la demostración para concluir que D_{n_k} tiene núcleo $D = f(\mathbb{D})$.

El mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier otra subsucesión convergente de $\{f_n\}$. Si ocurriese que, para otra subsucesión $\{f_{n_j}\}$ tal que $f_{n_j} \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} g$, donde $g \neq f$, se tendría que $D = f(\mathbb{D}) = g(\mathbb{D})$. Pero ambas funciones f y g son *las* inversas de las transformaciones de Riemann de D sobre $\mathbb{D}$ ($f(0) = g(0) = 0$ y $f'(0), g'(0) > 0$). Luego $f = g$ y, por tanto, $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$, donde $f(\mathbb{D}) = D$. ■

2.2. Densidad de las aplicaciones con un corte simple

Una función $f \in S$ se denomina *aplicación con cortes* ("slit mapping", en inglés) si $f(\mathbb{D})$ es el plano complejo menos una serie de arcos de Jordan (es decir, curvas analíticas simples). Estos arcos deben tender a ∞ porque $f(\mathbb{D})$ es un dominio simplemente conexo. La función f se denomina *aplicación con un corte simple* ("single-slit mapping") si el complementario de $f(\mathbb{D})$ es un solo arco de Jordan.

El teorema 2.3 del núcleo de Carathéodory nos permite probar el siguiente resultado, de importancia fundamental en el estudio de las propiedades de la clase S y punto de partida en el desarrollo de la teoría de Loewner.

Teorema 2.4. *Sea $f \in S$. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S$ de aplicaciones con un corte simple tal que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$.*

Demostración. Al considerar dilataciones de f, es decir las funciones $f_r(z) = f(rz)/r,\ 0 < r < 1$, podemos reducirnos al caso en que f es univalente en $\overline{\mathbb{D}}$ y, de hecho, podemos suponer que en este caso $f(\mathbb{D})$ es un dominio acotado por una curva de Jordan Γ (curva cerrada y simple) analítica. Tomemos un punto $w_0 \in \Gamma$ y parametricemos la curva mediante una transformación $\Gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $w_0 = \Gamma(a) = \Gamma(b)$. Siendo una curva de Jordan, encierra un dominio acotado al que denotamos por D.

Sea $\{t_n\}$ una sucesión creciente en $[a,b]$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = b$ y sean $w_n = \Gamma(t_n)$.

Consideremos ahora los arcos Γ_n que consisten en un arco contenido en $\mathbb{C} \setminus \{D\}$ de ∞ a w_0, seguido del arco $\Gamma([a,t_n])$, $n \geq 1$.

Es claro que $\Omega_n = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$ son dominios simplemente conexos en el plano y, por tanto, podemos considerar las aplicaciones f_n, univalentes en el disco unidad, con $f_n(\mathbb{D}) = \Omega_n$, $f_n(0) = 0$ y $f_n'(0) > 0$, para cada número natural n.

De esta construcción, queda geométricamente claro que $\Omega = f(\mathbb{D})$ es el núcleo de $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, por el teorema 2.3, se tiene que $f_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$. Puesto que $f_n'(0) \to f'(0) = 1$, se sigue que las funciones $g_n = f_n/f_n'(0)$ son funciones en la clase S con un corte simple y cumplen $g_n \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} f$. ■

2.3. Cadenas de Loewner y covergencia del núcleo

En esta sección se presenta el concepto de *cadena de Loewner* (también llamada *cadena de subordinación univalente*) y se estudian algunas de sus propiedades. Los contenidos están basados en el capítulo 3 de [7].

El lector debe advertir que siempre que una función f dependa de manera holomorfa de la variable $z \in \mathbb{D}$, se usará la notación f' para denotar $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Definición 2.5. *La función* $f : \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *es* una cadena de Loewner *si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para todo* $t \in [0,\infty)$*, la función* $f(\cdot,t)$ *es univalente (holomorfa e inyectiva) en* $\mathbb{D}$ *que fija el origen.*
2. *Las funciones* $f'(0,t)$ *son continuas en* $[0,\infty)$ *y cumplen que* $|f'(0,t)|$ *es una función estrictamente creciente de* t *con* $|f'(0,0)| > 0$ *y* $\lim_{t\to\infty} |f'(0,t)| = \infty$.
3. *Para dos números reales cualesquiera* s *y* t *con* $0 \leq s \leq t < \infty$*, existe una función* v_{st} *holomorfa en* $\mathbb{D}$ *que cumple* $v_{st}(0) = 0$ *y tal que* $|v_{st}(z)| \leq 1$ *para todo* $|z| < 1$*, de manera que*
$$f(z,s) = f(v_{st}(z),t)\,. \tag{2.2}$$

A las funciones v_{st}, $s \leq t$, en la definición anterior, se las llama *funciones de transición*. Formalmente, están definidas por

$$v_{st}(z) = f^{-1}(f(z,s),t)\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Todas ellas son univalentes en el disco unidad y verifican las hipótesis del lema de Schwarz. Es habitual utilizar la notación $f(z,s) \prec f(z,t)$ para denotar que ocurre (2.2) y es equivalente, en términos geométricos, a que $f(\mathbb{D},s) \subset f(\mathbb{D},t)$. Nótese que, de hecho, $f(\mathbb{D},s) = f(\mathbb{D},t)$ si y solo si $v_{st}(z) = \lambda z$ para algún $|\lambda| = 1$ (si y solo si $|v_{st}'(0)| = 1$). En este caso, se sigue que $|f'(0,s)| = |f'(0,t)|$, lo que no puede ocurrir por la condición 2, salvo que $s = t$. Por lo tanto, $|v_{st}'(0)| \neq 1$ y $f(\mathbb{D},s) \subsetneq f(\mathbb{D},t)$, $0 \leq s < t < \infty$.

Antes de mostrar un ejemplo de una cadena de Loewner, necesitamos hacer una serie de observaciones y enunciar (y demostrar) el teorema 2.7.

Notemos, en primer lugar, que no hay pérdida de generalidad al suponer que las funciones en una cadena de subordinación satisfacen la siguiente normalización:

$$f'(0,t) = e^t\,, \quad t \geq 0\,,$$

de manera que

$$f(z,t) = e^t\left[z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots\right]\,, \quad z \in \mathbb{D}.$$

De hecho, si $f(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + ...$ es una cadena de subordinación univalente no normalizada y se definen $t^* = \log\left|\frac{a_1(t)}{a_1(0)}\right|$ y $\theta(t) = \arg\left[\frac{a_1(t)}{a_1(0)}\right]$, entonces

$$f_*(z,t^*) = \frac{1}{a_1(0)}\,f(e^{-i\theta(t)}z,t)$$

es en una cadena de Loewner normalizada.

Dada una cadena de Loewner $f(z,t)$, sea f_t la función univalente definida por $f_t(z) = f(z,t)$. Podemos, entonces, pensar en la cadena de Loewner cómo una familia parametrizada de funciones univalentes $\{f_t\}_{t\geq 0}$ en $\mathbb{D}$, indexada por tiempo t: f_0 es el primer elemento de la cadena y cuando t crece, los dominios simplemente conexos $f_t(\mathbb{D})$ se expanden (para completar $\mathbb{C}$).

El siguiente lema será de gran utilidad. Omitimos la demostración, que no es difícil, por cuestiones de espacio. Referimos al lector al capítulo 6 de [17] para los detalles.

Lema 2.6. *Sea $f(z,t)$ una cadena de Loewner normalizada con funciones de transición v_{st}. Entonces, para todo $0 \leq s \leq t \leq u < \infty$ y para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|f(z,t) - f(z,s)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s)\,,$$

y

$$|v_{su}(z) - v_{tu}(z)| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1 - e^{s-t})\,.$$

Ahora enunciamos y demostramos el anunciado teorema 2.7 en el que los conceptos de cadena Loewner y convergencia del núcleo de Caratheódory están relacionados. Para este propósito, sea $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ sea una familia de dominios simplemente conexos distintos de $\mathbb{C}$ que cumplen las siguientes propiedades:

1. Para todo $s \geq 0$,
$$0 \in G(s)\,. \tag{2.3}$$
2. Para $0 \leq s < t < \infty$,
$$G(s) \subsetneq G(t)\,. \tag{2.4}$$
3. Se verifican las siguientes condiciones de convergencia en núcleo:
$$\begin{cases} G(t_n) \to_N G(t_0)\,, \; t_n \to t_0 < \infty\,, \\ \;\; G(t_n) \to_N \mathbb{C}\,, \qquad t_n \to \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Teorema 2.7. *Sea* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *una familia de dominios simplemente conexos distintos de* $\mathbb{C}$ *que satisfacen las condiciones* (2.3)*,* (2.4) *y* (2.5)*. Para cada* $t \geq 0$ *sea* $g_t(z) = g(z,t)$ *la aplicación de Riemann de* $\mathbb{D}$ *sobre* $G(t)$ *(tal que* $g_t(0) = 0$ *y* $g_t'(0) = \alpha(t) > 0$*). Sea* $\alpha_0 = \alpha(0)$*. Entonces,*

(i) *Se verifican las siguientes condiciones.*
  (a) *La función* α *es continua en* $[0,\infty)$*, estrictamente creciente y verifica que* $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.
  (b) *Si* $\beta(t) = log[\alpha(t)/\alpha_0]$ *entonces* $f(z,t) = \alpha_0^{-1} g(z, \beta^{-1}(t))$ *es una cadena de Loewner normalizada y* $f(\mathbb{D},t) = \alpha_0^{-1} G(\beta^{-1}(t))$.

(ii) *Recíprocamente, sea* $f(z,t)$ *una cadena de Loewner normalizada y sean* $G(t) = f(\mathbb{D},t)$*,* $t \geq 0$*. Entonces la sucesión de dominios simplemente conexos* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *satisface las condiciones* (2.3)*,* (2.4) *y* (2.5)*.*

Demostración. Demostremos, en primer lugar, **(i)**. Sean

$$g(z,t) = \alpha(t)[z + b_2(t)z^2 + ...]\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Utilizando el teorema 2.3 y la condición (2.5), se tiene que $g_{t_n} \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} g_{t_0}$ cuando $t_n \to t_0 < \infty$. Por lo tanto, $\lim_{t_n\to t_0} \alpha(t_n) = \lim_{t_n\to t_0} g_{t_n}'(0) = g_{t_0}'(0) = \alpha(t_0)$. Es decir, la función α es continua en $[0,\infty)$.

Usando la relación (2.4), tenemos $g(z,s) \prec g(z,t)$ para $0 \leq s \leq t < \infty$. Por lo tanto, hay una familia de funciones de transición v_{st} para las que se cumple

$$g(z,s) = g(v_{st}(z),t)\,, \quad z \in \mathbb{D}, \quad 0 \leq s \leq t < \infty\,.$$

Luego, tomando derivadas con respecto a z, resulta

$$\alpha(s) = g'(0,s) = g'(0,t)v_{st}'(0) = \alpha(t)v_{st}'(0). \tag{2.6}$$

Recordando que las funciones de transición son univalentes en $\mathbb{D}$ y verifican las hipótesis del lema de Schwarz, se tiene que $0 < |v_{st}'(0)| \leq 1$. Puesto que la función α es positiva en $[0,\infty)$, por (2.6) se tiene que $0 < v_{st}'(0) \leq 1$. Pero si $v_{st}'(0) = 1$, entonces $v_{st}(z) = z$ y $G(s) = G(t)$, lo que contradice (2.4). Así, $0 < v_{st}'(0)) < 1$ y, por (2.6), concluimos que α es una función estrictamente creciente en $[0,\infty)$.

Supongamos que $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = L < \infty$. Entonces, las funciones $g_t/\alpha(t) \in S$ para todo $t > 0$ y, siendo S compacta, se sigue que existe $G \in S$ tal que

$$g_{t_n}/\alpha(t_n) \rightrightarrows_{K\Subset\mathbb{D}} G$$

para alguna sucesión $t_n \to \infty$. Esto contradice (2.5) ya que, entonces, tendríamos $G(\mathbb{D}) \neq \mathbb{C}$. Por lo tanto, $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$. Estos argumentos prueban (a).

Probaremos ahora (b). Para este fin, es suficiente observar que $\alpha : [0,\infty) \to [\alpha_0,\infty)$ es una función continua estrictamente creciente y cumple $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.

Consecuentemente β cumple las mismas condiciones. Utilizando que $g(z,s) \prec g(z,t)$, se concluye que $f(z,t) = \alpha_0^{-1} g(z,\beta^{-1}(t))$ es una cadena de Loewner. Además, si

$\tau = \beta^{-1}(t)$, entonces $t = \beta(\tau)$ y $e^t = \alpha(\tau)/\alpha_0$. Por lo tanto, obtenemos $f'(0,t) = \alpha_0^{-1} g'(0,\tau) = \alpha_0^{-1}\alpha(\tau) = e^t$. Es decir, $f(z,t)$ es una cadena de Loewner normalizada y además $f(\mathbb{D},t) = \alpha_0^{-1} G(\beta^{-1}(t))$. Esto completa la prueba de **(i)**.

Probamos ahora **(ii)**. Como se ha mencionado en el párrafo posterior a la definición 2.5, los dominios $G(t) = f(\mathbb{D},t)$ cumplen (2.3) y (2.4).

La demostración de que se cumple la primera condición en (2.5), es una consecuencia directa del lema 2.6. Para concluir que $G(t_n) \to_N \mathbb{C}$ cuando $t_n \to \infty$, observemos que las funciones $e^{-t} f(z,t)$, $z \in \mathbb{D}$ pertenecen a la clase S. Por el teorema de un cuarto de Koebe, se tiene que

$$D\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset \frac{f(\mathbb{D},t)}{e^t}.$$

Por lo tanto, $f(\mathbb{D},t) = G(t)$ contiene un disco centrado en el origen y de radio $e^t/4$, de modo que $G(t_n) \to_N \mathbb{C}$ cuando $t_n \to \infty$, como queríamos demostrar. ■

Ejemplo 2.8. Sea $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ una parametrización de un arco de Jordan que no contiene al origen y cumple $\gamma(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Consideremos los dominios $G(t) = \mathbb{C} \setminus \gamma([t,\infty))$, $0 \le t < \infty$. La familia $\{G(t)\}_{t\ge 0}$ satisface las condiciones (2.3), (2.4) y (2.5) y por lo tanto, usando el Teorema 2.7, se tienen que las correspondientes aplicaciones de Riemann del disco sobre $G(t)$ forman una cadena de Loewner.

2.4. El teorema de Loewner

El ejemplo 2.8 proporciona la intuición necesaria para el siguiente desarrollo.

Sea $f \in S$ (con coeficientes de Taylor $\{a_n\}_{n\ge 1}$, $a_1 = 1$), una aplicación con un corte simple Γ que une el punto $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con ∞, de manera que $f(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Sea $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ una parametrización de Γ con $\gamma(0) = w_0$ y $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ para $s \neq t$. Denotemos por Γ_t a $\gamma([t,\infty))$, $t \ge 0$, y a $G(t) = \mathbb{D} \setminus \Gamma_t$. Es claro que, así construidos, los dominios $G(t)$ son simplemente conexos, distintos de $\mathbb{C}$ y cumplen (2.3), (2.4) y (2.5). Sea $g(z,t)$ la aplicación de Riemann del disco unidad sobre $G(t)$, de manera que

$$g(z,t) = \beta(t)\left[z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \dots\right], \quad z \in \mathbb{D}.$$

Es claro que, en este caso, $\beta(0) = 1$ ya que $g(\cdot,0) = f(\cdot)$. Por lo tanto, aplicando el teorema 2.7, podemos obtener una cadena de Loewner normalizada (que denotamos por $g(z,t)$ de nuevo para simplificar la notación) con

$$g(z,t) = e^t\left[z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \dots\right], \quad z \in \mathbb{D},$$

y tal que $g(\mathbb{D},t) = G(t)$.

Observando que $f(\mathbb{D}) \subset G(t)$ para todo $t > 0$, podemos definir $g^{-1}(f(z),t)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y tenemos la familia de funciones

$$f(z,t) = g^{-1}(f(z),t) = e^{-t}\left[z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots\right], \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.7}$$

donde las funciones $a_n(t)$ son funciones continuas en $[0,\infty)$ porque, por el teorema 2.7, las funciones $b_n(t)$ lo son y calculando el desarrollo en serie de Taylor de la función inversa se sigue que sus coeficientes son funciones continuas de los coeficientes de la función. También, se tiene que $a_n(0) = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, ya que $g^{-1}(f(z),0) = f^{-1}(f(z),0) = z$.

Más aún, una aplicación del teorema de Montel (usando, de nuevo, que las funciones de la clase S están equiacotadas por el teorema de crecimiento), muestra que, de hecho, cuando $t \to \infty$, las funciones $e^t f(z,t)$ convergen uniformemente en subconjuntos compactos del disco a f, de manera que $a_n(t) \to a_n$, cuando $t \to \infty$ para todo número natural n. Remitimos al lector a la página 83 de [7] para los detalles.

Veamos ahora el teorema de Loewner que proporciona una fórmula estructural para las funciones con un corte simple en la clase S.

Teorema 2.9 (Teorema de Loewner). *Sea $f \in S$ una aplicacción con un corte simple. Entonces, la cadena de Loewner $f(z,t)$ construida en (2.7) satisface la ecuación diferencial*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+\kappa f}{1-\kappa f}, \tag{2.8}$$

donde $\kappa = \kappa(t)$ es una función de valores complejos con $|\kappa(t)| = 1$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea $g(z,t)$ la cadena de Loewner obtenida de manera que $g(z,t)$ es la aplicación de Riemann del disco sobre los dominios $G(t) = \mathbb{D} \setminus \Gamma_t$ definidos al comienzo de esta sección.

Con el fin de simplificar la exposición en los argumentos usados en esta demostración, abandonamos la clásica notación $g(z,t)$ y escribimos $g_t(z) = g(z,t)$ para $z \in \mathbb{D}$ y $t \geq 0$.

Por ser una cadena de Loewner, las funciones de transición $v_{st}(z)$ asociadas a $g_t(z)$ son aplicaciones univalentes del disco en sí mismo y fijan el origen. De hecho, recordemos que

$$v_{st}(z) = g_t^{-1}(g_s(z)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Por tanto, $v_{st}(\mathbb{D})$ coincide con el disco unidad salvo un arco de Jordan γ_{st} que une un punto del disco con $\partial\mathbb{D}$. Siendo, por tanto, $\partial v_{st}(\mathbb{D})$ localmente conexa, podemos aplicar el teorema de extensión de Caratheódory para obtener las funciones V_{st} que son analíticas en $\mathbb{D}$ (puesto que coinciden con v_{st} para $|z| < 1$) y continuas para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Así, $V_{st}(\zeta)$, es continua en $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y $V_{st}(\partial\mathbb{D})$ coincide con $\partial\mathbb{D} \cup \gamma_{st}$.

Sea $I_{st} = \{e^{it} \colon 0 \leq \alpha_{st} < \beta_{st} \leq 2\pi\}$ el arco de la circunferencia unidad que cumple $V_{st}(I_{st}) = \gamma_{st}$.

Recordemos que las funciones de transición cumplen que $\lim_{s\to t} v_{st}(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Lo mismo es cierto tomando $\lim_{t\to s} v_{st}(z)$. Por lo tanto, cuando $s \to t$ y cuando $t \to s$, los arcos I_{st} y $\gamma_{s,t}$ se deforman continuamente en un punto de la circunferencia unidad al que denotamos por $\lambda(t)$.

Como ya hemos mencionado, las funciones de transición v_{st} son analíticas (e inyectivas) en el disco y cumplen $v_{st}(0)=0$. Por lo tanto, se tiene que $v_{st}(z)/z$ es, también, analítica en $\mathbb{D}$ y no se anula en $\mathbb{D}$. De hecho, se tiene que

$$\lim_{z\to 0}\frac{V_{st}(z)}{z}=v'_{st}(0)=e^{s-t}\,.$$

Concluimos, entonces, que $V_{st}(z)/z$, $z\in\mathbb{D}$, es analítica en el disco unidad y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Podemos, por tanto, considerar la función

$$\Phi(z)=\log\left\{\frac{V_{st}(z)}{z}\right\}\,,\quad z\in\mathbb{D}\,,\quad \log\Phi(0)=s-t\,,$$

que es analítica en $\mathbb{D}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Procedamos a comprobar la ecuación diferencial (2.8).

Necesitamos, para ello, en primer lugar, recordar que, puesto que se verifica que las funciones $f(z,t)$ en el enunciado del teorema están definidas por la relación (2.7) (que, en la nueva notación, se escribe como $f_t(z)=g_t^{-1}(f(z))$, $z\in\mathbb{D}$), se cumple, para todo z en el disco unidad:

$$v_{st}(f_s(z))=g_t^{-1}(g_s(f_s(z)))=g_t^{-1}(g_s(g_s^{-1}(f(z))))=g_t^{-1}(f(z))=f_t(z)\,.$$

Usando que la parte real de la función Φ es armónica en $\mathbb{D}$ y que se cumple que $\operatorname{Re}\{\Phi(\zeta)\}=0$ si $\zeta\notin I_{st}$, ya que $|V_{st}(\zeta)/\zeta|=1$ para todo $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ que no pertenezca al arco I_{st}, podemos utilizar la integral de Poisson para escribir

$$\operatorname{Re}\{\Phi(z)\}=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right\}d\theta\,,\quad z\in\mathbb{D}\,,$$

donde $\alpha=\alpha_{st}$ y $\beta=\beta_{st}$ son los extremos del intervalo I_{st}.

Tenemos, así, que la función analítica en $\mathbb{D}$ definida por

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta$$

cumple que $\operatorname{Re}\{\Psi(z)\}=\operatorname{Re}\{\Phi(z)\}$ para todo z en el disco. Por lo tanto, $\Psi-\Phi$ debe ser una función constante. Puesto que, por la propiedad del valor medio de las funciones armónicas, $\Psi(0)=\operatorname{Re}\{\Phi(0)\}=\Phi(0)$, obtenemos que $\Psi=\Phi$ y se sigue que

$$\Phi(z)=\log\frac{v_{st}(z)}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \operatorname{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta\,,\quad z\in\mathbb{D}\,.$$

Sustituyendo z por $f_s(z)$ en la identidad anterior y recordando que $v_{st}(f_s(z))=f_t(z)$, podemos escribir

$$\log \frac{f_t(z)}{f_s(z)} = \log \frac{v_{st}(f_s(z))}{f_s(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} \frac{e^{i\theta} + f_s(z)}{e^{i\theta} - f_s(z)}\, d\theta\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2.9}$$

Consideremos la parte real de la integral en (2.9),

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\theta} + f_s(z)}{e^{i\theta} - f_s(z)}\right\} d\theta\,.$$

Observemos que $\mathrm{Re}\{\Phi(\zeta)\} < 0$ si $\zeta \in I_{st}$ ya que $|V_{st}(\zeta)/\zeta| < 1$ si $\zeta \in I_{st}$. También, que la función $(e^{i\theta} + f_s(z))/(e^{i\theta} - f_s(z))$ es continua en $\theta \in [0, 2\pi)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Aplicando, entonces, el teorema del valor medio, se sigue que existe un número real $\mu \in (\alpha, \beta)$ tal que

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\theta} + f_s(z)}{e^{i\theta} - f_s(z)}\right\} d\theta = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\mu} + f_s(z)}{e^{i\mu} - f_s(z)}\right\} \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} d\theta\,.$$

Podemos aplicar el mismo argumento utilizando la parte imaginaria de la función $(e^{i\theta} + f_s(z))/(e^{i\theta} - f_s(z))$ para concluir, desde (2.9), que existen μ y ν en (α, β) tales que

$$\begin{aligned} \log \frac{f_t(z)}{f_s(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} \frac{e^{i\theta} + f_s(z)}{e^{i\theta} - f_s(z)}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\mu} + f_s(z)}{e^{i\mu} - f_s(z)}\right\} + i\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{i\nu} + f_s(z)}{e^{i\nu} - f_s(z)}\right\}\right] \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} d\theta \\ &= \left[\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\mu} + f_s(z)}{e^{i\mu} - f_s(z)}\right\} + i\,\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{i\nu} + f_s(z)}{e^{i\nu} - f_s(z)}\right\}\right](s-t)\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

ya que

$$\frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{\Phi(e^{i\theta})\right\} d\theta = \mathrm{Re}\left\{\Phi(0)\right\} = (s-t)\,.$$

Dividiendo ambos lados de (2.10) por $(s-t)$ y dejando s tender a t y t tender a s, resulta que

$$\frac{\partial \log f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\lambda(t) + f(z,t)}{\lambda(t) - f(z,t)}\,.$$

Es decir, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1 + \kappa f}{1 - \kappa f}\,,$$

donde $\kappa = 1/\lambda$ cumple $|\kappa(t)| = 1$ para todo $t \geq 0$. ■

2.5. El tercer coeficiente

Sea

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \,, \quad z \in \mathbb{D} \,, \tag{2.11}$$

una función de la clase S. En esta sección, comprobaremos que, entonces, $|a_3| \leq 3$.

Teorema 2.10. *Sea $f \in S$ como en (2.11). Entonces, $|a_3| \leq 3$.*

Demostración. Observemos que, usando que las rotaciones f_θ, definidas en la sección 1.1.2, basta demostrar que $\sup_{f\in S} \operatorname{Re}\{a_3\} \leq 3$.

En efecto, si suponemos que $\operatorname{Re}\{a_3(f)\} \leq 3$ para toda f en S pero existe una función $f_0 \in S$ como en (2.11) con $a_3 = (3+\varepsilon)e^{2i\theta_0}$ para $\varepsilon > 0$ y $\theta_0 \in [0,\pi)$, entonces, tendríamos que la función

$$f_{-\theta_0}(z) = e^{i\theta_0} f_0(e^{-i\theta_0} z) = z + a_2 z^2 + (3+\varepsilon) z^3 + \ldots$$

está en la clase S y tiene tercer coeficiente de Taylor con parte real igual a $3+\varepsilon > 3$, lo que es una contradicción que demuestra que si $\operatorname{Re}\{a_3\} \leq 3$ para toda $f \in S$, entonces $|a_3| \leq 3$ para toda $f \in S$.

Usando que las aplicaciones con un corte simple son densas en la clase S (teorema 2.4) con respecto a la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, que implica la convergencia de los coeficientes de Taylor, se tiene que si $\operatorname{Re}\{a_3(F)\} > 3$ para alguna $F \in S$, entonces existe una función con un corte simple $f \in S$ tal que $\operatorname{Re}\{a_3(f)\} > 3$. Por lo tanto, basta demostrar que $\operatorname{Re}\{a_3\} \leq 3$ para toda $f \in S$ con un corte simple.

Construyamos las funciones $f(z,t)$ utilizadas en el teorema 2.9 de Loewner, de manera que $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t)$ y se verifica la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1+\kappa f}{1-\kappa f} \,, \quad f(z,0) = z \,, \tag{2.12}$$

donde $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$, siendo θ una función de valores reales definida en $[0,\infty)$.

Como en la sección anterior, escribamos

$$f(z,t) = e^{-t}\left[z + a_2(t) z^2 + a_3(t) z^3 + \ldots\right] \,,$$

con $a_n(0) = 0$ para todo $n \geq 2$ (puesto que $f(z,0) = z$) y $a_n = \lim_{n\to\infty} a_n(t)$, para la aplicación con un corte simple f como en (2.11).

Derivando a ambos lados de la ecuación (2.12) con respecto a z para obtener los respectivos coeficientes de Taylor e igualando los resultados, se tiene:

$$a_2'(t) = -2e^{-t}\kappa(t) \,, \tag{2.13}$$

y, además,

$$\begin{aligned} a_3'(t) &= -2e^{-2t}\left(\kappa(t)\right)^2 - 4e^{-t}\kappa(t)a_2(t) \\ &= -2e^{-2t}\left(\kappa(t)\right)^2 + 2a_2(t)a_2'(t) \quad (\text{por } (2.13))\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

De la ecuación (2.13) resulta (usando que $a_2(0) = 0$ y que $\lim_{n\to\infty} a_2(t) = a_2$):

$$a_2 = \int_0^\infty a_2'(t)\,dt = -2\int_0^\infty e^{-t}\kappa(t)\,dt\,.$$

Y, por tanto, de (2.14), se obtiene, también:

$$a_3 = \int_0^\infty a_3'(t)\,dt = -2\int_0^\infty e^{-2t}\left(\kappa(t)\right)^2\,dt + 4\left(\int_0^\infty e^{-t}\kappa(t)\,dt\right)^2\,.$$

Tomando las partes reales en la ecuación anterior, usando que, como $\kappa(t) = e^{i\theta(t)}$ se tiene $\operatorname{Re}\{(\kappa(t))^2\} = 2\cos^2\theta(t) - 1$ y que para todo número complejo z se cumple la desigualdad $\operatorname{Re}\{z^2\} \leq (\operatorname{Re}\{z\})^2$, concluimos

$$\operatorname{Re}\{a_3\} \leq 2\int_0^\infty e^{-2t}\left(1 - 2\cos^2\theta(t)\right)\,dt + 4\left(\int_0^\infty e^{-t}\cos\theta(t)\,dt\right)^2\,.$$

Basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para obtener

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{a_3\} &\leq 2\int_0^\infty e^{-2t}\,dt - 4\int_0^\infty e^{-2t}\cos^2\theta(t)\,dt \\ &\quad + 4\left(\int_0^\infty e^{-t}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-t}\cos^2\theta(t)\,dt\right) \\ &= 1 + 4\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\cos^2\theta(t)\,dt \leq 1 + 4\int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\,dt = 3\,, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

3

Aplicaciones: análisis complejo y mecánica de fluidos

Un fluido ideal es un fluido con densidad constante (incompresible) y sin viscosidad. Si bien es cierto que el concepto de fluido ideal es una abstracción matemática (dado que todos los fluidos reales son al menos un poco viscosos), el concepto es útil en ciertos problemas porque los fluidos que tienen viscosidades pequeñas se comportan como fluidos ideales. Hay ejemplos concretos al respecto en la naturaleza: si la temperatura es cercana al cero absoluto, el helio es prácticamente un fluido ideal.

Obviamente, los fluidos fluyen tridimensionalmente, con los parámetros que describen el flujo variando en las tres direcciones espaciales. No obstante, en muchos casos, los cambios más grandes ocurren solo en dos direcciones y los cambios en la otra dirección pueden ignorarse efectivamente.

Es, en estos casos en dimensión dos, en los que nos centraremos en este capítulo, en cuanto a que son, precisamente, los casos susceptibles de la aplicación de las herramientas procedentes del análisis complejo.

3.1. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido ideal: descripción euleriana

Consideremos una región bidimensional llena de un fluido ideal.

La *descripción euleriana* del movimiento del fluido se obtiene imponiendo la ecuación de conservación de masa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \equiv \quad u_x + v_y = 0\,, \tag{3.1}$$

consecuencia de que la densidad es constante, y *la ecuación de Euler*

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla P \quad \equiv \quad \begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -P_x\,, \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $\mathbf{u}(t,x,y) = (u(t,x,y), v(t,x,y))$ es el campo de velocidades en las variables de tiempo t y espacio (x,y) y la función escalar $P(t,x,y)$ representa la presión.

Dado el campo de velocidades $(u(t,x,y),\ v(t,x,y))$, el movimiento de las partículas individuales $(x(t),\ y(t))$ se obtiene integrando el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x'(t) = u(t, x, y)\,, \\ y'(t) = v(t, x, y)\,. \end{cases}$$

Recíprocamente, el conocimiento de la trayectoria $t \to (x(t),\ y(t))$ da lugar, tomando derivadas con respecto a t, a la determinación del campo de velocidades.

3.2. Descripción lagrangiana del movimiento de un fluido

Dentro del ámbito de la dinámica de fluidos, la descripción más completa de un flujo se logra utilizando la *descripción lagrangiana*, qua ahora pasamos a describir.

Sea Ω_0 un dominio simplemente conexo del plano (que representará el *dominio de etiquetado*) de manera que, cada *etiqueta* $(a, b) \in \Omega_0$ identifica de manera unívoca la posición de la partícula $(x(t), y(t))$ del fluido en tiempo t por medio de las *aplicaciones etiquetado* ("labelling maps" en inglés) $\varphi_t : \Omega_0 \to \mathbb{C}$, definidas por

$$(a, b) \to \varphi(t, a, b) = (x(t; a, b),\ y(t; a, b))\,, \quad t \geq 0\,. \tag{3.3}$$

Observemos que estas aplicaciones φ, por su naturaleza, deber ser inyectivas en Ω_0 para todo t. De hecho, supondremos, de manera momentánea, que el jacobiano J de cada una de las aplicaciones φ es distinto de 0 en Ω_0 para reescribir las ecuaciones (3.1) y (3.2) en términos de coordenadas lagrangianas $\varphi(t, a, b) = (x(t; a, b),\ y(t; a, b))$.

La transformación que relaciona la descripción euleriana (determinada por el campo de velocidades $(u(t, x, y), v(t, x, y)))$ y la lagrangiana (especificada por las variables, ahora dependientes de a y b, $(x(t; a, b), y(t; a, b)))$ es:

$$\begin{cases} u(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial t} x(t; a, b)\,, \\[2ex] v(t, x, y) = \frac{\partial}{\partial t} y(t; a, b)\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

La relación entre las derivadas viene dada por

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} = x_a \frac{\partial}{\partial x} + y_a \frac{\partial}{\partial y}\,, \\[2ex] \frac{\partial}{\partial b} = x_b \frac{\partial}{\partial x} + y_b \frac{\partial}{\partial y}\,, \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(y_a \frac{\partial}{\partial a} - y_b \frac{\partial}{\partial b} \right)\,, \\[2ex] \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(x_a \frac{\partial}{\partial b} - x_b \frac{\partial}{\partial a} \right)\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

donde, como se ha mencionado antes, J es el jacobiano de φ:

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(a,b)} \right| = x_a y_b - y_a x_b \neq 0 \,.$$

Por lo tanto, utilizando (3.5), podemos reescribir la ecuación de conservación de masa (3.1) en coordenadas lagrangianas como

$$0 = u_x + v_y = \frac{y_b x_{at} - y_a x_{bt} + x_a y_{bt} - x_b y_{at}}{J} = \frac{J_t}{J} \,,$$

es decir,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J_t = 0 \,. \tag{3.6}$$

Por lo tanto, (3.1) en coordenadas lagrangianas es equivalente a que los jacobianos de las funciones φ definidas en (3.3) son independientes del tiempo.

Por otro lado, de (3.4) obtenemos

$$\begin{aligned} x_{tt} &= u_t + u_x x_t + u_y y_t = u_t + u u_x + v u_y \,, \\ y_{tt} &= \qquad\qquad\qquad\quad\;\; v_t + u v_x + v v_y \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos reescribir (3.2) como

$$\begin{cases} x_{tt} = -\frac{y_b P_a - y_a P_b}{J} \,, \\ \\ y_{tt} = -\frac{x_a P_b - x_b P_a}{J} \,, \end{cases}$$

y, despejando P_a y P_b, resulta:

$$\begin{cases} P_a = -x_a x_{tt} - y_a y_{tt} \,, \\ P_b = -x_b x_{tt} - y_b y_{tt} \,. \end{cases}$$

El sistema anterior es equivalente a la condición de compatibilidad $P_{ab} = P_{ba}$, es decir,

$$x_a x_{btt} + y_a y_{btt} = x_b x_{att} + y_b y_{att},$$

o, equivalentemente,

$$(x_a x_{bt} + y_a y_{bt} - x_b x_{at} - y_b y_{at})_t = 0. \tag{3.7}$$

Así, en coordenadas lagrangianas, las ecuaciones del movimiento del fluido son, respectivamente, (3.6) y (3.7), asumiendo que los jacobianos de las funciones en (3.3) son distintos de 0 para todo tiempo t.

3.2.1. Ejemplos clásicos de soluciones explícitas de la ecuación de Euler incompresible en coordenadas lagrangianas

Como se ha mencionado anteriormente, la descripción más completa del flujo se logra mediante la descripción lagrangiana. No en vano, son estas las coordenadas utilizadas en la solución explícita de la ecuación de Euler incompresible que ahora presentamos.

*Ejemplo 3.1 (**La onda de Gerstner; 1809**).*

Las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi(t,a,b) &= (x(t,a,b), y(t,a,b)) \\ &= \left(a - \frac{e^{kb}}{k}\sin(ka+\sqrt{k\mathbf{g}}\,t), b + \frac{e^{kb}}{k}\cos(ka+\sqrt{k\mathbf{g}}\,t)\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $k \neq 0$ es una constante y $\mathbf{g}$ es la constante de aceleración gravitacional, da lugar a una solución explícita de la ecuación de Euler incompresible en coordenadas lagrangianas [8]. En este caso, el domino $\Omega_0 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon b < 0\}$.

Nótese que las funciones coordenadas x e y en (3.8) satisfacen la ecuación de Laplace. Es decir, ambas x e y son funciones armónicas para todo t.

Otra solución célebre (y también explícita) es el *vórtice elíptico de Kirchhoff* [12] obtenido en 1875. Este ejemplo será presentado en las secciones posteriores. No obstante, también satisface la misma propiedad que la onda de Gerstner: las funciones coordenadas que determinan las aplicaciones etiquetado son funciones armónicas para todo tiempo t.

Recientemente, en [2], los autores proponen caracterizar todas aquellas soluciones de la ecuación de Euler incompresible que verifican esta propiedad estructural (en coordenadas lagrangianas). En su trabajo, obtienen nuevas soluciones explícitas, pero la obtención de todas ellas se describe en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{C}^4$ cuya resolución general resultó inaccesible.

Es en el artículo [5] donde las autoras proponen un enfoque diferente (basado exclusivamente en técnicas del análisis complejo) que consigue resolver completamente el problema original formulado en [2]. Los argumentos utilizados en [5], que proporcionan una ilustración de los profundos vínculos entre los campos de análisis complejo y la mecánica de fluidos, serán los que revisemos en el resto del capítulo.

3.3. Funciones armónicas en el plano: notación compleja

La función $\varphi : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma $\varphi(a,b) = (x(a,b), y(a,b))$, donde x e y son funciones con derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en Ω_0, es *armónica* si x e y son funciones armónicas en Ω_0. Es decir, x e y cumplen la ecuación de Laplace:

$$x_{aa} + x_{bb} = y_{aa} + y_{bb} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_0 \,.$$

Utilizando la notación compleja $\varphi = x + iy$, se tiene que φ es armónica si y sólo si sus partes real e imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace.

Es claro que toda función analítica es armónica. Sin embargo, una función armónica no necesariamente satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, por lo tanto, no es necesariamente analítica.

Usando también la notación compleja para la variable $z = a + ib$ y los operadores de Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} - i\frac{\partial}{\partial b}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a} + i\frac{\partial}{\partial b}\right) ,$$

es posible escribir el laplaciano de $\varphi = x + iy$ como

$$\Delta\varphi = 4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}\partial z} \,.$$

Utilizando que $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que se cumple la relación

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} ,$$

podemos obtener la siguiente descomposición de una función armónica de valores complejos en un dominio simplemente conexo.

Lema 3.2. *Sea Ω_0 un dominio simplemente conexo y sea $\varphi : \Omega_0 \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = x(z)+iy(z)$, $z = a+ib$, una función para la que se cumple que x e y tienen derivadas parciales continuas de primer y segundo orden. Entonces, φ es armónica en Ω_0 si y solo si existen funciones analíticas F y G en Ω_0 tales que*

$$\varphi = F + \overline{G} \,.$$

Demostración. Si $\varphi = F + \overline{G}$, donde F y G son analíticas en Ω_0, entonces,

$$\Delta\varphi = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial(F + \overline{G})}{\partial z}\right) = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \overline{\left(\frac{\partial G}{\partial \overline{z}}\right)}\right) = 4\frac{\partial F'}{\partial \overline{z}} = 0 \,,$$

puesto que si F es analítica, F' también lo es.

Recíprocamente, suponcamos que se verifica $\Delta\varphi = 0$. Entonces, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \,,$$

es decir, la función $\partial\varphi/\partial z$ es una función analítica en Ω_0. Denotemos a esta función for F'. Siendo Ω_0 simplemente conexo, se concluye que cualquier primitiva F de F' analítica en Ω_0 también.

Definamos $G = \overline{\varphi - F}$. Para concluir la demostración, basta demostrar que G es analítica en Ω_0. Pero esto se verifica comprobando que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)} - \overline{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)} = \overline{F'} - \overline{F'} = 0\,.$$

Es decir, $\varphi = F + \overline{G}$, donde F y G son analíticas en Ω_0. ■

Con esta nueva notación $\varphi = F + \overline{G}$, es fácil comprobar que el jacobiano de φ es, simplemente,

$$J_\varphi = |F'|^2 - |G'|^2\,.$$

De hecho, debido a un resultado de Lewy [15], se tiene que la función armónica φ es localmente inyectiva en el dominio simplemente conexo Ω_0 si y *solo si* $J_\varphi \neq 0$ en el dominio. Esto permite distinguir entre las funciones armónicas localmente inyectivas que preservan la orientación ($J_\varphi > 0$) y las que la invierten $J_\varphi < 0$. Puesto que $J_{\overline{\varphi}} = -J_\varphi$, podemos restringirnos, tomando conjugados complejos si fuese necesario, al estudio de aquellas funciones armónicas en el plano que preservan la orientación. En estos caso, se tiene que $|F'|^2 - |G'|^2 > 0$. Por lo tanto, $F' \neq 0$ en Ω_0.

3.4. Las ecuaciones de Euler en notación compleja

Usando la notación introducida en el apartado anterior para las aplicaciones etiquetado φ definidas en (3.3) que resultan ser armónicas, se tiene que podemos escribir

$$\varphi(t,a,b) = (x(t,a,b), y(t,a,b)) = x(t,a,b) + iy(t,a,b) = F(t,z) + \overline{G(t,z)}\,, \tag{3.9}$$

donde $z = a + ib \in \Omega_0$ y F y G funciones holomorfas en $z \in \Omega_0$ para todo tiempo t.

De hecho, utilizando el teorema de Lewy y, puesto que estamos suponiendo que las aplicaciones φ son univalentes para todo tiempo t, se sigue que los jacobianos no se anulan. Esta ha sido la hipótesis utilizada para obtener las ecuaciones de Euler en coordenadas lagrangianas (3.6) y (3.7) que pasamos a reescribir en términos de F y G. Para ello, de nuevo, utilizamos la notación f' para referirnos a $\partial f/\partial z$.

El jacobiano de la aplicación armónica (3.9) es $J = |F'|^2 - |G'|^2$. Por lo tanto, la ecuación de conservación de masas (3.6) puede reescribirse como $(F'\overline{F'} - \overline{G'}G')_t = 0$. Esto es,

$$Re(F'_t\overline{F'} - G'\overline{G'}_t) = 0\,. \tag{3.10}$$

Utilizando los operadores de Wirtinger y la notación dada en (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned} x_a &= \tfrac{F'+G'+\overline{F'}+\overline{G'}}{2},\; x_b = i\tfrac{F'+G'-\overline{F'}-\overline{G'}}{2},\\ y_a &= \tfrac{F'-G'-\overline{F'}+\overline{G'}}{2i},\; y_b = \tfrac{F'-G'+\overline{F'}-\overline{G'}}{2}. \end{aligned}$$

Un cálculo largo pero directo usando las relaciones anteriores, muestra que (3.7) es equivalente a

$$Im(F'_t\overline{F'} - G'\overline{G'}_t)_t = 0. \tag{3.11}$$

En vista de (3.10) y (3.11), hemos reducido (3.6) y (3.7) a la ecuación única

$$F'_t\overline{F'} - G'\overline{G'}_t = i\nu(z,\overline{z})\,, \tag{3.12}$$

que debe cumplirse para alguna función de valores reales ν, para todo $t > 0$ y para todo $z \in \Omega_0$.

3.5. Funciones armónicas con igual jacobiano

A pesar de haber reducido las ecuaciones (3.6) y (3.7) a la ecuación (3.12), no debemos olvidar que, en particular, (3.6) implica que los jacobianos de las funciones en (3.9) son iguales al jacobiano de la función $\varphi(0,z) = F(0,z) + \overline{G(0,z)}$ para todo $t > 0$.

Esta información es esencial en cuanto a que, usando técnicas del análisis complejo, podemos caracterizar la relación entre dos funciones armónicas con igual jacobiano. Esta caracterización se basa en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sean φ y ψ dos funciones analíticas en un dominio simplemente conexo Ω_0. Entonces, se verifica que*

$$|\varphi|^2 = r\,|\psi|^2 + s \tag{3.13}$$

en Ω_0 para algunos números reales r y s diferentes de cero si y solo si existen constantes α y $\beta \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 = r\,|\beta|^2 + s$ tales que $\varphi \equiv \alpha$ y $\psi \equiv \beta$.

Demostración. Observemos que, para que se cumpla (3.13), es necesario que $r\,|\psi(z)|^2 + s \geq 0$ para todo $z \in \Omega$. Si $r\,|\psi(z)|^2 + s \equiv 0$, entonces una aplicación directa del teorema de la aplicación abierta para funciones analíticas nos da el resultado deseado puesto que, en este caso, $\varphi \equiv 0$ y $\psi \equiv -s/r$.

Supongamos ahora que $r\,|\psi(z)|^2 + s$ no es identicamente cero en Ω_0. Entonces, existe un disco $D = D(z_0, R)$ centrado en algún $z_0 \in \Omega_0$ y de radio $R > 0$ tal que $D \subset \Omega_0$ y $r\,|\psi(z)|^2 + s > 0$ para todo $z \in D$. Restringiéndonos a los puntos de este disco, tomemos logaritmos en ambos miembros de (3.13) para obtener la identidad

$$\log|\varphi|^2 = \log(r\,|\psi|^2 + s)\,, \tag{3.14}$$

satisfecha en todos los puntos de D.

Ahora bien, la función del lado izquierdo en (3.14) es armónica, por lo que la del lado derecho debe ser armónica también. El laplaciano de la función en el miembro de la derecha de (3.14) es igual a

$$\Delta\ \log(r\,|\psi|^2 + s) = 4rs \cdot \frac{|\psi'|^2}{(r\,|\psi|^2 + s)^2}\,.$$

Por lo tanto, concluimos que $\psi' \equiv 0$ en $D \subset \Omega$ y, por el principio de unicidad, se tiene que $\psi' \equiv 0$ en todo Ω_0. Es decir, existe una constante $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\psi \equiv \beta$.

Pero, entonces, por (3.13), $|\varphi|^2 = r|\beta|^2 + s = |\alpha|^2$. Aplicando, de nuevo, el principio de la aplicación abierta para funciones analíticas, se tiene que $\varphi \equiv \alpha$. ■

Una vez demostrado el lema anterior, planteamos la siguiente cuestión: Sea $\varphi_1 = F_1 + \overline{G_1}$ una aplicación armónica en el domimio simplemente conexo Ω_0 con jacobiano $J_1 = |F_1'|^2 - |G_1'|^2 > 0$ en Ω_0. Sea $\varphi_2 = F_2 + \overline{G_2}$ otra aplicación armónica en Ω_0 con jacobiano $J_2 = |F_2'|^2 - |G_2'|^2 = J_1$. ¿Es posible determinar la relación entre φ_1 y φ_2?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como veremos en las dos secciones siguientes.

3.5.1. El caso de la dependencia lineal

Supongamos, en primer lugar, que las funciones F_1' y G_1' son linealmente dependientes, de manera que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (con $|\lambda| < 1$ ya que $J_1 > 0$) tal que $G_1' = \lambda F_1'$. En este caso, la descripción de todas las funciones armónicas en Ω_0 con el mismo jacobiano que la función $F_1 + \overline{G_1}$ se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *En las condiciones anteriores, si $F_2 + \overline{G_2}$ es otra función armónica en Ω_0 con igual jacobiano que $F_1 + \overline{G_1}$, entonces existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 - |\lambda|^2 > 0$ y tales que $F_2' = \alpha F_1'$ y $G_2' = \beta F_1'$. Además, si $F_1 + \overline{G_1}$ es inyectiva en Ω_0, entonces $F_2 + \overline{G_2}$ también lo es.*

Demostración. Como se ha mencionado anteriomente, la función F_1' no puede tener ceros en Ω_0 dado que el Jacobiano $J_1 = |F_1'|^2 - |G_1'|^2 > 0$ en Ω_0. Lo mismo ocurre, por tanto, en el caso de F_2'. Así, como estamos suponiendo que

$$|F_1'|^2 - |G_1'|^2 = |F_2'|^2 - |G_2'|^2\,,$$

obtenemos, tras dividir por $|F_1'|^2$,

$$1 - |\lambda|^2 = \left|\frac{F_2'}{F_1'}\right|^2 - \left|\frac{G_2'}{F_1'}\right|^2.$$

Podemos, entonces, aplicar el Lema 3.3 con $\varphi = F_2'/F_1'$, $\psi = G_2'/F_1'$, $r = 1$ y $s = 1 - |\lambda|^2$ para deducir que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 - |\lambda|^2$ y tales que $F_2' = \alpha F_1'$ y $G_2' = \beta F_1'$.

Para demostrar que la inyectividad se preserva, basta observar que podemos escribir $F_2 + \overline{G_2} = \alpha F_1 + \overline{\beta F_1} + \gamma$, donde $\gamma \in \mathbb{C}$.

Supongamos que existen $z,\ w \in \Omega_0$ con $F_2(z) + \overline{G_2(z)} = F_2(w) + \overline{G_2(w)}$. Entonces, se tiene también que $\alpha\,(F_1(z) - F_1(w)) = -\overline{\beta\,(F_1(z) - F_1(w))}$.

Si $F_1(z) = F_1(w)$, entonces, puesto que $G_1 = \lambda F_1 + \delta$ para algún $\delta \in \mathbb{C}$, se sigue que la función $F_1 + \overline{G_1}$ no puede ser univalente, lo que contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, se tiene $|\alpha| = |\beta|$. Pero esto también es una contradicción ya que $|\lambda| < 1$ y $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 - |\lambda|^2$. ■

3.5.2. Caso de la independencia lineal

Analizamos ahora el caso más difícil en el que suponemos que las funciones F_1' y G_1' *no* son linealmente dependientes en Ω_0.

Teorema 3.5. *Sea $F_1 + \overline{G_1}$ y $F_2 + \overline{G_2}$ dos aplicaciones armónicas en un dominio simplemente conexo Ω_0, con jacobianos $J_1 = |F_1'|^2 - |G_1'|^2$ y $J_2 = |F_2'|^2 - |G_2'|^2$, respectivamente. Supongamos que F_1' y G_1' no son linealmente independientes. Si $J_1 = J_2 > 0$, entonces existen dos constantes complejas α, β con $|\alpha|^2 = 1 + |\beta|^2$ y un número real ξ tales que*

$$\begin{pmatrix} F_2' \\ G_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1' \\ G_1' \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Demostración. De nuevo, $|F_1'| > 0$. Por lo tanto, la función $\varphi = F_2'/F_1'$ es analítica en Ω_0. Además, por hipótesis, el cociente $\omega_1 = G_1'/F_1'$ no es idénticamente constante en el dominio.

Dado que $J_1 = J_2$, se tiene (tras dividir por $|F_1'|^2$),

$$1 - |\omega_1|^2 = |\varphi|^2 - |\psi|^2 \ , \tag{3.16}$$

donde $\varphi = F_2'/F_1'$ y $\psi = G_2'/F_1'$. Escribamos $\omega_2 = G_2'/F_2'$, de manera que $\psi = \omega_2\varphi = G_2'/F_1'$.

La ecuación (3.16) es, obviamente, equivalente a

$$1 + |\psi|^2 = |\omega_1|^2 + |\varphi|^2 \ . \tag{3.17}$$

Observemos que si φ es igual a una constante k (necesariamente diferente de cero), entonces (3.17) resulta:

$$1 + |\psi|^2 = |\omega_1|^2 + |k|^2 \ . \tag{3.18}$$

Si $|k| = 1$, entonces $|F_1'| = |F_2'|$ y, además, por (3.18), que $|\omega_1| = |\psi| = 1$ también. Por lo tanto, $|G_1'| = |G_2'|$. Una aplicación directa del teorema de la aplicación abierta muestra que, entonces, existen constantes s_1 y $s_2 \in \mathbb{R}$ tales que $F_2' = e^{is_1}F_1'$ y $G_2' = e^{is_2}G_1'$. Por lo tanto, se cumple (3.15) con $\beta = 0$, $\alpha = e^{is_1}$ y $\xi = s_1 + s_2$.

Supongamos ahora que $|k| \neq 1$. Por el lema 3.3 aplicado a la ecuación (3.18), tenemos que ω_1 es constante, lo que contradice nuestra suposición.

Analicemos, entonces, el caso restante: podemos suponer que φ no es idénticamente una constante en Ω_0. En este caso, existe un disco $D = D(z_0, R)$, centrado en $z_0 \in \Omega_0$ y con radio $R > 0$ tal que $\varphi'(z) \neq 0$ para todo $z \in D \subset \Omega_0$.

Restringiéndonos a los puntos de este disco D y calculando el laplaciano de las funciones a ambos lados de (3.17), obtenemos $|\psi'|^2 = |\omega_1'|^2 + |\varphi'|^2$ y, como $\varphi' \neq 0$ en D, resulta

$$1 + \left|\frac{\omega_1'}{\varphi'}\right| = \left|\frac{\psi'}{\varphi'}\right| \ . \tag{3.19}$$

De nuevo, aplicando el lema 3.3, obtenemos que ambas funciones ψ'/φ' y ω_1'/φ' son constantes en D. Por lo tanto (por el principio de unicidad), también en Ω_0. Sea m la constante para la que $m = \omega_1'/\varphi'$. Entonces, por (3.19), tenemos

$$\omega_1' = m\varphi' \quad \text{y} \quad \psi' = e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}\varphi' ,$$

donde θ es un número real. Así, para ciertas constantes n y $p \in \mathbb{C}$,

$$\omega_1 = m\varphi + n \quad \text{y} \quad \psi = e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}\varphi + p . \tag{3.20}$$

Usando esta descripción para ω_1 y ψ en (3.17), queda

$$1+(1+|m|^2)|\varphi|^2+|p|^2+2\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\overline{p}\sqrt{1+|m|^2}\varphi\right\} = |\varphi|^2+|m|^2|\varphi|^2+|n|^2+2\mathrm{Re}\left\{m\overline{n}\varphi\right\} .$$

Por lo tanto,

$$2\mathrm{Re}\left\{\left(e^{i\theta}\overline{p}\sqrt{1+|m|^2} - m\overline{n}\right)\varphi\right\} = |n|^2 - |p|^2 - 1 .$$

Pero esto implica que, a no ser que $e^{i\theta}\overline{p}\sqrt{1+|m|^2} - m\overline{n} = 0$, el conjunto $\varphi(\Omega_0)$ está contenido en una recta. Esto no es posible pues φ es una función analítica no constante. Por lo tanto, tenemos

$$e^{i\theta}\overline{p}\sqrt{1+|m|^2} = m\overline{n} \tag{3.21}$$

y además

$$|n|^2 = 1 + |p|^2 . \tag{3.22}$$

Tomar valores absolutos a ambos lados de la ecuación (3.21) da lugar a la identidad $|p|^2\left(1+|m|^2\right) = |m|^2|n|^2$. Por otro lado, usando (3.22), tenemos $|m|^2\left(1+|p|^2\right) = |m|^2|n|^2$. Ambas ecuaciones implican que existe un número real s tal que

$$p = e^{is}m .$$

Observemos que si $m = 0$, entonces ω_1 es constante por (3.20), lo que implica que F_1' y G_1' son linealmente independientes. Esto contradice nuestras hipótesis. Por lo tanto, $m \neq 0$ y podemos escribir (usando (3.21)):

$$n = \frac{e^{-i\theta}e^{is}m\sqrt{1+|m|^2}}{\overline{m}} .$$

Volviendo a (3.20), obtenemos

$$\frac{G_1'}{F_1'} = m\frac{F_2'}{F_1'} + n.$$

Por lo tanto $G_1' = mF_2' + nF_1'$ y, también,

$$F_2' = -\frac{n}{m}F_1' + \frac{1}{m}G_1' = -\frac{e^{-i\theta}e^{is}\sqrt{1+|m|^2}}{\overline{m}}F_1' + \frac{1}{m}G_1' \,. \tag{3.23}$$

Basta sustituir en (3.20) las definiciones de ψ, φ y p en términos de F_1', F_2', G_1' y G_2' para obtener

$$\psi = \frac{G_2'}{F_1'} = e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}\frac{F_2'}{F_1'} + e^{is}m \,.$$

Multiplicando esta relación por F_1' y usando (3.23), deducimos

$$\begin{aligned}
G_2' &= e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}F_2' + e^{is}mF_1' \\
&= e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}\left(-\frac{e^{-i\theta}e^{is}\sqrt{1+|m|^2}}{\overline{m}}F_1' + \frac{1}{m}G_1'\right) + e^{is}mF_1' \\
&= -\frac{e^{is}}{\overline{m}}F_1' + \frac{e^{i\theta}\sqrt{1+|m|^2}}{m}G_1'. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\xi = s + \pi$,

$$\alpha = \frac{e^{i\xi}e^{-i\theta}\sqrt{1+|m|^2}}{\overline{m}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{e^{-i\xi}}{m} \,,$$

obtenemos de (3.23) y (3.24):

$$\begin{aligned}
F_2' &= \alpha F_1' + e^{i\xi}\beta G_1', \\
G_2' &= \overline{\beta}F_1' + e^{i\xi}\overline{\alpha}G_1',
\end{aligned}$$

que es, justamente, (3.15). ■

Observación 3.6. Supongamos que $F_1 + \overline{G_1}$ y $F_2 + \overline{G_2}$ son dos aplicaciones armónicas que verifican las condiciones del teorema 3.5. En este caso, la relación entre estas funciones viene dada por (3.15).

Si $\xi = 0$, resulta que $F_2 + \overline{G_2}$ se obtiene aplicando una transformación afín a la función $F_1 + \overline{G_1}$. Por lo tanto, la inyectividad se preserva. No obstante, si $\xi \neq 0$, no es cierto que si $F_1 + \overline{G_1}$ es inyectiva, también lo sea $F_2 + \overline{G_2}$. En efecto, la acción de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1' \\ G_1' \end{pmatrix}$$

produce, salvo constante aditiva, la función $F_2 + \overline{G_2} = F_1 + \overline{e^{i\xi}G_1}$. Hay ejemplos específicos en la literatura que muestran que la función así obtenida no es, necesariamente, inyectiva. Concretamente (véase [11]), las funciones

$$F_1(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad \text{y} \quad G_1(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}, \qquad z \in \mathbb{D} \,,$$

dan lugar a aplicación armónica $F_1 + \overline{G_1}$ en el disco unidad que verifica estas propiedades.

No obstante, si se cumple que, para todo λ de módulo 1 la función $F_1 + \overline{\lambda G_1}$ sí es inyectiva, entonces, claramente, $F_2 + \overline{G_2}$ es inyectiva también.

3.6. Algunas soluciones de las ecuaciones de Euler incompresibles

Para facilitar la exposición de este último capítulo, introducimos las funciones

$$f(t,z) = F'(t,z) = \frac{\partial F(t,z)}{\partial z} \quad \text{y} \quad g'(t,z) = G'(t,z) = \frac{\partial F(t,z)}{\partial z}. \tag{3.25}$$

Notese que, como en capítulos anteriores, usamos f' para denotar la derivada de la función f con respecto a z.

También usaremos la notación $F_0 + \overline{G_0}$ para la función φ_0 en (3.9), que se supone que es inyectiva en el dominio simplemente conexo Ω_0. Para $z \in \Omega_0$, $f_0(z) = f(0,z)$ y y $g_0(0) = g(0,z)$.

Recordemos que buscamos aplicaciones armónicas inyectivas como en (3.9) para las que se cumple (3.12).

3.6.1. Soluciones en el caso de dependencia lineal

Suponemos, en primer lugar que la aplicación etiquedado inicial $F_0 + \overline{G_0}$ es tal que F_0' y G_0' son linealmente dependientes. Recordemos que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el jacobiano de esta función es positivo, de manera que, de acuerdo con nuestra hipótesis adicional, se tiene que $G_0' = \lambda F_0'$, donde λ es una constante de módulo menor que 1.

Teorema 3.7. *Sea $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Si la aplicación $F_0 + \overline{G_0}$ satisface la condición $G_0' = \lambda F_0'$ (para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ que puede ser tomado, sin pérdida de generalidad, de módulo menor que 1), entonces, la solución de la ecuación de Euler incompresible (en coordenadas lagrangianas definidas en (3.9)) está determinada por:*

$$\begin{cases} f(t,z) = \sqrt{1-|\lambda|^2+|\beta(t)|^2}\, e^{i\int_0^t \frac{\nu_0 + \mathrm{Im}\left\{\beta(s)\overline{\beta_t(s)}\right\}}{1-|\lambda|^2+|\beta(s)|^2}\, ds} F_0'(z), \\ \qquad\qquad g(t,z) = \beta(t) F_0'(z), \end{cases} \tag{3.26}$$

donde $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es una función de clase C^1 con $\beta(0) = \lambda$ y $\nu_0 \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria.

Demostración. Recordemos que estamos usando la notación dada por (3.25), de manera que $f_0 = F_0'$, que resulta ser distinta de 0 en Ω_0 por ser $|f_0|^2 - |g_0|^2 > 0$.

Puesto que los jacobianos de las soluciones (3.9) son independientes de t, estamos bajo las condiciones del teorema 3.4 y podemos concluir la existencia de funciones α y β con $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \equiv 1 - |\lambda|^2$, tales que $f(t,z) = \alpha(t) f_0(t)$ y $g(t,z) = \beta(t) f_0(z)$, $t > 0$. Estas funciones son, de hecho, de clase C^1 en $(0,\infty)$, ya que se cumple (3.2). También, queremos que se cumpla (3.12), por lo tanto,

$$f_t\overline{f} - g\overline{g_t} = (\alpha_t\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta}_t)\,|f_0(z)|^2 = i\nu(z,\overline{z}).$$

Esto implica, en particular (tras dividir por $|f_0|^2$ y observar que, en este caso, una función que depende de t es igual a una función que no depende de t), que se verifica el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_t\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta_t} = i\nu_0\,, \\ |\alpha|^2 = |\beta|^2 + 1 - |\lambda|^2\,, \end{cases} \tag{3.27}$$

donde $\nu_0 \in \mathbb{R}$ es una constante.

La segunda ecuación en (3.27), muestra que $|\alpha| > 0$. Por lo tanto, podemos escribir $\alpha(t) = R(t)e^{i\varphi(t)}$ para funciones adecuadas $R : [0,\infty) \to (0,\infty)$ y $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Utilizando estas coordenadas polares, el sistema (3.27) es equivalente a

$$\begin{cases} R_tR + iR^2\varphi_t - \beta\overline{\beta_t} = i\nu_0\,, \\ R = \sqrt{|\beta|^2 + 1 - |\lambda|^2}. \end{cases} \tag{3.28}$$

La primera ecuación en (3.28) junto con la derivada con respecto a t de la segunda da lugar a la igualdad $R^2\varphi_t = \nu_0 + \mathrm{Im}\left\{\beta\overline{\beta_t}\right\}$. Así, (3.28) se reduce a

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \frac{\nu_0 + \mathrm{Im}\left\{\beta(s)\overline{\beta_t}(s)\right\}}{|\beta(s)|^2 + 1 - |\lambda|^2}\, ds, \\ R = \sqrt{|\beta|^2 + 1 - |\lambda|^2}. \end{cases}$$

Las condiciones iniciales $f(0,\cdot) = f_0$, $g(0,\cdot) = g_0$ implican $\beta(0) = \lambda$ y $\varphi(0) = 0$, como queríamos demostrar.

Puesto que φ_0 es inyectiva, se sigue, como en la demostración del teorema 3.4 que todas las funciones φ_t son también inyectivas para todo $t > 0$. ■

Ejemplo 3.8. El vórtice elíptico de Kirchhoff, mencionado en la sección 3.2.1, corresponde a la solución determinada por (3.26) con

$$F_0'(z) = Ae^{ikz}\,, \quad \beta \equiv \lambda \quad \text{y} \quad \nu_0 \neq 0\,,$$

donde A y k son constantes reales no nulas.

Para conseguir que φ_0 (y, por tanto φ_t como en (3.9)) sean inyectivas para todo $t \geq 0$, basta que el dominio Ω_0 no contenga puntos distintos z y w con

$$\mathrm{Im}\{z\} = \mathrm{Im}\{w\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Re}\{z\} = \mathrm{Re}\{w\} + \frac{2m\pi}{k}$$

para algún número entero (no nulo) m.

3.6.2. Las soluciones en el caso de independencia lineal

Utilizando de nuevo la notación establecida al comienzo de la sección, tratamos ahora el caso de independencia lineal.

Teorema 3.9. *Sea $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Si la aplicación $F_0 + \overline{G_0}$ tiene jacobiano positivo en Ω_0 y satisface la condición de que G_0' y F_0' son linealmente independientes, entonces, la solución de la ecuación de Euler incompresible (en coordenadas lagrangianas definidas en (3.9)) está determinada por, o bien,*

$$\begin{cases} f(t,z) = \sqrt{1+|\beta(t)|^2} e^{i\int_0^t \frac{\nu_0 + \mathrm{Im}\left\{\beta_t(s)\overline{\beta(s)}\right\}}{1+|\beta(s)|^2} ds} F_0'(z) + \beta(t) G_0'(z), \\ g(t,z) = \overline{\beta(t)} F_0'(z) + \sqrt{1+|\beta(t)|^2} e^{-i\int_0^t \frac{\nu_0 + \mathrm{Im}\left\{\beta_t(s)\overline{\beta(s)}\right\}}{1+|\beta(s)|^2} ds} G_0'(z), \end{cases} \tag{3.29}$$

donde $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *es una función* C^1 *y* $\nu_0 \in \mathbb{R}$*; o por*

$$\begin{cases} f(t,z) = e^{i\nu_0 t} F_0'(z), \\ g(t,z) = e^{i(\xi_0 - \nu_0)t} G_0'(z)\,, \end{cases} \tag{3.30}$$

donde $\nu_0 \in \mathbb{R}$ *y* $\xi_0 \in \mathbb{R} \neq \{0\}$.

Además, para las soluciones de la forma (3.29)*, la inyectividad de la aplicación* φ_t *como en* (3.9) *se verifica por ser* φ_0 *inyectiva. No obstante, las soluciones dadas por* (3.30) *son inyectivas para todo* $t > 0$ *si y solo si* $F_0 + \overline{\lambda G_0}$ *es inyectiva para todo* λ *de módulo* 1.

Demostración. Por el Teorema 3.5, sabemos que existen funciones $\alpha, \beta : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, con $|\alpha(t)|^2 - |\beta(t)|^2 = 1$ para todo $t \geq 0$, y $\xi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, todas de clase C^1, tales que

$$\begin{cases} f(t,z) = \alpha(t) f_0(z) + e^{i\xi(t)} \beta(t) g_0(z), \\ g(t,z) = \overline{\beta(t)} f_0(z) + e^{i\xi(t)} \overline{\alpha(t)} g_0(z)\,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Puesto que $f(0,\cdot) = f_0$, $g(0,\cdot) = g_0$ y f_0 y g_0 son linealmente independientes, se tienen las condiciones iniciales

$$\alpha(0) = 1, \quad \beta(0) = 0, \quad \text{y} \quad \xi(0) = 0\,. \tag{3.32}$$

Usando (3.31), es fácil obtener (dado que $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$),

$$\begin{aligned} f_t\overline{f} - g\overline{g_t} &= \left(\alpha_t\overline{\alpha} - \beta_t\overline{\beta}\right)\left(|f_0|^2 - |g_0|^2\right) + 2iRe\left\{\xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi} f_0\overline{g_0}\right\} \\ &\quad + i\xi_t\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)|g_0|^2 \\ &= \left(\alpha_t\overline{\alpha} - \beta_t\overline{\beta} - i\xi_t|\alpha|^2\right)\left(|f_0|^2 - |g_0|^2\right) + i\xi_t\left|\alpha f_0 + \beta e^{i\xi} g_0\right|^2\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Por (3.12), sabemos que $f_t\overline{f} - g\overline{g_t} = i\nu(z,\overline{z})$. Puesto que $|f_0|^2 - |g_0|^2$ solo depende de z y $\overline{z}$ y es distinta de cero, podemos dividir por esta función en (3.33) para obtener

$$\begin{aligned} \left(\alpha_t(t)\overline{\alpha(t)} - \beta_t(t)\overline{\beta(t)} - i\xi_t(t)|\alpha(t)|^2\right) + i\frac{\xi_t(t)\left|\alpha(t)f_0(z) + \beta(t)e^{i\xi(t)}g_0(z)\right|^2}{|f_0(z)|^2 - |g_0(z)|^2} \\ = i\tilde{\nu}(z,\overline{z})\,, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $\overline{\nu} = \nu/((|f_0|^2 - |g_0|^2))$.

Reescribamos la ecuación anterior usando que $|f_0|^2 - |g_0|^2 = |f_0|^2(1 - |\omega|^2)$, donde $\omega = g_0/f_0$. Nótese que ω no es idénticamente constante, por lo tanto, podemos restringirnos a un disco abierto $D \subset \Omega_0$ en el que $\omega'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega_0$. Consideremos ese disco, en el que debe cumplirse la ecuación (3.34) que se escribe, en términos de ω como

$$\left(\alpha_t(t)\overline{\alpha(t)} - \beta_t\overline{\beta(t)} - i\xi_t(t)\,|\alpha(t)|^2\right) + i\frac{\xi_t(t)\left|\alpha(t)+\beta(t)e^{i\xi(t)}\omega(z)\right|^2}{1-|\omega(z)|^2}$$
$$= i\overline{\nu}(z,\overline{z})\,. \tag{3.35}$$

Tomando derivadas con respecto a z a ambos lados de (3.35), obtenemos que la función

$$i\xi_t(t)\frac{\omega'(z)}{(1-|\omega(z)|^2)^2}\left(\beta(t)e^{i\xi(t)+\alpha(t)\overline{\omega(z)}}\right)\left(\overline{\alpha(t)}+\overline{\beta(t)}e^{-i\xi(t)}\overline{\omega(z)}\right)$$
$$= i\xi_t(t)\left(\overline{\alpha(t)}\beta(t)e^{i\xi(t)} + \left(|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2\right)\overline{\omega(z)} + \alpha(t)\overline{\beta(t)}e^{-i\xi(t)}\overline{\omega(z)}^2\right)$$
$$\times\,\frac{\omega'(z)}{(1-|\omega(z)|^2)^2}$$

solo depende de z y de $\overline{z}$. Por lo tanto, también lo hace

$$i\xi_t(t)\left(\overline{\alpha(t)}\beta(t)e^{i\xi(t)} + \left(|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2\right)\overline{\omega(z)} + \alpha(t)\overline{\beta(t)}e^{-i\xi(t)}\overline{\omega(z)}^2\right),$$

que tiene derivada con respecto a $\overline{z}$ igual a

$$i\xi_t(t)\left(|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2\right)\overline{\omega'(z)} + 2i\xi_t(t)\alpha(t)\overline{\beta(t)}e^{-i\xi(t)}\overline{\omega(z)\omega'(z)}.$$

Como ω' no es cero, tenemos que

$$i\xi_t(t)\left(|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2\right) + 2i\xi_t(t)\alpha(t)\overline{\beta(t)}e^{-i\xi(t)}\overline{\omega(z)} = \gamma(z,\overline{z})\,, \tag{3.36}$$

donde γ es una funcion de z y $\overline{z}$. Tomando derivadas con respecto a z en ambos lados de (3.36), finalmente obtenemos que una función de depende solo de t coincide con una función que no depende de t. Debe ser, por tanto, constante. Esta función en concreto es $\xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi}$, luego

$$\xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi} = c_1\,, \quad c_1\in\mathbb{C}\,.$$

Pero, entonces, por (3.36) obtenemos que $\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)\xi_t$ es constante también e igual ocurre (por (3.34)), con $\alpha\overline{\alpha_t} - \beta_t\overline{\beta}$. De hecho, usando que $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, es fácil de verificar que $\alpha_t\overline{\alpha} - \beta_t\overline{\beta}$ es un número complejo puramente imaginario. En otras palabras, hemos visto que el siguiente sistema debe ser satisfecho por las funciones α, β, y ξ (aquí c_1, c_2, y c_3 son ciertas constantes con $c_3\in\mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi} = c_1, \\ \left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)\xi_t = c_2, \\ \alpha_t\overline{\alpha} - \beta_t\overline{\beta} = ic_3, \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \end{cases} \tag{3.37}$$

Ahora, tengamos en cuenta que las ecuaciones segunda y cuarta en (3.37) pueden reescribirse como

$$\begin{cases} |\alpha|^2\xi_t + |\beta|^2\xi_t = c_2\,, \\ \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)\xi_t = \xi_t\,, \end{cases} \equiv \begin{cases} 2\,|\alpha|^2\xi_t = c_2 + \xi_t\,, \\ 2\,|\beta|^2\xi_t = c_2 - \xi_t\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Por otro lado, usando la primera ecuación en (3.37), una consecuencia directa de (3.38) es que

$$4|c_1|^2 = 4\left(\xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi}\right)\overline{\left(\xi_t\alpha\overline{\beta}e^{-i\xi}\right)} = 2|\alpha|^2\xi_t \cdot 2|\beta|^2\xi_t = c_2^2 - \xi_t^2.$$

Esto muestra que ξ_t^2 (por lo tanto ξ_t) debe ser una función constante. Analizamos las dos posibilidades que dan lugar a los dos tipos de soluciones.

Caso 1. $\xi_t \equiv 0$. Entonces ξ debe ser constante y por lo tanto, por (3.32), vemos que $\xi \equiv 0$. Además, en este caso (3.37) se convierte

$$\begin{cases} \alpha_t\overline{\alpha} - \beta_t\overline{\beta} = ic_3, \\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1\,, \end{cases}$$

que es un caso particular de (3.27), con $\nu_0 = c_3$, $\lambda = 0$ y donde β es remplazado por $\overline{\beta}$. Teniendo en cuenta que $\alpha(0) = 1$, los mismos argumentos utilizados al analizar (3.27) muestran que, en el caso que nos ocupa, se tiene

$$\alpha(t) = \sqrt{|\beta(t)|^2 + 1}\,\exp\left(i\int_0^t \frac{c_3 + \mathrm{Im}\left\{\beta_t(s)\overline{\beta(s)}\right\}}{1 + |\beta(s)|^2}ds\right),$$

donde $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es una función C^1 arbitraria con $\beta(0) = 0$. Esto demuestra la primera parte del teorema (incluida la cuestión sobre la inyectividad de las soluciones).

Caso 2. $\xi_t \equiv \xi_0$, $\xi_0 \neq 0$. En este caso, por (3.32), se tiene $\xi(0) = 0$), luego $\xi(t) = \xi_0 t$. Por (3.38), se sigue que $|\alpha|$ y $|\beta|$ son constantes. Por tanto, usando (3.32), $\beta \equiv 0$ y $\alpha(t) = e^{i\varphi(t)}$ para alguna función φ de clase C^1 en $(0,\infty)$ con $\varphi(0) = 0$. Además, por (3.37), obtenemos $\varphi_t \equiv c_3$. Es decir, $\varphi(t) = c_3 t$. Por lo tanto, de acuerdo con (3.31), tenemos

$$\begin{pmatrix} f(t,z) \\ g(t,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ic_3t} & 0 \\ 0 & e^{-ic_3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi_0 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(z) \\ g_0(z) \end{pmatrix},$$

que es (3.30) con $\nu_0 = c_3$.

La cuestión sobre la univalencia de este tipo de soluciones se justifica utilizando los argumentos mencionados en la observación 3.6, teniendo en cuenta que, si $\xi_0 \neq 0$, los valores que toma $e^{\xi_0 t}$, $t > 0$, son todos los puntos de la circunferencia unidad. ■

La onda de Gerstner considerada en el ejemplo 3.1 corresponde al caso (3.30) con

$$\nu_0 = 0, \quad \xi_0 = \sqrt{k\mathbf{g}}, \quad F_0' = 1, \quad y \quad G_0'(z) = -e^{-ikz},$$

donde $k > 0$, $\mathbf{g}$ es la constante de aceleración gravitacional y z pertenece al dominio $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : Im\,\{z\} < 0\}$.

Conclusiones

Los contenidos del primer capítulo de este trabajo incluyen los resultados básicos en la teoría de las aplicaciones en la clase S de funciones f holomorfas e inyectivas (univalentes) en el disco unidad $\mathbb{D}$ del plano complejo, normalizadas por las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. El estudio de este tipo de resultados resulta indispensable en una primera aproximación a la teoría geométrica de funciones que, como se ha mencionado a lo largo del trabajo, a pesar de ser un área de investigación matemática clásica, continúa atrayendo la atención de los expertos a día de hoy. Merece especial atención el hecho de que muchos de los principales resultados se siguen del teorema de Bieberbach, en el que se prueba que el segundo coeficiente de Taylor de todas las funciones en esta clase está acotado, en módulo, por 2.

Los contenidos del segundo capítulo, de mayor profundidad y dificultad matemática, tratan sobre la teoría de Loewner que, en particular (y entre otras variadas aplicaciones), puede utilizarse para demostrar que el módulo del tercer coeficiente de Taylor de las funciones de la clase S está acotado por 3. La teoría de Loewner es, de hecho, una herramienta fundamental en la demostración de de Branges de la conjetura de Bieberbach que establece que los coeficientes de Taylor $\{a_k\}_{k\geq 1}$ de las funciones $f \in S$ están acotados (en módulo) por k.

En el último capítulo de esta memoria, se introducen las funciones armónicas de variable y valores complejos en el disco unidad que generalizan a las funciones holomorfas en cuanto a que toda función armónica f en $\mathbb{D}$ se escribe como $f = h + \overline{g}$, donde h y g son holomorfas en el disco. Obviamente, si g es constante, la función f resulta ser holomorfa. Son este tipo de funciones armónicas las consideradas para obtener soluciones explícitas de la ecuación bidimensional de Euler incompresible.

Estos resultados conforman algunos de los temas investigados a lo largo del desarrollo del Trabajo de Fin de Grado. Se ha pretendido incluir suficientes detalles en las demostraciones o a proporcionar al lector las referencias pertinentes. No se han incluido la totalidad de temas estudiados por cuestiones de espacio: por ejemplo, se han omitido algunos de los resultados del capítulo primero para la clase S considerando, en lugar de la clase completa, algunas subclases relevantes como las de las funciones convexas o estrelladas (con respecto al origen). No obstante, creemos, se han conseguido los objetivos propuestos al comienzo de este trabajo que podrían resumirse en la adquisición del conocimiento de las herramientas y resultados básicos de la teoría de funciones univalentes en el disco y, también, de la más elaborada teoría de Loewner (además de una primera aproximación a la teoría de funciones armónicas en el plano y sus aplicaciones a otras áreas de las matemáticas).

Sugerencias para una futura investigación

La parte de este trabajo que se centra en el análisis de las propiedades de las funciones de la clase S, en particular, sobre la acotación (en módulo) de los coeficientes de Taylor de las funciones en la clase, considera los casos $k = 2$ y $k = 3$ y muestra que para ellos, la cota coincide con la conjeturada por Bieberbach. Si bien es cierto que solo se cubren estos dos casos en particular, reiteramos la importancia y profundidad de la teoría de Loewner en el área, así como la de las consecuencias que la solución del caso $k = 2$ tiene sobre las distintas propiedades de las funciones de la clase S.

Otros proyectos futuros, como continuación de los estudiados en esta memoria, podrían ser los siguientes:

- La demostración de de Branges de la conjetura de Bieberbach involucra a la teoría de Loewner y, también, un análisis exhaustivo de las propiedades de ciertos espacios de Hilbert de funciones enteras (hoy conocidos como espacios de de Branges). Esta segunda herramienta no ha sido analizada en este trabajo. Sin duda, puede formar parte de un proyecto futuro a desarrollarse.

- Análisis de las demostraciones clásicas de los casos $k = 4$, $k = 5$ y $k = 6$. Cada una de ellas da lugar a nuevas teorías que pueden aplicarse a diversos resultados sobre las propiedades de las funciones de la clase S (además de la correspondiente acotación del módulo del coeficiente de Taylor considerado).

- Profundizar en las analogías y diferencias entre los casos considerados en esta memoria en los capítulos primero y segundo (que hacen referencia a funciones que son holomorfas en el disco unidad) y los casos en los que las funciones estudiadas son meramente armónicas.

- Finalmente, quizá podamos añadir el análisis sobre la aplicación de las herramientas desarrolladas en el tercer capítulo en relación con las ecuaciones de Euler incompresibles al estudio de las soluciones de otras Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] A. Aleman, A. Constantin, Harmonic maps and ideal fluid flows, *Arch. Rational Mech. Anal.* **204** (2012), 479–513.

[3] L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung, *Math. Ann.* **77** (1915-1916), 153–172.

[4] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.* **154** (1985), 137–152.

[5] O. Constantin, M. J. Martín, A harmonic maps approach to fluid flows, *Math. Ann.* **360** (2017), 1–16.

[6] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[7] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[8] F. Gerstner, Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile, *Ann. Phys.* **2** (1809), 412–445.

[9] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Denkker, INC., New York, 2003.

[10] T. H. Gronwall, Some remarks on conformal representation, *Ann. of Math.* **16** (1914-1915), 72–76.

[11] R. Hernández, M. J. Martín, Stable geometric properties of analytic and harmonic functions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **155** (2013), 343–359.

[12] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Matematische Physik*, Mechanik Teubner, Leipzig, 1876.

[13] P. Koebe, Über die Uniformierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1907), 191–210.

[14] P. Koebe, Über die Uniformierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imgaginärer Substitutionsgruppe, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1909), 68–76.

[15] H. Lewy, On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (1936), 689–692.

[16] K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, *Math. Ann.* **89** (1923), 103–121.

[17] Ch. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

Geometric Function Theory and Applications

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paula Pérez Pacheco
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101060774@ull.edu.es

Abstract

The study of univalent (holomorphic and injective) functions in the unit disk $\mathbb{D}$, considered as a milestone in geometric function theory, is a classical subject of research which continues active nowadays.

The main properties that a function in the class S of univalent mappings in the unit disk (normalized in the standard way) must satisfy are reviewed. An indepth analysis of Loewner's theory, of great relevance in the area (and a fundamental tool in de Branges' proof of the Bieberbach conjecture) is developed as well. Finally, and as a proof of the relationship between Complex Analysis and other areas of Mathematics (in particular, Fluid Mechanics), we review some recent results on explicit solutions of the incompressible Euler equation.

1. The class S and the Bieberbach conjecture

The class S consists of those univalent (*i.e.*, holomorphic and injective) functions f in the unit disk $\mathbb{D}$ with Taylor series expansion of the form

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad |z| < 1\,. \tag{1}$$

Bieberbach's theorem.

Let $f \in S$ have Taylor series expansion as in (1). Then, $|a_2| \le 2$. Equality holds for a given $f \in S$ if and only if f is a rotation of the Koebe function

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{k=2}^{\infty} k z^k\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

The **Bieberbach conjecture (from** 1916**).** Let $f \in S$ have Taylor series expansion as in (1). Then, for all $k = 2, 3, \ldots$,

$$|a_k| \le k\,.$$

Equality holds for some $k \ge 2$ and a given $f \in S$ if and only if f is a rotation of the Koebe function.

This conjecture remained unresolved until 1984, when de Branges proved its validity.

2. Consequences of the Bieberbach theorem

Let $f \in S$. Then, the following consecuences from Bieberbach's theorem are satisfied.

Covering theorem.

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < \frac{1}{4}\} \subset f(\mathbb{D})\,.$$

Distortion theorem.

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Growth theorem.

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Sharpness of all these results can be verified by using the Koebe function.

3. The kernel convergence

Carathéodory's kernel theorem. Let $\{0\} \in \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of simply connected domains different from $\mathbb{C}$ with kernel $D \neq C$. Let f_n be the Riemann map of the unit disk onto D_n with $f_n(0) = 0$ and $f_n'(0) > 0$. Then, $f_n \rightrightarrows_{K \Subset \mathbb{D}} f$ if and only if $D_n \to_N D \neq \mathbb{C}$. In this case, $D = f(\mathbb{D})$.

4. Loewner chains

The function $f : \mathbb{D} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ is *a Loewner chain* if:

- For each $t \in [0, \infty)$, the function $f(\cdot, t)$ is a univalent in $\mathbb{D}$ that fixes the origin.
- The function $f'(0, t)$ is continuous in $[0, \infty)$ and satisfies that $|f'(0, t)|$ is strictly increasing, $|f'(0, 0)| > 0$ and $\lim_{t\to\infty} |f'(0, t)| = \infty$.
- For any two real numbers s and t with $0 \le s \le t < \infty$, there is a function v_{st} holomorphic in $\mathbb{D}$ which fixes the origin, maps the unit disk into itself, and such that

$$f(z, s) = f(v_{st}(z), t)\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

5. Loewner theory

The Loewner theorem. Let f be a slit mapping in S. Then, there is a Loewner chain $f(z, t)$ with $f(z, 0) = z$ and $\lim_{t\to\infty} f(z, t) = f(z)$ for $z \in \mathbb{D}$ and a complex valued function $\kappa = \kappa(t)$ of modulus one such that

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\,.$$

The kernel theorem provides the geometric basis of Loewner's theorem which, among other consequences, shows that if $f \in S$ is as in (1), then $|a_3| \le 3$.

6. Applications: from Complex Analysis to Fluid Mechanics

Within the realm of fluid dynamics, the most complete description of a flow is attained within the Lagrangian framework.

By using complex analysis tools, it is possible to obtain all explicit solutions of the bidimensional Euler incompressible equations which satisfy that the labeling maps (in Lagrangian coordinates) are harmonic for all time t, a property verified by the classical known solutions (from the XIXth century) of this equation.

References

[1] O. Constantin, M. J. Martín, A harmonic maps approach to fluid flows, *Math. Ann.* **369** (2017), 1–16.

[2] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Denkker, INC., New York, 2003.