

TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

USO DE TABLAS Y DE MODELIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

NOEL DÓNIZ GONZÁLEZ

CLAUDIA AMATE RODRÍGUEZ

TUTORA: ALICIA BRUNO CASTAÑEDA

CURSO ACADÉMICO 2019/2020

CONVOCATORIA: JUNIO

USO DE TABLAS Y MODELIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

Resumen: En este trabajo se analiza el uso de dos heurísticos para la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria: 1) Modelización y 2) Organización de la información mediante tablas. Tras una revisión teórica sobre la resolución de problemas y de su tratamiento en el currículo de Educación Primaria en Canarias, se analizan dos experiencias de aula llevadas a cabo en dos centros de Tenerife (España). Las experiencias abordan cómo estudiantes de 3º y 4º de Educación Primaria utilizan los heurísticos mencionados en problemas aritméticos abiertos de suma y multiplicación. Para los alumnos participantes, la modelización contribuyó a la comprensión de los problemas mientras que la organización de la información mediante tablas permitió que relacionaran los datos con las operaciones. Ambas estrategias se complementaron, favoreciendo el éxito en la resolución de problemas mediante operaciones simbólicas.

Palabras clave: Resolución de problemas, Modelización, Tablas, Multiplicación, Heurísticos.

Abstract: This project studied the use of two heuristics for solving mathematical problems in Primary Education: 1) Modeling and 2) Organization of information using tables. After a theoretical review on problem solving in the Canary Islands' Primary Education curriculum was made, two classroom experiments were carried out applying these elements. The experiment consisted of analyzing the use of these elements in open addition and multiplication arithmetic problems in third and fourth year students from Tenerife. The modeling improved the understanding of the arithmetic problems, whilst the organization of the information using of tables eased the students to correlate the data with the operations. Both strategies were complementary, favoring the correct resolution of arithmetic problems through symbolic operations.

Keywords: Solving problems, Modeling, Tables, Multiplication, Heuristics.

ÍNDICE

Introducción	1
1. Revisión Teórica	2
1.1 La resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas	2
1.2 Métodos de resolución de problemas	5
1.2.1 Los heurísticos en la resolución de problemas	6
1.3 Resolución de problemas en el Currículo de Matemáticas de Educación Primaria	8
1.4 Formación docente en Proyectamates	10
2. Objetivos	10
3. Metodología	11
3.1 Descripción de los problemas del estudio	11
3.2 Experiencias de aula	13
3.2.1 CEIP La Salle San Ildefonso	13
3.2.2 CEIP Las Mercedes	14
3.4 Descripción de las estrategias	15
4. Resultados	15
4.1 CEIP La Salle San Ildefonso	15
4.2 CEIP Las Mercedes	19
5. Conclusiones	25
Bibliografía	26
Anexos	28

Introducción

La resolución de problemas matemáticos tiene protagonismo en los currículos de Educación Primaria de diferentes países (BOC, 2014; NCTM, 2000, Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Un problema es una situación que queremos resolver y para la cual no disponemos, en principio, de un camino rápido y directo que nos lleve a la solución, por lo que se produce un bloqueo (Echenique, 2006). La resolución de problemas requiere que el resolutor acceda a los conocimientos matemáticos que posee y que rescate de entre ellos los que pueden ser útiles para aplicarlos en el proceso de resolución. Este proceso ejerce un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático, llegando a ser considerado el objetivo de la enseñanza matemática en un contexto de enseñanza competencial. Que el alumnado sea competente matemáticamente implica que utilice lo que ha aprendido para resolver situaciones problemáticas que pueda encontrarse a lo largo de su vida. Por ello, es necesario crear habilidades y actitudes intelectuales que permitan desarrollar métodos que le facilite la resolución de problemas matemáticos.

En este trabajo se analiza la resolución de problemas en tercero y cuarto de Educación Primaria, respecto al uso de los heurísticos de modelización y organización de la información mediante tablas. Para ello, se han utilizado como foco de estudio, problemas aritméticos de suma y multiplicación de respuesta abierta.

En la revisión teórica que se presenta se analiza la resolución de problemas como objeto de estudio en la educación matemática, prestando especial atención a las aportaciones de Polya (1945) y Schoenfeld (1985). Seguidamente, se expone una revisión curricular sobre la resolución de problemas en el currículo de Canarias. Finalmente se abarca la formación docente en resolución de problemas que han recibido los autores de este TFG a través del proyecto *Proyectamates*.

A continuación, en la segunda parte del trabajo se abordan dos experiencias de aula sobre cómo los estudiantes utilizan los heurísticos de modelización y el uso de tablas, realizadas en el CPEIPS La Salle San Ildefonso y el CEIP Las Mercedes. En el apartado de metodología se presentan los problemas utilizados, la metodología seguidas por los docentes, así como las estrategias empleadas por el alumnado en la resolución de los problemas.

En el apartado de resultados se hace un análisis de los datos obtenidos tras las intervenciones de aula. Finalmente, en el apartado de conclusiones se hace una reflexión sobre los resultados obtenidos, así como de la contribución de esta experiencia en nuestra formación como futuros docentes.

1. Revisión Teórica

1.1 La resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas

Campistrous y Rizo (1999) denominan problema a “toda situación matemática en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla [...] la vía de solución tiene que ser desconocida y que la persona quiere realmente realizar la transformación”.

El aprendizaje de las Matemáticas se ve favorecido en un ambiente de trabajo basado en la resolución de problemas y cuando los estudiantes intentan dar la solución adquieren diferentes formas de pensamiento, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza; que contribuirán al dominio de situaciones semejantes y a la expresión de ideas matemáticas (Sepúlveda, Medina, y Sepúlveda, 2009). Esos autores defienden que el contexto de los problemas planteados podrá variar, pudiendo ser de carácter familiar para los estudiantes o “aplicaciones involucradas con las ciencias”. Si el docente hace una buena elección, teniendo en cuenta el nivel del alumnado, se podrán distinguir avances notables en el proceso de enseñanza-aprendizaje, haciendo de los estudiantes personas competentes tanto en el ámbito intelectual como personal.

Santos (1997), citado en Sepúlveda, et al. (2009), propone que los problemas que se presentan al alumnado posean determinadas características:

- 1. sin ser fáciles, deben ser accesibles a una gran variedad de estudiantes con diferentes antecedentes o recursos matemáticos;*
- 2. demandar de los estudiantes un plan de reflexión, es decir, que no puedan resolver instantáneamente;*
- 3. involucrar varias formas de solución...;*
- 4. las soluciones de los problemas pueden permitir y facilitar el uso de las ideas matemáticas...;*
- 5. servir de plataformas para realizar diversas exploraciones matemáticas...;*
- 6. cuando un alumno resuelva un problema, deberá ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas..., y;*
- 7. situarse en contextos donde los estudiantes puedan utilizar o tener acceso a las experiencias y recursos matemáticos previamente estudiados, con cierta naturalidad...*

Además, es interesante considerar el trabajo de Pérez y Beltrán (2009), pues enumeran diferentes creencias que poseen docentes y estudiantes acerca de la resolución de problemas:

1. *No se puede resolver un problema si no se ha visto antes otro parecido.*
2. *Siempre se busca la manera de dar un resultado.*
3. *Un problema siempre debe conducir a resolver operaciones.*
4. *Los problemas son siempre acerca de los últimos contenidos recibidos.*

Desde otro punto de vista Blanco y Cárdenas (2013) distinguen la resolución de problemas desde tres perspectivas diferentes:

- *Enseñanza para la resolución de problemas.* Hace referencia a cómo los estudiantes aplican de forma útil sus conocimientos matemáticos, previamente adquiridos, al dar solución a un problema; esta sería la perspectiva tradicional.
- *Enseñanza sobre la resolución de problemas.* Supone trabajar para que los estudiantes adquieran habilidades, técnicas y actitudes con el fin de que se lleguen a ser buenos resolutores de problemas; se enseñan estrategias específicas y se fomenta la reflexión y el diálogo sobre el proceso de resolución de problemas.
- *Enseñanza vía la resolución de problemas.* El proceso de enseñanza-aprendizaje se inicia mediante la exposición de una situación problemática que provocará el desarrollo de técnicas matemáticas. El ambiente del aula estará enfocado a la investigación y a la resolución de problemas.

Llegar a ser competentes matemáticamente tiene una gran importancia dentro del aula, en un ámbito científico específico, pero también en la vida cotidiana. Llinares (2013) señala que el desarrollo de la competencia matemática normalmente queda delimitado en un momento específico en el tiempo e indica que:

La idea de competencia matemática en los alumnos hay que entenderla como el uso de lo que se ha aprendido para resolver situaciones con las que uno se puede encontrar a lo largo de la vida [...] es un proceso que dura toda la vida [...] no es un asunto de todo o nada.

En las evaluaciones realizadas en el ámbito de PISA (Programme for International Student Assessment) en los distintos años realizados para la asignatura de Matemáticas, la resolución de problemas ha jugado un papel central. Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro (2016) presentan

un estudio sobre los resultados de Pisa en seis países (Argentina, Chile, España, Estados Unidos, Finlandia y Singapur), relacionándolo con el nivel de resolución de problemas de sus currículos. Señalan la posición de dichos países respecto a sus resultados: en primer lugar, se encuentran Finlandia y Singapur, en posición intermedia, España y Estados Unidos y, con el puntaje más bajo Chile y Argentina. A continuación, contrastan seis categorías respecto a la resolución de problemas que se resumen en lo que sigue.

- 1. Problemas matemáticos.** Tres de los países (España, Estados Unidos y Chile) explicitan en sus currículos lo que se entiende por problema y sus correspondientes clasificaciones. El resto de países (Singapur, Finlandia y Argentina) únicamente presentan algunas clasificaciones sobre los problemas.
- 2. Resolución de problemas.** Estados Unidos y Argentina plantean estrategias concretas de resolución, mientras que en los documentos de Finlandia y España apenas se les hace mención. El documento de Estados Unidos aparece como el más completo en esta categoría seguido del de España, Chile, Argentina, Singapur y Finlandia.
- 3. Invención de problemas.** De nuevo, en esta categoría el currículo estadounidense es el más rico, seguido de los de Chile y Argentina. Singapur, Finlandia y España únicamente hacen referencia a estrategias con las que realizar la invención de problemas.
- 4. Formas de pensar la resolución de problemas.** Todos los países, menos España y Argentina, mencionan el pensamiento del alumnado, su importancia y qué aspectos se han de tener en cuenta. Asimismo, Estados Unidos destaca sobre los demás al mencionar también las dificultades y conductas de los resolutores exitosos.
- 5. Formas de trabajar la resolución de problemas.** El currículo de Estados Unidos sobresale con respecto a los demás en esta categoría, seguido por los de Singapur y Chile y, finalmente, por los de España, Argentina y Finlandia.
- 6. Factores afectivos y creencias.** En esta categoría destaca que Estados Unidos es el único país que resalta el papel del docente, aunque todos los currículos hacen alguna referencia a ello.

De acuerdo con Piñeiro, et al. (2016), la presencia de información sobre la resolución de problemas en el currículo no es un factor que determine el éxito en ello y no asegura un mejor rendimiento en los estudiantes, por lo tanto, será su implementación la que señalará el nivel de éxito o fracaso.

1.2 Métodos de resolución de problemas

La resolución de problemas ejerce un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático. Los trabajos de George Polya en 1945, ésta cobró importancia en la educación matemática. Este matemático sentó las bases de la heurística moderna, entendida como “el estudio de todas las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas”. Polya entiende que los problemas son el medio por el que los estudiantes acceden al conocimiento matemático. Por ello, incorpora los procesos heurísticos, el monitoreo y el control como ingredientes fundamentales en la resolución de problemas. A través de un análisis de los diálogos internos que Polya realizaba consigo mismo, cuando se encontraba inmerso en el proceso de solución, sistematizó su método de resolución de problemas. Este método pretendía dar las herramientas necesarias para incursionar en la realización de acciones y reflexiones que condujeran a los estudiantes a encontrar la solución (Sepúlveda et al., 2009). Blanco (1996) destaca que el objetivo último de Polya es que el sujeto consiga resolver correctamente problemas matemáticos y para ellos especifica cuatro fases en la resolución:

1. **Comprender el problema:** En esta etapa se determinan la incógnita, los datos y las condiciones del problema. Además, se decide si dichas condiciones no resultan insuficientes, redundantes o contradictorias.
2. **Concebir un plan:** Tras comprender el problema, se relaciona con otros similares, así como con problemas cuyos resultados sean útiles. Se determina si pueden usarse problemas semejantes o sus resultados.
3. **Ejecutar el plan:** Al llevar a cabo la ejecución del plan es fundamental comprobar cada uno de los pasos seguidos y comprobar si son correctos.
4. **Examinar la solución:** En esta etapa se verifican los resultados obtenidos y el razonamiento que se ha seguido. Es importante comprobar si podría resolverse de una manera diferente. Al resolver un problema, se están desarrollando nuevas habilidades que posteriormente, servirán para resolver otros problemas.

Blanco (1996) indica que la segunda cuestión fundamental de las ideas de Polya hacen referencia a que los estudiantes adquieren los conocimientos mediante imitación y práctica. Por ello, la acción del tutor se debe orientar hacia el desarrollo de la heurística y la reflexión, con la intención de que después los estudiantes puedan seguir por sí mismos estos procesos a través de un diálogo interno (Sepúlveda et al., 2009). Dicho diálogo debe llevarse al aula elaborando diferentes preguntas para cada una de las fases y problemas. Si estas preguntas están bien

formuladas, guiarán al sujeto hasta la resolución del problema. Sin embargo, Callejo (2000) resalta que el diálogo tutor-sujeto que Polya propone es difícil de llevar a la práctica en las aulas. Por un lado, las aulas son numerosas en la mayoría de casos y por otro, los estudiantes no suelen estar motivados. Indica la autora que el papel del docente es importante y debe conducir al alumnado hasta la comprensión del problema poniéndose en su lugar, adaptando la ayuda que proporciona a sus capacidades.

A partir de la década de 1970, surgen nuevas líneas de investigación y desarrollo más allá de las ideas desarrolladas por Polya, destacando los trabajos de Schoenfeld (1985). Este autor profundiza y complementa el trabajo de Polya, prestando especial atención a la dimensión cognitiva del aprendizaje. Schoenfeld se centró en los procesos de reflexión que están asociados a las acciones mentales de control que actúan implícita y continuamente mientras se resuelven problemas (Sepúlveda, et al. 2009).

Según Polya el sujeto avanza de forma lineal por las fases de la resolución de problemas anteriormente indicadas; sin embargo, Schoenfeld entiende que para lograr que el sujeto sea un buen resolutor de problemas, el camino que ha de seguir puede tomar diferentes direcciones y establece sus propias fases en la resolución de un problema (descritas en Blanco, 1996):

- 1. Análisis:** Trazarse un diagrama, seleccionar los valores que consigan ejemplificar el problema, explorar las posibilidades examinando casos límites, buscar una pauta inductiva e intentar simplificar el problema.
- 2. Exploración:** Examinar problemas equivalentes, problemas ligeramente modificados y/o problemas ampliamente modificados.
- 3. Ejecución:** Dar solución al problema planteado.
- 4. Comprobación:** Verificar la solución obtenida, teniendo en cuenta si se han utilizado todos los datos pertinentes, concuerda con las predicciones/estimaciones y si encaja con pruebas de simetría, análisis dimensional o cambios de escala. Comprobar si la solución se puede obtener a través de un método diferente, definir en casos particulares, reducir a resultados ya conocidos o utilizar para generalizar algo conocido.

1.2.1 Los heurísticos en la resolución de problemas

Algunos autores han destacado la importancia de enseñar *heurísticos* al alumnado como medio para mejorar la resolución de problemas matemáticos.

Como ya se ha comentado, los heurísticos son técnicas generales para la resolución de problemas, es decir, un conjunto de estrategias y reglas de decisión que ayudan a encontrar caminos para alcanzar una solución (Poggioli, 1999, citado en Pérez y Ramírez, 2011).

Callejo (2000) indica que cuando los estudiantes poseen un amplio abanico de estrategias heurísticas, tienen más recursos para abordar una situación problemática; pero la mejor forma de actuar es presentar las estrategias heurísticas una vez que se hayan explorado de forma natural, y no como punto de partida en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En los trabajos de Polya, los métodos heurísticos juegan un papel fundamental como base sobre la que se articula la resolución de problemas. Polya, definía los heurísticos como las acciones físicas o mentales que contribuyen a encontrar pistas o ideas que ayudan a resolver los problemas (Sepúlveda, et al., 2009).

Los métodos heurísticos han sido ampliamente estudiados y desarrollados, llegando a ser clasificados en heurísticos generales que pueden ser aplicados a una gran variedad de problemas y heurísticos específicos, centrados en un área de conocimiento en particular. A continuación, se presentan una relación de heurísticos generales que son de gran utilidad para el alumnado a la hora de resolver un problema:

- **Analogía:** Consiste en resolver un problema recurriendo a otro similar, ya sea empleando su método, resultado o ambos.
- **Simplificación:** Se trata de crear un problema que sea más sencillo de resolver que el problema original, ya sea porque tiene menos elementos, o porque se cambian las condiciones para disminuir su complejidad.
- **Ensayo-error:** Consiste en proponer posibles respuestas al problema y verificar, según las condiciones del enunciado, si estas son válidas.
- **Modelización:** Consiste en ayudarse de representaciones visuales o materiales que ayuden a comprender mejor el problema y las conexiones entre sus distintas partes.
- **Organización de la información:** Organizar la información del problema empleando una lista o tabla que permita ordenar cantidades, completar información que se pueda deducir, encontrar patrones o regularidades y buscar relaciones que conduzcan a la resolución del problema.
- **Particularización y generalización:** La generalización implica observar aspectos comunes en diferentes problemas, con la intención de detectar regularidades que nos

permitan realizar conjeturas. Esta estrategia permite buscar otros contextos en los que generalizar nuestro problema. La particularización es el proceso inverso de la generalización. A partir de un problema general se empieza a particularizar algunos casos para encontrar alguna idea sobre el problema a resolver.

1.3 Resolución de problemas en el Currículo de Matemáticas de Educación Primaria

En este apartado se analiza la importancia y la presencia que tiene la resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas de Educación Primaria de la Comunidad Autónoma Canaria.

El *Decreto 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias* concreta los elementos constitutivos del currículo básico (Real Decreto 126/2014) (BOC, 2014) atendiendo a las premisas de funcionalidad, aprendizaje competencial, exclusividad, equidad, calidad e integración curricular. Este Decreto, en su Anexo I desarrolla los principios generales del currículo nacional, adaptándolo a la Comunidad Autónoma de Canarias. De esta forma, concreta la finalidad de la asignatura de Matemáticas en la etapa de Educación Primaria, señalando que su fin último no es centrarse en la enseñanza del lenguaje simbólico-matemático, sino construir los fundamentos del razonamiento lógico-matemático que permitan una función formativa que contribuya al desarrollo cognitivo, instrumental y funcional. Se recalca que la Educación Matemática debe posibilitar la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana.

Se presentan las competencias como elemento central del currículo, lo que supone una manera de orientar y definir las intenciones educativas hacia un “saber hacer” en el que la resolución de situaciones problemáticas es el camino para lograr el aprendizaje competencial.

Ello significa que el alumnado ha de lograr comprender y representar hechos y situaciones reales o simulados de la vida cotidiana [...] ha de utilizar el conocimiento matemático en posteriores aprendizajes o en cualquier situación independiente de la experiencia escolar; ha de formular o resolver problemas lógico-matemáticos utilizando diferentes estrategias.

Asimismo, el currículo de Canarias expone los criterios de evaluación como el referente para evaluar el aprendizaje del alumnado, describiendo aquello que se quiere valorar y que el alumnado debe lograr, los aprendizajes fundamentales, tanto en contenidos como en competencias. Se presentan por cursos, relacionados con sus contenidos y con los estándares

de aprendizaje evaluables asociados y además se vinculan las competencias a las que contribuyen adaptados a cada nivel.

La resolución de problemas tiene asociado un criterio en cada curso en progresiva dificultad, con el que se pretende comprobar que el alumnado adquiere y aplica estrategias variadas en problemas que supongan un reto. No se trata de resolver ejercicios de aplicación inmediata de contenidos que se trabajan en un determinado momento. Es importante la expresión de las estrategias y los procesos seguidos para la interiorización individual y la integración colectiva.

Este criterio se presenta formulado de modo que forme parte del quehacer diario en el aula para trabajar el resto de los contenidos del área. El texto curricular propone un proceso de solución de los problemas similar al propuesto inicialmente por Polya (1945), ya descrito en el apartado 1.2, pues señala sus fases, estrategias y métodos heurísticos generales.

El Criterio I pretende comprobar si el alumnado resuelve problemas [...] siguiendo para ello una secuencia: comprende el enunciado, discrimina los datos y su relación con la pregunta, realiza un dibujo o esquema de la situación, elabora un plan de resolución, ejecuta el plan siguiendo la estrategia más adecuada (búsqueda de regularidades, construir modelos, ensayo error, organización de la información, simplificar, etc.), comprueba las soluciones y elabora respuestas.

De acuerdo con Callejo (2000), las fases Polya parecen naturales para quienes poseen cierta práctica y experiencia resolviendo problemas. Sin embargo, para quienes no están familiarizados, es necesario un aprendizaje previo de hábitos y actitudes intelectuales que le ayuden a desarrollar este proceso. Es por ello que la resolución de problemas va adquiriendo mayor complejidad a medida que se aumenta el curso. Los primeros años se centran en la adquisición del hábito y la asimilación del modelo de resolución de problemas. En los últimos cursos la resolución de problemas abarca tareas más complejas, como establecer relaciones con la realidad, la reflexión sobre el trabajo realizado y sobre los resultados obtenidos, para facilitar la transferencia de conocimiento a situaciones posteriores.

En resumen, el currículo de Matemáticas de Canarias indica que la resolución de problemas constituye en último grado el fin de la enseñanza Matemática, en un contexto donde los aprendizajes deben ser competenciales.

1.4 Formación docente en el proyecto *Proyectamates*

La Universidad de La Laguna, y la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, apoyados por el Cabildo Insular de Tenerife, vienen desarrollando desde 2018 el proyecto de innovación educativa denominado *Proyectamates*. Este proyecto se centra en el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas en alumnado de Educación Primaria y Secundaria. Su principal acción consiste en la formación matemática del profesorado en activo de los citados niveles educativos en la isla de Tenerife.

Como estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, los autores de este TFG han tenido la oportunidad de participar en la formación de *Proyectamates*, acudiendo a sesiones de trabajo del proyecto, con el resto del profesorado en activo. A lo largo del presente curso, se ha impartido al profesorado de los centros participantes 30 horas de formación sobre metodología que facilita la resolución de problemas matemáticos, utilizando tres heurísticos: ensayo y error, modelización y organización de la información. El objetivo es que el profesorado traslade a su aula esta manera de trabajar los problemas de forma que ello contribuya a mejorar los resultados académicos en Matemáticas de su alumnado. La participación en las sesiones de *Proyectamates* ha permitido a los autores de este TFG a observar la realidad educativa de las aulas de Matemáticas, conociendo los principales hándicaps de la resolución de problemas entre el alumnado.

Este TFG surge de lo observado en las sesiones de *Proyectamates*, como un intento de aplicar lo aprendido sobre las estrategias heurísticas, así como profundizar en el proceso de resolución de problemas, adaptando la metodología del proyecto con las aportaciones de otros autores como Polya (1945) y Schoenfeld (1985).

2. Objetivos

Resolver problemas es el objetivo fundamental de la enseñanza matemática y, de acuerdo con Callejo (2000), es necesario crear hábitos y actitudes intelectuales que ayuden al alumnado a desarrollar métodos que les facilite su resolución.

Los contenidos curriculares prestan especial atención a la comprensión lingüística como paso previo para la elaboración de un plan de resolución y al desarrollo de estrategias y procedimientos. En concreto, se indica que es necesario *comprender el enunciado, discriminar los datos y su relación con la pregunta, realizar un esquema de la situación*. Es por ello, que en este trabajo se ha considerado adecuado analizar dos estrategias heurísticas que facilitan la comprensión de los enunciados: la modelización y la organización de los datos en tablas.

De acuerdo con Guirles (2005), resolver un problema requiere en primer lugar comprender el mensaje y las palabras con las que está enunciado, de modo que se asocie una determinada acción lingüística con una operación matemática. Este es un proceso complejo para el alumnado por varias razones: falta de dominio claro de la comprensión lectora; codificación matemática condicionada por una gama de verbos limitada; y dominio limitado de las operaciones.

Por ello, es muy importante trabajar la comprensión de los enunciados mediante dibujos representaciones gráficas y tablas que faciliten el paso de un código lingüístico al lenguaje matemático simbólico abstracto.

El objetivo de este TFG es analizar el uso de los heurísticos de modelización y de organización de la información mediante tablas en alumnado de tercero y cuarto de Educación Primaria.

Para ello se ha utilizado un tipo de problemas aritméticos común a ambos cursos, como son aquellos en los que está implicada la suma y la multiplicación. En concreto, se analizan problemas que se resuelven con sumas y multiplicaciones de respuesta abierta. Esto último significa que admiten más de una respuesta. Los dos heurísticos buscan que el alumnado comprenda el enunciado, el proceso de resolución y, por ende, la búsqueda de las operaciones necesarias.

3. Metodología

En este apartado se desarrollan los aspectos metodológicos que se han tenido en cuenta para lograr el objetivo planteado. Se describen los problemas seleccionados para el estudio, el procedimiento seguido en dos experiencias llevadas a cabo en tercero y cuarto de Primaria, por último, se muestra la categorización de las estrategias empleadas por el alumnado.

3.1 Descripción de los problemas del estudio

No existe un criterio único, ni una única clasificación de los problemas matemáticos que se trabajan en las aulas de Matemáticas de los distintos niveles educativos. Guirles (2005) señala que se pueden clasificar atendiendo a su dificultad conceptual, a su forma de resolución, al tamaño de los números, al número de soluciones, al formato de presentación, etc.

En este trabajo se han utilizado problemas aritméticos que combinan la suma y la multiplicación. En concreto los problemas multiplicativos se refieren a repartos que representan aquellas situaciones en las que una cantidad se distribuye entre un cierto número de grupos, de modo que cada grupo reciba un número de elementos. El enunciado hace referencia a tres

elementos: la cantidad a repartir, el número de grupos a formar, y el número de elementos por cada grupo. Dos de estos constituirán los datos mientras que el tercero será la incógnita a calcular. Se han realizado modificaciones en los enunciados de modo que los problemas admitan varias respuestas: los elementos de los grupos no son equitativos, o el número de grupos no está determinado en el enunciado. También puede resolverse de formas distintas: únicamente con sumas o combinado sumas con multiplicaciones.

De acuerdo con Guirles (2005), los problemas modificados deberían trabajarse asiduamente en el aula pues permiten trabajar los errores de comprensión y solución que presenta el alumnado a la hora resolverlos. Tratar con problemas modificados resulta una estrategia adecuada para avanzar en la comprensión lingüística y matemática. A continuación, se describen los dos tipos de problemas trabajados en este TFG, ambos con múltiples respuestas.

Problemas tipo 1. Son aquellos en los se conoce el número de grupos a formar y el número de elementos de cada grupo puede variar en un rango dado. Esto último implica la cantidad total de elementos obtenida no sea única.

P1.1. Problema de la noria. En una noria hay 5 cabinas. En cada cabina caben 4 personas como máximo, pero para que pueda funcionar tienen que haber como mínimo 2 personas. ¿Cuántas personas podrían estar montadas en la noria?

P1.2. Problema de las galletas. Todos los días Octavio merienda galletas. Algunos días come dos galletas, otros días come el doble y otros días come el triple de galletas. ¿Cuántas galletas puede llegar a comer Octavio en una semana?

Problemas tipo 2. Son problemas en los que se da la cantidad un total y el rango de valores en los que se pueden formar los grupos. Esto último determina en cuántos grupos se reparten el total, lo cual no es de respuesta única.

P 2.1. Problema de la clase. En una clase hay 22 alumnos. La profesora quiere que los alumnos hagan un trabajo en parejas o en tríos. Averigua maneras diferentes de hacer los grupos en la clase.

P 2.2. Problema de la diana. En una partida de dardos Pedro obtuvo 25 puntos. En los dardos los tiros pueden ser de 1 punto, 3 puntos o 5 puntos. ¿Cuántos tiros de cada tipo metió Pedro en la diana?

3.2 Experiencias de aula

Para analizar el objetivo se han realizado dos experiencias de aula, en dos colegios diferentes y en dos niveles educativos (tercero y cuarto de Educación Primaria). A continuación, se describen cada una de estas experiencias.

3.2.1 Experiencia 1: CEIP La Salle San Ildefonso

La experiencia 1 tuvo lugar en el Colegio La Salle San Ildefonso (en Santa Cruz de Tenerife, Tenerife), en un aula de cuarto de Educación Primaria con 20 alumnos/as. Se llevó a cabo en dos sesiones de 50 minutos en las que la profesora en prácticas (autora de este TFG) intervino de forma débil pues ejerció un papel de guía, explicando al alumnado los pasos que debía seguir y mostrándose dispuesta a resolver las dudas que surgiesen.

En la primera sesión se comenzó con una breve introducción para situar a los estudiantes en el contexto de trabajo. Se les explicó que a pesar de que seguramente no habían resuelto un problema con una estructura semejante al que iban a resolver (en el sentido de que tenían múltiples soluciones), si prestaban atención en la lectura, no encontrarían problemas a la hora de resolverlo.

Se comenzó proyectando el enunciado del *problema 1.2* y se repartió a cada estudiante un folio en blanco. La profesora comunicó que debían dividir dicho folio en tres partes. Explicó que para resolver el problema se utilizaría la técnica 1-2-4. Es decir, primero resolverían el problema individualmente, luego en parejas y, por último, grupo de 4 personas. Por lo tanto, en cada parte del folio, los estudiantes debían expresar un resultado diferente al que habían llegado según los diferentes agrupamientos.

A continuación, se llevó a cabo la lectura en gran grupo del enunciado del problema. Se leyó varias veces por parte de alumnos diferentes. Tras la lectura, se explicó la tabla que aparecía proyectada debajo del problema. En un primer momento la presencia de dicha tabla les confundió, no estaban familiarizados con el uso de tablas a la hora de organizar la información de un problema. Sin embargo, una vez explicada la tabla, se aclararon las dudas, comprendían la finalidad de la misma. Por lo tanto, una vez confirmado que todos comprendían el problema, se procedió a la realización del mismo.

En la segunda sesión se trabajó el *problema 2.2*. Al igual que en la primera intervención, se comenzó con una breve introducción para situar a los estudiantes en el contexto de trabajo, la profesora les comunicó que el problema que resolverían en esta sesión no sería igual al anterior y que a pesar de que seguramente tampoco habían resuelto un problema con una estructura

similar, confiaba en que no encontrarían problemas a la hora de resolverlo.

Tras la experiencia de la primera sesión, se consideró que lo mejor sería confeccionar una plantilla (Anexo 1) con la finalidad de agilizar el trabajo. En dicha plantilla se encontraba el enunciado del problema y las tres partes debidamente diferenciadas ya que, de nuevo, el problema se resolvió con la técnica 1-2-4; en cada parte se encontraba una tabla que debían rellenar con los datos pertinentes. Además, se añadió un nuevo apartado que les permitía modelizar y organizar la información en una tabla. Esta nueva aportación se diseñó con el fin de que los estudiantes pudieran comprender mejor el problema y tratar con dos heurísticos con los que no estaban habituados.

Una vez terminada la explicación de la plantilla, tuvo lugar la lectura en gran grupo del enunciado del problema y, al igual que en el desarrollo de la primera sesión, se leyó varias veces en alto por diferentes estudiantes. Finalmente, se aclararon las dudas y, una vez resueltas, se procedió a la resolución del mismo. Cabe destacar que las dudas que surgieron con respecto a este problema, a diferencia de las del *problema 1.2*, no estaban relacionadas con la presencia de la tabla en la ficha entregada. Comprendían el papel que la tabla desempeñaba en el proceso de resolución de problemas tras la explicación de la primera sesión.

3.2.2 Experiencia 2: CEIP Las Mercedes

La experiencia 2 se desarrolló en el CEIP Las Mercedes (en San Cristóbal de La Laguna, Tenerife) en una clase de tercero de Educación Primaria de 22 alumnos/as, durante tres sesiones de 55 minutos. De estas sesiones, dos tuvieron un carácter formativo, donde se instruyó al alumnado en el uso de los heurísticos de modelización y organización de la información mediante tablas, así como en el método de resolución de problemas. La tercera sesión fue evaluativa y no hubo intervención docente. En ella, el alumnado trabajó en parejas cooperativas.

En la primera intervención formativa se procedió a la resolución del *problema 1.1*, siguiendo los pasos de la plantilla diseñada (Anexo 2). Para ello, se utilizó una metodología expositiva-participativa. En gran grupo se procedió a la lectura del enunciado, a la extracción de los datos y a determinar el objetivo del problema. Seguidamente, se construyó una tabla para organizar la información y se representó en una modelización. Finalmente se procedió a plantear la operación matemática. Este proceso se repitió dos veces para hallar otra solución.

Durante la segunda sesión se valoró en qué medida el alumnado había asimilado el proceso de la sesión anterior. Para ello se resolvió el *problema 1.2* siguiendo el esquema planteado (Anexo 3), manteniendo las mismas parejas. En esta ocasión no hubo intervención docente y el

alumnado halló dos soluciones al problema de forma autónoma y se aportó un modelo de tabla para organizar la información.

En la tercera sesión se resolvió un nuevo tipo de problema, en concreto el *problema 2.1*. Para ello se siguieron los pasos de la plantilla propuesta (Anexo 4). El alumnado trabajó en las mismas parejas, sin embargo, el docente dio un paso atrás en esta sesión siendo menos instructivo y actuando como guía. Se realizaron varias modificaciones en el procedimiento debido a la experiencia de las sesiones anteriores. En primer lugar, se procedió a la lectura del enunciado, a la extracción de los datos y a determinar el objetivo del problema. A continuación se realizó la modelización y seguidamente, se organizó la información en una tabla, para finalmente plantear la operación y obtener el resultado.

3. 4 Descripción de las estrategias

En la Tabla 1 se muestra la categorización de las respuestas que podrían utilizar el alumnado para resolver los problemas.

Tabla 1. Categorías de estrategias de respuesta

Estrategia	Descripción
Estrategia 1	Se resuelve el problema mediante multiplicaciones y sumas.
Estrategia 2	Algunas operaciones empleadas en el proceso de resolución no aparecen registradas.
Estrategia 3	Se resuelve el problema mediante una doble multiplicación y una suma.
Estrategia 4	Se resuelve el problema empleando operaciones combinadas.
Estrategia 5	Procedimiento de difícil categorización matemáticamente.
Estrategia 6	Se resuelve el problema mediante sumas.

Ejemplos de cada una de estas estrategias se mostrarán en el apartado de resultados.

4. Resultados

En este apartado se mostrarán los resultados de las dos experiencias realizadas, poniendo el foco en las estrategias de resolución y el éxito obtenido.

4.1 Experiencia 1: CEIP La Salle San Ildefonso

Al analizar las respuestas de los estudiantes del CEIP La Salle San Ildefonso en ambos problemas, se ha tenido en cuenta los resultados correspondientes a la parte individual. El resto de respuestas no resultaron ser del todo enriquecedoras, ya que muchos estudiantes se limitaron a copiar el proceso seguido en la parte individual, en las dos partes siguientes. Además, algunos estudiantes, después de dar solución a la primera parte, dejaron alguna de las dos partes siguientes, o ambas, en blanco, etc. Por ello, se ha optado por únicamente analizar los resultados individuales.

Resultados del Problema 1.2

En primer lugar, cabe destacar la actitud del alumnado tras la lectura del *problema 1.2*. En su mayoría, creyeron que el problema estaba mal redactado, expresando frases del tipo: “un problema que puede tener diferentes soluciones correctas no es un problema, es otra cosa”. Por ello, la profesora se preocupó en que entendieran que existen diferentes problemas y que en algunos de ellos la solución no es única (como era el caso del que se disponían a resolver), siendo igual de válidos e interesantes.

Con el fin de que lo comprendieran mejor, la profesora los puso en contexto y les pidió que se pusieran en la piel del protagonista del problema. Les preguntó a los estudiantes si comían galletas, tras responder todos “sí”, preguntó si comían la misma cantidad de galletas cada día o si comían la misma cantidad de galletas cada semana. Tras esta intervención, la mayoría pareció comprender la dinámica y aceptaron el problema como próximo a la realidad.

Después de la breve explicación del problema, los estudiantes manifestaron el resto de dudas. En su mayoría las dificultades estaban relacionadas con la tabla que se les había presentado debajo del enunciado. Por ello, la profesora se detuvo en explicar su función en el proceso de resolución del problema. A pesar de que manifestaron comprenderla, les resultó complejo confeccionar la suya en el folio en blanco proporcionado. Algunos no siguieron la estructura de tabla que se les había presentado y pareció que su diseño les resultó confuso. Esto hizo reflexionar a la profesora que para la siguiente sesión, la tabla debería llevar un diseño más óptimo, entregando al alumnado una ficha donde se aportara un modelo de tabla, facilitando así su uso a la hora de resolver el problema.

En las respuestas al *problema 1.2* se distinguieron cuatro estrategias diferentes utilizadas por el alumnado para resolver el problema. Cabe destacar que 15 de los 20 estudiantes expresaron una respuesta correcta, mientras que 5 dieron una respuesta incorrecta al problema. En la Figura 1 se muestra el tipo de estrategia y el número de estudiantes que las emplearon.

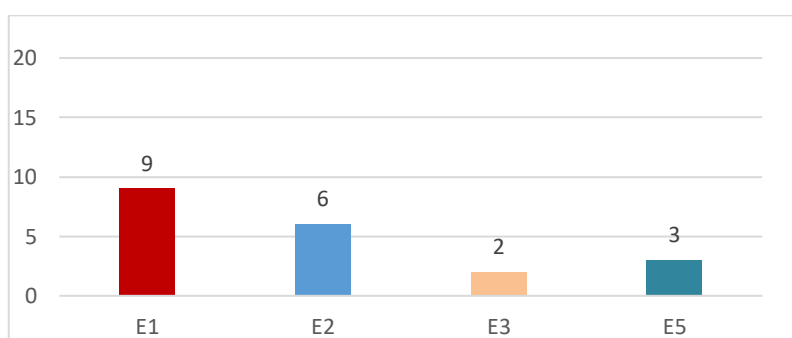


Figura 1. Número de alumnos y tipos de estrategias en el problema P1.2

La estrategia más usada fue la Estrategia 1 (E1), que consistió en utilizar multiplicaciones para obtener las galletas de cada uno de los días y posteriormente hacer las sumas parciales (Figura 2). Nueve estudiantes siguieron esta estrategia, aunque con diferentes formas de expresar las multiplicaciones y las sumas (Figura 3).

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
2	4	6	4	2	4	6
Total	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{4}$	12	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{6}$
28		6 +6 12	2 +2 16	16 +4 +4 28		

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Total
2	6	4	6	2	4	4	28
2×1	2×3	2×2	2×3	2×1	2×2	2×2	
28							

Figura 2. Ejemplo de Estrategia 1 en el problema P1.2

Figura 3. Ejemplo de Estrategia 1 en el problema P1.2

La segunda estrategia más utilizada fue la E2, la cual siguieron 6 estudiantes. En esta estrategia, algunas de las operaciones no aparecen escritas en la respuesta. En cierta forma, es similar a la E1, pero se ha diferenciado debido a que los estudiantes no hacen explícitas las sumas parciales. Puede ser que las hayan realizado de forma mental o las escribieran en su mesa o en otro papel (Figura 4).

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Total
$2 \times 2 =$ 4	$2 \times 1 =$ 2	$3 \times 2 =$ 6	2×1 2	2×2 4	2×1 2	2×1 2	22 galletas

Figura 4. Ejemplo de Estrategia 2 en el problema P1.2

La Estrategia 3 (E3) la emplearon solo 2 estudiantes. En ella se resuelve el problema por medio de multiplicaciones que expresan el doble o el triple y finalmente se hace una suma de los resultados parciales de cada día (Figura 5).

LUNES	Martes	Miércoles	JUEVES	VIERNES	Sábado	Domingo	TOTAL
2 galletas	doble 2 $\times 2$ 4 galletas	triple 3 $\times 2$ 6 galletas	1/2 galletas 6 = 3	doble 2 $\times 2$ 4 galletas	triple 3 $\times 2$ 6 galletas	2 galletas	26 galletas
	$\times 2$ 6	$\times 4$ 8	$\times 6$ 12	$\times 2$ 4	$\times 2$ 6		

Figura 5. Ejemplo de Estrategia 3 en el problema P1.2

Por último, 3 estudiantes resolvieron el problema con la Estrategia 5 (E5). En esta no queda claro el procedimiento o la respuesta final al problema. La Figura 6 ejemplifica estos casos. El estudiante da dos repuestas al problema. En una resuelve mediante sumas, pero escribe una multiplicación que no tiene relación con su respuesta.

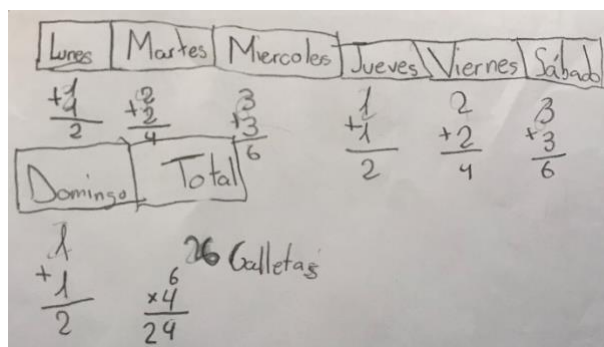


Figura 6. Ejemplo de Estrategia 5 en el problema P1.2

Resultados del Problema 2.2

Tras la lectura del *problema 2.2*, la profesora esperaba encontrarse con los mismos inconvenientes iniciales respecto a la aceptación del problema que en la sesión anterior. Para su sorpresa, la actitud del alumnado fue notablemente diferente. Parecían haber interiorizado que los problemas matemáticos a veces pueden resolverse de diferentes maneras y tener varias soluciones. Prácticamente no se presentaron dudas respecto al proceso a seguir.

La ficha que se les entregó demostró ser de gran ayuda, la presencia de las tablas en cada una de las partes y la aportación de un apartado que les permitiera modelizar, aparte de agilizar el proceso de resolución, lo simplificó. Por ello, una vez leído el problema y explicados los pasos a seguir, procedieron a la resolución del mismo sin obstáculos aparentes. No obstante, cabe destacar que no todos los estudiantes modelizaron, únicamente 14 de los 20.

El *problema 2.2* lo resolvieron con éxito 19 estudiantes. En la Figura 7 se muestran los resultados respecto a las tres estrategias empleadas por los estudiantes.

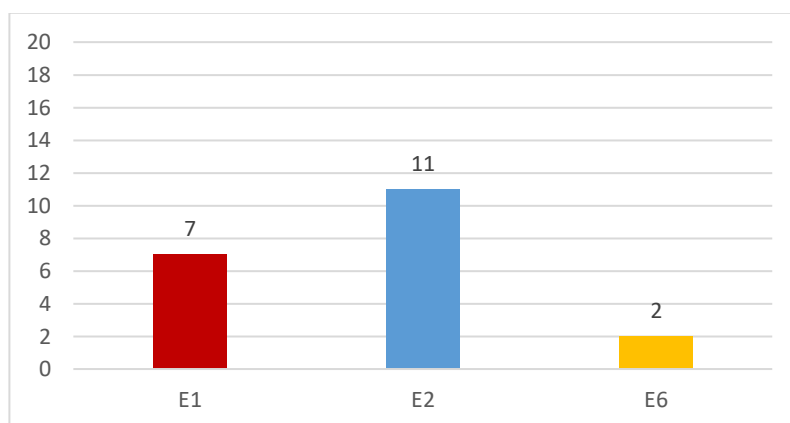


Figura 7. Número de alumnos y tipos de estrategias en el problema P2.2

La estrategia más utilizada fue la Estrategia 2 (E2) seguida por 11 alumnos. En la Figura 8 se muestra un ejemplo de esta categoría en la que el estudiante escribe con multiplicaciones los

puntos de cada tipo y no se expresa de forma escrita la suma total.

Tiros de 1 punto	Tiros de 2 puntos	Tiros de 3 puntos	TOTAL
14x1	2x3	1x5	25

Figura 8. Ejemplo de Estrategia 2 en el problema P2.2

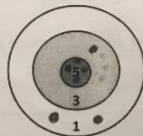
La segunda estrategia más utilizada fue E1, con 7 alumnos. En la Figura 9 se muestra como el alumno escribe los resultados de los tiros de cada tipo mediante multiplicaciones y finalmente escribe la suma total.

Tiros de 1 punto	Tiros de 2 puntos	Tiros de 3 puntos	TOTAL
$\begin{array}{r} 2 \\ \times 4 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ + 3 \\ + 2 \\ \hline 25 \end{array}$

Figura 9. Ejemplo de Estrategia 1 en el problema P2.2

Finalmente, la estrategia menos usada fue la Estrategia 6 (E6), la cual emplearon solo 2 estudiantes. En ella no interviene la multiplicación y solo se realizan las sumas parciales de todas las tiradas (Figura 10). En cierta forma es la expresión simbólica más básica a seguir en estos problemas.

PARTE INDIVIDUAL (1):



Tiros de 1 punto	Tiros de 3 puntos	Tiros de 5 puntos	TOTAL
2 dardos	1 dardo	4 dardos	25 puntos

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ + 1 \\ \hline 25 \end{array}$$

Figura 10. Ejemplo de Estrategia 6 en el problema P2.2

Es remarcable la mejoría que presentó el alumnado a la hora de resolver el problema 2.2 con respecto a las dificultades que manifestaron en la primera sesión. El alumnado pareció haber comprendido el proceso que debían seguir y cómo organizar la información del problema en tablas. Esta notable diferencia podría deberse a que para resolver el problema 2.2 los estudiantes contaron con una plantilla que pudo permitirles simplificar el proceso de resolución; sin embargo, también cabe la posibilidad de que para el alumnado los problemas del tipo 2 sean más sencillos de comprender, aspecto que no se pudo estudiar en esta experiencia.

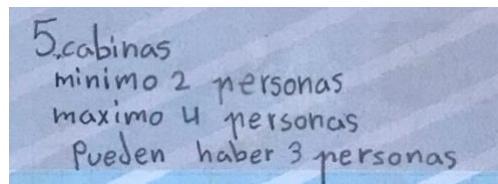
4.2 Experiencia 2: CEIP Las Mercedes

La experiencia 2 difirió de la experiencia 1 en que se realizó en 3º de Educación Primaria y en que hubo dos sesiones de instrucción y una de evaluación. Se analizarán las tres sesiones de forma pormenorizada.

Resultados del problema 1.1

El *problema 1.1* se trató en una primera sesión y tuvo una naturaleza formativa. Se centró en introducir al alumnado en el método de resolución de problemas, el uso de los heurísticos de modelización y organización de la información mediante tablas a través de problemas de multiplicación de respuesta abierta. Por ello, los resultados de esta sesión se centran en los observar los procesos de aprendizaje que surgieron en el aula.

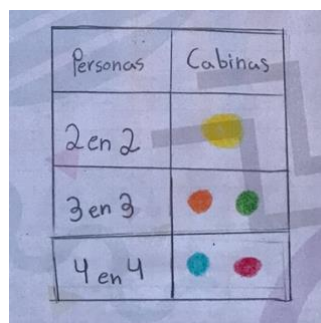
Tras la lectura grupal del enunciado del problema y la extracción de los datos (Figura 11), surgieron varias dudas a la hora de determinar el objetivo del problema, pues el alumnado interpretó que la información del enunciado era incompleta. Esto se debe a que no habían sido trabajados previamente los problemas de respuesta múltiple. Fue necesario ejemplificar varias situaciones, de las que se resolvieron dos, para que el alumnado comprendiese que el número de pasajeros de la noria podía ser variable.



5 cabinas
minimo 2 personas
maximo 4 personas
Pueden haber 3 personas

Figura 11. Ejemplo de datos extraídos por una pareja en el problema 1.1

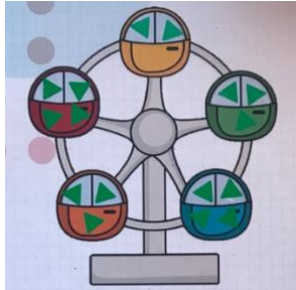
La elaboración de tablas causó muchas dificultades en un primer momento, pues el alumnado no sabía cómo elaborarlas de modo que organizase la información del enunciado. Ante ello, se elaboró un modelo en la pizarra (Figura 12). Esto llevo al docente a plantearse que en las siguientes sesiones debería aportar un modelo de tabla al alumnado, para facilitar el uso de este heurístico.



Personas	Cabinas
2 en 2	●
3 en 3	● ●
4 en 4	● ●

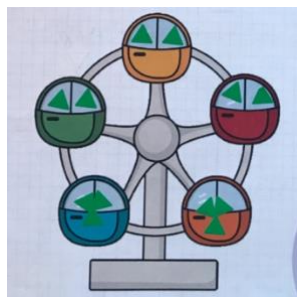
Figura 12. Ejemplo de tabla elaborada para la solución 1 en el problema 1.1

Para realizar la modelización se proporcionó a los alumnos el dibujo de una noria en la que debía poner pegatinas en los vagones que indicaban el número de personas que subían. En las Figuras 13 y 14 se muestran dos respuestas distintas a esta modelización y continuación su simbolización mediante operaciones.



$$2+3+4+3+4=16$$

Figura 13. Modelización y operaciones para resolver el problema P1.1



$$\begin{array}{c} (2 \times 3) + (3 \times 2) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 6 + 6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 12 \end{array}$$

Figura 14. Modelización y operaciones para resolver el problema P1.1

La modelización fue efectiva, pues no solo ayudó al alumnado a la resolución del problema, sino a comprender significativamente los puntos previamente abordados. En general, las dificultades giraron en torno a la comprensión del enunciado del problema, pues no hubo problemas reseñables en la simbolización de las operaciones.

Resultados del problema 1.2

La sesión dedicada al *problema 1.2* tuvo un carácter evaluativo, para conocer el nivel de adquisición de los objetivos planteados y desarrollados en la sesión anterior con el *problema 1.1*. En este caso, las parejas de alumnos resolvieron el problema y se les pidió que dieran dos soluciones al mismo. No hubo intervención del profesor en el proceso de resolución. Por ello se ha valorado el éxito y las estrategias de las dos soluciones de las 10 parejas de alumnos (Tabla 2).

Tabla 2: Resultados de la resolución del problema 1.2

PAREJA	RESOLUCIÓN 1		RESOLUCIÓN 2	
	ESTRATEGIA	RESPUESTA	ESTRATEGIA	RESPUESTA
P1	Estrategia 2	Correcta	Estrategia 4	Correcta
P2	Estrategia 2	Correcta	Estrategia 4	Incorrecta
P3	Estrategia 2	Correcta	Estrategia 2	Correcta
P4	Estrategia 4	Incorrecta	Estrategia 4	Correcta
P5	Estrategia 5	Correcta	Estrategia 5	Correcta
P6	Estrategia 4	Correcta	Estrategia 4	Correcta
P7	Estrategia 4	Correcta	Estrategia 4	Correcta
P8	Estrategia 2	Correcta	Estrategia 2	Correcta
P9	Estrategia 2	Correcta	Estrategia 4	Correcta
P10	Estrategia 4	Correcta	Estrategia 4	Correcta

En cuanto a la resolución 1, las estrategias más empleadas fueron la Estrategia 2, utilizada por 5 parejas de estudiantes y la Estrategia 4, seguida por 4 parejas. En lo referente a la Estrategia 2 (multiplicación o suma no registrada) en todos los casos el alumnado resuelve el problema sumando el número de galletas representado en la modelización, sin embargo, el doble y el triple de galletas no aparece registrado en la ficha (Figura 15). Asimismo, la Estrategia 4 consistente en resolver la situación mediante operaciones combinadas (Figura 16).

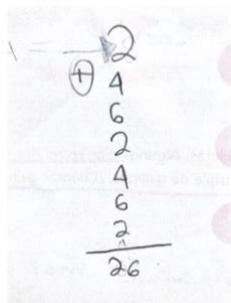


Figura 15. Estrategia 2 en el problema 1.2

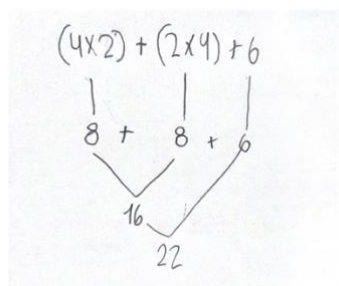


Figura 16. Estrategia 4 en el problema 1.2

Asimismo, la Estrategia 5 engloba un conjunto de procedimientos que matemáticamente son difíciles de clasificar. Esto ocurrió en la respuesta de una pareja. En este caso, el resultado fue hallado contando el número de galletas reflejado en la modelización y se escribió algoritmos de sumas que no se asociaban con la modelización (Figura 17).

En general todas las parejas tuvieron éxito en este problema, excepto la pareja 4 que tuvo un error de cálculo (Figura 18).

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 8 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ \times 8 \\ \hline 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \times 8 \\ \hline 28 \end{array}$$

Figura 17. Estrategia 5 en el problema 1.2

$$\begin{array}{l} (2 \times 2) + (4 \times 4) + 6 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 4 + 24 + 6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 28 + 6 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 34 \end{array}$$

Figura 18. Respuesta errónea en el problema 1.2

En la resolución 2, se produce un cambio importante en las estrategias utilizadas, pues la Estrategia 4 pasa a ser la estrategia más utilizada (7 parejas); 3 parejas dejan de emplear la Estrategia 2 para emplear operaciones combinadas. Únicamente las parejas 3 y 8 siguen resolviendo el problema mediante la Estrategia 2, sin embargo, en este caso el doble y el triple es calculado mentalmente, mientras que el total de galletas se halla combinando una multiplicación y una suma (Figura 19). La pareja 5 vuelve a emplear la Estrategia 5.

$$\begin{array}{l} 6 \times 4 = 24 \\ 24 + 6 = 30 \end{array}$$

Figura 19 Estrategia 2 en el problema 1.2

En esta segunda resolución, todas las parejas tienen éxito, excepto la pareja 2 quienes cometieron un error al representar la operación combinada después de realizar la modelización (Figura 20).

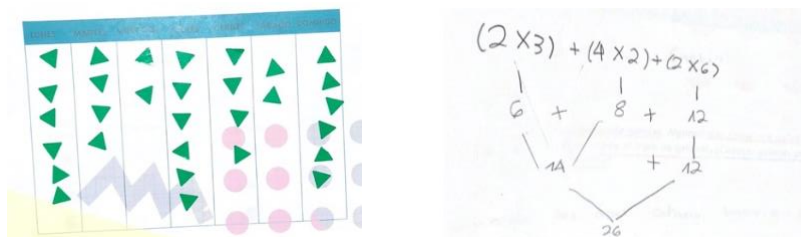


Figura 20. Respuesta errónea en el problema 1.2

En general, el nivel de acierto ha sido alto. Únicamente, la pareja 5 posee problemas a la hora de reflejar matemáticamente lo representado en las modelizaciones. Por otro lado, proporcionar una tabla guiada ha facilitado la organización de la información para el alumnado.

Resultados del problema 2.1

En la siguiente sesión se trabajó el *problema 2.1* con un carácter formativo, aplicando ciertas modificaciones surgidas de la información de las anteriores. Lo que se reflejó con una mejora de los resultados. A la hora de determinar el objetivo del problema, así como para extraer los datos no hubo dificultades en comparación con la primera sesión formativa, ya que el alumnado había interiorizado la dinámica de estas sesiones. Nuevamente se solicitó al alumnado dos posibles soluciones. En esta ocasión, la modelización consistió en una representación gráfica de los 22 alumnos sobre la que el alumnado debía rodear parejas y tríos. (Figura 21)



Figura 21. Modelización elaborada en la resolución 1 en el problema 2.1

Se proporcionó al alumnado una tabla vacía. Prácticamente todas las parejas rellenaron la tabla sin ayuda. Hubo casos concretos en que algunos alumnos pensaron que la casilla *número de personas* hacía alusión al número total de alumnos de la clase, por lo que se corrigió la casilla de *nº de personas* por *nº de miembros* (Figura 22). Para representar matemáticamente la situación problemática, el alumnado se apoyó en la tabla y no en la modelización, a diferencia de las otras sesiones. La tabla permitió al alumnado visualizar la relación entre los datos de forma clara, llegando a diferenciar entre multiplicando, multiplicador. El alumnado señaló que este problema podía ser resuelto mediante dos multiplicaciones y una suma. Por ello, todos los alumnos resolvieron el problema utilizando una operación combinada en ambas soluciones (Figura 23).

TABLA:

número de miembros personas	número de grupos
3	4
2	5

$$(3 \times 4) + (2 \times 5)$$
$$\begin{array}{r} 12 + 10 \\ \hline 22 \end{array}$$

Figura 22. Respuesta en la tabla en el problema 2.1

Figura 23. Respuesta con operaciones en el problema 2.1

En resumen, tras esta formación el alumnado experimentó mejoras con respecto a la primera sesión formativa.

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos en las dos experiencias de aula realizadas permiten reflexionar sobre el uso de los heurísticos de modelización y organización de la información mediante tablas. Esta intervención se realizó en dos clases en las que el alumnado conocía el algoritmo de la multiplicación y sabía operar. La introducción de problemas de multiplicación de respuesta múltiple supuso un reto para el alumnado, pues no estaban familiarizados con este tipo de problemas. A nivel general, el uso de estos heurísticos ayudó a que el alumnado resolvieran los problemas planteados. Por un lado, la modelización contribuyó a la comprensión del enunciado y a la interpretación de la solución obtenida pues su uso facilitó identificar una acción concreta con la operación matemática. Por otro lado, el empleo de tablas para organizar la información del enunciado contribuyó a que el alumnado relacionase los datos entre sí y así observase que podía obtener varias soluciones a cada problema propuesto. Ambas estrategias se complementaron, pues permitieron comprender el procedimiento matemático con el que resolver el problema, así como la interiorización de las fases que llevamos a cabo a la hora de resolver un problema.

En la experiencia 1 se observó la falta de formación previa del alumnado en lo referente a los heurísticos presentados. Sin embargo, hubo notables diferencias entre la primera sesión y la segunda, caracterizadas por una importante mejora en la resolución de los problemas tratados. Esta mejora podría haberse consolidado con una instrucción más prolongada. En este caso, la explicación de la profesora sobre el uso de las tablas para comprender el enunciado fue suficiente pues en su mayoría demostraron posteriormente, un buen uso de las mismas.

En el caso de la experiencia 2, la instrucción del docente favoreció la adquisición de los heurísticos. Este hecho se evidencia al observar un incremento en los niveles de abstracción del alumnado, que pasa de emplear solo sumas a escribir operaciones matemáticas combinadas de expresión más compleja. Para ello, el empleo de tablas fue un elemento clave, que permitió al alumnado diferenciar los factores de la multiplicación (multiplicando y multiplicar), así como la propiedad asociativa de la multiplicación, facilitando el proceso de codificación matemática.

En la intervención, se propusieron dos itinerarios de resolución: en uno se organizaba la información en tablas, luego se realizaba la modelización y finalmente se escribían las operaciones matemáticas; en el otro, se realizaba primero la modelización, seguida de las tablas y finalmente, las operaciones. En esta experiencia el segundo itinerario fue más adecuado, pues la modelización permitió al alumnado manipular la información del enunciado y comprenderla

para llegar a la tabla. La modelización fue el puente que permitió pasar del lenguaje verbal al lenguaje matemático, de forma natural y significativa.

Las breves experiencias realizadas no garantizan que los estudiantes hayan interiorizado la validez de trabajar problemas abiertos, el uso de tablas o de la modelización, pero ha mostrado resultados alentadores para seguir profundizando en ello como futuros docentes.

Reflexión final

Como estudiantes del grado de Maestros de Primaria, con *Mención en Innovación XXXX*, este trabajo ha servido a los autores para valorar la importancia de la investigación dentro del aula al realizar cualquier innovación. La docencia debe tener una naturaleza práctica-reflexiva. Es importante reflexionar sobre la propia práctica dentro del aula y realizar modificaciones en las intervenciones en función de las necesidades. Incluso aunque ello implique desviarse de los objetivos iniciales. En este sentido, señalar que el proceso de aprendizaje ha sido bidireccional. La innovación debe ir más allá del diseño y la implementación de sus prácticas, sino que debe adaptarse a las demandas de la sociedad. Dentro de este punto, el aprendizaje competencial es un proceso gradual y no hay una sola vía para hacer que el alumnado sea matemáticamente competente. Por otro lado, este trabajo ha permitido a sus autores profundizar en la resolución de problemas como procesos matemáticos básicos a nivel curricular y alcanzar una visión más amplia de las matemáticas, poniéndola en relación con las nuevas demandas de la sociedad.

Bibliografía

- Blanco, J. L. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma*, 21, 11–20.
- Blanco, J.L., y Cárdenas, J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, 32(1), 137-156.
- Callejo, M. L. (2000). Resolver problemas: ayudar a los alumnos a pensar por sí mismos. *Números*, 43-44, 179-184.
- BOC (2014). Decreto 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. Boletín Oficial de Canarias, núm. 156, de 13 de agosto de 2014, pp. 21911-22582.
- Echenique, I. (2006) *Matemáticas Resolución de problemas. Educación Primaria*. Pamplona: Gobierno de Navarra. Departamento de Educación.
- Guirles J. R. (2005). La resolución de problemas en primaria. *Sigma: Revista de matemáticas*, 27, 9-34.

- Linares, S. (2013). Innovación en la educación matemática: más allá de la tecnología. *MSEL*, 6(1) 8-18.
- NCTM (2000). Principles and Standars for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2016). Resultados PISA y resolución de problemas matemáticos en los currículos de educación primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 50-64.
- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Caracas: Fundación Polar
- Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169-194.
- Rizo Cabrera, C., Campistrous Pérez, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2, (2-3), pp. 31-45
- Santos, M. (1997). La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada, en G. Waldegg y D. Block (eds.), *Estudios en Didáctica*, Consejo Mexicano de Investigación Educativa, México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Orlando: Academic Press Inc.
- Sepúlveda, A., Medina, C., y Sepúlveda, D. I. (2009) La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, 21 (2), 79-115.

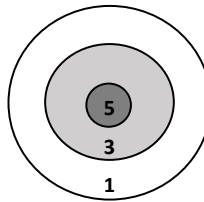
Anexo 1

Nombre:

Fecha:

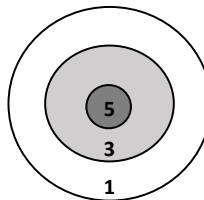
1. Pedro tuvo 25 puntos en una partida de dardos. En los dardos los tiros pueden ser de 1 punto, 3 puntos o 5 puntos. ¿Puedes dar un ejemplo de cuántos tiros metió Pedro de cada tipo?

PARTE INDIVIDUAL (1):



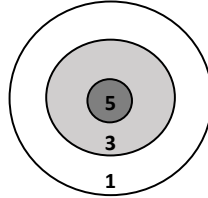
Tiros de 1 punto	Tiros de 3 puntos	Tiros de 5 puntos	TOTAL

PARTE EN PAREJAS (2/3):



Tiros de 1 punto	Tiros de 3 puntos	Tiros de 5 puntos	TOTAL

PARTE GRUPAL (4/5):



Tiros de 1 punto	Tiros de 3 puntos	Tiros de 5 puntos	TOTAL

Anexo 2

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NOMBRE:

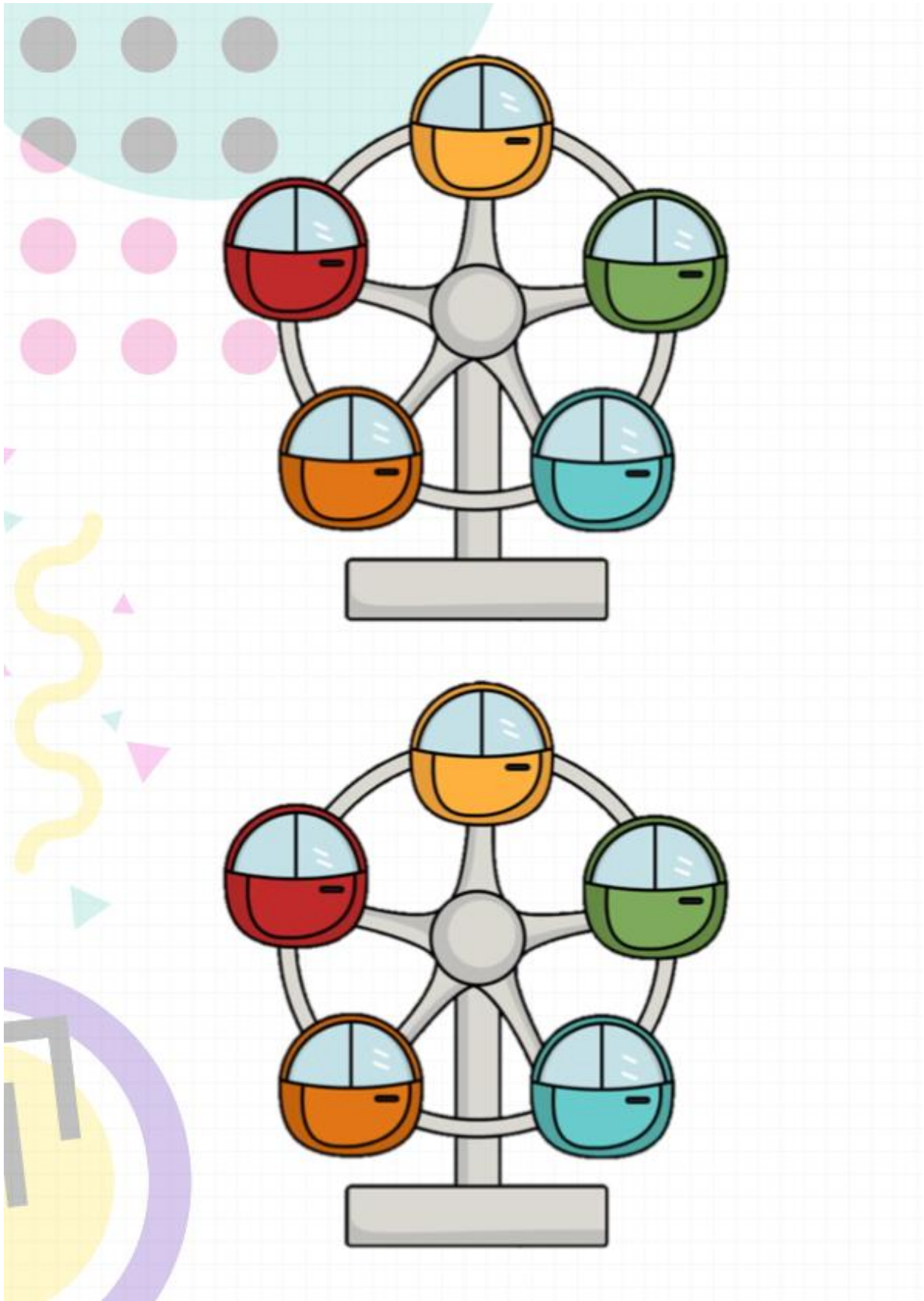
PROBLEMA:

En una noria hay 5 cabinas. En cada cabina caben 4 personas como máximo, pero para que pueda funcionar tienen que haber como mínimo 2 personas. ¿Cuántas personas podrían estar montadas en la noria?

DATOS:

OBJETIVO:

TABLA:





OPERACIONES:

SOLUCIÓN:

OPERACIONES:

SOLUCIÓN:

Anexo 3

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NOMBRE:

PROBLEMA:

Todos los días Octavio merienda galletas. Algunos días come dos galletas, otros días come el doble y otros días come el triple de galletas. ¿Cuántas galletas puede llegar a comer Octavio en una semana?

DATOS:

OBJETIVO:

TABLA:

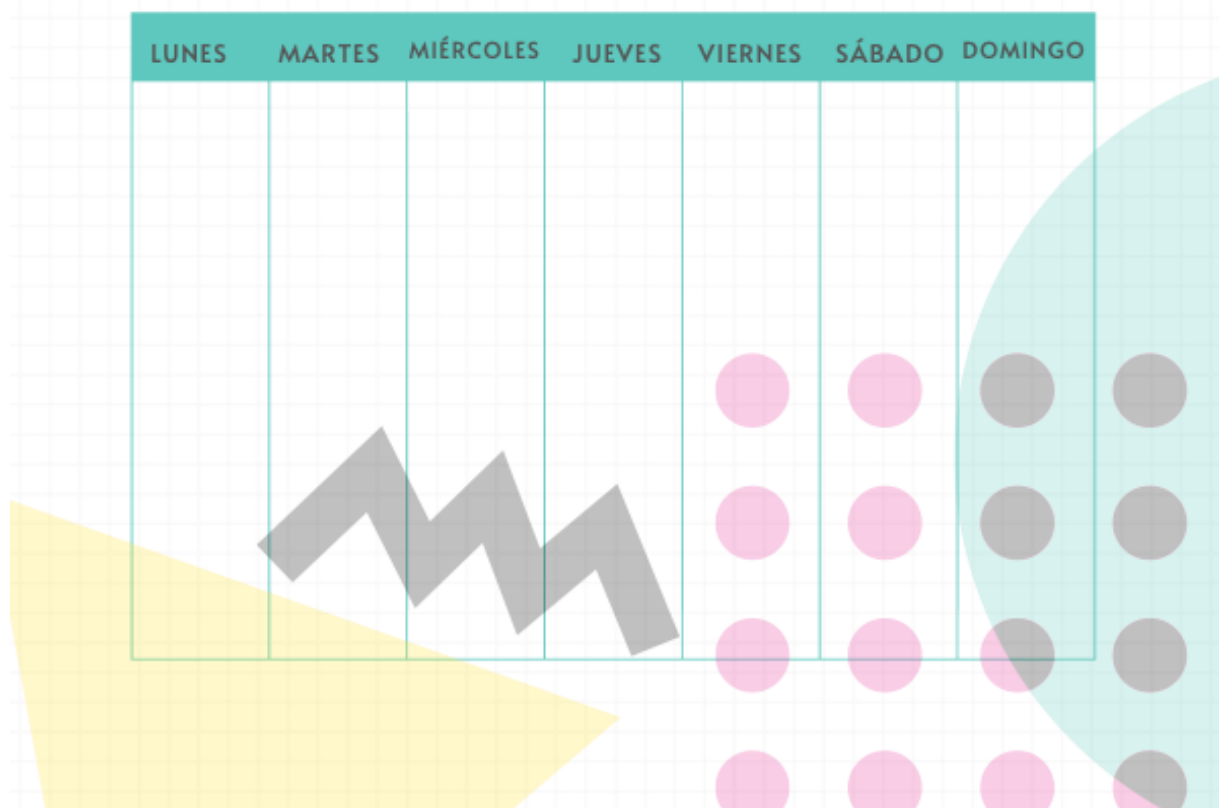
n° de galletas	n° de días
2	
4	
6	

TABLA:

n° de galletas	n° de días
2	
4	
6	

OPERACIONES:

SOLUCIÓN:



Anexo 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NOMBRE:

PROBLEMA:

En una clase hay 22 alumnos. La profesora quiere que los alumnos hagan un trabajo en parejas o en tríos. Averigua maneras diferentes de hacer los grupos en la clase.

DATOS:

OBJETIVO:



TABLA:

número de personas	número de grupos

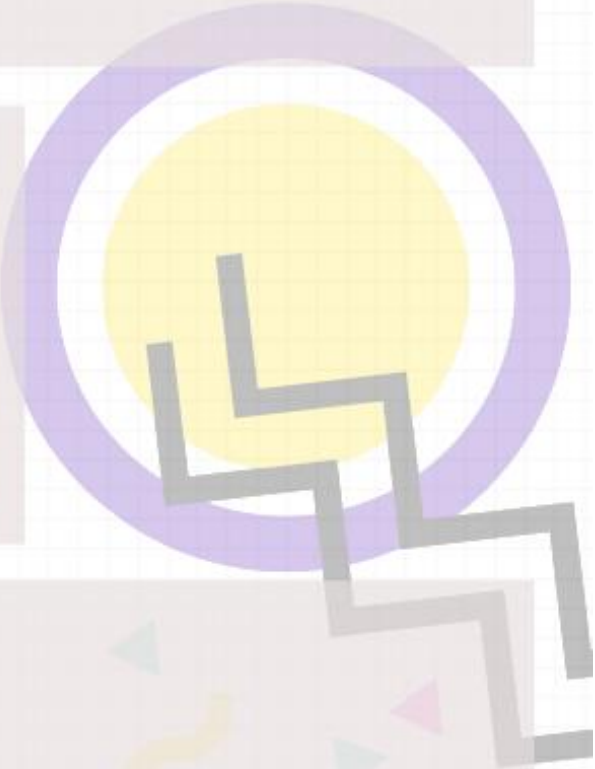
OPERACIONES:

SOLUCIÓN:



TABLA:

número de personas	número de grupos



OPERACIONES:

SOLUCIÓN: