

Airam Expósito Cruz

*Introducción al Cálculo de Variaciones:
El teorema de Noether*

An introduction to Calculus of Variations:
Noether's Theorem

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2020

DIRIGIDO POR
Joé Claudio Sabina de Lis

Joé Claudio Sabina de Lis
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por el apoyo brindado durante toda la carrera. A Isa por su gran apoyo personal y académico. A Karim y Marcos por su ayuda, sus apuntes, sus conversaciones sobre matemáticas y todas las tardes de estudio y por último a Sabina mi tutor, por su incansable labor durante la elaboración de este TFG su preocupación y su devoción ya que sin él nunca habría salido esta memoria.

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de esta memoria es la demostración del Teorema de Noether en el contexto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dicho resultado reviste gran interés para la física, en particular su versión general para medios continuos. El contexto del teorema es el Cálculo de Variaciones. Es por ello que una parte substancial de la memoria se dedica a introducir las herramientas básicas de esta materia. En la primera parte se presentan las ecuaciones de Euler–Lagrange y se discuten algunos problemas clásicos de la disciplina. La segunda parte desarrolla una breve introducción a la Mecánica Lagrangiana y el Principio de Hamilton. Se discuten los problemas con ligaduras y se presenta una demostración del Teorema de Noether. El trabajo concluye algunas aplicaciones al problema de los n cuerpos.

Abstract

This memoir is devoted to the proof of Noether's Theorem in the framework of ordinary differential equations. This result is of great interest for Physics, in special its more general version for continuum media. The context of the theorem is the Calculus of Variations. That is why a substantial part of the memoir is dedicated to introducing the basic tools of the field. In the first part the Euler–Lagrange equations are presented. In addition, some classical problems of the subject are discussed. The second part develops a brief introduction to Lagrangian Mechanics and the Hamilton Principle. Problems subject to constraints are discussed and a proof of Noether's Theorem is presented. Finally, some applications to the n -body problem are studied.

Keywords: *Extremals. Euler–Lagrange equations. Actions. Isoperimetric problems. Holonomic constraints. Noether's Theorem*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Las ecuaciones de Euler Lagrange	1
1.1. Espacios de funciones. Dominio del funcional	1
1.2. La primera variación	4
1.3. Lema fundamental	7
1.4. Ecuaciones de Euler–Lagrange	9
1.5. Condiciones naturales	13
1.6. Condición de Legendre	14
1.7. Selección de ejemplos	15
1.7.1. Ejemplo de extremales C^1 a trozos	15
1.7.2. Integrales primeras	17
1.7.3. Superficies mínimas de revolución	17
1.7.4. Problema de Dido	19
1.7.5. El problema de la Braquistócrona	20
2. Mecánica, ligaduras. Teorema de Noether	23
2.1. Mecánica Lagrangiana	23
2.1.1. Sistemas conservativos	26
2.1.2. Problema de n -cuerpos	27
2.2. Problemas isoperimétricos	30
2.2.1. El problema de Sturm–Liouville	32
2.3. Ligaduras holónomas	34
2.3.1. Variedades diferenciables de \mathbb{R}^N	34
2.3.2. Los multiplicadores de Lagrange	36
2.3.3. El péndulo esférico	39
2.4. Teorema de Noether	42

2.4.1. Aplicaciones al problema de n -cuerpos	45
2.4.2. Lagrangianos que dependen del tiempo	47
Bibliografía	51
Poster	53

Introducción

El Cálculo de Variaciones se remonta a los orígenes del Cálculo Infinitesimal. Rápidamente adquiere vida propia de la mano de L. Euler a mediados del siglo XVIII. Simultáneamente, J. L. Lagrange emplea los métodos del Cálculo de Variaciones para dar una formulación general de las ecuaciones de la dinámica (Sección 2.1 del Capítulo 2).

Esta memoria tiene sin embargo su origen en el trabajo [5] de la matemática alemana Amalie Emmy Noether (1882–1935). Siendo una joven promesa, es invitada a la Universidad de Gotinga por D. Hilbert y F. Klein en 1915. A finales de ese año, el primero obtiene una formulación Lagrangiana de las ecuaciones de la Relatividad General. Incorporada al grupo de Hilbert, Noether esclarece el rôle de las diversas “magnitudes conservadas” obtenidas por éste. Lo que es más importante, establece cómo los grupos de simetría del Lagrangiano dan lugar a diferentes “leyes de conservación”. Las circunstancias históricas en las que se desarrolló el trabajo de Noether se narran con más detalle en [6] y [4].

El ámbito general de los resultados de Noether es la Mecánica de Medios Continuos. Su complejidad excede las metas del presente trabajo. Una descripción para campos escalares del (así llamado) Teorema de Noether (Teorema 2.24 del Capítulo 2) se recoge en [4]. Una versión más elaborada se desarrolla en [2].

Por otra parte es el Cálculo de Variaciones el escenario natural del trabajo de Noether. Por eso el Capítulo 1 proporciona una introducción básica a la materia. El tema central gira en torno a la deducción de las ecuaciones de Euler–Lagrange. Constituyen éstas la condición necesaria a satisfacer por las soluciones de los “problemas variacionales”. Por completitud, dichas ecuaciones se formulan en el marco de las funciones C^1 a trozos. Esto resulta ventajoso para el estudio de algunos problemas de la física, por ejemplo los que surgen en óptica geométrica. Algunos contenidos adicionales que se tratan son la condición de Legendre, la convexidad del funcional y la variación segunda. Se estudian asimismo algunos problemas clásicos: el problema de Dido, el de las superficies mínimas y el de la Braquistócrona. Por razones de espacio no hemos tratado aquí de las llamadas “condiciones suficientes”.

El Capítulo 2 comienza con un breve resumen de la Mecánica Lagrangiana, con especial interés en el principio de la “acción estacionaria” de Hamilton. Sigue con el estudio de la clase de los problemas isoperimétricos. La metodología que se emplea en éstos –los multiplicadores de Lagrange– se extiende para tratar con los problemas condicionados por ligaduras *holónomas*. El interesante caso del péndulo esférico se discute como aplicación. Concluimos con el estudio de los funcionales cuyo Lagrangiano permanece invariante con respecto a ciertas simetrías. El tema final es el Teorema de Noether que aplicamos a la discusión de las integrales clásicas del problema de los n -cuerpos.

No se han perseguido objetivos de investigación en la elaboración de esta memoria. Para su redacción se han seguido las referencias [3], [1] y [4].

Las ecuaciones de Euler Lagrange

En este capítulo presentamos los conceptos básicos del Cálculo de Variaciones. El *problema fundamental* a tratar es:

$$\min_{x \in \mathcal{D}} J(x).$$

Se quiere decir con ello que buscamos una función vectorial $\tilde{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ que hace mínima la integral

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt,$$

entre todas las funciones x que pertenecen a una parte $\mathcal{D} \subset Y := \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^N)$. La región \mathcal{D} puede ser todo Y (no hay condiciones en los extremos de $[a, b]$) o bien $\mathcal{D} = \{x \in Y : x(a) = A, x(b) = B\}$. En este caso, típico de la mecánica, se busca minimizar J entre todas las trayectorias que van desde A hasta B .

Hay diversas variantes locales del problema fundamental, que se puede tratar además en un espacio más amplio que Y . De todos estos asuntos nos ocupamos a continuación.

1.1. Espacios de funciones. Dominio del funcional

Introducimos los espacios de funciones X con los que trabajaremos

Definición 1.1. Designaremos por $\mathcal{C}[a, b]$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en $[a, b]$. Además:

$$\mathcal{C}^1[a, b] = \{x \in \mathcal{C}[a, b] : x \text{ es derivable y } x' \in \mathcal{C}[a, b]\},$$

$$\mathcal{C}^{1,pw}[a, b] = \{x \in C[a, b] : \text{existe } \pi \text{ tal que } x' \in \mathcal{C}[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n\}$$

en donde $\pi = \{t_1, \dots, t_n\}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, es una partición de $[a, b]$.

Los correspondientes espacios de funciones con valores vectoriales se definen como $(\mathcal{C}[a, b])^N$, $(\mathcal{C}^1[a, b])^N$ y $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$, respectivamente.

El conjunto $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ se conoce como el espacio de las funciones de clase C^1 a trozos* en el intervalo $[a, b]$.

Nuestro objetivo consiste en estudiar los extremos (locales) de funciones (funcionales) cuyo marco de definición X excede los espacios \mathbb{R}^M .

Definición 1.2. Se llama funcional J en un espacio X a toda aplicación $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso \mathcal{D} es el dominio del funcional.

El dominio \mathcal{D} de J no coincide en general con todo el espacio X . Los funcionales que nos interesan tienen la forma:

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt.$$

La función $F = F(t, x, p)$, $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, que se supone continua, se denomina la función de Lagrange o Lagrangiano de J . En estas condiciones el funcional J está bien definido en todo el espacio $X = (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$. Sin embargo, los problemas de la física de donde surge el interés por la teoría, se preocupan de minimizar J no en todo el espacio X , sino en una parte \mathcal{D} del mismo. Un ejemplo clásico es:

$$\mathcal{D} = \{x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N : x(a) = A, \quad x(b) = B\}.$$

Al señalar que el dominio de J es éste en particular declaramos que estudiamos los extremos locales de J *solamente* entre las trayectorias que conectan el punto A con el punto B . En este trabajo se usa \mathcal{D} exclusivamente para fijar las *condiciones de contorno* es decir las restricciones que cumplen las funciones $x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ en los extremos $t = a$ y $t = b$.

Para hacer cálculo diferencial con los funcionales J es necesario dotar de una norma a los espacios que hemos introducido al principio. Se recuerda que una norma $\|\cdot\|$ en el espacio X es toda aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ que cumple: a) $\|x\| = 0$ sólo si $x = 0$, b) $\|tx\| = |t|\|x\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Los siguientes hechos son materia conocida. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se convierte en espacio métrico con la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$. Una sucesión $x_n \rightarrow x$ en X si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, mientras que x_n es de Cauchy si $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ cuando $m \geq n$ y $n \rightarrow \infty$. Si el espacio es completo se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Finalmente, las restantes nociones de convergencia y continuidad se interpretan en términos de la métrica asociada a la norma. Por ejemplo, $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo en \mathcal{D} si $|J(x) - J(x_0)| \rightarrow 0$ cuando $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ y esto sucede en todos los $x_0 \in \mathcal{D}$.

Proposición 1.3. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $C[a, b]$ es un espacio de Banach para la norma:

$$\|x\|_0 = \max |x(t)|.$$

* Piecewise en inglés.

b) $C^1[a, b]$ es un espacio de Banach para la norma:

$$\|x\|_1 = \max |x(t)| + \max |x'(t)|.$$

c) $\mathcal{C}^{1,pw}[a, b]$ es un espacio normado con la norma:

$$\|x\|_{1,pw} = \max |x(t)| + \max_{1 \leq i \leq n} \max_{[t_{i-1}, t_i]} |x'(t)|,$$

donde $\pi = \{t_1, \dots, t_n\}$ es la partición asociada a la definición.

Demostración. Las propiedades a) y b) son conocidas. Por ejemplo en el caso a) se sabe que la convergencia en la norma $\|\cdot\|_0$ es la convergencia uniforme en $[a, b]$. Por eso el espacio es completo. \square

Otro espacio natural es el de las funciones continuas a trozos en el intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{C}_{pw}[a, b] = \{x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } \pi \text{ tal que } x \in \mathcal{C}[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n\}$$

que está dotado de la norma $\|\cdot\|_{pw}$:

$$\|x\|_{pw} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{[t_{i-1}, t_i]} |x(t)|.$$

Las derivadas de funciones de $\mathcal{C}^{1,pw}$ pertenecen a \mathcal{C}_{pw} .

La convergencia en $\mathcal{C}^{1,pw}$ es más delicada, es complicado describirla y de hecho el espacio no es completo.

Proposición 1.4. En el espacio $(\mathcal{C}_{pw}[a, b])^N$ y la función x que es discontinua en los puntos de $\pi = \{t_1, \dots, t_n\}$, una sucesión $x_k(t)$ converge a x sí y sólo sí para cada $1 \leq i \leq n$ la restricción de x_k a $[t_{i-1}, t_i]$ converge uniformemente a x en $[t_{i-1}, t_i]$.

Demostración. Si $\|x_k - x\|_{pw} \rightarrow 0$ por propia definición

$$\|x_k - x\|_{0, I_i} \rightarrow 0$$

en cada intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$ (nótese que x_k podría presentar discontinuidades en I_i). Esto prueba el resultado.

Observación 1.5. En la proposición y a pesar de que x es continua en $[t_{i-1}, t_i]$, el número de discontinuidades de x_k podría crecer ilimitadamente con k .

Proposición 1.6. Sea $x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ una función para la que $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$, son los intervalos de continuidad de x' . Una sucesión de funciones $x_k \rightarrow x$ en el espacio $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ sí y sólo si:

1. $x_k \rightarrow x$ uniformemente en $[a, b]$.

2. $x'_k \rightarrow x'$ uniformemente en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ por separado.

Observación 1.7. $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b], \|\cdot\|_{1,pw})$ no es un espacio de Banach.

Proposición 1.8. Sea $J: (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional:

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt, \quad (1.1)$$

donde $F: [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces J es continuo en $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$.

Demostración. Sea $x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ una función fija para la que $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$ son los intervalos de continuidad de x' . Sea $\{x_k\} \subset (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ una sucesión de funciones tales que $x_k \rightarrow x$ en la norma de $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$. Se tiene entonces que:

1. La sucesión de funciones $x_k \rightarrow x$ uniformemente en $I = [a, b]$.
2. Para cada i la sucesión de funciones $x'_k \rightarrow x'$ uniformemente en cada I_i por separado, desde $i = 1$ hasta $i = n$.

Por consiguiente y de la continuidad de F se deduce que la sucesión de funciones $F(t, x_k(t), x'_k(t)) \rightarrow F(t, x(t), x'(t))$ uniformemente en cada intervalo I_i por separado.

Sabemos que la integral permuta con la convergencia uniforme. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \lim J(x_n) &= \sum_{i=1}^n \lim \int_{I_i} F(t, x_k(t), x'_k(t)) dt = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} F(t, x(t), x'(t)) dt \\ &= \int_I F(t, x(t), x'(t)) dt = J(x). \end{aligned}$$

□

1.2. La primera variación

Definición 1.9. Sean X un espacio normado, $J: \mathcal{D} \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional, $x \in \mathcal{D}$. Admitamos que para $h \in X$, $x + th \in \mathcal{D}$ para $|t| < \varepsilon$. Se dice que J es derivable Gâteaux en x y en la dirección h si existe $g'(0)$ siendo:

$$g(s) = J(x + sh),$$

y se representa:

$$dJ(x, h).$$

Si existe $dJ(x, h)$ o bien para todo $h \in X$ o bien para todo $h \in X_0$, donde $X_0 \subset X$ es un cierto subespacio, y además $dJ(x, h)$ es lineal en h escribimos:

$$d(x, h) = \delta J(x)h.$$

El operador lineal $\delta J(x)$ se denomina la primera variación de J en x .

Observación 1.10.

- a) Si existe la primera variación de J en x , la aplicación lineal $\delta J(x)$ no tiene por qué ser continua.
- b) Aunque las derivadas Gâteaux de orden m en x y en la dirección h se definen de manera inmediata como $g^{(m)}(0)$ no ocurre lo mismo con las variaciones de orden superior. Más adelante introduciremos la variación segunda solamente en el caso del funcional (1.1).

Consideramos ahora el funcional:

$$J(x) = \int_I F(t, x, x') dt \quad I = [a, b],$$

con dominio $\mathcal{D} \subset X$, $X := (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$. Denotamos:

$$X_0 = (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N = \{x \in X : x(a) = x(b) = 0\}.$$

Admitimos que $F, F_x, F_{x'}$ son funciones continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Por otro lado en lo que resta de capítulo admitiremos siempre que:

$$\mathcal{D} + X_0 \subset \mathcal{D},$$

o algo más débil como que $x + th \in \mathcal{D}$, $\forall x \in \mathcal{D}$, $h \in X_0$ y $|t| < \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. Para ser más precisos especificamos con más detalle los elementos del dominio \mathcal{D} .

Definición 1.11. Se define \mathcal{D} como el conjunto de funciones $x \in X$ tales que existen $m, n \in \{1, \dots, N\}$ y valores $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$x_k(a) = a_k, \quad k \in \{1, \dots, m\}, \quad x_l(b) = b_l, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Estas restricciones se llaman condiciones de tipo Dirichlet para las primeras $m \leq N$ componentes de x en $t = a$ y para las primeras $n \leq N$ componentes de x en $t = b$.

Observación 1.12. Nótese que la definición previa contempla diversas posibilidades. Una en la que $m = n = N$ y se fijan los valores de todas las componentes en $t = a, b$. Este es el problema de Dirichlet puro. En este caso $\mathcal{D} = \{x \in X : x(a) = A, x(b) = B\}$. En la situación complementaria, no se impone condición alguna en los extremos. En este caso se deja a las trayectorias un comportamiento “libre” en $t = a, b$. Estas son las denominadas ‘condiciones naturales’ de las que se trata más tarde.

Proposición 1.13. En las condiciones señaladas la primera variación $\delta J(x)$ en cualquier x y actuando en X_0 vale:

$$\delta J(x)h = \int_I \{F_x(t, x, x')h + F_{x'}(t, x, x')h'\} dt.$$

Demostración. Fijados x, h suponemos que tienen asociadas la misma partición π de intervalos $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Usamos el Lema 1.14 en el intervalo I_i aplicado con t fijo a $z_0 = (x, x')$ y $\zeta = s(h, h')$ son $|s|$ pequeño y tenemos:

$$F(t, z_0 + s\zeta) = F(t, z_0) + DF(t, z_0)\zeta + \left\langle \int_0^1 (DF(t, z_0 + s\tau\zeta) - DF(t, z_0)) d\tau, \zeta \right\rangle$$

donde $F(t, z_0 + s\zeta) = F(t, x + sh, x' + sh')$. Así:

$$\begin{aligned} F(t, z_0 + s\zeta) &= F(t, z_0) + sF_x(t, z_0)h + sF_{x'}(t, z_0)h' \\ &+ s \left\langle \int_0^1 (F_x(t, z_0 + s\tau\zeta) - F_x(t, z_0)) d\tau, h \right\rangle \\ &+ s \left\langle \int_0^1 (F_{x'}(t, z_0 + s\tau\zeta) - F_{x'}(t, z_0)) d\tau, h' \right\rangle, \end{aligned}$$

es decir:

$$F(t, z_0 + s\zeta) = F(t, z_0) + sF_x(t, z_0)h + sF_{x'}(t, z_0)h' + sa_1(s, t)h + sa_2(s, t)h',$$

donde como funciones de t en I_i , $a_1, a_2 \rightarrow 0$ uniformemente cuando $s \rightarrow 0$. Esto es consecuencia de que F_x y $F_{x'}$ son uniformemente continuas sobre compactos de la banda $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Llamando:

$$J_i(x) = \int_{I_i} F(t, x, x') dt,$$

se tiene:

$$\frac{1}{s}(J_i(x + sh) - J_i(x)) = \int_{I_i} (F_x(t, z_0)h + F_{x'}(t, z_0)h') dt + \int_{I_i} (a_1h + a_2h') dt.$$

Haciendo $s \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\frac{d}{ds}(J_i(x + sh))|_{s=0} = \int_{I_i} (F_x(t, z_0)h + F_{x'}(t, z_0)h') dt.$$

Como $J = \sum_{i=1}^N J_i$ hemos concluido. \square

Lema 1.14. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^m en un abierto U , $z_0 \in U$ y $\zeta \in \mathbb{R}^N$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(z_0 + \zeta) &= f(z_0) + Df(z_0)\zeta + \cdots + \frac{1}{m!}D^m f(z_0)\zeta^m \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} (D^m f(z_0 + \tau\zeta) - D^m f(z_0)) d\tau \cdot \zeta^m. \end{aligned}$$

Los restos son, en particular:

$$\int_0^1 (Df(z_0 + \tau\zeta) - Df(z_0)) d\tau \cdot \zeta \quad \text{para } m = 1,$$

y

$$\int_0^1 (1 - \tau)(D^2 f(z_0 + \tau\zeta) - D^2 f(z_0)) d\tau \cdot \zeta^2 \quad \text{para } m = 2,$$

donde “ \cdot ” significa acción lineal en el primer caso, cuadrática en el segundo.

Como en la Definición 1.9 sea $g(s) = J(x + sh)$. Usando el Lema 1.14 con $m = 2$ exactamente como en la proposición anterior se obtiene lo siguiente.

Proposición 1.15. *Supongamos que F admite derivadas parciales continuas hasta el orden dos con respecto a las variables x, x' (es decir con respecto a x_i, x'_j) en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ y que $x \in X, h \in X_0$. Entonces:*

$$g''(0) = \int_I (F_{xx}(t, x, x')hh + 2F_{xx'}(t, x, x')hh' + F_{x'x'}(t, x, x')h'h') dt,$$

donde las derivadas segundas actúan como formas bilineales.

Observación 1.16. En las condiciones de regularidad especificadas para F en la Proposición 1.13 se demuestra que J es diferenciable Frechet en $Y = (\mathcal{C}^1[a, b])^N$ mientras $\delta J(x)$ coincide con la diferencial $DJ(x)$ de J en x . Análogamente, en las condiciones de la Proposición 1.15 se comprueba que J admite una diferencial segunda $D^2 J$ en sentido de Frechet de suerte que $D^2 J(x)hh = g''(0)$. Como nos basta con la segunda derivada Gâteaux omitimos profundizar en la segunda variación.

1.3. Lema fundamental

El objetivo de esta sección es caracterizar cuándo se anula, para todo $h \in (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N$, la primera variación del funcional J ,

$$\delta J(x)h = \int_a^b F_x h + F_p h' dt.$$

Los lemas de esta sección se demuestran para $h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N$, el espacio de las funciones de clase \mathcal{C}^∞ con soporte compacto en (a, b) . Es el espacio de funciones test más pequeño y por tanto los enunciados resultantes son más generales.

Observación 1.17. La función:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp(-(1 - t^2)^{-1}) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1, \end{cases}$$

es C^∞ pero no es real analítica. Su desarrollo de Taylor en los puntos $t = \pm 1$ es idénticamente cero pero la función no lo es. Es un ejemplo de función $h \in \mathcal{C}_0^\infty(-a, a)$ para $a > 1$.

Lema 1.18. Si $f \in (\mathcal{C}_{pw}[a, b])^N$ y

$$\int_a^b f h \, dt = 0, \quad \forall h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N,$$

entonces $f(t) = 0$, para cada $t \in [a, b]$.

Demostración. Basta con que estudiemos el caso escalar $N = 1$. Supongamos que existe $t_0 \in [t_{i-1}, t_i] \subset (a, b)$ que cumple $f(t_0) \neq 0$.

Como f es continua en $I_i := [t_{i-1}, t_i]$, existe un intervalo abierto I tal que, $f(t) \neq 0$ para todo $t \in I \cap I_i$. Si $f > 0$ en $I \cap I_i$, tomamos $h \in \mathcal{C}_0^\infty(a, b)$ de la siguiente manera, $h(t) = \varphi(\frac{t-t_1}{r})$ con φ la función en la Observación 1.17, $t_1 \in I \cap I_i$ y $r > 0$ lo suficientemente pequeño, de manera que $\text{sop } \varphi = [t_1 - r, t_1 + r] \subset I \cap I_i$. Entonces $f h > 0$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f h \, dt > 0$, contradiciendo la hipótesis. \square

Lema 1.19. Si $f \in (\mathcal{C}_{pw}[a, b])^N$ cumple:

$$\int_a^b f h' \, dt = 0, \quad \forall h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N,$$

entonces f es constante. En particular, el resultado es cierto si las funciones test $h \in (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N$.

Demostración. Probamos solamente el caso $N = 1$. Para $h \in \mathcal{C}_0^\infty(a, b)$ resulta que:

$$h_1(t) = \int_a^t (h - c) \, ds \in \mathcal{C}_0^\infty(a, b),$$

donde $c = \bar{h} = \frac{1}{b-a} \int_a^b h$. Notamos que:

$$\int_a^b f h_1' \, dt = \int_a^b f (h - c) \, dt = \int_a^b (f - \bar{f}) h \, dt = 0,$$

para todo h . Luego $f = \bar{f}$. \square

El siguiente lema nos asegura la validez de la formula de integración por partes para funciones de $\mathcal{C}^{1,pw}$. Su demostración es inmediata.

Lema 1.20. Para f y h en $(\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$, la fórmula de integración por partes es válida. Es decir,

$$\int_a^b f h' \, dt = - \int_a^b f' h \, dt + f h \Big|_a^b,$$

en donde se entiende que los productos implicados son productos escalares.

Lema 1.21 (Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones). Si $f, g \in \mathcal{C}_{pw}[a, b]$ y

$$\int_a^b (fh + gh') dt = 0, \quad \forall h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N,$$

entonces $g \in \mathcal{C}^{1,pw}[a, b]$ y $g' = f$ a trozos en $[a, b]$, es decir, $g'(t) = f(t)$ para $t \in (t_{i-1}, t_i)$ si $f \in \mathcal{C}(t_{i-1}, t_i)$. En particular el resultado es cierto si las funciones test $h \in (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N$.

Demostración. Definimos $F(t) = \int_a^t f(s) ds$. La función $F \in \mathcal{C}[a, b]$, y para $t \in (t_{i-1}, t_i)$ tenemos $F'(t) = f(t)$. Usando la integración por partes,

$$\int_a^b fh dt = \int_a^b F'h dt = - \int_a^b Fh' dt,$$

para cada $h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N$. Por tanto,

$$\int_a^b (fh + gh') dt = \int_a^b (-F + g)h' dt = 0 \quad \forall h \in (\mathcal{C}_0^\infty(a, b))^N.$$

Entonces $(-F + g) = c$, es decir:

$$g(t) = c + \int_a^t f(s) ds,$$

por tanto $g'(t) = f(t)$ en los puntos de continuidad de f . □

Observación 1.22. Hemos partido de que g es continua y hemos concluido que es diferenciable. Por tanto, este lema es un resultado de regularidad, pues g resulta ser más regular de lo que habíamos supuesto en principio.

1.4. Ecuaciones de Euler–Lagrange

Sea $J: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional

$$J(x) = \int_I F(t, x, x') dt \quad I = [a, b],$$

cuyo dominio $\mathcal{D} \subset X = (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$. Admitiremos, como en la Sección 1.2 que

$$\mathcal{D} + X_0 \subset \mathcal{D},$$

donde se recuerda que $X_0 = (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N = \{x \in X : x(a) = x(b) = 0\}$. Como se indica en la Definición 1.11, bajo esta hipótesis se contemplan en \mathcal{D} condiciones de tipo Dirichlet en la totalidad o en parte de las componentes.

Nuestro objetivo es encontrar condiciones necesarias que deben satisfacer los extremos locales $x \in X$ de J . Admitiremos que $F, F_x, F_{x'}$ son funciones continuas en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Bajo estas hipótesis la condición necesaria de extremo da lugar a la ecuación (o ecuaciones si se piensa componente a componente) de Euler–Lagrange.

Teorema 1.23. Sean J un funcional en las condiciones precedentes y $x \in \mathcal{D}$ un extremo local de J . Entonces:

- a) $F_p(t, x, x') \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$.
 b) Se satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) = F_x(t, x, x'). \quad (1.2)$$

Demostración. Para cualquier $h = (h_1, \dots, h_N) \in X_0 = \mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b]^N$, se define $g(t) = J(x+th)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Por hipótesis que $t = 0$ es un extremo local de g , luego $g'(0) = 0$. Entonces,

$$\delta J(x)h = \int_a^b F_x(\cdot, x, x')h + F_p(\cdot, x, x')h' dt = 0.$$

Por tanto,

$$\delta J(x)h = \sum_{j=1}^N \int_a^b F_{x_j}(\cdot, x, x')h_j + F_{p_j}(\cdot, x, x')h'_j dt = 0.$$

Basta aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones y tenemos que $F_p(\cdot, x, x') \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ mientras

$$\frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) = F_x(t, x, x')$$

se cumple a trozos en $[a, b]$. □

Definición 1.24. Se dice que $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ es una extremal del problema variacional:

$$\min_{x \in \mathcal{D}, \|x - \tilde{x}\|_X \leq \varepsilon} J(x) \quad (1.3)$$

si $\delta J(\tilde{x}) = 0$, es decir si \tilde{x} es solución de la ecuación de Euler–Lagrange y además cumple las condiciones de contorno definidas en \mathcal{D} . Por abuso de notación llamaremos extremal a cualquier solución de dichas ecuaciones.

Ejemplo 1.25. Las extremales del problema (1.3) en el dominio $\mathcal{D} = \{x(a) = A, x(b) = B\}$ son las soluciones del problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) = F_x(t, x, x') & t \in [a, b] \\ x(a) = A, x(b) = B. \end{cases} \quad (1.4)$$

Observación 1.26. Como $x(t)$ y F toman valores en \mathbb{R}^N la ecuación (1.2) constituye un sistema de N ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}(F_{p_k}(t, x_1, \dots, x_N, x'_1, \dots, x'_N)) = F_{x_k}(t, x_1, \dots, x_N, x'_1, \dots, x'_N),$$

$1 \leq k \leq N$, que en conjunto se conoce como las ecuaciones de Euler–Lagrange. Especialmente en mecánica Lagrangiana.

Observación 1.27. Los problemas de contorno de tipo (1.4) son de tipo no lineal y extraordinariamente difíciles de estudiar. Nos ocupamos más tarde de algunos ejemplos.

La ecuación de Euler–Lagrange es una ecuación de segundo orden en x . Sin embargo x es en principio de clase C^1 , como mucho. Saber cuándo es x dos veces derivable es una delicada cuestión que aclaramos a continuación. Naturalmente habrán de darse condiciones razonables.

Definición 1.28. Supongamos que el Lagrangiano $F(t, y, p)$ es dos veces derivable con respecto a p . Se dice que F es elíptico en un punto $(t_0, y_0, p_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ si

$$F_{pp}(t_0, y_0, p_0) > 0,$$

como forma cuadrática.

Teorema 1.29. Supongamos que el Lagrangiano $F = F(t, y, p)$ es de clase C^2 en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Sea $x \in X$ una solución de la ecuación de Euler–Lagrange (1.2) que es C^1 en los intervalos $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$. Si $t_0 \in (t_{i-1}, t_i)$ y

$$\det F_{pp}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) \neq 0,$$

entonces $x = x(t)$ es de clase C^2 en un entorno de $t = t_0$.

Demostración. De las ecuaciones de Euler–Lagrange sabemos que la función $f(t) = F_p(t, x(t), x'(t))$ es \mathcal{C}^1 en el intervalo (t_{i-1}, t_i) . Definimos $G(t, p) = F_p(t, x(t), p) - f(t)$, que es una función \mathcal{C}^1 en $(t_{i-1}, t_i) \times \mathbb{R}^N$. Además: i) $G(t_0, x'(t_0)) = 0$, ii) $\det G_p(t_0, x'(t_0)) \neq 0$. El teorema de la función implícita garantiza la existencia de una única solución $p = p_0(t)$ de la ecuación:

$$G(t, p) = 0,$$

para t próximo a t_0 . Además, $p_0(t)$ es C^1 . Como $p = x'(t)$ es otra solución $x'(t) = p_0(t)$ y hemos terminado. \square

Las extremales del funcional J en tanto que soluciones de las ecuaciones de Euler–Lagrange en el dominio \mathcal{D} son sólo candidatas a soluciones del problema variacional (1.3). Cuando F tiene propiedades de convexidad se puede decir algo más.

Teorema 1.30. Supongamos que F es convexa en las variables $(x, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Entonces toda extremal $x \in \mathcal{D}$ del funcional J define un mínimo absoluto.

Demostración. Sea $\tilde{x} \in (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N$, entonces $h = \tilde{x} - x \in (\mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b])^N$. De la convexidad de F resulta:

$$F(t, \tilde{x}, \tilde{x}') \geq F(t, x, x') + F(t, x, x')h + F(t, x, x')h',$$

de donde $J(\tilde{x}) \geq J(x) + \delta J(x)h = J(x)$. \square

Una función $F(t, x, p)$ de clase C^1 en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ se denomina un “Lagrangiano nulo”^{*} sobre el dominio $\mathcal{D} = \{x \in X : x(a) = A, x(b) = B\}$ si la primera variación $\delta J(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{D}$.

Teorema 1.31. Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo de clase C^1 tal que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Entonces $F(t, x, p) = \langle f(x), p \rangle$ es un Lagrangiano nulo sobre $\mathcal{D} = \{x \in X : x(a) = A, x(b) = B\}$. En particular, el funcional

$$J(x) = \int_a^b \langle f(x), x' \rangle,$$

es constante en \mathcal{D} .

Demostración. Probamos que $\delta J(x) = 0$ y en efecto $\forall h \in X_0$:

$$\begin{aligned} \delta J(x)h &= \int_a^b \{ \langle Df(x)h, x' \rangle + \langle f(x), h' \rangle \} dt \\ &= \int_a^b \{ \langle h, Df(x)^* x' \rangle - \langle Df(x)x', h \rangle \} dt = \int_a^b \langle (Df(x)^* - Df(x))x', h \rangle dt = 0, \end{aligned}$$

pues por hipótesis $Df(x)^* = Df(x)$.

Observación 1.32. No es difícil comprobar que si $F_0(x, x')$ es un Lagrangiano nulo y $F(t, x, x')$ es otro arbitrario entonces $F + F_0$ y F exhiben las mismas extremales, es decir las ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes poseen las mismas soluciones.

Tratamos ahora de funcionales que son invariantes frente a reparametrizaciones de las funciones $x \in X$.

Definición 1.33. Se dice que el Lagrangiano $F(t, y, p)$ es homogéneo de grado uno respecto de p si:

$$F(t, y, \lambda p) = \lambda F(t, y, p),$$

para todo $\lambda > 0$.

Un cambio de variable $t = \varphi(\tau)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como toda función $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ de clase C^1 tal que $\varphi'(\tau) > 0$ y $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Una reparametrización (un cambio de parámetro) de la función $x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ se define como la función $\tilde{x} \in (\mathcal{C}^{1,pw}[\alpha, \beta])^N$ dada por $\tilde{x} = x \circ \varphi$.

^{*} Null Lagrangian en inglés.

Teorema 1.34. *Supongamos que $F = F(y, p)$ es homogéneo de grado uno en p . Entonces el funcional*

$$J(x) = \int_I F(x, x'), \quad I = [a, b],$$

es invariante frente a reparametrizaciones. Es decir,

$$J(x) = \tilde{J}(\tilde{x})$$

para toda $x \in (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$ donde

$$\tilde{J}(\tilde{x}) = \int_{I'} F(\tilde{x}, \tilde{x}'), \quad I' = [\alpha, \beta].$$

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} \int_I F(x, x') dt &= \int_{I'} F(x \circ \varphi, x' \circ \varphi) \varphi' d\tau \\ &= \int_{I'} F(x \circ \varphi, (x' \circ \varphi) \varphi') d\tau = \int_{I'} F(\tilde{x}, \tilde{x}') d\tau. \end{aligned}$$

Observación 1.35. El funcional longitud de arco $J(x) = \int_a^b |x'(t)| dt$ es invariante frente a parametrizaciones.

1.5. Condiciones naturales

Teorema 1.36. *Sea x una extremal del problema*

$$\min_{x \in \mathcal{D}, \|x - \tilde{x}\|_X \leq \varepsilon} J(x) \quad (1.5)$$

en donde $\mathcal{D} = X = (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$. Entonces x satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange junto con las condiciones:

$$\begin{cases} F_p(a, x(a), x'(a)) = 0 \\ F_p(b, x(b), x'(b)) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Definición 1.37. *Se conoce a las relaciones (1.6) como condiciones de contorno naturales.*

Ejemplo 1.38. Las extremales del problema (1.5) en el dominio $\mathcal{D} = X$ son las soluciones del problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (F_p(t, x, x')) = F_x(t, x, x') & t \in [a, b] \\ F_p(a, x(a), x'(a)) = F_p(b, x(b), x'(b)) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Se resalta que, aunque no hay condiciones prescritas en \mathcal{D} las extremales del problema sí deben satisfacer condiciones en los extremos. Éstas vienen impuestas por el propio problema variacional.

Razonando como en el Teorema 1.36 se prueba que las extremales del problema (1.7) en el dominio:

$$\mathcal{D} = \{x \in X : x(a) = A\}$$

satisfacen el problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) = F_x(t, x, x') & t \in [a, b] \\ x(a) = A, \quad F_p(b, x(b), x'(b)) = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Como puede verse, se trata de una combinación mixta entre los problemas (1.4) y (1.7).

1.6. Condición de Legendre

Es un hecho conocido que si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ posee un mínimo local en t_0 y es C^2 entonces $f''(t_0) \geq 0$. El siguiente es un resultado de Legendre que se remonta al siglo XVIII.

Teorema 1.39. Sea $x_0(t) \in (C^1(I))^N$, $I = [a, b]$, un mínimo local del funcional $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(x) = \int_I F(t, x, x') dt,$$

cuya Lagrangiana F es C^2 en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Entonces:

$$F_{pp}(t, x_0(t), x'_0(t)) \geq 0$$

en el sentido de las formas cuadráticas para todo $t \in I$.

Demostración. En lo que sigue abreviamos:

$$F_{xx}(t) = F_{xx}(t, x_0(t), x'_0(t)), \quad F_{xp}(t) = F_{xp}(t, x_0(t), x'_0(t)),$$

$$F_{pp}(t) = F_{pp}(t, x_0(t), x'_0(t)),$$

aplicaciones bilineales que llamaremos $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ respectivamente.

Si fuese $R(t_0)[v, v] < 0$ para t_0 interior a I y algún $v \in \mathbb{R}^N$ razonamos como sigue. Tomamos $g(t)$ real y C^1 , con soporte en $I_1(0) := [-1, 1]$ y derivada $g'(0) \neq 0$. La función:

$$\varphi(t) = g\left(\frac{t - t_0}{\varepsilon}\right) \quad \varepsilon > 0,$$

tiene soporte en $I_\varepsilon(t_0) := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Al formar $J(s) = J(x_0 + s\varphi)$ se tiene $J''(0) \geq 0$. Ahora:

$$\begin{aligned}
J''(0) &= \int_{I_\varepsilon(t_0)} P(t)[v, v]\varphi^2 + 2Q(t)[v, v]\varphi\varphi' + R(t)[v, v](\varphi')^2 \\
&= \int_{I_\varepsilon(t_0)} P(t)[v, v]\varphi^2 + 2 \int_{I_\varepsilon(t_0)} Q(t)[v, v]\varphi\varphi' + \int_{I_\varepsilon(t_0)} R(t_0)[v, v](\varphi')^2 \\
&= A + B + C.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$A = \varepsilon \int_{I_1(0)} P(t_0 + \varepsilon\tau)[v, v]g(\tau)^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Asimismo,

$$B = \int_{I_1(0)} Q(t_0 + \varepsilon\tau)[v, v]g(\tau)g'(\tau)d\tau \rightarrow Q(t_0)[v, v] \int_{I_1(0)} g(\tau)g'(\tau)d\tau = 0,$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente,

$$C = \frac{1}{\varepsilon} \int_{I_1(0)} R(t_0 + \varepsilon\tau)[v, v]g'(\tau)^2 d\tau \rightarrow -\infty \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Este último comportamiento no es coherente con que $J''(0) \geq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego necesariamente ha de ser:

$$R(t_0)[v, v] = F_{pp}(t, x_0(t), x'_0(t))[v, v] \geq 0.$$

□

1.7. Selección de ejemplos

1.7.1. Ejemplo de extremos C^1 a trozos

Estudiamos los extremos locales del funcional:

$$J(x) = \int_0^1 (x'^2 - 1)^2,$$

en el dominio $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{1,pw}[0, 1]$ así como sus extremos absolutos. Todo extremo local x de J (más generalmente sus puntos críticos) debe satisfacer el problema de contorno:

$$\begin{cases} F_p(x') = 0 & x \in [0, 1] \\ F_p(x'(0)) = F_p(x'(1)) = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

donde $F_p = 4p(p^2 - 1)$. Las condiciones de contorno se leen $\{x'(0), x'(1)\} \subset \{-1, 0, 1\}$, tenemos por tanto un total de 9 condiciones de tipo Neumann que van desde $x'(0) = x'(1) = -1$ hasta $x'(0) = x'(1) = 1$.

De la forma del funcional se deduce que todas las poligonales x tales que $x'(t) \in \{-1, 1\}$ son soluciones de (1.9) y además mínimos absolutos de éste. El resto de las soluciones x de (1.9) definen puntos críticos de J tales que $x' = 0$ en algún intervalo $I_0 \subset I$. Ahora la derivada segunda de J en x y en la dirección $h \in X_0$ es:

$$g''(0) = 12 \int_0^1 \left(x'^2 - \frac{1}{3} \right) h^2 dt.$$

Resulta entonces que $g''(0) < 0$ si $\text{sop } h \subset I_0$. Si fuese $x'(t) = 0$ en $[0, 1]$ estamos en presencia de un máximo local, si por contra $x'(t) \in \{-1, 1\}$ en algún subintervalo I_1 entonces $g''(0) > 0$ en direcciones h tales que $\text{sop } h \subset I_1$ y x es un punto crítico de tipo silla.

Cambiamos ahora el dominio y pasamos a estudiar los extremos locales de J en el dominio:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{C}^{1,pw}[0, 1] : x(0) = 0\}.$$

Los puntos críticos de J en \mathcal{D} (en particular los extremos locales) han de satisfacer el problema de contorno:

$$\begin{cases} F_p(x') = 0 & x \in [0, 1] \\ x(0) = F_p(x'(1)) = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

Las soluciones de (1.10) formadas por poligonales x que empiezan en $(0, 0)$ y cumplen $x'(t) \in \{-1, 1\}$ definen claramente mínimos absolutos. Los otros puntos críticos x se anulan en algún intervalo $I_0 \subset [0, 1]$. Entre éstos está $x(t) = 0$ que define un máximo local. El resto de los puntos críticos x cumplen $x'(t) \in \{-1, 1\}$ en algún subintervalo I_1 y, por lo discutido más arriba, definen puntos de tipo silla.

Finalmente, analizamos brevemente los extremos de J cuando el dominio es $\mathcal{D} = X_0$ y las curvas de $\mathcal{C}^{1,pw}[0, 1]$ están obligados a anularse en los extremos $t = 0, 1$.

Por inspección directa de J los mínimos absolutos han de cumplir $x'(t) \in \{-1, 1\}$. Definen soluciones del problema de Diriclet:

$$\begin{cases} F_p(x') = 0 & x \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

Este problema contiene además otra colección infinita de puntos críticos x de J ; aquellos tales que $x'(t) = 0$ en algún subintervalo I_0 . Entre ellos está $x(t) = 0$ que define un máximo local. El resto, al ser $x'(t) \in \{-1, 1\}$ en algún subintervalo, está constituido por puntos de tipo silla.

Sin embargo, y a diferencia de los casos anteriores, J exhibe más puntos críticos. Están englobados en las soluciones de:

$$\begin{cases} F_p(x') = c & x \in [0, 1] \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

donde c es una constante que cumple $0 < |c| \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Omitimos su estudio detallado por razones de espacio.

1.7.2. Integrales primeras

Estudiamos las soluciones $x \in \mathcal{C}^{1,pw}[a, b] \cap C^2(a, b)$ de funcionales:

$$J(x) = \int_a^b F(x, x'),$$

es decir con Lagrangianos sin dependencia en t . Admitiendo que F es C^2 en $[a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, entonces para todas las soluciones $x(t)$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange se cumple que:

$$F(x, x') - \langle x', F_p(x, x') \rangle = c_1,$$

donde c_1 es una constante. Se dice entonces que el primer miembro es una “integral primera” de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En la Sección 2.4.2 del Capítulo 2 volveremos a encontrarnos con esta clase de resultado desde una óptima más general. Comprobamos la afirmación:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(F(x, x') - F_p(x, x')x') \\ &= F_y(x, x')x' + F_p(x, x')x'' - F_p(x, x')x'' - \left(\frac{d}{dt}(F_p(x, x')) \right) x' \\ &= \left(F_y(x, x') - \frac{d}{dt}(F_p) \right) x' = 0, \end{aligned}$$

cuando x es cualquier extremal. Por simplicidad hemos escrito $F_p(x, x')x' = \langle F_p, x' \rangle$.

1.7.3. Superficies mínimas de revolución

Cuando se rota la gráfica de una función $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ alrededor del eje t obtenemos una superficie de revolución. Es conocido que su área viene dada por:

$$J(x) = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + x'^2} dt \quad x \in \mathcal{C}^{1,pw}[a, b].$$

El problema a resolver es el siguiente: “dados dos puntos (a, A) , (b, B) determinar cuál es la curva que los conecta y genera la superficie de revolución que tiene menor área”. Se trata, por consiguiente, del siguiente problema variacional,

$$\min_{x \in \mathcal{D}} J(x), \quad \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{C}^{1,pw}[a, b] : x > 0, x(a) = A, x(b) = B\}.$$

Efectuando un cambio de variable adecuado en t y suprimiendo factores multiplicativos irrelevantes el problema se transforma en

$$\min_{x \in \mathcal{D}} \int_0^b x \sqrt{1+x'^2} dt, \quad \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{C}^{1,pw}[a,b] : x > 0, x(0) = 1, x(b) = B\},$$

donde $b, B > 0$. Podemos garantizar la regularidad extra de las extremales x pues,

$$F_{pp}(x, x') = \frac{x}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Como el funcional J es de los estudiados en la sección anterior se cumple que:

$$F(x, x') - x'F(x, x') = c_1,$$

donde $F(x, x') = x\sqrt{1+x'^2}$ y c_1 una constante. Por tanto,

$$x = c\sqrt{1+x'^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{c}\right)^2 - x'^2 = 1.$$

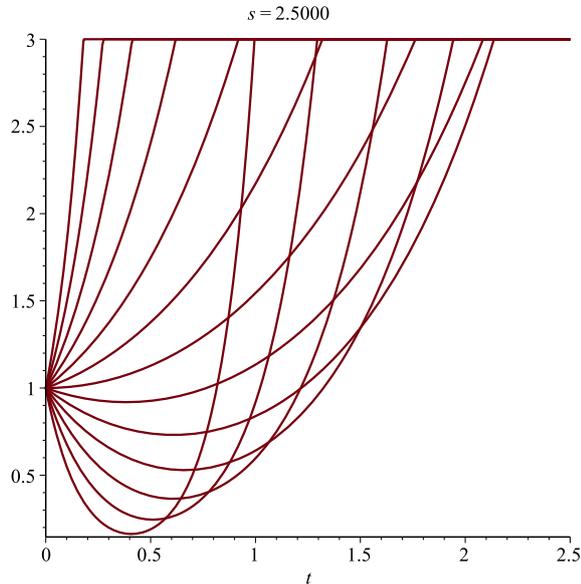
Haciendo $x = c_1 \cosh s$, $x' = \sinh s$ resulta que $s = \frac{t}{c_1} + c$. La condición $x(0) = 1$ equivale a $c_1 \cosh c = 1$. Obtenemos así la familia de soluciones (“catenarias”):

$$x = \frac{1}{\cosh c} \cosh((\cosh c)t + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ajustar la condición de contorno $x(b) = B$ requiere resolver en c la ecuación:

$$\frac{1}{\cosh c} \cosh((\cosh c)b + c) = B,$$

lo que no siempre es posible (ver [1], [2]). Por ejemplo si a B fijo b es suficientemente grande. Es este un ejemplo (no inusual) de problema de contorno que carece de soluciones. En otros casos, el problema tiene más de una solución. En la figura c varía de -2.5 hasta 2.5 y se observa que la familia deja una zona del plano sin barrer. Asimismo, curvas distintas de la familia inciden en un punto distinto de $(0, 1)$.



1.7.4. Problema de Dido

El problema de Dido*, también conocido como el problema isoperimétrico, consiste en lo siguiente: entre todas las curvas cerradas del plano de longitud L encontrar aquella que delimita un área máxima. A mediados del siglo XIX, J. Steiner –matemático alemán– observó que la curva solución ha de ser convexa. Asimismo, que si los extremos de una cuerda AB delimitan arcos iguales de la curva, el segmento AB divide su interior en dos regiones con áreas iguales. Por consiguiente el problema viene a reducirse a lo siguiente: $\max_{x \in \mathcal{D}} J(x)$ donde

$$J(x) = \int_a^b x \, dt, \quad \mathcal{D} = \{x \in C^1[a, b] : x(a) = x(b) = 0, \int_a^b \sqrt{1 + x'^2} = L\}.$$

Aquí L juega el papel de $L/2$ en la situación general. Haciendo el cambio:

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + x'^2} \, d\tau, \quad \xi(s) = x(t(s)),$$

el problema se transforma en $\max_{\xi \in \mathcal{D}_a} J(\xi)$ donde:

$$J(\xi) = \int_0^L \xi \sqrt{1 - x'^2} \, ds, \quad \mathcal{D}_a = \{\xi \in C^1[0, L] : \xi(0) = \xi(L) = 0\}.$$

Cambiando a la notación $x(s)$ en lugar de $\xi(s)$ las ecuaciones de Euler–Lagrange nos llevan a:

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x'^2}} = c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{c_1}\right)^2 + x'^2 = 1,$$

* Según la Eneida fue Dido, la fundadora y primera reina de Cartago, quien sugirió la solución.

con c_1 constante. Parametrizando $x = c_1 \cos \sigma$, $x' = \text{sen } \sigma$ encontramos derivando que $\sigma = c - \frac{s}{c_1}$. Ajustando las condiciones $x(0) = x(L) = 0$ resulta que $c = \frac{\pi}{2}$ y $c_1 = \frac{L}{\pi}$ por lo que:

$$x(s) = \frac{L}{\pi} \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} s \right).$$

Asimismo:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 1 + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 = 1 + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{L} s \right).$$

Luego:

$$\frac{dt}{ds} = \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} s \right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{\pi} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{L} s \right) \right).$$

Concluimos entonces que $(t(s), x(s))$ parametriza el semicírculo de radio $\frac{L}{\pi}$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(L, 0)$.

Observación 1.40. Los cálculos sólo indican que el semicírculo es candidato a solución, no que resuelva el problema.

1.7.5. El problema de la Braquistócrona

Consiste en lo siguiente: “dados dos puntos P y Q situados a distinta altura, encontrar la curva que debe recorrer una masa dada m para descender de uno a otro en el *menor* tiempo posible”. En otras palabras, la curva de descenso más rápido, conocida como “braquistócrona” (del gr. ‘braquistos’ = más corto, ‘cronos’ = tiempo).

Para encontrar la expresión variacional del problema suponemos que $P = (0, 0)$ y $Q = (b, -B)$, b, B positivos, por lo que el movimiento –donde sólo interviene la gravedad– transcurre en el plano x, y .

Soltando la masa desde el reposo la conservación de la energía implica:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g y = 0, \quad v = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}, \quad \dot{} = \frac{d}{dt}.$$

Si $y(x)$ es la expresión de la curva, admitiendo la hipótesis razonable de que $x'(t) > 0$, encontramos que:

$$x' = \sqrt{\frac{-2gy}{1 + (y')^2}}, \quad \dot{} = \frac{d}{dx}.$$

De ahí, el tiempo empleado en el descenso es:

$$t = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{-2gy}} dx.$$

Cambiando $y(x)$ por $-y(x)$ el problema se transforma en:

$$\min_{y \in \mathcal{D}} J(y), \quad (1.13)$$

donde

$$J(y) = \int_0^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx,$$

(omitiremos en lo que sigue el factor $2g$ pues no afecta a la solución del problema) y donde en primera aproximación:

$$\mathcal{D} = \{y \in \mathcal{C}^{1,pw}[0, b] : y(0) = 0, y(b) = B\}.$$

En efecto, se requiere que $y(x) > 0$ para $x > 0$ mientras que la integral podría diverger pues $y(0) = 0$. Más aún, el impulso mayor se alcanza cuando $y'(0) = \infty$, así que es de esperar esa singularidad en la derivada. Por tanto adoptamos:

$$\{y \in C[0, b] \cap \mathcal{C}^{1,pw}(0, b] : y(0) = 0, y(b) = B\} \cap \{y(x) > 0 \ x \in (0, b], J(y) < \infty\}$$

como el dominio de J . Tal clase no es vacía pues cualquier función C^1 que cerca de cero cumpla $y(x) \sim C_1 x^\alpha$ y $y'(x) \sim C_2 x^{\alpha-1}$ hace convergente la integral con tal que $0 < \alpha < 2$.

Supongamos que y resuelve (1.13). Para evitar la singularidad en $x = 0$ y a fin de obtener las ecuaciones de Euler–Lagrange, tomamos funciones test h con el soporte en $[\delta, b]$, con $\delta > 0$ pequeño. Entonces,

$$\frac{d}{ds} J(y + sh) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\delta^b F_y h + F_p h' = 0.$$

de ahí se deduce que las ecuaciones de Euler–Lagrange:

$$(F_p)' = F_y$$

se cumplen en $[\delta, b]$ mientras que:

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \in C[0, b] \quad \Rightarrow \quad p = y' \in C[0, b].$$

Por tanto $y \in C^1[0, b]$. Más aún,

$$F_{pp} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Luego $y \in C^2[0, b]$. Por tanto $y \in C^2(0, b]$ y cumple las ecuaciones de Euler–Lagrange en $(0, b]$. Usando la integral primera del Ejemplo 1.7.2 se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = c_1. \quad (1.14)$$

Para resolver la ecuación es conveniente usar “integración paramétrica”. En el caso general de una ecuación:

$$G(y, y') = 0,$$

la idea consiste en “parametrizar” la curva $(y(x), y'(x))$ mediante un parámetro auxiliar τ , es decir, escribir:

$$(y(x), y'(x)) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)).$$

Parametrizar la solución en términos de τ requiere conocer primero $x(\tau)$. Ahora:

$$y'(x) = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{x}}, \quad \cdot = \frac{d}{d\tau}.$$

De ahí se deduce que $x(\tau)$ se determina resolviendo:

$$\dot{x} = \frac{\dot{\varphi}}{\psi}.$$

La ecuación (1.14) equivale a

$$y(1 + y'^2) = k_1, \tag{1.15}$$

en donde usando $y' = \cotag \tau$ resulta $y = k_1 \sen^2 \tau$, luego:

$$\dot{x} = 2k_1 \sen^2 \tau \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k_1}{2}(2\tau - \sen 2\tau) + k_2.$$

La condición $y(0) = 0$ implica $k_2 = 0$ y una parametrización de la solución es:

$$\begin{cases} x = k(s - \sen s) \\ y = k(1 - \cos s), \end{cases}$$

($s = 2\tau$, $k = \frac{k_1}{2}$) la cual describe un fragmento de cicloide. Como la parametrización es 2π -periódica tomamos $0 \leq s < 2\pi$. Hace falta ajustar la segunda condición:

$$y(b) = B.$$

Para ello es útil observar que la función auxiliar $\frac{s - \sen s}{1 - \cos s}$ crece de 0 a infinito para $s \in [0, 2\pi)$ luego existe un único s_0 donde:

$$\frac{s - \sen s}{1 - \cos s} \Big|_{s=s_0} = \frac{b}{B}.$$

Basta entonces con tomar:

$$k = \frac{b}{s_0 - \sen s_0}.$$

Observación 1.41. Del análisis precedente se deduce que si la diferencia de alturas entre los dos puntos P, Q es pequeña, la braquistócrona efectúa primero un descenso antes de “subir” al punto Q . Es decir, el descenso más rápido supone un “ascenso” en el tramo final hasta alcanzar Q .

Mecánica, ligaduras. Teorema de Noether

2.1. Mecánica Lagrangiana

El objetivo de la *dinámica* es describir la evolución de un sistema físico entre dos instantes de tiempo prefijados. Presentamos en esta sección una manera de llegar a las ecuaciones del movimiento.

Al tratar de sistemas de m partículas éstas se pueden representar por sus coordenadas cartesianas $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. El empleo de tales coordenadas es muy propio de la mecánica Newtoniana, la cual se articula en torno a las leyes de Newton. La posición global del sistema se describe por el vector:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m) \in \mathbb{R}^N, \quad N = 3m.$$

Sin embargo, resulta útil en la mecánica el uso de otros sistemas de coordenadas. Esto consiste en expresar:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n \leq N,$$

donde el vector \mathbf{q} define las ‘coordenadas generalizadas’ de \mathbf{x} y la presencia de t indica que el sistema de referencia podría depender del tiempo. Estas coordenadas deben cumplir dos condiciones: a) los números q_1, \dots, q_n son independientes (no están sometidos a restricciones), b) a cada posición \mathbf{x} del sistema en el instante t corresponde un par (\mathbf{q}, t) que lo describe. Que $n \leq N$ significa que las partículas \mathbf{x} del sistema pueden estar sometidas a ‘ligaduras’. Se dice que n son los ‘grados de libertad’ del mismo. Por ejemplo, el movimiento de una partícula $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en la esfera se describe mediante dos ángulos $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$ y tal sistema tiene dos grados de libertad.

Uno de nuestros objetivos inmediatos es la obtención de las *ecuaciones del movimiento* en un sistema de coordenadas \mathbf{q} cualquiera.

Se sabe de la mecánica Newtoniana que una magnitud escalar que caracteriza el movimiento de la partícula \mathbf{r}_i es su masa m_i . La energía cinética T del sistema se define como:

$$T = \sum_{i=1}^m \frac{m_i}{2} |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 = \langle \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle,$$

donde:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_m I_3 \end{pmatrix},$$

es la matriz de masas, I_3 la matriz identidad 3×3 .

La expresión de la energía cinética cambia cuando se introducen las coordenadas \mathbf{q} en la forma siguiente:

$$T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + c(\mathbf{q}, t),$$

donde:

$$a_{i,j} = \langle \mathcal{M} \mathbf{f}_{q_i}, \mathbf{f}_{q_j} \rangle, \quad b_i = \langle \mathcal{M} \mathbf{f}_{q_i}, \mathbf{f}_t \rangle, \quad c = \langle \mathcal{M} \mathbf{f}_t, \mathbf{f}_t \rangle.$$

Esto se debe a la relación que existe entre las velocidades $\dot{\mathbf{x}}$ y $\dot{\mathbf{q}}$ (los subíndices indican derivadas parciales). A saber:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{q_i} \dot{q}_i + \mathbf{f}_t.$$

En sistemas de referencia que no dependen del tiempo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}),$$

la energía cinética toma la forma más sencilla:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \langle A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle, \quad A = (a_{ij}).$$

Como se observa, se trata de una forma cuadrática en $\dot{\mathbf{q}}$.

Ejemplo 2.1. En el caso de una sola partícula $\mathbf{x} = \mathbf{r} = (x, y, z)$ y coordenadas esféricas $\mathbf{q} = (r, \theta, \phi)$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = r(\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi),$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r^2 \sin^2 \phi) \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2),$$

$$A = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Observamos que efectivamente, T depende tanto de la posición \mathbf{q} como de la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$, cosa que no pasa en coordenadas cartesianas.

La dinámica de muchos sistemas de partículas –los denominados ‘ideales’– se formula de forma unificada en base al siguiente principio. Obsérvese que no se concede en él un estatus privilegiado a ningún tipo de coordenadas.

Principio de Hamilton de la ‘acción estacionaria’. “El movimiento de un sistema ‘ideal’ con n grados de libertad y coordenadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ puede describirse en base a una función escalar $U(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en los siguientes términos: la trayectoria real $\bar{\mathbf{q}}(t)$ seguida por el sistema para ir de los puntos A a B de \mathbb{R}^n entre los instantes $t = a, b$ es aquella que hace nula la variación primera:

$$\delta J(\bar{\mathbf{q}}) = 0, \quad (2.1)$$

donde J es el funcional

$$J(\mathbf{q}) = \int_a^b (T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) dt.”$$

□

Observación 2.2.

a) La integral $J(\mathbf{q})$ se llama la ‘acción del sistema’ para ir de A hasta B siguiendo la trayectoria $\mathbf{q}(t)$. El grupo:

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),$$

se denomina el Lagrangiano del sistema. La relación (2.1) significa:

$$\delta J(\bar{\mathbf{q}})h = 0, \quad \forall h \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^n).$$

- b) El principio de ‘mínima acción’ de Lagrange (también de Maupertuis y de Euler) postulaba que el camino real $\bar{\mathbf{q}}(t)$ hace mínima la acción, y de ahí satisface (2.1). Por tanto, el de Hamilton constituye una versión más relajada de dicho principio.
- c) La función U se denomina el potencial. Representa globalmente las interacciones sobre el sistema debidas a causas tanto internas como externas. Explicaremos esto en unos momentos. Corresponde al campo de la física determinar la función U que describe propiamente tales interacciones.
- d) De una manera informal podemos decir que son ideales todos aquellos sistemas donde las interacciones derivan de fuerzas conservativas.

En base al Principio de Hamilton, la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ que sigue el sistema en el espacio de configuraciones $\{\mathbf{q} : \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n\}$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{\mathbf{q}}}) = L_{\mathbf{q}}, \quad (2.2)$$

que coordenada a coordenada se escriben:

$$\frac{d}{dt}(L\dot{q}_i) = L_{q_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Por consiguiente las (2.3) constituyen las *ecuaciones del movimiento* del sistema.

Para simplificar, supondremos a partir de ahora que el sistema de referencia no depende del tiempo, mientras que U sólo depende de \mathbf{q} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad U = U(\mathbf{q}).$$

Por razones que se explican en los ejemplos que siguen al término $-U_{\mathbf{q}} = -\nabla_{\mathbf{q}}U$ se le denomina la ‘fuerza generalizada’ ejercida sobre el sistema.

Teorema 2.3 (Conservación de la Energía). *La función:*

$$E = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + U(\mathbf{q}),$$

se conserva a lo largo del movimiento.

Demostración. Es consecuencia del Ejemplo 1.7.2 que:

$$L - \dot{\mathbf{q}}L_{\dot{\mathbf{q}}}$$

constituye una integral primera de las ecuaciones de Euler–Lagrange. Ahora:

$$L - \dot{\mathbf{q}}L_{\dot{\mathbf{q}}} = T - U - \dot{\mathbf{q}}T_{\dot{\mathbf{q}}} = -T - U,$$

lo que prueba la afirmación. Nótese que se ha empleado el teorema de Euler para concluir:

$$\dot{\mathbf{q}}T_{\dot{\mathbf{q}}} = 2T,$$

pues $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es homogénea de grado dos en $\dot{\mathbf{q}}$.

Observación 2.4. No todas las integrales primeras de las ecuaciones de Euler–Lagrange tienen el estatus de ‘energía’. Es una contribución de E. Noether –de la que luego hablaremos– que las simetrías del Lagrangiano dan lugar a integrales primeras con otro sentido mecánico.

2.1.1. Sistemas conservativos

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento de una partícula de masa m en un campo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, es:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

El campo es conservativo si existe una función escalar $U(\mathbf{r})$ tal que:

$$\mathbf{F} = -\nabla U.$$

En estas condiciones, la ecuación precedente coincide con la ecuación de Euler-Lagrange asociada al Lagrangiano (coordenadas cartesianas):

$$L = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}).$$

La energía conservada es:

$$E = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 + U(\mathbf{r}).$$

Además, del Teorema 1.30 se deduce lo siguiente.

Teorema 2.5. *Si el potencial U es cóncavo en \mathbb{R}^3 entonces la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ seguida por la partícula entre dos puntos A y B define un mínimo absoluto de la acción,*

$$J(\mathbf{r}) = \int_a^b L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

2.1.2. Problema de n-cuerpos

Consideramos n partículas $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ conformando un sistema aislado: las únicas interacciones tienen lugar entre éstas. Más aún, suponemos que la pareja (i, j) ($i \neq j$) interactúa por medio de un potencial:

$$U_{\{i,j\}}(r_i, r_j) = \phi_{\{i,j\}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

donde $\phi_{\{i,j\}}$ es una función escalar de $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Esto significa por definición que la fuerzas \mathbf{F}_{ji} de \mathbf{r}_j sobre \mathbf{r}_i y \mathbf{F}_{ij} de \mathbf{r}_i sobre \mathbf{r}_j son:

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U_{\{i,j\}} \quad \mathbf{F}_{ij} = -\nabla_{\mathbf{r}_j} U_{\{i,j\}}.$$

En particular se sigue que: $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$. La fuerza total \mathbf{F}_i ejercida sobre \mathbf{r}_i por el resto de las partículas es:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} = -\sum_{j \neq i} \nabla_{\mathbf{r}_i} U_{\{i,j\}} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} \left(\sum_{j \neq i} U_{\{i,j\}} \right).$$

Introduciendo el potencial total:

$$U = \sum_{k < l} U_{\{k,l\}} \quad \Rightarrow \quad -U_{\mathbf{r}_i} = \mathbf{F}_i.$$

En efecto:

$$U_{\mathbf{r}_i} = \left(\sum_{k < l} U_{\{k,l\}} \right)_{\mathbf{r}_i} = \left(\sum_{i \in \{k,l\}} U_{\{k,l\}} \right)_{\mathbf{r}_i} = \left(\sum_{k \neq i} U_{\{k,i\}} \right)_{\mathbf{r}_i}.$$

Se ha empleado la notación $(\cdot)_{\mathbf{r}_i} = \nabla_{\mathbf{r}_i}(\cdot)$.

En estas condiciones las ecuaciones del movimientos son:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x}).$$

Coinciden con las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas al Lagrangiano:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - U(\mathbf{x}).$$

Un tipo particular de interacción entre las partículas tiene lugar cuando los potenciales son función de la distancia entre partículas:

$$U_{\{i,j\}} = \phi_{\{i,j\}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|),$$

siendo $\phi_{\{i,j\}}(r)$ una función de la variable real r . En este caso

$$\mathbf{F}_{ji} = \phi'_{\{i,j\}}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|,$$

y las fuerzas entre dos partículas se dirigen en la recta que las une.

En el caso importante del campo gravitatorio:

$$\phi_{\{i,j\}}(r) = -G \frac{m_i m_j}{r},$$

donde G es la constante de gravitación universal.

Las ecuaciones del movimiento (del así denominado problema de los n cuerpos) son:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i).$$

Constituyen las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas al Lagrangiano:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - U(\mathbf{x}),$$

donde ahora el potencial es:

$$U(\mathbf{x}) = -G \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}, \quad r_{kl} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|.$$

Concluimos la sección mostrando la versatilidad de las ecuaciones de Euler–Lagrange frente a cambios de coordenadas. La propiedad que sigue prueba que para obtener las ecuaciones del movimiento en un nuevo sistema de referencia lo único que hay que hacer es transformar el Lagrangiano. Esto es con frecuencia más económico que ejecutar directamente el cambio en las propias ecuaciones.

Para simplificar hemos suprimido las negritas.

Teorema 2.6. Sean $F(t, x, \dot{x})$ y $\mathbf{f}(q, t)$ suficientemente regulares, $m = n$ y

$$\det D\mathbf{f}(q, t) \neq 0.$$

Entonces las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas a los funcionales:

$$J(x) = \int_I F(t, x, \dot{x}) dt \quad \& \quad \mathcal{J}(q) = \int_I G(t, q, \dot{q}) dt,$$

donde:

$$G(t, q, \dot{q}) = F(t, \mathbf{f}(q, t), D\mathbf{f}(q, t)\dot{q} + \mathbf{f}_t),$$

son equivalentes.

Demostración. Derivando G respecto de \dot{q} y usando D como símbolo de la diferencial con respecto de q :

$$G_{\dot{q}} = F_p D\mathbf{f}(q, t) \quad \Rightarrow \quad (G_{\dot{q}})' = (F_p)' D\mathbf{f}(q, t) + F_p (D\mathbf{f}(q, t))',$$

mientras que derivando respecto de q :

$$G_q = F_x D\mathbf{f}(q, t) + F_p (D^2 \mathbf{f}(q, t) \dot{q} + D\mathbf{f}_t(q, t)) = F_x D\mathbf{f}(q, t) + F_p (D\mathbf{f}(q, t))'.$$

Como $\det D\mathbf{f}(q, t) \neq 0$:

$$(G_{\dot{q}})' = G_q \quad \Leftrightarrow \quad (F_p)' = F_x.$$

Observación 2.7. El Teorema 2.6 sigue siendo válido en presencia de ligaduras. Nos ocupamos del asunto en la Sección 2.3 (véase el Teorema 2.18).

Ejemplo 2.8. Las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales con potencial:

$$U(\mathbf{r}) = u(r), \quad r = |\mathbf{r}|,$$

son:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -u'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Para obtener las ecuaciones en coordenadas esféricas $\mathbf{q} = (r, \theta, \phi)$ observamos que el Lagrangiano en dichas coordenadas es:

$$G = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r^2 \sin^2 \phi) \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - u(r).$$

Las ecuaciones del movimiento en las coordenadas q son:

$$(G_{\dot{q}})' = G_q,$$

es decir:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr(\sin^2 \phi) \dot{\theta}^2 + mr \dot{\phi}^2 - u'(r) \\ m(r^2 \sin^2 \phi) \dot{\theta}' &= 0 \\ m(r^2 \dot{\phi})' &= mr^2 (\sin \phi \cos \phi) \dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

2.2. Problemas isoperimétricos

Sean $F : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $G_i : [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, funciones continuas de la variable (t, x, p) con derivadas parciales primeras continuas respecto de las variables x_i y p_j .

Definición 2.9. El problema isoperimétrico consiste en resolver:

$$\min_{x \in \mathcal{D}, \|x - x_0\|_{1, pw} < \varepsilon} J(x), \quad (2.4)$$

sometido a las restricciones:

$$\mathcal{K}_1(x) = c_1, \quad \dots, \quad \mathcal{K}_m(x) = c_m, \quad c_i \text{ constantes}, \quad (2.5)$$

donde los funcionales:

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x') dt, \quad \mathcal{K}_i(x) = \int_a^b G_i(t, x, x') dt,$$

están definidos en $\mathcal{D} \subset (\mathcal{C}^{1, pw}[a, b])^N$. Las condiciones (2.5) se denominan restricciones (ligaduras) "isoperimétricas".

Observación 2.10. Consideremos la aplicación $\mathcal{K} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida como $\mathcal{K}(x) = (\mathcal{K}_i(x))$, los \mathcal{K}_i como en la definición. Se dice que $x \in \mathcal{D}$ es 'no crítico' para \mathcal{K} si la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K} : X_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\longmapsto (\delta \mathcal{K}_i(x)h)' \end{aligned}$$

es sobreyectiva. Puede probarse que esta condición es equivalente a que la familia $\{\delta \mathcal{K}_i(x)\}_{1 \leq i \leq m}$ sea libre en X_0^* donde $X_0 = (\mathcal{C}_0^{1, pw}[a, b])^N$.

Teorema 2.11. Sea $x_0 \in \mathcal{D}$ una solución del problema isoperimétrico (2.4), (2.5). Si x_0 es no crítico para \mathcal{K} entonces existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:

$$\left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \right)_p \in \mathcal{C}^{1, pw}[a, b],$$

y además:

$$\frac{d}{dt} \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \right)_p = \left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \right)_x.$$

Demostración. Por hipótesis $\delta \mathcal{K}(x_0)$ es lineal y sobreyectiva así que existen $h_1, \dots, h_m \in X_0$ tales que,

$$\delta \mathcal{K}_i(x_0)h_j = \delta_{i,j},$$

con $i, j = 1, \dots, m$ y $\delta_{i,j}$ la δ de Kronecker. Ahora, para $h \in X_0$ arbitraria definimos las funciones $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ como sigue:

$$f(s, s_1, \dots, s_m) = J(x_0 + sh + s_1 h_1 + \dots + s_m h_m),$$

$$\Psi(s, s_1, \dots, s_m) = \mathcal{K}(x_0 + sh + s_1 h_1 + \dots + s_m h_m).$$

Nótese que los argumentos de J y \mathcal{K} están en \mathcal{D} . Asimismo tales funciones son de clase C^1 . Vemos además que,

$$\frac{\partial f(s, s_1, \dots, s_m)}{\partial s} = \delta J(x_0)h, \quad \frac{\partial \Psi_i(s, s_1, \dots, s_m)}{\partial s} = \delta \mathcal{K}_i(x_0)h$$

y,

$$\frac{\partial f(s, s_1, \dots, s_m)}{\partial s_j} = \delta J(x_0)h_j, \quad \frac{\partial \Psi(s, s_1, \dots, s_m)}{\partial s_j} = \delta \mathcal{K}(x_0)h_j = e_j,$$

con $i, j = 1, \dots, m$, donde $e_j = (\delta_{i,j})$.

Además, de la elección de las funciones h_1, \dots, h_m se sigue que:

$$D\Psi(0) = \begin{pmatrix} \delta \mathcal{K}_1(x_0)h & 1 & \dots & 0 \\ \delta \mathcal{K}_2(x_0)h & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta \mathcal{K}_m(x_0)h & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el rango de $D\Psi(0)$ es máximo y el conjunto $\{(s, s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : \Psi(s, s_1, \dots, s_m) = c\} \subset \mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable de dimensión uno. Sabemos que f tiene en $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ un mínimo local sujeto a las restricciones $\Psi(s, s_1, \dots, s_m) = c$. Utilizando los multiplicadores de Lagrange,

$$\nabla f(0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Psi_i(0) = 0,$$

para algún $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$. Por tanto,

$$\begin{cases} \delta J(x_0)h + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta \mathcal{K}_i(x_0)h = 0, \\ \delta J(x_0)h_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta \mathcal{K}_i(x_0)h_j = 0. \end{cases}$$

De las últimas m ecuaciones tenemos,

$$\lambda_j = -\delta J(x_0)h_j,$$

para $j = 1, \dots, m$. Notamos así que los λ_j no dependen de h . Desarrollando la primera ecuación,

$$\int_a^b \left\langle \left(F_x + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_{i,x} \right), h \right\rangle + \left\langle \left(F_p + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_{i,p} \right), h' \right\rangle dt = 0.$$

Escogiendo $h = (0, \dots, \tilde{h}, 0, \dots, 0)$, donde $\tilde{h} \in \mathcal{C}_0^{1,pw}[a, b]$ es la componente k resulta:

$$\int_a^b (F_{x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_{i,x_k}) \tilde{h} + (F_{p_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_{i,p_k}) \tilde{h}' dt = 0,$$

con $k = 1, \dots, N$. Estas son las ecuaciones de Euler–Lagrange en versión débil. \square

Observación 2.12. Si el problema variacional con ligaduras toma como dominio de definición a $\mathcal{D} = (\mathcal{C}^{1,pw}[a, b])^N$, la solución x_0 satisface además las condiciones de contorno naturales:

$$\left(F + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \right)_p = 0 \quad t \in \{a, b\}.$$

2.2.1. El problema de Sturm–Liouville

Consiste en encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in C^2[a, b]$, $u \neq 0$ tales que:

$$\begin{cases} -(d(t)u')' + qu = \lambda u & t \in I \\ u = 0 & t \in \partial I = \{a, b\}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Se supone que $d \in C^1[a, b]$, $d > 0$ y $q \in C[a, b]$. Si existe tal pareja (λ, u) se dice que λ es un autovalor de (2.6) y u una autofunción asociada. Se sabe que el problema admite una sucesión creciente $\lambda_m \rightarrow \infty$ de autovalores ([7]). Más aún, autofunciones u_i , u_j correspondientes a autovalores distintos $\lambda_i \neq \lambda_j$ son ortogonales en el sentido:

$$\int_a^b u_i u_j dt = 0.$$

Mostramos ahora que la existencia de autovalores admite una lectura variacional. Se usa la notación:

$$\mathcal{M} = \{u \in C_0^1[a, b] : \int_a^b u^2 = 1\}.$$

Teorema 2.13. *Supongamos que el problema variacional:*

$$\min_{u \in \mathcal{M}} J(u), \quad J(u) = \int_a^b F(t, u, u') = \int_a^b du'^2 + qu^2$$

admite una solución $u_1 \in \mathcal{M}$. Entonces tal u_1 es una autofunción asociada al autovalor $\lambda_1 = J(u_1)$ que es además el primer autovalor.

Demostración. Comprobamos primero que si $J(u_1) = \min_{u \in \mathcal{M}} J(u)$ entonces $\lambda \geq J(u_1)$ para todo autovalor λ . En efecto multiplicando ambos miembros de (2.6) por u e integrando por partes:

$$\lambda = \frac{J(u)}{\|u\|_{L^2}^2} = J\left(\frac{u}{\|u\|_{L^2}}\right) \geq J(u_1), \quad \|u\|_{L^2}^2 = \int_a^b u^2,$$

pues $\frac{u}{\|u\|_{L^2}} \in \mathcal{M}$.

Por otro lado el problema variacional tiene por ligadura:

$$\mathcal{K}(u) := \int_a^b G(t, u, u') = \int_a^b u^2.$$

La ecuación de Euler–Lagrange que satisface $u = u_1$ es:

$$2(du')' = 2qu + 2\sigma u,$$

donde σ es el multiplicador. De ahí se deduce que $u_1 \in \mathcal{M}$ es una autofunción asociada a $\lambda = -\sigma$. Así pues $\lambda = -\sigma$ es el primero de los autovalores del problema. \square

Observación 2.14.

- a) La existencia del elemento minimizante u_1 –que se ha dado por sentada en el teorema– puede probarse de manera independiente mediante los llamados ‘métodos directos’ del Cálculo de Variaciones ([3]).
- b) Las condiciones de contorno del problema (2.6) pueden reemplazarse por $u' = 0$ en $t = a, b$. En ese caso hay que adoptar $\mathcal{D} = C^1[a, b]$ como dominio del funcional y usar $\mathcal{M}' = \{u \in C^1[a, b] : \|u\|_{L^2} = 1\}$ en lugar de \mathcal{M} . Las condiciones naturales de contorno para el problema variacional:

$$\min_{u \in \mathcal{M}'} J(u),$$

nos llevan entonces a:

$$F_p(t, u, u') = du' = 0 \quad t \in \{a, b\} \quad \Leftrightarrow \quad u' = 0 \quad t \in \{a, b\}.$$

- c) Se define:

$$\mathcal{M}_m = \{u \in \mathcal{M} : \int_a^b uu_i = 0, 1 \leq i \leq m-1\}.$$

donde u_i son autofunciones asociadas a los primeros $m-1$ autovalores $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{m-1}$ de (2.6), que a estos efectos ya se suponen conocidos. Empleando los multiplicadores de Lagrange se comprueba que si existe una solución u del problema variacional:

$$\min_{u \in \mathcal{M}_m} J(u),$$

entonces $\lambda_m = J(u)$ constituye el m -ésimo autovalor de (2.6). De nuevo, es preciso recurrir a los métodos directos para dar una prueba independiente de la existencia de tal mínimo.

2.3. Ligaduras holónomas

Sean $\psi_1, \dots, \psi_m, \psi_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, m funciones de clase C^k con $k \geq 1$ y $m < N$. El problema:

$$\min_{x \in \mathcal{D}} J(x) = \min_{x \in \mathcal{D}} \int_a^b F(t, x, x') dt, \quad (2.7)$$

junto con:

$$\begin{aligned} \psi_1(x(t)) &= 0 \\ &\vdots \\ \psi_m(x(t)) &= 0, \end{aligned} \quad t \in [a, b], \quad (2.8)$$

donde $\mathcal{D} \subset C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ puede fijar alguno de los valores de $x_i(t)$ en $t = a$ ó $t = b$, plantea otro tipo de problema variacional con ‘ligaduras’ (2.8). Obsérvese que estas restricciones son de naturaleza ‘local’, substancialmente diferentes de las tratadas en la Sección 2.2. El apelativo ‘holónomas’ se usa en mecánica para resaltar que ni el tiempo t ni las derivadas de x aparecen explícitamente en las funciones ψ_i .

2.3.1. Variedades diferenciables de \mathbb{R}^N

Supongamos que la colección de $m < N$ funciones reales de clase C^k , $k \geq 1$, $\psi_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, es tal que el conjunto:

$$\mathcal{M} = \{x : \Psi(x) = 0\}, \quad \Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m),$$

es no vacío. Admitamos además que

$$\text{rango } D\Psi(x) = m \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

Se dice entonces que \mathcal{M} constituye una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión $n = N - m$. Para explicar brevemente por qué es \mathcal{M} un objeto $N - m$ dimensional introducimos los subespacios asociados a cada $x \in \mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M}_x := N(L), \quad N\mathcal{M}_x := R(L^*) = N(L)^\perp, \quad L = D\Psi(x),$$

en donde $N(L)$ es el núcleo de L , L^* es el operador adjunto de L y $R(L^*) = L^*(\mathbb{R}^m)$.

Probamos que \mathcal{M} se describe localmente en términos de $N - m$ parámetros. Fijado $x_0 \in \mathcal{M}$ notamos que:

$$\mathbb{R}^N = x_0 + T\mathcal{M}_{x_0} \oplus N\mathcal{M}_{x_0}.$$

Definimos la aplicación $\mathcal{G} : T\mathcal{M}_{x_0} \times N\mathcal{M}_{x_0} \approx \mathbb{R}^{N-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ como:

$$\mathcal{G}(y, z) = \Psi(x_0 + y + z), \quad (y, z) \in T\mathcal{M}_{x_0} \times N\mathcal{M}_{x_0}.$$

Usando el teorema de la Función Implícita la ecuación:

$$\mathcal{G}(y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(x) = 0, \quad x = x_0 + y + z,$$

define $z = \varphi(y)$ donde $\varphi \in C^k(\{y \in \mathbb{R}^{N-m} : |y| < \varepsilon\}, \mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$ es pequeño, y se cumple $\varphi(0) = 0$ y $D\varphi(0) = 0$. Más aún, existe un entorno $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ tal que el fragmento $\mathcal{M} \cap \mathcal{U}$ se representa en la forma $z = \varphi(y)$ como sigue:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{U} = \{x = x_0 + y + \varphi(y) : |y| < \varepsilon\}.$$

Por tanto \mathcal{M} se parametriza localmente mediante los $N - m$ parámetros y . Los conjuntos $T\mathcal{M}_x$ y $N\mathcal{M}_x$ definen los espacios tangente y normal a la variedad \mathcal{M} en el punto x .

En lo que sigue llamaremos

$$\begin{aligned} P(x) : \mathbb{R}^N &\longrightarrow T\mathcal{M}_x & Q(x) : \mathbb{R}^N &\longrightarrow N\mathcal{M}_x \\ \xi &\longmapsto P(x)\xi = y & \xi &\longmapsto Q(x)\xi = z, \end{aligned}$$

a las proyecciones ortogonales sobre dichos espacios. Son aplicaciones lineales que varían en forma C^{k-1} respecto de x . Claramente satisfacen la relación:

$$P(x) + Q(x) = I,$$

donde I es la identidad.

Para $x_0 \in \mathcal{M}$ fijo se pueden demostrar además las relaciones:

$$P(x)T\mathcal{M}_{x_0} = T\mathcal{M}_x, \quad Q(x)N\mathcal{M}_{x_0} = N\mathcal{M}_x, \quad \text{si } x \sim x_0.$$

Estas relaciones permiten remitir los espacios tangente y normal en x a sus homólogos en un punto de referencia x_0 . Se observa asimismo que:

$$N\mathcal{M}_x = R(D\Psi(x)^*) = \text{span} \{\nabla\psi_1(x), \dots, \nabla\psi_m(x)\}.$$

Si por otra parte si $\phi \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N)$ es una curva que toma valores en \mathcal{M} es decir:

$$\psi_i(\phi(s)) = 0 \quad \text{para cada } s \in [a, b], 1 \leq i \leq m,$$

entonces:

$$\nabla\psi_i(\phi(s))\phi'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi'(s) \in R(D\Psi(\phi(s))^*)^\perp,$$

luego:

$$\phi'(s) \in T\mathcal{M}_{\phi(s)},$$

para cada $s \in [a, b]$. Se ha probado así que los vectores tangentes $\phi'(s)$ a las curvas que yacen en \mathcal{M} pertenecen a $T\mathcal{M}_{\phi(s)}$ en cada uno de sus puntos $x = \phi(s)$. Esta es la razón por la que se llama a $T\mathcal{M}_x$ el espacio tangente.

2.3.2. Los multiplicadores de Lagrange

Teorema 2.15. Supongamos que Ψ es C^3 , F es C^2 y que $x \in \mathcal{D}$ es también de clase C^2 en $[a, b]$. Si x es solución del problema variacional con ligaduras:

$$\min_{y \in \mathcal{D}, \|y-x\|_1 < \varepsilon} \int_a^b F(t, y, y') \quad \& \quad \Psi(y) = 0,$$

entonces existen funciones reales $\lambda_i \in C[a, b]$, $1 \leq i \leq m$, tales que x resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}(F_p) = F_x + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \nabla \psi_i(x). \quad (2.9)$$

Observación 2.16. Como se ve, es válida la regla de los multiplicadores de Lagrange con la particularidad de que dichos multiplicadores λ_i son funciones de t . Se observa que no se han especificado condiciones de contorno algunas en el dominio \mathcal{D} .

Observación 2.17. Las ecuaciones (2.9) son las de Euler–Lagrange del Lagrangiano modificado:

$$\mathcal{F}(t, x, x') = F(t, x, x') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \psi_i(x). \quad (2.10)$$

Demostración. Supongamos que $x \in C^2([a, b], \mathbb{R}^N)$ resuelve el problema variacional, teniéndose por tanto que $x(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in [a, b]$. El punto delicado de la prueba consiste en construir una perturbación suficientemente regular:

$$\begin{aligned} h: [0, \varepsilon] \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (s, t) &\longmapsto h(s, t), \end{aligned}$$

que satisface las condiciones naturales:

- i) $h(0, t) = 0, \forall t \in [a, b]$,
- ii) $x(t) + h(s, t) \in \mathcal{M}, \forall (s, t) \in [0, \varepsilon] \times [a, b]$,
- iii) $h(s, a) = h(s, b) = 0$ para cada s .

De entre las tres, es la segunda condición la que hace especialmente delicado el proceso. Observamos por otro lado que i) y ii) implican necesariamente:

$$a(t) := h_s(0, t) \in T\mathcal{M}_{x(t)} \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Por tanto para cada t debe existir $v(t) \in \mathbb{R}^N$ cumpliendo $a(t) = P(x(t))v(t)$.

Afirmamos que: “*dada una función arbitraria* $g \in C_0^2([a, b], \mathbb{R}^N)$, se puede fabricar una perturbación $h(s, t)$ cumpliendo:

$$h_s(0, t) = a(t) = P(x(t))g(t), \quad t \in [a, b].”$$

Admitamos la validez de la afirmación. Entonces:

$$\frac{d}{ds} J(x(\cdot) + h(s, \cdot))|_{s=0} = \int_a^b \{F_x(t, x, x') a(t) + F_p(t, x, x') a'(t)\} dt = 0,$$

de donde,

$$\int_a^b \left\{ \left(F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) \right) a(t) \right\} dt = 0$$

y por tanto:

$$\int_a^b \left\langle F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')), P(x(t))g(t) \right\rangle dt = 0.$$

Usando que la proyección $P(x)$ es autoadjunta:

$$\int_a^b \left\langle P(x(t)) \left(F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) \right), g(t) \right\rangle dt = 0,$$

para todas las funciones $g \in C_0^2([a, b], \mathbb{R}^N)$. Por el Lema Fundamental:

$$P(x(t)) \left(F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) \right) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Esto implica que

$$F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) \in R(D\Psi(x(t))^*) \quad \text{para cada } t.$$

Por consiguiente,

$$F_x(t, x, x') - \frac{d}{dt}(F_p(t, x, x')) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \psi_i(x(t)),$$

en donde los coeficientes λ_i son funciones C respecto de t . Esta afirmación se sigue de que el primer miembro es continuo en t mientras que $N\mathcal{M}_x$ admite una base que es C^2 en x .

Para fabricar la perturbación h fijamos $t_0 \in [a, b]$ y primero obtenemos h para $|t - t_0| < \varepsilon$. A tal fin damos $g \in C_0^2([a, b], \mathbb{R}^N)$ y formamos:

$$h(s, t) = a(t)s + Q(x(t))z,$$

donde $a(t) = P(x(t))g(t)$ y $z \in N\mathcal{M}_{x_0}$, $x_0 = x(t_0)$, es un parámetro por determinar. Definimos la aplicación C^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}: \mathbb{R} \times [a, b] \times N\mathcal{M}_{x(t_0)} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (s, t, z) &\longmapsto \mathcal{H}(s, t, z) = \Psi(a(t)s + Q(x(t))z). \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\mathcal{H}(0, t_0, 0) = 0 \quad D_z \mathcal{H}(0, t_0, 0) \hat{z} = D\Psi(x_0)Q(x_0)\hat{z}.$$

La aplicación $D\Psi(x_0)Q(x_0)$ define un isomorfismo de $N\mathcal{M}_{x_0}$ sobre \mathbb{R}^m . El teorema de la Función Implícita permite representar con unicidad las soluciones de:

$$\mathcal{H}(s, t, z) = 0,$$

en la forma $z = \zeta(s, t)$ donde $|t - t_0| < \varepsilon$, $|s| < \varepsilon$, ζ es una función de clase C^2 . Al variar $t_0 \in [a, b]$ se puede extender la definición de ζ a la banda $|s| < \varepsilon$ y $t \in [a, b]$.

De la condición $g = 0$ en $t = a, b$ se desprende que $\zeta(s, a) = \zeta(s, b) = 0$ para todo s . Asimismo,

$$\zeta(0, t) = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Por otro lado, al derivar con respecto de s en la ecuación $\mathcal{H} = 0$ y hacer después $s = 0$ llegamos a:

$$D\Psi(x(t))Q(x(t))\zeta_s(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta_s(0, t) = 0,$$

para todo $t \in [a, b]$. Reuniendo toda la información resulta que la perturbación buscada es:

$$h(s, t) = a(t)s + Q(x(t))\zeta(s, t).$$

□

En el contexto del Teorema 2.15 supongamos que la variedad $\mathcal{M} = \{\Psi(x) = 0\}$ se puede parametrizar por la aplicación C^3

$$x = \mathbf{f}(q), \quad q \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, \quad n = N - m,$$

donde \mathcal{U} es un abierto y

$$\text{rango } D\mathbf{f}(q) = n, \quad \forall q \in \mathcal{U}.$$

La parametrización da lugar al funcional transformado a coordenadas q :

$$\tilde{J}(q) = \int_a^b \tilde{F}(q, q'), \quad \tilde{F}(q, q') = F(\mathbf{f}(q), D\mathbf{f}(q)q').$$

Se tiene entonces la siguiente versión del Teorema 2.6.

Teorema 2.18 ([8]). *Las soluciones $x(t)$ de las ecuaciones (2.9) se corresponden con las de las ecuaciones de Euler–Lagrange del funcional \tilde{J} :*

$$\frac{d}{dt}(\tilde{F}_{q'}) = \tilde{F}_q, \quad (2.11)$$

mediante la relación $x = \mathbf{f}(q)$. En otras palabras, (2.9) y (2.11) son equivalentes.

2.3.3. El péndulo esférico

El movimiento bajo la acción de la gravedad de una partícula $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de masa m adherida a una esfera de radio l sin que medien otro tipo de fuerzas (fricción por ejemplo), puede tratarse con la técnica de la Sección 2.3.2. El sistema puede identificarse a un péndulo esférico de longitud l .

Usando coordenadas cartesianas el Lagrangiano es:

$$L = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - mgz,$$

y las ecuaciones del movimiento:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_3 + \lambda(t)\nabla\psi(\mathbf{r}),$$

donde $\psi = x^2 + y^2 + z^2 - l^2$ y λ es el multiplicador. Nótese que el término $\lambda(t)\nabla\psi(\mathbf{r})$ desempeña el papel de fuerza de ligadura o de reacción, que explica el confinamiento del movimiento a la esfera.

Usando coordenadas esféricas el Lagrangiano es:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + (r^2 \sin^2 \phi) \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - mgr \cos \phi.$$

La ligadura tiene la forma $\phi = r - l$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son (se ha simplificado m):

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r(\sin^2 \phi) \dot{\theta}^2 + r \dot{\phi}^2 - g \cos \phi + \lambda(t) \\ (r^2 \sin^2 \phi) \dot{\theta} &= 0 \\ (r^2 \dot{\phi}) &= r^2 (\sin \phi \cos \phi) \dot{\theta}^2 + gr \sin \phi. \end{aligned}$$

Empleando la ligadura nos quedamos con las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\sin^2 \phi \dot{\theta}) &= 0 \\ \ddot{\phi} &= \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \sin \phi. \end{aligned}$$

El movimiento se determina a partir de los valores $(\theta(0), \phi(0)) = (\theta_0, \phi_0)$ y $(\dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0)) = (\dot{\theta}_0, \dot{\phi}_0)$ que se deducen a su vez de la posición y velocidad iniciales $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0 \in \mathbb{R}^3$ de la partícula.

Podemos descartar algunos datos iniciales. Por ejemplo $\phi_0 \in \{0, \pi\}$ y $\dot{\phi}_0 = 0$ corresponden a las posiciones de equilibrio de los polos. Por otro lado, la elección $\dot{\theta}_0 = 0$ confina el movimiento a un plano y se obtiene la ecuación del péndulo para el ángulo ϕ :

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{l} \sin \phi.$$

En efecto, las ecuaciones admiten la solución $(\theta, \phi) = (\theta_0, \phi(t))$.

Suponemos entonces que $\dot{\theta}_0 > 0$ y $\phi(0) \notin \{0, \pi\}$. La segunda ecuación implica que:

$$\operatorname{sen}^2 \phi \dot{\theta} = \kappa > 0.$$

Luego la trayectoria tiene siempre velocidad 'longitudinal' positiva (EO) y nunca pasa por los polos. Por otro lado, tras cambiar a la escala de tiempos $\tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t$ la segunda ecuación se escribe:

$$\phi'' = \kappa^2 \cotag \phi \operatorname{cosec}^2 \phi + \operatorname{sen} \phi, \quad \kappa = \operatorname{sen}^2 \phi_0 \theta'_0, \quad (2.12)$$

donde la prima significa derivada con respecto de τ . Esta ecuación admite la integral primera:

$$H = \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{\kappa^2}{2} \cotag^2 \phi + \cos \phi.$$

Analizamos ahora el comportamiento de las soluciones de (2.12). Todos los detalles teóricos se sustentan en el tema de sistemas Hamiltonianos de [7]. La solución es constante si los datos iniciales cumplen $\phi'_0 = 0$ junto con:

$$\kappa^2 \cotag \phi_0 \operatorname{cosec}^2 \phi_0 + \operatorname{sen} \phi_0 = 0.$$

Si alguna de estas relaciones no se da entonces $\phi(t)$ es periódica de periodo T . Con más precisión, los valores:

$$\alpha = \operatorname{mín} \phi, \quad \beta = \operatorname{máx} \phi,$$

son las dos raíces de la ecuación:

$$V(\phi) = H_0, \quad H_0 = \frac{1}{2} \phi_0'^2 + V(\phi_0).$$

El periodo vale:

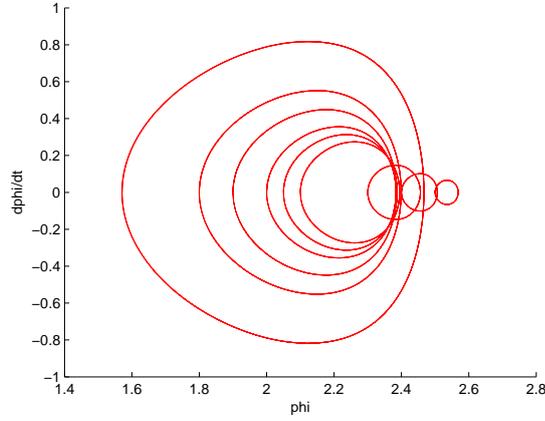
$$T = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ds}{\sqrt{2(H_0 - V(s))}}.$$

Por ejemplo, para $\dot{\theta}_0 = 1$, $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $T \sim 3.47$.

Correspondiente a ϕ deducimos θ en la forma:

$$\theta = \theta_0 + \kappa \int_0^t \frac{d\tau}{\operatorname{sen}^2 \phi(\tau)}.$$

Es importante observar que los datos iniciales aparecen en la ecuación a través de κ . Al variar $\dot{\theta}_0$ y ϕ_0 la ecuación también cambia. En la figura $\dot{\theta}_0 = 1$ y se han dado valores crecientes a ϕ_0 a partir de $\frac{\pi}{2}$. De uno de ellos en adelante se muestra una aparente violación de la unicidad orbital. Sin embargo son órbitas de ecuaciones diferentes.



Estudiamos ahora la periodicidad de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en el espacio. Observamos primero que $\theta(t)$ y $\theta(t + nT)$ tienen la misma derivada, luego difieren en una constante. Si por otro lado,

$$\theta(t_\alpha + nT) = \theta(t_\alpha) + 2m\pi, \quad (2.13)$$

para algún valor t_α entonces:

$$\theta(t + nT) = \theta(t) + 2m\pi \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pero si esto ocurre para $m, n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{lf}(\theta(t), \phi(t))$$

es periódica de periodo nT .

Analizamos a continuación la relación (2.13). Elegimos t_α un valor cualquiera donde $\dot{\phi} = \alpha$. Entonces:

$$\theta(t_\alpha + nT) - \theta(t_\alpha) = \kappa \int_{t_\alpha}^{t_\alpha + nT} \frac{d\tau}{\text{sen}^2 \phi(\tau)} = 2\kappa n \int_{t_\alpha}^{t_\alpha + \frac{T}{2}} \frac{d\tau}{\text{sen}^2 \phi(\tau)} = 2\kappa n I.$$

Efectuando el cambio $\zeta = \phi(\tau)$ en la integral I :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\zeta}{\text{sen}^2 \zeta \sqrt{V(\alpha) - V(\zeta)}},$$

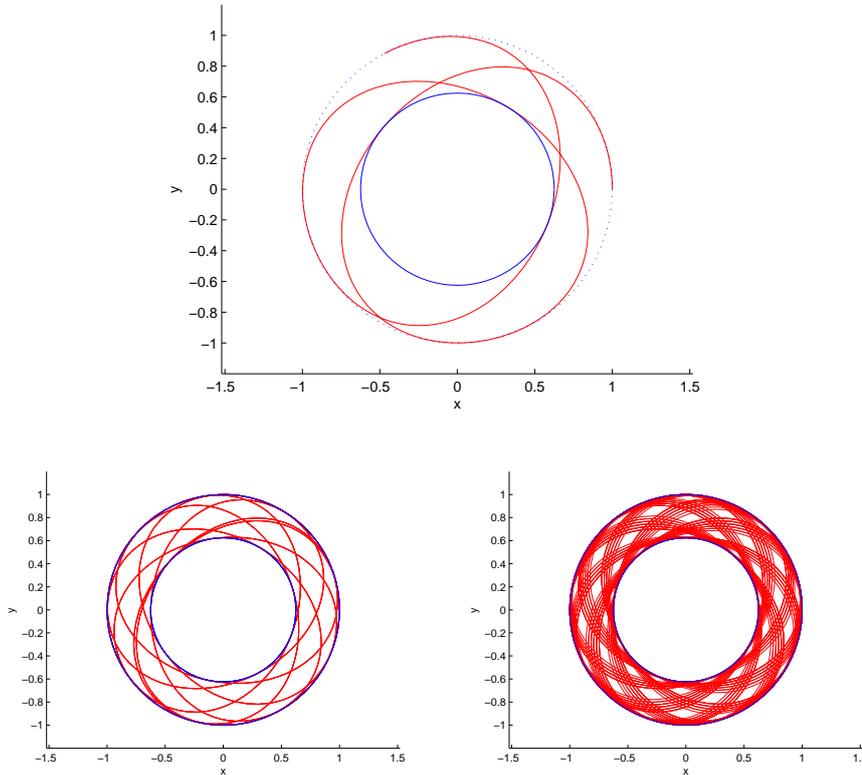
pues $H_0 = V(\alpha)$. La expresión de I es función de los datos iniciales y define una integral elíptica. La condición de solución periódica de periodo nT se expresa entonces en la forma:

$$\frac{\kappa I}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Se deduce por tanto de esta relación que la generalidad de tales trayectorias no es periódica. La proyección de $\mathbf{r}(t)$ sobre el plano xy es una curva confinada en el anillo:

$$r_\beta := l \sin \beta \leq \rho \leq r_\alpha := l \sin \alpha, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Efectúa una tangencia cada vez que corta a las circunferencias $\rho = r_\alpha$, $\rho = r_\beta$ que lo definen. El periodo T coincide con el tiempo en que efectúa dos tangencias consecutivas en el mismo círculo. Esto equivale a una batida del péndulo circular. En las figuras que siguen tomamos los datos de referencia $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 1$, $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Los valores de α, β son $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2.4647$, $r_\alpha = 1$, $r_\beta = 0.6248$. En la primera se representa la órbita tras un intervalo de tiempo de $n = 3$ periodos. En las otras dos los intervalos son de 10 y 50 periodos, respectivamente. Se conoce a estas configuraciones como “birdeyes” ([9]).



Observación 2.19. Un análisis similar basado en la conservación de la energía puede consultarse en [9]. Véase también [8].

2.4. Teorema de Noether

Estudiamos ahora cómo las simetrías del Lagrangiano dan lugar a integrales primeras de las ecuaciones de Euler–Lagrange. Cuando se trata del movimiento de

un sistema de partículas estas integrales primeras se identifican con ‘magnitudes conservadas’. Para aclarar ideas supongamos que el Lagrangiano $L(t, q, \dot{q})$ de un tal sistema no depende de la variable q_{k_0} . Resulta entonces de las ecuaciones del movimiento que:

$$\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}_{k_0}}) = L_{q_{k_0}} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\dot{q}_{k_0}} = \text{constante.}$$

Es costumbre en Mecánica llamar a $L_{\dot{q}}$ el momento generalizado. El que L no dependa de q_{k_0} da lugar a la ‘conservación’ de la componente k_0 -ésima de dicho momento. Obsérvese que la ausencia de q_{k_0} equivale a la invariancia del Lagrangiano $L(t, q, \dot{q})$ con respecto del grupo de transformaciones:

$$T_s(q) = q + s\mathbf{e}_{k_0}, \quad \mathbf{e}_{k_0} = (\delta_{ik_0})_{1 \leq i \leq n}.$$

Las ideas que siguen conforman un caso muy especial de los resultados obtenidos por E. Noether en la segunda década del siglo XX. Se ocupan éstos del escenario más general de la mecánica de medios continuos y la relatividad general ([6]).

Definición 2.20. Sean $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\{T_s(x)\}$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, una familia de difeomorfismos $T_s : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$.

a) Se dice que el Lagrangiano F es invariante frente a la familia si:

$$F(T_s(x), DT_s(x)p) = F(x, p) \quad \forall (x, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, |s| < \varepsilon. \quad (2.14)$$

b) Se dice que F es infinitesimalmente invariante si:

$$\frac{d}{ds}(F(T_s(x), DT_s(x)p))|_{s=0} = 0 \quad \forall (x, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Es claro que a) implica b). Las condiciones de la implicación contraria se detallan a continuación. Se remite a [8] para una prueba.

Lema 2.21. Supongamos que la familia $\{T_s\}$ cumple $T_0 = I$ mientras (propiedad de grupo):

$$T_{s_1+s_2} = T_{s_1} \circ T_{s_2},$$

siempre que los índices varíen en $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces la condición b) implica la a) en la Definición 2.20.

En los siguientes resultados se admite que la familia de difeomorfismos $\{T_s\}$ es tal que $T(x, s) := T_s(x)$ constituye además una aplicación de clase C^2 en sus $N+1$ variables. Nos referiremos a $F(x, p)$ como un Lagrangiano porque tendremos en mente el funcional

$$J(x) = \int_a^b F(x, x').$$

Observación 2.22. La condición a) de la Definición 2.20 implica que:

$$J(x) = J(T_s \circ x) \quad \forall x \in C^1([a, b], \mathbb{R}^N), |s| < \varepsilon.$$

Puede probarse que la validez de esta relación implica a su vez a) ([8]).

Teorema 2.23. *Supongamos que el Lagrangiano F es C^2 en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ y es invariante frente a la familia $\{T_s\}$. Entonces dicha familia deja invariante el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Euler–Lagrange del funcional J . Es decir, $x(t)$ es una solución de:*

$$\frac{d}{dt}(F_p) = F_x,$$

si y sólo si $y(t) = T_s(x(t))$ también lo es.

Demostración. Usando (2.14), derivando respecto de x y p obtenemos las relaciones:

$$F_x(x, p) = F_x(T_s(x), DT_s(x)p)DT_s(x) + F_p(T_s(x), DT_s(x)p)D^2T_s(x)p,$$

$$F_p(x, p) = F_p(T_s(x), DT_s(x)p)DT_s(x).$$

De las ecuaciones de Euler–Lagrange se deduce substituyendo:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(F_p(T_s(x), DT_s(x)x')DT_s(x)) \\ &= F_x(T_s(x), DT_s(x)x')DT_s(x) + F_p(T_s(x), DT_s(x)x')(DT_s(x))', \end{aligned} \quad (2.15)$$

en donde $' = d/dt$. Llamando $z = T_s(x)$:

$$\left(\frac{d}{dt}F_p(z, z') \right) DT_s(x) = F_x(z, z')DT_s(x),$$

lo cual implica el resultado deseado. \square

Teorema 2.24 (Noether). *Bajo las condiciones del Teorema 2.23 sea $x(t)$ una solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas a J . Entonces:*

$$F_p(T_s(x(t)), DT_s(x(t))x'(t))\partial_s T_s(x(t)) = \text{constante}.$$

Si en particular $T_0 = I$ entonces:

$$F_p(x(t), x'(t))A(x(t)) = \text{constante}, \quad A(x) = \partial_s T(x)|_{s=0}. \quad (2.16)$$

Observación 2.25. La ecuación (2.16) afirma que el primer miembro define una integral primera de las ecuaciones de Euler–Lagrange.

Demostración. Usando de nuevo la ecuación (2.14):

$$F(T_s(x(t)), DT_s(x(t))x'(t)) = F(x(t), x'(t)),$$

obtenemos al derivar con respecto a s :

$$F_x(T_s(x), DT_s(x)x')\partial_s(T_s(x)) + F_p(T_s(x), DT_s(x)x')\partial_s(DT_s(x)x') = 0,$$

de donde permutando las derivadas en el último término y usando las ecuaciones de Euler–Lagrange llegamos a:

$$(F_p(T_s(x), DT_s(x)x'))'\partial_s(T_s(x)) + F_p(T_s(x), DT_s(x)x')(\partial_s(T_s(x)))' = 0,$$

de donde se sigue que $F_p(T_s(x), DT_s(x)x')\partial_s(T_s(x))$ se conserva.

2.4.1. Aplicaciones al problema de n -cuerpos

Según se explicó en la Sección 2.1.2 la dinámica de n partículas bajo la interacción gravitatoria responde a las ecuaciones:

$$\mathcal{M}\ddot{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{x}}U(\mathbf{x}) = 0,$$

donde $\mathbf{x} = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ y

$$U(\mathbf{x}) = -G \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}, \quad r_{kl} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|.$$

Son las ecuaciones de Euler–Lagrange asociadas al Lagrangiano:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{M}\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - U(\mathbf{x}).$$

Invariancia frente a traslaciones. Sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijado. El Lagrangiano L es invariante frente a la familia de traslaciones:

$$T_s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + s\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (v, \dots, v), \quad s \in \mathbb{R},$$

pues:

$$U(T_s(\mathbf{x})) = U(\mathbf{x}), \quad DT_s(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}.$$

En este caso $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$. Por consiguiente:

$$\langle \mathcal{M}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle = c_{\mathbf{v}}, \quad c_{\mathbf{v}} = \text{constante}.$$

De aquí se deduce que:

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}\dot{\mathbf{x}} = \sum_k m_k \dot{r}_k = \text{constante}.$$

Así, la invariancia frente a traslaciones da lugar a conservación del momento lineal \mathbf{p} .

Observación 2.26. La misma conclusión es cierta si el potencial gravitatorio se reemplaza por uno de la forma:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{k < l} \phi_{k,l}(r_k - r_l).$$

Invariancia frente a rotaciones. Consideramos ahora el grupo de transformaciones:

$$T_s(\mathbf{x}) = (R(s)r_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad R(s) = \begin{pmatrix} \cos s & \operatorname{sen} s & 0 \\ -\operatorname{sen} s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que conforman las rotaciones de ángulo s alrededor del eje z de todas las partículas del sistema. Se tiene claramente que:

$$U(T_s(\mathbf{x})) = U(\mathbf{x}).$$

Por otro lado $DT_s(x)\mathbf{v} = T_s(\mathbf{v})$ con independencia de \mathbf{x} . Luego:

$$\langle \mathcal{M}DT_s(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, DT_s(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathcal{M}T_s(\dot{\mathbf{x}}), T_s(\dot{\mathbf{x}}) \rangle = \sum_k m_k |R(s)\dot{r}_k|^2 = \langle \mathcal{M}\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle.$$

Asimismo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\Gamma r_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\langle \mathcal{M}\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_k m_k \langle \dot{r}_k, \Gamma r_k \rangle = \sum_k m_k (\dot{x}_k y_k - x_k \dot{y}_k) = -\langle \mathbf{L}, \mathbf{e}_3 \rangle,$$

se mantiene constante, donde

$$\mathbf{L} = \sum_k m_k r_k \times \dot{r}_k,$$

es el momento angular del sistema. Razonando de manera análoga se obtiene que las otras dos componentes de \mathbf{L} son constantes. Hemos probado entonces la conservación de \mathbf{L} .

Observación 2.27. De igual manera se prueba la conservación de \mathbf{L} si el potencial gravitatorio se substituye por otro de la forma:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{k < l} \phi_{k,l}(|r_k - r_l|).$$

2.4.2. Lagrangianos que dependen del tiempo

Extendemos las ideas precedentes y consideramos transformaciones y Lagrangianos que dependen del tiempo. Para $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ sea:

$$\begin{aligned} H_\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ (t, x) &\longmapsto (s, y) = (S_\varepsilon(t, x), T_\varepsilon(t, x)) \end{aligned}$$

una aplicación de clase C^1 en $(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ tal que:

$$H_0(t, x) = (t, x).$$

Denotemos:

$$S_\varepsilon(t, x) = t + \mu(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad T_\varepsilon(t, x) = x + \omega(t, x)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

en donde $\mu(t, x) = \partial_\varepsilon S_\varepsilon(t, x)|_{\varepsilon=0}$ y $\omega(t, x) = \partial_\varepsilon T_\varepsilon(t, x)|_{\varepsilon=0}$.

Consideremos el Lagrangiano $F \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Dados $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ y un intervalo $I = [a, b]$ se define el funcional,

$$J(x, I) = \int_I F(t, x, x') dt,$$

que ahora depende también del intervalo I .

Tomemos una función fijada $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$. Nos proponemos perturbar a la vez la función u y el intervalo I , observando el efecto resultante sobre J . A tal fin llamamos:

$$s(t, \varepsilon) = S_\varepsilon(t, u(t)) =: S_\varepsilon(t), \quad y(t, \varepsilon) = T_\varepsilon(t, u(t)).$$

Nótese que:

$$s(t, \varepsilon) = t + \mu(t, x(t))\varepsilon + o(\varepsilon), \quad y(t, \varepsilon) = x(t) + \omega(t, x(t))\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Fijado el intervalo I y para ε pequeño, la ecuación $s = S_\varepsilon(t)$ permite despejar $t = S_\varepsilon^{-1}(s)$ siempre que $t \in I$. Se obtiene así:

$$v(s, \varepsilon) = y(S_\varepsilon^{-1}(s), \varepsilon) \quad s \in I(\varepsilon) := S_\varepsilon(I) = [a(\varepsilon), b(\varepsilon)].$$

Por construcción se satisface que:

$$y(t, \varepsilon) = v(S_\varepsilon(t), \varepsilon).$$

Observamos entonces que $(v(\cdot, \varepsilon), I_\varepsilon)$ es una perturbación de (u, I) pues:

$$(v(\cdot, \varepsilon), I_\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = (u, I).$$

Definimos ahora:

$$\mathcal{J}(\varepsilon) = J(v(\cdot, \varepsilon), I(\varepsilon)) = \int_{I(\varepsilon)} F(s, v(s, \varepsilon), v'(s, \varepsilon)) ds. \quad (2.17)$$

En el siguiente resultado se calcula la variación de \mathcal{J} con respecto de ε (se omiten los detalles de la demostración).

Teorema 2.28. *En las condiciones señaladas se tiene que:*

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(F_x(s, u(s), u'(s)) + \frac{d}{ds}(F_p(s, u(s), u'(s))) \right) \partial_\varepsilon v(s, 0) ds + \left. \left\{ \omega(t, u) F_p(t, u, u') + \mu(t, u) (F(t, u, u') - u' F_p(t, u, u')) \right\} \right|_{t=a}^b, \quad (2.18)$$

donde

$$\partial_\varepsilon v(s, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \omega(s, u(s)) - \mu(s, u(s)) u'(s). \quad (2.19)$$

La Definición 2.20 se extiende al nuevo escenario en los términos siguientes. Se dice que el funcional $J(x, I)$ es invariante frente la familia de transformaciones $H_\varepsilon(t, x)$ si para toda $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ y todo intervalo $I = [a, b]$ se cumple que:

$$\mathcal{J}(\varepsilon) = \mathcal{J}(0),$$

para todo ε suficientemente pequeño, donde $\mathcal{J}(\varepsilon)$ se define en (2.17). Una consecuencia directa es que:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Esta relación se adopta como definición de invariancia infinitesimal de J respecto de la familia $\{H_\varepsilon(x, t)\}$. Tal propiedad es menos restrictiva que la de invariancia y es la que se usa en la práctica. Concluimos con una generalización del Teorema 2.24 cuya prueba se omite por razones de espacio.

Teorema 2.29. *Supongamos que $F(t, x, x')$ es un Lagrangiano C^1 que resulta infinitesimalmente invariante frente a la familia de transformaciones $H_\varepsilon(x, t)$. Si $x(t)$ es solución en (a, b) de las ecuaciones de Euler-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt}(F_p) = F_x,$$

entonces:

$$\omega(t, x) F_p(t, x, x') + \mu(t, x) (F(t, x, x') - x' F_p(t, x, x')) = \text{constante}.$$

Observación 2.30. El resultado contiene al Teorema 2.24 como caso particular. Basta tomar $H_\varepsilon(x, t) = (t, T_\varepsilon(x))$ en donde ε juega el papel de s en aquel teorema.

Lagrangianos que no dependen del tiempo: conservación de la energía. Si $F = F(x, x')$ entonces obtenemos la invariancia frente al grupo de transformaciones:

$$H_\varepsilon(t, x) = (t + \varepsilon, x).$$

Como $\omega = 0$ y $\mu = 1$ resulta que el grupo $\mathcal{H} = pF_p - F$ define una integral primera de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Este es un hecho que ya había sido constatado en el Capítulo I (véase la Sección 1.7.2). En el problema de n -cuerpos la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle + U(\mathbf{x}),$$

es consecuencia de la “invariancia” del Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \langle \mathcal{M} \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - U(\mathbf{x}),$$

con respecto del tiempo, según comprobamos en el Teorema [2.3](#).

Bibliografía

- [1] W. BYRON , R. FULLER, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover, N. Y., 1970.
- [2] M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT, *Calculus of Variations I*. Springer, Berlín, 2004.
- [3] H. KIELHÖFER, *Calculus of Variations. An introduction to the one-dimensional theory with examples and exercises*. Springer, Berlín, 2018.
- [4] E. D. NEUENSCHWANDER, *Emmy Noether's wonderful theorem*. The John Hopkins Un. Press. Baltimore, 2011.
- [5] E. NOETHER, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math–phys. Klasse, 235–257 (1918). Traducción al inglés en arXiv:physics/0503066 [physics.hist-ph].
- [6] D. ROWE, *On Emmy Noether's role in the relativity revolution*. Math. Intelligencer **41** (2019), no. 2, 65–72.
- [7] J.C. SABINA DE LIS, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Curso de Introducción*. 2020. <https://josabina.webs.ull.es>
- [8] J.C. SABINA DE LIS, *Introducción a las Mecánicas Clásica y Celeste*. 2020. Notas en proceso de redacción.
- [9] A. SOMMERFELD, *Mechanics*. Acedemic Press, N. Y., 1952.

An introduction to Calculus of Variations:

Noether's Theorem

Airam Expósito Cruz

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100986129@ull.edu.es

Abstract

THIS memoir is devoted to introduce Noether's Theorem, a result which is of great interest for Physics. The first part deals with the Euler-Lagrange equations while some classical problems in the Calculus of Variations are discussed. The second part reviews the Hamilton Principle, studies different types of constrained problems and concludes with a proof of Noether's theorem. Some few applications are presented.

1. Outline of the first Chapter

THE Calculus of Variations deals with problems of the form

$$\min_{x \in \mathcal{D}} J(x) := \min_{x \in \mathcal{D}} \int_a^b F(t, x, x') dt, \quad (1)$$

where $\mathcal{D} \subset X := (C^{1,pw}[a, b])^N$ is a domain possibly involving 'boundary conditions' at $t = a, b$. More generally, the subject studies the 'critical' points of J in \mathcal{D} , in particular its local extrema. The C^1 function $F: [a, b] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is called the Lagrangian of J .

The objective of the chapter is showing that critical points satisfy the boundary value problem (P):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(F_{x'_i}) = F_{x_i} & 1 \leq i \leq N \\ \mathcal{B}x(a) = A, \quad \mathcal{B}x(b) = B, \end{cases}$$

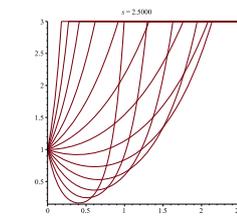
\mathcal{B} standing for the boundary conditions induced either by \mathcal{D} or J .

Legendre condition:

$$(\partial_{x'_i x'_j}^2 F(t, x, x'))_{1 \leq i, j \leq N} \geq 0, \quad (2)$$

is shown to be necessarily satisfied by local minima $x \in \mathcal{D}$ of J . Moreover, in spite of members of X are only C^1 , when condition (2) is strict it implies that solutions to (P) upgrade up to C^2 functions.

The isoperimetric and the Brachistochrone problems are analyzed classical examples. In addition, the problem of radially symmetric surfaces with minimal area reveals that (P) sometimes either fails to exhibit solutions or may possess more than a single solution.



2. Outline of the second chapter

HAMILTON'S "stationary action principle" states that the motion equations of an ideal system are just the Euler-Lagrange equations to the functional:

$$J(q) = \int_a^b \{T(t, q, \dot{q}) - U(t, q, \dot{q})\} dt,$$

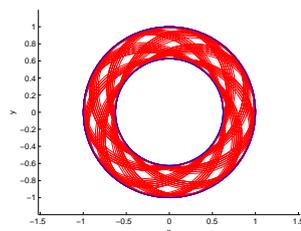
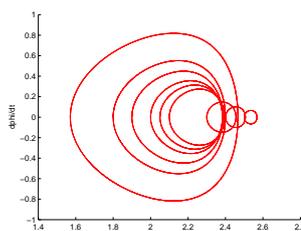
where $q \in \mathbb{R}^n$ are the generalized coordinates of the system, T and U stands for the kinetic and the potential energy, respectively. The principle and its consequences are introduced in this chapter. An isoperimetric problem arises when (1) is forced to satisfy extra conditions:

$$\mathcal{X}_i(x) := \int_a^b G_i(t, x, x') dt = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

while the variational problem (1), when restricted to satisfy:

$$\psi_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

is said to be conditioned by *holonomic* constraints. Both kind of problems are analyzed in detail while the spherical pendulum is presented as an example of the latter ones.



When the functional $J(x) = \int_a^b F(x, x')$ keeps invariant with respect to a one-parametric family $\{T_s(x)\}_{|s| < \epsilon}$ of diffeomorphisms of \mathbb{R}^N then, for every s , the function:

$$D_x F(t, x) + DT_s(x) \partial_s T_s(x),$$

becomes a first integral of the Euler-Lagrange equations. This outstanding feature (Noether's theorem) is employed to study the classical integrals of the n -body problem. In this case,

$$F(x, x') = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} |x'_i|^2 + G \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{|x_k - x_l|},$$

where $x \in \mathbb{R}^{3n}$.

References

- [1] W. BYRON, R. FULLER, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover, N. Y., 1970.
- [2] M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT, *Calculus of Variations I*. Springer, Berlin, 2004.
- [3] H. KIELHÖFER, *Calculus of Variations. An introduction to the one-dimensional theory with examples and exercises*. Springer, Berlin, 2018.
- [4] E. D. NEUENSCHWANDER, *Emmy Noether's wonderful theorem*. The John Hopkins Un. Press. Baltimore, 2011.
- [5] E. NOETHER, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellschaft. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257 (1918). Traducción al inglés en arXiv:physics/0503066 [physics.hist-ph].
- [6] D. ROWE, *On Emmy Noether's role in the relativity revolution*. Math. Intelligencer **41** (2019), no. 2, 65-72.
- [7] J.C. SABINA DE LIS, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Curso de Introducción*. 2020. <https://josabina.webs.ull.es>
- [8] J.C. SABINA DE LIS, *Introducción a las Mecánicas Clásica y Celeste*. 2020. Notas en proceso de redacción.
- [9] A. SOMMERFELD, *Mechanics*. Academic Press, N. Y., 1952.