

Curso 2006/07  
**CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/17**  
I.S.B.N.: 978-84-7756-764-6

**RUYMÁN CRUZ BARROSO**

**Sobre polinomios de Laurent ortogonales  
y fórmulas de cuadratura  
en la circunferencia unidad**

**Director**  
**PABLO GONZÁLEZ VERA**



**SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS**  
**Serie Tesis Doctorales**

# Índice general

<b>1. Algunos resultados preliminares sobre polinomios ortogonales y fórmulas de cuadratura</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. El eje real . . . . .	3
1.3. La circunferencia unidad . . . . .	11
1.4. Computación de las fórmulas tipo-Gauss y de Szegő: algoritmos de Levinson y split Levinson . . . . .	29
<b>2. Sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas y fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos</b>	<b>47</b>
2.1. Introducción . . . . .	47
2.2. Espacios de funciones trigonométricas . . . . .	48
2.3. Interpolación por funciones trigonométricas . . . . .	53
2.4. Sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas . . . . .	59
2.5. Fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos . . . . .	72
2.6. Una conexión con la circunferencia unidad . . . . .	78
2.7. Ejemplos numéricos . . . . .	86
<b>3. Familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad: “ordenamiento” equilibrado</b>	<b>93</b>
3.1. Introducción . . . . .	93
3.2. Polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad . . . . .	95
3.3. El semieje real positivo: L-cuadratura Gaussiana . . . . .	103
3.4. La circunferencia unidad: fórmulas de Szegő . . . . .	107
3.5. Fórmula de Christoffel-Darboux y teorema de Favard . . . . .	114
3.6. Ejemplos numéricos . . . . .	125
<b>4. Familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad: “ordenamiento” general</b>	<b>133</b>
4.1. Introducción . . . . .	133
4.2. Polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad. Leyes de recurrencia . . . . .	134
4.3. El operador multiplicación en $\Lambda$ . . . . .	141
4.4. Fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad . . . . .	146
4.5. Ejemplos numéricos. La función peso de Rogers-Szegő . . . . .	158

---

<b>A. Problemas abiertos</b>	<b>163</b>
A.1. Generalización del algoritmo split Levinson . . . . .	163
A.2. Fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión exactas en subespacios de $\mathcal{T}^{1/2}$ . . . . .	163
A.3. Computación eficiente de las fórmulas de Szegő con un enfoque matricial . .	164
A.4. Fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad con nodos prefijados . .	164
<b>B. Trabajos contenidos</b>	<b>167</b>

# Agradecimientos

Es para mi una satisfacción personal el dar en este párrafo mi más sincero agradecimiento a mi director de Tesis, el profesor Dr. D. Pablo González Vera, Catedrático de Matemática Aplicada del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, por haberme orientado en todo momento, en la dirección correcta y con la calidad humana que le caracteriza, en la elaboración de la presente Memoria. Debo además gratificar su capacidad tanto para plantear problemas de gran interés como para solventar las dificultades que han ido surgiendo desde nuestro primer día de trabajo.

Quiero dar las gracias también a mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, y en especial a la profesora Dra. Dña. María Leyla Daruis Luis, colaboradora también de este trabajo y de quien he seguido desde mis comienzos sus líneas de investigación.

La asistencia a seminarios, congresos, etc. me ha permitido conversar y cambiar opiniones con diversos especialistas. Dos son los profesores que me han influenciado y que han colaborado notablemente en mi trabajo y a quienes también deseo expresar mi agradecimiento. Por un lado, al profesor Dr. D. Olav Njåstad, Catedrático Emérito del Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Ciencia y Tecnología de Trondheim, Noruega. Por otro lado, a la profesora Dra. Dña. María José Cantero, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza. Los descubrimientos de ambos en el área de los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad han servido como base a mi proyecto y de ahí el orgullo de haber mantenido tales colaboraciones.

El apoyo y la ayuda diaria se los debo corresponder en todo momento a mis padres Emilio y Rosa María, y a mis hermanos Carlos y Desiree con sus respectivas familias, quienes siempre han estado apoyándome en alcanzar mis metas y sueños. Finalmente, mi agradecimiento a Inma, por su apoyo constante y por hacer más dulce la etapa final de este trabajo.

# Prólogo

La Teoría sobre Polinomios Ortogonales con respecto a una medida soportada en compactos del eje real, y que en España se ha convertido en las últimas décadas en un campo de investigación importante, encuentra en los aproximantes de Padé a la transformada de Cauchy de la medida en cuestión, o más generalmente, en el cálculo aproximado de integrales respecto a esta medida, una de sus más directas aplicaciones. En efecto, es bien sabido que las llamadas fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión algebraico o fórmulas de cuadratura Gaussianas basan su construcción y computación en los ceros de la correspondiente familia de polinomios ortogonales. La importancia y aplicabilidad de tales fórmulas, basadas en “integrar exactamente” polinomios con el mayor grado posible han motivado la construcción de fórmulas alternativas para aquellas situaciones en las que el uso de polinomios no parece el más adecuado y como pudiera suceder cuando se integra en presencia de singularidades próximas al intervalo de integración. Surgen así las llamadas fórmulas de cuadratura racionales “tipo-Gauss” donde el papel de los polinomios (funciones racionales con todos sus polos en el infinito) es reemplazado por el de otras funciones racionales con polos dados. Aquí surge la Teoría de las Funciones Racionales Ortogonales o alternativamente la de los Polinomios Ortogonales con respecto a una medida variante, poniéndose de manifiesto la estrecha relación entre los términos “cuadratura” y “ortogonalidad”. Sin duda alguna, en este contexto, la elección de los polos prefijados depende en buena medida de las singularidades del problema que estemos tratando. No obstante, existe una situación muy genérica y que al propio tiempo parece que sea el primer paso que debe darse cuando pasamos de los polinomios a otras funciones con polos prefijados más generales. Nos estamos refiriendo al caso de los polos exclusivamente fijados en el infinito y en otro punto finito del plano complejo, que por comodidad y sencillez, se toma el origen. Aparecen así los polinomios de Laurent como la herramienta apropiada en el cálculo aproximado de integrales con singularidades en el origen y en el infinito. De modo análogo a los polinomios ortogonales y como caso particular de las funciones racionales ortogonales, surge la Teoría de los Polinomios de Laurent Ortogonales con respecto a medidas soportadas principalmente en el semieje real positivo. Su conexión con el llamado “problema fuerte” de los momentos de Stieltjes y con los aproximantes de Padé en dos puntos ha conferido a este tema una gran importancia investigadora, habiéndose llevado a cabo una notoria aportación por parte del grupo de “Teoría de Aproximación” del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, donde al mismo tiempo, se ha venido investigando sobre la computación de integrales de funciones periódicas. Es precisamente en este punto donde arranca nuestra Tesis Doctoral, con un doble objetivo. A saber, por un lado unificar la Teoría de los Sistemas Bi-ortogonales de Polinomios Trigonométricos introducidos por Szegő en 1963 como herramienta fundamental en la construcción de las

llamadas “fórmulas de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrico” y por otra parte, poner de manifiesto que las sucesiones de polinomios de Laurent ortogonales sobre la circunferencia unidad representan la herramienta fundamental en el estudio y diseño de las fórmulas anteriores, también conocidas como fórmulas de Szegő cuando pasamos a la circunferencia unidad por ser los polinomios ortogonales respecto a una medida soportada en la circunferencia unidad, o polinomios de Szegő, el elemento clave tanto en la construcción de los sistemas bi-ortogonales (eje real) como en la de los polinomios de Laurent ortogonales (circunferencia unidad).

En base a estas consideraciones, la Memoria ha quedado dividida en cuatro capítulos incluyendo al final un apéndice donde se recogen algunos problemas que han quedado abiertos durante el desarrollo de ésta. Así, en el capítulo primero establecemos resultados preliminares necesarios sobre ortogonalidad y fórmulas de cuadratura. Tras una breve introducción analizamos en la segunda sección, y con el fin de establecer tanto analogías como diferencias con lo que ocurre en la circunferencia unidad, los aspectos ya conocidos y más relevantes del caso real. Fundamentalmente enunciamos algunas propiedades de los ceros de polinomios ortogonales, la ley de recurrencia a tres términos, fórmula de Christoffel-Darboux y teorema de Favard, así como la construcción de las fórmulas tipo-Gauss, analizando expresiones explícitas para los pesos y mostrando un procedimiento alternativo para computar tales fórmulas mediante el cálculo de los autovalores y autovectores de ciertas matrices tridiagonales conocidas como *matrices de Jacobi*. En la tercera sección fijamos una medida positiva de Borel con soporte en la circunferencia unidad y estudiamos, por un lado, algunas propiedades básicas de los polinomios de Szegő y para-ortogonales, leyes de recurrencia, la función núcleo reproductor y la fórmula de Christoffel-Darboux, y por otro lado, la construcción y caracterización de las fórmulas de Szegő. Para finalizar el capítulo consideramos en la cuarta sección la computación de las fórmulas de Szegő junto a una conexión con las fórmulas tipo-Gauss para el intervalo  $[-1, 1]$ . Dos algoritmos son analizados: el de Levinson, introducido en el contexto del procesamiento de señales digitales y que computa polinomios de Szegő basándose esencialmente en su ley de recurrencia, y el de split Levinson en sus versiones simétrica y antisimétrica, que computa directamente en el caso de una medida positiva de Borel cuyos momentos trigonométricos sean reales, polinomios para-ortogonales con parámetros reales  $\pm 1$ . El coste computacional de este nuevo procedimiento se reduce aproximadamente a la mitad en comparación con el algoritmo clásico de Levinson y efectuamos diversos ejemplos numéricos considerando las funciones peso particulares de Legendre y de Chebyshev de primera y segunda especie. Tras analizar estos resultados concluimos con algunas propiedades sobre lo que ocurre al tratar con una función peso en la circunferencia unidad con ciertas condiciones de simetría.

Tal y como se comenta en el primer capítulo, W. B. Jones, O. Njåstad y W. J. Thron introdujeron y caracterizaron en el año 1989 las *fórmulas de Szegő*. Por otro lado, G. Szegő en el año 1963 introdujo los denominados *sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos* y construyó fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable, con el inconveniente de que éstas sólo podían contener un número par de nodos. Siguiendo esta línea proponemos en el segundo capítulo recuperar las fórmulas de Szegő realizando las modificaciones técnicas adecuadas a las introducidas por G. Szegő de manera que podamos elegir un número arbitrario de nodos. En la segunda sección presentamos el espacio de funciones trigonométricas con el que vamos a trabajar durante todo el capítulo, que dependen de un parámetro  $\gamma \in \{0, 1/2\}$

y de manera que cuando  $\gamma = 0$  recuperamos las funciones polinómicas trigonométricas. Un resultado crucial es la relación existente entre este tipo de funciones trigonométricas y ciertos polinomios de Laurent generalizados dependientes también del mismo parámetro  $\gamma$ . Como aplicación establecemos un resultado sobre los ceros de este tipo de funciones y una generalización del conocido teorema de Riesz-Féjer. Dado que nuestro propósito es construir fórmulas de cuadratura basadas en este espacio de funciones trigonométricas, analizamos en la tercera sección el problema de interpolación de tipo Lagrange y de tipo Hermite. A partir de este momento consideramos una medida positiva de Borel en  $(-\pi, \pi]$  y definimos el concepto de *sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas*, que depende también del parámetro  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  y que generaliza al introducido por G. Szegő. El resultado más notable es la conexión existente entre este sistema y la familia de los correspondientes polinomios de Szegő, lo que nos permitirá justificar que, al igual que en el enfoque introducido por W. B. Jones, O. Njåstad y W. J. Thron, lo que esencialmente necesitamos para construir este tipo de fórmulas de cuadratura es la familia de polinomios de Szegő. En relación con estos sistemas bi-ortogonales probamos algunas propiedades sobre ceros, una fórmula de Christoffel-Darboux para la correspondiente función reproductora y una ley de recurrencia. En la quinta sección abordamos la construcción de fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable, válido ahora tanto si el número de nodos es par como impar, caracterizando tales fórmulas y dando expresiones explícitas para la computación de los pesos. En la sexta sección establecemos una conexión entre sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas y polinomios para-ortogonales, es decir, una conexión con la circunferencia unidad, para finalizar en la séptima sección con la computación aproximada de un cierto tipo de integrales definidas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y con los que ilustrar la efectividad numérica de las fórmulas de cuadratura consideradas en el capítulo.

En la segunda parte de esta Memoria, los capítulos tercero y cuarto, nos centramos en el estudio de familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad, necesarias para la obtención de bases del espacio de funciones definidas en la circunferencia unidad de cuadrado integrable con respecto a una medida de Borel positiva, y con el fin de construir fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad que sean exactas en subespacios de Laurent de dimensión lo más grande posible. Por analogía al papel que juega en el caso polinómico la familia de subespacios de polinomios con un cierto grado, será necesario en esta situación inducir un *ordenamiento de subespacios de polinomios de Laurent*. Los ordenamientos que parecen más “naturales”, conocidos como los *equilibrados*, se corresponden con un crecimiento paralelo de potencias tanto positivas como negativas de la variable  $z$ , y son a los que dedicamos nuestro estudio en el tercer capítulo. Tras una breve introducción, definimos en la segunda sección el concepto de *familia de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a una medida y a un ordenamiento*. Una relación directa entre estas familias de polinomios de Laurent y la familia de polinomios de Szegő permite establecer leyes de recurrencia para tales familias y una conexión entre polinomios de Laurent ortogonales y los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas definidas en el capítulo anterior. Al igual que en el caso polinómico ordinario, como nuestro fin es el de construir fórmulas de cuadratura, dedicamos la siguiente sección a enumerar los aspectos más relevantes y ya conocidos cuando la medida positiva de Borel tiene su soporte en el semieje real positivo. Las analogías y diferencias con la circunferencia unidad quedan de manifiesto en la sección cuarta, en la que se re-

cuperan las fórmulas de Szegő. Estas quedan caracterizadas en términos de polinomios de Laurent ortogonales, y en cuanto a la computación se establece una conexión con el algoritmo split Levinson introducido en el primer capítulo. En la siguiente sección se encuentra una fórmula de Christoffel-Darboux y se demuestra un teorema de Favard para familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad y con respecto a un ordenamiento equilibrado. Finalizamos el capítulo con la sexta sección dedicada a poner en práctica algunos ejemplos numéricos ilustrativos para evaluar un cierto tipo de integrales definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

En el cuarto y último capítulo consideramos familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a un ordenamiento arbitrario, generalizando pues tanto el caso polinómico ordinario como los casos equilibrados. Tras una breve introducción, dedicamos la segunda sección a un análogo de la segunda sección del capítulo previo: establecer una relación entre estas familias de polinomios de Laurent y la familia de polinomios de Szegő, lo cual nos permite generalizar tanto las leyes de recurrencia a tres términos como establecer un teorema general de Favard. En la tercera sección analizamos el operador multiplicación en el espacio de polinomios de Laurent, recuperando cuando trabajamos en el caso polinómico ordinario la matriz de representación de Hessenberg así como cuando trabajamos con una situación equilibrada la reciente representación penta-diagonal establecida por el grupo M.J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez y que ha dado origen a la teoría CMV. En nuestro enfoque se toma un ordenamiento fijo pero arbitrario y se prueba a partir de las condiciones de ortogonalidad el resultado obtenido por el citado grupo usando técnicas de Teoría de Operadores: la matriz penta-diagonal es la representación del operador multiplicación en el espacio de polinomios de Laurent más estrecha. En la sección cuarta consideramos la construcción de fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad en este contexto general, demostrando que los ordenamientos equilibrados que parecen más naturales son los óptimos a la hora de construir tales fórmulas, exactas en subespacios de Laurent lo más grandes posibles. Tras caracterizar en estos términos las fórmulas de Szegő establecemos el problema análogo de cálculo de autovalores y autovectores de matrices tri-diagonales de Jacobi en el eje real, ahora en la circunferencia unidad, a partir de las matrices de Hessenberg o penta-diagonales. Las demostraciones que presentamos, basadas en condiciones de ortogonalidad, son alternativas a las establecidas también recientemente por el grupo CMV empleando técnicas de Teoría de Operadores. Para finalizar, consideramos en la quinta sección algunos ejemplos numéricos con los que ilustramos los resultados deducidos en el capítulo y donde consideramos la función peso definida en el intervalo  $(-\pi, \pi]$  que da lugar a los denominados *q-polinomios ortogonales de Rogers-Szegő*.

Esta Memoria contiene dos apéndices. En el primero, como ya hemos comentado, se plantean algunos problemas abiertos relacionados que podríamos abordar en el futuro y en el segundo citamos los trabajos contenidos que ya han sido publicados o aceptados en diferentes revistas.

Sólo se llega a lo general partiendo de lo particular.  
H. Poincaré

# Índice de símbolos más frecuentes

---

$\mathbb{T}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  = 1\}$ , circunferencia unidad
$\mathbb{D}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$ , interior de la circunferencia unidad
$\mathbb{E}$	$:= \{z \in \mathbb{C} :  z  > 1\}$ , exterior de la circunferencia unidad
$\mathbb{P}$	$:= \mathbb{C}[z]$ , espacio vectorial complejo de polinomios en la variable $z$ con coeficientes complejos.
$\mathbb{P}_n$	$:= \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ , subespacio vectorial de polinomios con grado menor o igual que $n$
$\mathbb{P}_{-1}$	$:= \{\emptyset\}$ , subespacio trivial
$\Lambda$	$:= \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ , espacio vectorial complejo de polinomios de Laurent en la variable $z$
$\Lambda_{m,n}$	$:= \text{span}\{z^m, z^{m+1}, \dots, z^n\}$ ( $m \leq n; m, n \in \mathbb{Z}$ ), subespacio vectorial de $\Lambda$
$\mathcal{T}_n^\gamma$	$:= \text{span}\{\cos(k + \gamma)\theta, \text{sen}(k + \gamma)\theta\}_{k=0}^n$ ( $\gamma \in \{0, 1/2\}$ ), espacio de funciones trigonométricas
$\mathcal{T}^\gamma$	$:= \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n^\gamma$
$\Lambda_n^\gamma$	$:= \text{span}\{z^{-(n+\gamma)}, \dots, z^{n+\gamma}\}$ ( $\gamma \in \{0, 1/2\}$ ), extensión del espacio de polinomios de Laurent
$\Lambda^\gamma$	$:= \cup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^\gamma = \mathbb{C}[z^{1-\gamma}, z^{\gamma-1}]$
$(\Lambda_n^\gamma)^H$	$:= \{L \in \Lambda_n^\gamma : L \text{ Hermitiano}\}$ .
$\mathcal{L}_n$	$:= \Lambda_{-p(n), q(n)} = \text{span}\{z^j : -p(n) \leq j \leq q(n)\}$
$f_*(z)$	$:= f(1/\bar{z})$ , conjugación sub-estrella de la función $f$
$Q_n^*(z)$	$:= z^n Q_{n*}(z)$ , polinomio recíproco del polinomio $Q_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$
$\sigma$	medida positiva de Borel en $[-1, 1]$
$\omega$	medida positiva de Borel en $\mathbb{T}$
$\tilde{\sigma}$	función peso en $[-1, 1]$
$\tilde{\omega}$	función peso en $\mathbb{T}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$	producto interior inducido por $\sigma$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$	producto interior inducido por $\omega$
$p_n(x)$	$n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a $\sigma$ en $[-1, 1]$ .
$P_n(x)$	$n$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a $\sigma$ en $[-1, 1]$ . $:= a_n z^n + \dots + P_n(0)$
$\rho_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Szegő (ortogonal mónico) con respecto a $\omega$ en $\mathbb{T}$
$s_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Szegő asociado o de segunda especie

---

---

$\varphi_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a $\omega$ en $\mathbb{T}$ := $\kappa_n z^n + \cdots + \varphi_n(0)$
$B_n(z, \tau)$	$n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a $\omega$ en $\mathbb{T}$ y parámetro $\tau \in \mathbb{T}$
$A_n(z, \tau)$	$n$ -ésimo polinomio para-ortogonal asociado o de segunda especie
$p(n)$	sucesión generadora
$q(n)$	:= $n - p(n)$ para todo $n \geq 0$ , sucesión generadora
$s(n)$	:= $p(n) - p(n-1) \in \{0, 1\}$ para todo $n \geq 1$
$\lambda(n)$	:= $p(n) - p(n-2) \in \{0, 1, 2\}$ para todo $n \geq 2$
$\phi_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Laurent mónico ortogonal en $\mathbb{T}$ con respecto a la medida $\omega$ y al ordenamiento inducido por $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ si el contexto es equilibrado y respecto al ordenamiento inducido por $p(n)$ si el contexto es general.
$\tilde{\phi}_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Laurent mónico ortogonal en $\mathbb{T}$ con respecto a la medida $\omega$ y al ordenamiento inducido por $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$
$\chi_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal en $\mathbb{T}$ con respecto a la medida $\omega$ y al ordenamiento inducido por $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ si el contexto es equilibrado y respecto al ordenamiento inducido por $p(n)$ si el contexto es general.
$\tilde{\chi}_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal en $\mathbb{T}$ con respecto a la medida $\omega$ y al ordenamiento inducido por $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$
$\psi_n(z)$	$n$ -ésimo polinomio de Laurent ortogonal en $\mathbb{T}$ (no necesariamente mónico u ortonormal) con respecto a la medida $\omega$ y a un ordenamiento inducido por $p(n)$
$\delta_{m,n}$	función delta de Kronecker
$E[\cdot]$	función parte entera
$\delta_n$	:= $\rho_n(0)$ , $n$ -ésimo coeficiente de Verblunsky
$\eta_n$	:= $\sqrt{1 -  \delta_n ^2}$
$I_\sigma(f)$	:= $\int_{-1}^1 f(x) d\sigma(x)$
$I_\omega(f)$	:= $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\omega(\theta)$
$I_n(f)$	:= $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ , $n$ -ésima fórmula de cuadratura Gaussiana para $I_\sigma(f)$ := $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(z_k)$ , $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő para $I_\omega(f)$
$\{f_n^{(\gamma)}, g_n^{(\gamma)}\}_{n \geq 0}$	sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas con respecto a $\omega$ ( $\gamma \in \{0, 1/2\}$ )
$\{A_n^{(\gamma)}, B_n^{(\gamma)}\}_{n \geq 0}$	sistema bi-ortonormal de funciones trigonométricas con respecto a $\omega$ ( $\gamma \in \{0, 1/2\}$ )
$\mathcal{S}_n(x, y)$	$n$ -ésimo núcleo reproductor en $[-1, 1]$ con base ortonormal $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$
$\mathcal{K}_n(z, \xi)$	$n$ -ésimo núcleo reproductor en $\mathbb{T}$ con base ortonormal $\{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0}$
$\mathcal{P}_n(z, \xi)$	$n$ -ésimo núcleo reproductor en $\mathbb{T}$ con base ortonormal $\{\chi_n(z)\}_{n \geq 0}$
$\mathcal{R}_n(\alpha, \theta)$	$n$ -ésimo núcleo reproductor en $[-\pi, \pi]$ con base bi-ortonormal $\{A_n^{(\gamma)}, B_n^{(\gamma)}\}_{n \geq 0}$
$c_n$	:= $\int_{-1}^1 x^n d\sigma(x)$ , $n$ -ésimo momento respecto a $\sigma$
$\mu_n$	:= $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\omega(\theta)$ , $n$ -ésimo momento trigonométrico respecto a $\omega$
$\Delta_n$	determinante de Toeplitz de orden $n$
$J_n$	matriz de Jacobi de orden $n$
$\mathcal{H}_n(\delta)$	matriz de Hessenberg de orden $n$
$\mathcal{C}_n(\delta)$	matriz CMV de orden $n$

---

# Capítulo 1

## Algunos resultados preliminares sobre polinomios ortogonales y fórmulas de cuadratura

### 1.1. Introducción

Consideremos en general una medida  $\mu$  positiva de Borel<sup>1</sup> en el plano complejo, el espacio de Hilbert  $L_2^\mu$  de las funciones medibles  $\phi(z)$  para las cuales  $\int |\phi(z)|^2 d\mu(z) < \infty$  y el producto interior inducido

$$\langle \phi, \psi \rangle_\mu = \int \phi(z) \overline{\psi(z)} d\mu(z) \quad , \quad \phi, \psi \in L_2^\mu.$$

Supongamos que  $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  es un sistema linealmente independiente de funciones en  $L_2^\mu$ . Frecuentemente es conveniente transformar este sistema en otro  $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  también linealmente independiente de manera que  $\varphi_n(z)$  sea una combinación lineal de las  $n+1$  funciones  $\phi_0(z), \dots, \phi_n(z)$  y además,

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_\mu = \int \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = 0 \quad , \quad n \neq m.$$

Este nuevo sistema de funciones diremos que es *ortogonal con respecto a  $\mu$* . Si además

$$\| \varphi_n \|_\mu^2 = \int |\varphi_n(z)|^2 d\mu(z) = 1 \quad , \quad n \geq 0 ,$$

diremos que el sistema es *ortonormal*. Una expresión cerrada para tales funciones ortogonales se obtiene en términos de las funciones originales  $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  y la matriz de Gram

$$G_n := \begin{pmatrix} \langle \phi_0(z), \phi_0(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_0(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_0(z) \rangle_\mu \\ \langle \phi_0(z), \phi_1(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_1(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_1(z) \rangle_\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0(z), \phi_n(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_n(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_n(z) \rangle_\mu \end{pmatrix} ,$$

---

<sup>1</sup>Entenderemos en toda la Memoria que una medida positiva de Borel es estrictamente positiva salvo que sea nula en un conjunto de medida nula.

que es Hermitiana y definida positiva dado que  $\langle \phi_k(z), \phi_l(z) \rangle_\mu = \overline{\langle \phi_l(z), \phi_k(z) \rangle_\mu}$  y como

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) G_n (\overline{\alpha_0}, \dots, \overline{\alpha_n})^T = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_k \overline{\alpha_l} \langle \phi_l(z), \phi_k(z) \rangle_\mu ,$$

escribiendo  $\psi_n(z) = \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_k} \phi_k(z)$  obtendremos que

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) G_n (\overline{\alpha_0}, \dots, \overline{\alpha_n})^T = \langle \psi_n(z), \psi_n(z) \rangle_\mu = \| \psi_n(z) \|_\mu^2 ,$$

que es siempre no-negativo y que se anula únicamente cuando  $\psi_n(z)$  es cero en casi todo punto. Como consecuencia se tiene que

$$\Delta_n := \det(G_n) > 0 \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad ; \quad \Delta_{-1} := 1 ,$$

y es fácil comprobar (véase por ejemplo [101, pág. 6]) que las funciones ortonormales vienen explícitamente dadas para  $n \geq 0$  por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0(z), \phi_0(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_0(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_0(z) \rangle_\mu \\ \langle \phi_0(z), \phi_1(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_1(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_1(z) \rangle_\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0(z), \phi_{n-1}(z) \rangle_\mu & \langle \phi_1(z), \phi_{n-1}(z) \rangle_\mu & \cdots & \langle \phi_n(z), \phi_{n-1}(z) \rangle_\mu \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \cdots & \phi_n(z) \end{vmatrix} . \tag{1.1}$$

Nuestro primer interés en esta Memoria será el considerar como sistema de funciones linealmente independiente los monomios  $1, z, z^2, z^3, \dots$ , obteniendo por tanto a partir de esta base un sistema de polinomios ortogonales con respecto a la medida  $\mu$ . Además, el sistema de polinomios ortonormales es único si imponemos que el coeficiente director sea positivo. Denotando por  $\mathbb{P} := \mathbb{C}[z]$  el espacio vectorial complejo de polinomios en la variable  $z$  con coeficientes complejos, por  $\mathbb{P}_n = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$  el subespacio vectorial complejo de polinomios con grado menor o igual que  $n$  y por  $\delta_{m,n}$  la función *delta de Kronecker* definida según

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} , \tag{1.2}$$

tendremos por tanto un sistema de polinomios  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  verificando

1.  $\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \dots$  con  $\kappa_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ ,

2.

$$\int \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = \delta_{m,n} \quad , \quad m, n \geq 0.$$

Se sigue además de (1.1) que  $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$  para todo  $n \geq 0$  y si denotamos por  $\rho_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico, es decir,  $\rho_n(z) := \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}$ , entonces  $\| \rho_n(z) \|_\mu = \frac{1}{\kappa_n}$ .

Unas de las cantidades más relevantes cuando trabajamos con polinomios son sus ceros. El Teorema Fundamental de Álgebra establece que un polinomio de grado exacto  $n$

tiene exactamente  $n$  ceros, contando multiplicidades, pero cuando trabajamos con polinomios ortogonales podemos decir aún mucho más sobre la localización de éstos. En efecto, consideremos el soporte de la medida  $\mu$ , definido por

$$\text{supp}(\mu) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(B_{z,\epsilon}) > 0, \forall \epsilon > 0\},$$

donde  $B_{z,\epsilon}$  es el disco abierto con centro  $z$  y radio  $\epsilon$  (puede comprobarse fácilmente que se trata de un conjunto cerrado). Un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  se dice que es convexo si dados dos puntos  $x, y \in A$ , entonces la línea que los une es un subconjunto de  $A$ . Denotemos por  $Co(A)$  al *hoyo convexo* de  $A$ , es decir, al menor conjunto convexo que lo contiene:

$$Co(A) = \bigcap_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{C} \\ G \text{ convexo}}} G.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado (véase [36, págs. 65-66]):

**Teorema 1.1.1 (Féjer)** *Si  $\varphi_n(z)$  es el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $\mu$  entonces sus ceros se encuentran en  $Co(\text{supp}(\mu))$ . Además, si  $Co(\text{supp}(\mu))$  no es un segmento, entonces los ceros de  $\varphi_n(z)$  están en su interior.*

□

Con esta breve introducción general consideraremos en esta Memoria una medida positiva de Borel  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$ , la cual induce una medida que denotaremos también por  $\omega$  en la circunferencia unidad  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  según

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\omega(\theta).$$

Denotaremos por  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y  $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  el interior y exterior de la circunferencia unidad respectivamente.

La organización de este primer capítulo es la siguiente: como muchos de los resultados que vamos a estudiar tienen ciertas analogías y a la vez diferencias con lo que sucede cuando trabajamos con una medida cuyo soporte es un intervalo de la recta real queda justificado que dediquemos la segunda sección a analizar los aspectos más relevantes de esta situación. En la tercera sección fijaremos una medida positiva de Borel en la circunferencia unidad y estudiaremos los aspectos más relevantes en lo referido a ortogonalidad y construcción de fórmulas de cuadratura, cuya computación es el tema a abordar en la cuarta y última sección. Más concretamente, consideraremos los algoritmos de Levinson y split Levinson que computan polinomios de Szegő y para-ortogonales respectivamente y de una conexión entre la circunferencia unidad y el intervalo  $[-1, 1]$  analizaremos también con detalle la computación de fórmulas tipo-Gauss en tal intervalo.

## 1.2. El eje real

Sin pérdida de generalidad consideremos una medida positiva de Borel  $\sigma$  definida en  $[-1, 1]$  y supongamos que los monomios  $x^k$  son integrables con respecto a  $\sigma$  en  $[-1, 1]$  para todo  $k \geq 0$ . Consideremos también el producto interior inducido

$$\langle F, G \rangle_{\sigma} = \int_{-1}^1 F(x)G(x) d\sigma(x), \quad F, G \in L_2^{\sigma}([-1, 1]). \quad (1.3)$$

Nuestro objetivo será el cálculo aproximado de integrales mediante fórmulas de cuadratura, y como veremos, van a jugar un papel crucial en la construcción de tales fórmulas tanto la interpolación como la ortogonalidad. Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en los subespacios  $\mathbb{P}_n$  ( $n \geq 0$ ) a los monomios  $1, x, x^2, x^3, \dots$  con respecto al producto interior (1.3) obtendremos el correspondiente sistema de polinomios ortogonales, único salvo factor multiplicativo, que puede ser particularmente elegido de manera que el sistema sea ortonormal con coeficientes directores todos positivos o que constituya una familia de polinomios mónicos. En lo que sigue denotaremos por  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  a tales familias respectivamente, por  $c_n$  al  $n$ -ésimo momento dado por  $c_n = \int_{-1}^1 x^n d\sigma(x) \in \mathbb{R}$  para todo  $n \geq 0$  y por  $T_n$  al determinante

$$T_n := \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} > 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad ; \quad T_{-1} := 1. \quad (1.4)$$

(en cuanto a la positividad de  $T_n$ , véase por ejemplo [31, págs. 13-16]).

Los siguientes resultados clásicos establecen propiedades cruciales en la Teoría de Polinomios Ortogonales sobre intervalos finitos del eje real. Las demostraciones pueden verse, por ejemplo, en [31, págs. 18-28], [42, págs. 28-31] ó [79, págs. 18-23].

**Teorema 1.2.1 (Ceros)** *Para todo  $n \geq 1$ , los  $n$  ceros de  $p_n(x)$  son reales, distintos y contenidos en el intervalo abierto  $(a,b)$ .*

□

**Teorema 1.2.2 (Ley de recurrencia)** *La familia  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  puede ser computada recursivamente según la ley a tres términos*

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x) \quad , \quad n \geq 0 \quad ; \quad p_{-1}(x) \equiv 0 \quad , \quad p_0(x) \equiv 1 \quad (1.5)$$

$$\alpha_n := \frac{\langle x p_n(x), p_n(x) \rangle_\sigma}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_\sigma} \quad , \quad \beta_n := \frac{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle_\sigma}{\langle p_{n-1}(x), p_{n-1}(x) \rangle_\sigma} = \frac{T_{n-2} T_n}{T_{n-1}^2} > 0 \quad , \quad \beta_0 := \int_{-1}^1 d\sigma(x).$$

□

Del Teorema 1.2.2 se sigue el siguiente

**Teorema 1.2.3 (Christoffel-Darboux)** *Escribiendo  $P_n(x) = a_n x^n + \dots$  con  $a_n > 0$  para todo  $n \geq 0$  se sigue la identidad*

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(y) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad , \quad x \neq y. \quad (1.6)$$

□

El Teorema 1.2.3 puede probarse de manera alternativa. Supongamos, que tenemos en general un espacio de Hilbert  $H$  de funciones complejas definidas en  $X$  con producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Diremos que  $\mathcal{S}_\omega(z) = \mathcal{S}(z, \omega)$  es un *núcleo reproductor* si

1.  $\mathcal{S}_\omega(z) \in H$  para todo  $\omega \in X$ ,

2.  $\langle f, \mathcal{S}_\omega \rangle = f(\omega)$  para todo  $\omega \in X$  y  $f \in H$ .

Es bien sabido (véase por ejemplo [18] y las referencias ahí citadas) que si el espacio de Hilbert es separable y  $\{\phi_k(z)\}_{k \in \Gamma}$  es una base ortonormal, entonces el único núcleo reproductor viene dado por

$$\mathcal{S}(z, \omega) = \sum_{k \in \Gamma} \phi_k(z) \overline{\phi_k(\omega)}. \quad (1.7)$$

Cuando tomamos  $H = \mathbb{P}_n$  y el producto interior inducido por  $\sigma$ , se sigue de (1.7) que

$$\mathcal{S}(x, t) = \mathcal{S}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(t) \quad (1.8)$$

satisface

$$\langle f(x), \mathcal{S}_n(x, t) \rangle_\sigma = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{S}_n(x, t) d\sigma(x) = f(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall f \in \mathbb{P}_n. \quad (1.9)$$

Sea  $q(x)$  un polinomio con grado máximo  $n-1$ . Entonces, de (1.9) y para cualquier  $y \in \mathbb{R}$  podemos escribir  $\int_{-1}^1 (x-y)q(x) \mathcal{S}_n(x, t) d\sigma(x) = (t-y)q(t)$ . Haciendo  $t = y$  se sigue que

$$\int_{-1}^1 (x-y)q(x) \mathcal{S}_n(x, y) d\sigma(x) = 0 \quad , \quad \forall q \in \mathbb{P}_{n-1}. \quad (1.10)$$

Por otro lado,  $(x-y)\mathcal{S}_n(x, y) \in \mathbb{P}_{n+1}$  y de ahí que  $(x-y)\mathcal{S}_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n+1} \gamma_j(y) P_j(x)$ . De (1.10) tenemos que  $\gamma_j(y) = 0$  para todo  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , y por tanto se cumple que

$$(x-y)\mathcal{S}_n(x, y) = \gamma_n(y) P_n(x) + \gamma_{n+1}(y) P_{n+1}(x). \quad (1.11)$$

Igualando finalmente los coeficientes de los monomios  $x^n$  y  $x^{n+1}$  en ambos lados de la expresión (1.11) se concluye finalmente (1.6).

Haciendo tender ahora  $y$  a  $x$  en (1.6) se sigue la *fórmula confluyente*

$$\mathcal{S}_n(x, x) = \sum_{k=0}^n P_k^2(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \left[ P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) \right] \quad , \quad (1.12)$$

que permite demostrar (véase por ejemplo [31, pág. 28]) la siguiente propiedad:

**Teorema 1.2.4 (Entrelazamiento de ceros)** *Si  $\{x_{i,n}\}_{i=1}^n$  denota el conjunto de ceros de  $p_n(x)$ , entonces  $x_{i,n+1} < x_{i,n} < x_{i+1,n+1}$ , para  $i = 1, \dots, n$  y  $n \geq 1$ .*

□

A lo largo de esta Memoria consideraremos ejemplos numéricos particulares correspondientes a medidas de Borel absolutamente continuas, lo que nos permite escribir  $d\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x)dx$  siendo  $\tilde{\sigma}(x) > 0$  casi por todo en  $[-1, 1]$  (función peso). Entre las familias de polinomios ortogonales más estudiadas cabe citar las de Jacobi, que surgen de la familia bi-paramétrica de funciones peso

$$\tilde{\sigma}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad , \quad \alpha, \beta > -1. \quad (1.13)$$

Como casos particulares  $\alpha, \beta \in \{\pm \frac{1}{2}\}$  se obtienen las familias de polinomios ortogonales de Chebyshev de primera a cuarta especie, con funciones peso respectivas:

$$\tilde{\sigma}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \tilde{\sigma}_2(x) = \sqrt{1-x^2} \quad , \quad \tilde{\sigma}_3(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad , \quad \tilde{\sigma}_4(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (1.14)$$

También como caso particular  $\alpha = \beta = 0$  recuperamos la medida de Lebesgue  $d\sigma(x) \equiv dx$  en  $[-1, 1]$ .

Volviendo a nuestro objetivo, supongamos ahora que queremos estimar la integral

$$I_\sigma(f) = \int_{-1}^1 f(x) d\sigma(x) \quad (1.15)$$

por medio de una *fórmula de cuadratura*, es decir, una combinación lineal de valores del integrando

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \quad (1.16)$$

donde el conjunto  $\{x_k\}_{k=1}^n$  y  $\{A_k\}_{k=1}^n$  con  $x_k = x_{k,n}$  y  $A_k = A_{k,n}$  son los *nodos* y *coeficientes* o *pesos* respectivamente. Nuestro problema será elegir convenientemente estos  $2n$  parámetros de  $I_n(f)$  de manera que se minimice en algún sentido el error  $R_n(f) = I_\sigma(f) - I_n(f)$ . Si partimos de un conjunto de nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  prefijado y si la función  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ , por el *teorema de aproximación de Weierstrass para funciones continuas* parece natural pensar que si reemplazamos en (1.15) el integrando  $f$  por el polinomio  $L_n(f; x)$  que interpola a dicha función en  $\{x_k\}_{k=1}^n$  (es decir,  $L_n(f; x_k) = f(x_k)$  para todo  $k = 1, \dots, n$ ), entonces (1.16) nos debe proporcionar una estimación de (1.15) de fácil computación. A  $L_n(f; x)$  se le conoce como *polinomio interpolador de Lagrange*, que viene dado explícitamente por

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k) \in \mathbb{P}_{n-1} \quad ; \quad l_k(x) := \frac{\pi_n(x)}{(x-x_k)\pi_n'(x_k)} \quad , \quad \pi_n(x) := \prod_{k=1}^n (x-x_k) \quad (1.17)$$

(a  $\pi_n(x)$  se le conoce como el *polinomio nodal*). Puede probarse (véase [79, pág. 80]) que tales fórmulas denominadas *de tipo interpolatorio* poseen *grado de precisión* igual a  $n-1$ , es decir, que  $I_\sigma(P) = I_n(P)$  para todo  $P \in \mathbb{P}_{n-1}$ , permitiendo deducir además la siguiente expresión integral para los pesos

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(x)}{(x-x_k)\pi_n'(x_k)} d\sigma(x) \quad , \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.18)$$

sin más que observar que  $I_\sigma(l_k(x)) = I_n(l_k(x)) = \sum_{j=1}^n A_j l_k(x_j) = A_k$ .

Dado que no hemos impuesto condición alguna al conjunto de nodos, nuestro siguiente paso será demostrar que la ortogonalidad permite incrementar el grado de precisión de tales fórmulas haciendo una adecuada elección de éstos. En cualquier caso, éste siempre será inferior a  $2n$  dado que es fácilmente comprobable que  $\pi_n^2(x) \in \mathbb{P}_{2n}$  nunca podrá ser integrado exactamente. En efecto, se tienen los siguientes resultados (véase por ejemplo, [42, págs. 109-112]):

**Proposición 1.2.5** Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura para  $I_\sigma(f)$  con grado de precisión  $n + k$  siendo  $0 \leq k \leq n - 1$ . Entonces, el polinomio nodal  $\pi_n(x)$  satisface las condiciones de ortogonalidad  $\int_{-1}^1 x^j \pi_n(x) d\sigma(x) = 0$  para todo  $j = 0, 1, \dots, k$ .

□

**Teorema 1.2.6** Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura para  $I_\sigma(f)$ . Entonces,  $I_n(f)$  tiene grado de precisión  $n + k$ , con  $0 \leq k \leq n - 1$ , sí y sólo sí,

1.  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio,
2. El polinomio nodal  $\pi_n(x)$  satisface las condiciones  $\int_{-1}^1 x^j \pi_n(x) d\sigma(x) = 0$  para todo  $j = 0, 1, \dots, k$ .

□

Como consecuencia de este último resultado tomando  $k = n - 1$  surge el siguiente (véase también [51]):

**Corolario 1.2.7** Una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  para  $I_\sigma(f)$  tiene grado de precisión  $2n - 1$  (el máximo alcanzable), sí y sólo sí,

1.  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio,
2. El polinomio nodal  $\pi_n(x)$  coincide, salvo factor multiplicativo, con el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $\sigma$  en  $[-1, 1]$ .

□

Finalmente, para los pesos, que según el Corolario 1.2.7 y (1.18) vienen dados por

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{(x - x_k)P_n'(x_k)} d\sigma(x) \quad , \quad k = 1, \dots, n$$

se deduce, a partir de la fórmula de Christofel-Darboux (1.6) y de la fórmula confluyente (1.12) el siguiente (véase [79, págs. 103-104])

**Teorema 1.2.8** Sea  $I_n(f)$  la fórmula de cuadratura para  $I_\sigma(f)$  de máximo grado de precisión alcanzable. Entonces, los pesos  $A_k$  vienen dados para  $k = 1, \dots, n$  por

$$A_k = \frac{1}{\mathcal{S}_{n-1}(x_k, x_k)} = \frac{1}{\mathcal{S}_n(x_k, x_k)} > 0 \quad , \quad (1.19)$$

siendo  $\mathcal{S}_n(x, t)$  la función núcleo reproductor dada por (1.8), o equivalentemente por

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}P_n'(x_k)P_{n-1}(x_k)} = \frac{-a_{n+1}}{a_nP_n'(x_k)P_{n+1}(x_k)} > 0 \quad , \quad (1.20)$$

donde  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  denota la familia de polinomios ortonormales respecto a  $\sigma$  en  $[-1, 1]$  con  $P_n(x) = a_n x^n + \dots$  y  $a_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ . □

En una fórmula de cuadratura interesa que los errores que pudieran aparecer al evaluar la función  $f$  en los nodos permanezcan acotados. Esto motiva la definición de *estabilidad de una fórmula de cuadratura*, en el sentido de que exista una constante  $M > 0$  que cumpla  $\sum_{j=1}^n |A_j| \leq M$ , y del Teorema 1.2.8 se deduce que la fórmula de cuadratura de máximo grado de precisión alcanzable es estable, dado que el que ésta integre exactamente a constantes y el que los pesos sean positivos implica que

$$\sum_{j=1}^n |A_j| = \sum_{j=1}^n A_j = \int_{-1}^1 d\sigma(x) = c_0.$$

Las fórmulas de cuadratura caracterizadas por el Corolario 1.2.7 y el Teorema 1.2.8 (las de máximo grado de precisión) se denominan *fórmulas Gaussianas* o *fórmulas de Gauss-Christoffel* y han sido ampliamente estudiadas en estos últimos años: véanse los trabajos de Gautschi [51], [53] y [54] así como [15], [55], [60], [65], [81], [89] y [90]. Para los casos particulares de las funciones peso de Jacobi, tipo-Chebyshev y Lebesgue, véanse también las expresiones explícitas para los nodos y pesos dadas en [79, Capítulo 7].

Consideremos ahora fórmulas de cuadratura con nodos preasignados, es decir, reglas del tipo

$$\int_{-1}^1 f(x)d\sigma(x) \approx \sum_{l=1}^m a_l f(y_l) + \sum_{k=1}^n b_k f(x_k) \quad (1.21)$$

donde los nodos  $y_l$  están fijos y las  $m + 2n$  constantes  $a_l, b_k$  y  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$  y  $l = 1, \dots, m$ ) deben ser determinadas para que la regla tenga el máximo grado de precisión (en este caso,  $m + 2n - 1$ ). Definiendo los polinomios  $r(x) = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m)$  y  $s(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$  se tiene el siguiente resultado que caracteriza a tales fórmulas (véase [42, págs. 101-102]).

**Teorema 1.2.9** *La fórmula de cuadratura (1.21) tiene grado de precisión  $m + 2n - 1$ , sí y sólo sí,*

1. *Es exacta en el espacio de polinomios de grado menor o igual que  $m + n - 1$ ,*
2.  *$\int_{-1}^1 r(x)s(x)p(x)d\sigma(x) = 0$  para todo  $p(x)$  polinomio de grado menor o igual que  $n - 1$ .*

□

Los casos más utilizados en la literatura se corresponden con:

1.  $m = 1, y_1 = -1$  ó  $y_1 = 1$ : *integración de Gauss-Radau,*
2.  $m = 2, y_1 = -1$  e  $y_2 = 1$ : *integración Gauss-Lobatto.*

A tales fórmulas junto con las Gaussianas nos referiremos como *fórmulas de tipo-Gauss*. Además, de acuerdo con el Teorema 1.2.9, tales fórmulas existen en el sentido que los nodos son todos distintos, dado que son los ceros de polinomios ortogonales respecto a las medidas positivas  $(x + 1)d\sigma(x)$ ,  $(1 - x)d\sigma(x)$  ó  $(1 - x^2)d\sigma(x)$ , siendo además los pesos positivos. Con todo hemos de reseñar que el término *integración de Gauss-Radau*

ó integración de Gauss-Lobatto se aplicó inicialmente al caso de la medida de Lebesgue en [42, págs. 102-105].

Una vez caracterizadas las fórmulas de cuadratura Gaussianas nos centramos en el problema de la inestabilidad numérica que se plantea a la hora de computarlas. El procedimiento descrito requiere el cálculo previo de los ceros de unos determinados polinomios, lo que puede llevar a la aparición de errores de redondeo cuando el número es elevado. Tenemos por tanto la necesidad de encontrar métodos eficientes que nos permitan computar tales fórmulas. El procedimiento usual, que describimos a continuación, consiste en re-escribir el problema como un problema de cálculo de autovalores de ciertas matrices tri-diagonales. En efecto, de la ley de recurrencia para la familia de polinomios ortogonales mónicos (1.5), se deduce la ley para la correspondiente familia ortonormal

$$P_{k+1}(x)\sqrt{\beta_{k+1}} = (x - \alpha_k)P_k(x) - \sqrt{\beta_k}P_{k-1}(x) ,$$

o equivalentemente,

$$xP_k(x) = P_{k+1}(x)\sqrt{\beta_{k+1}} + \alpha_k P_k(x) + \sqrt{\beta_k}P_{k-1}(x).$$

Si procedemos para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  tendremos que

$$J_n \widehat{P}(x) + \sqrt{\beta_n}P_n(x)e_n = x\widehat{P}(x) ,$$

donde

$$J_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta_{n-2}} & \alpha_{n-2} & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

y

$$\widehat{P}(x) = (P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-2}(x), P_{n-1}(x))^T \in \mathbb{R}^n \quad , \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^n .$$

La matriz  $J_n$  de dimensión  $n$ , tridiagonal y simétrica es conocida como *Matriz de Jacobi*, y aparece originalmente en [68] en el contexto de formas cuadráticas y fracciones continuas. Cuando  $x = x_j$  para  $j = 1, \dots, n$  se tiene que  $J_n \widehat{P}(x_j) = x_j \widehat{P}(x_j)$ , siendo además

$$\widehat{P}(x_j) = (P_0(x_j), P_1(x_j), \dots, P_{n-2}(x_j), P_{n-1}(x_j))^T \neq 0 \quad ,$$

pues en particular,  $P_0(x_j) = \frac{p_0(x_j)}{\|p_0\|_\sigma} = \beta_0^{-1/2}$ . Esto demuestra que los nodos de la  $n$ -ésima fórmula Gaussiana son los autovalores de  $J_n$ . Además, los pesos se expresan en términos de las primeras componentes de los vectores propios normalizados asociados a cada valor propio. Si para  $j = 1, \dots, n$ ,  $v_j = (v_{j,1}, \dots, v_{j,n})^T \in \mathbb{R}^n$  es tal autovector (cumpliendo  $\|v_j\|_2 = \sqrt{v_{j,1}^2 + \dots + v_{j,n}^2} = 1$ ), entonces  $v_{j,1} = \frac{1}{\|\widehat{P}(x_j)\|_2} P_0(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0} \|\widehat{P}(x_j)\|_2}$  y por tanto del Teorema 1.2.8 se sigue que  $\beta_0 v_{j,1}^2 = \frac{1}{\|\widehat{P}(x_j)\|_2^2} = A_j$ .

Vemos pues que una alternativa para computar las fórmulas Gaussianas es la de convertir el problema en otro de cálculo de autovalores y autovectores. Se suele aconsejar

para ello el algoritmo  $QR$  de Francis (véase [6, págs. 612-613] y las referencias ahí citadas) basado en la descomposición  $QR$  de toda matriz real, siendo  $Q$  una matriz ortogonal y  $R$  una matriz triangular (superior o inferior).

Para finalizar esta sección dedicada a los aspectos más relevantes del eje real, veremos un resultado recíproco a la ley de recurrencia a tres términos (1.5), conocido como el *teorema de Favard*. Para ello, consideremos previamente lo siguiente: sea  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de números reales o complejos y  $\mathcal{F} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}$  definido por

$$\mathcal{F}[x^n] = c_n \quad n \geq 0,$$

$$\mathcal{F}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] = \alpha_1\mathcal{F}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathcal{F}[\pi_2(x)] \quad , \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{P}.$$

A  $\mathcal{F}$  se le denomina *funcional de momentos determinado por*  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ , y diremos que es *definido positivo* si  $\mathcal{F}[\pi(x)] > 0$  para todo  $\pi(x) \in \mathbb{P}$ ,  $\pi(x) \geq 0$  no idénticamente nulo. Por otro lado, diremos que el funcional es *cuasi definido* si  $T_n$  dado por (1.4) verifica  $T_n \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ . Entonces, puede probarse el siguiente (véase [31, págs. 20-21])

**Teorema 1.2.10** *Sea  $\mathcal{F}$  el funcional de momentos asociado a la sucesión  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ . Entonces, si  $\mathcal{F}$  es cuasi definido existe una sucesión de polinomios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  cumpliendo*

1. *el grado de  $P_n$  es exactamente  $n$ ,*
2. *para todo  $k = 0, 1, \dots, n-1$  se tiene que  $\mathcal{F}[x^k P_n] = 0$ .*

*Además,  $\mathcal{F}$  será definido positivo, sí y sólo sí,  $T_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ .*

□

La sucesión  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  obtenida en el teorema previo constituye una sucesión de polinomios ortogonales con respecto al funcional  $\mathcal{F}$  (o equivalentemente, a la sucesión  $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ ). Con esto estamos ya en condiciones de enunciar el resultado mencionado y cuya demostración puede verse en [31, págs. 21-22]:

**Teorema 1.2.11 (Favard)** *Sean  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  y  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  dos sucesiones arbitrarias de números complejos, y  $\{P_n\}_{n=1}^\infty$  la familia de polinomios que se computa de la ley de recurrencia*

$$\begin{cases} P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x) \quad , \quad n \geq 1 \\ P_{-1}(x) \equiv 0 \quad \quad P_0(x) \equiv 1 \end{cases}.$$

*Entonces, existe un único funcional  $\mathcal{F}$  tal que  $\mathcal{F}[1] = \lambda_1$  y*

$$\mathcal{F}[P_m(x)P_n(x)] = 0 \quad , \quad m \neq n \quad , \quad m, n \geq 0.$$

*Además,*

1.  *$\mathcal{F}$  es cuasi definido, sí y sólo sí,  $\lambda_n \neq 0$  para todo  $n \geq 1$ ,*
2.  *$\mathcal{F}$  es definido positivo, sí y sólo sí,  $\lambda_n > 0$  y  $c_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \geq 1$ .*

□

### 1.3. La circunferencia unidad

Supongamos que deseamos aproximar la integral  $I(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$ , donde  $f(\theta)$  es una función periódica de periodo  $2\pi$ . En comparación con lo hecho en la sección anterior, parece natural ahora estimar  $I(f)$  reemplazando  $f(\theta)$  por un polinomio trigonométrico (y no algebraico) de un cierto grado  $m$ , es decir, una función de la forma

$$T_m(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^m [a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta] ,$$

siendo  $a_0, a_k$  y  $b_k$  constantes para  $k = 1, \dots, m$  (recordemos que toda función continua y periódica de periodo  $2\pi$  se puede aproximar uniformemente por polinomios trigonométricos, véase [41]). En [79, págs. 73-74] se consideró por primera vez aproximar  $I(f)$  por una fórmula de cuadratura del tipo  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(\theta_j)$  con el mayor grado de precisión trigonométrico, siendo éste  $n - 1$  (al igual que en el caso real se comprueba en este caso que existe un polinomio trigonométrico de grado exacto  $n$  que no es integrado exactamente). Dicha fórmula queda caracterizada tomando nodos equiespaciados  $\theta_k = a + kh$  para  $k = 0, \dots, n - 1$  siendo  $a$  un número arbitrario,  $h = \frac{2\pi}{n}$  y pesos constantes  $A_j = h$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Además, debemos observar que realmente tenemos una familia uniparamétrica de fórmulas de cuadratura, dado que éstas dependen del parámetro  $a$  y se comprueba además que cuando tomamos  $a = -\pi$  entonces  $I_n(f)$  coincide precisamente con la Regla Trapezoidal.

Como aplicación, supongamos que deseamos computar integrales de la forma

$$I_{(a,b)}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{\cosh(b) - \cos(\theta - a)} d\theta \quad , \quad -\pi \leq a < \pi \quad , \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad , \quad (1.23)$$

donde  $f$  es una función real  $2\pi$  periódica. Este tipo de integrales aparecen con frecuencia en la solución de problemas en la circunferencia unidad con valores en la frontera (véase por ejemplo, [29], [91] y [106]). Debido al carácter periódico del integrando, podríamos intentar estimar (1.23) por medio de la fórmula de cuadratura comentada, la cual integra exactamente a polinomios trigonométricos de grado  $n - 1$  (el máximo posible), y que coincide con la Regla Trapezoidal aplicada a  $I_n(f)$ . Esto implica la siguiente estimación de (1.23):

$$I_{(a,b)}(f) \approx I_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(\theta_k)}{\cosh(b) - \cos(\theta_k - a)} \quad , \quad (1.24)$$

con  $\theta_k = -\pi + (k - 1)\frac{2\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Ahora bien, para  $b$  suficientemente lejos de cero, esta regla proporciona estimaciones satisfactorias. Sin embargo, si  $b$  es próximo a cero, las estimaciones son extremadamente pobres. Como alternativa en [29] se introduce una modificación apropiada de la Regla Trapezoidal.

La integral  $I_{(a,b)}(f)$  es un caso particular de la integral definida ahora sobre la circunferencia unidad

$$I_{\omega}(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\omega(\theta) \quad (1.25)$$

(con un ligero abuso en la notación escribiremos  $d\omega(z) = d\omega(\theta)$ ), siendo  $\omega$  una medida positiva de Borel en  $[-\pi, \pi]$  que para  $I_{(a,b)}(f)$  coincide con  $d\omega(\theta) = \frac{d\theta}{\cosh(b) - \cos(\theta - a)}$  y cuyas técnicas de aproximación más usuales serán revisadas a lo largo de la sección.

Siguiendo con la analogía del caso real, supondremos que las funciones  $e^{-ik\theta}$  son integrables en  $[-\pi, \pi]$  con respecto a  $\omega$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , lo que nos permite definir por un lado el  $k$ -ésimo *momento trigonométrico* como el número complejo  $\mu_k := \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\omega(\theta)$  y por otro lado para  $n \geq -1$  el  $n$ -ésimo *determinante de Toeplitz*

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0; \quad \Delta_{-1} := 1. \quad (1.26)$$

También diremos que una sucesión de números complejos  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es *Hermitiana* si  $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$  para todo  $n \geq 0$ .

El ingrediente básico cuando trabajamos con cuestiones de aproximación en la circunferencia unidad es el *espacio vectorial complejo de polinomios de Laurent en la variable  $z$* :  $\Lambda := \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ , es decir,  $\Lambda := \text{span}\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$  y consideremos  $\Lambda_{m,n} := \text{span}\{z^m, \dots, z^n\}$ , subespacio vectorial de  $\Lambda$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  siendo  $m \leq n$ . Obsérvese además que  $\Lambda_{0,n} = \mathbb{P}_n$  para todo  $n \geq 0$ . Si bien hemos comentado ya la densidad del espacio de polinomios  $\mathbb{P}$  sobre el espacio  $\mathcal{C}[a, b]$  de funciones continuas sobre un intervalo finito  $[a, b]$  respecto a la norma uniforme, el resultado deja de ser válido en general cuando reemplazamos tal intervalo por la circunferencia unidad. Sin embargo, cualquier función continua en  $\mathbb{T}$  puede aproximarse uniformemente en  $\mathbb{T}$  por polinomios de Laurent (véase [41, págs. 304-305] ó [103, pág. 39]). Por tanto, en la estimación de (1.25) parecerá razonable reemplazar ahora  $f(z)$  por un apropiado polinomio de Laurent. Para más detalles sobre problemas de aproximación en la circunferencia unidad véase [78].

Szegő estudió en [98, Capítulo 11] los polinomios ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto al producto interior inducido

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\omega(\theta) \quad , \quad f, g \in L_2^{\omega}(\mathbb{T}). \quad (1.27)$$

Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los monomios  $1, z, z^2, z^3, \dots$  obtenemos una base  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  formada por polinomios (mónicos) verificando

1.  $\rho_n(z) = z^n + \cdots + \delta_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  para todo  $n \geq 0$ ,
2.  $\rho_n(z)$  es ortogonal a  $\text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$  con respecto al producto interior (1.27).

A tal familia de polinomios mónicos ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a (1.27) se le conoce como la *familia de polinomios de Szegő*, y a la sucesión de términos independientes  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la *familia de coeficientes de Verblunsky*<sup>2</sup>. Dado un polinomio  $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ , definimos el *polinomio recíproco* según  $p^*(z) := z^n \overline{p(1/\bar{z})}$ , es decir,  $p^*(z) = \overline{a_0} z^n + \cdots + \overline{a_n} \in \mathbb{P}_n$  (se observa claramente que el grado no tiene por qué ser ahora exactamente  $n$ ). Estas definiciones van a jugar un papel crucial a lo largo de toda la Memoria.

<sup>2</sup>Aunque existen al menos otras cuatro terminologías, coeficientes de Schur, Schur-Szegő, de reflexión o de Geronimus (véase [95]), nos referiremos en esta Memoria a tales cantidades como *coeficientes de Verblunsky*.

De (1.1) se deducen las siguientes expresiones determinantaes para los polinomios de Szegő y sus recíprocos en términos de los momentos trigonométricos:

$$\rho_0(z) \equiv 1, \quad \rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.28)$$

y

$$\rho_0^*(z) \equiv 1, \quad \rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.29)$$

con  $\Delta_n$  dado por (1.26). De la construcción de estos polinomios y de (1.28)-(1.29) se deducen las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \langle \rho_n(z), z^s \rangle_\omega &= \langle \rho_n^*(z), z^t \rangle_\omega = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \quad t = 1, 2, \dots, n, \\ \langle \rho_n(z), z^n \rangle_\omega &= \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_\omega = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En cuanto a la correspondiente familia ortonormal, que denotaremos por  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , se sigue de la introducción de este capítulo que  $\varphi_n(z) = \kappa_n \rho_n(z)$  con  $\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$  para  $n \geq 0$  y de ahí junto a la definición de  $\rho_n^*(z)$  que

$$\|\rho_n(z)\|_\omega = \|\rho_n^*(z)\|_\omega = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \quad (1.31)$$

El siguiente resultado sobre la localización de los ceros de los polinomios de Szegő es una consecuencia del Teorema 1.1.1 y fundamental en lo que sigue (véase [1, pág. 184] ó [98, págs. 292-293]):

**Teorema 1.3.1 (Ceros de polinomios de Szegő)** *Los ceros de  $\rho_n(z)$  se encuentran en  $\mathbb{D}$  para todo  $n \geq 1$ .*

□

Como consecuencia se deduce por un lado que los ceros de  $\rho_n^*(z)$  se encuentran en  $\mathbb{E}$  para todo  $n \geq 1$ , y por otro lado la siguiente propiedad fundamental que cumplen los coeficientes de Verblunsky:  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$  (nótese que  $\delta_0 = 1$  y si  $\omega$  es una medida de probabilidad, entonces también  $\mu_0 = 1$ ). Definimos a continuación una sucesión de números comprendidos en el intervalo  $(0, 1]$ , que denotaremos por  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  y que aparecerán con suma frecuencia:

$$\eta_n := \sqrt{1 - |\delta_n|^2}, \quad n \geq 1. \quad (1.32)$$

También será conveniente conocer un caso de simetría para la cual los polinomios de Szegő tengan coeficientes reales. En efecto, dado que

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\omega(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\theta d\omega(\theta) - i \int_{-\pi}^{\pi} \sen k\theta d\omega(\theta) , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

si suponemos que  $\omega$  es absolutamente continua y podemos escribir  $d\omega(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)d\theta$  con  $\tilde{\omega}(\theta)$  función peso tal que  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\omega}(-\theta)$ , tendremos entonces que  $\mu_k = 2 \int_0^{\pi} \cos k\theta \tilde{\omega}(\theta) d\theta \in \mathbb{R}$  y por tanto, de (1.28) se sigue que  $\rho_n(z)$  tendrá coeficientes reales. En este caso se establece en [98, págs. 294-295] la siguiente relación: sea  $\tilde{\sigma}(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$  y sea  $\tilde{\omega}(\theta)$  la función peso en  $[-\pi, \pi]$  dada por

$$\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos \theta) |\sin \theta| , \quad (1.33)$$

o lo que es lo mismo,  $\tilde{\omega}(\theta)d\theta = \tilde{\sigma}(x)|dx|$  con  $x = \cos \theta$ , entonces las respectivas familias de polinomios ortonormales vienen relacionadas por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\delta_{2n})}} \left[ z^{-n} \varphi_{2n}(z) + z^n \varphi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\delta_{2n})}} \left[ z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) + z^{n-1} \varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right) \right] \end{aligned}$$

donde  $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ , ó equivalentemente,  $x = \cos \theta$  con  $z = e^{i\theta}$ .

Al trabajar en la circunferencia unidad considerando la base ortonormal de polinomios  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  se sigue de (1.7) que la función *núcleo reproductor* viene ahora dada por

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)} , \quad z, \xi \in \mathbb{C} , \quad (1.34)$$

la cual satisface la siguiente propiedad reproductora:

$$\langle p(z), \mathcal{K}_n(z, \xi) \rangle_{\omega} = \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{\mathcal{K}_n(z, \xi)} \omega(\theta) d\theta = p(\xi) , \quad z = e^{i\theta} , \quad \forall p \in \mathbb{P}_n , \quad \forall \xi \in \mathbb{C} . \quad (1.35)$$

De (1.35) se deducen las relaciones (véase [101, pág. 27])

$$\mathcal{K}_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(0)} = \kappa_n \varphi_n^*(z) \quad (1.36)$$

y

$$\mathcal{K}_n(0, 0) = \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \kappa_n^2 . \quad (1.37)$$

Por un lado, de (1.37) se comprueba la relación  $\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 = \eta_n^2$ , y dado que estamos considerando  $\kappa_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ , se concluye junto a (1.31) que

$$\eta_n = \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} = \frac{\|\rho_n(z)\|_{\omega}}{\|\rho_{n-1}(z)\|_{\omega}} = \frac{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-2}}}{\Delta_{n-1}} , \quad n \geq 1, \quad (1.38)$$

lo cual implica

$$\|\rho_n(z)\|_\omega^2 = \eta_n^2 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \quad n \geq 1. \quad (1.39)$$

Por otro lado, como consecuencia de (1.36) se puede probar la siguiente ley de recurrencia para polinomios de Szegő y los correspondientes ortonormales, la cual fue demostrada por primera vez por Szegő en [98, págs. 293-294] (véase también [56]), y que podría interpretarse como una ley de recurrencia a tres términos si consideramos los polinomios de Szegő y sus recíprocos ordenados de la forma  $\rho_0(z), \rho_0^*(z), \rho_1(z), \rho_1^*(z), \rho_2(z), \rho_2^*(z), \dots$  (análogamente con la sucesión ortonormal):

**Teorema 1.3.2 (Ley de recurrencia)** *Las familias  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  de polinomios mónicos y ortonormales de Szegő respectivamente con respecto a la medida  $\omega$  en  $\mathbb{T}$  satisfacen las leyes de recurrencia*

$$\begin{pmatrix} \rho_n(z) \\ \rho_n^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \delta_n \\ \delta_n z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{n-1}(z) \\ \rho_{n-1}^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.40)$$

y

$$\begin{pmatrix} \varphi_n(z) \\ \varphi_n^*(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_n} \begin{pmatrix} z & \delta_n \\ \delta_n z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{n-1}(z) \\ \varphi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.41)$$

con condiciones iniciales

$$\rho_0(z) = \rho_0^*(z) \equiv 1, \quad \varphi_0(z) = \varphi_0^*(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}, \quad (1.42)$$

siendo  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  la familia de coeficientes de Verblunsky para la medida  $\omega$ ,  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión definida en (1.32) y  $\mu_0 := \int_{-\pi}^\pi d\omega(\theta)$ .

□

Las relaciones (1.40) y (1.41) (forward) pueden de manera equivalente ser reemplazadas por las siguientes (backward):

$$\begin{pmatrix} z\rho_{n-1}(z) \\ \rho_{n-1}^*(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_n^2} \begin{pmatrix} 1 & -\delta_n \\ -\delta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n(z) \\ \rho_n^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.43)$$

y

$$\begin{pmatrix} z\varphi_{n-1}(z) \\ \varphi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta_n} \begin{pmatrix} 1 & -\delta_n \\ -\delta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n(z) \\ \varphi_n^*(z) \end{pmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (1.44)$$

respectivamente. Además, la relación (1.40) establece cómo computar el  $n$ -ésimo parámetro de Verblunsky a partir del polinomio  $\rho_{n-1}(z)$  y de la familia de momentos trigonométricos  $\{\mu_{-k}\}_{k=0}^n$ . En efecto, si  $\rho_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k z^k$ , entonces se deduce

$$\delta_n = -\frac{\langle z\rho_{n-1}(z), 1 \rangle_\omega}{\langle \rho_{n-1}^*(z), 1 \rangle_\omega} = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k \langle z^{k+1}, 1 \rangle_\omega}{\sum_{k=0}^{n-1} r_{n-1-k} \langle z^k, 1 \rangle_\omega} = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mu_{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^{n-1} r_{n-1-k} \mu_{-k}}. \quad (1.45)$$

Al igual que en el caso real, también podemos establecer un resultado de tipo Favard, recíproco al Teorema 1.3.2 (véanse los detalles en [71] y también [2] y [50]). Sin embargo, omitiremos su enunciado dado que en el capítulo 4 estableceremos una demostración alternativa de una generalización de este resultado (Teorema 4.2.7).

Los *polinomios de Szegő de segunda especie*, que denotaremos por  $\{\varsigma_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , se definen en términos de los polinomios de Szegő según

$$\varsigma_n(z) := \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}} (\rho_n(e^{i\theta}) - \rho_n(z)) d\omega(\theta) & \text{si } n \geq 1 \\ -\mu_0 & \text{si } n = 0 \end{cases},$$

comprobándose (véase [71]) que satisfacen la misma ley de recurrencia que la familia de polinomios de Szegő  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$  pero con la condición inicial  $\varsigma_0(z) \equiv -\mu_0$ .

A continuación estableceremos dos conceptos que serán también de vital importancia. Por un lado, decimos que un polinomio  $p(z)$  es *k-invariante* (*invariante*) con  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si  $p^*(z) = kp(z)$ . En el siguiente capítulo tendrán especial importancia los polinomios 1-invariantes, conocidos como *autorrecíprocos* (véase [99]); no obstante, se verá que polinomios invariantes son “esencialmente” autorrecíprocos. Por otro lado, Jones et. al. dieron en [71] la siguiente definición: un polinomio  $B_n(z) \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  se dice que es *para-ortogonal* con respecto a la medida  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  si cumple las condiciones de ortogonalidad:

$$\langle B_n(z), z^k \rangle_\omega = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1; \quad \langle B_n(z), 1 \rangle_\omega \neq 0, \quad \langle B_n(z), z^n \rangle_\omega \neq 0. \quad (1.46)$$

Por propia definición es fácil verificar que tanto  $\rho_n(z)$  como  $\rho_n^*(z)$  ni son invariantes ni son para-ortogonales. Los dos siguientes resultados (véase [71]) caracterizan a tales funciones y nos indican la localización de sus ceros.

**Teorema 1.3.3** *Si  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$  representa la sucesión de polinomios mónicos de Szegő con respecto a la medida  $\omega$ , entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1.  $B_n(z)$  es un polinomio de grado exacto  $n \geq 1$ , para-ortogonal e invariante.

2.

$$B_n(z) = C_n [\rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)] \quad , \quad C_n \neq 0 \quad , \quad \tau \in \mathbb{T}. \quad (1.47)$$

3.

$$B_n(z) = \tilde{C}_n [z\rho_{n-1}(z) + \tilde{\tau} \rho_{n-1}^*(z)] \quad , \quad \tilde{C}_n \neq 0 \quad , \quad \tilde{\tau} \in \mathbb{T}. \quad (1.48)$$

Además, la equivalencia entre (1.47) y (1.48) viene dada por las siguientes relaciones:  $\tilde{C}_n = C_n(1 + \tau\delta_n)$  y  $\tilde{\tau} = \frac{\tau + \delta_n}{1 + \tau\delta_n}$ .

□

**Teorema 1.3.4 (ceros de polinomios para-ortogonales)** *Todo polinomio de grado exacto  $n \geq 1$ , para-ortogonal e invariante, tiene sus  $n$  ceros distintos y localizados en  $\mathbb{T}$ .*

□

Más propiedades relacionadas sobre los ceros de polinomios para-ortogonales en relación con la alternancia, separación, distribución y distancia entre ceros consecutivos han sido estudiadas en [59]. Comentamos también que si  $\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \dots$  con  $\kappa_n > 0$  para todo  $n \geq 0$  y consideramos  $B_n(z, \tau) = C [\varphi_n(z) + \tau \varphi_n^*(z)]$  con  $C \cdot \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (no necesariamente  $\tau \in \mathbb{T}$ ) y  $\kappa_n + \tau \varphi_n(0) \neq 0$  (para garantizar grado exacto  $n$ ), entonces  $B_n(z, \tau)$  cumple las

condiciones de para-ortogonalidad (1.46), y será  $k$ -invariante, sí y sólo sí,  $\tau \in \mathbb{T}$  (y en tal caso,  $k = \frac{C}{C\tau} \in \mathbb{T}$ ).

Antes de establecer el papel fundamental que va a jugar la familia de polinomios  $\{B_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , consideremos de nuevo la función reproductora (1.34). Si tomamos  $p_n(z) = (z - \xi)q_{n-1}(z) \in \Pi_n$  con  $q_{n-1}(z) \in \Pi_{n-1}$ , y  $\xi$  un número complejo arbitrario, entonces de (1.35) se tiene que

$$p_n(z) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(z, \eta) p_n(\eta) d\omega(\eta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(z, \eta) (\eta - \xi) q_{n-1}(\eta) d\omega(\eta),$$

y por tanto,  $\int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(\xi, \eta) (\eta - \xi) q_{n-1}(\eta) d\omega(\eta) = p_n(\xi) = 0$ , lo que significa que

$$\int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(\xi, z) (z - \xi) q_{n-1}(z) d\omega(\theta) = 0 \quad , \quad z = e^{i\theta} \quad , \quad \forall q_{n-1} \in \Pi_{n-1}.$$

Ahora, dado que  $z \in \mathbb{T}$  se sigue que  $\int_{\mathbb{T}} \overline{\mathcal{K}_n(z, \xi)} (\bar{z} - \bar{\xi}) \bar{z} z q_{n-1}(z) d\omega(\theta) = 0$  para todo  $q_{n-1} \in \Pi_{n-1}$ , esto es,

$$\int_{\mathbb{T}} \overline{\mathcal{K}_n(z, \xi)} (1 - z\bar{\xi}) z q_{n-1}(z) d\omega(\theta) = 0.$$

De esta última relación se sigue que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) \perp \text{span}\{z, \dots, z^n\}$ . Observamos además que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi})$  es un polinomio de grado exacto  $n + 1$  en la variable  $z$ . Si suponemos por un lado que  $\langle \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}), 1 \rangle_\omega \neq 0$ , es decir  $\int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) d\omega(\theta) = 0$  entonces  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) \perp \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ , por lo que debe existir una constante  $C_{n+1} = C_{n+1}(\xi) \neq 0$  tal que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) = C_{n+1}(\xi) \varphi_{n+1}(z)$ . De aquí se concluye una contradicción, dado que esta relación implica que  $\varphi_{n+1}(1/\bar{\xi}) = 0$  para cualquier  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Por otro lado, si suponemos que  $\langle \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}), z^{n+1} \rangle_\omega = 0$  entonces  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) \perp \text{span}\{z, \dots, z^n, z^{n+1}\}$  y de nuevo existe  $C_{n+1} = C_{n+1}(\xi) \neq 0$  tal que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) = C_{n+1}(\xi) \varphi_{n+1}^*(z)$ , concluyendo una contradicción similar. Hemos probado pues el siguiente resultado:

**Proposición 1.3.5** *Sea  $n \geq 0$  y  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  la función núcleo reproductor definida en (1.34). Entonces, para todo  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  se tiene que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi})$  es un polinomio de grado exacto  $n + 1$  para-ortogonal con respecto a  $\omega$ .*

□

Veamos lo que ocurre cuando  $\xi \in \mathbb{T}$ :

**Proposición 1.3.6** *Para todo  $\xi \in \mathbb{T}$  y  $n \geq 0$ , sea  $B_{n+1}(z) = \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi})$  donde  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  es la función núcleo reproductor definida en (1.34). Entonces,  $B_{n+1}(z)$  es  $-\xi^{n+1}$ -invariante.*

*Demostración.-* Veamos primero que  $\mathcal{K}_n^*(z, \xi) = \xi^n \mathcal{K}_n(z, \xi)$ . En efecto, si  $\xi \in \mathbb{T}$  entonces  $\mathcal{K}_n^*(z, \xi) = z^n \overline{\mathcal{K}_n(1/\bar{z}, \xi)} \in \Pi_n$  y podremos escribir

$$\mathcal{K}_n^*(z, \xi) = \sum_{k=0}^n a_k(\xi) \varphi_k(z)$$

donde

$$a_k(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n^*(z, \xi) \overline{\varphi_k(z)} d\omega(\theta) \quad , \quad z = e^{i\theta} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Tenemos por tanto que

$$a_k(\xi) = \int_{\mathbb{T}} z^n \overline{\mathcal{K}_n(1/\bar{z}, \xi)} \cdot \overline{\varphi_k(z)} d\omega(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\mathcal{K}_n(z, \xi)} z^n \overline{\varphi_k(z)} d\omega(\theta) \quad , \quad z = e^{i\theta}.$$

Si  $z \in \mathbb{T}$  y para  $k \geq 0$  se sigue que  $z^n \overline{\varphi_k(z)} \in \Pi_n$  y por tanto, de (1.35) entonces  $a_k(\xi) = \xi^n \overline{\varphi_k(\xi)}$ . Así pues,

$$\mathcal{K}_n^*(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \xi^n \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z) = \xi^n \mathcal{K}_n(z, \xi).$$

Ahora bien, dado que  $1/\bar{\xi} = \xi$  entonces

$$\begin{aligned} B_{n+1}^*(z) &= z^{n+1} \overline{B_{n+1}(1/\bar{z})} = z^{n+1} \overline{\left(1 - \frac{1}{z\xi}\right) \mathcal{K}_n(1/\bar{z}, \xi)} = (z - \xi) \overline{z^n \mathcal{K}_n(1/\bar{z}, \xi)} \\ &= (z - \xi) \mathcal{K}_n^*(z, \xi) \end{aligned}$$

y tendremos finalmente que

$$B_{n+1}^*(z) = \xi^n \mathcal{K}_n(z, \xi) \frac{-(1 - z\bar{\xi})}{\bar{\xi}} = -\xi^{n+1} \mathcal{K}_n(z, \xi) (1 - z\bar{\xi}) = -\xi^{n+1} B_{n+1}(z).$$

□

Del Teorema 1.3.4 y las Proposiciones 1.3.5 y 1.3.6 se deduce el siguiente

**Corolario 1.3.7** *Para todo  $\xi \in \mathbb{T}$ , sea  $B_{n+1}(z) = \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi})$  con  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  dado por (1.34). Entonces,  $B_{n+1}(z)$  tiene exactamente  $n + 1$  ceros distintos en  $\mathbb{T}$ , siendo  $\xi$  uno de ellos.*

□

De este Corolario vemos que el núcleo reproductor  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  tiene  $n$  ceros distintos en  $\mathbb{T}$  para todo  $\xi \in \mathbb{T}$ , por lo que cabría esperar que  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  fuera también un polinomio para-ortogonal e invariante con respecto a una cierta medida  $\tilde{\omega}$ . Una respuesta positiva viene dada por la siguiente

**Proposición 1.3.8** *Para cualquier  $\xi \in \mathbb{T}$ , la función reproductora  $\mathcal{K}_n(z, \xi)$  es  $\xi^n$ -invariante y para-ortogonal con respecto a la medida positiva de Borel*

$$d\mu(\theta) = |\xi - e^{i\theta}|^2 d\omega(\theta).$$

*Demostración.-* La propiedad  $\xi^n$ -invariante se sigue de la demostración de la Proposición 1.3.6. En cuanto a la para-ortogonalidad, tomando  $z = e^{i\theta}$  se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}_n(z, \xi), z^k \rangle_{\mu} &= \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(z, \xi) z^{-k} |\xi - z|^2 d\omega(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}_n(z, \xi) z^{-k} |1 - \bar{\xi}z|^2 d\omega(\theta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} B_{n+1}(z) z^{-k} \overline{(1 - \bar{\xi}z)} d\omega(\theta) = \int_{\mathbb{T}} B_{n+1}(z) z^{-(k+1)} (z - \xi) d\omega(\theta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} B_{n+1}(z) z^{-k} d\omega(\theta) - \xi \int_{\mathbb{T}} B_{n+1}(z) z^{-(k+1)} d\omega(\theta). \end{aligned}$$

Dado que  $B_{n+1}(z)$  es para-ortogonal con respecto a la medida  $\omega$ , deducimos finalmente que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{K}_n(z, \xi), z^k \rangle_\mu &= 0 \quad , \quad 1 \leq k \leq n-1 , \\ \langle \mathcal{K}_n(z, \xi), 1 \rangle_\mu &= \langle B_{n+1}(z), 1 \rangle_\omega \neq 0 , \\ \langle \mathcal{K}_n(z, \xi), z^n \rangle_\mu &= -\xi \langle B_{n+1}(z), z^{n+1} \rangle_\omega \neq 0 .\end{aligned}$$

□

Basándonos en estos resultados previos estableceremos a continuación una demostración alternativa de la fórmula de Christoffel-Darboux para el núcleo reproductor (1.34) (véase [98, págs. 293-294] ó [56]), tratándose realmente de un problema propuesto en [101, pág. 35]:

**Teorema 1.3.9 (Christoffel-Darboux)** *Si  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  representa la familia de polinomios ortonormales respecto a la medida  $\omega$  en  $\mathbb{T}$ , entonces*

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)} = \frac{\varphi_{n+1}^*(z) \overline{\varphi_{n+1}^*(\xi)} - \varphi_{n+1}(z) \overline{\varphi_{n+1}(\xi)}}{1 - z\bar{\xi}}. \quad (1.49)$$

*Demostración.-* De (1.47) y la Proposición 1.3.5 se sigue que existen  $C_{n+1}(\xi) \neq 0$  y  $\tau_{n+1}(\xi) \neq 0$  tales que

$$B_{n+1}(z) = \mathcal{K}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) = C_{n+1}(\xi) [\varphi_{n+1}(z) + \tau_{n+1}(\xi) \varphi_{n+1}^*(z)]. \quad (1.50)$$

Si comparamos en esta última relación los coeficientes de los monomios  $z^{n+1}$  obtenemos la relación

$$-\kappa_n \overline{\xi \varphi_n(\xi)} = C_{n+1}(\xi) \left[ \kappa_{n+1} + \overline{\varphi_{n+1}(0)} \tau_{n+1}(\xi) \right], \quad (1.51)$$

mientras que evaluando también en (1.50) para  $z = 0$ ,

$$\mathcal{K}_n(0, \xi) = C_{n+1}(\xi) [\varphi_{n+1}(0) + \kappa_{n+1} \tau_{n+1}(\xi)]. \quad (1.52)$$

De la relación (1.36) tenemos que  $\mathcal{K}_n(0, \xi) = \kappa_n \overline{\varphi_n^*(\xi)}$ , por lo que de (1.51)-(1.52) deducimos el siguiente sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas  $C_{n+1}(\xi)$  y  $\tau_{n+1}(\xi)$ :

$$\begin{cases} \kappa_n \overline{\varphi_n^*(\xi)} &= C_{n+1}(\xi) [\varphi_{n+1}(0) + \kappa_{n+1} \tau_{n+1}(\xi)] \\ -\kappa_n \overline{\xi \varphi_n(\xi)} &= C_{n+1}(\xi) \left[ \kappa_{n+1} + \overline{\varphi_{n+1}(0)} \tau_{n+1}(\xi) \right] \end{cases}. \quad (1.53)$$

De (1.49)-(1.50) quedaría completa la demostración si probamos que  $C_{n+1}(\xi) = -\overline{\varphi_{n+1}(\xi)}$  y  $\tau_{n+1}(\xi) = -\left(\frac{\varphi_{n+1}^*(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right)$  son las soluciones del sistema (1.53), es decir, si se cumple

$$\kappa_n \overline{\varphi_n^*(\xi)} = -\overline{\varphi_{n+1}(\xi)} \left[ \varphi_{n+1}(0) - \kappa_{n+1} \overline{\left(\frac{\varphi_{n+1}^*(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)}\right)} \right] = \kappa_{n+1} \overline{\varphi_{n+1}^*(\xi)} - \overline{\varphi_{n+1}(\xi)} \varphi_{n+1}(0) \quad (1.54)$$

y

$$-\kappa_n \overline{\xi \varphi_n(\xi)} = -\overline{\varphi_{n+1}(\xi)} \left[ \kappa_{n+1} - \overline{\varphi_{n+1}(0)} \overline{\left( \frac{\varphi_{n+1}^*(\xi)}{\varphi_{n+1}(\xi)} \right)} \right] = \overline{\varphi_{n+1}(0)} \cdot \overline{\varphi_{n+1}^*(\xi)} - \kappa_{n+1} \overline{\varphi_{n+1}(\xi)}. \quad (1.55)$$

Concluimos finalmente el resultado dado que, al ser  $\kappa_n, \kappa_{n+1} > 0$  es fácil comprobar de (1.36) que las expresiones (1.54)-(1.55) son equivalentes a la ley de recurrencia (1.41).

□

Haciendo tender ahora  $\xi$  a  $z$  se obtiene la *fórmula confluyente*

$$\mathcal{K}_{n-1}(z, z) = \frac{|\varphi_n^*(z)|^2 - |\varphi_n(z)|^2}{1 - |z|^2},$$

la cual permite dar una demostración alternativa de que los ceros de  $\varphi_n(z)$  caen en  $\mathbb{D}$ .

Como aplicación de esta identidad consideremos los siguientes ejemplos particulares correspondientes a medidas absolutamente continuas, donde  $d\omega(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)d\theta$  siendo  $\tilde{\omega}(\theta)$  una función peso positiva.

1. **Medida de Lebesgue.** Es bien sabido (véase [98, pág. 290] ó [101, pág 32]) que los polinomios ortonormales de Szegő normalizados con respecto a la función peso  $\tilde{\omega}(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}$  vienen dados por

$$\varphi_n(z) = z^n, \quad n \geq 0. \quad (1.56)$$

De (1.49) se deduce la siguiente expresión para la función reproductora:

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \frac{1 - (z\bar{\xi})^{n+1}}{1 - z\bar{\xi}} = \sum_{j=0}^n (z\bar{\xi})^j.$$

2. **Modificación racional de la medida de Lebesgue.** Consideremos la función peso

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{1}{2\pi |h(e^{i\theta})|^2}, \quad (1.57)$$

siendo  $h(z)$  un polinomio de grado  $m$  sin raíces en  $\mathbb{T}$  (si  $m = 0$ , entonces  $h(z) \equiv 1$  y recuperamos la medida de Lebesgue). Los polinomios ortonormales de Szegő (véase [98, págs. 289-290]) vienen dados por

$$\varphi_n(z) = z^{n-m} h(z), \quad n \geq m. \quad (1.58)$$

En este caso, para obtener la familia completa de polinomios ortonormales se computarían éstos recursivamente para  $n < m$  según (1.41). Dado que  $\varphi_n^*(z) = h^*(z)$  se cumple entonces que

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \frac{h^*(z) \overline{h^*(\xi)} - (z\bar{\xi})^{n+1-m} h(z) \overline{h(\xi)}}{1 - z\bar{\xi}}, \quad n \geq m.$$

Cuando tomamos  $m = 1$  y haciendo  $h(z) = \frac{z-r}{\sqrt{1-r^2}}$  con  $0 < r < 1$  aparece la medida asociada con el núcleo de Poisson, es decir

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{(1-r^2)}{2\pi(1-2r\cos\theta+r^2)} \quad , \quad r \in (0,1). \quad (1.59)$$

La familia de polinomios ortonormales vendrán dados por

$$\varphi_n(z) = \frac{z^n - rz^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} \quad , \quad n \geq 1 \quad (\varphi_0(z) \equiv 1) \quad , \quad (1.60)$$

y de (1.49) que la función núcleo reproductor sea

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \frac{(1-rz)(1-r\bar{\xi}) - (z^{n+1} - rz^n)(\bar{\xi}^{n+1} - r\bar{\xi}^n)}{(1-r^2)(1-z\bar{\xi})} = \frac{p(r) - (z\bar{\xi})^n p^*(r)}{(1-r^2)(1-z\bar{\xi})} \quad ,$$

siendo  $p(r) = 1 - r(z + \bar{\xi}) + r^2(z\bar{\xi})$ .

**3. Funciones peso de tipo Chebyshev.** Por la función peso de tipo Jacobi en la circunferencia unidad entendemos la familia bi-paramétrica de funciones peso que resulta de la transformación (1.33) considerando  $\tilde{\sigma}(x)$  dada por (1.13). En otras palabras,

$$\tilde{\omega}(\theta) = (1 - \cos\theta)^{\alpha+1/2} (1 + \cos\theta)^{\beta+1/2} \quad , \quad \alpha, \beta > -1 \quad , \quad \theta \in (-\pi, \pi]. \quad (1.61)$$

En [98] se calcularon explícitamente los correspondientes coeficientes de Verblunsky:

$$\delta_{2n} = \frac{\alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} \in \mathbb{R} \quad , \quad \delta_{2n+1} = \frac{\alpha - \beta}{2n + \alpha + \beta + 2} \in \mathbb{R}. \quad (1.62)$$

Cuando  $\alpha, \beta \in \{\pm\frac{1}{2}\}$  obtenemos las correspondientes funciones peso de tipo Chebyshev (de primera a cuarta especie respectivamente), que consideraremos normalizadas (de probabilidad):

$$\tilde{\omega}_1(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi} \quad , \quad \tilde{\omega}_2(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{2\pi} \quad , \quad \tilde{\omega}_3(\theta) = \frac{1 - \cos\theta}{2\pi} \quad , \quad \tilde{\omega}_4(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2\pi} \quad (1.63)$$

(obsérvese que  $\tilde{\omega}_1(\theta)$  coincide con la medida de Lebesgue en la circunferencia unidad). Para obtener expresiones del núcleo reproductor para esta familia de funciones peso a partir de (1.49) podemos aplicar los resultados de [40], donde se han deducido expresiones explícitas para las correspondientes familias de polinomios ortonormales. De este modo obtenemos las siguientes relaciones, donde sólo mostramos de manera detallada los cálculos para la función peso  $\tilde{\omega}_4(\theta)$ .

**Función peso  $\tilde{\omega}_4(\theta)$ :**

$$\varphi_n(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \sum_{j=0}^n (-1)^j (j+1) z^j.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n(z, \xi) &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \frac{1}{1-z\bar{\xi}} \times \\
&\times \left[ \left( \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} (n+2-j) z^j \right) \left( \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} (n+2-j) \bar{\xi}^j \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (j+1) z^j \right) \left( \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (j+1) \bar{\xi}^j \right) \right] \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+3)(1-z\bar{\xi})} \left[ \left( \sum_{s,t=0}^{n+1} (-1)^{s+t} (n+2-s)(n+2-t) z^s \bar{\xi}^t \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{s,t=0}^{n+1} (-1)^{s+t} (s+1)(t+1) z^s \bar{\xi}^t \right) \right] \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \frac{1}{1-z\bar{\xi}} \sum_{s,t=0}^{n+1} (-1)^{s+t} [(n+2-s)(n+2-t) - (s+1)(t+1)] z^s \bar{\xi}^t \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \frac{1}{1-z\bar{\xi}} \sum_{s,t=0}^{n+1} (-1)^{s+t} [n^2 + n(4-s-t) + 3(1-s-t)] z^s \bar{\xi}^t.
\end{aligned}$$

**Función peso  $\tilde{\omega}_3(\theta)$ :**

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \sum_{j=0}^n (j+1) z^j.$$

$$\mathcal{K}_n(z, \xi) = \frac{2}{(n+2)(n+3)} \frac{1}{(1-z\bar{\xi})} \sum_{s,t=0}^{n+1} [n^2 + n(4-s-t) + 3(1-s-t)] z^s \bar{\xi}^t.$$

**Función peso  $\tilde{\omega}_2(\theta)$ :**

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} \frac{4}{n+2} \sqrt{\frac{n+2}{n+4}} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (j+1) z^{2j} & n \text{ par} \\ \frac{4z}{n+1} \sqrt{\frac{n+2}{n+4}} \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} (j+1) z^{2j} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{2k}(z, \xi) &= \frac{4(2k+3)}{(k+1)^2(2k+5)} \frac{1}{1-z\bar{\xi}} \times \\
&\quad \sum_{s,t=0}^k [k^2 + k(2-s-t) + (st+1)(1-z\bar{\xi}) - (s+t)(1+z\bar{\xi})] z^{2s} \bar{\xi}^{2t}.
\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_{2k-1}(z, \xi) = \frac{4}{(k+1)(k+2)} \frac{1}{1-z\bar{\xi}} \sum_{s,t=0}^k [k^2 - k(s+t-2) - 2(s+t)] z^{2s} \bar{\xi}^{2t}.$$

Para finalizar este primer capítulo abordamos la construcción de fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad, tema principal de esta Memoria, y con el que comenzamos de manera introductoria esta sección. Así pues, consideremos como estimador de (1.25) la siguiente combinación lineal de valores del integrando (fórmula de cuadratura en la circunferencia unidad):

$$I_n(f) := \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) \quad ; \quad z_j \neq z_k \quad , \quad j \neq k \quad , \quad z_j \in \mathbb{T} \quad , \quad \forall j = 1, \dots, n \quad , \quad (1.64)$$

siendo  $f$  una función continua en  $\mathbb{T}$ . Como ya mencionamos anteriormente, el hecho de que cualquier función continua en  $\mathbb{T}$  se pueda aproximar uniformemente por polinomios de Laurent nos plantea buscar *nodos*  $\{z_j\}_{j=1}^n$  en  $\mathbb{T}$  y *pesos*  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  de manera que  $I_n(f)$  sea exacta en subespacios de  $\Lambda$  de la forma  $\Lambda_{-p,q}$  con  $p = p(n)$ ,  $q = q(n)$  y con suma  $p + q$  lo más grande posible (obsérvese que  $\dim(\Lambda_{-p,q}) = p + q + 1$ ). Para nuestros propósitos, intentaremos primero buscar exactitud en subespacios de la forma  $\Lambda_{-p,p}$ , con el fin de buscar pesos positivos en (1.64) dado que en este caso la estabilidad y convergencia de la sucesión  $\{I_n(f)\}_{n=1}^\infty$  quedaría garantizada. Debemos notar también que una fórmula de cuadratura de la forma (1.64) y con pesos reales, que sea exacta en  $\Lambda_{-p,q}$  es también exacta en  $\Lambda_{-r,r}$ , donde  $r = \max\{p, q\}$ . Por otro lado, puede probarse de manera inmediata que no puede existir una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  del tipo (1.64) que sea exacta en  $\Lambda_{-n,n}$ : basta considerar la función  $Q_n(z)Q_{n*}(z) \in \Lambda_{-n,n}$  siendo  $Q_n(z)$  el polinomio nodal, es decir,  $Q_n(z) := \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ . Nuestro siguiente paso será considerar  $p = n - 1$ , y obsérvese que de existir tal fórmula de cuadratura exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , ésta tendría pesos  $\lambda_j$  positivos: basta tomar  $l_j(z) = \frac{Q_n(z)}{(z - z_j)}$  para  $j = 1, \dots, n$ , siendo  $Q_n(z)$  el polinomio nodal y considerar  $|l_j(e^{i\theta})|^2 \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$ .

Un hecho fundamental debemos tener en cuenta: si bien hemos visto en la sección anterior que para construir fórmulas de cuadratura en  $[-1, 1]$  con máximo grado de precisión alcanzable, los  $n$  nodos deben ser elegidos como los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida  $\sigma$ , al trabajar en la circunferencia unidad la situación cambia radicalmente, dado que como ya hemos visto, los ceros del polinomio  $\rho_n(z)$  se encuentran en  $\mathbb{D}$ , y por tanto no pueden ser elegidos como nodos de  $I_n(f)$ . Va a ser ahora donde jueguen un papel fundamental los polinomios para-ortogonales e invariantes definidos anteriormente. A continuación probamos las siguientes condiciones necesarias para el polinomio nodal  $Q_n(z)$  (véase una demostración alternativa en [20]).

**Teorema 1.3.10** *Para  $n \geq 1$ , sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  con  $z_j \in \mathbb{T}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , exacta en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ . Entonces, el polinomio nodal  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$  es para-ortogonal y  $k$ -invariante, con  $k = \frac{(-1)^n}{z_1 \cdots z_n} \in \mathbb{T}$ .*

*Demostración.-* La exactitud en el espacio  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$  nos lleva al siguiente sistema no lineal de  $2n$  incógnitas  $z_1, \dots, z_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  y  $2n - 1$  ecuaciones:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\omega(\theta) = \mu_{-k} \quad , \quad -(n-1) \leq k \leq n-1. \quad (1.65)$$

Sea  $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j$  con  $c_n = 1$ . Procediendo algebraicamente como en [42, págs. 109-112] en relación con las fórmulas de cuadratura Gaussianas deducimos, tomando las

primeras  $(n + 1)$  ecuaciones en (1.65), es decir,  $-(n - 1) \leq k \leq 1$ , que

$$\begin{aligned} c_0\mu_{n-1} &= c_0\lambda_1 z_1^{-(n-1)} + \cdots + c_0\lambda_n z_n^{-(n-1)} \\ c_1\mu_{n-2} &= c_1\lambda_1 z_1^{-(n-2)} + \cdots + c_1\lambda_n z_n^{-(n-2)} \\ &\vdots \\ c_{n-1}\mu_0 &= c_{n-1}\lambda_1 + \cdots + c_{n-1}\lambda_n \\ c_n\mu_1 &= c_n\lambda_1 z_1 + \cdots + c_n\lambda_n z_n. \end{aligned}$$

Entonces, por un lado,

$$\begin{aligned} c_0\mu_{n-1} + c_1\mu_{n-2} + \cdots + c_{n-1}\mu_0 + c_n\mu_{-1} &= \lambda_1 \left( c_0 z_1^{-(n-1)} + \cdots + c_{n-1} + c_n z_1 \right) + \cdots \\ &\quad + \lambda_n \left( c_0 z_n^{-(n-1)} + \cdots + c_{n-1} + c_n z_n \right) \\ &= \lambda_1 z_1^{n-1} Q_n(z_1) + \cdots + \lambda_n z_n^{n-1} Q_n(z_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado,

$$\begin{aligned} c_0\mu_{n-1} + c_1\mu_{n-2} + \cdots + c_{n-1}\mu_0 + c_n\mu_{-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} [c_0 e^{-i(n-1)\theta} + c_1 e^{-i(n-2)\theta} + \cdots + c_{n-1} + c_n e^{i\theta}] d\omega(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{j=0}^n c_j e^{-i(n-1-j)\theta} \right) e^{i(n-1)\theta} e^{-i(n-1)\theta} d\omega(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{j=0}^n c_j z_j^j \right) \overline{z^{n-1}} d\omega(\theta) = \langle Q_n(z), z^{n-1} \rangle_{\omega} = 0 \quad (z = e^{i\theta}). \end{aligned}$$

Tratando las  $(n + 1)$  ecuaciones en (1.65) desde  $k = -(n - 2)$  hasta  $k = 2$ , obtenemos  $c_0\mu_{n-2} + c_1\mu_{n-3} + \cdots + c_n\mu_{-2} = 0$ , lo cual implica  $\langle Q_n(z), z^{n-2} \rangle_{\omega} = 0$ . Procediendo de manera similar, tomando de manera consecutiva en (1.65) las ecuaciones correspondientes a  $-(n - 3) \leq k \leq 3, \dots, -1 \leq k \leq (n - 1)$  obtenemos  $\langle Q_n(z), z^j \rangle_{\omega} = 0$  para  $1 \leq j \leq n - 1$ . Además, si  $\langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} = 0$ , entonces claramente se sigue que  $Q_n(z) = \rho_n(z)$  y los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  caerían en  $\mathbb{D}$ , mientras que  $\langle Q_n(z), z^n \rangle_{\omega} = 0$  implica que  $Q_n(z) = \gamma_n \rho_n^*(z)$  con  $\gamma_n \neq 0$  y los nodos caerían en  $\mathbb{E}$ . Finalmente, dado que  $z_j \in \mathbb{T}$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , obtenemos

$$Q_n^*(z) = z^n \overline{\left( \frac{1}{z} \right)} = z^n \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{z} - \overline{z_j} \right) = z^n \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_j} \right) = \frac{(-1)^n}{z_1 \cdots z_n} \prod_{j=1}^n (z - z_j) = k Q_n(z).$$

□

Del Teorema 1.3.10 se deduce el siguiente sistema de  $(n - 1)$  ecuaciones con incógnitas  $c_0, \dots, c_{n-1}$  ( $c_n = 1$ )

$$\begin{aligned} c_0\mu_{n-1} + c_1\mu_{n-2} + \cdots + c_{n-1}\mu_0 &= -\mu_{-1} \\ c_0\mu_{n-2} + c_1\mu_{n-3} + \cdots + c_{n-1}\mu_{-1} &= -\mu_{-2} \\ &\vdots \\ c_0\mu_1 + c_1\mu_0 + \cdots + c_{n-1}\mu_{-(n-2)} &= -\mu_{-(n-1)}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Dado que

$$\begin{vmatrix} \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 \\ \mu_{n-3} & \cdots & \mu_{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_0 & \cdots & \mu_{-(n-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Delta_{n-2} \neq 0,$$

se sigue que el sistema (1.66) debe ser resuelto para las constantes  $c_1, \dots, c_{n-1}$  en términos del parámetro  $c_0$ . De este modo vemos, tal y como era de esperar por el Teorema 1.3.3, que  $Q_n(z)$  no queda unívocamente determinado y depende esencialmente de un parámetro.

Las condiciones de para-ortogonalidad e invarianza del Teorema 1.3.10 son también condiciones suficientes. En efecto, W.B. Jones, O. Njåstad y W.J. Thron probaron en [71] el siguiente

**Teorema 1.3.11** *Sea  $Q_n(z)$  un polinomio de grado exacto  $n$ , para-ortogonal con respecto a  $\omega$  e invariante. Sean  $z_1, \dots, z_n$  sus ceros (distintos y en  $\mathbb{T}$ , de acuerdo con el Teorema 1.3.4). Entonces, existen números reales positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f) \quad , \quad \forall f \in \Lambda_{-(n-1), n-1}. \quad (1.67)$$

□

Además, diremos que la fórmula (1.67) es la que tiene el *máximo dominio de validez* en el sentido de que también se prueba (véase [71]) el siguiente:

**Teorema 1.3.12** *No existe una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  de la forma (1.64) para  $I_\omega(f)$  que sea exacta en  $\Lambda_{-n, n-1}$  ó en  $\Lambda_{-(n-1), n}$ .*

□

Tenemos pues que  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$  es el dominio de validez maximal (véase al respecto [92]). El siguiente resultado de caracterización fue probado también en [71] y se trata del análogo en la circunferencia unidad del Corolario 1.2.7.

**Teorema 1.3.13** *Para todo  $n \geq 1$ , la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  dada por (1.64) tiene máximo dominio de validez, sí y sólo sí,*

1.  $I_n(f) = I_\omega(f)$  para todo  $f \in \Lambda_{p,q}$  siendo  $p$  y  $q$  enteros no negativos arbitrarios cumpliendo  $p + q = n - 1$ .
2. Si  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$  (polinomio nodal) entonces  $Q_n(z)$  es para-ortogonal y  $k$ -invariante.

□

La fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  dada por (1.67) aparece inicialmente en [63] y también implícitamente en [64, Capítulo 4]. Sin embargo, fue en el trabajo de W.B. Jones, O. Njåstad y W.J. Thron [71] donde aparece un tratamiento unificado de este tipo de cuadraturas que denominaron *fórmulas de Szegő* y que representan el análogo a las fórmulas

Gaussianas para intervalos del eje real. Éstas han sido estudiadas en los últimos años por diferentes autores: véanse [9], [13], [14], [20], [34], [35], [37], [38], [40], [62], [69], [77], [91] y [102], así como [7] en donde se analiza un procedimiento general válido tanto para medidas con soporte en subconjuntos del eje real como en la circunferencia unidad. Sin embargo, debemos hacer notar dos grandes diferencias en la construcción de ambas:

**Eje real:**

1. Los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto a  $\sigma$ .
2. Tenemos una única fórmula de cuadratura, exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1}$ , cuya dimensión es  $2n$ .

**Circunferencia unidad:**

1. Los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal con respecto a  $\omega$ , que depende de un parámetro  $\tau \in \mathbb{T}$ .
2. Disponemos de una familia uni-paramétrica de fórmulas de cuadratura, exactas en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ , cuya dimensión es  $2n - 1$ .

Para que tales fórmulas queden completamente caracterizadas debemos proceder al cómputo de sus pesos; por ahora sólo sabemos que éstos son positivos. El siguiente resultado probado en [62] establece un análogo del Teorema 1.2.8 para intervalos del eje real.

**Teorema 1.3.14** *Sea  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios ortonormales en  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  e  $I_n(f)$  la fórmula de cuadratura de  $n$  puntos (1.67) con máximo dominio de validez. Entonces, los coeficientes vienen dados por*

$$\lambda_j = \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1}(z_j, z_j)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(z_j)|^2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.68)$$

□

Como acabamos de indicar, obsérvese que a pesar de que las fórmulas (1.19) y (1.68) tienen la misma naturaleza, en la primera  $\{x_k\}_{k=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio ortogonal  $p(x)$  con respecto a  $\sigma$  en  $[-1, 1]$  mientras que en la segunda  $\{z_k\}_{k=1}^n$  son los ceros del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau)$  con respecto a  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  y  $\tau \in \mathbb{T}$ .

Una expresión alternativa para el cómputo de los pesos puede establecerse mediante la familia de polinomios para-ortogonales asociados o de segunda especie (véase [71] ó [77]), definidos por

$$A_n(z, \tau) = \varsigma_n(z) - \tau \varsigma_n^*(z). \quad (1.69)$$

Los polinomios  $A_n(z, \tau)$  y  $B_n(z, \tau)$  se relacionan mediante la siguiente fórmula que emplearemos en la siguiente sección:

$$A_n(z, \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+t}{z-t} \left( \frac{z^k}{t^k} B_n(t, \tau) - B_n(z, \tau) \right) d\omega(t), \quad \forall k = 1, \dots, n-1, \quad (1.70)$$

y se prueba en [62] la siguiente expresión alternativa para el cómputo de los pesos:

$$\lambda_j = -\frac{1}{2z_j} \frac{A_n(z_j, \tau)}{B_n'(z_j, \tau)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.71)$$

Una tercera expresión, integral en este caso, se establece en términos de los polinomios fundamentales, definidos para  $1 \leq j \leq n$  y  $\tau \in \mathbb{T}$  por

$$L_j(z, \tau) := \frac{B_n(z, \tau)}{(z - z_j)B'_n(z_j, \tau)} = \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)}. \quad (1.72)$$

En efecto, tales funciones satisfacen  $L_j(z_k) = \delta_{j,k}$  para todo  $1 \leq j, k \leq n$  y se cumple

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} L_j(z, \tau) d\omega(\theta) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad \tau \in \mathbb{T}. \quad (1.73)$$

Tomando ahora  $\xi = z_j \in \mathbb{T}$  en (1.49) y de (1.68) resulta

$$\frac{1}{\lambda_j} = \mathcal{K}_{n-1}(z_j, z_j) = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(z_j)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z_j)}}{1 - z\bar{z}_j}.$$

Este límite produce una indeterminación que resolvemos mediante la regla de L'Hôpital, obteniendo

$$\frac{1}{\lambda_j} = \frac{(\varphi_n^*)'(z_j)\overline{\varphi_n^*(z_j)} - \varphi_n'(z_j)\overline{\varphi_n(z_j)}}{-\bar{z}_j}$$

es decir,

$$\lambda_j = \frac{\bar{z}_j}{\overline{\varphi_n'(z_j)\varphi_n(z_j)} - (\varphi_n^*)'(z_j)\overline{\varphi_n^*(z_j)}}, \quad (1.74)$$

(compárese con la fórmula (1.20) para el eje real). Por otro lado, de la definición de la operación super-\* y de (1.74) también se cumple que

$$\lambda_j = \frac{\bar{z}_j}{\frac{1}{z_j^n}\varphi_n^*(z_j)\varphi_n'(z_j) - \frac{1}{z_j^n}\varphi_n(z_j)(\varphi_n^*)'(z_j)} = \frac{z_j^{n-1}}{\varphi_n^*(z_j)\varphi_n'(z_j) - \varphi_n(z_j)(\varphi_n^*)'(z_j)}. \quad (1.75)$$

Hemos probado por tanto de (1.74) y (1.75) el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.15** *Sea  $\varphi_n(z)$  el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal en  $\mathbb{T}$ ,  $z_j$  el  $j$ -ésimo cero del  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal y  $\lambda_j$  el  $j$ -ésimo coeficiente de la fórmula de Szegő de  $n$  puntos (1.67) con respecto a  $\omega$ . Entonces,*

$$\lambda_j = \frac{\bar{z}_j}{\begin{vmatrix} \varphi_n(z_j) & \overline{\varphi_n^*(z_j)} \\ (\varphi_n^*)'(z_j) & \overline{\varphi_n'(z_j)} \end{vmatrix}} = \frac{z_j^{n-1}}{\begin{vmatrix} \varphi_n^*(z_j) & \varphi_n(z_j) \\ (\varphi_n^*)'(z_j) & \varphi_n'(z_j) \end{vmatrix}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.76)$$

□

Como aplicación de la fórmula (1.76) concluimos esta sección considerando las funciones peso particulares analizadas anteriormente.

### 1. Medida de Lebesgue.

$$\lambda_j = \frac{\bar{z}_j}{\begin{vmatrix} \bar{z}_j^n & 1 \\ 0 & nz_j^{n-1} \end{vmatrix}} = \frac{\bar{z}_j}{n\bar{z}_j^n z_j^{n-1}} = \frac{1}{n\bar{z}_j^{n-1} z_j^{n-1}} = \frac{1}{n|z_j|^{2(n-1)}} = \frac{1}{n}, \quad (1.77)$$

resultado independiente de  $j$  (compárese con [62] ó [79, págs. 73-74]).

## 2. Modificación racional de la medida de Lebesgue.

De (1.58) escribimos

$$\varphi_n(z) = z^{n-m}h(z) = z^{n-m} \prod_{k=1}^s (z - \alpha_k)^{r_k}, \quad n \geq m,$$

con  $|\alpha_k| \neq 1$  para todo  $k = 1, \dots, s$  y  $r_1 + \dots + r_s = m$ . Dado que  $\varphi_n^*(z) = h^*(z)$  deducimos  $(\varphi_n^*)'(z) = (h^*(z))'$  y  $\varphi_n'(z) = (n-m)z^{n-m-1}h(z) + z^{n-m}h'(z)$ . Por tanto, de (1.76) se sigue para  $j = 1, \dots, n$  que

$$\lambda_j = \frac{z_j^{n-1}}{h^*(z_j) \left[ (n-m)z_j^{n-m-1}h(z_j) + z_j^{n-m}h'(z_j) \right] - z_j^{n-m}h(z_j)(h^*)'(z_j)}.$$

Ahora bien, dado que  $h^*(z_j) = z_j^m \overline{h(z_j)}$ , entonces

$$\lambda_j = \frac{z_j^{n-1}}{(n-m)z_j^{n-1}|h(z_j)|^2 + z_j^n \overline{h(z_j)}h'(z_j) - z_j^{n-m}h(z_j)(h^*)'(z_j)}. \quad (1.78)$$

Por otro lado, como  $h(z) = \prod_{k=1}^s (z - \alpha_k)^{r_k}$  podemos escribir  $\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{k=1}^s \frac{r_k}{z - \alpha_k}$ . Además,  $h^*(z) = \prod_{k=1}^s (1 - \alpha_k z)^{r_k}$ , y se sigue de manera similar que  $\frac{(h^*)'(z)}{h^*(z)} = -\sum_{k=1}^s \frac{\overline{\alpha_k} r_k}{1 - \overline{\alpha_k} z}$ . Entonces, de (1.78) deducimos finalmente que

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{z_j^{n-1}}{(n-m)z_j^{n-1}|h(z_j)|^2 + z_j^n |h(z_j)|^2 \left( \sum_{k=1}^s \frac{r_k}{z_j - \alpha_k} \right) + z_j^n |h(z_j)|^2 \left( \sum_{k=1}^s \frac{\overline{\alpha_k} r_k}{1 - \overline{\alpha_k} z_j} \right)} \\ &= \frac{1}{|h(z_j)|^2 \left[ n - m + z_j \left( \sum_{k=1}^s \frac{r_k}{z_j - \alpha_k} + \sum_{k=1}^s \frac{\overline{\alpha_k} r_k}{1 - \overline{\alpha_k} z_j} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{|h(z_j)|^2 \left[ n - m + \sum_{k=1}^s \frac{r_k(1 - |\alpha_k|^2)}{|z_j - \alpha_k|^2} \right]}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Debemos hacer notar que la fórmula (1.79) fue anteriormente obtenida en [62] para el caso particular  $r_k = 1$  para todo  $k = 1, \dots, s = m$ , mostrando sólo los detalles en los cálculos para  $m = 2$ . La situación general fue considerada en [39] haciendo uso del Teorema de los Residuos y tras un elevado número de operaciones. Obsérvese que en el caso particular  $m = 0$  (medida de Lebesgue) recuperamos la fórmula (1.77) mientras que para el núcleo de Poisson (1.59) (tomando  $m = s = 1$ ) se cumple de (1.79) que

$$\lambda_j = \frac{1}{1 - r^2} \times \frac{z_j}{r(1 - n) \left( 1 + z_j^2 \right) + z_j(n - r^2)}, \quad j = 1, \dots, n$$

(compárese con los resultados deducidos en [102]).

### 3. Funciones peso de tipo Chebyshev.

Función peso  $\tilde{\omega}_4(\theta)$ :

$$\lambda_j^{-1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)\bar{z}_j} \times \left| \begin{array}{cc} \sum_{s=0}^n (-1)^s (s+1) \bar{z}_j^s & \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} (n+1-s) \bar{z}_j^s \\ \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-1-s} (n-s)(s+1) z_j^s & \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{s+1} (s+1)(s+2) z_j^s \end{array} \right|$$

y de ahí que

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{(n+1)(n+2)z_j^{-1}}{2 \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-1} [(-1)^{s+t+1} (s+1)(t+1)(t+2) - (-1)^{n-s+n-1-t} (n+1-s)(t+1)(n-t)] \bar{z}_j^s z_j^t} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2z_j \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^{s+t+1} (t+1)[(s+1)(t+2) - (n+1-s)(n-t)] z_j^{t-s}} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2 \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^{s+t} (t+1) [n^2 - n(s+t-1) - 2(s+t+1)] z_j^{t+1-s}}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Para las otras dos funciones peso, los cálculos son similares y sólo mostramos el resultado final:

Función peso  $\tilde{\omega}_3(\theta)$ :

$$\lambda_j = \frac{(n+1)(n+2)}{2 \sum_{s=0}^n \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) [n^2 - n(s+t-1) - 2(s+t+1)] z_j^{t+1-s}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Función peso  $\tilde{\omega}_2(\theta)$ :

Fijado  $j = 1, \dots, n$ , si  $n = 2k$  entonces

$$\lambda_j = \frac{(k+1)(k+2)}{2 \sum_{s=0}^k \sum_{t=0}^{k-1} (t+1) [-k^2 + k(s+t-1) + 2(s+t+1)] z_j^{2(t+1-s)}}$$

mientras que para  $n = 2k - 1$ ,

$$\lambda_j = \frac{k^2(2k+3)}{4(2k+1) \sum_{s,t=0}^{k-1} (t+1) [(s+1)(2t+1)z_j^{-1} + (s-k)] z_j^{2(t-s)+1}}$$

(compárese también con los resultados dados en [40], donde sólo se consideran casos particulares del parámetro  $\tau$  en (1.47)).

## 1.4. Computación de las fórmulas tipo-Gauss y de Szegő: algoritmos de Levinson y split Levinson

Aparte de los ejemplos vistos en la sección anterior, cabe decir que se conocen pocas medidas que den lugar a expresiones explícitas para los polinomios de Szegő. En general,

la información necesaria para computarlos es la sucesión de momentos trigonométricos  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ : partiendo de la condición inicial (1.42) que determina siempre que  $\delta_0 = 1$  computamos  $\delta_1$  de la relación (1.45) y de ahí  $\rho_1(z)$  y  $\rho_1^*(z)$  de (1.40). Procediendo de manera recursiva se computa de (1.45) y (1.40) la familia completa  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$ .

Este procedimiento es conocido como el *algoritmo de Levinson* (véase [83]), introducido por Norman Levinson en el año 1946 (véanse también los trabajos [3], [11], [12], [22], [33] y [45]). Este algoritmo surgió en un contexto diferente como técnica fundamental para resolver algunos problemas relacionados con el *procesamiento de señales digitales*. Se trata de un procedimiento numérico que permite el cálculo de la solución de sistemas de ecuaciones lineales con estructura de Toeplitz computando el vector solución de tal sistema de manera recursiva considerando subsistemas de Toeplitz de dimensión creciente. Así pues, por ejemplo, en [43] se considera el problema lineal de predicción por mínimos cuadrados de un proceso estocástico estacionario, probando que si  $\{x(t) : t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  es un proceso estocástico estacionario de tiempo discreto con media cero y covarianzas  $\mu_k$  para todo  $k$ , entonces el problema de encontrar un predictor  $\xi_n(t)$  de la variable aleatoria  $x(t)$  de la forma  $\xi_n(t) = -a_{n,1}x(t-1) - a_{n,2}x(t-2) - \dots - a_{n,n}x(t-n)$ , de manera que el error de predicción  $e_n(t) = x(t) - \xi_n(t)$  sea mínimo implica las ecuaciones

$$a_{k,i} = a_{k-1,i} + \delta_k \overline{a_{k-1,k-i}}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.80)$$

$$\sigma_k = \sigma_{k-1}(1 - |\delta_k|^2), \quad (1.81)$$

con  $a_{k-1,0} = 1$ ,  $\delta_k$  un apropiado número complejo definido por

$$\sigma_{k-1}\delta_k = - \sum_{i=0}^{k-1} \mu_{k-i} a_{k-1,i}, \quad (1.82)$$

y  $\sigma_k$  el valor mínimo de la varianza del error de predicción (independiente de  $t$ ). El algoritmo de Levinson resulta de aplicar recursivamente las ecuaciones (1.80)-(1.82) para  $k = 1, 2, \dots, n$  con los datos iniciales  $a_{0,0} = 1$  y  $\sigma_0 = \mu_0$ . Si definimos el polinomio  $a_k(z) = 1 + a_{k,1}z + a_{k,2}z^2 + \dots + a_{k,k-1}z^{k-1} + a_{k,k}z^k$  y su recíproco  $b_k(z) = a_k^*(z) = z^k \overline{a_k(1/\bar{z})}$  se comprueba de (1.80) la relación

$$b_k(z) = zb_{k-1}(z) + \bar{\delta}_k b_{k-1}^*(z). \quad (1.83)$$

Por tanto, del teorema de Favard se concluye que debe existir una medida  $\mu$  tal que los polinomios mónicos  $\{b_k(z)\}_{k=0}^n$  son los de Szegő ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a  $\mu$ . Una comparación entre (1.80) y (1.83) implica que el algoritmo de Levinson es de hecho una implementación numérica de la ley de recurrencia de Szegő. En la literatura de la Teoría de Señales, al polinomio  $a_k(z)$  se le denomina *polinomio predictor progresivo* y a  $b_k(z)$  *polinomio predictor regresivo*.

Nuestro objetivo en esta última sección es el de computar las fórmulas de tipo-Gauss y de Szegő. Una vez hemos computado el polinomio  $\rho_{n-1}(z)$  obtenemos de (1.48) el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau)$  cuyos ceros van a ser los nodos de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  y donde  $\tau \in \mathbb{T}$ . Inicialmente, un procedimiento apropiado para calcular los ceros de éste cuando sus coeficientes son reales (por ejemplo, si los momentos trigonométricos son reales y  $\tau = \pm 1$ ) es el *método de Jenkins-Traub* (véase [70]). En cuanto a la computación de la familia de pesos tenemos de la sección anterior varias

propuestas: (1.68), (1.71), (1.73) ó (1.76). De (1.70), tomando  $k = 1$ , de la relación  $\frac{z^k - t^k}{z - t} = z^{k-1} + tz^{k-2} + \dots + t^{k-2}z + t^{k-1}$  y escribiendo  $B_n(z, \tau) = b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n$  y  $A_n(z, \tau) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , podemos escribir los coeficientes de  $A_n(z, \tau)$  en términos de los coeficientes de  $B_n(z, \tau)$  y de la familia de momentos trigonométricos, obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \mu_0 b_0 \\ a_1 = \mu_1(b_0 - b_2) - \mu_2 b_3 - \dots - \mu_{n-2} b_{n-1} - \mu_{n-1} b_n \\ a_2 = -\mu_0 b_2 - 2\mu_1 b_3 - 2\mu_2 b_4 - \dots - 2\mu_{n-2} b_n \\ a_3 = -\mu_0 b_3 - 2\mu_1 b_4 - 2\mu_2 b_5 - \dots - 2\mu_{n-3} b_n \\ \vdots \\ a_{n-1} = -\mu_0 b_{n-1} - 2\mu_1 b_n \\ a_n = -\mu_0 b_n. \end{array} \right. \quad (1.84)$$

**Ejemplo 1.4.1** *Es bien sabido que los polinomios de Szegő para la función peso de Chebyshev de primera especie (1.63) vienen dados por  $\rho_n(z) = z^n$  para todo  $n \geq 0$  (relación (1.56)), por lo que  $\rho_n^*(z) \equiv 1$  y  $B_n(z, \tau) = z^n + \tau$ . Tomando los valores particulares  $\tau = 1$  y  $\tau = -1$  tendremos que los nodos de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  son las raíces de  $-1$  y  $1$  respectivamente. Como en este caso particular también se tiene que  $\mu_0 = 2\pi$  y  $\mu_k = 0$  para todo  $k \geq 1$ , de las relaciones dadas por (1.84) tendremos que  $A_n(z, \tau) = 2\pi(-z^n + \tau)$  y por tanto aplicando (1.71) se comprueba que los pesos vienen dados por  $\lambda_k = \frac{2\pi}{n}$  para todo  $n \geq 1$ , independientes de  $k$  y  $\tau$  (compárese con (1.77)).*

En [37] se muestran los ceros de polinomios para-ortogonales para otras funciones peso particulares.

Tomemos ahora una función peso  $\tilde{\omega}(\theta)$  positiva y simétrica definida en  $[-\pi, \pi]$ , esto es,  $\tilde{\omega}(-\theta) = \tilde{\omega}(\theta)$  para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  y  $\tilde{\omega}(\theta) \geq 0$  en tal intervalo. Recordemos que en este caso los momentos trigonométricos son reales y también de ahí los coeficientes de los polinomios de Szegő. En lo que sigue consideremos también los valores particulares  $\tau = \pm 1$ , por lo que los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \pm 1)$  tendrán coeficientes reales. En cuanto a sus ceros (nodos de las fórmulas de Szegő), que sabemos que son simples y localizados en la circunferencia unidad (Teorema 1.3.4), podremos decir:

1. Si  $\tau = 1$ , dado que  $\rho_n(1) = \rho_n^*(1) \neq 0$ ,  $z = 1$  no podrá ser un cero. Si  $n$  es par, los ceros de  $B_n(z, 1)$  aparecerán en pares conjugados en  $\mathbb{T}$  y si  $n$  es impar,  $z = -1$  será el único cero real y los  $(n - 1)$  restantes también aparecerán en pares conjugados en  $\mathbb{T}$ .
2. Si  $\tau = -1$ , por definición,  $z = 1$  será siempre un cero, concluyendo que si  $n$  es par,  $z = -1$  será también un cero mientras que si  $n$  es impar,  $z = 1$  será el único cero real. En ambos casos, los restantes ceros aparecerán en pares conjugados.

Si denotamos por  $\hat{\lambda}_j$  el coeficiente de  $I_n(f)$  correspondiente al nodo  $\bar{z}_j$ , siendo  $z_j$  un cero de  $B_n(z, \pm 1)$ , entonces de (1.71) se sigue que

$$\hat{\lambda}_j = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{A_n(\bar{z}_j, \pm 1)}{B_n'(\bar{z}_j, \pm 1)} = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{\overline{A_n(z_j, \pm 1)}}{\overline{B_n'(z_j, \pm 1)}} = \bar{\lambda}_j.$$

Como sabemos que  $\lambda_j > 0$  debe cumplirse pues  $\hat{\lambda}_j = \bar{\lambda}_j = \lambda_j$ , lo que establece el siguiente resultado (véase [13]) que demuestra que en estos casos de simetría, la computación de las fórmulas de Szegő se reduce a la mitad.

**Teorema 1.4.2** Sea  $\tilde{\omega}(\theta)$  una función peso simétrica en  $[-\pi, \pi]$  e  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  la fórmula de Szegő de  $n$  puntos, tomando como nodos los ceros del polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau)$ .

1. Si  $\tau = +1$ , entonces:

a) si  $n$  es par:  $I_n(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$ .

b) si  $n$  es impar:  $I_n(f) = Bf(-1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$ .

2. Si  $\tau = -1$ , entonces:

a) si  $n$  es par:  $I_n(f) = Af(1) + Bf(-1) + \sum_{j=1}^{(n-2)/2} \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$ .

b) si  $n$  es impar:  $I_n(f) = Af(1) + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$ .

Además, todos los coeficientes  $A, B$  y  $\lambda_k$  son positivos.

□

Interesémonos ahora por las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss en  $[-1, 1]$  consideradas en la sección segunda. Partiendo de una función peso  $\tilde{\sigma}(x)$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , definamos la función peso simétrica  $\tilde{\omega}(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  según (1.33). Entonces, haciendo  $z = e^{i\theta}$  y  $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos\theta$  obtenemos

$$\int_{-1}^1 F(x)\tilde{\sigma}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\tilde{\omega}(\theta)d\theta, \quad f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}F\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right).$$

Con esta relación enunciamos a continuación tres resultados demostrados en [13] que conectan las fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss con las de Szegő, y que serán necesarios en lo que resta de sección.

**Teorema 1.4.3** Sea  $I_n(F) = \sum_{k=1}^n A_k F(x_k)$  la fórmula de cuadratura Gaussiana de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F) = \int_{-1}^1 F(x)\tilde{\sigma}(x)dx$ . Sea  $x_k = \cos\theta_k$  y definamos  $\{z_k\}_{k=1}^{2n}$  y  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{2n}$  según

$$\left. \begin{aligned} z_k &= e^{i\theta_k} & , & & \lambda_k &= A_k \\ z_{n+k} &= e^{-i\theta_k} & , & & \lambda_{n+k} &= A_k \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces,  $\tilde{I}_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(z_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$  coincide con la fórmula de cuadratura de Szegő de  $2n$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\tilde{\omega}(\theta)d\theta$ , donde  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\sin\theta|$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  y tomando como nodos los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$ . Recíprocamente, sea  $\tilde{I}_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(z_j)$  la fórmula de cuadratura de Szegő de  $2n$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f)$  con  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\sin\theta|$ , y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n}(z, 1)$ . Sea  $z_{n+j} = \bar{z}_j$  y  $z_j = e^{i\theta_j}$  con  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, tomando  $x_j = \cos\theta_j$  para  $j = 1, \dots, n$  se tiene que la fórmula  $I_n(F) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$  coincide con la fórmula de cuadratura Gaussiana de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F) = \int_{-1}^1 F(x)\tilde{\sigma}(x)dx$ .

□

**Teorema 1.4.4** Sea  $AF(1) + BF(-1) + \sum_{k=1}^n A_k F(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F)$ , siendo  $\tilde{\sigma}(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$ . Sea  $x_k = \cos\theta_k$ ,  $z_k = e^{i\theta_k}$  y  $\lambda_k = A_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces,  $2Af(1) + 2Bf(-1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k [f(z_k) + f(\bar{z}_k)]$  representa la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n + 2)$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f)$  con  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\operatorname{sen}\theta|$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$ . Recíprocamente, sea  $\tilde{I}_{2n+2}(f) = \sum_{k=1}^{2n+2} \lambda_k f(z_k)$  la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n + 2)$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f)$ , tomando como nodos los ceros de  $B_{2n+2}(z, -1)$ . Sean  $z_{2n+1} = 1$ ,  $z_{2n+2} = -1$  y  $z_{n+k} = \bar{z}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  con  $z_k = e^{i\theta_k}$ ,  $\theta_k \notin \{-\pi, 0\}$ . Tomando  $A = \lambda_{2n+1}$  y  $B = \lambda_{2n+2}$ , entonces

$$\frac{A}{2}F(1) + \frac{B}{2}F(-1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k F(x_k), \quad x_k = \cos\theta_k, \quad k = 1, \dots, n$$

coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Lobatto de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F)$ . □

**Teorema 1.4.5** Sea  $\frac{1}{2}AF(\pm 1) + \sum_{k=1}^n A_k F(x_k)$  la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F)$ , siendo  $\tilde{\sigma}(x)$  una función peso en  $[-1, 1]$ . Sea  $x_k = \cos\theta_k$ ,  $z_k = e^{i\theta_k}$  y  $\lambda_k = A_k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Entonces,  $Af(\pm 1) + \sum_{j=1}^n \lambda_j [f(z_j) + f(\bar{z}_j)]$  representa la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n + 1)$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f)$  con  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\operatorname{sen}\theta|$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  y cuyos nodos son los ceros de  $B_{2n+1}(z, \pm 1)$ . Recíprocamente, sea  $\tilde{I}_{2n+1}(f) = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k f(z_k)$  la fórmula de cuadratura de Szegő de  $(2n + 2)$  puntos para  $I_{\tilde{\omega}}(f)$ , tomando como nodos los ceros de  $B_{2n+1}(z, -1)$  ( $B_{2n+1}(z, +1)$ ). Sean  $z_{2n+1} = 1$  ( $z_{2n+1} = -1$ ) y  $z_{n+k} = \bar{z}_k$  para  $k = 1, \dots, n$  con  $z_k = e^{i\theta_k}$  y  $\theta_k \notin \{-\pi, 0\}$ . Tomando  $A = \lambda_{2n+1}$ , entonces

$$\frac{A}{2}F(\pm 1) + \sum_{k=1}^n \lambda_k F(x_k), \quad x_k = \cos\theta_k, \quad k = 1, \dots, n$$

coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau de  $n$  puntos para  $I_{\tilde{\sigma}}(F)$ . □

Volviendo con el algoritmo de Levinson, tomemos el polinomio  $a_k(z)$  computado y  $b_k(z) = a_k^*(z)$  su recíproco. Considérense ahora los polinomios  $p_k(z) = a_{k-1}(z) + za_{k-1}^*(z)$  y  $\tilde{p}_k(z) = a_{k-1}(z) - za_{k-1}^*(z)$ , que en la literatura de la Teoría de Señales se denominan *primer y segundo polinomio predictor singular* respectivamente. Por definición,  $p_k(z)$  y  $\tilde{p}_k(z)$  son  $\{1\}$ -invariante (autorrecíproco) y  $\{-1\}$ -invariante respectivamente. Además, se cumple el siguiente

**Teorema 1.4.6** Los polinomios  $p_k(z)$  y  $\tilde{p}_k(z)$  son ambos para-ortogonales.

*Demostración.*- Directa de la caracterización (1.48) haciendo  $\tilde{C}_k = \tilde{\tau} = 1$  para  $p_k(z)$  y  $\tilde{C}_k = \tilde{\tau} = -1$  para  $\tilde{p}_k(z)$ . □

Observamos que de la equivalencia entre (1.47) y (1.48) dada en el Teorema 1.3.3 se deducen las expresiones alternativas

$$p_k(z) = \frac{1}{1 + \tau a_k^*(0)} \left[ a_k^*(z) + \frac{a_k^*(0) - 1}{a_k^*(0) - 1} a_k(z) \right],$$

$$\tilde{p}_k(z) = \frac{-1}{1 + \tau a_k^*(0)} \left[ a_k^*(z) - \frac{a_k^*(0) + 1}{a_k^*(0) + 1} a_k(z) \right].$$

Haciendo ahora uso del Teorema 1.3.4 tendremos el siguiente

**Corolario 1.4.7** *Ambos polinomios  $p_k(z)$  y  $\tilde{p}_k(z)$  tienen exactamente  $k$  ceros distintos en  $\mathbb{T}$ .*

□

El *algoritmo split Levinson* (Levinson partido), introducido en [44] se basa en la computación directa de los polinomios  $p_k(z)$  y  $\tilde{p}_k(z)$  (versiones simétrica ó  $\{1\}$ -invariante y antisimétrica ó  $\{-1\}$ -invariante respectivamente)<sup>3</sup> a partir de los momentos trigonométricos. El procedimiento se resume en el siguiente esquema recursivo donde empleamos la notación

$$p_k(z) = \sum_{i=0}^k p_{k,i} z^i, \quad \tilde{p}_k(z) = \sum_{i=0}^k \tilde{p}_{k,i} z^i.$$

↪ **Versión  $\{1\}$ -invariante:**

$$p_0(z) \equiv 2, \quad p_1(z) = 1 + z, \quad \tau_0 = \mu_0,$$

$$\tau_k = \sum_{i=0}^k \mu_i p_{k,i}, \quad k \geq 1,$$

$$\alpha_k = \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}}, \quad k \geq 1,$$

$$p_{k+1}(z) - (1 + z)p_k(z) + \alpha_k z p_{k-1}(z) = 0.$$

↪ **Versión  $\{-1\}$ -invariante:**

$$\tilde{p}_0(z) \equiv 1, \quad \tilde{p}_1(z) = 1 - z, \quad \tilde{\tau}_0 = \mu_0,$$

$$\tilde{\tau}_k = \sum_{i=0}^k \mu_i \tilde{p}_{k,i}, \quad k \geq 1,$$

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{\tau}_k}{\tilde{\tau}_{k-1}}, \quad k \geq 1,$$

$$\tilde{p}_{k+1}(z) - (1 + z)\tilde{p}_k(z) + \tilde{\alpha}_k z \tilde{p}_{k-1}(z) = 0.$$

Observamos que la única diferencia entre ambos procedimientos radica en las condiciones iniciales. La mejoría de este nuevo algoritmo es que a partir de los primeros  $n$  momentos

<sup>3</sup>Existen otras dos versiones donde  $p_k(z)$  es  $\{\gamma_k\}$ -invariante con  $\gamma_k = (-1)^k$  ó  $\gamma_k = (-1)^{k+1}$  (véase [44] y las referencias ahí citadas para los detalles).

trigonométricos  $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$  podemos computar, con aproximadamente la mitad de número de operaciones que el clásico algoritmo de Levinson, los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \pm 1)$  salvo factor multiplicativo, que son realmente los que nos interesan a la hora de computar las fórmulas de Szegő. En cuanto a la computación de las fórmulas tipo-Gauss, de las conexiones dadas en los Teoremas 1.4.3, 1.4.4 y 1.4.5, y a partir de  $\{\mu_k\}_{k=0}^{n-1}$  distinguimos las siguientes situaciones:

1. **Cuadratura Gaussiana:** Tomando  $n = 2s$  computamos  $B_n(z, 1)$  con la versión  $\{1\}$ -invariante del algoritmo split Levinson. Si denotamos por  $\{z_l, \bar{z}_l\}_{l=1}^s$  los ceros de este polinomio, entonces

$$\{x_j = \operatorname{Re}(z_j) : j = 1, \dots, s\}$$

representa el conjunto de nodos de la correspondiente fórmula Gaussiana de  $s$  puntos para  $\sigma(x)$  en  $[-1, 1]$ .

2. **Cuadratura Gauss-Radau ( $x = -1$  preasignado):** Tomando  $n = 2s + 1$  computamos  $B_n(z, 1)$  con la versión  $\{1\}$ -invariante del algoritmo split Levinson. Si denotamos por  $\{-1\} \cup \{z_l, \bar{z}_l\}_{l=1}^s$  los ceros de este polinomio, entonces

$$\{x_0 = -1, x_j = \operatorname{Re}(z_j) : j = 1, \dots, s\}$$

representa el conjunto de nodos de la correspondiente fórmula para  $\sigma(x)$  en  $[-1, 1]$ .

3. **Cuadratura Gauss-Radau ( $x = 1$  preasignado):** Tomando  $n = 2s + 1$  computamos  $B_n(z, -1)$  con la versión  $\{-1\}$ -invariante del algoritmo split Levinson. Si denotamos por  $\{1\} \cup \{z_l, \bar{z}_l\}_{l=1}^s$  los ceros de este polinomio, entonces

$$\{x_j = \operatorname{Re}(z_j), x_{s+1} = 1 : j = 1, \dots, s\}$$

representa el conjunto de nodos de la correspondiente fórmula para  $\sigma(x)$  en  $[-1, 1]$ .

4. **Cuadratura Gauss-Lobatto ( $x = \pm 1$  preasignados):** Tomando  $n = 2s$  computamos  $B_n(z, -1)$  con la versión  $\{-1\}$ -invariante del algoritmo split Levinson. Si denotamos por  $\{\pm 1\} \cup \{z_l, \bar{z}_l\}_{l=1}^{s-1}$  los ceros de este polinomio, entonces

$$\{x_j = \operatorname{Re}(z_j) : j = 1, \dots, s-1, x_s = -1, x_{s+1} = 1\}$$

representa el conjunto de nodos de la correspondiente fórmula para  $\sigma(x)$  en  $[-1, 1]$ .

En todas las situaciones, los pesos pueden calcularse con cualquiera de los procedimientos ya comentados. Como aplicación numérica de las fórmulas de cuadratura de Szegő y tipo-Gauss computamos el algoritmo split Levinson en lenguaje FORTRAN para las funciones peso particulares de Legendre y Chebyshev de primera y segunda especie. Los resultados obtenidos son los siguientes:

	Nodos		Pesos
n=4	$\pm 0,7071067812$	$\pm 0,7071067812i$	1,5707963268
n=6	$\pm 0,8660254038$	$\pm 0,5000000000i$	1,0471975512
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	1,0471975512
n=8	$\pm 0,3826834324$	$\pm 0,9238795325i$	0,7853981634
	$\pm 0,9238795325$	$\pm 0,3826834324i$	0,7853981634
n=10	$\pm 0,9510565163$	$\pm 0,3090169944i$	0,6283185307
	$\pm 0,5877852523$	$\pm 0,8090169944i$	0,6283185307
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	0,6283185307
n=20	$\pm 0,9876883406$	$\pm 0,1564344650i$	0,3141592654
	$\pm 0,8910065242$	$\pm 0,4539904997i$	0,3141592654
	$\pm 0,4539904997$	$\pm 0,8910065242i$	0,3141592654
	$\pm 0,7071067812$	$\pm 0,7071067812i$	0,3141592654
	$\pm 0,1564344650$	$\pm 0,9876883406i$	0,3141592654
n=4	$\pm 0,5000000000$	$\pm 0,7853981634i$	1,5707963268
n=6	$\pm 0,7071067812$	$\pm 0,7071067812i$	0,3926990817
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	0,7853981634
n=8	$\pm 0,8090169944$	$\pm 0,5877852523i$	0,2170787134
	$\pm 0,3090169944$	$\pm 0,9510565163i$	0,5683194500
n=10	$\pm 0,8660254038$	$\pm 0,5000000000i$	0,1308996939
	$\pm 0,5000000000$	$\pm 0,8660254038i$	0,3926990817
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	0,5235987756
n=20	$\pm 0,6548607339$	$\pm 0,7557495744i$	0,1631221775
	$\pm 0,9594929736$	$\pm 0,2817325568i$	0,0226689425
	$\pm 0,4154150130$	$\pm 0,9096319954i$	0,2363135602
	$\pm 0,1423148383$	$\pm 0,9898214419i$	0,2798149423
	$\pm 0,8412535328$	$\pm 0,5406408175i$	0,0834785409
n=4	$\pm 0,5773502692$	$\pm 0,8164965809i$	1,0000000000
n=6	$\pm 0,7745966692$	$\pm 0,6324555320i$	0,5555555556
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	0,8888888889
n=8	$\pm 0,8611363116$	$\pm 0,5083741269i$	0,3478548451
	$\pm 0,3399810436$	$\pm 0,9404322889i$	0,6521451549
n=10	$\pm 0,5384693101$	$\pm 0,8426451223i$	0,4786286705
	$\pm 0,9061798459$	$\pm 0,4228925240i$	0,2369268851
	0,0000000000	$\pm 1,0000000000i$	0,5688888889
n=20	$\pm 0,9739065285$	$\pm 0,2269494959i$	0,0666713443
	$\pm 0,8650633667$	$\pm 0,5016626073i$	0,1494513492
	$\pm 0,6794095683$	$\pm 0,7337592511i$	0,2190863625
	$\pm 0,1488743390$	$\pm 0,9888561226i$	0,295242247
	$\pm 0,4333953941$	$\pm 0,2692667193i$	0,2692667193

Tabla 1: Szegő - Chebyshev de primera, segunda especie y Legendre respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=4	$\pm 0,3826834324$	0,7853981634	$\pm 1,0000000000$	1,0471975512
	$\pm 0,9238795325$	0,7853981634	$\pm 0,5000000000$	1,0471975512
n=5	$\pm 0,5877852523$	0,6283185307	$\pm 1,0000000000$	0,7853981634
	0,0000000000	0,6283185307	0,0000000000	0,7853981634
	$\pm 0,9510565163$	0,6283185307	$\pm 0,7071067812$	0,7853981634
n=6	$\pm 0,7071067812$	0,5235987756	$\pm 1,0000000000$	0,6283185307
	$\pm 0,9659258263$	0,5235987756	$\pm 0,8090169944$	0,6283185307
	$\pm 0,2588190451$	0,5235987756	$\pm 0,3090169944$	0,6283185307
	$\pm 0,9807852804$	0,3926990817	$\pm 1,0000000000$	0,4487989505
n=8	$\pm 0,8314696123$	0,3926990817	$\pm 0,6234898019$	0,4487989505
	$\pm 0,5555702330$	0,3926990817	$\pm 0,9009688679$	0,4487989505
	$\pm 0,1950903220$	0,3926990817	$\pm 0,2225209340$	0,4487989505
	$\pm 0,9876883406$	0,3141592654	$\pm 1,0000000000$	0,3490658504
	$\pm 0,8910065242$	0,3141592654	$\pm 0,7660444431$	0,3490658504
n=10	$\pm 0,7071067812$	0,3141592654	$\pm 0,9396926208$	0,3490658504
	$\pm 0,4539904997$	0,3141592654	$\pm 0,1736481777$	0,3490658504
	$\pm 0,1564344650$	0,3141592654	$\pm 0,5000000000$	0,3490658504

Tabla 2: Gauss y Gauss-Lobatto - Chebyshev de primera especie respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=4	$\pm 0,8090169944$	0,2170787134	$\pm 1,0000000000$	0,1570796327
	$\pm 0,3090169944$	0,5683194500	$\pm 0,4082482905$	0,7068583471
n=5	$\pm 0,8660254038$	0,1308996939	$\pm 1,0000000000$	0,0785398163
	$\pm 0,5000000000$	0,3926990817	$\pm 0,6123724357$	0,4188790205
	0,0000000000	0,5235987756	0,0000000000	0,6544984695
n=6	$\pm 0,6234898019$	0,2743330561	$\pm 1,0000000000$	0,0448798951
	$\pm 0,9009688679$	0,0844886909	$\pm 0,7274123897$	0,2615075568
	$\pm 0,2225209340$	0,4265764164	$\pm 0,2662164819$	0,5014506591
	$\pm 0,7660444431$	0,1442256008	$\pm 1,0000000000$	0,0186999563
n=8	$\pm 0,9396926208$	0,0408329477	$\pm 0,5643994810$	0,2738393748
	$\pm 0,5000000000$	0,2617993878	$\pm 0,8447506035$	0,1187009291
	$\pm 0,1736481777$	0,3385402271	$\pm 0,1981873233$	0,3835078814
	$\pm 0,9594929736$	0,0226689425	$\pm 1,0000000000$	0,0095199777
	$\pm 0,8412535328$	0,0834785409	$\pm 0,9000684637$	0,0628248683
n=10	$\pm 0,6548607339$	0,1631221775	$\pm 0,7142615701$	0,1570580875
	$\pm 0,4154150130$	0,2363135602	$\pm 0,4585752933$	0,2512667667
	$\pm 0,1423148383$	0,2798149423	$\pm 0,1580146786$	0,3094884621

Tabla 3: Gauss y Gauss-Lobatto - Chebyshev de segunda especie respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=3	-1,0000000000	1,2566370614	1,0000000000	1,2566370614
	0,809016994	1,2566370614	-0,809016994	1,2566370614
	-0,309016994	1,2566370614	0,309016994	1,2566370614
n=4	-1,0000000000	0,8975979010	1,0000000000	0,8975979010
	0,9009688679	0,8975979010	-0,9009688679	0,8975979010
	-0,6234898019	0,8975979010	+0,6234898019	0,8975979010
	0,2225209340	0,8975979010	-0,2225209340	0,8975979010
n=5	-1,0000000000	0,6981317008	1,0000000000	0,6981317008
	0,5000000000	0,6981317008	-0,5000000000	0,6981317008
	-0,7660444431	0,6981317008	0,7660444431	0,6981317008
	0,9396926208	0,6981317008	-0,9396926208	0,6981317008
	-0,1736481777	0,6981317008	0,1736481777	0,6981317008
n=6	-1,0000000000	0,5711986643	1,0000000000	0,5711986643
	0,6548607331	0,5711986643	-0,6548607331	0,5711986643
	-0,4154150130	0,5711986643	0,4154150130	0,5711986643
	0,9594929736	0,5711986643	-0,9594929736	0,5711986643
	0,1423148383	0,5711986643	-0,1423148383	0,5711986643
	-0,8412535328	0,5711986643	0,8412535328	0,5711986643
n=8	0,5000000000	0,4188790205	-0,5000000000	0,4188790205
	-0,9135454576	0,4188790205	0,9135454576	0,4188790205
	-0,3090169944	0,4188790205	0,3090169944	0,4188790205
	0,9781476007	0,4188790205	-0,9781476007	0,4188790205
	0,1045284633	0,4188790205	-0,1045284633	0,4188790205
	-1,0000000000	0,4188790205	1,0000000000	0,4188790205
	-0,6691306064	0,4188790205	0,6691306064	0,4188790205
	0,8090169944	0,4188790205	-0,8090169944	0,4188790205
n=10	0,6772815716	0,3306939635	-0,6772815716	0,3306939635
	-1,0000000000	0,3306939635	1,0000000000	0,3306939635
	-0,5469481581	0,3306939635	0,5469481581	0,3306939635
	0,8794737512	0,3306939635	-0,8794737512	0,3306939635
	0,4016954247	0,3306939635	-0,4016954247	0,3306939635
	-0,7891405094	0,3306939635	0,7891405094	0,3306939635
	-0,2454854871	0,3306939635	0,2454854871	0,3306939635
	0,9863613034	0,3306939635	-0,9863613034	0,3306939635
	0,0825793455	0,3306939635	-0,0825793455	0,3306939635
	-0,9458172417	0,3306939635	0,9458172417	0,3306939635

Tabla 4: Gauss-Radau(-1) y Gauss-Radau(+1) - Chebyshev de primera especie respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=3	-1,0000000000	0,2243994753	1,0000000000	0,2243994753
	0,6076252185	0,5808719931	-0,6076252185	0,5808719931
	-0,2742918852	0,8777245960	0,2742918852	0,8777245960
n=4	-1,0000000000	0,1047197551	1,0000000000	0,1047197551
	0,7601573405	0,2989098938	-0,7601573405	0,2989098938
	-0,5379862044	0,5229149549	0,5379862044	0,5229149549
n=5	0,1528288639	0,6966116005	-0,1528288639	0,6966116005
	-1,0000000000	0,0571198664	1,0000000000	0,0571198664
	0,8385964119	0,1710432225	-0,8385964119	0,1710432225
n=6	0,6827529986	0,3209532315	-0,6827529986	0,3209532315
	0,4056256275	0,4828765509	-0,4056256275	0,4828765509
	-0,1614690409	0,5673633887	0,1614690409	0,5673633887
n=8	-1,0000000000	0,0345229962	1,0000000000	0,0345229962
	0,1100274225	0,4825915882	-0,1100274225	0,4825915882
	0,8840882653	0,1062186206	-0,8840882653	0,1062186206
n=10	-0,7695413220	0,2072833088	0,7695413220	0,2072833088
	-0,3708136309	0,4247512827	0,3708136309	0,4247512827
	0,5629059318	0,3326900283	-0,5629059318	0,3326900283
n=10	-1,0000000000	0,0152999640	1,0000000000	0,0152999640
	0,7371931739	0,1694136259	-0,7371931739	0,1694136259
	-0,8631857652	0,0989968050	0,8631857652	0,0989968050
n=10	-0,6138099722	0,2344900766	0,6138099722	0,2344900766
	0,9320024629	0,0487292859	-0,9320024629	0,0487292859
	0,4418817729	0,2988638929	-0,4418817729	0,2988638929
n=10	-0,2825626625	0,3433878878	0,2825626625	0,3433878878
	0,0859506602	0,3692147707	-0,0859506602	0,3692147707
	-1,0000000000	0,0081599809	1,0000000000	0,0081599809
n=10	0,6217762960	0,1840415098	-0,6217762960	0,1840415098
	-0,5068337774	0,2243901302	0,5068337774	0,2243901302
	0,9553706328	0,0261709074	-0,9553706328	0,0261709074
n=10	0,8254480244	0,0955729264	-0,8254480244	0,0955729264
	-0,2280875011	0,2853039785	0,2280875011	0,2853039785
	0,3624524217	0,2607600249	-0,3624524217	0,2607600249
n=10	0,0705181610	0,2989755311	-0,0705181610	0,2989755311
	-0,9096861124	0,0542004225	0,9096861124	0,0542004225
	-0,7409581449	0,1373009054	0,7409581449	0,1373009054

Tabla 5: Gauss-Radau(-1) y Gauss-Radau(+1) - Chebyshev de segunda especie respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=3	-1,000000000	0,444444444	1,000000000	0,444444444
	0,6898979486	0,7528061254	-0,6898979486	0,7528061254
	-0,2898979486	0,7528061254	0,2898979486	0,7528061254
n=4	-1,000000000	0,250000000	1,000000000	0,250000000
	0,8228240810	0,4409244224	-0,8228240810	0,4409244224
	0,1810662711	0,7763869377	-0,1810662711	0,7763869377
	-0,5753189235	0,6576886400	0,5753189235	0,6576886400
n=5	-1,000000000	0,160000000	1,000000000	0,160000000
	0,8857916078	0,2874271216	-0,8857916078	0,2874271216
	0,4463139727	0,5627120303	-0,4463139727	0,5627120303
	-0,1671808647	0,6236530460	0,1671808647	0,6236530460
	-0,7204802713	0,4462078022	0,7204802713	0,4462078022
n=6	-1,000000000	0,111111111	1,000000000	0,111111111
	0,9203802859	0,2015883853	-0,9203802859	0,2015883853
	0,6039731643	0,4169013343	-0,6039731643	0,4169013343
	0,1240503795	0,5209267832	-0,1240503795	0,5209267832
	-0,3909285467	0,4853871885	0,3909285467	0,4853871885
	-0,8029298284	0,3196407532	0,8029298284	0,3196407532
n=8	-1,000000000	0,062500000	1,000000000	0,062500000
	0,9550412271	0,1145088147	-0,9550412271	0,1145088147
	0,7706418937	0,2496479013	-0,7706418937	0,2496479013
	0,4684203544	0,3470147956	-0,4684203544	0,3470147956
	0,0943072527	0,3915721675	-0,0943072527	0,3915721675
	-0,2947505658	0,3765175454	0,2947505658	0,3765175454
	-0,6395186465	0,3041306206	0,6395186465	0,3041306206
	-0,8874748789	0,1853581548	0,8874748789	0,1853581548
n=10	-1,000000000	0,040000000	1,000000000	0,040000000
	0,9711751807	0,0736170055	-0,9711751807	0,0736170055
	0,8512252206	0,1643760127	-0,8512252206	0,1643760127
	0,6477666877	0,2391934317	-0,6477666877	0,2391934317
	0,3806648401	0,2906101648	-0,3806648401	0,2906101648
	0,0760591978	0,3135824572	-0,0760591978	0,3135824572
	-0,2362344694	0,3058592877	0,2362344694	0,3058592877
	-0,5256460304	0,2681948378	0,5256460304	0,2681948378
	-0,7638420424	0,2042701319	0,7638420424	0,2042701319
	-0,9274843742	0,1202966706	0,9274843742	0,1202966706

Tabla 6: Gauss-Radau(-1) y Gauss-Radau(+1) - Legendre respectivamente.

	Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
n=4	$\pm 0,8611363116$	0,3478548451	$\pm 1,0000000000$	0,3333333333
	$\pm 0,3399810436$	0,6521451549	$\pm 0,4472135955$	0,8333333333
n=5	$\pm 0,9061798459$	0,2369268851	$\pm 1,0000000000$	0,2000000000
	$\pm 0,5384693101$	0,4786286705	$\pm 0,6546536707$	0,5444444444
	0,0000000000	0,5688888889	0,0000000000	0,7111111111
n=6	$\pm 0,9324695142$	0,1713244924	$\pm 1,0000000000$	0,1333333333
	$\pm 0,6612093865$	0,3607615730	$\pm 0,7650553239$	0,3784749563
	$\pm 0,2386191861$	0,4679169346	$\pm 0,2852315165$	0,5548583770
n=8	$\pm 0,9602898565$	0,1012285363	$\pm 1,0000000000$	0,0714285714
	$\pm 0,7966664774$	0,2223810345	$\pm 0,8717401485$	0,2107042271
	$\pm 0,5255324099$	0,3137066459	$\pm 0,5917001814$	0,3411226925
	$\pm 0,1834346425$	0,3626837834	$\pm 0,2092992179$	0,4124587947
n=10	$\pm 0,9739065285$	0,0666713443	$\pm 1,0000000000$	0,0444444444
	$\pm 0,8650633667$	0,1494513492	$\pm 0,9195339082$	0,1333059909
	$\pm 0,6794095683$	0,2190863625	$\pm 0,7387738651$	0,2248893421
	$\pm 0,4333953941$	0,2692667193	$\pm 0,4779249498$	0,2920426837
	$\pm 0,1488743390$	0,2955242247	$\pm 0,1652789577$	0,3275397612

Tabla 7: Gauss y Gauss-Lobatto - Legendre respectivamente.

De los resultados numéricos mostrados en la Tabla 2 y correspondientes a la función peso de Chebyshev de primera especie, se observa, como cabe deducir del Ejemplo 1.4.1 y del Teorema 1.4.3, que los pesos de la fórmula Gaussiana son todos iguales. En cuanto a las Tablas 4 a 6 se aprecia que los nodos de las fórmulas de cuadratura de Gauss-Radau con nodo  $x = -1$  prefijado coinciden con los obtenidos al prefijar el nodo  $x = +1$  con signo opuesto, conservándose incluso los pesos. La explicación de este hecho se sigue del Teorema 1.2.9: como  $\eta_1(x) = \tilde{\sigma}(x)(x+1)$  y  $\eta_2(x) = \tilde{\sigma}(x)(x-1)$  son las funciones peso cuyos ceros de polinomios ortogonales nos proporcionan los nodos de las fórmulas de Gauss-Radau prefijando los nodos  $x = -1$  y  $x = 1$  respectivamente, si  $p(x)$  es un polinomio ortogonal en  $[-1, 1]$  con respecto a  $\eta_1(x)$  y aprovechando la simetría de la función  $\tilde{\sigma}(x)$ , se deduce tras el cambio de variable  $x = -t$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 p(x)\eta_1(x)dx = \int_{-1}^1 p(x)\tilde{\sigma}(x)(x+1)dx = \int_1^{-1} p(-t)\tilde{\sigma}(-t)(-t+1)(-dt) = \\ &= -\int_{-1}^1 p(-t)\tilde{\sigma}(t)(t+1)dt = -\int_{-1}^1 p(-t)\eta_2(t)dt, \end{aligned}$$

concluyendo que  $p(-x)$  es un polinomio ortogonal a  $\eta_2(x)$  en  $[-1, 1]$ . La igualdad de los pesos se sigue de la expresión (1.19). Nótese también que los pesos de las fórmulas de Gauss-Lobatto y Gauss-Radau para la función peso de Chebyshev de primera especie son también siempre constantes, como cabe deducir del Ejemplo 1.4.1 y de los Teoremas 1.4.4 y 1.4.5.

Dos hechos deben ser resaltados de la tabla 1: la aparición de nodos de la forma  $\{z, \bar{z}, -z, -\bar{z}\}$  y la igualdad de los pesos correspondientes a tales nodos. Motivados por este fenómeno, analizaremos a continuación que en ciertos casos de simetría de la función peso, esto va a ser siempre cierto. Comenzamos con el siguiente:

**Teorema 1.4.8** Sea  $\tilde{\omega}(\theta)$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$  y asumamos  $\tilde{\omega}(\theta) = h(e^{i\theta})$  con  $h(e^{i\theta}) = h(-e^{i\theta})$  para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Entonces, el  $n$ -ésimo polinomio para-ortogonal  $B_n(z, \tau_n)$  dado por (1.47) con  $|\tau_n| = 1$  para todo  $n \geq 0$  satisface:

1.  $B_{2n}(-z, \tau_n) = B_{2n}(z, \tau_n)$  ,  $n \geq 0$ ,
2.  $B_{2n+1}(-z, \tau_n) = -B_{2n+1}(z, -\tau_n)$  ,  $n \geq 0$ .

*Demostración.*- Sea  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios de Szegő respecto a  $\tilde{\omega}(\theta)$ . De las condiciones de ortogonalidad tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(z) \bar{z}^k \tilde{\omega}(\theta) d\theta = 0 \quad , \quad z = e^{i\theta} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad ,$$

o equivalentemente,

$$-i \int_{\mathbb{T}} \rho_n(z) z^{-(k+1)} h(z) dz = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dado que  $h(-z) = h(z)$  se sigue que

$$\int_{\mathbb{T}} \rho_n(-z) z^{-(k+1)} h(z) dz = 0 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Por tanto,  $\rho_n(-z) = \lambda_n \rho_n(z)$  con  $\lambda_n \neq 0$ , y dado que el polinomio es mónico se sigue para  $n \geq 0$  que  $\rho_n(-z) = (-1)^n \rho_n(z)$ . Por otro lado,

$$\rho_n^*(-z) = (-1)^n z^n \rho_n \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = z^n \rho_n \left( \frac{1}{z} \right) = \rho_n^*(z).$$

Distinguimos pues los siguientes casos:

1. Si  $n = 2m$ ,

$$\begin{aligned} B_n(z, \tau_n) &= \rho_{2m}(z) + \tau_n \rho_{2m}^*(z) \\ B_n(-z, \tau_n) &= \rho_{2m}(-z) + \tau_n \rho_{2m}^*(-z) = \rho_{2m}(z) + \tau_n \rho_{2m}^*(z) = B_{2m}(z, \tau_n). \end{aligned}$$

2. Si  $n = 2m + 1$ ,

$$\begin{aligned} B_{2m+1}(-z, \tau_n) &= \rho_{2m+1}(-z) + \tau_n \rho_{2m+1}^*(-z) = -\rho_{2m+1}(z) + \tau_n \rho_{2m+1}^*(z) = \\ &= -[\rho_{2m+1}(z) - \tau_n \rho_{2m+1}^*(z)] = -B_{2m+1}(z, -\tau_n). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

**Corolario 1.4.9** Sea  $\tilde{\sigma}(x)$  una función peso simétrica definida en el intervalo  $[-1, 1]$ , esto es,  $\tilde{\sigma}(-x) = \tilde{\sigma}(x)$ . Sea  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\sin\theta|$  ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Entonces, los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \tau_n)$  con respecto a  $\tilde{\omega}(\theta)$  satisfacen

1.  $B_{2n}(-z, \tau_n) = B_{2n}(z, \tau_n)$  ,  $n \geq 0$ ,

2.  $B_{2n+1}(-z, \tau_n) = -B_{2n+1}(z, -\tau_n)$  ,  $n \geq 0$ .

*Demostración.*- Es suficiente comprobar que  $\tilde{\omega}(\theta) = h(e^{i\theta})$  satisface  $h(-e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})$ . En efecto,

$$\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\sigma}(\cos\theta)|\operatorname{sen}\theta| = \tilde{\sigma}\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2} = h(e^{i\theta}).$$

Luego, claramente se cumple que  $h(-e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})$  con  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , dado que  $\tilde{\sigma}(-x) = \tilde{\sigma}(\cos\theta) = \tilde{\sigma}(x)$ .

□

Ahora veamos para  $\tau_n \in \mathbb{T}$  qué ocurre con los ceros de  $B_n(z, \tau)$ , que como sabemos son distintos y se encuentran en  $\mathbb{T}$ . A partir de aquí asumiremos que  $\tilde{\omega}(\theta) = h(e^{i\theta}) = h(-e^{i\theta}) = h(e^{i(\theta+\pi)}) = \tilde{\omega}(\theta + \pi)$ .

1. Para  $n = 2m$ , los ceros de  $B_{2m}(z, \tau_n)$  aparecen en  $\mathbb{T}$  en pares opuestos: si  $z$  es un cero, entonces  $-z$  también lo será. Por tanto, los ceros de  $B_{2m}(z, \tau_n)$  podemos ordenarlos como  $\{z_1, z_2, \dots, z_m, -z_1, -z_2, \dots, -z_m\}$ . Si tomamos los casos particulares  $\tau_n = \pm 1$  para todo  $n$ , dado que  $B_{2m}(z, \pm 1)$  tienen coeficientes reales, sus ceros aparecerán en  $\mathbb{T}$  en pares conjugados.

▪ Caso  $\tau = 1$ :

- a) Consideremos un primer caso tomando  $m = 2k$  (esto es,  $n=4k$ ). En esta situación, los ceros de  $B_{2m}(z, +1) = B_{4k}(z, +1)$  podemos ordenarlos como  $\{z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, -z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k\}$ . Notemos también que  $B_{4k}(\pm i, 1) = 2\rho_{4k}(\pm i)$ .
- b) Consideremos un segundo caso tomando ahora  $m = 2k + 1$ . Es fácil comprobar que  $\pm i$  son ceros de  $B_n(z, 1) = B_{2m}(z, 1) = B_{4k+2}(z, 1)$ . De hecho, por definición tenemos  $B_{2m}(\pm i, +1) = \rho_{2m}(\pm i) + \rho_{2m}^*(\pm i)$ . Sea

$$\rho_{2m}(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^{2j} \quad (a_m = 1).$$

Entonces,

$$\rho_{2m}(\pm i) = \sum_{j=0}^m a_j (\pm i)^{2j} = \sum_{j=0}^m a_j (-1)^j$$

y por tanto,

$$\rho_{2m}^*(\pm i) = \sum_{j=0}^m a_{n-j} (-1)^j = \sum_{j=0}^m a_j (-1)^{n+j} = (-1)^m \sum_{j=0}^m a_j (-1)^j.$$

Así,

$$B_{2m}(\pm i, 1) = \rho_{2m}(\pm i) + \rho_{2m}^*(\pm i) = \left[ \sum_{j=0}^m (-1)^j a_j \right] (1 + (-1)^m),$$

y cuando  $m = 2k + 1$  se cumple  $B_{4k+2}(\pm i, 1) = \rho_{4k+2}(\pm i) - \rho_{4k+2}(\pm i) = 0$ . Concluimos finalmente que los ceros de  $B_{4k+2}(z, 1)$  podemos ordenarlos como  $\{\pm i, z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, -z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k\}$ .

- Caso  $\tau = -1$ :

Sabemos que  $\pm 1$  son ceros de  $B_{2m}(z, -1)$ . Ahora,

$$B_{2n}(\pm i, -1) = \sum_{j=0}^m (-1)^j a_j (1 + (-1)^{m+1}).$$

Distinguimos pues dos situaciones:

- a) Consideremos un primer caso tomando  $m = 2k$ . Ahora se cumple que  $B_{2m}(\pm i, -1) = 0$  y los ceros de  $B_{4k}(z, -1)$  podemos ordenarlos, para  $k \geq 2$ , como:  $\{\pm i, \pm 1, z_1, \dots, z_{k-1}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{k-1}, -z_1, \dots, -z_{k-1}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_{k-1}\}$ . Además, para el caso particular  $k = 1$  tenemos el siguiente

**Corolario 1.4.10** *Sea  $\tilde{\omega}(\theta)$  una función peso tal que  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\omega}(\theta + \pi)$  para todo  $\pi \in [-\pi, \pi]$ . Entonces, el polinomio para-ortogonal de grado cuatro*

$$B_4(z, -1) = \lambda_4 [\rho_4(z) - \rho_4^*(z)] \quad , \quad (\lambda_4 \neq 0)$$

viene dado por  $B_4(z, -1) = z^4 - 1$ .

□

- b) Consideremos un segundo caso tomando  $m = 2k+1$ . Dado que  $B_{4k+2}(\pm i, -1) \neq 0$ , sus ceros los ordenamos como

$$\{\pm 1, z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k, -z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k\}.$$

2. Para  $n = 2m + 1$  tenemos que  $B_{2m+1}(z, \tau) = \rho_{2m+1}(z) + \tau \rho_{2m+1}^*(z)$ . Ahora podemos escribir

$$\rho_{2m+1}(z) = z \sum_{j=0}^m a_j z^{2j} \quad , \quad (a_m = 1, a_j \in \mathbb{R} \quad 0 \leq j \leq m-1),$$

por lo que

$$\rho_{2m+1}^*(z) = \sum_{j=0}^m a_{m-j} z^{2j}$$

y de ahí que  $B_{2m+1}(\pm i, \tau) = [(-1)^m \tau \pm i] (\mp i) \rho_{2m+1}(\pm i)$ . Como  $\rho_{2m+1}(\pm i) \neq 0$  se sigue que

$$\begin{aligned} B_{2m+1}(i, \tau) = 0 &\Leftrightarrow \tau = (-1)^{m+1} i, \\ B_{2m+1}(-i, \tau) = 0 &\Leftrightarrow \tau = (-1)^m i. \end{aligned}$$

Cuando  $m = 2k$  tenemos que  $B_{4k+1}(i, -i) = 0$  y  $B_{4k+1}(-i, i) = 0$  mientras que cuando  $m = 2k + 1$  se obtiene  $B_{4k+3}(i, i) = 0$  y  $B_{4k+3}(-i, -i) = 0$ .

Finalmente nos restringimos a los casos particulares  $\tau = \pm 1$ .

- Caso  $\tau = 1$ . Sabemos que  $B_{2m+1}(-1, 1) = 0$ , por lo que los ceros podemos ordenarlos como  $\{-1, z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m\}$ .

- Caso  $\tau = -1$ . Del Corolario 1.4.9 aplicado al caso previo concluimos que los ceros de  $B_{2m+1}(z, -1)$  son precisamente los opuestos de  $B_{2n+1}(z, 1)$ , es decir,  $\{+1, -z_1, \dots, -z_m, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_m\}$ .

Resumimos finalmente esta clasificación en la siguiente tabla:

Caso	$\tau = 1$	$\tau = -1$
$n = 2m,$ $m = 2k$	$z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k,$ $-z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k$	$\pm i, \pm 1, z_1, \dots, z_{k-1}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{k-1},$ $-z_1, \dots, -z_{k-1}, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_{k-1}$
$n = 2m,$ $m = 2k + 1$	$\pm i, z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k,$ $-z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k$	$\pm 1, z_1, \dots, z_k, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_k,$ $-z_1, \dots, -z_k, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_k$
$n = 2m + 1$	$-1, z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$	$+1, -z_1, \dots, -z_m, -\bar{z}_1, \dots, -\bar{z}_m$

Tabla 8: Distribución de ceros de polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \pm 1)$  con respecto a la función peso periódica  $\tilde{\omega}(\theta) = \tilde{\omega}(\theta + \pi)$ .

Para concluir el capítulo demostramos a partir de la fórmula (1.71), y tal y como apreciamos en los ejemplos numéricos, que los pesos correspondientes a los nodos  $\{z, \bar{z}, -z, -\bar{z}\}$  son iguales. En efecto, si denotamos por  $\lambda_j, \hat{\lambda}_j, \tilde{\lambda}_j, \hat{\tilde{\lambda}}_j$  a los pesos correspondientes a los nodos  $z_j, \bar{z}_j, -z_j, -\bar{z}_j$  respectivamente, comprobamos que  $\lambda_j = \hat{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j = \hat{\tilde{\lambda}}_j$ :

1.

$$\hat{\lambda}_j = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{A_n(\bar{z}_j, \pm 1)}{B_n'(\bar{z}_j, \pm 1)} = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{\overline{A_n(z_j, \pm 1)}}{\overline{B_n'(z_j, \pm 1)}} = \bar{\lambda}_j = \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

2. Si  $n$  es par, el polinomio  $A_n(z, \pm 1)$  sólo contiene potencias pares mientras que el polinomio  $B_n'(z, \pm 1)$  sólo potencias impares, por lo que

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{1}{2(-z_j)} \frac{A_n(-z_j, \pm 1)}{B_n'(-z_j, \pm 1)} = -\frac{1}{-2z_j} \frac{A_n(z_j, \pm 1)}{-B_n'(z_j, \pm 1)} = -\frac{1}{2z_j} \frac{A_n(z_j, \pm 1)}{B_n'(z_j, \pm 1)} = \lambda_j.$$

Si  $n$  es impar, en este caso el polinomio  $A_n(z, \pm 1)$  sólo contiene potencias impares mientras que el polinomio  $B_n'(z, \pm 1)$  sólo potencias pares, y de ahí que

$$\tilde{\lambda}_j = -\frac{1}{2(-z_j)} \frac{A_n(-z_j, \pm 1)}{B_n'(-z_j, \pm 1)} = -\frac{1}{-2z_j} \frac{-A_n(z_j, \pm 1)}{B_n'(z_j, \pm 1)} = -\frac{1}{2z_j} \frac{A_n(z_j, \pm 1)}{B_n'(z_j, \pm 1)} = \lambda_j.$$

En ambos casos se cumple  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ .

3. Combinando las pruebas 1. y 2. obtenemos

$$\hat{\tilde{\lambda}}_j = -\frac{1}{2(-\bar{z}_j)} \frac{A_n(-\bar{z}_j, \pm 1)}{B_n'(-\bar{z}_j, \pm 1)} = -\frac{1}{-2\bar{z}_j} \frac{A_n(-z_j, \pm 1)}{B_n'(-z_j, \pm 1)} = -\frac{1}{2\bar{z}_j} \frac{A_n(z_j, \pm 1)}{B_n'(z_j, \pm 1)} = \lambda_j.$$

Con esto quedan finalmente justificados los resultados mostrados en la tabla 1.

## Capítulo 2

# Sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas y fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos

### 2.1. Introducción

Como ya hemos comentado en el capítulo anterior, en el año 1989 W.B. Jones, O. Njåstad y W. Thron introdujeron y caracterizaron en [71] las *fórmulas de Szegő* que dieron origen a una nueva área activa de investigación. Por otro lado, G. Szegő publicó en 1963, y a los 68 años de edad, el artículo [99], de tan sólo 18 páginas pero con un contenido extremadamente denso y en el que analizó las fórmulas de cuadratura para integrandos  $2\pi$ -periódicos con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable. Un inconveniente que plantearon tales fórmulas de cuadratura era el hecho de que sólo podían tener un número par de nodos. Szegő introdujo para la construcción de éstas los denominados *sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos*. El propósito de este capítulo es presentar ambos trabajos en un lenguaje unificado, estableciendo un procedimiento para construir fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable y un número arbitrario de nodos, tanto par como impar. Con este nuevo enfoque general veremos que lo esencialmente necesario en la construcción de estas fórmulas es la correspondiente familia de polinomios de Szegő, tal y como ocurre en [71], dado que se establecerá una relación directa entre éstas y ciertos sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas. Una conexión inicial entre los conceptos de bi-ortogonalidad y para-ortogonalidad fue establecida en [24].

Aunque el desarrollo del capítulo se basa en los dos citados artículos, existen otros tantos en la literatura que tratan sistemas de polinomios bi-ortogonales e incluso sistemas de polinomios de Laurent. Algunos están relacionados con nuestro enfoque (véase por ejemplo [85] ó [87]) mientras que otros no (véase [10] y los dos recientes trabajos [8] y [80]).

La organización del capítulo es la siguiente: en la sección segunda definiremos la notación y el espacio de funciones trigonométricas con el que vamos a trabajar en todo el

capítulo, obteniendo algunos resultados preliminares. Como es bien sabido, la interpolación juega un papel crucial en la construcción de fórmulas de cuadratura, y dado que ese es nuestro interés, dedicaremos la siguiente sección al problema de interpolación en el espacio de funciones trigonométricas. Es a partir de la sección cuarta cuando consideraremos una medida positiva de Borel  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$ . Por un lado, definiremos el concepto de sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas, analizando sus propiedades y estableciendo una relación con la familia de polinomios de Szegő respecto a la medida  $\omega$ . Por otro lado, aprovecharemos esta relación y la ley de recurrencia que satisfacen los polinomios de Szegő para construir leyes de recurrencia para tales sistemas bi-ortogonales. La quinta sección abordará el tema central del capítulo: la construcción de fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos, exactas en espacios de polinomios trigonométricos lo más grandes posibles, y con un número natural arbitrario de nodos. En la sexta sección estableceremos una conexión con la circunferencia unidad, o más concretamente, entre los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas y los polinomios para-ortogonales. Concluimos el capítulo con una última sección en la que se ilustra numéricamente las fórmulas de cuadraturas introducidas en la sección quinta.

## 2.2. Espacios de funciones trigonométricas

Comenzamos recordando por un lado el siguiente concepto ya comentado en el capítulo anterior e introducido en [71]: un polinomio  $P(z)$  de grado exacto  $n$  es  $k$ -invariante con  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si  $P^*(z) = kP(z)$ , siendo  $P^*(z) := z^n \overline{P(1/\bar{z})}$  el polinomio recíproco. Por otro lado, en [99] se dice que un polinomio  $P(z)$  es *autorrecíproco* si es  $\{1\}$ -invariante, es decir, si  $P(z) = P^*(z)$ . El siguiente resultado, cuya demostración es inmediata, establece algunas consecuencias directas de estas definiciones.

**Lema 2.2.1** *Sea  $P(z)$  un polinomio invariante. Entonces,*

1.  $z = 0$  no es un cero de  $P(z)$ ,
2. Los ceros de  $P(z)$  aparecen en pares de la forma  $(\alpha, 1/\bar{\alpha})$ ,
3. Si  $P(z)$  es de grado impar (par), entonces el número de ceros de  $P(z)$  en  $\mathbb{T}$  (contando multiplicidades) es también impar (par).

□

Tal y como prueba el siguiente resultado, los polinomios invariantes son “esencialmente” autorrecíprocos.

**Lema 2.2.2** *Si  $P(z)$  es un polinomio  $k$ -invariante, entonces existe una constante  $\lambda = \lambda(k) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $Q(z) = \lambda P(z)$  es autorrecíproco.*

*Demostración.-* Sea  $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j = c_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ . Como  $|P(0)| = |c_0| = |c_n| \prod_{k=1}^n |z_k|$ , y teniendo en cuenta que  $\prod_{k=1}^n |z_k| = 1$  se sigue que  $|c_0| = |c_n|$ . Consecuentemente,  $c_n = k\bar{c}_0$  con  $|k| = 1$ . Sea  $k = e^{i\omega}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , y definamos  $Q(z) = \lambda P(z)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Entonces,  $Q^*(z) = \bar{\lambda}kP(z) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}kQ(z)$ , esto es,  $Q(z)$  es  $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}k$ -invariante. Haciendo ahora

$\lambda = Re^{i\gamma}$ , se tiene  $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}k = e^{i(\omega-2\gamma)}$ . Por tanto, tomando  $\gamma \in \mathbb{R}$  de manera que  $\gamma = \frac{\omega}{2} + m\pi$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , se tiene  $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}k = 1$  y por tanto  $Q(z)$  será autorrecíproco.  $\square$

Durante este capítulo trabajaremos con el espacio de funciones trigonométricas

$$\mathcal{T}_n^\gamma := \text{span} \{ \cos(k + \gamma)\theta, \text{sen}(k + \gamma)\theta \}_{k=0}^n, \quad \gamma \in \{0, 1/2\}, \quad (2.1)$$

cuya dimensión es  $2(n + \gamma) + 1$  y definimos  $\mathcal{T}^\gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n^\gamma$ . Una función  $T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  tendrá pues la forma

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [a_k \cos(k + \gamma)\theta + b_k \text{sen}(k + \gamma)\theta] \quad (2.2)$$

y escribiremos  $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$  cuando  $a_k$  y  $b_k$  son números complejos ó  $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{R})$  cuando éstos son reales. Si no se indica de manera explícita, por  $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma$  entenderemos una función trigonométrica real de la forma (2.2).

Obsérvese que cuando  $\gamma = 0$  recuperamos los polinomios trigonométricos usuales de grado  $n$ , es decir, funciones de la forma

$$T_n^{(0)}(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos k\theta + b_k \text{sen } k\theta]; \quad a_0, a_k, b_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Decimos que  $T_n(\theta)$  dado por (2.2) es de grado exacto  $n$  si  $|a_n| + |b_n| > 0$ . La siguiente propiedad de simetría se satisface:

$$T_n^{(\gamma)}(\theta) = (-1)^{2\gamma} T_n^{(\gamma)}(\theta + 2\pi), \quad (2.4)$$

es decir, funciones de la forma (2.2) son  $2\pi$ -periódicas y  $4\pi$ -periódicas para  $\gamma = 0$  y  $\gamma = 1/2$  respectivamente y además,  $T_n^{(1/2)}(\theta) = -T_n^{(1/2)}(\theta + 2\pi)$ . Por tanto, en todo el capítulo nos restringiremos a intervalos de longitud  $2\pi$ , digamos la banda  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

A continuación extendemos también el espacio de polinomios de Laurent ya introducidos en el primer capítulo. Para  $n \geq 0$  definimos el subespacio vectorial

$$\Lambda_n^\gamma := \text{span} \{ z^{-(n+\gamma)}, \dots, z^{n+\gamma} \},$$

esto es,  $\Lambda_n^0 = \Lambda_{-n,n}$  mientras que  $\Lambda_n^{1/2} = \text{span} \{ z^{-(n+1/2)}, \dots, z^{-1/2}, z^{1/2}, \dots, z^{n+1/2} \}$ , y por tanto  $\dim(\Lambda_n^\gamma) = \dim(\mathcal{T}_n^\gamma) = 2(n + \gamma) + 1$ . Denotaremos también  $\Lambda^\gamma := \bigcup_{n=0}^\infty \Lambda_n^\gamma = \mathbb{C}[z^{1-\gamma}, z^{\gamma-1}]$ . Recordando que una doble sucesión  $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^\infty$  de números complejos se dice "Hermitiana" si  $\mu_{-k} = \overline{\mu_k}$ , diremos que una función  $L \in \Lambda_n^\gamma$  es Hermitiana si la sucesión de sus coeficientes lo es, permitiéndonos definir  $(\Lambda_n^\gamma)^H := \{L \in \Lambda_n^\gamma : L \text{ Hermitiano}\}$ .

Estas definiciones nos permiten demostrar la siguiente

**Proposición 2.2.3** *Para todo  $T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$  de grado exacto  $n$ ,  $T_n(\theta) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}$  con  $z = e^{i\theta}$  y  $P_{2(n+\gamma)}(z)$  un polinomio ordinario de grado exacto  $2(n + \gamma)$ . Además,  $T_n(\theta)$  es real, sí y sólo sí,  $P_{2(n+\gamma)}$  es autorrecíproco.*

*Demostración.*- Consideremos  $T_n(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k + \gamma)\theta + b_k \sin(k + \gamma)\theta \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$ . Entonces, de la fórmula de Euler se obtiene

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2} [\exp(i(k + \gamma))\theta + \exp(-i(k + \gamma))\theta] \\ &\quad + \frac{b_k}{2i} [\exp(i(k + \gamma))\theta - \exp(-i(k + \gamma))\theta] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k - ib_k}{2} \exp(i(k + \gamma))\theta + \frac{a_k + ib_k}{2} \exp(-i(k + \gamma))\theta. \end{aligned}$$

Además, si  $T_n(\theta)$  es real, entonces  $\{a_k, b_k\}_{k=0}^n$  son reales y tomando  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$  para  $k = 0, \dots, n$  y  $z = e^{i\theta}$  se deduce que

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^n c_k z^{k+\gamma} + \overline{c_k} z^{-(k+\gamma)} = \frac{z^{2\gamma} Q_n(z) + Q_{n*}(z)}{z^\gamma}, \quad Q_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \in \mathbb{P}_n, \quad c_n \neq 0.$$

Así, podemos escribir  $T_n(\theta) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}$  con  $z = e^{i\theta}$  y

$$P_{2(n+\gamma)}(z) = z^n [z^{2\gamma} Q_n(z) + Q_{n*}(z)] \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1},$$

que es autorrecíproco. □

Como consecuencia tenemos el siguiente

**Teorema 2.2.4** *Para todo  $T_n \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{C})$  existe  $L_n \in \Lambda_n^\gamma$  tal que  $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta})$ . Además,  $T_n$  es real, sí y sólo sí,  $L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H$ , y como consecuencia*

$$\mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{R}) = \left\{ T(\theta) : T(\theta) = L(e^{i\theta}), L \in (\Lambda_n^\gamma)^H \right\}. \quad (2.5)$$

□

Veamos ahora que la relación entre funciones trigonométricas de  $\mathcal{T}_n^\gamma$  y polinomios ordinarios autorrecíprocos nos permite deducir cierta información sobre los ceros de elementos de  $\mathcal{T}_n^\gamma$ .

**Teorema 2.2.5** *Sea  $n = 2(k + \gamma)$  con  $k$  un entero no negativo y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ . Sea  $T(\theta) = \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)$  donde  $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset (-\pi, \pi]$  son constantes dadas. Entonces,  $T(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$ .*

*Demostración.*- Dado que  $\sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \beta}{2}\right)$  representa un polinomio trigonométrico de grado uno para  $\alpha$  y  $\beta$  constantes arbitrarias, se prueba fácilmente por inducción que la función  $T(\theta) = \prod_{j=1}^k \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j}}{2}\right)$  representa un polinomio trigonométrico de grado  $k$ , probando así el caso  $\gamma = 0$ . Esto nos permite hacer la demostración para el caso  $\gamma = 1/2$ , en la que debemos probar que  $T(\theta) = \prod_{j=1}^{2k+1} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_k^{1/2}$ . En efecto,

escribiendo  $\theta_{2k+1} = \alpha$  se sigue que  $T(\theta) = S(\theta) \times \text{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$  con  $S(\theta) \in \mathcal{T}_k^0$  y por tanto,

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \left( a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \cos j\theta + b_j \text{sen } j\theta \right) \left[ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &= a_0 \left[ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &\quad + \cos\frac{\alpha}{2} \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2} \left[ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2} - j\theta\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + j\theta\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_j}{2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} - j\theta\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} + j\theta\right) \right] \right\} \\ &\quad - \text{sen}\frac{\alpha}{2} \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{2} \left[ \cos\left(j\theta - \frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2} + j\theta\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_j}{2} \left[ \text{sen}\left(j\theta - \frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + j\theta\right) \right] \right\} \in \mathcal{T}_k^{1/2}. \end{aligned}$$

□

En el Teorema 2.2.5 probamos que una función que consista en el producto de  $2(k + \gamma)$  factores de la forma  $\text{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$  pertenece al espacio  $\mathcal{T}_k^\gamma$  con  $k$  un número natural y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ . Veamos un resultado recíproco.

**Teorema 2.2.6** *Una función  $T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  de grado exacto  $n$  tiene exactamente  $2(n + \gamma)$  ceros contándolos como es usual con sus multiplicidades y restringiéndonos a la banda  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Además, los ceros no reales aparecen en pares conjugados.*

*Demostración.*- Recordemos previamente que, para el caso  $\gamma = 1/2$ , aunque  $T_n(\theta)$  es una función  $4\pi$ -periódica, nos podemos restringir a intervalos de longitud  $2\pi$  dado que de (2.4), si  $\alpha$  es un cero de  $T_n(\theta)$  en  $(0, \pi]$  entonces  $\alpha - 2\pi$  será también un cero de  $T_n(\theta)$  en  $(-2\pi, -\pi]$  y de manera similar, si  $\alpha$  es un cero de  $T_n(\theta)$  en  $(-\pi, 0]$  entonces  $\alpha + 2\pi$  será también un cero de  $T_n(\theta)$  en  $(\pi, 2\pi]$ . De la proposición 2.2.3 podemos escribir

$$T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}, \quad z = e^{i\theta}, \quad L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H,$$

donde  $P_{2(n+\gamma)}(z) \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)} \setminus \mathbb{P}_{2(n+\gamma)-1}$  es autorrecíproco. Así,

$$P_{2(n+\gamma)}(z) = K \prod_{j=1-2\gamma}^{2n} (z - z_j), \quad K \neq 0, \quad z_j \neq 0, \quad j = 1 - 2\gamma, \dots, 2n.$$

Además, podemos escribir

$$P_{2(n+\gamma)}(z) = K \prod_{j=1-2\gamma}^{2m} (z - z_j) \prod_{k=1}^{n-m} (z - \tilde{z}_k) (z - 1/\overline{\tilde{z}_k}), \quad K \neq 0, \quad (2.6)$$

donde  $z_j = e^{i\theta_j} \in \mathbb{T}$  con  $\theta_j \in \mathbb{R}$  para  $j = 1 - 2\gamma, \dots, 2m$ , y los pares  $(\tilde{z}_k, 1/\overline{\tilde{z}_k})$  representan los ceros que no están en  $\mathbb{T}$  (tomamos  $\tilde{z}_k = e^{i\omega_k}$  con  $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  para todo  $k = 1, \dots, n - m$  y de ahí que  $1/\overline{\tilde{z}_k} = e^{i\overline{\omega_k}}$ ). Ahora bien, puede probarse fácilmente que  $e^{i\theta} - e^{i\omega} = 2i \text{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\omega}{2}\right)}$  y por tanto,

$$\begin{aligned} P_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) &= K \prod_{j=1-2\gamma}^{2m} (e^{i\theta} - e^{i\theta_j}) \prod_{k=1}^{n-m} (e^{i\theta} - e^{i\omega_k}) (e^{i\theta} - e^{i\overline{\omega_k}}) \\ &= K (-1)^{n+\gamma} i^{2(n+\gamma)} \prod_{j=1-2\gamma}^{2m} \text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) e^{i\left[\frac{\theta-\theta_j}{2}\right]} \times \\ &\quad \prod_{k=1}^{n-m} \text{sen}\left(\frac{\theta-\omega_k}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta-\overline{\omega_k}}{2}\right) e^{i\left[\theta + \frac{\omega_k + \overline{\omega_k}}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Entonces, si sigue que

$$P_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = \lambda_n e^{i(n+\gamma)\theta} \prod_{j=1-2\gamma}^{2m} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \prod_{k=1}^{n-m} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \omega_k}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \overline{\omega_k}}{2} \right)$$

con  $\lambda_n \neq 0$ , y como consecuencia

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= L_n(e^{i\theta}) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta})}{e^{i(n+\gamma)\theta}} \\ &= \lambda_n \prod_{j=1-2\gamma}^{2m} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \prod_{k=1}^{n-m} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \omega_k}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \overline{\omega_k}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\theta_j \in \mathbb{R}$  para todo  $j = 1 - 2\gamma, \dots, m$  y  $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tal que  $\Re(\omega_k) = \psi_k + 2t\pi$ ,  $\psi_k \in (-\pi, \pi]$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  y  $k = 1, \dots, n - m$ .

□

Para finalizar esta sección introductoria establecemos a raíz del resultado previo el siguiente conocido teorema (véase [49] ó [99]) presentando una demostración alternativa y una generalización del mismo para  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ .

**Teorema 2.2.7 (Riesz-Féjer)** *Una función trigonométrica real  $T_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  presenta exactamente  $2\gamma$  cambios de signo en  $(-\pi, \pi]$ , sí y sólo sí, puede ser escrito de la forma*

$$T_n(\theta) = \left( \frac{z - z_0}{2i\sqrt{zz_0}} \right)^{2\gamma} |g(z)|^2, \quad z = e^{i\theta},$$

donde  $g(z)$  es un polinomio algebraico de grado  $n$  y  $z_0 = e^{i\alpha}$  con  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  únicamente determinado.

*Demostración.-* Veamos primero la demostración para el caso  $\gamma = 0$ : asumimos que  $T_n(\theta)$  es un polinomio trigonométrico de grado  $n$  y de la Proposición 2.2.3 escribimos  $T_n(\theta) = e^{-in\theta} P_{2n}(e^{i\theta})$  con  $P_{2n}(z)$  un polinomio algebraico de grado  $2n$ . Si  $T_n(\theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces los posibles ceros reales de  $T_n(\theta)$  deben tener multiplicidad par. Además, si  $\theta = \alpha$  es un cero real de  $T_n(\theta)$  entonces  $z = e^{i\alpha}$  es un cero de  $P_{2n}(z)$  en  $\mathbb{T}$ . Por tanto, de (2.6) podemos escribir

$$P_{2n}(z) = \lambda_n p_m^2(z) q_{n-m}(z) q_{n-m}^*(z), \quad \lambda_n \neq 0,$$

donde  $p_m(z) \in \mathbb{P}_m$  con  $0 \leq m \leq n$  y  $q_{n-m}(z) \in \mathbb{P}_{n-m}$ . Dado que  $T_n(\theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= |T(\theta)| = \left| \frac{P(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} \right| = |\lambda_n| |p_m^2(e^{i\theta})| |q_{n-m}(e^{i\theta})| \left| \overline{q_{n-m}(e^{i\theta})} \right| \\ &= |\lambda_n| |p_m^2(e^{i\theta})| |q_{n-m}(e^{i\theta})|^2 = |g(e^{i\theta})|^2, \end{aligned}$$

donde  $g(z) = \sqrt{|\lambda_n|} p_m(z) q_{n-m}(z) \in \mathbb{P}_n$ .

Recíprocamente, si  $g(z)$  un polinomio algebraico de grado  $n$ , entonces haciendo  $z = e^{i\theta}$  se sigue que

$$|g(z)|^2 = g(z) \overline{g(z)} = g(z) g_*(z) = \frac{g(z) g^*(z)}{z^n} = \frac{P_{2n}(z)}{z^n},$$

donde  $P_{2n}(z) = g(z)g^*(z)$  es claramente un polinomio  $\{1\}$ -invariante de grado  $2n$ , por lo que  $|g(z)|^2 = L_n(z) \in \Lambda_n^H$ , y del Teorema 2.2.4,  $|g(z)|^2$  representa un polinomio trigonométrico de grado  $n$  que es claramente no negativo para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, de esta demostración para el caso  $\gamma = 0$ , del Teorema 2.2.6 que nos garantiza que cualquier elemento de  $\mathcal{T}_n^{1/2}$  tiene al menos un cero real de multiplicidad impar en  $-\pi < \theta \leq \pi$  (implicando que tales funciones siempre cambian de signo en tal intervalo), teniendo en cuenta la relación  $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) = \frac{z-z_0}{2i\sqrt{zz_0}}$  donde  $z = e^{i\theta}$  y  $z_0 = e^{i\theta_0}$  y haciendo uso de (2.7) se concluye el resultado. □

Como aplicación directa de este resultado para el caso  $\gamma = 0$ , y de acuerdo con [82], en la estimación de la integral  $I_{(a,b)}(f)$  dada por (1.23) nos encontramos con un integrando fraccionario cuyo denominador es un polinomio trigonométrico positivo de grado uno. Del Teorema 2.2.7 podemos escribir pues

$$\cosh(b) - \cos(\theta - a) = \lambda \left| h(e^{i\theta}) \right|^2, \quad \lambda > 0, \quad h(z) = z - \alpha, \quad |\alpha| < 1.$$

De este modo,  $I_{(a,b)}(f)$  podrá ser re-escrita como  $I_{(a,b)}(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\omega(\theta)$  con  $d\omega(\theta) = \frac{d\theta}{\lambda |h(e^{i\theta})|^2}$ , una modificación racional de la medida de Lebesgue.

### 2.3. Interpolación por funciones trigonométricas

Como es bien sabido, las fórmulas de cuadratura representan una de las aplicaciones más inmediatas de la interpolación. Dado que estamos interesados en fórmulas de cuadratura basadas en elementos de  $\mathcal{T}_n^\gamma$ , estableceremos en esta sección resultados de interpolación a partir de la relación (2.5). Comenzamos con el siguiente

**Teorema 2.3.1 (Lagrange)** *Dados  $n$  nodos distintos  $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset (-\pi, \pi]$  y tomando  $p(n) = E[\frac{n}{2}]$  (donde  $E[\cdot]$  denota, como es usual, la función parte entera), entonces existe un único  $T_{p(n-1)}^\gamma \in \mathcal{T}_{p(n-1)}^\gamma(\mathbb{R})$  tal que:*

$$T_{p(n-1)}^\gamma(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.8}$$

siendo  $\{y_j\}_{j=1}^n$  un conjunto de números reales y  $\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ . Además,  $T_{p(n-1)}^\gamma$  queda caracterizado por

$$T_{p(n-1)}^\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^n l_j(\theta) y_j \tag{2.9}$$

donde

$$l_j(\theta) := \frac{W_n(\theta)}{2W'_n(\theta_j) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} \in \mathcal{T}_{p(n-1)}^\gamma(\mathbb{R}), \quad W_n(\theta) := \prod_{k=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right), \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.10}$$

*Demostración.*- Para la primera parte, por conveniencia, en vez de  $n$  consideremos  $2(n + \gamma) + 1$  nodos y sea  $T_n^\gamma(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k + \gamma)\theta + b_k \sin(k + \gamma)\theta$ . Veamos primero que las constantes  $\{a_k, b_k\}_{k=0}^n$  quedan únicamente determinadas de las condiciones (2.8). En efecto,  $T_n^\gamma(\theta) = L_n(e^{i\theta})$  con  $L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H$  verificando (2.8) es equivalente a

$$L_n(z_j) = y_j \quad , \quad z_j = e^{i\theta_j} \quad , \quad j = 1, \dots, 2(n + \gamma) + 1. \quad (2.11)$$

Haciendo ahora  $L_n(z) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}$  donde  $P_{2(n+\gamma)}(z) \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)}$ , (2.11) implica

$$P_{2(n+\gamma)}(z_j) = \tilde{y}_j \quad , \quad \tilde{y}_j = z_j^{n+\gamma} y_j \quad , \quad j = 1, \dots, 2(n + \gamma) + 1. \quad (2.12)$$

Dado que  $z_j \neq z_k$ ,  $P_{2(n+\gamma)}(z)$  queda únicamente determinado por (2.12) y por tanto  $T_n^\gamma(\theta)$  posee las deseadas condiciones de interpolación. Faltaría comprobar que  $T_n^\gamma(\theta)$  tiene coeficientes reales, lo cual haremos verificando que  $P_{2(n+\gamma)}(z)$  es autorrecíproco, es decir, viendo que  $P_{2(n+\gamma)}^*(z)$  satisface también las condiciones de interpolación (2.12). Como  $y_j \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} P_{2(n+\gamma)}^*(z_j) &= z_j^{2(n+\gamma)} \overline{P_{2(n+\gamma)}(1/\bar{z}_j)} = z_j^{2(n+\gamma)} \overline{P_{2(n+\gamma)}(z_j)} = z_j^{2(n+\gamma)} \overline{z_j^{n+\gamma} y_j} \\ &= z_j^{n+\gamma} y_j \quad , \quad j = 1, \dots, 2(n + \gamma) + 1. \end{aligned}$$

Por tanto, en virtud de la unicidad del polinomio  $P_{2n+1}(z)$  se sigue que  $P_{2n+1}^*(z) = P_{2n+1}(z)$ , completando así la primera parte de la demostración.

Para la segunda parte tenemos, por un lado, del Teorema 2.2.5 que la función nodal  $W_n(\theta)$  dada en (2.10) pertenece al espacio  $\mathcal{T}_{p(n)}^\gamma$  con  $\gamma = 0$  si  $n$  es par ó  $\gamma = 1/2$  si  $n$  es impar, mientras que por otro lado, se comprueba fácilmente que  $l_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$  para todo  $j, k = 1, \dots, n$ , siendo  $\delta_{j,k}$  la función delta de Kronecker (1.2) y concluyendo así que la solución del problema viene dada por (2.9). □

El siguiente resultado será requerido cuando tratemos la construcción de ciertas fórmulas de cuadratura que integren exactamente funciones trigonométricas del mayor grado posible.

**Teorema 2.3.2 (Hermite)** *Sea  $\{\theta_j\}_{j=1}^{n+1}$  un conjunto de  $(n+1)$  nodos distintos en  $(-\pi, \pi]$ . Entonces, existe un único  $H_n^\gamma \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{R})$  verificando*

$$H_n^\gamma(\theta_j) = y_j \quad , \quad j = 1, \dots, n + 1 \quad ; \quad (H_n^\gamma)'(\theta_k) = \tilde{y}_k \quad , \quad k = 1, \dots, n + 2\gamma, \quad (2.13)$$

donde  $\{y_j\}_{j=1}^{n+1} \cup \{\tilde{y}_k\}_{k=1}^{n+2\gamma}$  es un conjunto de  $(2(n + \gamma) + 1)$  número reales y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ . Además,  $H_n^\gamma$  queda caracterizado como sigue: definiendo

$$W_{n+1}(\theta) := \prod_{k=1}^{n+1} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_k}{2} \right),$$

entonces

$$H_n^\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^{n+1} \left[ t_j^{(\gamma)}(\theta) y_j + s_j^{(\gamma)}(\theta) \tilde{y}_j \right] \quad (2.14)$$

donde para  $1 \leq j \leq n+1$ ,

$$s_j^{(1/2)}(\theta) := \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)} \left[ \frac{W_{n+1}(\theta)}{W'_{n+1}(\theta_j)} \right]^2 \in \mathcal{T}_n^{1/2}, \quad (2.15)$$

$$t_j^{(1/2)}(\theta) := \left[ \frac{W_{n+1}(\theta)}{2W'_{n+1}(\theta_j) \operatorname{sen} \left[ \frac{\theta - \theta_j}{2} \right]} \right]^2 \times \left\{ \cos \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) - \frac{2W''_{n+1}(\theta_j)}{W'_{n+1}(\theta_j)} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \right\} \in \mathcal{T}_n^{1/2}, \quad (2.16)$$

mientras que para  $1 \leq j \leq n$ ,

$$s_j^{(0)}(\theta) := \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)} \left[ \frac{W_{n+1}(\theta)}{W'_{n+1}(\theta_j)} \right]^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_{n+1}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_{n+1}}{2} \right)} \right) \in \mathcal{T}_n^0, \quad (2.17)$$

$$t_j^{(0)}(\theta) := \left[ \frac{W_{n+1}(\theta)}{W'_{n+1}(\theta_j)} \right]^2 \operatorname{sen}^{-2} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{\theta - \theta_{n+1}}{2} \right) \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_{n+1}}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) + \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j - \theta_{n+1}}{2} \right) \left( 1 - \frac{W''_{n+1}(\theta_j)}{W'_{n+1}(\theta_j)} \right) + \cos \left( \frac{\theta_j - \theta_{n+1}}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \right\} \in \mathcal{T}_n^0 \quad (2.18)$$

y

$$t_{n+1}^{(0)}(\theta) := \left[ \frac{W_{n+1}(\theta)}{2W'_{n+1}(\theta_{n+1}) \operatorname{sen} \left[ \frac{\theta - \theta_{n+1}}{2} \right]} \right]^2 \in \mathcal{T}_n^0, \quad s_{n+1}^{(0)}(\theta) \equiv 0. \quad (2.19)$$

*Demostración.*- Sea  $H_n^\gamma(\theta) = L_n(e^{i\theta}) \in (\Lambda_n^\gamma)^H$ . Procediendo como en el Teorema previo,  $H_n^\gamma(z) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}$  donde  $z = e^{i\theta}$  y  $P_{2(n+\gamma)}(z) \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)}$ . Luego, nuestro problema de interpolación trigonométrica de tipo Hermite (2.13) se reduce a encontrar  $P_{2(n+\gamma)}(z) \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)}$  tal que

$$\begin{aligned} P_{2(n+\gamma)}(z_j) &= z_j^{n+\gamma} y_j, & j &= 1, \dots, n+1 \\ P'_{2(n+\gamma)}(z_k) &= z_k^{n+\gamma-1} [(n+\gamma)y_k - i\tilde{y}_k], & k &= 1, \dots, n+2\gamma. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora, dado que  $z_j \neq z_l$  para  $j \neq l$ , es bien sabido que el problema de interpolación (2.20) tiene solución única  $P_{2(n+\gamma)}(z)$  y  $H_n^\gamma(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = e^{-i(n+\gamma)\theta} P_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta})$  será la solución única de (2.13). Para concluir la primera parte de la demostración faltaría probar que  $H_n^\gamma(\theta)$  tiene coeficientes reales, y al igual que en el Teorema 2.3.1, se comprueba después de algunos cálculos elementales y teniendo en cuenta que  $(\overline{P})'(z) = \overline{(P')}(z)$ , que  $P_{2(n+\gamma)}(z)$  es autorrecíproco.

Para la segunda parte de la demostración se sigue por un lado del Teorema 2.2.5 que  $s_j^{(\gamma)}, t_j^{(\gamma)} \in \mathcal{T}_n^\gamma(\mathbb{R})$  para  $1 \leq j \leq n+2\gamma$  y  $t_{n+1}^{(0)} \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ , dados todos por las relaciones (2.15)-(2.19), mientras que por otro lado se comprueba tras cálculos elementales que

$$\begin{aligned} t_j^{(1/2)}(\theta_r) &= \delta_{j,r}, & \left( t_j^{(1/2)} \right)'(\theta_r) &= 0 \\ s_j^{(1/2)}(\theta_r) &= 0, & \left( s_j^{(1/2)} \right)'(\theta_r) &= \delta_{j,r} \end{aligned}, \quad 1 \leq j, r \leq n+1 \quad (2.21)$$

y

$$\begin{aligned} t_j^{(0)}(\theta_r) &= \delta_{j,r} & 1 \leq j, r \leq n+1, \\ \left(t_j^{(0)}\right)'(\theta_r) &= 0 & 1 \leq j \leq n+1, \quad 1 \leq r \leq n, \\ s_j^{(0)}(\theta_r) &= 0 & 1 \leq r \leq n+1, \quad 1 \leq j \leq n, \\ \left(s_j^{(0)}\right)'(\theta_r) &= \delta_{j,r} & 1 \leq j, r \leq n, \end{aligned}$$

siendo  $\delta_{j,k}$  la función delta de Kronecker (1.2).

□

Para concluir esta sección consideraremos un problema de interpolación usando un número par  $2n$  de nodos en subespacios de  $\mathcal{T}_n^0$ , digamos  $\mathcal{T}_n^0 \ominus \text{span}\{\text{sen } n\theta\}$  ó  $\mathcal{T}_n^0 \ominus \text{span}\{\text{cos } n\theta\}$ , ó usando un número impar  $2n+1$  de nodos en subespacios de  $\mathcal{T}_n^{1/2}$ , digamos  $\mathcal{T}_n^{1/2} \ominus \text{span}\{\text{sen}(n+\frac{1}{2})\theta\}$  ó  $\mathcal{T}_n^{1/2} \ominus \text{span}\{\text{cos}(n+\frac{1}{2})\theta\}$ . Al respecto cabe recordar que un sistema de funciones continuas  $\{f_0, \dots, f_m\}$  en un intervalo  $[a, b]$  representa un sistema de Haar en  $[a, b]$ , sí y sólo sí, para cualquier  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $\{f_0, \dots, f_k\}$  es un sistema de Chebyshev en  $[a, b]$ . Claramente, fijado  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ ,  $\mathcal{T}_n^\gamma$  dado por (2.1) no puede ser un sistema de Haar en  $(-\pi, \pi]$  (compruébese simplemente que  $\{1, \text{cos } \theta\}$  ó  $\{\text{cos}(\frac{\theta}{2}), \text{sen}(\frac{\theta}{2})\}$  no son sistemas de Chebyshev). Por tanto, no podemos asumir inicialmente que dados  $2(n+\gamma)$  nodos  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)}$  en  $(-\pi, \pi]$  exista  $\tilde{T}_n^\gamma \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{cos}(n+\gamma)\theta\}$  ó en  $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n+\gamma)\theta\}$  tal que  $\tilde{T}_n^\gamma(\theta_j) = y_j$  para todo  $j = 1, \dots, 2(n+\gamma)$ .

**Teorema 2.3.3** Sean  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ ,  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)} \subset (-\pi, \pi]$  tales que  $\theta_j \neq \theta_k$  para  $j \neq k$  y  $\{y_j\}_{j=1}^{2(n+\gamma)}$  números reales arbitrarios. Consideremos el siguiente problema de interpolación: Hallar  $T_n^\gamma \in \tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma$  tal que

$$T_n^\gamma(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2(n+\gamma), \quad (2.22)$$

siendo  $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma$  un subespacio de  $\mathcal{T}_n^\gamma$  de dimensión  $2(n+\gamma)$ . Entonces, (2.22) tiene solución única tanto en  $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma = \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n+\gamma)\theta\}$  como en  $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma = \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{cos}(n+\gamma)\theta\}$ . Además, definiendo  $\alpha_k := \sum_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} \theta_j$  para todo  $k = 1, \dots, 2(n+\gamma)$ ,  $\lambda_n = \sum_{j=1}^{2(n+\gamma)} \theta_j$  y  $W_n(\theta) := \prod_{j=1}^{2(n+\gamma)} \text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n^\gamma$ , entonces una expresión explícita para la solución única viene dada por

$$T_n^\gamma(\theta) = \sum_{j=1}^{2(n+\gamma)} \tilde{s}_j(\theta) y_j, \quad (2.23)$$

donde para  $j = 1, \dots, 2(n+\gamma)$ ,

$$\tilde{s}_j(\theta) := \frac{1}{2W_n'(\theta_j) \text{sen}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)} \text{sen}\left(\frac{\theta+\alpha_j}{2}\right) \text{sen}^{-1}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) W_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n+\gamma)\theta\} \quad (2.24)$$

ó

$$\tilde{s}_j(\theta) := \frac{1}{2W_n'(\theta_j) \text{cos}\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)} \text{cos}\left(\frac{\theta+\alpha_j}{2}\right) \text{sen}^{-1}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) W_n(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{cos}(n+\gamma)\theta\}. \quad (2.25)$$

*Demostración.*- Intentemos encontrar primero  $T_n^\gamma(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n + \gamma)\theta\}$  verificando (2.22). Podemos escribir

$$T_n^\gamma(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cos(j + \gamma)\theta + b_j \text{sen}(j + \gamma)\theta + a_n \cos(n + \gamma)\theta = L_n(e^{i\theta})$$

donde  $a_j, b_j \in \mathbb{R}$  para  $j = 0, \dots, n-1$ ,  $a_n \neq 0$  y  $L_n \in (\Lambda_n^\gamma)^H$ . De la demostración de la Proposición 2.2.3 podemos escribir

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^{k+\gamma} + \overline{c_k} z^{-(k+\gamma)},$$

donde  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$  para  $k = 0, \dots, n-1$  y  $c_n = \frac{a_n}{2} \in \mathbb{R}$ . De ahí,

$$L_n(z) = z^{-\gamma} \sum_{k=-n}^{n+2\gamma} d_k z^k,$$

donde  $d_{-k} = \overline{c_k}$  para  $k = 1 - 2\gamma, \dots, n$ ,  $d_l = c_{l-2\gamma}$  para  $l = 1, \dots, n + 2\gamma$  y  $d_0 = a_0$  si  $\gamma = 0$ . Ahora, haciendo como es usual  $z_j = e^{i\theta_j}$  para todo  $j = 1, \dots, 2(n + \gamma)$ , ( $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$ ), (2.22) se convierte en

$$T_n^\gamma(\theta_j) = L_n(e^{i\theta_j}) = L_n(z_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2(n + \gamma),$$

dando lugar al siguiente sistema lineal

$$z_j^{-\gamma} \sum_{k=-n}^{n+2\gamma} d_k z_j^k = z_j^{-\gamma} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1+2\gamma} d_k z_j^k + d_{n+2\gamma} (z_j^{-n} + z_j^{n+2\gamma}) = y_j. \quad (2.26)$$

Ahora, el sistema (2.26) tiene una solución única, sí y sólo sí,  $D_n \neq 0$ , donde

$$D_n = \begin{vmatrix} z_1^{-(n-1+\gamma)} & z_1^{-(n-2+\gamma)} & \cdots & z_1^\gamma & \cdots & z_1^{n-1+\gamma} & (z_1^{-(n+\gamma)} + z_1^{n+\gamma}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_{2(n+\gamma)}^{-(n-1+\gamma)} & z_{2(n+\gamma)}^{-(n-2+\gamma)} & \cdots & z_{2(n+\gamma)}^\gamma & \cdots & z_{2(n+\gamma)}^{n-1+\gamma} & (z_{2(n+\gamma)}^{-(n+\gamma)} + z_{2(n+\gamma)}^{n+\gamma}) \end{vmatrix}.$$

Introduciendo el determinante de Vandermonde asociado a  $z_1, \dots, z_{2(n+\gamma)}$ , es decir,

$$V_{2(n+\gamma)} = V_{2(n+\gamma)}(z_1, \dots, z_{2(n+\gamma)}) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{2(n+\gamma)-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{2(n+\gamma)-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2(n+\gamma)} & \cdots & z_{2(n+\gamma)}^{2(n+\gamma)-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

y definiendo  $\xi := \prod_{j=1}^{2(n+\gamma)} z_j = e^{i\lambda_n}$ , puede fácilmente comprobarse que

$$D_n = \xi^{-(n-1+\gamma)} [1 - (-1)^{2\gamma} \bar{\xi}] V_{2(n+\gamma)}. \quad (2.27)$$

Por otro lado, si consideramos nuestro problema de interpolación en  $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\cos(n + \gamma)\theta\}$ , el determinante  $\tilde{D}_n$  asociado del correspondiente sistema verifica

$$\tilde{D}_n = \xi^{-(n-1+\gamma)} [1 + (-1)^{2\gamma} \bar{\xi}] V_{2(n+\gamma)}. \quad (2.28)$$

Si  $\lambda_n \neq k\pi$  para cualquier número entero  $k$ , entonces claramente  $\xi \neq \pm 1$ , y dado que  $V_{2(n+\gamma)} \neq 0$ , de (2.27)-(2.28) deducimos que ambos determinantes  $D_n$  y  $\tilde{D}_n$  no se anulan, lo que implica que el problema de interpolación (2.22) tiene solución única tanto en  $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n + \gamma)\theta\}$  como en  $\mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\cos(n + \gamma)\theta\}$ . Si asumimos que  $\lambda_n = k\pi$  para algún número entero  $k$ , concluimos de (2.27)-(2.28) que

$$D_n = \begin{cases} 0 & (k \text{ par}, \gamma = 0) & y & (k \text{ impar}, \gamma = 1/2) \\ \neq 0 & (k \text{ par}, \gamma = 1/2) & y & (k \text{ impar}, \gamma = 0) \end{cases}, \quad (2.29)$$

$$\tilde{D}_n = \begin{cases} 0 & (k \text{ par}, \gamma = 1/2) & y & (k \text{ impar}, \gamma = 0) \\ \neq 0 & (k \text{ par}, \gamma = 0) & y & (k \text{ impar}, \gamma = 1/2). \end{cases} \quad (2.30)$$

Por ejemplo, si  $D_n \neq 0$  y  $\gamma = 0$ , habremos encontrado un único  $L_n \in \Lambda_{-n,n}$ ,  $L_n(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j$  tal que  $c_{-n} = c_n$  y verificando  $L_n(z_j) = y_j$  para todo  $j = 1, \dots, 2n$ . Por tanto,  $T_n^0(\theta) = L_n(e^{i\theta}) \in \mathcal{T}_n \ominus \text{span}\{\text{sen } n\theta\}$  y  $T_n^0(\theta_j) = y_j$  para todo  $j = 1, \dots, 2n$ . Para concluir la demostración de la primera parte se procede como en el Teorema 2.3.1 para verificar que las correspondientes funciones trigonométricas son reales.

Para la segunda parte de la demostración queda claro que (2.23) es la única solución del problema si vemos que  $\tilde{s}_j(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\text{sen}(n + \gamma)\theta\}$  y  $\tilde{s}_j(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma \ominus \text{span}\{\cos(n + \gamma)\theta\}$ , expresiones dadas por (2.24) y (2.25) respectivamente, y  $\tilde{s}_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$ , siendo  $\delta_{j,k}$  la función delta de Kronecker (1.2) para  $j = 1, \dots, 2(n + \gamma)$ . Supongamos que  $D_n \neq 0$ , es decir, de (2.29) que  $\lambda_n \neq k\pi$  para todo  $k$  número entero ó  $\lambda_n = [2(k - \gamma) + 1]\pi$  para algún número entero  $k$ . Fijemos  $j \in \{1, \dots, 2(n + \gamma)\}$  y definamos  $\alpha_j := \sum_{k=1, k \neq j}^{2(n+\gamma)} \theta_j = \lambda_n - \theta_j$ . Podemos escribir  $\tilde{s}_j(\theta) = e^{-i(n+\gamma)\theta} \tilde{l}_j(e^{i\theta})$  donde  $\tilde{l}_j(z) \in \mathbb{P}_{2(n+\gamma)}$  tal que  $\tilde{l}_j(z_k) = z_j^n \delta_{j,k}$  donde, como es usual,  $z_k = e^{i\theta_k}$  para  $k = 1, \dots, 2(n + \gamma)$ . Dado que  $\tilde{s}_j \in \mathcal{T}_n \ominus \text{span}\{\text{sen } n\theta\}$ , el coeficiente director de  $\tilde{l}_j(z)$  debe coincidir con  $\tilde{l}_j(0)$ , y tenemos que  $\tilde{l}_j(z) = c_j(z - w_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{2(n+\gamma)} (z - z_k) = c_j z^{2(n+\gamma)} + \dots + \tilde{l}_j(0)$ . Pero  $\tilde{l}_j(0) = c_j = c_j w_j \prod_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} z_j$ , por lo que

$$w_j = \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} z_j} = \prod_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} \frac{1}{z_j} = e^{-\sum_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} \theta_j} = e^{-i\alpha_j}.$$

Por tanto, de (2.7) se sigue que

$$\tilde{s}_j(\theta) = \tilde{c}_j \text{sen} \left( \frac{\theta + \alpha_j}{2} \right) \prod_{j=1, j \neq k}^{2(n+\gamma)} \text{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)$$

donde  $\tilde{c}_j$  debe determinarse de manera que  $\tilde{s}_j(\theta_j) = 1$ . Como

$$\tilde{s}_j(\theta) = \tilde{c}_j \text{sen} \left( \frac{\theta + \alpha_j}{2} \right) \frac{W_n(\theta)}{\text{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)}$$

tendremos que

$$1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_j} \tilde{c}_j \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + \alpha_j}{2} \right) \frac{W_n(\theta)}{\operatorname{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right)} = 2\tilde{c}_j \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j + \alpha_j}{2} \right) W_n'(\theta_j).$$

Observamos en este caso que  $\frac{1}{2}(\theta_j + \alpha_j) = \frac{1}{2}\lambda_n \neq k\pi$  para todo número entero  $k$ , por lo que  $\operatorname{sen} \left( \frac{\theta_j + \alpha_j}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{\lambda_n}{2} \right) \neq 0$  y queda así deducida la fórmula (2.24). El procedimiento para obtener la fórmula (2.25) es análogo.  $\square$

## 2.4. Sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas

En lo que resta de capítulo consideraremos una medida positiva de Borel  $\omega$  en  $[-\pi, \pi]$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  el producto interior inducido (1.27). Nuestro propósito en esta sección será generalizar los resultados obtenidos en [99] en relación con propiedades de bases ortogonales para el espacio de polinomios trigonométricos con respecto al producto interior (1.27) en  $\mathcal{T}^0$ , extendido ahora a  $\mathcal{T}^\gamma$  con  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ .

Comenzamos considerando la base de  $\mathcal{T}_n^0$  dada por  $\{1, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, \dots, \cos n\theta, \operatorname{sen} n\theta\}$  y la base de  $\mathcal{T}_n^{1/2}$  dada por  $\{\cos \frac{\theta}{2}, \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \dots, \cos(n + \frac{1}{2})\theta, \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta\}$ . Ambas bases son claramente ortogonales cuando  $d\omega(\theta) \equiv d\theta$ , la medida de Lebesgue en  $[-\pi, \pi]$ , y nos interesa ahora extender esta propiedad para una medida  $\omega$  arbitraria. Esto puede ser realizado ortogonalizando las funciones elementales de las bases correspondientes en orden lineal de acuerdo con el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt. Generamos pues un conjunto  $\{f_0^{(0)}, f_1^{(0)}(\theta), g_1^{(0)}(\theta), \dots, f_n^{(0)}(\theta), g_n^{(0)}(\theta)\}$  de elementos de  $\mathcal{T}^0$  (siendo  $f_0^{(0)}$  una constante no nula) ó un conjunto  $\{f_0^{(1/2)}(\theta), g_0^{(1/2)}(\theta), \dots, f_n^{(1/2)}(\theta), g_n^{(1/2)}(\theta)\}$  de elementos de  $\mathcal{T}^{1/2}$  verificando:

$$\begin{aligned} f_1^{(0)}(\theta) \in \operatorname{span}\{1, \cos \theta\} & \quad , \quad g_1^{(0)}(\theta) \in \operatorname{span}\{1, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta\} \quad , \quad \dots, \\ f_n^{(0)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^0 \ominus \operatorname{span}\{\operatorname{sen} n\theta\} & \quad , \quad g_n^{(0)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^0 \quad , \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} f_0^{(1/2)}(\theta) \in \operatorname{span}\{\cos \frac{\theta}{2}\} & \quad , \quad g_0^{(1/2)}(\theta) \in \operatorname{span}\{\cos \frac{\theta}{2}, \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\} \quad , \quad \dots, \\ f_n^{(1/2)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^{1/2} \ominus \operatorname{span}\{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta\} & \quad , \quad g_n^{(1/2)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^{1/2} \quad , \end{aligned} \quad (2.32)$$

y también para  $j, k = 0, 1, \dots, n$  ( $g_0^{(0)} \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \langle f_j^{(\gamma)}(\theta), f_k^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \kappa_j \delta_{j,k} \quad , \quad \kappa_j^{(\gamma)} > 0 \\ \langle g_j^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \tilde{\kappa}_j \delta_{j,k} \quad , \quad \tilde{\kappa}_j^{(\gamma)} > 0 \quad ; \quad j, k \neq 0 \quad \text{si} \quad \gamma = 0 \\ \langle f_j^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si repetimos el proceso para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^\infty$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$  y  $g_0^{(0)} \equiv 0$  representa una base ortogonal para  $\mathcal{T}^\gamma$  con respecto a  $\omega$ . Escribiendo

$$\begin{aligned} f_k^{(\gamma)}(\theta) &= \sum_{j=0}^k \left[ a_{k,j}^{(\gamma)} \cos(j + \gamma)\theta + b_{k,j}^{(\gamma)} \operatorname{sen}(j + \gamma)\theta \right] \\ g_k^{(\gamma)}(\theta) &= \sum_{j=0}^k \left[ c_{k,j}^{(\gamma)} \cos(j + \gamma)\theta + d_{k,j}^{(\gamma)} \operatorname{sen}(j + \gamma)\theta \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

entonces se sigue que  $b_{k,k}^{(\gamma)} = 0$ ,  $a_{k,k}^{(\gamma)} \neq 0$  y  $|c_{k,k}^{(\gamma)}| + |d_{k,k}^{(\gamma)}| > 0$ . Además, debido a la independencia lineal se sigue claramente que  $d_{n,n}^{(\gamma)} \neq 0$  para todo  $n \geq 1$ . De acuerdo con Szegő en [99], estamos ahora en condiciones de establecer la siguiente:

**Definición 2.4.1** *Dos funciones trigonométricas de la forma*

$$f(\theta) = a \cos(n + \gamma)\theta + b \operatorname{sen}(n + \gamma)\theta + \dots$$

y

$$g(\theta) = c \cos(n + \gamma)\theta + d \operatorname{sen}(n + \gamma)\theta + \dots$$

se dice que son linealmente independientes, sí y sólo sí,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Definición 2.4.2** *Con respecto a la medida  $\omega$  en  $[\pi, \pi]$ , un sistema  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$  y  $g_0^{(0)} = 0$  de funciones trigonométricas reales verificando (2.34) para todo  $k \geq 1$ , se denominará sistema bi-ortogonal con respecto a  $\omega$  si se cumple lo siguiente:*

1. *Para todo  $n \geq 1$ ,  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  son linealmente independientes.*
2. *El sistema es ortogonal con respecto al producto interior inducido por  $\omega$ , es decir, se cumple (2.33).*

Además, el sistema será bi-ortonormal si  $|f_0^{(0)}| = 1$  y

$$\|f_k^{(\gamma)}(\theta)\|_{\omega} = \|g_l^{(\gamma)}(\theta)\|_{\omega} = 1 \quad ; \quad k, l = (1 - 2\gamma), (1 - 2\gamma) + 1, \dots$$

Con tales definiciones establecemos el siguiente resultado (véase la demostración en [99] para el caso  $\gamma = 0$  y se procede de manera similar para el caso  $\gamma = 1/2$ ):

**Proposición 2.4.3** *Consideremos el sistema  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  de funciones trigonométricas con  $f_0^{(0)} \neq 0$ ,  $g_0^{(0)} \equiv 0$  y de la forma (2.34). Entonces,  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  es una base para  $T^{\gamma}$  si*

$$\begin{vmatrix} a_{k,k}^{(\gamma)} & b_{k,k}^{(\gamma)} \\ c_{k,k}^{(\gamma)} & d_{k,k}^{(\gamma)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad k \geq 1.$$

□

En relación con la unicidad de sistemas bi-ortogonales para  $\omega$  tenemos el siguiente resultado cuya demostración es una aplicación directa de un resultado ya conocido de Análisis Matricial (véase también [99]).

**Proposición 2.4.4** *Sean  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{f}_k^{(\gamma)}(\theta), \tilde{g}_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  dos sistemas bi-ortonormales respecto a  $\omega$  con  $f_0^{(0)} \cdot \tilde{f}_0^{(0)} \neq 0$  (ambas constantes) y  $g_0^{(0)} = \tilde{g}_0^{(0)} \equiv 0$ . Entonces, para todo  $n \geq 1$  se cumple que*

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \\ \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n^{(\gamma)}(\theta) \\ g_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

siendo  $M_n$  una matriz ortogonal de orden  $2 \times 2$ .

*Demostración.-* Dado que  $\tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  y  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^n$  es una base para  $\mathcal{T}_n^\gamma$ , tenemos que  $\tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) = \sum_{j=0}^n [\alpha_j f_j^{(\gamma)}(\theta) + \beta_j g_j^{(\gamma)}(\theta)]$ . Pero  $\langle \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta), T(\theta) \rangle_\omega = 0$  para todo  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ , implicando  $\tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) = \alpha f_n^{(\gamma)}(\theta) + \beta g_n^{(\gamma)}(\theta)$ . De manera similar,  $\tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) = a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta)$ , y ambas relaciones podemos expresarlas en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \\ \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n^{(\gamma)}(\theta) \\ g_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix},$$

donde

$$\alpha = \frac{\langle \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta), f_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|f_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}, \quad \beta = \frac{\langle \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|g_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2},$$

$$a = \frac{\langle \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta), f_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|\tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}, \quad b = \frac{\langle \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|\tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}.$$

Cambiando los papeles de ambos sistemas, se sigue que

$$\begin{pmatrix} f_n^{(\gamma)}(\theta) \\ g_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix} = \tilde{M}_n \begin{pmatrix} \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \\ \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_n = M_n^{-1}.$$

Finalmente, cuando trabajamos con sistemas bi-ortonormales, es decir, si

$$\|f_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega = \|g_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega = \|\tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega = \|\tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega = 1,$$

se observa que  $M_n^T = \tilde{M}_n = M_n^{-1}$ , es decir, la matriz  $M_n$  es ortogonal.

□

A continuación veremos cómo la familia de polinomios ortonormales de Szegő  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  con respecto a  $\omega$  nos permite construir sistemas de funciones trigonométricas bi-ortogonales para  $\omega$ . Nuestro primer paso será partir de la subsucesión de polinomios de grado impar.

**Teorema 2.4.5** *Sea  $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de números complejos en  $\mathbb{T}$  tal que  $\omega_n^2 \delta_{2(n+1-\gamma)}$  es un número real para todo  $n \geq 0$ , siendo  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociada a  $\omega$ . Sea  $f_0^{(0)}(\theta) \equiv c \neq 0$ ,  $g_0^{(0)} \equiv 0$  y*

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta), \quad n \geq 0, \quad \gamma \in \{0, 1/2\} \quad (2.36)$$

con  $f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  reales y  $\varphi_{2n+1}(z)$  el polinomio de Szegő ortonormal de grado  $2n+1$ . Entonces, el sistema  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^\infty$  representa un sistema de funciones trigonométricas bi-ortogonal en  $T^\gamma$ .

*Demostración.-* Sea  $\omega_n = \alpha_n + i\beta_n$  para  $n \geq 0$  y  $\varphi_{2n+1}(z) = \kappa_{2n+1} z^{2n+1} + \dots + l_{2n+1}$  ( $\kappa_{2n+1} > 0$  y  $l_{2n+1} = \kappa_{2n+1} \delta_{2n+1}$ ). El análisis de la independencia lineal de  $f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  la estudiamos por separado en dos partes en función de  $\gamma$ , comenzando por el caso  $\gamma = 1/2$ . La relación (2.36) se convierte pues en

$$\omega_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_n^{(1/2)}(\theta) + i g_n^{(1/2)}(\theta), \quad n \geq 0.$$

Haciendo  $l_{2n+1} = p_n + iq_n$  y  $e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = \tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta) + i\tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta)$  tendremos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta) &= (\kappa_{2n+1} + p_n) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + q_n \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \dots \in \mathcal{T}_n^{1/2} \\ \tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta) &= q_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + (\kappa_{2n+1} - p_n) \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \dots \in \mathcal{T}_n^{1/2}. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{vmatrix} \kappa_{2n+1} + p_n & q_n \\ q_n & \kappa_{2n+1} - p_n \end{vmatrix} = \kappa_{2n+1}^2 - |l_{2n+1}|^2 = \frac{\eta_{2n+1}^2}{\|\rho_{2n+1}(z)\|_\omega^2} > 0,$$

vemos que  $\tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta)$  y  $\tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta)$  son linealmente independientes. Entonces,

$$\omega_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = (\alpha_n + i\beta_n) \left[ \tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta) + i\tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta) \right] = f_n^{(1/2)}(\theta) + ig_n^{(1/2)}(\theta)$$

donde,

$$f_n^{(1/2)}(\theta) = \alpha_n \tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta) - \beta_n \tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta) \quad , \quad g_n^{(1/2)}(\theta) = \beta_n \tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta) + \alpha_n \tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta).$$

Ahora, dado que  $\tilde{f}_n^{(1/2)}(\theta)$  y  $\tilde{g}_n^{(1/2)}(\theta)$  son linealmente independientes y

$$\begin{vmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{vmatrix} = |\omega_n|^2 = 1,$$

se deduce claramente que  $f_n^{(1/2)}(\theta)$  y  $g_n^{(1/2)}(\theta)$  son también linealmente independientes para todo  $n \geq 0$ . La demostración para el caso  $\gamma = 0$  es más directa. La relación (2.36) se convierte ahora en

$$\omega_n e^{-in\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_{n+1}^{(0)}(\theta) + ig_{n+1}^{(0)}(\theta),$$

y se deduce directamente que

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(0)}(\theta) &= \kappa_{2n+1} [\alpha_n \cos(n+1)\theta - \beta_n \operatorname{sen}(n+1)\theta] + \dots \in \mathcal{T}_{n+1}^0, \\ g_{n+1}^{(0)}(\theta) &= \kappa_{2n+1} [\beta_n \cos(n+1)\theta + \alpha_n \operatorname{sen}(n+1)\theta] + \dots \in \mathcal{T}_{n+1}^0. \end{aligned}$$

Dado que

$$\kappa_{2n+1}^2 \begin{vmatrix} \alpha_n & -\beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{vmatrix} = \kappa_{2n+1}^2 |\omega_n|^2 = \kappa_{2n+1}^2 > 0$$

se concluye que  $f_{n+1}^{(0)}(\theta)$  y  $g_{n+1}^{(0)}(\theta)$  son también linealmente independientes para todo  $n \geq 0$ .

A continuación tomemos  $z = e^{i\theta}$  y escribamos

$$\begin{aligned} f_n^{(\gamma)}(\theta) &= \frac{1}{2z^{n+\gamma}} [\omega_n \varphi_{2n+1}(z) + \overline{\omega_n} \varphi_{2n+1}^*(z)], \\ g_n^{(\gamma)}(\theta) &= \frac{1}{2iz^{n+\gamma}} [\omega_n \varphi_{2n+1}(z) - \overline{\omega_n} \varphi_{2n+1}^*(z)]. \end{aligned}$$

De las condiciones de ortogonalidad (1.30) se cumple que

$$\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), f_m^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = k_n \delta_{n,m} \quad , \quad \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), g_m^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = \tilde{k}_n \delta_{n,m} \quad , \quad k_n \cdot \tilde{k}_n \neq 0$$

y

$$\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), g_m^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0 \quad , \quad n \neq m.$$

Sin embargo, no podemos asegurar en general que  $\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0$  para que se cumpla (2.33). Para todo  $n \geq 0$  tenemos, por un lado, que

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \omega_n \frac{\varphi_{2n+1}(e^{i\theta})}{e^{i(n+\gamma)\theta}} \right]^2 d\omega(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f_n^{(\gamma)}(\theta) + i g_n^{(\gamma)}(\theta) \right]^2 d\omega(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 d\omega(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} \left( g_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 d\omega(\theta) + 2i \int_{-\pi}^{\pi} f_n^{(\gamma)}(\theta) g_n^{(\gamma)}(\theta) d\omega(\theta). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por otro lado, de (1.30) y haciendo  $z = e^{i\theta}$  para  $\gamma = 1/2$  se sigue que

$$I_n = \omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2n+1}(z) \frac{\varphi_{2n+1}(z)}{z^{2n+1}} d\omega(\theta) = \omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} l_{2n+1} \frac{\varphi_{2n+1}(z)}{z^{2n+1}} d\omega(\theta) = \omega_n^2 \delta_{2n+1} \quad (2.38)$$

mientras que de (1.30), (1.41) y haciendo  $\gamma = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2n+1}(z) \frac{\varphi_{2n+1}(z)}{z^{2n}} d\omega(\theta) = \omega_n^2 \kappa_{2n+1} \int_{-\pi}^{\pi} z \varphi_{2n+1}(z) d\omega(\theta) = \\ &= \kappa_{2n+1} \omega_n^2 \langle z \varphi_{2n+1}(z), 1 \rangle_\omega = \kappa_{2n+1} \omega_n^2 \langle \eta_{2n+2} \varphi_{2n+2}(z) - \delta_{2n+2} \varphi_{2n+1}^*(z), 1 \rangle_\omega \\ &= -\delta_{2n+2} \kappa_{2n+1} \omega_n^2 \langle \varphi_{2n+1}^*(z), 1 \rangle_\omega = -\delta_{2n+2} \kappa_{2n+1}^2 \omega_n^2 \frac{\Delta_{2n+1}}{\Delta_{2n}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por comparación entre (2.37) y (2.38)-(2.39) se sigue que la restante condición de ortogonalidad se verifica, sí y sólo sí,  $\omega_n^2 \delta_{2(n+1-\gamma)}$  es real.

□

**Nota 2.4.6** Aquí debemos hacer notar que podemos obtener un sistema bi-ortogonal partiendo de cualquier familia de polinomios de Szegő  $\{P_n(z)\}_{n \geq 0}$  cuyos coeficientes directores sean reales para todo  $n \geq 0$ .

En general, el sistema anterior no es bi-ortonormal. Para obtener un sistema bi-ortonormal procedemos como sigue. Primero, de (2.37) y (2.38) deducimos

$$\| f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 - \| g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 = (-1)^{1-2\gamma} \omega_n^2 \delta_{2(n+1-\gamma)}. \quad (2.40)$$

Por otro lado, de (2.36) también tenemos

$$\| f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 + \| g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 = 1. \quad (2.41)$$

Ahora, sin pérdida de generalidad podemos escoger  $\omega_n \in \mathbb{T}$  tal que  $\omega_n^2 \delta_{2(n+1-\gamma)} \geq 0$ . Por tanto, de (2.40) y (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned} \| f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1)^{1-2\gamma} \left| \delta_{2(n+1-\gamma)} \right| \right], \\ \| g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \|_\omega^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - (-1)^{1-2\gamma} \left| \delta_{2(n+1-\gamma)} \right| \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Tenemos pues que el sistema  $\{A_n^{(\gamma)}(\theta), B_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$  dado por  $B_0^{(0)} \equiv 0$ ,  $A_0^{(0)} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$  y

$$\begin{aligned} A_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) &= \sqrt{2} [1 + (-1)^{1-2\gamma} |\delta_{2(n+1-\gamma)}|]^{-1/2} f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta), \\ B_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) &= \sqrt{2} [1 - (-1)^{1-2\gamma} |\delta_{2(n+1-\gamma)}|]^{-1/2} g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta), \end{aligned} \quad (2.43)$$

para  $n \geq 0$  constituye un sistema bi-ortonormal para  $\mathcal{T}^\gamma$  con respecto a la medida  $\omega$ . Observamos también que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) &= [1 + (-1)^{1-2\gamma} |\delta_{2(n+1-\gamma)}|]^{1/2} A_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \\ &\quad + i [1 - (-1)^{1-2\gamma} |\delta_{2(n+1-\gamma)}|]^{1/2} B_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por lo tanto, cuando  $\gamma = 0$  tenemos que para todo  $n \geq 0$ :

$$\sqrt{2}\omega_n e^{-in\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = [1 - |\delta_{2n+2}|]^{1/2} A_{n+1}^{(0)}(\theta) + i [1 + |\delta_{2n+2}|]^{1/2} B_{n+1}^{(0)}(\theta) \quad (2.45)$$

(compárese con el Teorema 2 en [99]) y cuando  $\gamma = 1/2$  se obtiene

$$\sqrt{2}\omega_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta} \varphi_{2n+1}(e^{i\theta}) = [1 + |\delta_{2n+1}|]^{1/2} A_n^{(1/2)}(\theta) + i [1 - |\delta_{2n+1}|]^{1/2} B_n^{(1/2)}(\theta). \quad (2.46)$$

En el siguiente resultado establecemos un segundo paso en la construcción de sistemas bi-ortogonales, partiendo de la subsucesión de polinomios ortonormales de Szegő de grado par. Omitimos la demostración para el caso  $\gamma = 1/2$  dado que el procedimiento es análogo a la del Teorema 2.4.5. La demostración para el caso  $\gamma = 0$  puede verse en [99].

**Teorema 2.4.7** *Sea  $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de números complejos en  $\mathbb{T}$  tal que  $\omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)}$  es un número real para todo  $n \geq 0$ , siendo  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociada a la medida  $\omega$ . Sea*

$$\omega_n e^{-i(n-\gamma)\theta} \varphi_{2n}(e^{i\theta}) = f_n^{(\gamma)}(\theta) + i g_n^{(\gamma)}(\theta) \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad \gamma \in \{0, 1/2\}. \quad (2.47)$$

Entonces,  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  representa un sistema bi-ortogonal en  $\mathcal{T}^\gamma$  con respecto a  $\omega$ .

□

De nuevo el sistema anterior no es, en general, bi-ortonormal. Asumiendo que  $\omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \geq 0$  se cumple ahora que

$$\begin{aligned} \|f_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 - \|g_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 &= (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|, \\ \|f_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 + \|g_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \|f_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 &= \frac{1}{2} [1 + (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|], \\ \|g_n^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2 &= \frac{1}{2} [1 - (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Así, tomando  $B_0^{(0)} \equiv 0$ ,  $A_0^{(0)} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$  y para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} A_n^{(\gamma)}(\theta) &= \sqrt{2} [1 + (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|]^{-1/2} f_n^{(\gamma)}(\theta), \\ B_n^{(\gamma)}(\theta) &= \sqrt{2} [1 - (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|]^{-1/2} g_n^{(\gamma)}(\theta), \end{aligned} \quad (2.50)$$

entonces  $\{A_k^{(\gamma)}(\theta), B_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  representa un sistema bi-ortonormal para  $\mathcal{T}^\gamma$  con respecto a la medida  $\omega$ . Además, se cumple que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\omega_n e^{-i(n-\gamma)\theta} \varphi_{2n}(e^{i\theta}) &= [1 + (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|]^{1/2} A_n^{(\gamma)}(\theta) \\ &+ i [1 - (-1)^{2(1-\gamma)} |\delta_{2(n+\gamma)}|]^{1/2} B_n^{(\gamma)}(\theta). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Así, para  $\gamma = 0$  deducimos (compárese con la fórmula (3.5) en [99]):

$$\sqrt{2}\omega_n e^{-in\theta} \varphi_{2n}(e^{i\theta}) = [1 + |\delta_{2n}|]^{1/2} A_n^{(0)}(\theta) + i [1 - |\delta_{2n}|]^{1/2} B_n^{(0)}(\theta) \quad (2.52)$$

y para  $\gamma = 1/2$ ,

$$\sqrt{2}\omega_n e^{-i(n-\frac{1}{2})\theta} \varphi_{2n}(e^{i\theta}) = [1 - |\delta_{2n+1}|]^{1/2} A_n^{(1/2)}(\theta) + i [1 + |\delta_{2n+1}|]^{1/2} B_n^{(1/2)}(\theta). \quad (2.53)$$

**Ejemplo 2.4.8** Consideremos la medida de Lebesgue  $d\omega \equiv d\theta$ . Sabemos que  $\rho_n(z) = z^n$  y por tanto  $\delta_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ . Entonces, la sucesión  $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  en el Teorema 2.4.5 podemos tomarla como  $\omega_n = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Por tanto, del Teorema 2.4.5 y de la Nota 2.4.6 tenemos

$$e^{-i(n+\gamma)\theta} e^{i(2n+1)\theta} = f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$$

implicando para  $n \geq 0$  que

$$f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) = \cos(n+1-\gamma)\theta, \quad g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) = \operatorname{sen}(n+1-\gamma)\theta. \quad (2.54)$$

Así, para  $\gamma = 0$  tenemos  $f_n^{(0)}(\theta) = \cos n\theta$  y  $g_n^{(0)}(\theta) = \operatorname{sen} n\theta$  para  $n \geq 1$  mientras que para  $\gamma = \frac{1}{2}$  resulta  $f_n^{(1/2)}(\theta) = \cos(n + \frac{1}{2})\theta$  y  $g_n^{(1/2)}(\theta) = \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta$  para  $n \geq 0$ . Además, tomando  $a$  y  $b$  números reales no ambos nulos, puede comprobarse fácilmente que  $a f_n^{(0)}(\theta) + b g_n^{(0)}(\theta)$  para  $n \geq 1$  tiene  $2n$  ceros distintos mientras que  $a f_n^{(1/2)}(\theta) + b g_n^{(1/2)}(\theta)$  para  $n \geq 0$  tiene  $2n+1$  ceros reales distintos ambos en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$ .

A continuación nos centramos en analizar propiedades de los ceros de sistemas bi-ortogonales, comenzando con una generalización para una medida  $\omega$  arbitraria de la propiedad verificada en el Ejemplo 2.4.8 para la medida de Lebesgue.

**Teorema 2.4.9** Sea  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$  y  $g_0^{(0)} \equiv 0$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  y  $a$  y  $b$  números reales no ambos nulos. Entonces, la función trigonométrica  $T_n(\theta) = a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta)$  tiene  $2(n+\gamma)$  ceros reales y distintos en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$  con  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ .

*Demostración.*- Para fijar ideas nos restringimos al intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Del Teorema 2.2.6 sabemos que  $T_n(\theta)$  tiene  $2(n+\gamma)$  ceros en la banda  $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$ . Además, los ceros no reales aparecen en pares conjugados. Sea  $p = 2(k+\gamma)$  el número de ceros de  $T_n(\theta)$  en  $(-\pi, \pi]$  con multiplicidad impar ( $0 \leq k \leq n$ ). Asumamos que  $k < n$  y definamos

$$U_k(\theta) = \left(\frac{\theta - \theta_{2k+1}}{2}\right)^{2\gamma} \prod_{j=1}^k \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_{2j}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_{2j-1}}{2}\right) \in \mathcal{T}_k^\gamma,$$

siendo  $\{\theta_j\}_{j=1}^{2(k+\gamma)}$  los ceros de  $T_n(\theta)$  en  $(-\pi, \pi]$  con multiplicidad impar. Entonces, podemos escribir

$$T_n(\theta) = af_{n+2\gamma}(\theta) + bg_{n+2\gamma}(\theta) = U_k(\theta)V_{n-k}(\theta)$$

donde  $V_{n-k}(\theta) \in \mathcal{T}_{n-k}^0$  y con signo constante en  $(-\pi, \pi]$ . Dado que  $k < n$ , en virtud de la ortogonalidad se sigue por un lado que

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta)U_k(\theta)d\omega(\theta) = a \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta)U_k(\theta)d\omega(\theta) + b \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta)U_k(\theta)d\omega(\theta) = 0,$$

mientras que por otro lado  $I = \int_{-\pi}^{\pi} (U_k(\theta))^2 V_{n-k}(\theta)d\omega(\theta) \neq 0$ , dado que  $\omega$  es una medida positiva de Borel en  $(-\pi, \pi]$ . De esta contradicción se sigue que  $k = n$ .

□

Consideremos ahora un sistema bi-ortonormal para  $\omega$ ,  $\{A_k^{(\gamma)}(\theta), B_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  con  $A_0^{(0)} \neq 0$  y  $B_0^{(0)} \equiv 0$ . De (1.7) definimos la función núcleo reproductor para  $\mathcal{T}_n^\gamma$  como

$$\mathcal{R}_n(\alpha, \theta) = \sum_{\nu=0}^n \left[ A_\nu^{(\gamma)}(\alpha)A_\nu^{(\gamma)}(\theta) + B_\nu^{(\gamma)}(\alpha)B_\nu^{(\gamma)}(\theta) \right] , \alpha, \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

De la Proposición 2.4.4 es obvio que cada término  $A_\nu^{(\gamma)}(\alpha)A_\nu^{(\gamma)}(\theta) + B_\nu^{(\gamma)}(\alpha)B_\nu^{(\gamma)}(\theta)$  será invariante si multiplicamos el vector  $(A_\nu^{(\gamma)}(\theta), B_\nu^{(\gamma)}(\theta))$  por una matriz ortogonal arbitraria  $M_2^\nu$  de orden  $2 \times 2$  con elementos reales constantes. La función núcleo (2.55) posee la propiedad reproductora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{R}_n(\alpha, \theta)t(\theta)d\omega(\theta) = t(\alpha) , \forall t \in \mathcal{T}_n^\gamma. \quad (2.56)$$

Además, puede ser expresado tanto en términos de la función núcleo reproductor (1.34) como en términos de la familia de polinomios ortonormales en la circunferencia unidad con respecto a  $\omega$ :

**Proposición 2.4.10** *Sea  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortonormales en la circunferencia unidad y  $\{A_n^{(\gamma)}(\theta), B_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n \geq 0}$  un sistema bi-ortonormal con  $A_0^{(0)} \neq 0$  y  $B_0^{(0)} \equiv 0$ , ambos con respecto a  $\omega$ . Sean  $\mathcal{K}_n(a, z)$  y  $\mathcal{R}_n(\alpha, \theta)$  las funciones núcleo reproductor en  $\mathbb{P}_n$  y  $\mathcal{T}_n^\gamma$  dadas por (1.34) y (2.55) respectivamente. Tomemos  $a = e^{i\alpha}$  y  $z = e^{i\theta}$ . Entonces,*

1.

$$\mathcal{R}_n(\alpha, \theta) = (a\bar{z})^{n+\gamma} \mathcal{K}_{2(n+\gamma)}(a, z). \quad (2.57)$$

2.

$$\mathcal{R}_{n-1}(\alpha, \theta) = \frac{\Im \left[ (\bar{a}z)^{n-\frac{1}{2}+\gamma} \varphi_{2(n-\frac{1}{2}+\gamma)}(a) \overline{\varphi_{2(n-\frac{1}{2}+\gamma)}(z)} \right]}{\Im [(a\bar{z})^{1/2}]}. \quad (2.58)$$

*Demostración.-* Para la primera parte comprobamos que la expresión de la derecha de (2.57) posee la propiedad reproductora. Escogiendo  $t(\theta) = z^\nu = e^{i\nu\theta}$  para  $\nu \in \{-n - \gamma, \dots, n + \gamma\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a\bar{z})^{n+\gamma} \mathcal{K}_{2(n+\gamma)}(a, z) t(\theta) d\omega(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a^{n+\gamma} \mathcal{K}_{2(n+\gamma)}(a, z) \bar{z}^{n+\gamma-\nu} d\omega(\theta) \\ &= a^{n+\gamma} a^{\nu-n-\gamma} = a^\nu = t(a) \quad , \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Para la segunda parte usamos la relación (2.57) y la identidad de Christoffel-Darboux (1.6). Así pues,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n-1}(\alpha, \theta) &= (a\bar{z})^{n-1+\gamma} \mathcal{K}_{2(n-1+\gamma)}(a, z) \\ &= (a\bar{z})^{n-1+\gamma} \frac{\overline{\varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}^*(a)} \varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}^*(z) - \overline{\varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}^*(a)} \varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}^*(z)}{1-a\bar{z}} \\ &= \frac{(\bar{a}z)^{n-\frac{1}{2}+\gamma} \varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}(a) \overline{\varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}(z)} - (a\bar{z})^{n-\frac{1}{2}+\gamma} \overline{\varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}(a)} \varphi_{2(n+\gamma-\frac{1}{2})}(z)}{(a\bar{z})^{\frac{1}{2}} - (\bar{a}z)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Im \left( (\bar{a}z)^{n-\frac{1}{2}+\gamma} \varphi_{2(n-\frac{1}{2}+\gamma)}(a) \overline{\varphi_{2(n-\frac{1}{2}+\gamma)}(z)} \right)}{\Im[(a\bar{z})^{1/2}]}. \end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de establecer una identidad de Christoffel-Darboux para la función núcleo reproductor en  $\mathcal{T}_n^\gamma$ .

**Teorema 2.4.11 (Christoffel-Darboux)** *Sea  $\{A_k^{(\gamma)}(\theta), B_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^\infty$  un sistema bi-ortonormal para la medida  $\omega$  con  $A_0^{(0)} \neq 0$  y  $B_0^{(0)} \equiv 0$ ,  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociados a  $\omega$  y  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de números reales (1.32). Entonces, la función núcleo reproductor en  $\mathcal{T}_n^\gamma$  dada por (2.55) satisface para todo  $n \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n-1}(\alpha, \theta) &= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{2(n+\gamma)} \cot\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \left[ A_n^{(\gamma)}(\alpha) B_n^{(\gamma)}(\theta) - A_n^{(\gamma)}(\theta) B_n^{(\gamma)}(\alpha) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left[ (1 - |\delta_{2(n+\gamma)}|) A_n^{(\gamma)}(\alpha) A_n^{(\gamma)}(\theta) + (1 + |\delta_{2(n+\gamma)}|) B_n^{(\gamma)}(\alpha) B_n^{(\gamma)}(\theta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

*Demostración.-* Sea  $a = e^{i\alpha}$  y  $z = e^{i\theta}$ . Teniendo en cuenta la relación (2.45) y dado que  $(\bar{a}z)^{1/2} = \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)$ , se sigue de (2.58) para  $\gamma = 0$  que

$$\begin{aligned} \Im \left[ (\bar{a}z)^{1/2} \frac{\varphi_{2n-1}(a)}{a^{n-1}} \overline{\left( \frac{\varphi_{2n-1}(z)}{z^{n-1}} \right)} \right] &= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{2n} \cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \left[ A_n^{(0)}(\theta) B_n^{(0)}(\alpha) - A_n^{(0)}(\alpha) B_n^{(0)}(\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \times \left[ (1 - |\delta_{2n}|) A_n^{(0)}(\alpha) A_n^{(0)}(\theta) + (1 + |\delta_{2n}|) B_n^{(0)}(\alpha) B_n^{(0)}(\theta) \right] \right\}, \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \theta) &= \frac{1}{2} \left\{ \eta_{2n} \cot\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) \left[ A_n^{(0)}(\alpha) B_n^{(0)}(\theta) - A_n^{(0)}(\theta) B_n^{(0)}(\alpha) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[ (1 - |\delta_{2n}|) A_n^{(0)}(\alpha) A_n^{(0)}(\theta) + (1 + |\delta_{2n}|) B_n^{(0)}(\alpha) B_n^{(0)}(\theta) \right] \right\}. \end{aligned}$$

De manera similar cuando  $\gamma = 1/2$ , de las relaciones (2.53) y (2.58) se sigue que

$$\Im \left[ (\bar{a}z)^{1/2} \frac{\varphi_{2n}(a)}{a^{n-\frac{1}{2}}} \overline{\left( \frac{\varphi_{2n}(z)}{z^{n-\frac{1}{2}}} \right)} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \eta_{2n+1} \cos \left( \frac{\theta-\alpha}{2} \right) \left[ A_n^{(1/2)}(\theta) B_n^{(1/2)}(\alpha) - A_n^{(1/2)}(\alpha) B_n^{(1/2)}(\theta) \right] + \operatorname{sen} \left( \frac{\theta-\alpha}{2} \right) \times \right.$$

$$\left. \left[ (1 - |\delta_{2n+1}|) A_n^{(1/2)}(\alpha) A_n^{(1/2)}(\theta) + (1 + |\delta_{2n+1}|) B_n^{(1/2)}(\alpha) B_n^{(1/2)}(\theta) \right] \right\},$$

y por tanto

$$\mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \theta) = \frac{1}{2} \left\{ \eta_{2n+1} \cot \left( \frac{\theta-\alpha}{2} \right) \left[ A_n^{(1/2)}(\alpha) B_n^{(1/2)}(\theta) - A_n^{(1/2)}(\theta) B_n^{(1/2)}(\alpha) \right] - \left[ (1 - |\delta_{2n+1}|) A_n^{(1/2)}(\alpha) A_n^{(1/2)}(\theta) + (1 + |\delta_{2n+1}|) B_n^{(1/2)}(\alpha) B_n^{(1/2)}(\theta) \right] \right\}.$$

□

Haciendo tender  $\alpha$  a  $\theta$  en la fórmula (2.59) deducimos la *fórmula confluyente*

$$\mathcal{R}_{n-1}(\theta, \theta) = \eta_{2(n+\gamma)} \left[ A_n^{(\gamma)}(\theta) \left( B_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) - \left( A_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) B_n^{(\gamma)}(\theta) \right]$$

$$- \left[ \frac{1-|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( A_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 + \frac{1+|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( B_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 \right] \quad (2.60)$$

que nos permite probar el siguiente

**Teorema 2.4.12** *Bajo las mismas condiciones que en el Teorema 2.4.9, los ceros de  $a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $-b f_n^{(\gamma)}(\theta) + a g_n^{(\gamma)}(\theta)$  se entrelazan para todo  $n \geq 1$ .*

*Demostración.*- Como estamos considerando propiedades de ceros, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el sistema  $\{f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n \geq 0}$  es bi-ortonormal. Dado que  $\eta_{2(n+\gamma)} > 0$  para todo  $n \geq 0$  y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ , que por definición  $\mathcal{R}_{n-1}(\theta, \theta) > 0$  y que

$$M_n^{(\gamma)}(\theta) := \frac{1 - |\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( f_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 + \frac{1 + |\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( g_n^{(\gamma)}(\theta) \right)^2 > 0,$$

se deduce de (2.60) la relación

$$f_n^{(\gamma)}(\theta) \left( g_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) - \left( f_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) g_n^{(\gamma)}(\theta) = \frac{1}{\eta_{2(n+\gamma)}} \left[ \mathcal{R}_{n-1}(\theta, \theta) + M_n^{(\gamma)}(\theta) \right] > 0,$$

probando así que los ceros de  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  se entrelazan. Finalmente, considerando

$$C_n^{(\gamma)}(\theta) = a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta) \quad , \quad D_n^{(\gamma)}(\theta) = -b f_n^{(\gamma)}(\theta) + a g_n^{(\gamma)}(\theta) \quad , \quad |a| + |b| > 0$$

completamos la prueba, dado que

$$C_n^{(\gamma)}(\theta) \left( D_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) - \left( C_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) D_n^{(\gamma)}(\theta) =$$

$$(a^2 + b^2) \left( f_n^{(\gamma)}(\theta) \left( g_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) - \left( f_n^{(\gamma)} \right)'(\theta) g_n^{(\gamma)}(\theta) \right) > 0.$$

□

**Nota 2.4.13** Los Teoremas 2.4.9 y 2.4.12 fueron probados por Szegő en [99] para el caso  $\gamma = 0$  haciendo uso de la propiedad fundamental de que los ceros de cualquier polinomio de Szegő  $\rho_n(z)$  se hallan en  $\mathbb{D}$ , mientras que las demostraciones alternativas presentadas involucran propiedades de bi-ortogonalidad. Como consecuencia inmediata, tenemos que para cualquier sistema bi-ortogonal  $\{f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n \geq 0}$  se verifica en cualquier intervalo de longitud  $2\pi$  y para  $n \geq 1$  lo siguiente:

1. Ambas funciones trigonométricas  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  tienen  $2(n + \gamma)$  ceros distintos.
2. Los ceros de  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  se entrelazan.

Para finalizar esta sección estudiamos la ley de recurrencia que satisface un sistema bi-ortogonal para  $\omega$ . De la Proposición 2.4.4 podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a los sistemas bi-ortogonales dados por el Teorema 2.4.5. Sin embargo, para nuestros propósitos y de la Nota 2.4.6, haremos uso de la sucesión  $\{\rho_n(z)\}_{n \geq 0}$  de polinomios mónicos de Szegő. Partiendo de (1.43) reemplazando  $n$  por  $2n + 1$  se tiene que

$$z\rho_{2n}(z) = \frac{1}{\eta_{2n+1}^2} [\rho_{2n+1}(z) - \delta_{2n+1}\rho_{2n+1}^*(z)] \quad (2.61)$$

y de (1.40) reemplazando  $n$  por  $2n$ ,

$$z\rho_{2n} = z^2\rho_{2n-1}(z) + \delta_{2n}z\rho_{2n-1}^*(z). \quad (2.62)$$

Tomemos

$$\omega_n = e^{i\alpha_n} \quad , \quad \delta_n = |\delta_n|e^{i\beta_n} \quad , \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}. \quad (2.63)$$

La fórmula que define  $f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  es

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta). \quad (2.64)$$

Por tanto,

$$\omega_n \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) = e^{i(n+\gamma)\theta} \left[ f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right],$$

y así,

$$\overline{\omega_n} \rho_{2n+1}^*(e^{i\theta}) = e^{i(n+1-\gamma)\theta} \left[ f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) - i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right]. \quad (2.65)$$

Ahora, de las fórmulas (2.61), (2.64) y (2.65) encontramos que

$$e^{i\theta} \rho_{2n}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\eta_{2n+1}^2} \left\{ \overline{\omega_n} e^{i(n+\gamma)\theta} \left[ f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right] - \delta_{2n+1} \omega_n e^{i(n+1-\gamma)\theta} \left[ f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) - i g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right] \right\}$$

y por tanto

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} e^{i\theta} \rho_{2n}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\eta_{2n+1}^2} \left\{ [\omega_n \overline{\omega_n} - \omega_n^2 \delta_{2n+1} e^{i(1-2\gamma)\theta}] f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i [\omega_n \overline{\omega_n} + \omega_n^2 \delta_{2n+1} e^{i(1-2\gamma)\theta}] g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right\}. \quad (2.66)$$

Tenemos que  $|\omega_n| = 1$  y  $\omega_n^2 \delta_{2n+1} = |\delta_{2n+1}|$  (obsérvese que la suposición  $\omega_n^2 \delta_{2n+1} \in \mathbb{R}$  implica  $\omega_n^2 \delta_{2n+1} = \pm |\delta_{2n+1}|$  y no hay pérdida de generalidad en tomar aquí signo positivo). Luego,

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} e^{i\theta} \rho_{2n}(e^{i\theta}) = \frac{1}{\eta_{2n+1}^2} \left\{ [1 - |\delta_{2n+1}| e^{i(1-2\gamma)\theta}] f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i [1 + |\delta_{2n+1}| e^{i(1-2\gamma)\theta}] g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right\}.$$

De las fórmulas (2.62), (2.64) y (2.65) deducimos que

$$e^{i\theta} \rho_{2n}(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} \left\{ \overline{\omega_{n-1}} e^{i(n-1+\gamma)\theta} \left[ f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right] + \delta_{2n} e^{i\theta} \omega_{n-1} e^{i(n-\gamma)\theta} \left[ f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) - i g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right] \right\}$$

y por tanto,

$$\omega_n e^{-i(n+\gamma)\theta} e^{i\theta} \rho_{2n}(e^{i\theta}) = \left\{ [\omega_n \overline{\omega_{n-1}} e^{i\theta} + \delta_{2n} \omega_n^2 e^{i(1-2\gamma)\theta}] f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i [\omega_n \overline{\omega_{n-1}} e^{i\theta} - \omega_n \omega_{n-1} \delta_{2n} e^{i(1-2\gamma)\theta}] g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right\}. \quad (2.67)$$

Igualando (2.66) y (2.67) se sigue que

$$\begin{aligned} & [1 - |\delta_{2n+1}| e^{i(1-2\gamma)\theta}] f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i [1 + |\delta_{2n+1}| e^{i(1-2\gamma)\theta}] g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \\ &= \eta_{2n+1}^2 \left\{ [\omega_n \overline{\omega_{n-1}} e^{i\theta} + \delta_{2n} \omega_n \omega_{n-1} e^{i(1-2\gamma)\theta}] f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right. \\ & \quad \left. + i [\omega_n \overline{\omega_{n-1}} e^{i\theta} - \delta_{2n} \omega_n \omega_{n-1} e^{i(1-2\gamma)\theta}] g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

y nuestro propósito ahora es encontrar expresiones reales para  $f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  en términos de  $f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$ . Así, de (2.63), definiendo  $\zeta_n(\theta) = \theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}$  y  $\xi_n(\theta) = (1 - 2\gamma)\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n}$ , y tomando

$$a_{n+1}(\theta) = 1 - |\delta_{2n+1}| \cos(1 - 2\gamma)\theta \quad (2.69)$$

$$b_{n+1}(\theta) = -|\delta_{2n+1}| \operatorname{sen}(1 - 2\gamma)\theta \quad (2.70)$$

$$c_{n+1}(\theta) = 1 + |\delta_{2n+1}| \cos(1 - 2\gamma)\theta \quad (2.71)$$

$$A_n(\theta) = \cos \zeta_n(\theta) + |\delta_{2n}| \cos \xi_n(\theta) \quad (2.72)$$

$$B_n(\theta) = -\operatorname{sen} \zeta_n(\theta) - |\delta_{2n}| \operatorname{sen} \xi_n(\theta) \quad (2.73)$$

$$C_n(\theta) = \operatorname{sen} \zeta_n(\theta) + |\delta_{2n}| \operatorname{sen} \xi_n(\theta) \quad (2.74)$$

$$D_n(\theta) = \cos \zeta_n(\theta) - |\delta_{2n}| \cos \xi_n(\theta) \quad (2.75)$$

se sigue por igualación de las partes real e imaginaria de (2.68) que

$$\begin{aligned} a_{n+1} f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + b_{n+1} g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) &= \eta_{2n+1}^2 \left( A_n f_{n-2\gamma}^{(\gamma)} + B_n g_{n-2\gamma}^{(\gamma)} \right) \\ b_{n+1} f_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + c_{n+1} g_{n+1-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) &= \eta_{2n+1}^2 \left( C_n f_{n-2\gamma}^{(\gamma)} + D_n g_{n-2\gamma}^{(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

El determinante de este sistema es

$$T_{n+1} = \begin{vmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & c_{n+1} \end{vmatrix} = \eta_{2n+1}^2 \neq 0 ,$$

y resolviendo con respecto a  $f_{n+1-2\gamma}(\theta)$  y  $g_{n+1-2\gamma}(\theta)$  encontramos la relación matricial

$$\begin{pmatrix} f_{n+1-2\gamma}(\theta) \\ g_{n+1-2\gamma}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & -b_{n+1} \\ -b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-2\gamma}(\theta) \\ g_{n-2\gamma}(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

donde los coeficientes  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, A_n, B_n, C_n$  y  $D_n$  vienen dados por (2.69)-(2.75). Finalmente, de (2.76) se obtiene para  $\gamma = 1/2$

$$\begin{aligned} f_n^{(1/2)}(\theta) &= (1 + |\delta_{2n+1}|) \times \\ &\quad \left\{ [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \cos(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] f_{n-1}^{(1/2)}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \sin(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] g_{n-1}^{(1/2)}(\theta) \right\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n^{(1/2)}(\theta) &= (1 - |\delta_{2n+1}|) \times \\ &\quad \left\{ [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \sin(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] f_{n-1}^{(1/2)}(\theta) \right. \\ &\quad \left. + [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \cos(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] g_{n-1}^{(1/2)}(\theta) \right\} , \end{aligned}$$

mientras que para  $\gamma = 0$ ,

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(0)}(\theta) &= \\ &\quad \{ (1 + |\delta_{2n+1}| \cos \theta) [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \cos(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \\ &\quad - |\delta_{2n+1}| \sin \theta [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \sin(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \} f_n^{(0)}(\theta) \\ &\quad + \{ - (1 + |\delta_{2n+1}| \cos \theta) [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \sin(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \\ &\quad - |\delta_{2n+1}| \sin \theta [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \cos(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \} g_n^{(0)}(\theta) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{(0)}(\theta) &= \\ &\quad \{ (1 - |\delta_{2n+1}| \cos \theta) [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \sin(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \\ &\quad - |\delta_{2n+1}| \sin \theta [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) + |\delta_{2n}| \cos(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \} f_n^{(0)}(\theta) \\ &\quad + \{ (1 - |\delta_{2n+1}| \cos \theta) [\cos(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \cos(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \\ &\quad + |\delta_{2n+1}| \sin \theta [\sin(\theta + \alpha_n - \alpha_{n-1}) - |\delta_{2n}| \sin(\theta + \alpha_n + \alpha_{n-1} + \beta_{2n})] \} g_n^{(0)}(\theta) . \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.4.14** Consideremos  $d\omega(\theta) \equiv d\theta$  en  $[-\pi, \pi]$ . Entonces, de (2.54) y haciendo  $\omega_n \equiv 1$  para todo  $n \geq 1$  concluimos que las leyes de recurrencia anteriores se convierten en las conocidas fórmulas trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\theta &= \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta , \\ \sin(n+1)\theta &= \sin \theta \cos n\theta + \cos \theta \sin n\theta , \\ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta &= \cos \theta \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta - \sin \theta \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta , \\ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta &= \sin \theta \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta + \cos \theta \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta . \end{aligned}$$

## 2.5. Fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos

El principal propósito tanto de esta sección como de este segundo capítulo es el cálculo aproximado de integrales de la forma:

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\omega(\theta), \quad (2.77)$$

siendo  $\omega$  una medida positiva de Borel en  $[-\pi, \pi]$  y  $f \in L_1^\omega[-\pi, \pi]$  una función periódica de periodo  $2\pi$ .  $I_\omega(f)$  va a ser aproximada por una fórmula de cuadratura con  $n$  puntos:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j); \quad \theta_j \neq \theta_k, \quad j \neq k, \quad \theta_j \in (-\pi, \pi], \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.78)$$

Los nodos  $\{\theta_j\}_{j=1}^n$  y pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  deben determinarse de manera que  $I_n(f)$  sea exacta en un cierto subespacio de  $\mathcal{T}^\gamma$  con dimensión lo mayor posible, esto es, debe cumplirse que  $I_\omega(T^\gamma) = I_n(T^\gamma)$  para todo  $T^\gamma \in \mathcal{T}_{m(n,\gamma)}^\gamma \subset \mathcal{T}^\gamma$  con  $m(n,\gamma)$  tan grande como sea posible. Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones preliminares:

**Lema 2.5.1** *No puede existir una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos  $I_n(f)$  como (2.78) que sea exacta en  $\mathcal{T}_n^\gamma$ , es decir,  $m(n,\gamma) < n$ .*

*Demostración.-* Asumamos que  $I_n(f)$  dada por (2.78) existe verificando  $I_\omega(T^\gamma) = I_n(T^\gamma)$  para todo  $T^\gamma \in \mathcal{T}_n^\gamma$ . Sea  $T_n^0(\theta) = \prod_{j=1}^n \sin^2\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n^0$  y  $T_n^0(\theta) \geq 0$ . Entonces,  $I_\omega(T_n^0) > 0$  y  $I_n(T_n^0) = 0$ , dado que  $T_n^0(\theta_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Además, haciendo  $T_n^{1/2}(\theta) = \sin\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right) T_n^0(\theta) \in \mathcal{T}_n^{1/2}$  se obtiene una contradicción similar para el caso  $\gamma = 1/2$  dado que  $I_\omega(T_n^{1/2}) > 0$  y  $I_n(T_n^{1/2}) = 0$ .

□

Haciendo uso de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.3 en la sección 2 probamos el siguiente:

**Lema 2.5.2** *Dados  $n$  nodos distintos  $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset (-\pi, \pi]$  y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ , entonces existe un cierto subespacio  $\tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma$  de  $\mathcal{T}_n^\gamma$  con dimensión  $n$  de manera que un conjunto de pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  quedan únicamente determinados verificando*

$$I_n(T^\gamma) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T^\gamma(\theta_j) = I_\omega(T^\gamma), \quad \forall T^\gamma \in \tilde{\mathcal{T}}_n^\gamma.$$

*Demostración.-* Se cumple tomando  $\lambda_j = I_\omega(l_j(\theta))$  con  $l_j(\theta)$  dado por (2.10) en los casos  $n$  par con  $\gamma = 1/2$  y  $n$  impar con  $\gamma = 0$  ó  $\lambda_j = I_\omega(\tilde{s}_j(\theta))$  con  $\tilde{s}_j(\theta)$  dado por (2.24) ó (2.25) en los casos  $n$  par con  $\gamma = 0$  y  $n$  impar con  $\gamma = 1/2$ .

□

**Lema 2.5.3** *Si existe una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  que sea exacta en  $\mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ , entonces  $\lambda_j > 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .*

*Demostración.-* Tomemos  $t_j^0(\theta) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \sin^2\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  para  $\gamma = 0$  y  $t_j^{1/2}(\theta) = \sin\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right) t_j^0(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1}^{1/2}$ . Entonces,  $t_j^\gamma(\theta) \geq 0$  y por lo tanto  $0 < I_\omega(t_j^\gamma) = I_n(t_j^\gamma) = \lambda_j t_j^\gamma(\theta_j)$ . Dado que  $t_j^\gamma(\theta_j) > 0$  se concluye la demostración.  $\square$

Dado que estamos interesados en la construcción de fórmulas de cuadraturas que integren exactamente polinomios trigonométricos hasta el mayor grado posible, investigaremos el siguiente problema: “Dado  $n \geq 1$ , encontrar  $\theta_1, \dots, \theta_n$  con  $\theta_j \neq \theta_k$  si  $j \neq k$  en  $(-\pi, \pi]$  y números reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{T}_{n-1}^0. \quad (2.79)$$

Como  $\dim(\mathcal{T}_{n-1}^0) = 2n - 1$ , la relación (2.79) nos lleva a un sistema no lineal con  $2n - 1$  ecuaciones y  $2n$  incógnitas:  $\theta_1, \dots, \theta_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n$ . En vez de atacar directamente el sistema que surge de (2.79), procederemos como en el caso polinómico ordinario, analizando propiedades de los elementos de  $\mathcal{T}_n^\gamma$  cuyos ceros son los nodos de  $I_n(f)$ . En este instante aparece una gran diferencia con respecto a [99]: nuestra modificación técnica sobre el artículo de Szegő manejando espacios de la forma  $\mathcal{T}_n^\gamma$  nos permitirá considerar un número arbitrario de nodos mientras que en el citado artículo sólo era posible tomar un número par de nodos. Comencemos pues con la siguiente condición necesaria:

**Teorema 2.5.4** *Sea  $n$  un número natural tal que  $n = 2(k + \gamma)$  con  $k$  un entero no negativo,  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  e  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  una fórmula de cuadratura tal que  $I_n(T) = I_\omega(T)$  para todo  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ . Sea  $T_k(\theta) = \prod_{j=1}^{2(k+\gamma)} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)$  y  $\{f_j^{(\gamma)}(\theta), g_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^\infty$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$  y  $g_0^{(0)} \equiv 0$ . Entonces, existen números reales  $a_k$  y  $b_k$  no ambos nulos tales que  $T_k(\theta) = a_k f_k^{(\gamma)}(\theta) + b_k g_k^{(\gamma)}(\theta)$ .*

*Demostración.-* Dado que estamos tomando  $n = 2(k + \gamma)$  con  $k \geq 0$ , del Teorema 2.2.5 se sigue que  $T_k(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$ . Además, puede comprobarse que  $T_k(\theta) \perp \mathcal{T}_{k-1}^\gamma$ . De hecho, si  $S(\theta) \in \mathcal{T}_{k-1}^\gamma$ , entonces  $T_k(\theta)S(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  y así

$$\langle T_k(\theta), S(\theta) \rangle_\omega = I_\omega(T_k(\theta)S(\theta)) = I_n(T_k(\theta)S(\theta)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T_k(\theta_j)S(\theta_j) = 0. \quad (2.80)$$

Ahora, de la Proposición 2.4.3, como  $\{f_\nu^{(\gamma)}(\theta), g_\nu^{(\gamma)}(\theta)\}_{\nu=0}^k$  es una base para  $\mathcal{T}_k^\gamma$ , podemos escribir

$$T_k(\theta) = \sum_{\nu=0}^k \left[ a_\nu f_\nu^{(\gamma)}(\theta) + b_\nu g_\nu^{(\gamma)}(\theta) \right],$$

donde

$$a_\nu = \frac{\langle T_k(\theta), f_\nu^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|f_\nu^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}, \quad b_\nu = \frac{\langle T_k(\theta), g_\nu^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|g_\nu^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}, \quad \nu = 0, 1, \dots, k.$$

Finalmente, de (2.80),  $a_s = b_s = 0$  para  $s = 0, 1, \dots, k - 1$  y se concluye la demostración.  $\square$

Recíprocamente, podemos probar el siguiente

**Teorema 2.5.5** *Sea  $n$  un número natural tal que  $n = 2(k + \gamma)$ , con  $k \geq 0$  y  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ . Sea  $\{f_j^{(\gamma)}(\theta), g_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$  y  $g_0^{(0)} \equiv 0$ , y sean  $a$  y  $b$  números reales no ambos nulos. Consideremos  $T_k^\gamma(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$  y sean  $\{\theta_j\}_{j=1}^n$  sus ceros. Entonces, existen números positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que*

$$I_n(T) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(\theta_j) = I_\omega(T) \quad , \quad \forall T \in \mathcal{T}_{n-1}^0.$$

*Demostración.-* Escribimos  $n = 2(k + \gamma)$  para  $k \geq 0$ ,  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  y empezamos considerando el subespacio de polinomios trigonométricos

$$\mathcal{A}_n := \begin{cases} \tilde{\mathcal{T}}_k^0 & \text{si } \gamma = 0 \\ \mathcal{T}_k^0 & \text{si } \gamma = 1/2 \end{cases} \quad , \quad (2.81)$$

donde  $\tilde{\mathcal{T}}_k^0$  denota un subespacio de polinomios trigonométricos que coincide, bien con  $\mathcal{T}_k^0 \ominus \text{span}\{\cos k\theta\}$  o bien con  $\mathcal{T}_k^0 \ominus \text{span}\{\sin k\theta\}$ , de manera que  $\dim(\mathcal{A}_n) = n$  y claramente  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{T}_{n-1}^0$ . Entonces, del Lema 2.5.2 al tomar  $\gamma = 0$ , existen pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , únicamente determinados tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{A}_n.$$

Nuestro propósito es comprobar que  $I_n$  es también exacta en  $\mathcal{T}_{n-1}^0$ . Así, tomemos  $T^0(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  y  $L_n \in \mathcal{A}_n$  tal que  $L_n(\theta_j) = T^0(\theta_j)$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Entonces,  $(T^0 - L_n)(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  y  $(T^0 - L_n)(\theta_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Por tanto,  $T^0(\theta) - L_n(\theta) = T_k^\gamma(\theta)V_{k-1}^\gamma(\theta)$ , con  $V_{k-1}^\gamma(\theta) \in \mathcal{T}_{k-1}^\gamma$ . Ahora, dado que  $T_k^\gamma(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$  y por definición,  $T_k^\gamma(\theta) \perp \mathcal{T}_{k-1}^\gamma$ , se sigue que

$$I_\omega(T^0) = \int_{-\pi}^{\pi} L_n(\theta) d\omega(\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} T_k^\gamma(\theta)V_{k-1}^\gamma(\theta) d\omega(\theta) = I_\omega(L_n).$$

Además,

$$I_\omega(T^0) = I_\omega(L_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j L_n(\theta_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T^0(\theta_j) = I_n(T^0).$$

Finalmente, el carácter positivo de los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  se deduce del Lema 2.5.3.

□

Podemos establecer una representación integral explícita para los pesos. En efecto, si hacemos

$$l_j(\theta) = \frac{T_k^\gamma(\theta)}{2(T_k^\gamma)'(\theta_j) \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad ,$$

encontramos que  $l_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$  y  $(l_j(\theta))^2 \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ . Así,

$$I_\omega\left((l_j(\theta))^2\right) = I_n\left((l_j(\theta))^2\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (l_j(\theta_k))^2 = \lambda_j \quad ,$$

lo cual implica que

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{T_k^\gamma(\theta)}{2(T_k^\gamma)'(\theta_j) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} \right]^2 d\omega(\theta) \quad , \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.82)$$

El Teorema 2.5.4 y la demostración del Teorema 2.5.5 podemos resumirlas en el siguiente resultado de caracterización

**Corolario 2.5.6** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  tal que  $\theta_j \neq \theta_k$  si  $j \neq k$  y  $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset (-\pi, \pi]$ . Supongamos que  $n = 2(k + \gamma)$  con  $k \geq 0$  y  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ . Entonces,  $I_n(T) = I_\omega(T)$  para todo  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ , sí y sólo sí,*

1.  $I_n(f)$  es exacta en un cierto subespacio  $\mathcal{A}_n$  de  $\mathcal{T}_{n-1}^0$  con dimensión  $n$ ,
2. Existen números reales  $a$  y  $b$  no ambos nulos tales que  $\{\theta_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $T_k^\gamma(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$ , siendo  $\{f_j^{(\gamma)}(\theta), g_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^\infty$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$ ,  $g_0^{(0)} \equiv 0$ .

Además, cuando se cumplen tales condiciones, los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  son positivos.

□

De acuerdo con la fórmula de cuadratura introducida por Szegő en [99], diremos que la fórmula de cuadratura caracterizada en el Corolario 2.5.6 es la “fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrico”. El siguiente resultado establece una representación explícita para los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  en términos de sistemas bi-ortonormales análoga a las expresiones (1.19) y (1.68) para las fórmulas Gaussianas y de Szegő respectivamente.

**Teorema 2.5.7** *Sea  $n$  un número natural,  $n = 2(k + \gamma)$  con  $k \geq 0$  y  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ . Sean  $\{A_j^{(\gamma)}(\theta), B_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^\infty$  un sistema bi-ortonormal para  $\omega$  con  $A_0^{(0)} \neq 0$ ,  $B_0^{(0)} \equiv 0$  e  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos y máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable. Entonces, para  $j = 1, \dots, n$ ,*

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \left( A_\nu^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) + \left( B_\nu^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) \right] + \left( \frac{1-|\delta_n|}{2} \right) \left( A_k^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) + \left( \frac{1+|\delta_n|}{2} \right) \left( B_k^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j)}, \quad (2.83)$$

siendo  $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociados a  $\omega$  y  $\{\theta_j\}_{j=1}^n$  los ceros de  $T_k^\gamma(\theta) = aA_k^{(\gamma)}(\theta) + bB_k^{(\gamma)}(\theta)$  con  $|a| + |b| > 0$ .

*Demostración.-* Sea  $T_k^{(\gamma)}(\theta) = \prod_{j=1}^{2(k+\gamma)} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) = aA_k^{(\gamma)}(\theta) + bB_k^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$ , con  $|a| + |b| > 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a \neq 0$ , por lo que  $A_k^{(\gamma)}(\theta_j) =$

$\frac{-b}{a}B_k(\theta_j)$ . De la identidad de Christoffel-Darboux (2.59) se deduce que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n-1}(\theta, \theta_j) &= \frac{1}{2}\eta_{2(n+\gamma)}ctg\left(\frac{\theta_j-\theta}{2}\right) \left[ A_n^{(\gamma)}(\theta)B_n^{(\gamma)}(\theta_j) - A_n^{(\gamma)}(\theta_j)B_n^{(\gamma)}(\theta) \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1-|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}A_n^{(\gamma)}(\theta)A_n^{(\gamma)}(\theta_j) + \frac{1+|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}B_n^{(\gamma)}(\theta)B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \right] \\ &= \frac{1}{2a}\eta_{2(n+\gamma)}B_n^{(\gamma)}(\theta_j)ctg\left(\frac{\theta_j-\theta}{2}\right) T_k^{(\gamma)}(\theta) \\ &\quad - \left[ \frac{1-|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}A_n^{(\gamma)}(\theta)A_n^{(\gamma)}(\theta_j) + \frac{1+|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}B_n^{(\gamma)}(\theta)B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \right] \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n-1}(\theta, \theta_j) &+ \left[ \frac{1-|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}A_n^{(\gamma)}(\theta)A_n^{(\gamma)}(\theta_j) + \frac{1+|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2}B_n^{(\gamma)}(\theta)B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \right] \\ &= \frac{-1}{2a}\eta_{2(n+\gamma)}B_n^{(\gamma)}(\theta_j)ctg\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) T_k^{(\gamma)}(\theta). \end{aligned} \tag{2.84}$$

Haciendo tender  $\theta$  a  $\theta_j$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n-1}(\theta_j, \theta_j) &+ \frac{1-|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( A_n^{(\gamma)}(\theta_j) \right)^2 + \frac{1+|\delta_{2(n+\gamma)}|}{2} \left( B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \right)^2 \\ &= \frac{-1}{a}\eta_{2(n+\gamma)}B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \left( T_k^{(\gamma)} \right)'(\theta_j) \end{aligned} \tag{2.85}$$

y de las condiciones de ortogonalidad se deduce de (2.84) que

$$1 = \frac{-1}{2a}\eta_{2(n+\gamma)}B_n^{(\gamma)}(\theta_j) \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\text{sen}\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)} d\omega(\theta). \tag{2.86}$$

La combinación de las expresiones (2.85) y (2.86) implican

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{\nu=0}^{k-1} \left[ \left( A_{\nu}^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) + \left( B_{\nu}^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) \right] + \left( \frac{1-|\delta_n|}{2} \right) \left( A_k^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) + \left( \frac{1+|\delta_n|}{2} \right) \left( B_k^{(\gamma)} \right)^2(\theta_j) \right]^{-1} \\ &= \left[ 2 \left( T_k^{(\gamma)} \right)'(\theta_j) \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\text{sen}\left[\frac{\theta-\theta_j}{2}\right]} d\omega(\theta). \end{aligned} \tag{2.87}$$

Por otro lado, podemos expresar los pesos para  $j = 1, \dots, n$  por  $\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}_j(\theta) d\omega(\theta)$ , donde  $\tilde{s}_j(\theta)$  vienen dados por (2.24) ó (2.25). Partiendo de (2.24) se sigue que

$$\tilde{s}_j(\theta) = \left[ 2 \left( T_k^{(\gamma)} \right)'(\theta_j) \text{sen}\left(\frac{\tau_n}{2}\right) \right]^{-1} \text{sen}\left(\frac{\theta+\alpha_j}{2}\right) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\text{sen}\left[\frac{\theta-\theta_j}{2}\right]}, \quad j = 1, \dots, n,$$

con  $\tau_n = \sum_{j=1}^n \theta_j$  y  $\alpha_j = \tau_n - \theta_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . Entonces,  $\text{sen} \left( \frac{\theta + \alpha_j}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} + \frac{\tau_n}{2} \right) = \text{sen} \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \cos \frac{\tau_n}{2} + \cos \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \text{sen} \frac{\tau_n}{2}$  y podemos escribir para  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \left[ 2 \left( T_k^{(\gamma)} \right)' (\theta_j) \text{sen} \left( \frac{\tau_n}{2} \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \left\{ \cos \frac{\tau_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} T_k^{(\gamma)}(\theta) d\omega(\theta) + \text{sen} \frac{\tau_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\text{sen} \left[ \frac{\theta - \theta_j}{2} \right]} d\omega(\theta) \right\} \quad (2.88) \\ &= \left[ 2 \left( T_k^{(\gamma)} \right)' (\theta_j) \right]^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left( \frac{\theta - \theta_j}{2} \right) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\text{sen} \left[ \frac{\theta - \theta_j}{2} \right]} d\omega(\theta). \end{aligned}$$

Claramente, si partimos de (2.25) obtenemos la misma representación, y comparando (2.87) y (2.88) se concluye la prueba. □

Del Corolario 2.5.6 y del Teorema 2.5.7 obtenemos inmediatamente el siguiente

**Corolario 2.5.8** *Sea  $\{A_j^{(\gamma)}(\theta), B_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$  un sistema bi-ortonormal para  $\omega$ ,  $k$  un entero no negativo,  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  y sea  $n = 2(k + \gamma)$ . Entonces,  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  con  $\theta_j \neq \theta_l$  si  $j \neq l$  y  $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset (-\pi, \pi)$  es exacta en  $\mathcal{T}_{n-1}^0$ , sí y sólo sí, los nodos son los ceros de  $T_k^{(\gamma)} = aA_k^{(\gamma)} + bB_k^{(\gamma)}(\theta)$  con  $|a| + |b| > 0$  y los coeficientes  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por (2.83). □*

Finalmente, establecemos el siguiente resultado que involucra el problema de interpolación de tipo Hermite establecido en el Teorema 2.3.2 y que podría ser usado para dar una estimación del error para  $I_n(f)$ .

**Teorema 2.5.9** *Supongamos que  $k$  es un entero no negativo y tomemos  $n = 2(k + \gamma)$  con  $\gamma \in \{0, 1/2\}$ . Sean  $\theta_1, \dots, \theta_n$  los ceros de  $T_k^{(\gamma)}(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta)$ , siendo  $\{f_j^{(\gamma)}(\theta), g_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  con  $a$  y  $b$  números reales ambos no nulos. Sea  $H_n \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  tal que  $H_n(\theta_r) = f(\theta_r)$  para  $r = 1, \dots, n$  y  $H_n'(\theta_s) = \tilde{y}_s$  para  $s = 1, \dots, n-1$ , donde  $f$  es una función periódica de período  $2\pi$  y  $\{\tilde{y}_s\}_{s=1}^{n-1}$  ( $n-1$ ) números arbitrarios dados. Entonces,  $I_{\omega}(H_n)$  coincide con la fórmula de cuadratura de  $n$  puntos con máximo grado de precisión trigonométrico para  $\omega$ , tomando como nodos los ceros de  $T_k^{(\gamma)}(\theta)$ .*

*Demostración.*- La existencia y unicidad del interpolante trigonométrico de tipo Hermite  $H_n \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  queda garantizado por el Teorema 2.3.2. Además, de (2.14) tenemos que

$$H_n(\theta) = \sum_{j=1}^n t_j^{(0)}(\theta) f(\theta_j) + \sum_{l=1}^{n-1} s_l^{(0)}(\theta) \tilde{y}_l, \quad (2.89)$$

donde  $t_j^{(0)}, s_l^{(0)} \in \mathcal{T}_{n-1}^0$  para  $j = 1, \dots, n$  y  $l = 1, \dots, n-1$  vienen dados por (2.17)-(2.19). Por tanto,

$$I_\omega(H_n) = \sum_{j=1}^n A_j f(\theta_j) + \sum_{l=1}^{n-1} B_l \tilde{y}_l, \quad (2.90)$$

donde  $A_j = I_\omega(t_j^{(0)})$  para  $j = 1, \dots, n$  y  $B_l = I_\omega(s_l^{(0)})$  para  $l = 1, \dots, n-1$ . Ahora, teniendo en cuenta que  $T_k^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$  es ortogonal a  $\mathcal{T}_{k-1}^\gamma$ , puede deducirse de (2.17) y para  $l = 1, \dots, n-1$  que

$$B_l = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_l - \theta_{n+1}}{2}\right)}{2 \left[ \left( T_k^{(\gamma)} \right)'(\theta_l) \right]^2} I_\omega \left( T_k^{(\gamma)}(\theta) \frac{T_k^{(\gamma)}(\theta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_l}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \theta_{n+1}}{2}\right)} \right) = 0.$$

Así,  $I_\omega(H_n) = \sum_{j=1}^n A_j f(\theta_j) = I_n(f)$  y dado que para todo  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ ,  $H_n(\theta) = T(\theta)$ , tenemos que

$$I_n(T) = I_\omega(H_n) = I_\omega(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_{n-1}^0.$$

□

## 2.6. Una conexión con la circunferencia unidad

En esta sección daremos una conexión entre los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas introducidos en la tercera sección y los polinomios para-ortogonales introducidos en el capítulo anterior. Comenzamos considerando de nuevo las fórmulas de Szegő. Sea  $\omega$  una medida positiva de Borel en  $\mathbb{T}$  y supongamos que queremos aproximar integrales del tipo

$$I_\omega(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\omega(\theta). \quad (2.91)$$

Supongamos que para  $\omega$  tenemos una fórmula de cuadratura con  $n$  puntos  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  con el máximo grado de precisión trigonométrico (recordemos que  $\lambda_j > 0$ ,  $\theta_j \neq \theta_k$  si  $j \neq k$ ,  $\theta_j \in (-\pi, \pi]$  para todo  $j = 1, \dots, n$  y  $I_n(T) = I_\omega(T)$  con  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ ). Tomemos  $L \in \Lambda_{-(n-1), n-1}$  de manera que  $L(e^{i\theta}) = L_1(\theta) + iL_2(\theta)$  siendo  $L_1, L_2 \in \mathcal{T}_{n-1}^0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} I_\omega(L) &= I_\omega(L_1) + iI_\omega(L_2) = I_n(L_1) + iI_n(L_2) = I_n(L_1 + iL_2) = I_n(L) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j L(z_j), \quad z_j = e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

(observemos que  $z_j \neq z_k$  para todo  $j \neq k$ ), deduciendo así una fórmula de cuadratura con  $n$  puntos y dominio de validez  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ . Se trata pues de una fórmula de cuadratura de Szegő. Como se ha visto, tales fórmulas quedan caracterizadas por el Teorema 1.3.13, que enfatiza el papel crucial que juegan los polinomios para-ortogonales, los cuales también quedaron caracterizados en el Teorema 1.3.3.

Veamos a continuación una conexión entre ciertas sucesiones de polinomios para-ortogonales y sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas con respecto a  $\omega$ .

Sea  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  un polinomio de grado exacto  $2(n+\gamma)$  para-ortogonal e invariante con  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  como es usual. De la Proposición 2.2.3 podemos escribir (en virtud de la invarianza)

$$B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = a_n e^{i(n+\gamma)\theta} f_n^{(\gamma)}(\theta) \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad (2.92)$$

siendo  $f_n^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  real y de grado exacto  $n$ , de manera que se cumple lo siguiente:

**Teorema 2.6.1** *Sea  $f_n^{(\gamma)} \in \mathcal{T}_n^\gamma$  dado por (2.92). Entonces,  $\langle f_n^{(\gamma)}, T \rangle_\omega = 0$  para todo  $T \in \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$ .*

*Demostración.*- Claramente, es suficiente probar que  $\langle f_n^{(\gamma)}, z^{j+\gamma} \rangle_\omega = 0$  para todo  $-(n-1) \leq j \leq n-1$  ( $z = e^{i\theta}$ ). De (2.92) y dado que  $a_n \neq 0$  lo anterior se convierte en

$$\langle e^{-i(n+2\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}), e^{ij\theta} \rangle_\omega = 0 \quad , \quad -(n-1) \leq j \leq n-1. \quad (2.93)$$

Ahora, del Teorema 1.3.3 podemos escribir  $B_{2(n+\gamma)}(z) = \rho_{2(n+\gamma)}(z) + \tau \rho_{2(n+\gamma)}^*(z)$  (obsérvese que la constante  $C_{2(n+\gamma)} \neq 0$  es ahora irrelevante) por lo que la expresión de la izquierda en (2.93) se convierte en

$$\langle e^{-i(n+2\gamma)\theta} [\rho_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) + \tau \rho_{2(n+\gamma)}^*(e^{i\theta})], e^{ij\theta} \rangle_\omega =$$

$$\langle \rho_{2(n+\gamma)}(z), z^{n+2\gamma+j} \rangle_\omega + \tau \langle \rho_{2(n+\gamma)}^*(z), z^{n+2\gamma+j} \rangle_\omega \quad , \quad -(n-1) \leq j \leq n-1.$$

Así, de las propiedades de ortogonalidad de  $\rho_{2(n+\gamma)}(z)$  y  $\rho_{2(n+\gamma)}^*(z)$  (1.30) se sigue que ambos productos interiores se anulan, concluyendo la prueba. □

De (2.92) y del Teorema 2.4.9 podemos deducir ahora la propiedad fundamental sobre la localización de los ceros de polinomios para-ortogonales  $B_n(z)$  (Teorema 1.3.4). En comparación con lo establecido en [71], nuestra demostración alternativa se basa en propiedades de sistemas bi-ortogonales, resultando ser una simple consecuencia de los Teoremas 2.4.9 y 2.6.1.

Consideremos ahora  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  y una sucesión de polinomios para-ortogonales e invariantes  $\{B_{2(n+\gamma)}(z)\}_{n=1}^\infty$  tales que para todo  $n$ ,  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  tenga grado exacto  $2(n+\gamma)$ . Como hemos visto, tenemos

$$B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = a_n e^{i(n+\gamma)\theta} f_n^{(\gamma)}(\theta) \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad f_n^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma.$$

Entonces, del Teorema 2.6.1,  $\{f_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^\infty$  ( $f_0^{(0)}(\theta) \equiv f_0^{(0)} \neq 0$ ) representa un sistema de funciones trigonométricas ortogonal no trivial, en el sentido de que para todo  $n$ ,  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  tiene grado exacto  $n$  y  $\langle f_n^{(\gamma)}, f_m^{(\gamma)} \rangle_\omega = \kappa_n \delta_{n,m}$ ,  $\kappa_n > 0$ . Ahora bien, podríamos preguntarnos si fuera posible encontrar otro sistema ortogonal  $\{g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^\infty$  (con  $g_0^{(0)}(\theta) \equiv 0$ ) tal que  $\{f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^\infty$  constituya un sistema bi-ortogonal en  $\mathcal{T}^\gamma$ . Para fijar ideas, tomemos para  $n \geq 0$

$$B_{2(n+\gamma)}(z) = B_{2(n+\gamma)}(z, \tau_n) = \rho_{2(n+\gamma)}(z) + \tau_n \rho_{2(n+\gamma)}^*(z)$$

con  $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de números complejos en  $\mathbb{T}$ . De hecho, podemos tomar  $\tau_n = \frac{\overline{\gamma_n}}{\gamma_n}$ ,  $\gamma_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  de manera que para  $z = e^{i\theta}$  se cumpla que

$$\begin{aligned} z^{-(n+\gamma)} B_{2(n+\gamma)}(z) &= \frac{\rho_{2(n+\gamma)}(z) + \tau_n \rho_{2(n+\gamma)}^*(z)}{z^{n+\gamma}} = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \frac{\gamma_n \rho_{2(n+\gamma)}(z) + \overline{\gamma_n} \rho_{2(n+\gamma)}^*(z)}{z^{n+\gamma}} \right] \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \left[ \gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z) + \overline{\gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z)} \right] \\ &= \frac{2}{\gamma_n} \Re \left[ \gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \right]. \end{aligned}$$

Por tanto,  $f_n^{(\gamma)}(\theta) = C_n \Re \left[ \gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \right] = C_n \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta)$  ( $z = e^{i\theta}$ ) con  $C_n \neq 0$  y  $\tilde{f}_n^{(\gamma)} \in \mathcal{T}_n^\gamma$ . Considérese ahora  $B_{2(n+\gamma)}(z, -\tau_n) = \rho_{2(n+\gamma)}(z) - \tau_n \rho_{2(n+\gamma)}^*(z)$ . Entonces, de nuevo por el Teorema 2.6.1 tenemos ( $z = e^{i\theta}$ ):

$$z^{-(n+\gamma)} B_{2n}(z, -\tau_n) = \tilde{\lambda}_n g_n^{(0)}(\theta) \quad , \quad \tilde{\lambda}_n \neq 0 \quad , \quad g_n^{(\gamma)} \in \mathcal{T}_n^\gamma.$$

Aquí debemos tener en cuenta el siguiente convenio:  $n \geq 1$  para  $\gamma = 0$ , o equivalentemente, si  $\gamma = 0$  entonces  $g_0^{(0)} \equiv 0$ . Bajo esta suposición vemos que  $\{g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$  es un sistema ortogonal en  $\mathcal{T}_n^\gamma$ . Por lo tanto, se cumple que

$$\langle g_n^{(\gamma)}, g_m^{(\gamma)} \rangle_\omega = \tilde{\kappa}_n \delta_{n,m} \quad , \quad \tilde{\kappa}_n > 0 \quad ; \quad \langle g_n^{(\gamma)}, f_m^{(\gamma)} \rangle_\omega = 0 \quad , \quad n \neq m.$$

Veamos también que  $\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0$  para  $n \geq 0$ . Como anteriormente, puede verse fácilmente que ( $z = e^{i\theta}$ ):

$$g_n^{(\gamma)}(\theta) = \tilde{C}_n \Im \left[ \gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \right] = \tilde{C}_n \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta)$$

con  $\tilde{C}_n \neq 0$  y  $\tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_n^\gamma$ . Además,  $\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0$ , sí y sólo sí  $\langle \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta), \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0$ . Ahora, tomando  $z = e^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \gamma_n z^{-(n+\gamma)} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \right]^2 d\omega(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) + i \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \right]^2 d\omega(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \right]^2 d\omega(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \right]^2 d\omega(\theta) \\ &\quad + 2i \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) d\omega(\theta). \end{aligned}$$

Por tanto, asumiendo que  $\gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} z^{-2(n+\gamma)} (\rho_{2(n+\gamma)}(z))^2 d\omega(\theta)$  ( $z = e^{i\theta}$ ) sea un número real, deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta) \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) d\omega(\theta) = \langle \tilde{f}_n^{(\gamma)}(\theta), \tilde{g}_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega = 0.$$

Pero

$$\begin{aligned} \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} z^{-2(n+\gamma)} (\rho_{2(n+\gamma)}(z))^2 d\omega(\theta) &= \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \frac{z^{2(n+\gamma)} + \dots + \delta_{2(n+\gamma)}}{z^{2(n+\gamma)}} d\omega(\theta) \\ &= \gamma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{2(n+\gamma)}(z) \frac{\delta_{2(n+\gamma)}}{z^{2(n+\gamma)}} d\omega(\theta) \\ &= \gamma_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \langle \rho_{2(n+\gamma)}, z^{2(n+\gamma)} \rangle_\omega. \end{aligned}$$

Dado que para cualquier entero no negativo  $k$  tenemos que

$$\langle \rho_k(z), z^k \rangle_\omega = \langle \rho_k(z), \rho_k(z) \rangle_\omega = \| \rho_k(z) \|_\omega^2,$$

entonces el carácter real de  $\int_{-\pi}^{\pi} z^{-2(n+\gamma)} (\rho_{2(n+\gamma)}(z))^2 d\omega(\theta)$  se reduce a  $\gamma_n^2 \delta_{2(n+\gamma)} \in \mathbb{R}$ , ó equivalentemente,  $\overline{\gamma_n^2 \delta_{2(n+\gamma)}} \in \mathbb{R}$ . En términos del parámetro  $\tau_n = \frac{\overline{\gamma_n}}{\gamma_n}$  puede leerse que  $\tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}} \in \mathbb{R}$ . En resumen, partiendo de dos sucesiones de polinomios para-ortogonales  $B_{2(n+\gamma)}(z, \tau_n)$  y  $B_{2(n+\gamma)}(z, -\tau_n)$  ( $|\tau_n| = 1$ ) podemos construir un sistema mutuamente ortogonal  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  en  $\mathcal{T}^\gamma$ . Por tanto, podríamos esperar que tal sistema fuera bi-ortogonal. A tal cuestión daremos una respuesta negativa. En efecto, asumamos que ( $C_n \neq 0$ )

$$B_{2(n+\gamma)}(z, \tau_n) = C_n \left[ \rho_{2(n+\gamma)}(z) + \tau_n \rho_{2(n+\gamma)}^*(z) \right] = C_n (1 + \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}} z^{2(n+\gamma)}) + \dots$$

$$B_{2(n+\gamma)}(z, -\tau_n) = C_n (1 - \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}} z^{2(n+\gamma)}) + \dots$$

Haciendo

$$f_n^{(\gamma)}(\theta) = a_n^{(\gamma)} \cos(n + \gamma)\theta + b_n^{(\gamma)} \sin(n + \gamma)\theta + \dots$$

y

$$g_n^{(\gamma)}(\theta) = \alpha_n^{(\gamma)} \cos(n + \gamma)\theta + \beta_n^{(\gamma)} \sin(n + \gamma)\theta + \dots,$$

sabemos que  $a_n^{(\gamma)} = 2\Re [C_n (1 + \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}})] = 2(1 + \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}}) \Re(C_n)$ , dado que estamos asumiendo que  $\tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}}$  es real. De manera similar obtenemos

$$b_n^{(\gamma)} = -2(1 + \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}}) \Im(C_n) \quad , \quad \alpha_n^{(\gamma)} = 2(1 - \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}}) \Re(C_n)$$

y

$$\beta_n^{(\gamma)} = -2(1 - \tau_n \overline{\delta_{2(n+\gamma)}}) \Im(C_n).$$

Por lo tanto, se sigue claramente que

$$\begin{vmatrix} a_n^{(\gamma)} & b_n^{(\gamma)} \\ \alpha_n^{(\gamma)} & \beta_n^{(\gamma)} \end{vmatrix} = 0$$

y el sistema no podrá ser bi-ortogonal.

Sin embargo, de la conexión con la circunferencia unidad podemos deducir los siguientes resultados.

**Teorema 2.6.2** *Sea  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  en  $\mathcal{T}^\gamma$  con el convenio usual  $g_0^{(0)} \equiv 0$  y  $f_0^{(0)} \neq 0$ . Para  $n \geq 0$ , sea  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  un polinomio de grado  $2(n + \gamma)$ . Entonces,  $B_{2(n+\gamma)}$  es para-ortogonal y autorrecíproco, sí y sólo sí, existen dos números reales  $a$  y  $b$  no ambos nulos tales que*

$$e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta). \quad (2.94)$$

*Demostración.*- “ $\Leftarrow$ ” Podemos escribir

$$\begin{aligned} f_n^{(\gamma)}(\theta) &= a_n^{(\gamma)} \cos(n + \gamma)\theta + b_n^{(\gamma)} \operatorname{sen}(n + \gamma)\theta + H_{n-1}^{(\gamma)}(\theta), \\ g_n^{(\gamma)}(\theta) &= \alpha_n^{(\gamma)} \cos(n + \gamma)\theta + \beta_n^{(\gamma)} \operatorname{sen}(n + \gamma)\theta + \tilde{H}_{n-1}^{(\gamma)}(\theta), \end{aligned}$$

con  $H_{n-1}^{(\gamma)}(\theta), \tilde{H}_{n-1}^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_{n-1}^\gamma$  y  $|a_n^{(\gamma)}| + |b_n^{(\gamma)}| > 0, |\alpha_n^{(\gamma)}| + |\beta_n^{(\gamma)}| > 0$ . De la Proposición 2.2.3 tomamos

$$f_n^{(\gamma)}(\theta) = \frac{P_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}, \quad g_n^{(\gamma)}(\theta) = \frac{Q_{2(n+\gamma)}(z)}{z^{n+\gamma}}; \quad z = e^{i\theta},$$

con  $P_{2(n+\gamma)}$  y  $Q_{2(n+\gamma)}$  polinomios autorrecíprocos de grado exacto  $2(n + \gamma)$ . Por tanto, la propiedad de ser autorrecíproco  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  queda asegurada. Ahora, de las condiciones de ortogonalidad que verifican  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  se sigue para  $j = 1, \dots, 2(n + \gamma) - 1$  que

$$\begin{aligned} \langle B_{2(n+\gamma)}(\theta), e^{ij\theta} \rangle_\omega &= \langle e^{i(n+\gamma)\theta} [a f_n^{(\gamma)}(\theta) + b g_n^{(\gamma)}(\theta)], e^{ij\theta} \rangle_\omega = \\ &= a \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(j-n-\gamma)\theta} \rangle_\omega + b \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(j-n-\gamma)\theta} \rangle_\omega = 0, \end{aligned}$$

es decir,  $\langle B_{2(n+\gamma)}(z), z^j \rangle_\omega = 0$  para todo  $j = 1, \dots, 2(n + \gamma) - 1$ . Obsérvese que

$$\begin{aligned} \langle B_{2(n+\gamma)}(z), 1 \rangle_\omega &= a \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + b \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega, \\ \langle B_{2(n+\gamma)}(z), z^{2(n+\gamma)} \rangle_\omega &= a \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + b \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega. \end{aligned} \tag{2.95}$$

Deducimos así que

$$\begin{aligned} \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), f_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), a_n^{(\gamma)} \cos(n + \gamma)\theta + b_n^{(\gamma)} \operatorname{sen}(n + \gamma)\theta + H_{n-1}^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega \\ &= \frac{1}{2i} \left[ (b_n^{(\gamma)} + i a_n^{(\gamma)}) \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + \right. \\ &\quad \left. (-b_n^{(\gamma)} + i a_n^{(\gamma)}) \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \right] \\ &= \kappa_n^{(\gamma)} > 0, \end{aligned}$$

y de manera simiar,

$$\begin{aligned} \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \frac{1}{2i} \left[ (\beta_n^{(\gamma)} + i \alpha_n^{(\gamma)}) \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + \right. \\ &\quad \left. (-\beta_n^{(\gamma)} + i \alpha_n^{(\gamma)}) \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \right] \\ &= \tilde{\kappa}_n^{(\gamma)} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \frac{1}{2i} \left[ (\beta_n^{(\gamma)} + i \alpha_n^{(\gamma)}) \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + \right. \\ &\quad \left. (-\beta_n^{(\gamma)} + i \alpha_n^{(\gamma)}) \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), f_n^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega &= \frac{1}{2i} \left[ (b_n^{(\gamma)} + i a_n^{(\gamma)}) \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega + \right. \\ &\quad \left. (-b_n^{(\gamma)} + i a_n^{(\gamma)}) \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Podemos expresar estas relaciones en forma matricial, según

$$A \begin{pmatrix} \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \\ \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i\kappa_n^{(\gamma)} \end{pmatrix}$$

y

$$A \begin{pmatrix} \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \\ \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i\tilde{\kappa}_n^{(\gamma)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \beta_n^{(\gamma)} + i\alpha_n^{(\gamma)} & -\beta_n^{(\gamma)} + i\alpha_n^{(\gamma)} \\ b_n^{(\gamma)} + ia_n^{(\gamma)} & -b_n^{(\gamma)} + ia_n^{(\gamma)} \end{pmatrix}.$$

Tenemos que  $\det(A) = 2i[a_n^{(\gamma)}\beta_n^{(\gamma)} - \alpha_n^{(\gamma)}b_n^{(\gamma)}] \neq 0$ , dado que  $f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)$  son funciones trigonométricas linealmente independientes. Las soluciones de esos sistemas vienen dados por

$$\begin{aligned} \langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega &= \overline{\langle f_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega} = \frac{\beta_n^{(\gamma)} - i\alpha_n^{(\gamma)}}{a_n^{(\gamma)}\beta_n^{(\gamma)} - \alpha_n^{(\gamma)}b_n^{(\gamma)}} \kappa_n^{(\gamma)} \neq 0, \\ \langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega &= \overline{\langle g_n^{(\gamma)}(\theta), e^{-i(n+\gamma)\theta} \rangle_\omega} = \frac{-b_n^{(\gamma)} + ia_n^{(\gamma)}}{a_n^{(\gamma)}\beta_n^{(\gamma)} - \alpha_n^{(\gamma)}b_n^{(\gamma)}} \tilde{\kappa}_n^{(\gamma)} \neq 0. \end{aligned}$$

Ahora, de (2.95) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle B_{2(n+\gamma)}(z), 1 \rangle_\omega &= \frac{1}{a_n^{(\gamma)}\beta_n^{(\gamma)} - \alpha_n^{(\gamma)}b_n^{(\gamma)}} \left[ (a\beta_n^{(\gamma)}\kappa_n^{(\gamma)} - b\beta_n^{(\gamma)}\tilde{\kappa}_n^{(\gamma)}) + i(a\alpha_n^{(\gamma)}\kappa_n - b\alpha_n^{(\gamma)}\tilde{\kappa}_n^{(\gamma)}) \right] \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

dado que  $f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)$  son linealmente independientes, y por tanto

$$\langle B_{2(n+\gamma)}(z), z^{2(n+\gamma)} \rangle_\omega = \overline{\langle B_{2(n+\gamma)}(z), 1 \rangle_\omega} \neq 0.$$

“ $\implies$ ” Queda claro que  $e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) \in \mathcal{T}_n^\gamma$  dado que  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  es de grado exacto  $2(n+\gamma)$ . Por tanto, dado que  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^n$  representa una base para  $\mathcal{T}_n^\gamma$  se sigue que

$$e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n a_k^{(\gamma)} f_k^{(\gamma)}(\theta) + b_k^{(\gamma)} g_k^{(\gamma)}(\theta),$$

donde los coeficientes vienen dados para  $k = 0, \dots, n$  por

$$a_k^{(\gamma)} = \frac{\langle e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}), f_k^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|f_k^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}, \quad b_k^{(\gamma)} = \frac{\langle e^{-i(n+\gamma)\theta} B_{2(n+\gamma)}(e^{i\theta}), g_k^{(\gamma)}(\theta) \rangle_\omega}{\|g_k^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2}.$$

De la Proposición 2.2.3 tomamos para  $k = 0, \dots, n$ ,

$$f_k^{(\gamma)}(\theta) = \frac{P_{2(k+\gamma)}(z)}{z^{k+\gamma}}, \quad g_k^{(\gamma)}(\theta) = \frac{Q_{2(k+\gamma)}(z)}{z^{k+\gamma}}; \quad z = e^{i\theta},$$

con  $P_{2(k+\gamma)}$  y  $Q_{2(k+\gamma)}$  de grado exacto  $2(k+\gamma)$ , y por tanto las condiciones de ortogonalidad de  $B_{2(n+\gamma)}(z)$  implican para  $k = 0, \dots, n-1$  que

$$a_k^{(\gamma)} = \frac{1}{\|f_k^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2} \left\langle \frac{B_{2(n+\gamma)}}{z^{n+\gamma}}, \frac{P_{2(k+\gamma)}}{z^{k+\gamma}} \right\rangle_\omega = \frac{1}{\|f_k^{(\gamma)}(\theta)\|_\omega^2} \langle B_{2(n+\gamma)}, z^{n-k} P_{2(k+\gamma)} \rangle_\omega = 0,$$

y de manera similar,  $b_k^{(\gamma)} = 0$  para todo  $k = 0, \dots, n-1$ , completando así la prueba. □

Como consecuencia de los Teoremas 2.4.12 y 2.6.2 obtenemos el siguiente

**Corolario 2.6.3** *Sea  $B_n(z)$  un polinomio de grado  $n$ , para-ortogonal e invariante. Sea  $B_n(z) = B_n(z, \tau) = \rho_n(z) + \tau \rho_n^*(z)$ ,  $\tau \in \mathbb{T}$ . Entonces, existe  $\tilde{\tau} \in \mathbb{T}$  tal que los ceros de  $B_n(z, \tilde{\tau})$  y  $B_n(z, \tau)$  se entrelazan.* □

Además, teniendo en cuenta que  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  es exacta en  $\mathcal{T}_{n-1}^{(0)}$ , sí y sólo sí,  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  ( $z_j = e^{i\theta_j}$ ) es exacta en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ , del Corolario 2.5.8 y del Teorema 2.6.2 deducimos el siguiente

**Corolario 2.6.4** *Sea  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de polinomios ortonormales de Szegő. Entonces,  $\tilde{I}_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  con  $z_j \neq z_k$  si  $j \neq k$  y  $z_j \in \mathbb{T}$  para todo  $j = 1, \dots, n$  es exacta en  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$ , sí y sólo sí, los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $\varphi_n(z) + \tau \varphi_n^*(z)$  con  $\tau \in \mathbb{T}$  y los pesos vienen dados por*

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(z_j)|^2}. \tag{2.96}$$

□

**Nota 2.6.5** *La expresión de los pesos de una fórmula de cuadratura de Szegő de  $n$  puntos dada por (2.96) apareció por primera vez en [62].*

En el resto de esta sección asumiremos que la medida positiva de Borel  $\omega$  es absolutamente continua, lo que nos permite escribir  $d\omega(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)d\theta$ , siendo  $\tilde{\omega}(\theta)$  una función peso que supondremos simétrica, es decir,  $\tilde{\omega}(-\theta) = \tilde{\omega}(\theta)$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Nuestro interés será analizar cómo la simetría puede influir en la construcción de una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos  $I_n(f)$  con el máximo grado de precisión trigonométrico. Sea  $I_n(f)$  dada por:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j) \quad , \quad \theta_j \in (-\pi, \pi] \quad , \quad \theta_j \neq \theta_k \quad , \quad j \neq k. \tag{2.97}$$

Sabemos que  $\{\theta_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de

$$T_k^{(\gamma)}(\theta) = a f_k^{(\gamma)}(\theta) + b g_k^{(\gamma)}(\theta) \tag{2.98}$$

donde  $n = 2(k + \gamma)$ ,  $k \geq 0$ ,  $\gamma \in \{0, \frac{1}{2}\}$ ,  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_0^\infty$  es un sistema bi-ortogonal y  $a$  y  $b$  son números reales no ambos nulos. Ahora, la cuestión es: ¿es posible encontrar

$a$  y  $b$  ( $|a| + |b| > 0$ ) tales que los ceros de  $T_k^{(\gamma)}(\theta)$  en (2.98) sean simétricos en  $(-\pi, \pi]$ ? Para este propósito tendremos en cuenta que, debido a la simetría de  $\tilde{\omega}(\theta)$ , los momentos trigonométricos  $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \tilde{\omega}(\theta) d\theta$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) serán reales, y por tanto los coeficientes de los polinomios de Szegő también lo serán. Ahora, del Teorema 2.6.2 podemos escribir

$$T_k^{(\gamma)}(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta) = e^{-i(k+\gamma)\theta} B_{2(k+\gamma)}(e^{i\theta}), \quad (2.99)$$

siendo  $B_{2(k+\gamma)}$  un polinomio para-ortogonal y autorrecíproco de grado  $n = 2(k+\gamma)$ . Así de (2.99), los ceros de  $T_k^{(\gamma)}(\theta)$  son simétricos en  $(-\pi, \pi]$ , sí y sólo sí, los ceros complejos de  $B_{2(k+\gamma)}(z)$  aparecen en pares conjugados en  $\mathbb{T}$ . Haciendo

$$B_{2(k+\gamma)}(z) = C_k \left[ \rho_{2(k+\gamma)}(z) + \tau \rho_{2(k+\gamma)}^*(z) \right], \quad C_k \neq 0, \quad \tau \in \mathbb{T},$$

puede fácilmente comprobarse que los ceros de  $B_{2(k+\gamma)}(z)$  aparecen en pares conjugados, sí y sólo sí,  $\tau = \pm 1$ . Supongamos que

$$\begin{aligned} f_k^{(\gamma)} &= a_{k,k}^{(\gamma)} \cos k\theta + b_{k,k}^{(\gamma)} \sen k\theta + \dots \\ g_k^{(\gamma)} &= c_{k,k}^{(\gamma)} \cos k\theta + d_{k,k}^{(\gamma)} \sen k\theta + \dots \end{aligned}$$

y tomemos primero  $\tau = 1$ . Ahora,

$$B_{2(k+\gamma)}(z) = \rho_{2(k+\gamma)}(z) + \rho_{2(k+\gamma)}^*(z) = (1 + \delta_{2(k+\gamma)}) z^{2(k+\gamma)} + \dots + (1 + \delta_{2(k+\gamma)})$$

con  $\rho_n(0) = \delta_n$  el  $n$ -ésimo parámetro de Verblunsky, que es un número real. Por comparación de los coeficientes de  $\cos(n\theta)$  y  $\sen(n\theta)$  en ambos lados de la relación (2.99) obtenemos el siguiente sistema en las incógnitas  $a$  y  $b$ :

$$\begin{cases} aa_{k,k}^{(\gamma)} + bc_{k,k}^{(\gamma)} = 2(1 + \delta_{2(k+\gamma)}) \\ ab_{k,k}^{(\gamma)} + bd_{k,k}^{(\gamma)} = 0 \end{cases}.$$

Dado que

$$D_k^{(\gamma)} = \begin{vmatrix} a_{k,k}^{(\gamma)} & c_{k,k}^{(\gamma)} \\ b_{k,k}^{(\gamma)} & d_{k,k}^{(\gamma)} \end{vmatrix} \neq 0$$

(debido a la independencia lineal), se sigue que

$$a = \frac{2d_{k,k}^{(\gamma)}(1 + \delta_{2(k+\gamma)})}{D_k^{(\gamma)}}, \quad b = \frac{-2b_{k,k}^{(\gamma)}(1 + \delta_{2(k+\gamma)})}{D_k^{(\gamma)}}. \quad (2.100)$$

De manera similar, para  $\tau = -1$ , teniendo en cuenta ahora que

$$B_{2(k+\gamma)} = i \left[ \rho_{2(k+\gamma)}(z) - \rho_{2(k+\gamma)}^*(z) \right]$$

es autorrecíproco, tendremos

$$a = \frac{2c_{k,k}^{(\gamma)}(1 - \delta_{2(k+\gamma)})}{D_k^{(\gamma)}}, \quad b = \frac{-2a_{k,k}^{(\gamma)}(1 - \delta_{2(k+\gamma)})}{D_k^{(\gamma)}}. \quad (2.101)$$

En resumen, hemos probado el siguiente

**Teorema 2.6.6** Sea  $\{f_k^{(\gamma)}(\theta), g_k^{(\gamma)}(\theta)\}_{k=0}^{\infty}$  un sistema bi-ortogonal para la función peso simétrica  $\tilde{\omega}(\theta)$ . Entonces, una función trigonométrica de la forma  $T_k^{(\gamma)}(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta)$  tiene todos sus ceros simétricos en  $(-\pi, \pi]$ , sí y sólo sí, los parámetros  $a$  y  $b$  vienen dados por (2.100) ó (2.101).

□

**Ejemplo 2.6.7** Supongamos  $n$  impar, esto es,  $n = 2k + 1$  (y por lo tanto,  $\gamma = 1/2$ ). En este caso  $B_{2k+1} = \rho_{2k+1}(z) + \rho_{2k+1}^*(z)$  tiene un cero en  $z = -1$  y los restantes aparecen en pares conjugados. Por lo tanto, la correspondiente función trigonométrica  $T_k^{(1/2)}(\theta) = af_k^{(1/2)}(\theta) + bg_k^{(1/2)}(\theta)$  con  $a$  y  $b$  dados por (2.100) tienen un cero en  $\theta = -\pi$  y los restantes simétricos en  $(-\pi, \pi)$ . Por otro lado, si consideramos  $B_{2k+1}(z) = \rho_{2k+1}(z) - \rho_{2k+1}^*(z)$  entonces vemos que  $z = 1$  es el único cero real y por tanto, los  $(2k + 1)$  ceros de  $T_k^{(1/2)}(\theta)$  con  $a$  y  $b$  dados por (2.101) quedan simétricamente distribuidos en  $(-\pi, \pi)$ , siendo  $\theta = 0$  uno de ellos. Conclusiones similares se deducen para  $n$  par, es decir,  $\gamma = 0$ .

**Ejemplo 2.6.8** Tomemos  $\tilde{\omega}(\theta) \equiv 1$  por lo que  $\delta_n = 0$  para todo  $n \geq 1$  y  $f_n^{(0)} = \cos n\theta$  y  $g_n^{(0)} = \sin n\theta$ . Así, de (2.100) tenemos que  $a = 2$  y  $b = 0$  mientras que de (2.101) tenemos que  $a = 0$  y  $b = -2$ . Los nodos simétricamente distribuidos para una fórmula de cuadratura con  $2n$  puntos y máximo grado de precisión trigonométrico son precisamente los ceros de  $\cos n\theta$  ó  $\sin n\theta$  en el intervalo  $(-\pi, \pi]$ , es decir,  $\theta_j = \frac{[2(j-n)+1]\pi}{2n}$  ó  $\theta_j = \frac{(j-n)\pi}{n}$  para  $j = 0, \dots, 2n - 1$ . Además, como ilustración del Corolario 2.6.3 vemos que los ceros de  $B_{2n}(z) = \rho_{2n}(z) + \rho_{2n}^*(z)$  entrelazan a los de  $\tilde{B}_{2n}(z) = \rho_{2n}(z) - \rho_{2n}^*(z)$ .

Finalmente, en relación con los coeficientes  $\lambda_j$  de las fórmulas de cuadratura, de (2.82) y del hecho de que bajo esas condiciones

$$T_k^{(\gamma)}(\theta) = T_k^{(\gamma)}(\theta, \tau) = e^{-i(k+\gamma)\theta} C_k \left[ \rho_{2(k+\gamma)}(e^{i\theta}) + \tau \rho_{2(k+\gamma)}^*(e^{i\theta}) \right], C_k \neq 0, \tau = \pm 1$$

es una función par para  $\tau = 1$  e impar para  $\tau = -1$ , deducimos que los coeficientes correspondientes a pares de nodos simétricos coinciden. Como cabría esperar, al trabajar con funciones peso simétricas, el esfuerzo computacional en construir una fórmula de cuadratura con  $n$  puntos y máximo grado de precisión trigonométrico queda reducido pues a la mitad.

## 2.7. Ejemplos numéricos

Con el fin de ilustrar numéricamente la efectividad numérica de las fórmulas de cuadratura consideradas en este capítulo, nos centraremos en esta sección con la computación de la integral bi-paramétrica

$$I(m, \alpha) := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta, \quad m \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0.$$

Obsérvese que para  $\alpha = 0$  la integral diverge. Por lo tanto, para valores de este parámetro próximos a cero, el denominador del integrando es también próximo a cero a medida que  $\theta$

tiende a  $\pm\pi$ , de modo que esto podría generar un cierto tipo de inestabilidad al considerar la aproximación de  $I(m, \alpha)$  por medio de una fórmula de cuadratura con nodos cercanos a  $\pm\pi$ . Por otro lado, para  $m$  suficientemente largo, la integral es altamente oscilante en  $(-\pi, \pi]$ . De hecho, haciendo  $f(\theta) = \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta}$ , entonces  $f(\theta)$  cambia claramente de signo en los puntos para los cuales  $f(\theta) = 0$ , es decir, en  $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2m}$ ,  $-m \leq k \leq m-1$ . Notemos también que, debido a la simetría podemos escribir

$$I(m, \alpha) = 2 \int_0^\pi \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta, \quad m \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0. \quad (2.102)$$

Después de estas consideraciones preliminares, proponemos primero computar de manera aproximada la integral  $I(m, \alpha)$  dada por (2.102) por medio de la fórmula de cuadratura (F.C.) de Gauss-Legendre (G.L.) con  $n$  puntos en el intervalo  $[0, \pi]$  y la Regla Trapezoidal (R.T.) para  $n = 10, 12, 14, 16$ . Aquí  $n$  denota tanto el número de nodos en la fórmula de Gauss-Legendre como el número de subintervalos en  $[0, \pi]$ . Los errores absolutos de las fórmulas utilizadas aparecen en las dos siguientes tablas:

F.C.	n=10	n=12	n=14	n=16
G.L.	2.26414	0.300761	0.00937743	0.000154023
R.T.	0.0224394	0.000660554	0.000194449	5.72404E-7

Tabla 1 ( $m = 14, \alpha = 1$ ).

F.C.	n=10	n=12	n=14	n=16
G.L.	8.93136E-5	7.12412E-7	1.17708E-8	4.65022E-10
R.T.	4.20833E-8	1.30695E-10	4.05799E-12	1.26807E-15

Tabla 2 ( $m = 8, \alpha = 4$ ).

Debemos tener en cuenta que la Regla Trapezoidal coincide esencialmente con la fórmula de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrico (fórmula de Szegő) para  $\tilde{\omega}(\theta) \equiv 1$ . Este hecho, junto con el carácter altamente oscilante de (2.102) podría explicar el por qué los resultados que provienen de la Regla Trapezoidal son mejores que los correspondientes de la fórmula de Gauss-Legendre. Sin embargo, cuando  $\alpha$  toma valores próximos a cero, cabe esperar que los resultados de ambas fórmulas de cuadraturas sean pobres. Esto se muestra en la siguiente tabla (de nuevo, los números representan los errores absolutos de las fórmulas utilizadas):

F. C.	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$
G.L.	5,05696	4,06786	5,60122	2,62501	0,516198	0,328062	0,0190433
T.	11,2748	0,866646	1,64061	0,628319	0,239269	0,126295	0,0349069

Tabla 3 ( $m = 12, \alpha = 0,25$ ).

Con el fin de solucionar este inconveniente, vamos a tomar el factor  $\frac{1}{\alpha + \sin^2 \theta}$  como función peso. Tomamos  $T(\theta) = \alpha + \sin^2 \theta$ , polinomio trigonométrico positivo y de grado dos. Así pues, del Teorema 2.2.7 (Riesz-Féjer) haciendo  $\gamma = 0$  podemos escribir

$$T(\theta) = \left| g(e^{i\theta}) \right|^2, \quad g \in \Pi_2.$$

Dado que  $T(\theta) = \alpha + \sin^2 \theta = \alpha + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ , haciendo  $\beta = 2\alpha + 1 > 1$  y  $z = e^{i\theta}$  tendremos que  $2T(\theta) = \beta - \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$ , lo cual implica  $4T(\theta) = \frac{-z^4 + 2\beta z^2 - 1}{z^2}$ . Además, dado que  $T(\theta) > 0$ , entonces:

$$4T(\theta) = |4T(\theta)| = |z^4 - 2\beta z^2 + 1|. \quad (2.103)$$

Además,

$$z^4 - 2\beta z^2 + 1 = (z^2 - \sigma)(z^2 - \sigma^{-1}), \quad \sigma = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (2.104)$$

Por otro lado, dado que  $z = e^{i\theta}$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$ , se cumple

$$\begin{aligned} |z^2 - \sigma^{-1}|^2 &= (z^2 - \sigma^{-1})\overline{(z^2 - \sigma^{-1})} = (z^2 - \sigma^{-1})(z^{-2} - \sigma^{-1}) \\ &= (z^2 - \sigma^{-1}) \left( \frac{\sigma - z^2}{\sigma z^2} \right) = -\frac{1}{\sigma z^2} (z^2 - \sigma)(z^2 - \sigma^{-1}). \end{aligned}$$

De (2.103) y (2.104) se tiene que

$$0 < |z^2 - \sigma^{-1}|^2 = -\frac{1}{\sigma z^2} 4T(\theta) = \left| -\frac{1}{\sigma z^2} 4T(\theta) \right| = \frac{4}{\sigma} T(\theta),$$

y por tanto,

$$T(\theta) = \frac{\sigma}{4} |z^2 - \sigma^{-1}|^2 = \frac{\sigma}{4} |g(z)|^2, \quad g(z) = z^2 - \sigma^{-1} \in \mathbb{P}_2, \quad z = e^{i\theta}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que consideramos en el capítulo anterior integrales de la forma  $\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi|h(e^{i\theta})|^2}$ , con  $h$  un polinomio mónico con todos sus ceros en  $\mathbb{D}$ , transformaremos nuestra integral  $I(m, \alpha)$  como sigue ( $z = e^{i\theta}$ ):

$$I(m, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \frac{d\theta}{\frac{\sigma}{4}|g(z)|^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{4\pi}{\sigma} (z^m + z^{-m}) \right) \left( \frac{d\theta}{2\pi|g(z)|^2} \right).$$

Podemos escribir pues

$$I(m, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \tilde{\omega}(\theta) d\theta, \quad (2.105)$$

donde  $f(z) = \frac{4\pi}{\sigma} (z^m + z^{-m})$  y con función peso  $\tilde{\omega}(\theta) = \frac{1}{2\pi|g(z)|^2}$ , siendo  $g(z) = z^2 - \sigma^{-1} \in \mathbb{P}_2$  y  $z = e^{i\theta}$ . De los Teoremas 1.3.3 y 1.3.13, junto con la expresión (1.58) tendremos que la familia de nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  de la fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  puntos son los ceros del polinomio para-ortogonal

$$B_n(z, \tau) = \varphi_n(z) + \tau \varphi_n^*(z) = z^{n-2} g(z) + \tau g^*(z) = z^{n-2} (z^2 - \sigma^{-1}) + \tau (1 - \sigma^{-1} z^2), \quad \tau \in \mathbb{T}.$$

Por otro lado, la familia de coeficientes  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  viene explícitamente dada por (1.79):

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{-1} &= |g(z_j)|^2 \left[ n - 2 + \left( 1 - \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^2 \right) \left| z_j - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^{-2} + \left( 1 - \left| -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^2 \right) \left| z_j + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^{-2} \right] \\
&= |g(z_j)|^2 \left[ n - 2 + (1 - \sigma^{-1}) \left( \left| z_j - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^{-2} + \left| z_j + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^{-2} \right) \right] \\
&= |g(z_j)|^2 \left[ n - 2 + \frac{1 - \sigma^{-1}}{|g(z_j)|^2} \left( \left| z_j - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^2 + \left| z_j + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right|^2 \right) \right] \\
&= |g(z_j)|^2 \left[ n - 2 + \frac{1 - \sigma^{-1}}{|g(z_j)|^2} \left( \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \Re(z_j) + \frac{1}{\sigma} \right] + \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \Re(z_j) + \frac{1}{\sigma} \right] \right) \right] \\
&= |g(z_j)|^2 \left( n - 2 + 2(1 - \sigma^{-1})(1 + \sigma^{-1}) \frac{1}{|g(z_j)|^2} \right) \\
&= (n - 2)|g(z_j)|^2 + 2(1 - \sigma^{-2}), \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Nótese que si  $m \leq n - 1$ , entonces la fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  puntos es exacta dado que el integrando cumple  $f \in \Lambda_{-m, m}$ . De (2.105) aproximaremos entonces la integral  $I(m, \alpha)$  por una fórmula de Szegő de  $n$  puntos  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$ , pudiéndose también computar exactamente el valor absoluto de los errores cometidos dado que  $I(m, \alpha)$  puede ser calculada por el Teorema de los Residuos. En efecto, como  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
I(m, \alpha) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta + i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin m\theta}{\alpha + \sin^2 \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\theta + i \sin m\theta}{T(\theta)} d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^m}{\frac{\sigma}{4} |g(z)|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{8\pi}{\sigma} z^m \right) \frac{d\theta}{(z^2 - \frac{1}{\sigma})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sigma})} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-8\pi) \frac{z^{m+2}}{(z^2 - \frac{1}{\sigma})(z^2 - \sigma)} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (-8\pi) \frac{z^{m+1}}{(z^2 - \frac{1}{\sigma})(z^2 - \sigma)} dz \\
&= \text{Res} \left( h, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) + \text{Res} \left( h, \frac{-1}{\sqrt{\sigma}} \right),
\end{aligned}$$

donde  $h(z) = (-8\pi) \frac{z^{m+1}}{(z^2 - \frac{1}{\sigma})(z^2 - \sigma)}$ . Ahora bien,

$$\text{Res} \left( h, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) = -8\pi \frac{\frac{1}{(\sqrt{\sigma})^{m+1}}}{\frac{2}{\sqrt{\sigma}} \left( \frac{1}{\sigma} - \sigma \right)} = \frac{4\pi\sigma}{(\sqrt{\sigma})^m (\sigma^2 - 1)},$$

y

$$\text{Res} \left( h, \frac{-1}{\sqrt{\sigma}} \right) = -8\pi \frac{\frac{(-1)^{m+1}}{(\sqrt{\sigma})^{m+1}}}{\frac{2}{\sqrt{\sigma}} \left( \frac{1}{\sigma} - \sigma \right)} = (-1)^{m+1} \frac{-4\pi\sigma}{(\sqrt{\sigma})^m (\sigma^2 - 1)},$$

concluyendo

$$I(m, \alpha) = \frac{4\pi\sigma(1 - (-1)^{m+1})}{(\sqrt{\sigma})^m (\sigma^2 - 1)} = \begin{cases} \frac{8\pi\sigma}{(\sqrt{\sigma})^m (\sigma^2 - 1)} & \text{si } m \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

La siguiente tabla muestra los nodos y pesos tomando  $m = 12$ ,  $\alpha = 0,25$ ,  $a = \sqrt{2}$  y  $b = 0$  en el Corolario 2.5.8 y diversos valores de  $n$ .

n	Nodos	Pesos	n	Nodos	Pesos
4	$\pm 2,552156$	0,292705	5	$-\pi$	0,350373
	$\pm 0,589436$	0,292705		$\pm 1,970062$	0,148257
7	$-\pi$	0,276393		$\pm 0,476203$	0,261967
	$\pm 2,347606$	0,133275	8	$\pm 2,827435$	0,205112
	$\pm 1,305082$	0,093192		$\pm 2,023074$	0,087593
	$\pm 0,352796$	0,220747		$\pm 1,118517$	0,087593
10	$\pm 2,882602$	0,179674		$\pm 0,314157$	0,205112
	$\pm 2,266800$	0,083596	11	$-\pi$	0,194330
	$\pm \frac{\pi}{2}$	0,058869		$\pm 2,640393$	0,120187
	$\pm 0,874792$	0,083596		$\pm 2,044334$	0,062356
	$\pm 25899053$	0,179674		$\pm 1,412137$	0,053898
		$\pm 0,790706$		0,082684	
			$\pm 0,238434$	0,169120	

n	Nodos	Pesos
6	$\pm 2,737618$	0,239215
	$\pm \frac{\pi}{2}$	0,106980
	$\pm 0,403974$	0,239215
9	$-\pi$	0,228208
	$\pm 2,530469$	0,126533
	$\pm 1,769531$	0,068212
	$\pm 0,980733$	0,084992
12	$\pm 0,283719$	0,191570
	$\pm 2,920557$	0,1596870
	$\pm 2,419334$	0,0819334
	$\pm 1,858629$	0,0510849
	$\pm 1,282963$	0,0510849
	$\pm 0,722257$	0,0819334
	$\pm 0,221035$	0,1596870

Tabla 4 ( $m = 12$ ,  $\alpha = 0,25$ ).

Los errores absolutos para la correspondiente fórmula de Szegő de  $n$  puntos se muestra en la siguiente tabla (compárese con la Tabla 3).

n	Error en la fórmula de Szegő	n	Error en la fórmula de Szegő
$n = 4$	3,18008	$n = 5$	2,167530
$n = 6$	0,009878	$n = 7$	0,007069
$n = 8$	$1,847391E - 15$	$n = 9$	0,000427
$n = 10$	$6,949821E - 15$	$n = 11$	0,000052

Tabla 5 ( $m = 12$ ,  $\alpha = 0,25$ ).

El excelente comportamiento de esta fórmula de cuadratura puede explicarse de [62, Teorema 3.3], teniendo en cuenta que

$$I(m, \alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \tilde{\omega}(\theta) d\theta$$

donde

$$f(z) = \frac{4\pi}{\sigma} (z^m + z^{-m})$$

tiene claramente un único polo en el origen. Sin embargo, podemos ver de la tabla 5 que los resultados que se obtienen cuando consideramos un número par de nodos son mejores que los correspondientes al tomar un número impar. Esto podría explicarse por el hecho de que estamos considerando un integrando simétrico junto a una distribución simétrica de nodos, y también dado que en el caso impar, el nodo que rompe precisamente esta simetría coincide con el que tiene mayor peso. Diversos experimentos numéricos realizados considerando el mismo integrando, diferentes valores de  $a$  y  $b$  en el Corolario 2.5.8 (y dando lugar por tanto a una distribución no simétrica de nodos) y un número de nodos tanto par como impar nos mostraron similares resultados (y similares a su vez a los obtenidos en la tabla 5 tomando  $n$  impar). Además, también comprobamos que si el integrando es reemplazado por uno no simétrico, entonces los resultados son de nuevo similares a aquellos obtenidos en la tabla 5 para  $n$  impar, e independientes de que el número de nodos sea par o impar en este caso. De cualquier manera se muestra una clara evidencia de la mejoría que se produce al comparar los resultados con los de las fórmulas de Gauss-Legendre y la Regla Trapezoidal en todos los ejemplos numéricos realizados.

## Capítulo 3

# Familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad: “ordenamiento” equilibrado

### 3.1. Introducción

Hemos visto en el capítulo segundo cómo deducir las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad con máximo grado de precisión alcanzable (fórmulas de Szegő) introducidas en el capítulo primero a partir de fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable. De la relación (2.5) sabemos además que las funciones trigonométricas consideradas en el capítulo anterior son ciertos polinomios de Laurent. Por otro lado, y como ya se ha mencionado, al trabajar con cuestiones de aproximación en la circunferencia unidad (tales como las fórmulas de Szegő, el problema trigonométrico de los momentos o el problema de interpolación de Carathéodory-Féjer), el ingrediente básico es considerar polinomios de Laurent. Recordemos una propiedad crucial: si  $\omega$  es una medida positiva de Borel en  $\mathbb{T}$ , el espacio  $\mathbb{P}$  es denso en  $L_2^\omega(\mathbb{T})$  (con respecto a la norma  $L_2^\omega$ ), sí y sólo sí,  $\omega$  no verifica la condición de Szegő, esto es,  $\int_{\mathbb{T}} \ln \omega'(\theta) d\theta = -\infty$ . Sin embargo,  $\Lambda$  es denso en  $L_2^\omega(\mathbb{T})$  independientemente de esa condición (véase por ejemplo, [18]). También debemos hacer notar que un gran número de casos interesantes, como por ejemplo la medida de Lebesgue, cumplen tal condición. Resulta pues natural el que se planteen la construcción de bases ortogonales en el espacio  $\Lambda$  y dando lugar así a las familias de polinomios de Laurent ortogonales.

En tal sentido cabe decir que polinomios de Laurent ortogonales con respecto a una medida con soporte en  $\mathbb{R}$  fueron introducidos a principios de los años ochenta en [75] (véase también [74] y [72] cronológicamente) y también implícitamente en [76], en conexión con *fracciones continuas* y la solución del *problema fuerte de momentos de Stieltjes*. A partir de estos trabajos se ha producido una extensa bibliografía que ha dado origen a una Teoría paralelamente cercana a la Teoría bien conocida sobre Polinomios Ortogonales (véase por ejemplo, [32], [48], [66], [73] y [88]). Por otro lado, y en relación con las fórmulas de cuadraturas sobre intervalos del eje real asociadas a los Polinomios Ortogonales (Fórmu-

las Gaussianas), ha quedado demostrada de manera convincente su potente efectividad numérica cuando se consideran integrandos  $f(x)$  suaves. Sin embargo, la convergencia puede convertirse extremadamente lenta si la integral posee singularidades próximas al intervalo de integración. Para solucionar este inconveniente se han considerado también en los últimos años fórmulas de cuadraturas que integren exactamente funciones racionales con polos prefijados fuera del intervalo de integración (véase [19], [52] ó [67]). Los polinomios de Laurent no son otra cosa que tales funciones racionales con sus polos en el origen y en el infinito.

En cuanto a la circunferencia unidad, y tal y como indica W.J. Thron en [100], resulta de interés encontrar y estudiar sucesiones de polinomios de Laurent que sean ortogonales en  $\mathbb{T}$  y que expandan el espacio  $\Lambda$  en un cierto orden (véanse más detalles en [25] y [95]). Más precisamente, que el espacio de polinomios de Laurent se expanda según

$$\Lambda_{0,0} , \Lambda_{0,1} , \Lambda_{-1,1} , \Lambda_{-1,2} , \Lambda_{-2,2} \dots , \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{0,0} , \Lambda_{-1,0} , \Lambda_{-1,1} , \Lambda_{-2,1} , \Lambda_{-2,2} \dots , \tag{3.2}$$

es decir, un crecimiento paralelo de potencias tanto positivas como negativas de la variable  $z$ . El trabajo de este autor se centró en la obtención de una ley de recurrencia a tres términos, que más tarde comentaremos, en conexión con ciertas familias de fracciones continuas.

En esta segunda parte de la Memoria, el presente capítulo y el posterior, nos centraremos en el estudio de familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad, necesarias para la obtención de bases ortogonales para subespacios de  $L_2^\omega(\mathbb{T})$  y con el fin de construir fórmulas de cuadratura sobre la circunferencia unidad con máximo grado de precisión (es decir, exactas en subespacios de Laurent lo más grandes posibles). Por un lado, en este tercer capítulo analizaremos propiedades de tales familias al considerar los órdenes (3.1) y (3.2) propuestos por W.J. Thron, y a los que nos referiremos como *ordenamientos equilibrados*. Tales familias han sido también recientemente estudiadas por el grupo M.J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez (véase [25], [26], [27] y [28]) y esto ha significado un importante impulso del análisis espectral de ciertos problemas en la circunferencia unidad. Por otro lado en el último capítulo estudiaremos familias de polinomios de Laurent ortogonales en  $\mathbb{T}$  cuando consideremos un ordenamiento general arbitrario del espacio  $\Lambda$  y recuperaremos el trabajo de los tres autores anteriores al analizar el análogo en la circunferencia unidad del problema de autovalores en el eje real (matrices de Jacobi) considerado en el capítulo primero, y que ha dado lugar recientemente a la denominada teoría CMV (véase [93]). Comentamos también que tanto en la situación del eje real como en la circunferencia unidad, la Teoría de Polinomios de Laurent Ortogonales ha sido extendida en [18] en un contexto más amplio que ha dado lugar a la Teoría de Funciones Racionales Ortogonales.

La estructura del capítulo es como sigue: en la segunda sección introduciremos el concepto de familia de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a una medida y a un ordenamiento equilibrado, estableciendo la notación a seguir, algunos resultados preliminares, leyes de recurrencia y conexiones tanto con los polinomios de Szegő como con los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas introducidos en el capítulo anterior. Al igual que ocurría en el capítulo primero, existen ciertas analogías y diferencias cuando la medida positiva de Borel tiene su soporte en un intervalo del semieje

real positivo, de ahí que dediquemos la siguiente sección a nombrar los recientes resultados que han obtenido diversos autores en esta situación. Estos resultados nos van a permitir hacer una comparación en la siguiente sección con lo que sucede en la circunferencia unidad, en la que caracterizaremos las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad exactas en subespacios de Laurent lo más grandes posibles, y donde recuperaremos las fórmulas de Szegő introducidas en el capítulo primero. En cuanto a la computación de éstas veremos además una conexión entre polinomios de Laurent ortogonales y el algoritmo split Levinson también introducido en el capítulo inicial. La quinta sección está dedicada a la demostración de dos resultados bien conocidos en el caso polinómico: una fórmula de Christoffel-Darboux y un teorema de Favard para familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad respecto a una sucesión generadora equilibrada. Finalmente, en la sexta y última sección consideraremos ejemplos numéricos de las fórmulas de cuadratura introducidas en las secciones tres y cuatro, llevándolas a la práctica en la estimación de un cierto tipo particular de integrales definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### 3.2. Polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad

Con el fin de generar una familia de subespacios encajados de Laurent similar a la familia  $\{\mathbb{P}_n\}_{n=0}^\infty$  en el caso polinómico ordinario, y procediendo de manera general, consideremos la familia encajada de subespacios  $\{\mathcal{L}_n\}_{n=0}^\infty$  verificando

$$\mathcal{L}_0 = \text{span}\{1\} \quad , \quad \dim(\mathcal{L}_n) = n + 1 \quad , \quad \mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1} \quad , \quad n \geq 0 \quad (3.3)$$

construida como sigue: sea  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  una sucesión no decreciente de enteros no negativos cumpliendo  $p(0) = 0$ ,  $0 \leq p(n) \leq n$  y  $s(n) = p(n) - p(n-1) \in \{0, 1\}$  para  $n \geq 1$ . En lo que sigue, una sucesión  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  verificando tales condiciones diremos que es una *sucesión generadora*. Definamos entonces

$$\mathcal{L}_n := \Lambda_{-p(n), q(n)} = \text{span}\{z^j : -p(n) \leq j \leq q(n)\} \quad , \quad q(n) := n - p(n). \quad (3.4)$$

Observemos que  $\{q(n)\}_{n=0}^\infty$  es también una sucesión generadora y que garantizamos  $\Lambda = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{L}_n$ , sí y sólo sí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ . Además,

$$\mathcal{L}_{n+1} = \begin{cases} \mathcal{L}_n \oplus \text{span}\{z^{q(n+1)}\} & \text{si } s(n+1) = 0 \\ \mathcal{L}_n \oplus \text{span}\{z^{-p(n+1)}\} & \text{si } s(n+1) = 1 \end{cases} . \quad (3.5)$$

En cualquier caso diremos que  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  ha inducido un *orden* en  $\Lambda$ .

Al igual que en el capítulo anterior, sea  $\omega$  una medida positiva de Borel en  $\mathbb{T}$ . Dado que esencialmente estamos trabajando con un espacio vectorial con un producto interior definido  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ , podemos hacer uso del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en  $\mathcal{L}_n$  a partir de un sistema de funciones linealmente independientes en  $\mathcal{L}_n$ , como por ejemplo el sistema  $\{z^{-p(n)}, \dots, z^{q(n)}\}$ , obteniendo una base ortogonal  $\{\psi_0(z), \dots, \psi_n(z)\}$ . Repitiendo el proceso para todo  $n \geq 1$  obtendremos una familia de polinomios de Laurent  $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  esencialmente única (salvo constantes) verificando

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &\in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad \psi_0(z) \equiv c \neq 0 \quad , \\ \langle \psi_n(z), \psi_m(z) \rangle_\omega &= k_n \delta_{n,m} \quad , \quad k_n > 0 \quad \text{(es decir, } \psi_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-1} \text{)} \quad , \end{aligned} \quad (3.6)$$

siendo  $\delta_{n,m}$  la función delta de Kronecker (1.2). El polinomio de Laurent  $\psi_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  diremos que tiene L-grado  $n$  y la familia  $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  diremos que representa una *sucesión de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$* .

Como hemos comentado en la introducción, los *órdenes* u *ordenamientos* (3.1) y (3.2) que consideraremos en este capítulo, que son los mayoritariamente tratados en la literatura, se corresponden con las sucesiones generadoras  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  y  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  respectivamente, donde como es usual,  $E[x]$  denota la parte entera de  $x$ . Observamos por un lado que  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  implica  $s(n) = \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  para todo  $n \geq 1$  y que si  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  entonces  $s(n) = \frac{1-(-1)^n}{2} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$  para todo  $n \geq 1$ , mientras que por otro lado, cuando tomamos  $p(n) = 0$  (y por tanto  $q(n) = n$ ) para todo  $n \geq 0$  entonces  $\mathcal{L}_n = \Lambda_{0,n} = \mathbb{P}_n$  y por tanto, el  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortogonal coincidirá en este caso con el  $n$ -ésimo polinomio de Szegő.

En lo que resta de capítulo denotaremos por  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  a la correspondiente familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  (y por tanto,  $q(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ ). Para entender el concepto de *polinomio de Laurent mónico* definimos de la siguiente forma el *coeficiente director*: coeficiente del monomio  $z^{-(n+1)}$  en  $\phi_{2n+1}(z)$  y coeficiente del monomio  $z^n$  en  $\phi_{2n}(z)$ . Claramente, el coeficiente director de cada polinomio de Laurent de una familia será no nulo para cada  $n \geq 0$ , el cual asumiremos positivo. Denotaremos también por  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  a la correspondiente familia ortonormal, es decir, cuando se cumple  $\kappa_n = 1$  para todo  $n \geq 1$  en (3.6). A las familias análogas mónicas y ortonormales con respecto al orden inducido por  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  (y por tanto,  $q(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ ) las denotaremos respectivamente por  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$ .

Comenzamos con dos resultados que, como veremos en la próxima sección, difieren radicalmente de lo que ocurre con los polinomios de Laurent ortogonales en el eje real. El primero establece una relación entre la familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida  $\omega$  y al ordenamiento equilibrado  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  y la correspondiente familia de polinomios (mónicos) de Szegő, siendo la demostración inmediata a partir de las condiciones de ortogonalidad que satisfacen tales familias (véase [95, Proposición 4.4.2]). El segundo establece una conexión entre las familias de polinomios mónicos de Laurent ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida  $\omega$  y a los ordenamientos equilibrados. Ambos resultados serán generalizados en el siguiente capítulo cuando se considere un ordenamiento arbitrario  $p(n)$  (Lemas 4.2.1 y 4.2.2).

**Lema 3.2.1** *Sea  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  una familia de polinomios mónicos de Laurent tal que  $\phi_n(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}}$  con  $N_n(z) \in \mathbb{P}_n$  para todo  $n \geq 0$  y  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ . Entonces,  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  es la familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida  $\omega$ , sí y sólo sí, la familia  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$  dada por*

$$\rho_{2n}(z) = N_{2n}(z) \quad , \quad \rho_{2n+1}(z) = N_{2n+1}^*(z) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

*es la correspondiente familia de polinomios (mónicos) de Szegő.*

□

**Lema 3.2.2** *Las familias  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  de polinomios de Laurent ortogonales en  $\mathbb{T}$  con respecto a la medida  $\omega$  y a los ordenamientos equilibrados vienen relacionadas por  $\phi_n(z) = \tilde{\phi}_{n^*}(z)$  para todo  $n \geq 0$ .*

*Demostración.-* Escribiendo  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  y  $\tilde{p}(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  (y por tanto,  $q(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  y  $\tilde{q}(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ ) para todo  $n \geq 0$ , se comprueba fácilmente que haciendo  $\mathcal{L}_{n^*} = \{f \in \Lambda : f_* \in \mathcal{L}_n\}$ , entonces  $\tilde{\mathcal{L}}_n = \Lambda_{-\tilde{p}(n), \tilde{q}(n)} = \mathcal{L}_{n^*}$ .

□

Como consecuencia de los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 y de (1.31) se sigue que

$$\| \phi_n(z) \|_\omega = \| \tilde{\phi}_n(z) \|_\omega = \| \rho_n(z) \|_\omega = \| \rho_n^*(z) \|_\omega . \quad (3.8)$$

Además, como consecuencia del Lema 3.2.1 y del Teorema 1.3.1 establecemos el siguiente resultado fundamental:

**Corolario 3.2.3** *Los ceros de  $\phi_{2n}(z)$  y  $\phi_{2n-1}(z)$  se encuentran en  $\mathbb{D}$  y en  $\mathbb{E}$  respectivamente, para todo  $n \geq 1$ .*

□

De (3.7) y (3.8) también establecemos la siguiente relación entre los polinomios ortonormales  $\chi_n(z)$  y  $\varphi_n(z)$ :

$$\chi_{2k}(z) = \frac{\phi_{2k}(z)}{\| \phi_{2k}(z) \|_\omega} = \frac{\rho_{2k}(z)}{\| \rho_{2k}(z) \|_\omega} \frac{1}{z^k} = \frac{\varphi_{2k}(z)}{z^k} , \quad (3.9)$$

$$\chi_{2k+1}(z) = \frac{\phi_{2k+1}(z)}{\| \phi_{2k+1}(z) \|_\omega} = \frac{\rho_{2k+1}^*(z)}{\| \rho_{2k+1}^*(z) \|_\omega} \frac{1}{z^{k+1}} = \frac{\varphi_{2k+1}^*(z)}{z^{k+1}} . \quad (3.10)$$

Esto nos permite reemplazar en el Lema 3.2.2 las familias  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  por  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  respectivamente.

Nos centramos a continuación en estudiar leyes de recurrencia a tres términos para las familias de polinomios de Laurent consideradas, comenzando con la sucesión  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ . Tal ley recurrente se dedujo inicialmente en el contexto de ciertas fracciones continuas en [100]. La demostración alternativa que presentamos a continuación se basa en la conexión con la familia de polinomios de Szegő establecida en el Lema 3.2.1 y de las leyes de recurrencia (1.40) que éstos satisfacen.

**Teorema 3.2.4 (Ley de recurrencia a tres términos)** *Sea  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky para la medida  $\omega$ ,  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de números reales dada por (1.32) y  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y al ordenamiento equilibrado  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ . Entonces,*

$$\phi_n(z) = \left( A_n + \overline{A_{n-1}} z^{(-1)^n} \right) \phi_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2 z^{(-1)^n} \phi_{n-2}(z) , \quad n \geq 2 \quad (3.11)$$

donde

$$\phi_0(z) \equiv 1 , \quad \phi_1(z) = \overline{\delta_1} + \frac{1}{z} , \quad A_n = \begin{cases} \delta_n & \text{si } n \text{ es par} \\ \overline{\delta_n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (3.12)$$

*Demostración.-* De las leyes de recurrencia (1.40) que satisfacen los polinomios de Szegő y las condiciones iniciales (1.42) deducimos las condiciones iniciales  $\phi_0(z) = \rho_0(z) \equiv 1$ ,  $\phi_1(z) = \frac{1}{z}\rho_1^*(z) = \frac{1}{z}(1 + \bar{\delta}_1 z) = \bar{\delta}_1 + \frac{1}{z}$  (dado que  $\rho_1(z) = \rho_1(0) + z = \delta_1 + z$ ) y las relaciones

$$\begin{aligned}
 \phi_{2n}(z) &= \frac{1}{z^n}\rho_{2n}(z) = \frac{1}{z^n} [z\rho_{2n-1}(z) + \delta_{2n}\rho_{2n-1}^*(z)] \\
 &= \frac{1}{z^{n-1}}\rho_{2n-1}(z) + \delta_{2n}\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{1}{z^{n-1}} [z\rho_{2n-2}(z) + \delta_{2n-1}\rho_{2n-2}^*(z)] + \delta_{2n}\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{1}{z^{n-2}}\rho_{2n-2}(z) + \delta_{2n-1}\frac{1}{z^{n-1}}\rho_{2n-2}^*(z) + \delta_{2n}\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{1}{z^{n-2}}\rho_{2n-2}(z) + \delta_{2n-1}\frac{1}{z^{n-1}} [\rho_{2n-1}^*(z) - \bar{\delta}_{2n-1}z\rho_{2n-2}(z)] + \delta_{2n}\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{1}{z^{n-2}}\rho_{2n-2}(z) + \delta_{2n-1}\frac{1}{z^{n-1}}\rho_{2n-1}^*(z) - \delta_{2n-1}\bar{\delta}_{2n-1}\frac{1}{z^{n-2}}\rho_{2n-2}(z) + \delta_{2n}\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= (\delta_{2n} + \delta_{2n-1}z)\frac{1}{z^n}\rho_{2n-1}^*(z) + (1 - |\delta_{2n-1}|^2)\frac{1}{z^{n-2}}\rho_{2n-2}(z) \\
 &= (\delta_{2n} + \delta_{2n-1}z)\phi_{2n-1}(z) + (1 - |\delta_{2n-1}|^2)z\phi_{2n-2}(z)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

y

$$\begin{aligned}
 \phi_{2n+1}(z) &= \frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n+1}^*(z) = \frac{1}{z^{n+1}} [\bar{\delta}_{2n+1}z\rho_{2n}(z) + \rho_{2n}^*(z)] \\
 &= \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n}\rho_{2n}(z) + \frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n}^*(z) \\
 &= \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n}\rho_{2n}(z) + \frac{1}{z^{n+1}} (\delta_{2n}z\rho_{2n-1}(z) + \rho_{2n-1}^*(z)) \\
 &= \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n}\rho_{2n}(z) + \frac{\delta_{2n}}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}(z) + \frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n}\rho_{2n}(z) + \frac{\delta_{2n}}{z^{n+1}} (\rho_{2n}(z) - \delta_{2n}\rho_{2n-1}^*(z)) + \frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n}\rho_{2n}(z) + \frac{\delta_{2n}}{z^{n+1}}\rho_{2n}(z) - \delta_{2n}\bar{\delta}_{2n}\frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}^*(z) + \frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \left( \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n} + \frac{\delta_{2n}}{z} \right) \frac{1}{z^n}\rho_{2n}(z) + (1 - |\delta_{2n}|^2)\frac{1}{z^{n+1}}\rho_{2n-1}^*(z) \\
 &= \left( \frac{\bar{\delta}_{2n+1}}{z^n} + \frac{\delta_{2n}}{z} \right) \phi_{2n}(z) + (1 - |\delta_{2n}|^2)\frac{1}{z}\phi_{2n-1}(z).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Así pues, deducimos (3.11) de las expresiones (3.13) y (3.14).

□

El siguiente resultado prueba que esta ley de recurrencia a tres términos es realmente equivalente a la ley de recurrencia para los polinomios mónicos de Szegő.

**Teorema 3.2.5** *Las leyes de recurrencia (1.40) y (3.11)-(3.12) son equivalentes.*

*Demostración.-* Falta comprobar que de las relaciones (3.11)-(3.12) deducimos (1.40). En efecto, del Lema 3.2.2, de la relación (3.11) y tomando la operación sub-estrella se siguen para  $k \geq 1$  las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \rho_{2k}(z) &= (\delta_{2k} + \bar{\delta}_{2k-1}z)\rho_{2k-1}^*(z) + \eta_{2k-1}^2 z^2 \rho_{2k-2}(z) \\
 &= \delta_{2k}\rho_{2k-1}^*(z) + z [\delta_{2k-1}\rho_{2k-1}^*(z) + \eta_{2k-1}^2 z \rho_{2k-2}(z)] \\
 \rho_{2k-1}^*(z) &= (\bar{\delta}_{2k-1}z + \bar{\delta}_{2k-2})\rho_{2k-2}(z) + \eta_{2k-2}^2 \rho_{2k-3}^*(z) \\
 &= \bar{\delta}_{2k-1}z\rho_{2k-2}(z) + [\bar{\delta}_{2k-2}\rho_{2k-2}(z) + \eta_{2k-2}^2 \rho_{2k-3}^*(z)] \\
 \rho_{2k}^*(z) &= (\bar{\delta}_{2k}z + \bar{\delta}_{2k-1})\rho_{2k-1}(z) + \eta_{2k-1}^2 \rho_{2k-2}^*(z) \\
 &= \bar{\delta}_{2k}z\rho_{2k-1}(z) + [\bar{\delta}_{2k-1}\rho_{2k-1}(z) + \eta_{2k-1}^2 \rho_{2k-2}^*(z)] \\
 \rho_{2k-1}(z) &= (\delta_{2k-1} + \delta_{2k-2}z)\rho_{2k-2}^*(z) + \eta_{2k-2}^2 z^2 \rho_{2k-3}(z) \\
 &= \delta_{2k-1}\rho_{2k-2}^*(z) + z [\delta_{2k-2}\rho_{2k-2}^*(z) + \eta_{2k-2}^2 z \rho_{2k-3}(z)].
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Clearamente, la prueba quedará completa si de (3.15) deducimos

$$\begin{aligned}
 \rho_{2k-1}(z) &= \delta_{2k-1} \rho_{2k-1}^*(z) + \eta_{2k-1}^2 z \rho_{2k-2}(z) \\
 \rho_{2k-2}^*(z) &= \overline{\delta_{2k-2}} \rho_{2k-2}(z) + \eta_{2k-2}^2 \rho_{2k-3}^*(z) \\
 \rho_{2k-1}^*(z) &= \overline{\delta_{2k-1}} \rho_{2k-1}(z) + \eta_{2k-1}^2 \rho_{2k-2}^*(z) \\
 \rho_{2k-2}(z) &= \delta_{2k-2} \rho_{2k-2}^*(z) + \eta_{2k-2}^2 z \rho_{2k-3}(z).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Será suficiente comprobar que se cumple la primera de las relaciones de (3.16) dado que las pruebas para las relaciones restantes se deducen de manera similar. Hagamos

$$R_{2k-1}(z) = \delta_{2k-1} \rho_{2k-1}^*(z) + \eta_{2k-1}^2 z \rho_{2k-2}(z) \in \mathbb{P}_{2k-1}.$$

Entonces,  $R_{2k-1}(z) = \sum_{j=0}^{2k-1} \alpha_j \rho_j(z)$ . Por comparación en esta última expresión de los coeficientes del monomio  $z^{2k-1}$  se sigue que  $\alpha_{2k-1} = 1$ . Dado que

$$\alpha_j = \langle R_{2k-1}(z), \rho_j(z) \rangle_\omega = \delta_{2k-1} \langle \rho_{2k-1}^*(z), \rho_j(z) \rangle_\omega + \eta_{2k-1}^2 \langle z \rho_{2k-2}(z), \rho_j(z) \rangle_\omega$$

se sigue de las condiciones de ortogonalidad para los polinomios de Szegő que  $\alpha_j = 0$  para todo  $j = 1, \dots, 2k - 2$ . Por tanto,  $R_{2k-1}(z) = \rho_{2k-1}(z) + \alpha_0$ . Finalmente, comparando los coeficientes del monomio  $z^0 = 1$  se sigue que  $\alpha_0 = 0$ .

□

Obsérvese ahora que si los momentos trigonométricos  $\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\omega(\theta)$  son reales, entonces de (1.45) también lo serán los coeficientes de Verblunsky y la ley de recurrencia (3.11) resulta

$$\phi_n(z) = \left( \delta_n + \delta_{n-1} z^{(-1)^n} \right) \phi_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2 z^{(-1)^n} \phi_{n-2}(z) \quad , \quad n \geq 2. \tag{3.17}$$

Teniendo en cuenta ahora que de (1.31) y (1.38) se cumple la relación  $\|\rho_n(z)\|_\omega^2 = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \eta_n^2 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$  y haciendo uso de (3.8), deducimos fácilmente de (3.11) la siguiente ley de recurrencia para la correspondiente familia ortonormal.

**Teorema 3.2.6 (Ley de recurrencia a tres términos)** *La familia de polinomios de Laurent ortonormales  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  satisface la ley de recurrencia a tres términos*

$$\eta_n \chi_n(z) = \left( A_n + \overline{A_{n-1}} z^{(-1)^n} \right) \chi_{n-1}(z) + \eta_{n-1} z^{(-1)^n} \chi_{n-2}(z) \quad , \quad n \geq 2 \tag{3.18}$$

con

$$\chi_i(z) = \frac{\phi_i(z)}{\|\phi_i(z)\|_\omega} \quad i = 0, 1 \tag{3.19}$$

y donde  $\eta_n$  y  $A_n$  vienen dados por (1.32) y (3.12) respectivamente.

□

Hacemos notar ahora que en la sección quinta de este capítulo necesitaremos expresar para  $k \geq 1$  la relación (3.18) como

$$\eta_{2k}\varphi_{2k}(z) = (\delta_{2k} + \delta_{2k-1}z)\varphi_{2k-1}(z) + \eta_{2k-1}z\varphi_{2k-2}(z)$$

y

$$\eta_{2k+1}\varphi_{2k+1}(z) = (\overline{\delta_{2k+1}} + \overline{\delta_{2k}}\frac{1}{z})\varphi_{2k}(z) + \eta_{2k}\frac{1}{z}\varphi_{2k-1}(z)$$

o equivalentemente,

$$\eta_{2k+1}\chi_{2k}(z) = -\delta_{2k+1}\chi_{2k+1}(z) + \frac{1}{z}(\eta_{2k+2}\chi_{2k+2}(z) - \delta_{2k+2}\chi_{2k+1}(z)) \quad (3.20)$$

y

$$\eta_{2k}\chi_{2k-1}(z) = -\overline{\delta_{2k}}\chi_{2k}(z) + z(\eta_{2k+1}\chi_{2k+1}(z) - \overline{\delta_{2k+1}}\chi_{2k}(z)). \quad (3.21)$$

Como consecuencia del Lema 3.2.2, tomando operación sub-estrella en ambos lados de las igualdades (3.11)-(3.12) y (3.18)-(3.19) deducimos los dos siguientes resultados.

**Teorema 3.2.7 (Ley de recurrencia a tres términos)** *La familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales  $\{\tilde{\phi}_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  verifican*

$$\tilde{\phi}_n(z) = \left(\overline{A_n} + A_{n-1}z^{(-1)^{n+1}}\right)\tilde{\phi}_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2z^{(-1)^{n+1}}\tilde{\phi}_{n-2}(z) \quad , \quad n \geq 2 \quad (3.22)$$

con

$$\tilde{\phi}_0(z) \equiv 1 \quad , \quad \tilde{\phi}_1(z) = \delta_1 + z \quad (3.23)$$

y donde  $\eta_n$  y  $A_n$  vienen dados por (1.32) y (3.12) respectivamente. □

**Teorema 3.2.8 (Ley de recurrencia a tres términos)** *La familia de polinomios de Laurent ortonormales  $\{\tilde{\chi}_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  verifican*

$$\eta_n\tilde{\chi}_n(z) = \left(\overline{A_n} + A_{n-1}z^{(-1)^{n+1}}\right)\tilde{\chi}_{n-1}(z) + \eta_{n-1}z^{(-1)^{n+1}}\tilde{\chi}_{n-2}(z) \quad , \quad n \geq 2 \quad (3.24)$$

con

$$\tilde{\chi}_i(z) = \frac{\tilde{\phi}_i(z)}{\|\tilde{\phi}_i(z)\|_{\omega}} \quad i = 0, 1 \quad (3.25)$$

y donde  $\eta_n$  y  $A_n$  vienen dados por (1.32) y (3.12) respectivamente. □

Como ya hemos comentado, W.J. Thron consideró en [100] las familias  $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{\phi}_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  por separado y probó las relaciones (3.11)-(3.12) y (3.22)-(3.23) considerando dos ciertas fracciones continuas. Vemos pues de lo anterior cómo tomando la operación sub-estrella en ambos lados de la ley de recurrencia de una de tales familias, dado que esta operación es una involución, deducimos automáticamente la ley de recurrencia a tres términos para la otra familia.

Una vez estudiadas las leyes de recurrencia a tres términos anteriores, enunciamos la siguiente ley de recurrencia probada en [25] y que jugará un papel crucial en el próximo capítulo cuando consideremos la representación matricial del operador multiplicación en  $\Lambda$ .

**Proposición 3.2.9** *La familia  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora equilibrada  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  satisface la ley de recurrencia*

$$\begin{aligned} z\tilde{\chi}_0(z) &= -\delta_1\tilde{\chi}_0(z) + \eta_1\tilde{\chi}_1(z) \quad , \\ z \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{2n-1}(z) \\ \tilde{\chi}_{2n}(z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\eta_{2n-1}\delta_{2n} & -\overline{\delta_{2n-1}}\delta_{2n} \\ \eta_{2n-1}\eta_{2n} & \overline{\delta_{2n-1}}\eta_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{2n-2}(z) \\ \tilde{\chi}_{2n-1}(z) \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} -\eta_{2n}\delta_{2n+1} & \eta_{2n}\eta_{2n+1} \\ -\overline{\delta_{2n}}\delta_{2n+1} & \overline{\delta_{2n}}\eta_{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_{2n}(z) \\ \tilde{\chi}_{2n+1}(z) \end{pmatrix} \quad , \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

□

Nuestro siguiente propósito es establecer que esta nueva ley de recurrencia es realmente equivalente a las ya consideradas. Una vez hemos probado que la ley de recurrencia para los polinomios de Szegő (1.40) es equivalente a las dos dadas por (3.11)-(3.12) y (3.22)-(3.23), estableceremos ahora la equivalencia con las dadas en la Proposición 3.2.9. Esto será realizado probando sólo el caso  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ , dado que la prueba para el caso  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  se establece directamente del Lema 3.2.2 tomando conjugación sub-estrella.

**Teorema 3.2.10** *Las leyes de recurrencia dadas por (3.18)-(3.19) ó (3.24)-(3.25) y la dada en la Proposición 3.2.9 son equivalentes.*

*Demostración.-* Dado que la ley de recurrencia (3.24)-(3.25) es equivalente a (1.40) y las recurrencias dadas en la Proposición 3.2.9 fueron obtenidas de ésta, faltaría probar que (3.26) implica (3.24)-(3.25). Del Lema 3.2.1, y dado que estamos tomando la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ , se sigue que (3.26) es equivalente a las relaciones

$$\begin{aligned} z^2\varphi_{2n-1}(z) &= \frac{\eta_{2n}\eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) - \eta_{2n}\delta_{2n+1}\varphi_{2n}^*(z)}{-\overline{\delta_{2n-1}}\delta_{2n}z\varphi_{2n-1}(z) - \eta_{2n-1}\delta_{2n}z\varphi_{2n-2}^*(z)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} z\varphi_{2n}^*(z) &= \frac{\overline{\delta_{2n}}\eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) - \overline{\delta_{2n}}\delta_{2n+1}\varphi_{2n}^*(z)}{+\overline{\delta_{2n-1}}\eta_{2n}z\varphi_{2n-1}(z) + \eta_{2n-1}\eta_{2n}z\varphi_{2n-2}^*(z)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De nuevo, del Lema 3.2.1 tenemos que probar de (3.27) y (3.28) que se cumple

$$\eta_{2n}\varphi_{2n}^*(z) = (\overline{\delta_{2n}}z + \overline{\delta_{2n-1}})\varphi_{2n-1}(z) + \eta_{2n-1}\varphi_{2n-2}^*(z) \quad (3.29)$$

y

$$\eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) = (\delta_{2n+1} + \delta_{2n}z)\varphi_{2n}^*(z) + \eta_{2n}z^2\varphi_{2n-1}(z). \quad (3.30)$$

Por un lado, dado que  $\eta_{2n} \neq 0$  se sigue de (3.27) que

$$\begin{aligned} \eta_{2n}z^2\varphi_{2n-1}(z) &= (1 - |\delta_{2n}|^2)\eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) - (1 - |\delta_{2n}|^2)\delta_{2n+1}\varphi_{2n}^*(z) \\ &\quad - \eta_{2n}\delta_{2n}\overline{\delta_{2n-1}}z\varphi_{2n-1}(z) - \eta_{2n}\eta_{2n-1}\delta_{2n}z\varphi_{2n-2}^*(z) \\ &= \eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) - \delta_{2n+1}\varphi_{2n}^*(z) - \delta_{2n}[\overline{\delta_{2n}}\eta_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z) \\ &\quad - \overline{\delta_{2n}}\delta_{2n+1}\varphi_{2n}^*(z) + \eta_{2n}\delta_{2n-1}z\varphi_{2n-1}(z) + \eta_{2n}\eta_{2n-1}z\varphi_{2n-2}^*(z)] \end{aligned}$$

y ahora de (3.28) deducimos la relación (3.30). Por otro lado, de (3.28) y dado que  $\eta_{2n} \neq 0$  se sigue que

$$\begin{aligned} \eta_{2n} z \varphi_{2n}^*(z) &= \overline{\delta_{2n}} \eta_{2n} \eta_{2n+1} \varphi_{2n+1}(z) - \overline{\delta_{2n}} \delta_{2n+1} \eta_{2n} \varphi_{2n}^*(z) + \overline{\delta_{2n-1}} \eta_{2n}^2 z \varphi_{2n-1}(z) \\ &\quad + \eta_{2n}^2 \eta_{2n-1} z \varphi_{2n-2}^*(z) \\ &= \overline{\delta_{2n}} \eta_{2n} [\eta_{2n+1} \varphi_{2n+1} - \delta_{2n+1} \varphi_{2n}^*(z)] + z \times \\ &\quad \left[ \overline{\delta_{2n-1}} \varphi_{2n-1} - \overline{\delta_{2n-1}} |\delta_{2n}|^2 \varphi_{2n-1} + \eta_{2n-1} \varphi_{2n-2}^*(z) - \eta_{2n-1} |\delta_{2n}|^2 \varphi_{2n-2}^*(z) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, de (3.30),

$$\begin{aligned} \eta_{2n} \varphi_{2n}^*(z) &= \overline{\delta_{2n}} \eta_{2n} [\eta_{2n} z \varphi_{2n-1}(z) + \delta_{2n} \varphi_{2n}^*(z)] + \overline{\delta_{2n-1}} \varphi_{2n-1} - \overline{\delta_{2n-1}} |\delta_{2n}|^2 \varphi_{2n-1} \\ &\quad + \eta_{2n-1} \varphi_{2n-2}^*(z) - \eta_{2n-1} |\delta_{2n}|^2 \varphi_{2n-2}^*(z) \end{aligned}$$

la cual es equivalente a

$$\eta_{2n}^2 [\eta_{2n} \varphi_{2n}^*(z) - \overline{\delta_{2n}} z \varphi_{2n-1}(z) - \overline{\delta_{2n-1}} \varphi_{2n-1}(z) - \eta_{2n-1} \varphi_{2n-2}^*(z)] = 0.$$

De este modo se prueba (3.29) dado que de nuevo  $\eta_{2n} \neq 0$ . □

Para concluir esta sección vamos a establecer una conexión entre familias de polinomios de Laurent ortonormales y los sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas introducidos en el capítulo anterior. Como hemos visto, los polinomios trigonométricos (caso  $\gamma = 0$ ) dan lugar a sistemas de polinomios de Laurent con respecto al orden inducido por la sucesión generadora  $p(n) = \frac{n}{2}$  siendo  $n$  un número par, es decir,

$$\Lambda_{0,0}, \Lambda_{-1,1}, \Lambda_{-2,2}, \Lambda_{-3,3}, \Lambda_{-4,4}, \dots$$

Empecemos con el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata del Lema 3.2.1 y del Teorema 2.4.5:

**Teorema 3.2.11** *Sea  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y el orden inducido por la sucesión generadora  $p(n) = E[\frac{n}{2}]$ . Fijemos  $\gamma \in \{0, 1/2\}$  y consideremos la sucesión de números complejos  $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{T}$  tal que  $\omega_n^2 \delta_{2(n-\gamma)} \in \mathbb{R}$  para todo  $n \geq 1$ , siendo  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociada a la medida  $\omega$ . Sea*

$$\omega_n e^{-i\gamma\theta} \tilde{\chi}_{2n-1}(e^{i\theta}) = f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) + i g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta), \quad n \geq 1, \quad (3.31)$$

siendo  $f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta)$  reales. Entonces, tomando  $f_0^{(0)}(\theta) \equiv c \neq 0$  y  $g_0^{(0)}(\theta) \equiv 0$  se sigue que el sistema  $\{f_n^{(\gamma)}(\theta), g_n^{(\gamma)}(\theta)\}_{n=0}^\infty$  representa un sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas reales para la medida  $\omega$ . □

Vemos por tanto cómo la subsucesión impar de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $p(n) = E[\frac{n}{2}]$  dan lugar a sistemas bi-ortogonales de funciones trigonométricas. Conjugando la relación (3.31), y recordando que del Lema 3.2.2 se tiene  $\chi_{2n-1}(z) = \tilde{\chi}_{(2n-1)^*}(z)$  siendo  $\{\chi_{2n-1}\}_{n=0}^\infty$  la subsucesión impar de

polinomios de Laurent ortonormales asociada a la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ , obtendremos

$$\overline{\omega_n} e^{i\gamma\theta} \chi_{2n-1}(e^{i\theta}) = f_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta) - i g_{n-2\gamma}^{(\gamma)}(\theta), \quad n \geq 1.$$

Procediendo pues como en el Teorema 3.2.11 deducimos el mismo sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas suponiendo en este caso que  $\overline{\omega_n}^2 \delta_{2(n-\gamma)}$  sea un número real. Resultados similares a los anteriores podemos deducirlos a partir de la subsucesión de polinomios pares de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$ . Tomando

$$\omega_n e^{i\gamma\theta} \chi_{2n}(e^{i\theta}) = f_n^{(\gamma)}(\theta) + i g_n^{(\gamma)}(\theta), \quad n \geq 0,$$

con  $f_n^{(\gamma)}(\theta)$  y  $g_n^{(\gamma)}(\theta)$  reales y donde  $\chi_{2n}(z)$  es el  $(2n)$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal con respecto a  $\omega$  y a la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ , obtenemos un sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas suponiendo que  $\omega_n^2 \delta_{2(n+\gamma)}$  sea real. Conjugando finalmente tal identidad obtendremos

$$\overline{\omega_n} e^{-i\gamma\theta} \tilde{\chi}_{2n}(e^{i\theta}) = f_n^{(\gamma)}(\theta) - i g_n^{(\gamma)}(\theta), \quad n \geq 0,$$

es decir, el mismo sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas partiendo de la subsucesión par de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ , y donde debemos imponer en este caso que  $\overline{\omega_n}^2 \delta_{2(n+\gamma)}$  sea real.

### 3.3. El semieje real positivo: L-cuadratura Gaussiana

Como ya hemos comentado en la introducción de este capítulo, nuestro propósito es construir fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad que integren exactamente polinomios de Laurent con L-grado lo más grande posible. La motivación de esta sección es la contrapartida de lo que ocurre cuando la medida positiva de Borel tiene su soporte en un intervalo del semieje real positivo. Esta situación se ha considerado en los últimos años por diferentes autores y en esta sección simplemente mencionaremos aquellos resultados más relevantes que nos permitirán hacer una comparación con los correspondientes análogos en la próxima sección.

Previamente establezcamos que no existe una conexión entre las familias  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  como ocurre en la circunferencia unidad en el Lema 3.2.2 (véase [30], [48] y [88]), siendo ahora  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  las familias de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a los “órdenes”  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  y  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  respectivamente y una medida  $\sigma$  con soporte el semieje real positivo  $\mathbb{R}^+$ . En efecto, sea

$$\chi_n(x) = \frac{B_n(x)}{x^{p(n)}}, \quad n \geq 0, \quad B_n(x) \in \mathbb{P}_n,$$

entonces,  $B_n(x)$  satisface:

$$\int_{\mathbb{R}^+} x^j B_n(x) \frac{d\sigma(x)}{x^{p(n)+p(n-1)}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

esto es,  $B_n(x)$  coincide salvo factor multiplicativo con el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal con respecto a la medida variante  $d\sigma_n(x) = \frac{d\sigma(x)}{x^{p(n)+p(n-1)}}$ . Vemos pues que del Lema 3.2.1,

la situación en la circunferencia unidad es mucho más simplificada. Para otras elecciones de la sucesión generadora  $p(n)$  en el eje real véase [17] y [97].

Comencemos asumiendo que  $\sigma$  es una medida positiva de Borel con soporte en el intervalo  $(a, b)$  donde  $0 < a < b \leq \infty$ . Estamos interesados en la estimación de la integral

$$I_\sigma(f) = \int_a^b f(x) d\sigma(x) \tag{3.32}$$

por medio de una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j). \tag{3.33}$$

A tal efecto, debemos determinar los nodos (que supondremos distintos y localizados en  $(a, b)$ ) y los pesos imponiendo que, fijada una sucesión generadora  $p(n)$ ,

$$I_\sigma(R) = I_n(R) \tag{3.34}$$

para todo polinomio de Laurent  $R$  con L-grado lo mayor posible, es decir,  $R \in \mathcal{L}_N$  donde  $N = N(n)$  lo más grande posible. Con este fin, procedemos de manera similar al caso polinómico ordinario. Así, dado que  $\mathcal{L}_{n-1}$  es un espacio de Chebyshev de dimensión  $n$  en cualquier subintervalo de  $(a, b)$  de la forma anterior, dados  $n$  nodos distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $(a, b)$  podemos determinar los pesos  $A_1, \dots, A_n$  de manera que

$$I_\sigma(R) = I_n(R) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \quad , \quad \forall R \in \mathcal{L}_{n-1}. \tag{3.35}$$

Además, también se cumple que si  $L_{n-1}(f, \cdot)$  representa el único polinomio de Laurent en  $\mathcal{L}_{n-1}$  que interpola a la función  $f$  en los nodos  $\{x_j\}_{j=1}^n$ , entonces

$$I_n(f) = I_\sigma(L_{n-1}(f, \cdot)). \tag{3.36}$$

Por esta razón, denominaremos  $I_n(f)$  dada por (3.35) como *fórmula de tipo interpolatorio*.

Con el fin de incrementar el L-grado de exactitud tenemos el siguiente resultado, análogo al Corolario 1.2.7, al Teorema 1.3.13 y al Corolario 2.5.6. La demostración de éste es similar al caso polinómico ordinario (véase por ejemplo [79] con  $r = n - 1$ ) y también similar a la del Teorema 3.4.1 que probaremos en la próxima sección.

**Teorema 3.3.1** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos tal que  $x_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces,  $I_n(f) = I_\sigma(f)$  para todo  $f \in \mathcal{L}_{n+r}$  con  $r \geq 0$ , sí y sólo sí,*

1.  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio,

2.  $R_n(x) = \frac{Q_n(x)}{x^{p(n)}} = \frac{\prod_{j=1}^n (x - x_j)}{x^{p(n)}} \in \mathcal{L}_n$  es ortogonal a  $\mathcal{L}_r$ , es decir

$$\langle R_n(x), h(x) \rangle_\sigma = 0 \quad , \quad \forall h(x) \in \mathcal{L}_r. \tag{3.37}$$

□

Debemos tener en cuenta que como estamos trabajando con funciones reales no es necesario la conjugación compleja en el producto interior. En relación al entero  $r$  tendremos que  $0 \leq r \leq n-1$ , dado que es fácil comprobar que no existe una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos que sea exacta en  $\mathcal{L}_N$  con  $N \geq 2n$ . Por tanto, estamos interesados en construir una fórmula de cuadratura de la forma (3.33) que sea exacta en  $\mathcal{L}_{n+r}$  con  $0 \leq r \leq n-1$ . De (3.37) se cumple que

$$R_n(z) = \sum_{j=r+1}^n \alpha_j \chi_j(z), \tag{3.38}$$

siendo  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la correspondiente familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\sigma$  en  $(a, b)$ . Ahora nos surge la siguiente cuestión: ¿es posible encontrar los parámetros  $\alpha_j$  en (3.38) de manera que  $R_n(z)$  tenga exactamente  $n$  nodos distintos en  $(a, b)$ ? Podemos dar una respuesta positiva cuando se requiere el máximo dominio de exactitud, es decir,  $r = n-1$ . De hecho, se cumple (véase [32], [73] ó [75])

**Teorema 3.3.2** *Sea  $\chi_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal con respecto a la medida  $\sigma$  en  $(a, b)$ . Entonces,*

1.  $\chi_n(x)$  tiene exactamente  $n$  ceros distintos en  $(a, b)$ .
2. Los ceros de  $\chi_n(x)$  y  $\chi_{n+1}(x)$  se entrelazan.
3. Sean  $x_1, \dots, x_n$  los ceros de  $\chi_n(x)$ . Entonces existen pesos positivos  $A_1, \dots, A_n$  tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) = I_\sigma(f) = \int_a^b f(x) d\sigma(x) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{L}_{2n-1} \tag{3.39}$$

□

**Nota 3.3.3** *Las fórmulas de cuadratura dadas por (3.39) fueron introducidas inicialmente en [75] (véase también [76]). A partir de este artículo surgió una nueva área de investigación en Matemáticas dando lugar al problema fuerte de momentos y temas relacionados (fracciones continuas, aproximantes de Padé en dos puntos, ...) y donde aparecen los polinomios de Laurent ortogonales. Nos referiremos a tales cuadraturas como fórmulas L-Gaussianas, y han sido consideradas por diferentes autores en los últimos años (véase [16], [17] ó [32]). Con respecto a otros enfoques alternativos véase [84] y [96], así como [15], [65] y [96] para experimentos numéricos relacionados.*

En lo que resta de sección resumiremos los aspectos más relevantes relacionados con las fórmulas L-Gaussianas en conexión con polinomios de Laurent ortogonales, haciendo un especial énfasis en el paralelismo con las clásicas fórmulas Gaussianas y polinomios ortogonales ordinarios. Empezamos con la ley de recurrencia a tres términos (véase [96]):

**Teorema 3.3.4** *Sea el ordenamiento equilibrado inducido por  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  (y por tanto  $q(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ ) y  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de polinomios de Laurent ortogonales normalizados como sigue:  $R_n(z) = \frac{B_n(z)}{z^{p(n)}}$  donde  $B_n(z)$  es un polinomio mónico de grado  $n$ . Entonces,*

$$R_{n+1}(z) = (z - \beta_{n+1})z^{d(n)}R_n(z) - \alpha_{n+1}R_{n-1}(z) \quad , \quad n \geq 0 \tag{3.40}$$

con  $R_{-1}(z) \equiv 0$ ,  $R_0(z) \equiv 1$ ,

$$d(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$\alpha_1 = \mu_0, \quad \beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}, \quad n \geq 1.$$

Aquí,

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\sigma(x), \quad \rho_n = \langle R_n, t^{p(n)} \rangle_\sigma, \quad \sigma_n = \langle R_n, t^{-(q(n)+1)} \rangle_\sigma.$$

Además, ambos  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  son positivos para  $n \geq 1$ . □

En [32] se demuestra un teorema de tipo Favard para la sucesión  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ . En relación con los pesos  $A_1, \dots, A_n$  en la fórmula L-Gaussiana con  $n$  nodos se obtienen resultados similares al caso polinómico. Dado que  $\chi_n \in \mathcal{L}_n = \Lambda_{-p(n), q(n)}$  y tiene  $n$  ceros distintos en  $(0, \infty)$ , podemos escribir  $\chi_n(x) = v_n x^{-p(n)} + \dots + u_n x^{q(n)}$  (con  $u_n v_n \neq 0$ ). También tomaremos las condiciones de normalización  $u_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ . Necesitamos previamente la siguiente fórmula de Christoffel-Darboux (véase [88]):

**Teorema 3.3.5 (Christoffel-Darboux)** *Sea  $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\sigma$  en  $(a, b)$  y al ordenamiento equilibrado  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ . Entonces, haciendo  $\chi_n(x) = v_n x^{-p(n)} + \dots + u_n x^{q(n)}$  con  $u_n v_n \neq 0$  para  $n \geq 0$  y  $\lambda(n) = (-1)^n$ , se cumple:*

$$\sum_{i=0}^n \chi_i(x) \chi_i(y) = \frac{\lambda(n) v_n}{u_{n+1}} \left[ \frac{(xy)^{1/2} \left( \frac{x}{y} \right)^{\lambda(n)} \chi_{n+1}(x) \chi_n(y) - \left( \frac{y}{x} \right)^{\lambda(n)} \chi_n(x) \chi_{n+1}(y)}{x - y} \right] \quad (3.41)$$

□

Tomando ahora  $l_j \in \mathcal{L}_{n-1}$  tal que  $l_j(x_k) = \delta_{j,k}$ , siendo  $\delta_{j,k}$ , como es usual, la función delta de Kronecker (1.2) y  $\{x_i\}_{i=1}^n$  los ceros del  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal  $\chi_n(x)$ . Claramente,  $l_j^2 \in \mathcal{L}_{2n-1}$ , y por tanto  $A_j = I_\sigma(l_j^2) > 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Por otro lado, de (3.41) con  $x = x_j$  y haciendo  $y$  tender a  $x_j$ , podemos probar el siguiente resultado (véase [21] para los detalles) análogo a las expresiones (1.19), (1.68) y (2.83):

**Teorema 3.3.6** *Sea  $\chi_n(x)$  el  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal con respecto a la medida  $\sigma$ . Entonces, los pesos  $\{A_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por*

$$A_j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \chi_i^2(x_j)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

□

Como conclusión podemos decir que la fórmula de cuadratura con  $n$  nodos L-Gaussiana (3.33) queda completamente caracterizada en términos de los polinomios de Laurent ortonormales  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^n$  que podemos computar recursivamente de la relación (3.40).

### 3.4. La circunferencia unidad: fórmulas de Szegő

En esta sección consideraremos una medida positiva de Borel  $\omega$  en  $\mathbb{T}$ , y dado que trabajaremos ahora con funciones evaluadas complejas, requeriremos, a diferencia de la sección anterior, conjugación compleja en el producto interior (1.27) inducido por  $\omega$ . Como hemos ya mencionado, nuestro interés es la estimación de la integral

$$I_\omega(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\omega(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) d\omega(\theta) \quad (3.43)$$

por una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos con nodos en  $\mathbb{T}$  de la forma

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) \quad , \quad z_j \neq z_k \quad (j \neq k) \quad , \quad z_j \in \mathbb{T} \quad , \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.44)$$

Fijada una sucesión generadora  $p(n)$  y partiendo de  $n$  nodos distintos  $z_1, \dots, z_n$  en  $\mathbb{T}$ , y dado que  $\mathcal{L}_{n-1}$  es un espacio de Chebyshev de dimensión  $n$  en  $\mathbb{T}$ , podemos determinar pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de manera que

$$I_\omega(f) = I_n(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{L}_{n-1}. \quad (3.45)$$

Aquí también se cumple que  $I_n(f)$  caracterizada por (3.45) pueda representarse como

$$I_n(f) = I_\omega(R_{n-1}(f, \cdot)) \quad (3.46)$$

siendo  $R_{n-1}(f, \cdot)$  el polinomio de Laurent en  $\mathcal{L}_{n-1}$  que interpola a  $f$  en los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$ . Sin embargo, la primera diferencia con respecto a lo que ocurre cuando la medida tiene su soporte en el semieje real positivo aparece cuando requerimos seleccionar apropiados nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  con el fin de incrementar la dimensión del subespacio de polinomios de Laurent donde la fórmula de cuadratura es exacta. Debido al producto interior (1.27) necesitamos considerar los siguientes subespacios para  $r \geq 0$ :

$$\mathcal{L}_{r*} = \{f \in \Lambda \quad , \quad f_* \in \mathcal{L}_r\} = \Lambda_{-q(r), p(r)}.$$

Bajo tales condiciones aparece de manera inmediata la ortogonalidad, como establece el siguiente resultado (compárese con el Teorema 3.3.1).

**Teorema 3.4.1** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos tal que  $z_j \neq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Entonces,  $I_n(f)$  es exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$ , con  $r \geq 0$ , sí y sólo sí,*

1.  $I_n(f)$  es exacta en  $\mathcal{L}_{n-1}$ .
2.  $R_n$  es ortogonal a  $\mathcal{L}_r$ , es decir

$$\langle R_n(z), g(z) \rangle_\omega = 0 \quad , \quad \forall g \in \mathcal{L}_r, \quad (3.47)$$

$$\text{donde } R_n(z) = \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)}} = \frac{\prod_{j=1}^n (z - z_j)}{z^{p(n)}} \in \mathcal{L}_n.$$

*Demostración.*- “ $\implies$ ” 1.- Trivial. 2.- Recordemos que  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*} = \Lambda_{-(p(n)+q(r)), (q(n)+p(r))}$  y  $\mathcal{L}_r = \Lambda_{-p(r), q(r)}$ . Entonces,  $\langle R_n(z), g(z) \rangle_\omega = 0$  para todo  $g(z) \in \mathcal{L}_r$  es equivalente a  $\langle R_n(z), z^j \rangle_\omega = 0$  para todo  $-p(r) \leq j \leq q(r)$ . Ahora bien,

$$\langle R_n(z), z^j \rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} R_n(z) z^{-j} d\omega(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)+j}} d\omega(\theta).$$

Para  $j = q(r)$ , y dado que  $Q_n(z)$  tiene grado exacto  $n$ , vemos que

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)+q(r)}} &\in \Lambda_{-(p(n)+q(r)), (n-p(n)-q(r))} = \Lambda_{-(p(n)+q(r)), (q(n)-q(r))} \\ &\subset \Lambda_{-(p(n)+q(r)), (q(n)+q(r))} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para  $j = -p(r)$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)-p(r)}} &\in \Lambda_{-(p(n)-p(r)), (n-p(n)-p(r))} = \Lambda_{-(p(n)-p(r)), (q(n)+p(r))} \\ &\subset \Lambda_{-(p(n)+q(r)), (q(n)+p(r))} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}. \end{aligned}$$

Así pues, para  $-p(r) \leq j \leq q(r)$  se tiene que  $R_n(z)z^{-j} \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$ , lo que nos permite escribir

$$\langle R_n(z), z^j \rangle_\omega = I_\omega (R_n(z)z^{-j}) = I_n (R_n(z)z^{-j}) = 0,$$

dado que  $R_n(z_j) = 0$ .

“ $\impliedby$ ” Sean  $z_1, \dots, z_n$  los ceros de  $R_n(z) \in \mathcal{L}_n$  de manera que se cumpla (3.47). Entonces, podemos determinar una fórmula de cuadratura  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  basada en estos nodos que sea exacta en  $\mathcal{L}_{n-1}$ . Haciendo  $L^{(j)}(z) \in \mathcal{L}_{n-1}$  tal que  $L^{(j)}(z_k) = \delta_{jk}$  (función delta de Kronecker), entonces  $\lambda_j = I_\sigma(L^{(j)})$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . Tomemos  $L(z) \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$  y definamos  $A(z) = L(z) - \sum_{j=1}^n L(z_j)L^{(j)}(z)$ . Entonces,  $A \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$  y  $A(z_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ , lo que nos permite escribir

$$A(z) = \frac{Q_n(z)S(z)}{z^{p(n)+q(r)}}, \quad S(z) \in \mathbb{P}_r.$$

Obsérvese que  $A(z) = R_n(z)H(z)$  con  $H(z) = \frac{S(z)}{z^{q(r)}}$ . Por tanto, haciendo  $T(z) = H_*(z) \in \mathcal{L}_r$  tenemos que

$$I_\omega(A(z)) = I_\omega(R_n(z)T_*(z)) = \langle R_n(z), T(z) \rangle_\omega = 0,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} I_\omega(L(z)) &= I_\omega \left( A(z) + \sum_{j=1}^n L(z_j)L^{(j)}(z) \right) \\ I_\omega(A(z)) + I_\omega \left( \sum_{j=1}^n L(z_j)L^{(j)}(z) \right) &= \sum_{j=1}^n I_\omega(L^{(j)}(z))L(z_j) = I_n(L). \end{aligned}$$

□

**Nota 3.4.2** En el Teorema 3.4.1, debemos tomar  $r$  verificando  $0 \leq r \leq n-1$ . En efecto, asumamos que  $r \geq n$ , es decir,  $r = n+k$  con  $k \geq 0$ . Entonces,  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*} = \Lambda_{-(n+q(k)), (n+p(k))}$  dado que para  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  y  $q(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  se cumple que  $p(r+s) = p(r) + p(s)$  y  $q(r+s) = q(r) + q(s)$ . Así, si  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ , entonces

$$|Q_n(z)|^2 = Q_n(z)\overline{Q_n(z)} \in \Lambda_{-n,n} \subset \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*} \quad (z = e^{i\theta}),$$

lo cual implica la contradicción  $0 < \int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(z)|^2 d\omega(\theta)$  y  $I_n(|Q_n(z)|^2) = 0$ .

Veamos a continuación lo que ocurre con el máximo dominio de exactitud posible, es decir, cuando  $r = n - 1$ . A diferencia de lo que ocurría en la sección anterior, tenemos el siguiente resultado negativo.

**Teorema 3.4.3** *No existe una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos en  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-1)*}$ .*

*Demostración.*- Supongamos que existe tal fórmula:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\sigma(f),$$

donde  $|z_i| = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Definamos  $R_n(z) = z^{-p(n)} \prod_{i=1}^n (z - z_i) \in \mathcal{L}_n$ . Entonces, del Teorema 3.4.1,  $R_n \perp \mathcal{L}_{n-1}$ . Tenemos pues que si  $\{\psi_k(z)\}_{k \geq 0}$  es una sucesión de polinomios de Laurent ortogonal, entonces  $R_n(z) = \lambda_n \psi_n(z)$  con  $\lambda_n \neq 0$ , y aparece por tanto una contradicción dado que los nodos  $\{z_i\}_{i=1}^n$  son los ceros de  $\psi_n(z)$ , que no pueden estar localizados en  $\mathbb{T}$  por el Corolario 3.2.3.

□

El siguiente paso será considerar el caso  $r = n - 2$ . Más precisamente: ¿será posible construir una fórmula de cuadratura con nodos distintos  $\{z_i\}_{i=1}^n$  sobre  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}$ ? Del Teorema 3.4.1, si  $R_n(z) = z^{-p(n)} \prod_{i=1}^n (z - z_i)$ , entonces  $R_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-2}$ . Por tanto,

$$R_n(z) = \alpha \psi_n(z) + \beta \psi_{n-1}(z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \tag{3.48}$$

siendo  $\{\psi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  una sucesión de polinomios de Laurent ortogonales. Así, de (3.48) podemos reformular la pregunta anterior como sigue: ¿será posible encontrar  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.48) de manera que  $R_n(z)$  tenga sus ceros sobre  $\mathbb{T}$ ?

**Teorema 3.4.4** *Podemos elegir convenientemente dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.48) de manera que  $R_n(z) = \alpha \psi_n(z) + \beta \psi_{n-1}(z)$  tenga exactamente  $n$  ceros distintos en  $\mathbb{T}$ .*

*Demostración.*- Haciendo  $R_n(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}}$ , siendo  $N_n(z)$  un polinomio de grado máximo  $n$  dependiente de  $\alpha$  y  $\beta$ , entonces tales parámetros debemos elegirlos de manera que  $N_n(z)$  satisfaga lo siguiente:

1.  $N_n(z)$  tiene grado exacto  $n$ .
2.  $N_n^*(z) = \lambda_n N_n(z)$  con  $\lambda_n \neq 0$ .
3.  $\langle N_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ ,  $\langle N_n(z), 1 \rangle_\omega \neq 0$ ,  $\langle N_n(z), z^n \rangle_\omega \neq 0$ .

La demostración se sigue ahora del Teorema 1.3.4.

□

Vemos pues cómo surgen los polinomios para-ortogonales partiendo de familias de polinomios de Laurent ortogonales. Como consecuencia de los Teoremas 3.4.1 y 3.4.4 se cumple ahora lo siguiente:

**Teorema 3.4.5** Sean  $\{z_i\}_{i=1}^n$  los  $n$  ceros distintos de  $R_n(z) = \alpha\psi_n(z) + \beta\psi_{n-1}(z)$  dado por el Teorema 3.4.4. Entonces, existen números positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\sigma(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}.$$

*Demostración.*- Sólomente falta probar que los pesos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  son positivos. Para  $1 \leq j \leq n$  sea  $L_j(z) \in \mathcal{L}_{(n-1)}$  tal que  $L_j(z_k) = \delta_{j,k}$  (función delta de Kronecker) con  $1 \leq j, k \leq n$ . Entonces, para  $z \in \mathbb{T}$ ,  $|L_j(z)|^2 \in \mathcal{L}_{(n-1)} \mathcal{L}_{(n-1)*} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}$ , como puede fácilmente comprobarse. Se concluye pues la demostración dado que

$$0 < I_\omega(|L_j|^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |L_j(z_k)|^2 = \lambda_j \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

□

De los Teoremas 3.4.1 y 3.4.5 vemos que las fórmulas de cuadratura con nodos en  $\mathbb{T}$  que son exactas en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}$  quedan esencialmente caracterizadas por polinomios de Laurent de la forma

$$R_n(z) = \alpha\phi_n(z) + \beta\phi_{n-1}(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}} \tag{3.49}$$

y cuyo numerador podemos escribir del Lema 3.2.1 y del Teorema 1.3.3 como

$$N_n(z) = \lambda_n [\rho_n(z) + \tau_n \rho_n^*(z)] \quad , \quad \lambda_n \neq 0 \quad , \quad |\tau_n| = 1. \tag{3.50}$$

Por analogía con la situación polinómica ordinaria denominaremos a éstos *polinomios de Laurent para-ortogonales*. Además, como tenemos en este caso que

$$\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-(n-1), (n-1)} \quad ,$$

vemos que recuperamos de este modo las fórmulas de Szegő partiendo del contexto de los polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad.

El siguiente resultado es una expresión alternativa para el cómputo de los pesos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  de las fórmulas de Szegő en términos de polinomios de Laurent ortonormales, (compárese con el Teorema 3.3.6). La demostración es una consecuencia directa del Teorema 1.3.14 y del Lema 3.2.1.

**Teorema 3.4.6** Sea  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  la sucesión de polinomios de Laurent ortonormales en  $\mathbb{T}$  e  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f)$  para todo  $f \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}$ . Entonces,

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\chi_k(z_j)|^2} \quad , \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.51}$$

□

**Nota 3.4.7** Observamos que al igual que en el caso polinómico ordinario, y en contra de lo que sucede cuando la medida tiene su soporte en el semieje real positivo, los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  en la fórmula de cuadratura no son los ceros de  $\chi_n(z)$ .

**Ejemplo 3.4.8** Consideremos la medida de Lebesgue  $d\omega(\theta) \equiv d\theta$ , de modo que los coeficientes de Verblunsky vienen dados por  $\delta_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ . De la ley de recurrencia establecida en el Teorema 3.2.4 deducimos pues que

$$\phi_n(z) = z^{(-1)^n} \phi_{n-2}(z) \quad , \quad \phi_0(z) \equiv 1 \quad , \quad \phi_1(z) \equiv \frac{1}{z}.$$

Entonces, para todo  $n \geq 0$  tendremos que  $\phi_{2n}(z) = z^n$  y  $\phi_{2n+1}(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$ , y dado que

$$\langle \phi_k(z), \phi_k(z) \rangle_\omega = \|\phi_k(z)\|_\omega^2 = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi \quad , \quad k \geq 0,$$

la sucesión ortonormal  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  vendrá dada por

$$\chi_{2n}(z) = \frac{z^n}{\sqrt{2\pi}} \quad , \quad \chi_{2n+1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z^{n+1}} \quad , \quad n \geq 0. \quad (3.52)$$

Así, de (3.49) distinguimos los dos siguientes casos:

1. Si  $n$  es par:

$$R_n(z) = \alpha\phi_n(z) + \beta\phi_{n-1}(z) = \frac{\alpha z^n + \beta}{z^{n/2}} = 0 \iff \alpha z^n + \beta = 0 \quad , \quad \alpha \neq 0 \quad , \quad \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = 1.$$

2. Si  $n$  es impar:

$$R_n(z) = \alpha\phi_n(z) + \beta\phi_{n-1}(z) = \frac{\beta z^n + \alpha}{z^{n+1}} = 0 \iff \beta z^n + \alpha = 0 \quad , \quad \beta \neq 0 \quad , \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = 1.$$

Tal y como se había establecido anteriormente, los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  de cualquier fórmula de Szegő con  $n$  nodos para la medida de Lebesgue son las raíces de  $z^n + \tau = 0$ , con  $|\tau| = 1$  y de (3.51), los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  vendrán dados por:

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\chi_k(z_j)|^2} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{z_j^k}{\sqrt{2\pi}} \right|^2} = \frac{2\pi}{n} \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

(compárese con el procedimiento de la expresión (1.77)).

Para finalizar esta sección particularizamos  $\tau_n = \pm 1$  en la relación (3.50) y nos concentramos, como hicimos en el capítulo primero, en la computación de la fórmula de Szegő con  $n$  nodos con respecto a la medida  $\omega$  en  $\mathbb{T}$ . Nuestro propósito ahora será establecer, en este nuevo contexto, una conexión con el algoritmo *split Levinson*.

Con tal propósito recordemos brevemente, por un lado, que el *algoritmo de Levinson* introducido en [83] computa, a partir de la familia de momentos trigonométricos respecto a la medida  $\omega$ , la familia de polinomios (mónicos) de Szegő, basándose en la ley de recurrencia (1.40) que éstos satisfacen. Tales polinomios son lo que esencialmente necesitamos computar para construir la deseada fórmula de cuadratura, y salvo para algunas medidas particulares, no son en general conocidos explícitamente. Por otro lado, recordemos que si la familia de momentos trigonométricos es real, algo que es muy común y que consideraremos en lo que resta de sección, se probó en [44] que el algoritmo de Levinson era

redundante en el sentido de que emplea más operaciones de las necesarias. Con el fin de solucionar este inconveniente se estableció el algoritmo *split Levinson* en sus dos versiones, simétrica y antisimétrica, reduciendo aproximadamente el número de operaciones a la mitad y en el que se computan ciertos polinomios que probamos en el Teorema 1.4.6 que eran para-ortogonales.

A continuación veremos cómo los polinomios computados por el algoritmo *split Levinson* aparecen en el contexto de la construcción de la  $n$ -ésima fórmula de cuadratura de Szegő. Dado que estamos considerando momentos trigonométricos reales, parece natural que consideremos polinomios (cuyos ceros nos proporcionen los nodos requeridos) que tengan coeficientes reales. En otras palabras, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en (3.49)-(3.50) debemos elegirlos de manera que

$$R_n(z) = \alpha\phi_n(z) + \beta\phi_{n-1}(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}} = \frac{\lambda_n [\rho_n(z) + \tau_n\rho_n^*(z)]}{z^{p(n)}}$$

donde  $\lambda_n \neq 0$ ,  $\tau_n \in \mathbb{R}$  y  $|\tau_n| = 1$ .

Hagamos primero  $\tau_n = 1$ , por lo que de (1.40) se sigue (obsérvese que de (1.45),  $\delta_n \in \mathbb{R}$ )

$$N_n(z) = \lambda_n(1 + \delta_n) [\rho_{n-1}^*(z) + z\rho_{n-1}(z)].$$

Tomando pues  $\lambda_n = \frac{1}{1+\delta_n}$  tendremos

$$N_n(z) = \rho_{n-1}^*(z) + z\rho_{n-1}(z) = p_n(z).$$

Del primer capítulo vemos que el polinomio  $p_n(z)$  es el *primer polinomio predictor singular*, computado en la versión “simétrica” del algoritmo, y en el que interpretamos que en (1.40) forzamos a que  $\delta_n$  tome el valor 1. Recordemos el procedimiento en este caso: haciendo  $p_n(z) = \sum_{j=0}^n p_{n,j}z^j$  probamos que la familia  $\{p_n(z)\}$  satisface la ley de recurrencia a tres términos

$$p_{n+1}(z) - (1+z)p_n(z) + \alpha_n zp_{n-1}(z) = 0, \quad n \geq 1 \tag{3.53}$$

con las condiciones iniciales  $p_0(z) \equiv 2$ ,  $p_1(z) = 1+z$  y donde  $\alpha_n = \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}$  con  $\tau_n = \sum_{i=0}^n \mu_i p_{n,i}$  para  $n \geq 1$  y  $\tau_0 = \mu_0$ .

En un segundo caso, haciendo  $\tau_n = -1$  resulta de nuevo de (1.40) que

$$N_n(z) = \lambda_n(\delta_n - 1) [\rho_{n-1}^*(z) - z\rho_{n-1}(z)],$$

y tomando  $\lambda_n = \frac{1}{\delta_n - 1}$  podemos escribir para  $n \geq 1$ ,

$$N_n(z) = \rho_{n-1}^*(z) - z\rho_{n-1}(z) = \tilde{p}_n(z).$$

El polinomio,  $\tilde{p}_n(z)$  es en este caso el *segundo polinomio predictor singular*, computado en la versión “antisimétrica” del algoritmo, y en el que interpretamos que en (1.40) forzamos a que  $\delta_n$  tome ahora el valor -1. Recordamos también el procedimiento en este caso: definiendo  $\tilde{p}_0(z) \equiv 1$ , la familia  $\{\tilde{p}_n(z)\}_{n=1}^\infty$  viene dada por  $\tilde{p}_1(z) = 1-z$ ,  $\tilde{p}_2(z) = 1-z^2$  y para  $n \geq 2$  se cumple la ley de recurrencia a tres términos

$$\tilde{p}_{n+1}(z) - (1+z)\tilde{p}_n(z) + \tilde{\alpha}_n z\tilde{p}_{n-1}(z) = 0 \tag{3.54}$$

donde  $\tilde{\alpha}_n = \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\tau}_{n-1}}$  con  $\tilde{\tau}_n = \sum_{i=0}^n \mu_i \tilde{p}_{n,i}$  y  $\tilde{p}_n(z) = \sum_{j=0}^n \tilde{p}_{n,j}z^j$ .

**Ejemplo 3.4.9** Para ilustrar las relaciones (3.53) y (3.54), consideremos la medida de Lebesgue  $d\omega(\theta) = d\theta$ . Los momentos trigonométricos vienen dados por

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} d\theta = 0 \quad , \quad k \geq 1 \quad , \quad \mu_0 = 2\pi.$$

De (3.53) puede probarse fácilmente que  $p_k(0) = p_{k,0} = 1$  para  $k \geq 1$  lo que implica  $\tau_k = \mu_0$  para  $k \geq 0$  y por tanto  $\alpha_k = 1$  para  $k \geq 1$ . Entonces, (3.53) se convierte en

$$p_{n+1}(z) - (1+z)p_n(z) + zp_{n-1}(z) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{3.55}$$

con  $p_0(z) \equiv 2$  y  $p_1(z) \equiv 1$ . Dado que (3.55) es una ecuación en diferencias finitas de segundo orden con coeficientes constantes, escribimos

$$p_n(z) = C_1 + C_2 z^n \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

De las condiciones iniciales deducimos que  $C_1 = C_2 = 1$  por lo que obtenemos una expresión explícita para el polinomio  $p_n(z)$ :

$$p_n(z) = z^n + 1 \quad , \quad n \geq 0.$$

Análogamente para la familia  $\{\tilde{p}_n(z)\}$  tenemos que

$$\tilde{p}_{n+1}(z) - (1+z)\tilde{p}_n(z) + z\tilde{p}_{n-1}(z) = 0 \quad , \quad n \geq 2 \tag{3.56}$$

con  $\tilde{p}_1(z) = 1 - z$  y  $\tilde{p}_2(z) = 1 - z^2$ . Así, para  $n \geq 2$  tenemos

$$\tilde{p}_n(z) = 1 - z^n$$

la cual también se cumple claramente cuando  $n = 1$ .

Comentemos que al trabajar con una medida arbitraria  $\omega$  no podemos resolver en general las ecuaciones (3.55) ó (3.56) y necesitamos computar recursivamente los polinomios  $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  ó  $\{\tilde{p}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  (para los detalles en cuanto a la estabilidad del método, véase [44]).

Para concluir esta sección y completar así nuestro propósito, reescribiremos las familias  $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{p}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  en términos de los polinomios de Laurent ortogonales mónicos  $\phi_n(z)$  y  $\phi_{n-1}(z)$ .

**Teorema 3.4.10** Sea  $\omega$  una medida positiva de Borel en  $\mathbb{T}$  con momentos trigonométricos reales y  $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  la sucesión de polinomios de Laurent mónicos ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y al ordenamiento equilibrado  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ . Sean  $p_n(z)$  y  $\tilde{p}_n(z)$  el primer y segundo polinomio predictor singular de grado  $n$  respectivamente. Entonces,

1.  $p_n(z) = z^{E \left[ \frac{n+1}{2} \right]} [\phi_n(z) + (1 - \delta_n)\phi_{n-1}(z)]$
2.  $\tilde{p}_n(z) = z^{E \left[ \frac{n+1}{2} \right]} (-1)^{n+1} [\phi_n(z) - (1 + \delta_n)\phi_{n-1}(z)]$

*Demostración.*- Recordemos que  $\phi_{2n}(z) = \frac{1}{z^n} \rho_{2n}(z)$  y  $\phi_{2n+1}(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \rho_{2n+1}^*(z)$ . Ahora, para  $\alpha$  y  $\beta$  números complejos, consideremos

$$R_n(z) = \alpha \phi_n(z) + \beta \overline{\phi_{n-1}(z)}.$$

Para  $n = 2m$  se sigue que

$$R_{2m}(z) = \frac{\alpha \rho_{2m}(z) + \beta \rho_{2m-1}^*(z)}{z^m}$$

mientras que para  $n = 2m + 1$ ,

$$R_{2m+1}(z) = \frac{\alpha \rho_{2m+1}^*(z) + \beta z \rho_{2m}(z)}{z^{m+1}}.$$

Haciendo ahora uso de (1.40) tenemos

$$R_{2m}(z) = \frac{\alpha z \rho_{2m-1}(z) + (\alpha \delta_{2m} + \beta) \rho_{2m-1}^*(z)}{z^m}.$$

Por tanto, tomando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1 - \delta_{2m}$ , se sigue que

$$R_{2m}(z) = \frac{p_{2m}(z)}{z^m}$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} p_{2m}(z) &= z^m R_{2m}(z) = z^m [\alpha \phi_{2m}(z) + \beta \overline{\phi_{2m-1}(z)}] \\ &= z^m [\phi_{2m}(z) + (1 - \delta_{2m}) \overline{\phi_{2m-1}(z)}], \quad m \geq 1. \end{aligned} \tag{3.57}$$

De manera similar, para  $n = 2m + 1$  tomando  $\alpha = 1$  y  $\beta = 1 - \delta_{2m+1}$  podemos escribir

$$p_{2m+1}(z) = z^{m+1} [\phi_{2m+1}(z) + (1 - \delta_{2m+1}) \overline{\phi_{2m}(z)}]. \tag{3.58}$$

Así, de (3.57) y (3.58) se concluye la demostración de la primera expresión. La prueba de la segunda se deduce de manera similar.

□

### 3.5. Fórmula de Christoffel-Darboux y teorema de Favard

En la primera parte de esta sección daremos una expresión simple de la función núcleo reproductor en  $\mathcal{L}_n$  ( $n \geq 0$ ), similar a la fórmula de Christoffel-Darboux para el caso polinómico ordinario (Teorema 1.3.9, véase también [57]), es decir, cuando  $p(n) = 0$  para todo  $n \geq 0$ . De (1.7) tenemos en este caso que la función núcleo reproductor en  $\mathcal{L}_n$  viene dada por

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \chi_k(z) \overline{\chi_k(\xi)}, \tag{3.59}$$

la cual toma su nombre dado que cumple la propiedad

$$L(z) = \langle L(\xi), \mathcal{P}_n(\xi, z) \rangle_\omega \quad \forall L(z) \in \mathcal{L}_n. \tag{3.60}$$

**Teorema 3.5.1 (Christoffel-Darboux)** Si  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  denota la familia de polinomios de Laurent ortonormales respecto a la medida  $\omega$  y al ordenamiento equilibrado inducido por la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ ,  $y z, \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \eta_{n+1}(-z\bar{\xi})^{d(n)} \times \frac{\left( \eta_{n+1} \overline{\chi_n(\xi)} + A_{n+1} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_n(z) + \left( \overline{A_{n+1} \chi_n(\xi)} - \eta_{n+1} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_{n+1}(z)}{1 - z\bar{\xi}} \quad (3.61)$$

donde

$$d(n) = \frac{(-1)^n + 1}{2}, \quad A_n = \begin{cases} \delta_n & \text{si } n \text{ es par} \\ \delta_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, \quad (3.62)$$

siendo  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la medida  $\omega$  y  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$  dados por (1.32).

*Demostración.*- Recordemos que  $\mathcal{L}_n = \text{span} \{z^j : -p(n) \leq j \leq q(n)\} = \Lambda_{-p(n), q(n)}$ , siendo  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ ,  $q(n) = n - p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  y la propiedad fundamental reproductora

$$\begin{aligned} \langle R(z), \mathcal{P}_n(z, \xi) \rangle_{\omega} &= \int_{\mathbb{T}} R(z) \overline{\mathcal{P}_n(z, \xi)} d\omega(z) = \int_{\mathbb{T}} R(z) \sum_{k=0}^n \overline{\chi_k(z)} \chi_k(\xi) d\omega(z) = \\ &= \int_{\mathbb{T}} R(z) \mathcal{P}_n(\xi, z) d\omega(z) = R(\xi), \quad \forall R \in \mathcal{L}_n. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Distinguimos dos situaciones:

- Caso  $n = 2k$ . Primero observamos que

$$\mathcal{L}_n = \Lambda_{-k, k}, \quad \mathcal{L}_{n-1} = \Lambda_{-k, k-1}, \quad \mathcal{L}_{n+1} = \Lambda_{-(k+1), k}.$$

Si tomamos  $M(t) \in \mathcal{L}_{n-1}$  entonces  $(\xi - t)M(t) \in \Lambda_{-k, k} = \mathcal{L}_{2k} = \mathcal{L}_n$ . Haciendo  $R(t) = (\xi - t)M(t) \in \mathcal{L}_n$  entonces  $\int_{\mathbb{T}} R(z) \mathcal{P}_n(\zeta, z) d\omega(z) = R(\zeta)$  y cuando  $\zeta = \xi$  obtenemos  $\int_{\mathbb{T}} R(z) \mathcal{P}_n(\xi, z) d\omega(z) = R(\xi) = 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} M(z) (\xi - z) \mathcal{P}_n(\xi, z) d\omega(z) = 0 &\Rightarrow \int_{\mathbb{T}} M(z) (\xi - z) \overline{\mathcal{P}_n(z, \xi)} d\omega(z) = 0 \Rightarrow \\ &\int_{\mathbb{T}} M(z) \overline{(\bar{\xi} - \bar{z}) \mathcal{P}_n(z, \xi)} d\omega(z) = 0 \end{aligned}$$

y dado que  $z \in \mathbb{T}$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  y podemos escribir

$$\int_{\mathbb{T}} M(z) \overline{\left( \bar{\xi} - \frac{1}{z} \right) \mathcal{P}_n(z, \xi)} d\omega(z) = 0.$$

Esta última expresión implica que  $\overline{\left( \bar{\xi} - \frac{1}{z} \right) \mathcal{P}_n(z, \xi)}$  es ortogonal a  $\mathcal{L}_{n-1}$ , es decir,

$$\langle M(z), \overline{\left( \bar{\xi} - \frac{1}{z} \right) \mathcal{P}_n(z, \xi)} \rangle_{\omega} = 0, \quad \forall M \in \mathcal{L}_{n-1}. \quad (3.64)$$

Ahora bien,  $\bar{\xi}\mathcal{P}_n(z, \xi) \in \Lambda_{-k,k} = \mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$  y  $\frac{1}{z}\mathcal{P}_n(z, \xi) \in \Lambda_{-(k+1),k-1} \subset \mathcal{L}_{n+1}$ , por lo que  $(\bar{\xi} - \frac{1}{z})\mathcal{P}_n(z, \xi) \in \mathcal{L}_{n+1}$  y

$$\left(\bar{\xi} - \frac{1}{z}\right)\mathcal{P}_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k(\xi)\chi_k(z).$$

De (3.64) se cumple  $a_k(\xi) \equiv 0$  para todo  $0 \leq k \leq n-1$ , por lo que

$$\begin{aligned} \left(\bar{\xi} - \frac{1}{z}\right)\mathcal{P}_n(z, \xi) &= a_n(\xi)\chi_n(z) + a_{n+1}(\xi)\chi_{n+1}(z) \Rightarrow \\ \frac{z\bar{\xi} - 1}{z} \sum_{k=0}^n \chi_k(z)\overline{\chi_k(\xi)} &= a_n(\xi)\chi_n(z) + a_{n+1}(\xi)\chi_{n+1}(z), \end{aligned}$$

o equivalentemente, (haciendo  $a_{n+1}(\xi) = b_n(\xi)$ ),

$$\mathcal{P}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) = (1 - z\bar{\xi}) \sum_{k=0}^n \chi_k(z)\overline{\chi_k(\xi)} = -z(a_n(\xi)\chi_n(z) + b_n(\xi)\chi_{n+1}(z)). \quad (3.65)$$

En este caso se cumple que

$$\begin{aligned} \chi_{n-1}(z) &= \frac{\varphi_{n-1}^*(z)}{z^k} = \frac{\kappa_{2k-1}\overline{\delta_{2k-1}}z^{2k-1} + \dots + \kappa_{2k-1}}{z^k} \in \Lambda_{-k,k-1}, \\ \chi_n(z) &= \frac{\varphi_n(z)}{z^k} = \frac{\kappa_{2k}z^{2k} + \dots + \kappa_{2k}\delta_{2k}}{z^k} \in \Lambda_{-k,k}, \\ \chi_{n+1}(z) &= \frac{\varphi_{n+1}^*(z)}{z^{k+1}} = \frac{\kappa_{2k+1}\overline{\delta_{2k+1}}z^{2k+1} + \dots + \kappa_{2k+1}}{z^{k+1}} \in \Lambda_{-(k+1),k}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Si comparamos los coeficientes de los monomios  $z^{k+1}$  y  $z^{-k}$  en ambos lados de (3.65) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \kappa_n \overline{\xi \chi_n(\xi)} &= \kappa_n a_n(\xi) + \kappa_{n+1} \overline{\delta_{n+1}} b_n(\xi), \\ \kappa_{n-1} \overline{\chi_{n-1}(\xi)} + \kappa_n \delta_n \overline{\chi_n(\xi)} &= -\kappa_{n+1} b_n(\xi), \end{aligned}$$

respectivamente. Estas expresiones implican de (1.38):

$$b_n(\xi) = -\eta_{n+1} \left( \overline{\eta_n \chi_{n-1}(\xi)} + \delta_n \overline{\chi_n(\xi)} \right), \quad (3.67)$$

$$a_n(\xi) = \overline{\xi \chi_n(\xi)} - \frac{\overline{\delta_{n+1}}}{\eta_{n+1}} b_n(\xi). \quad (3.68)$$

Ahora, de (3.21) y (3.67) deducimos una expresión para  $b_{2k}(\xi)$  en términos de  $\chi_{2k}(\xi)$  y  $\chi_{2k+1}(\xi)$ :

$$b_{2k}(\xi) = \eta_{2k+1} \bar{\xi} \left( \delta_{2k+1} \overline{\chi_{2k}(\xi)} - \eta_{2k+1} \overline{\chi_{2k+1}(\xi)} \right) \quad (3.69)$$

De (3.68) se cumple pues que

$$a_{2k}(\xi) = \eta_{2k+1} \bar{\xi} \left( \overline{\delta_{2k+1} \chi_{2k+1}(\xi)} + \eta_{2k+1} \overline{\chi_{2k}(\xi)} \right). \quad (3.70)$$

Si combinamos (3.65), (3.69), y (3.70) deducimos entonces la fórmula de Christoffel-Darboux para el caso par, obteniendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) &= \eta_{n+1}(-z\bar{\xi}) \times \\ &\left[ \left( \eta_{n+1} \overline{\chi_n(\xi)} + \overline{\delta_{n+1}} \cdot \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_n(z) + \left( \overline{\delta_{n+1}} \chi_n(\xi) - \eta_{n+1} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_{n+1}(z) \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

- Caso  $n = 2k + 1$ : Procediendo de manera análoga al caso par podemos escribir

$$\mathcal{P}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) = (1 - z\bar{\xi}) \sum_{k=0}^n \chi_k(z) \overline{\chi_k(\xi)} = \bar{\xi} (a_n(\xi) \chi_n(z) + b_n(\xi) \chi_{n+1}(z)) \quad (3.72)$$

donde

$$a_n(\xi) = \eta_{n+1} \frac{1}{\bar{\xi}} \left( \eta_{n+1} \overline{\chi_n(\xi)} + \overline{\delta_{n+1}} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \quad (3.73)$$

y

$$b_n(\xi) = \eta_{n+1} \frac{1}{\bar{\xi}} \left( \overline{\delta_{n+1}} \cdot \overline{\chi_n(\xi)} - \eta_{n+1} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right). \quad (3.74)$$

Así, de (3.72), (3.73) y (3.74) deducimos también la fórmula para el caso impar, obteniendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(z, \xi)(1 - z\bar{\xi}) &= \\ \eta_{n+1} \left[ \left( \eta_{n+1} \overline{\chi_n(\xi)} + \overline{\delta_{n+1}} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_n(z) + \left( \overline{\delta_{n+1}} \cdot \overline{\chi_n(\xi)} - \eta_{n+1} \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_{n+1}(z) \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

La prueba queda completa expresando ambas relaciones (3.71) y (3.75) según (3.61)-(3.62). □

Para ilustrar la fórmula anterior consideraremos medidas positivas de Borel absolutamente continuas particulares, escribiendo  $d\omega(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)d\theta$  siendo  $\tilde{\omega}(\theta) \geq 0$  una función peso en  $[-\pi, \pi]$ .

**Ejemplo 3.5.2 (medida de Lebesgue)** Consideremos la función peso normalizada  $\tilde{\omega}(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}$ . Como ya sabemos del Ejemplo 3.4.8,  $\delta_0 = 1$  y  $\delta_k = 0$  para todo  $k \geq 1$ , resultando  $\delta_{n+1} = 0$  y  $\eta_{n+1} = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Por tanto,

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \chi_k(z) \overline{\chi_k(\xi)} = (-z\bar{\xi})^{d(n)} \frac{\overline{\chi_n(\xi)} \chi_n(z) - \overline{\chi_{n+1}(\xi)} \chi_{n+1}(z)}{1 - z\bar{\xi}}. \quad (3.76)$$

Para esta función peso particular también podemos escribir de (3.52)

$$\chi_n(z) = z^{(-1)^n p(n)}, \quad n \geq 0$$

y por tanto, obtenemos de (3.59) ó de (3.76) la siguiente expresión para la función núcleo reproductor:

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \frac{(z\bar{\xi})^{d(n)-p(n+1)} - (z\bar{\xi})^{d(n)+q(n+1)}}{1 - z\bar{\xi}}, \quad n \geq 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathcal{P}_{2k}(z, \xi) = \frac{1 - (z\bar{\xi})^{2k+1}}{(1 - z\bar{\xi})(z\bar{\xi})^k} \quad , \quad \mathcal{P}_{2k+1}(z, \xi) = \frac{1 - (z\bar{\xi})^{2k+2}}{(1 - z\bar{\xi})(z\bar{\xi})^{k+1}} \quad , \quad k \geq 0.$$

**Ejemplo 3.5.3 (Modificación racional de la medida de Lebesgue)** Consideremos la función peso normalizada

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{1}{2\pi |h(e^{i\theta})|^2}$$

donde  $h(z)$  es un polinomio de grado  $s$  sin ceros en  $\mathbb{T}$  (si  $s = 0$  entonces  $h(z) \equiv 1$  y recuperamos la función peso asociada a la medida de Lebesgue del Ejemplo 3.5.2). Sabemos de (1.58) que el correspondiente  $n$ -ésimo polinomio ortonormal de Szegő viene dado por  $\varphi_n(z) = z^{n-s}h(z)$  para todo  $n \geq s$  (recordemos que para obtener la familia completa de polinomios ortonormales se computarían éstos para  $n < s$  recursivamente de la relación (1.41)). Dado que se cumple en este caso que  $\eta_{n+1} = 1$  y  $A_{n+1} = 0$  para todo  $n \geq s$ , la función núcleo reproductor vendrá dada también por (3.76) para  $n \geq s$ . De (3.9) y (3.10) se cumple  $\chi_{2k}(z) = z^{k-s}h(z)$  para  $2k \geq s$  y  $\chi_{2k+1}(z) = z^{-(k+1)}h^*(z)$  para  $2k+1 \geq s$ . Distinguimos pues:

- Si  $n = 2k \geq s$ :

$$\begin{aligned} (1 - z\bar{\xi})\mathcal{P}_{2k}(z, \xi) &= (-z\bar{\xi}) \left[ (z\bar{\xi})^{k-s}h(z)\overline{h(\xi)} - (z\bar{\xi})^{-(k+1)}h^*(z)\overline{h^*(\xi)} \right] \\ &= (z\bar{\xi})^{-k}h^*(z)\overline{h^*(\xi)} - (z\bar{\xi})^{k+1-s}h(z)\overline{h(\xi)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

- Si  $n = 2k+1 \geq s$ :

$$(1 - z\bar{\xi})\mathcal{P}_{2k+1}(z, \xi) = (z\bar{\xi})^{-(k+1)}h^*(z)\overline{h^*(\xi)} - (z\bar{\xi})^{k+1-s}h(z)\overline{h(\xi)}. \quad (3.78)$$

De (3.77) y (3.78) escribimos finalmente

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \frac{(z\bar{\xi})^{-p(n)}h^*(z)\overline{h^*(\xi)} - (z\bar{\xi})^{p(n+1)-s}h(z)\overline{h(\xi)}}{1 - z\bar{\xi}} \quad , \quad n \geq s. \quad (3.79)$$

Cuando tomamos  $s = 1$  y haciendo  $h(z) = \frac{z-r}{\sqrt{1-r^2}}$  con  $0 < r < 1$  aparece la función peso asociada con el núcleo de Poisson dada por (1.59). La familia de polinomios ortonormales de Szegő vienen dados por (1.60), por lo que de (3.9) y (3.10) resulta

$$\chi_{2k}(z) = \frac{z^{n-k} - rz^{n-k-1}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (k \geq 1) \quad , \quad \chi_{2k+1}(z) = \frac{z^{-(k+1)} - rz^{-k}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (k \geq 0).$$

Así, de (3.76) (ó de (3.79)) se cumple  $\mathcal{P}_0(z, \xi) \equiv 1$  y

$$\mathcal{P}_n(z, \xi) = \frac{(z\bar{\xi})^{p(n)}L(r) - (z\bar{\xi})^{-p(n)}L^*(r)}{(1-r^2)(1-z\bar{\xi})} \quad , \quad n \geq 1$$

siendo  $L(r) = -r^2 + r(z + \bar{\xi}) - (z\bar{\xi})$  ( $z$  y  $\xi$  parámetros).

Establecemos a continuación un resultado recíproco del Teorema 3.5.1

**Teorema 3.5.4** *Sea  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  la familia de polinomios de Laurent inducida por el ordenamiento  $p(n) = E\left[\frac{n+1}{2}\right]$ , es decir, para  $n \geq 1$ ,  $\chi_n \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  con  $\mathcal{L}_n = \text{span}\{z^j : -p(n) \leq j \leq q(n)\}$ ,  $q(n) = n - p(n)$  y verificando las relaciones (3.59) y (3.61) donde, para todo  $n \geq 1$ ,  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión compleja tal que  $|\delta_n| < 1$ ,  $\{d(n)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  las sucesiones numéricas dadas en (3.62) y  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión real dada por (1.32). Entonces, la familia  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  satisface la ley de recurrencia a tres términos (3.18).*

*Demostración.-* De la relación  $\chi_{n+1}(z)\overline{\chi_{n+1}(\xi)} = \mathcal{P}_{n+1}(z, \xi) - \mathcal{P}_n(z, \xi)$  se sigue que

$$\begin{aligned} (1 - z\bar{\xi})\chi_{n+1}(z)\overline{\chi_{n+1}(\xi)} &= \eta_{n+2}(-z\bar{\xi})^{d(n+1)} \left[ \left( \eta_{n+2}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} + A_{n+2}\overline{\chi_{n+2}(\xi)} \right) \chi_{n+1}(z) \right. \\ &\quad \left. + \left( \overline{A_{n+2}\chi_{n+1}(\xi)} - \eta_{n+2}\overline{\chi_{n+2}(\xi)} \right) \chi_{n+2}(z) \right] \\ &\quad - \eta_{n+1}(-z\bar{\xi})^{d(n)} \left[ \left( \eta_{n+1}\overline{\chi_n(\xi)} + A_{n+1}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_n(z) \right. \\ &\quad \left. + \left( \overline{A_{n+1}\chi_n(\xi)} - \eta_{n+1}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_{n+1}(z) \right], \end{aligned}$$

esto es,

$$\begin{aligned} (1 - z\bar{\xi})\chi_{n+1}(z)\overline{\chi_{n+1}(\xi)} &= \eta_{n+2}(-z\bar{\xi})^{d(n+1)} \left( \overline{A_{n+2}\chi_{n+1}(\xi)} - \eta_{n+2}\overline{\chi_{n+2}(\xi)} \right) \chi_{n+2}(z) \\ &\quad + \left[ \eta_{n+2}(-z\bar{\xi})^{d(n+1)} \left( \eta_{n+2}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} + A_{n+2}\overline{\chi_{n+2}(\xi)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \eta_{n+1}(-z\bar{\xi})^{d(n)} \left( \overline{A_{n+1}\chi_n(\xi)} - \eta_{n+1}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \right] \chi_{n+1}(z) \\ &\quad - \eta_{n+1}(-z\bar{\xi})^{d(n)} \left( \eta_{n+1}\overline{\chi_n(\xi)} + A_{n+1}\overline{\chi_{n+1}(\xi)} \right) \chi_n(z). \end{aligned} \tag{3.80}$$

Asumamos primero que  $n$  es impar, digamos  $n = 2k + 1$ . Si comparamos los coeficientes del monomio  $z^{-k}$  en ambos lados de la ecuación (3.80) y de (3.62) se cumple que

$$\begin{aligned} \kappa_{2k}\delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(\xi)} &= -\eta_{2k+1}\kappa_{2k+1}\bar{\xi} \left( \delta_{2k+1}\overline{\chi_{2k}(\xi)} - \eta_{2k+1}\overline{\chi_{2k+1}(\xi)} \right) - \eta_{2k}\kappa_{2k}\delta_{2k} \times \\ &\quad \left( \overline{\delta_{2k}\chi_{2k-1}(\xi)} - \eta_{2k}\overline{\chi_{2k}(\xi)} \right) - \eta_{2k}\kappa_{2k-1} \left( \eta_{2k}\overline{\chi_{2k-1}(\xi)} + \delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(\xi)} \right). \end{aligned}$$

Cambiando la variable  $\xi$  por  $z$ , dividiendo en ambos lados por  $\kappa_{2k+1} \neq 0$  y de (1.38) se deduce que

$$\begin{aligned} \eta_{2k+1}\delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(z)} &= -\eta_{2k+1}\delta_{2k+1}z\overline{\chi_{2k}(z)} + \eta_{2k+1}^2z\overline{\chi_{2k+1}(z)} - \eta_{2k+1}\eta_{2k}|\delta_{2k}|^2\overline{\chi_{2k-1}(z)} \\ &\quad + \eta_{2k}^2\eta_{2k+1}\delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(z)} - \eta_{2k}^3\eta_{2k+1}\overline{\chi_{2k-1}(z)} - \eta_{2k}^2\eta_{2k+1}\delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(z)}. \end{aligned}$$

De la definición (1.32) y dividiendo por  $\eta_{2k+1} \neq 0$  se cumple ahora que

$$-\delta_{2k+1}z\overline{\chi_{2k}(z)} + \eta_{2k+1}z\overline{\chi_{2k+1}(z)} - \eta_{2k}\overline{\chi_{2k-1}(z)} - \delta_{2k}\overline{\chi_{2k}(z)} = 0$$

y finalmente, conjugando esta expresión deducimos (3.21). Tratando de manera similar el caso  $n = 2k$  se obtiene

$$\overline{\delta_{2k+2}\chi_{2k+1}(z)} - \eta_{2k+2}\overline{\chi_{2k+2}(z)} + \eta_{2k+1}z\overline{\chi_{2k}(z)} + \overline{\delta_{2k+1}z\chi_{2k+1}(z)} = 0.$$

Así, conjugando de nuevo esta última expresión se obtiene (3.20).

□

En la segunda parte de esta sección probamos un teorema de Favard para la sucesión de polinomios de Laurent mónicos  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  usando una técnica similar a la introducida por Chihara en [31]. Para una demostración del resultado en el caso polinómico ordinario véase por ejemplo [71] y también [50], donde se aplican unos enfoques alternativos más simples (véanse también los trabajos [2] y [57]). Veremos además en el próximo capítulo una demostración generalizada de este resultado al considerar una sucesión generadora  $p(n)$  fija pero arbitraria (Teorema 4.2.7).

Comenzamos recordando brevemente el concepto de ortogonalidad con respecto a un funcional lineal Hermitiano. Sea  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^\infty$  una sucesión compleja verificando  $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$  para todo  $n \geq 0$  (Hermitiana) y denotemos por  $\mu$  el funcional lineal definido en  $\Lambda$  por

$$\mu \left( \sum_{j=p}^q \alpha_j z^j \right) := \sum_{j=p}^q \alpha_j \mu_{-j} \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{C} \quad -\infty < p \leq q < +\infty.$$

En términos de  $\mu$  definimos el funcional bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$  en  $\Lambda \times \Lambda$  por

$$\langle L, M \rangle_\mu := \mu \left( L(z) \overline{M(1/\bar{z})} \right) \quad , \quad L, M \in \Lambda. \quad (3.81)$$

Diremos que el funcional  $\mu$  es cuasi-definido (véase por ejemplo [71]), sí y sólo sí, las submatrices principales de la matriz de momentos de Toeplitz infinita asociada a la sucesión  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^\infty$  son no singulares y definido positivo si los determinantes de tales matrices son positivos. El carácter cuasi definido es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una familia de polinomios de Laurent ortogonales con respecto al funcional lineal (3.81) en el sentido de que existe una sucesión  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  de polinomios de Laurent que verifica  $R_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  para todo  $n \geq 1$  y  $\langle R_n(z), R_m(z) \rangle_\mu = \kappa_n \delta_{n,m}$  con  $\kappa_n \neq 0$ . Por otro lado, si el funcional lineal  $\mu$  es definido positivo, entonces el funcional lineal asociado (3.81) es un producto interior en  $\Lambda \times \Lambda$  y se cumple  $\langle R_n(z), R_m(z) \rangle_\mu = \kappa_n \delta_{n,m}$  con  $\kappa_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ . Cuando  $\kappa_n = 1$  para todo  $n \geq 0$  diremos que la familia  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  es “ortonormal”.

**Teorema 3.5.5 (Favard)** *Sea  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de polinomios de Laurent definida por la ley de recurrencia*

$$\phi_{2n}(z) = (\delta_{2n} + \delta_{2n-1}z) \phi_{2n-1}(z) + \lambda_{2n-1}z \phi_{2n-2}(z) \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.82)$$

$$\phi_{2n+1}(z) = \left( \overline{\delta_{2n+1}} + \frac{\overline{\delta_{2n}}}{z} \right) \phi_{2n}(z) + \frac{\lambda_{2n}}{z} \phi_{2n-1}(z) \quad , \quad n \geq 1 \quad (3.83)$$

con las condiciones iniciales

$$\phi_0(z) \equiv 1 \quad , \quad \phi_1(z) = \overline{\delta_1} + \frac{1}{z} \quad (3.84)$$

donde  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de números complejos ( $|\delta_n| \neq 1$  para todo  $n \geq 1$ ) y  $\lambda_n = 1 - |\delta_n|^2$ . Entonces, fijado  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , existe un único funcional lineal cuasi definido  $\mu$  tal que  $\mu(1) = \mu_0$  y donde  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  es la sucesión de polinomios de Laurent mónicos ortogonales con respecto a  $\mu$  y el orden inducido en  $\Lambda$  por la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  ( $q(n) = n - p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ ). Además, si tomamos  $\mu_0 > 0$ , entonces  $\mu$  es definido positivo, sí y sólo sí,  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.-* Comenzamos construyendo una sucesión  $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  de números complejos verificando  $\mu_m = \overline{\mu_{-m}}$  para todo  $m \geq 0$  de manera que el funcional lineal  $\mu^{(n)}$  definido en  $\Lambda_{-p(n),q(n)}$  para  $n \geq 1$  por

$$\mu^{(n)} \left( \sum_{k=-p(n)}^{q(n)} c_k z^k \right) := \sum_{k=-p(n)}^{q(n)} c_k \mu_{-k} \quad , \quad c_k \in \mathbb{C} \quad , \quad \forall k = -p(n), \dots, q(n) \quad (3.85)$$

cumpla

$$\mu^{(n)}(\phi_k(z)) = 0 \quad , \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.86)$$

Tomemos  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  fijo y procedamos por inducción. Dado que  $\mu_0 = \overline{\mu_0}$ ,  $\mu^{(0)}$  definido por (3.85) satisface trivialmente (3.86). Es también fácil comprobar de (3.82) y de (3.84) que haciendo  $\mu_1 = -\overline{\delta_1} \mu_0$  y  $\mu_{-1} = \overline{\mu_1}$  se cumple (3.86) para  $n = 1$ . Supongamos ahora que para algún  $n > 1$  hemos determinado

$$\mu_{-p(n)}, \dots, \mu_0, \dots, \mu_{p(n)} \quad , \quad \text{si } n \text{ es par}$$

ó

$$\mu_{1-p(n)}, \dots, \mu_0, \dots, \mu_{p(n)} \quad , \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

de manera que  $\mu^{(n)}$  definido en  $\Lambda_{-p(n),q(n)}$  verifique (3.86). Así,

- Si  $n$  es par:

$$\frac{1}{z^{p(n+1)}} = \left( \frac{1}{z^{p(n+1)}} - \phi_{n+1}(z) \right) + \phi_{n+1}(z) = \phi_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \phi_k(z)$$

con  $a_k^{(n)}$  determinado únicamente para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Tomando  $\mu_{p(n+1)} = a_0^{(n)} \mu_0$  entonces

$$\mu^{(n+1)}(\phi_{n+1}(z)) = \mu^{(n+1)} \left( \frac{1}{z^{p(n+1)}} - \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \phi_k(z) \right) = \mu_{p(n+1)} - a_0^{(n)} \mu_0 = 0.$$

- Similarmente, si  $n$  es impar:

$$z^{p(n)} = \left( z^{p(n)} - \phi_{n+1}(z) \right) + \phi_{n+1}(z) = \phi_{n+1}(z) + \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} \phi_k(z)$$

con  $b_k^{(n)}$  únicamente determinado para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Tomando ahora  $\mu_{-p(n)} = b_0^{(n)} \mu_0$  entonces

$$\mu^{(n+1)}(\phi_{n+1}(z)) = \mu^{(n+1)} \left( z^{p(n)} - \sum_{k=0}^n b_k^{(n)} \phi_k(z) \right) = \mu_{-p(n)} - b_0^{(n)} \mu_0 = 0.$$

En ambas situaciones, dado que  $\mu^{(n+1)}$  es una extensión de  $\mu^{(n)}$  tenemos para  $k = 1, 2, \dots, n$  también que  $\mu^{(n+1)}(\phi_k(z)) = 0$ . El funcional lineal  $\mu$  definido por

$$\mu \left( \sum_{m=p}^q c_m z^m \right) := \sum_{m=p}^q c_m \mu_{-m} \quad , \quad c_m \in \mathbb{C} \quad , \quad -\infty < p \leq q < +\infty \quad (3.87)$$

es pues una extensión de  $\mu^{(n)}$  para todo  $n \geq 0$  de manera que  $\mu(\phi_k(z)) = 0$  para todo  $k \geq 1$ . Si definimos el funcional  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$  por

$$\langle X(z), Y(z) \rangle_\mu := \mu \left( X(z) \cdot \overline{Y \left( \frac{1}{z} \right)} \right) \quad \forall X, Y \in \Lambda \quad , \quad (3.88)$$

entonces faltaría comprobar para  $n \geq 1$  las condiciones de ortogonalidad,

$$\langle \phi_{2n}(z), z^m \rangle_\mu = 0 \quad , \quad -n \leq m \leq n-1 \quad , \quad (3.89)$$

$$\langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu \neq 0 \quad , \quad (3.90)$$

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^m \rangle_\mu = 0 \quad , \quad -n \leq m \leq n \quad , \quad (3.91)$$

$$\langle \phi_{2n+1}(z), \frac{1}{z^{n+1}} \rangle_\mu \neq 0. \quad (3.92)$$

La condición  $\mu_k = \overline{\mu_{-k}}$  para todo  $k \geq 0$  (equivalente a probar que se cumple  $a_0^{(k)} = \overline{b_0^{(k+1)}}$ ) se cumple dado que  $\mu_k = \mu \left( \frac{1}{z^k} \right) = \langle \frac{1}{z^k}, 1 \rangle_\mu = \overline{\langle 1, z^k \rangle_\mu} = \overline{\mu_{-k}}$ . Las relaciones (3.89) y (3.91) son válidas cuando  $m = 0$  dado que  $\langle \phi_k(z), 1 \rangle_\mu = \mu(\phi_k(z)) = 0$  para  $k \geq 1$  y  $\langle \phi_0(z), 1 \rangle_\mu = \langle 1, 1 \rangle_\mu = \mu(1) = \mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Para comprobar (3.89) y (3.91) separamos en dos casos:

- Caso 1:

$$\langle \phi_{2n}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad q = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad q = 0, 1, \dots, n$$

- Caso 2:

$$\langle \phi_{2n}(z), \frac{1}{z^q} \rangle_\mu = 0 \quad q = 0, 1, \dots, n$$

$$\langle \phi_{2n+1}(z), \frac{1}{z^q} \rangle_\mu = 0 \quad q = 0, 1, \dots, n$$

Probaremos sólo el primer caso dado que la prueba para el segundo es similar. En efecto, para  $r \geq 0$  definimos las siguientes propiedades

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq r \quad , \quad n = r, r+1, r+2, \dots \quad (I_r)$$

$$\langle \phi_{2n}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq r-1 \quad , \quad n = r, r+1, r+2, \dots \quad (J_r)$$

y probaremos por inducción que ambas son válidas para todo  $r$ . Cuando  $r = 0$ ,  $(I_0)$  es válida y  $(J_0)$  es vacía, por lo que ambas se cumplen. Asumamos que  $(I_r)$  y  $(J_r)$  son válidas para algún  $r > 0$ . Para  $(J_{r+1})$  también debemos comprobar que

$$\langle \phi_{2n}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq r \quad , \quad n = r+1, r+2, \dots$$

esto es,

$$\langle \phi_{2n}(z), z^r \rangle_\mu = 0 \quad , \quad n = r + 1, r + 2, \dots$$

De (3.82) deducimos

$$\langle \phi_{2n}(z), z^r \rangle_\mu = \delta_{2n} \langle \phi_{2n-1}(z), z^r \rangle_\mu + \delta_{2n-1} \langle \phi_{2n-1}(z), z^{r-1} \rangle_\mu + \lambda_{2n-1} \langle \phi_{2n-2}(z), z^{r-1} \rangle_\mu = 0$$

dado que  $\langle \phi_{2n-1}(z), z^r \rangle_\mu = \langle \phi_{2n-1}(z), z^{r-1} \rangle_\mu = 0$  de  $(I_r)$  y  $\langle \phi_{2n-2}(z), z^{r-1} \rangle_\mu = 0$  de  $(J_r)$ . Para  $(I_{r+1})$  debemos comprobar que

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^q \rangle_\mu = 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq r + 1 \quad , \quad n = r + 1, r + 2, \dots$$

esto es,

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu = 0 \quad , \quad n = r + 1, r + 2, \dots$$

De (3.83) tenemos que

$$\phi_{2n+1}(z) = \frac{1}{\lambda_{2n+2}} [z\phi_{2n+3}(z) - (z\overline{\delta_{2n+3}} + \overline{\delta_{2n+2}}) \phi_{2n+2}(z)] .$$

Así,

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu \\ &= \frac{1}{\lambda_{2n+2}} [\langle \phi_{2n+3}(z), z^r \rangle_\mu - \overline{\delta_{2n+3}} \langle \phi_{2n+2}(z), z^r \rangle_\mu - \overline{\delta_{2n+2}} \langle \phi_{2n+2}(z), z^{r+1} \rangle_\mu] \\ &= \frac{-\overline{\delta_{2n+2}}}{\lambda_{2n+2}} \langle \phi_{2n+2}(z), z^{r+1} \rangle_\mu \end{aligned}$$

dado que  $\langle \phi_{2n+3}(z), z^r \rangle_\mu = 0$  de  $(I_r)$  y  $\langle \phi_{2n+2}(z), z^r \rangle_\mu = 0$  de  $(J_{r+1})$ . Entonces, de (3.82),

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu \\ &= \frac{-\overline{\delta_{2n+2}}}{\lambda_{2n+2}} [\delta_{2n+2} \langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu + \delta_{2n+1} \langle \phi_{2n+1}(z), z^r \rangle_\mu + \lambda_{2n+1} \langle \phi_{2n}(z), z^r \rangle_\mu] \\ &= \frac{-|\delta_{2n+2}|^2}{\lambda_{2n+2}} \langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu \end{aligned}$$

dado que  $\langle \phi_{2n+1}(z), z^r \rangle_\mu = 0$  de  $(I_r)$  y  $\langle \phi_{2n}(z), z^r \rangle_\mu = 0$  de  $(J_{r+1})$ . Concluimos pues que

$$\langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu = \frac{-|\delta_{2n+2}|^2}{\lambda_{2n+2}} \langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu$$

y dado que  $\frac{-|\delta_{2n+2}|^2}{\lambda_{2n+2}} = \frac{-|\delta_{2n+2}|^2}{1-|\delta_{2n+2}|^2} \neq 1$  debe verificarse  $\langle \phi_{2n+1}(z), z^{r+1} \rangle_\mu = 0$ . Una vez que (3.89) y (3.91) han sido probadas resta comprobar las relaciones de ortogonalidad (3.90) y (3.92). De hecho, de (3.82) deducimos

$$\langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu = \delta_{2n} \langle \phi_{2n-1}(z), z^n \rangle_\mu + \lambda_{2n-1} \langle \phi_{2n-2}(z), z^{n-1} \rangle_\mu \quad (3.93)$$

dado que  $\langle \phi_{2n-1}(z), z^{n-1} \rangle_\mu = 0$ . De (3.83) también tenemos

$$\phi_{2n-1}(z) = \frac{1}{\lambda_{2n}} [z\phi_{2n+1}(z) - (z\overline{\delta_{2n+1}} + \overline{\delta_{2n}}) \phi_{2n}(z)] ,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle \phi_{2n-1}(z), z^n \rangle_\mu &= \frac{1}{\lambda_{2n}} [\langle \phi_{2n+1}(z), z^{n-1} \rangle_\mu - \overline{\delta_{2n+1}} \langle \phi_{2n}(z), z^{n-1} \rangle_\mu - \overline{\delta_{2n}} \langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu] \\ &= -\frac{\overline{\delta_{2n}}}{\lambda_{2n}} \langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu \end{aligned}$$

dado que  $\langle \phi_{2n+1}(z), z^{n-1} \rangle_\mu = \langle \phi_{2n}(z), z^{n-1} \rangle_\mu = 0$ . Ahora, de (3.93)

$$\langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu = -\frac{|\delta_{2n}|^2}{\lambda_{2n}} \langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu + \lambda_{2n-1} \langle \phi_{2n-2}(z), z^{n-1} \rangle_\mu$$

lo cual implica

$$\left(1 + \frac{|\delta_{2n}|^2}{\lambda_{2n}}\right) \langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu = \lambda_{2n-1} \langle \phi_{2n-2}(z), z^{n-1} \rangle_\mu$$

y así

$$\langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu = \lambda_{2n} \lambda_{2n-1} \langle \phi_{2n-2}(z), z^{n-1} \rangle_\mu.$$

Continuando de esta manera obtenemos

$$\langle \phi_{2n}(z), z^n \rangle_\mu = \left( \prod_{k=1}^{2n} \lambda_k \right) \mu_0 = \prod_{k=1}^{2n} (1 - |\delta_k|^2) \mu_0 \neq 0$$

cumpléndose (3.90). Podemos proceder de manera similar para comprobar

$$\langle \phi_{2n+1}(z), \frac{1}{z^{n+1}} \rangle_\mu = \left( \prod_{k=1}^{2n+1} \lambda_k \right) \mu_0 = \prod_{k=1}^{2n+1} (1 - |\delta_k|^2) \mu_0 \neq 0.$$

Resumiendo, podemos escribir

$$\langle \phi_n(z), \phi_n(z) \rangle_\mu = \prod_{k=1}^n (1 - |\delta_k|^2) \mu_0 \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.94)$$

y dado que  $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  es una base de  $\Lambda$ , vemos que  $\mu$  es cuasi definido. Para la demostración de la unicidad, asumamos que existe otro funcional lineal  $\tilde{\mu}$  tal que  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  dado por (3.82) y (3.83) representa la sucesión mónica de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a este funcional y que  $\tilde{\mu}(1) = \mu_0$ . Debemos verificar que  $\mu = \tilde{\mu}$ , es decir,  $\mu(R) = \tilde{\mu}(R)$  para todo  $R \in \Lambda$ . Ahora bien, dado que  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  es una base de  $\Lambda$ , y debido a la ortogonalidad, para  $k \geq 1$  tenemos

$$\mu(\phi_k(z)) = \langle \phi_k(z), 1 \rangle_\mu = 0 = \langle \phi_k(z), 1 \rangle_{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}(\phi_k(z)).$$

Por otro lado,  $\mu(1) = \mu_0 = \tilde{\mu}(1)$  y se sigue la unicidad. Finalmente, el carácter definido positivo se sigue directamente de (3.94).

□

**Nota 3.5.6** *Del Lema 3.2.1 junto a (3.8) y (1.39) vemos claramente que el funcional  $\mu$  es positivo definido, sí y sólo sí,  $\Delta_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ .*

De la combinación de los Teoremas 3.5.4 y 3.5.5 deducimos ahora el siguiente

**Corolario 3.5.7** Denotemos por  $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  a la familia de polinomios de Laurent con respecto al ordenamiento equilibrado  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$ , verificando las relaciones (3.59) y (3.61) donde, para todo  $n \geq 0$ ,  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de números complejos tal que  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$ , siendo  $\{d(n)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  las sucesiones dadas por (3.62) y  $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$  la sucesión real dada por (1.32). Entonces, existe una única medida positiva  $\mu$  tal que  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  es la correspondiente sucesión de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a  $\mu$ .

□

**Nota 3.5.8** Debemos observar finalmente que si procedemos como en el Teorema 3.5.5, de las leyes de recurrencia (3.22) y (3.23) también podemos deducir un teorema de Favard para la familia de polinomios de Laurent ortogonales mónicos  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  con el que aparecerá un nuevo funcional lineal cuasi-definido  $\tilde{\mu}$ . Asumiendo que  $\mu(1) = \tilde{\mu}(1) = \mu_0 \neq 0$  y dado que se cumple

$$\tilde{\mu}(\phi_n(z)) = \tilde{\mu}(\tilde{\phi}_{n*}(z)) = \tilde{\mu}(1 \cdot \overline{\tilde{\phi}_n(1/\bar{z})}) = \langle 1, \tilde{\phi}_n(z) \rangle_{\tilde{\mu}} = 0 = \mu(\phi_n(z)), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

se sigue que  $\tilde{\mu} = \mu$ . Recordemos que ambas familias  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  son bases de  $\Lambda$ .

Comentamos finalmente que los dos temas analizados en esta sección han sido considerados previamente en el contexto de las funciones racionales ortogonales con polos en  $\mathbb{E}$  (véanse los capítulos 3 y 8 de [18]).

### 3.6. Ejemplos numéricos

Con el fin de poner en práctica numéricamente los resultados analizados en este capítulo, supongamos que deseamos evaluar integrales de la forma:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(x+\lambda)^r} \tilde{\sigma}(x) dx, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.95)$$

donde  $f(x)$  es una función continua en  $[-1, 1]$ ,  $\tilde{\sigma}(x) \geq 0$  una función peso en este intervalo y  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda| > 1$ . A tal fin proponemos dos métodos:

Método 1 Consideremos  $a$  y  $b$  dos números cualesquiera reales positivos tales que

$$\frac{b}{a} = \frac{|\lambda| + 1}{|\lambda| - 1}$$

y efectuemos el cambio de variable  $x = h(t) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \left( \frac{2t-b-a}{b-a} \right)$ . Entonces:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(x+\lambda)^r} \tilde{\sigma}(x) dx = \left( \frac{b-a}{2} \right)^r \left( \frac{|\lambda|}{\lambda} \right)^r \int_a^b g(t) \frac{\mu(t)}{t^r} dt \quad (3.96)$$

donde  $g(t) = f(h(t))$  y  $\mu(t) = \tilde{\sigma}(h(t))$ . La integral del lado derecho de la fórmula (3.96) podemos aproximarla ahora por una fórmula de cuadratura de Gauss-Laurent.

Método 2 Sea  $z = e^{i\theta}$ ,  $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \cos\theta$  y definamos la función peso simétrica  $\tilde{\omega}(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  por

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{2^r |\alpha|^r \tilde{\sigma}(\cos\theta) |\sin\theta|}{|z - \alpha|^r}, \quad (3.97)$$

siendo la raíz de la ecuación  $z^2 + 2\lambda z + 1 = 0$  con  $|\alpha| < 1$ , es decir,

$$\alpha = \begin{cases} -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} & \text{if } \lambda > 0, \\ -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} & \text{if } \lambda < 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(x + \lambda)^r} \tilde{\sigma}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) \tilde{\omega}(\theta) d\theta \quad (3.98)$$

con

$$g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} f\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right).$$

La integral del lado derecho de la fórmula (3.98) podemos aproximarla, en este caso, por una fórmula de Szegő con  $n$  nodos.

Para los experimentos numéricos elegimos dos funciones peso particulares:

Caso 1:  $\tilde{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , función peso de Chebyshev de primera especie ( $x \in (-1, 1)$ ).

La función peso  $\mu(t) = \tilde{\sigma}(h(t))$  es la función peso fuerte de Chebyshev de primera especie en  $(a, b)$  dada por

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{b-t}\sqrt{t-a}}, \quad 0 < a < b < +\infty.$$

Para esta situación particular se conocen expresiones explícitas tanto para los correspondientes nodos como para los pesos (véase [96]):

$$x_{n+1-m} = (\beta + \alpha\nu_m) + \sqrt{(\beta + \alpha\nu_m)^2 - \beta^2}, \quad x_m = \frac{\beta^2}{x_{n+1-m}}$$

donde  $m = 1, 2, \dots, p(n) = E\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ,

$$\alpha = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{4}, \quad \beta = \sqrt{ab}, \quad \nu_m = 1 + \cos\left(\frac{2m-1}{n}\pi\right)$$

y

$$A_k = \frac{2\pi}{n} \frac{x_k}{x_k + \beta}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq 1.$$

Por otro lado, la función peso  $\tilde{\omega}(\theta)$  en  $[-\pi, \pi]$  definida en (3.97) es una modificación racional de la medida de Lebesgue, digamos

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{2^r |\alpha|^r}{|z - \alpha|^r}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Escogiendo los valores particulares  $\lambda = 1, 1, 1, 01$ ,  $r = 1, 2$ , la función suave  $f(x) = e^x$  y  $n = 10$  (número de nodos) fijo, estimaremos las siguientes cuatro integrales cuyos valores exactos podemos computar con software MATHEMATICA:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}|x+1,1|} dx = 4,398898203\dots$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}|x+1,01|} dx = 10,26398779 \dots$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}|x+1,1|^2} dx = 15,06117492 \dots$$

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}|x+1,01|^2} dx = 414,4873459 \dots$$

Para la función peso de Chebyshev de primera especie  $\tilde{\sigma}(x)$ , los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura Gaussiana tienen expresiones explícitas (véase [79, págs. 114-115]). Debido a la presencia de una singularidad próxima al intervalo de integración, esperamos obtener pobres resultados al aplicar tal fórmula, quedando de manifiesto en las siguientes tablas:

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	9,36117219...	10,2639877...
$\lambda = 1,1$	<u>4,39825773...</u>	4,39889820...

Tabla 1

$r = 2$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	247,983129...	414,487345...
$\lambda = 1,1$	<u>15,0292310...</u>	15,0611749...

Tabla 2

Con el fin de mejorar la lenta convergencia en este caso computamos los dos métodos mencionados anteriormente:

Resultados para el Método 1

Eligiendo  $a = 1$  implica  $b = 21$  cuando  $\lambda = 1,1$  y  $b = 201$  cuando  $\lambda = 1,01$ .

Los nodos y pesos obtenidos son:

$\lambda = 1,1$	$n = 10$
Nodos	Pesos
1,015968076	0,1140210017
1,153792215	0,1263777081
1,490163636	0,1541804078
2,180737182	0,2025926653
3,529658620	0,2733833654
5,949583872	0,3549351653
9,629771149	0,4257258654
14,09241206	0,4741381229
18,20085084	0,5019408226
20,66994082	0,5142975291

Tabla 3

$\lambda = 1,01$	$n = 10$
Nodos	Pesos
196,7288912	0,5860819973
164,9922240	0,5786005592
113,4050389	0,5584974065
60,84072229	0,5095745959
24,34950355	0,3971049908
8,254788423	0,2312135400
3,303708313	0,1187439348
1,772408016	0,0698211241
1,218239230	0,0497179710
1,021710633	0,0422365330

Tabla 4

Las aproximaciones de las cuatro integrales anteriores son por tanto:

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>10,26398781..</u>	10,26398779..
$\lambda = 1,1$	<u>4,398898202..</u>	4,398898203..

Tabla 5

$r = 2$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>414,487344..</u>	414,4873459..
$\lambda = 1,1$	<u>15,06117499..</u>	15,06117492..

Tabla 6

Resultados para el Método 2

Expresiones de los momentos trigonométricos para  $r = 1, 2$  son

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \tilde{\sigma}(\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{4\pi|\alpha|}{1-\alpha^2} \alpha^k & \text{si } r = 1 \\ \frac{8\pi\alpha^{k+2}}{(1-\alpha^2)^3} (k(1-\alpha^2) + 1 + \alpha^2) & \text{si } r = 2 \end{cases}$$

Usando el algoritmo split Levinson computado en lenguaje FORTRAN con doble precisión obtenemos los nodos y pesos:

$r = 1, \lambda = 1,1$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$0,5231956081 \pm 0,8522126235i$	0,4170158485
$-0,9718655888 \pm 0,2355361486i$	3,8990461817
$-0,6941445801 \pm 0,7198356076i$	1,5283999088
$0,9425118124 \pm 0,3341728347i$	0,3334871136
$-0,1205684668 \pm 0,992705014i$	0,6775681574

Tabla 7

$r = 1, \lambda = 1,01$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$0,5077320439 \pm 0,8615150443i$	0,4552583228
$-0,1556028488 \pm 0,9878196968i$	0,8023120227
$0,9406267445 \pm 0,3394426719i$	0,3550340683
$-0,7396737275 \pm 0,672965658i$	2,4403459272
$-0,9871949772 \pm 0,1595182654i$	18,1061357088

Tabla 8

$r = 2, \lambda = 1,1$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$-0,7826063935 \pm 0,6225168535i$	5,7286222677
$-0,2523182279 \pm 0,9676443106i$	0,9628770791
$0,9315406380 \pm 0,3636372365i$	0,1801413420
$0,4439464841 \pm 0,8960533016i$	0,3067180364
$-0,9823049310 \pm 0,1872886076i$	28,7314933198

Tabla 9

$r = 2, \lambda = 1,01$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$0,9264937183 \pm 0,376310231i$ $-0,8669062623 \pm 0,4984711951i$ $0,4037996706 \pm 0,9148474332i$ $-0,3361546099 \pm 0,9418068158i$ $-0,9954580194 \pm 0,0952015315i$	$0,2056746266$ $30,7425691490$ $0,3833193864$ $1,6432603190$ $1080,4916890184$

Tabla 10

Las aproximaciones de las cuatro integrales anteriores son

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>10,26398785..</u>	10,26398779..
$\lambda = 1,1$	<u>4,398898196..</u>	4,398898203..

Tabla 11

$r = 2$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>414,4873471..</u>	414,4873459..
$\lambda = 1,1$	<u>15,06117499..</u>	15,06117492..

Tabla 12

De las tablas 5-6 y 11-12 observamos que ambos métodos nos proporcionan resultados numéricos similares, mejorando claramente en ambos casos los resultados obtenidos por las fórmulas Gaussianas.

Caso 2:  $\tilde{\sigma}(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , función peso de Chebyshev de segunda especie ( $x \in [-1, 1]$ ). La función peso  $\mu(t) = \tilde{\sigma}(h(t))$  es la función peso fuerte de Chebyshev de segunda especie en  $[a, b]$  dada por

$$\mu(t) = \sqrt{b-t}\sqrt{t-a}.$$

Eligiendo los valores particulares  $\lambda = 1,1, 1,01, r = 1$ , la función suave  $f(x) = e^x$  y de nuevo  $n = 10$  (número de nodos) fijo, estimaremos las siguientes dos integrales cuyos valores exactos computamos con software MATHEMATICA:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{e^x \sqrt{1-x^2}}{|x+1,1|} dx = 1,67594127475\dots, \quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{e^x \sqrt{1-x^2}}{|x+1,01|} dx = 2,03543204817\dots$$

Los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura Gaussiana para la función peso de Chebyshev de segunda especie  $\tilde{\sigma}(x)$  tienen también expresiones explícitas (véase [79, pág. 115]). Como en el caso 1, debido a la presencia de una singularidad próxima al intervalo de integración, esperamos obtener pobres resultados usando tal fórmula, como se demuestra en la siguiente tabla:

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>2,421155521...</u>	2,03543204817...
$\lambda = 1,1$	<u>1,608794159...</u>	1,67594127475...

Tabla 13

De nuevo, para mejorar la lenta convergencia en esta situación computamos los dos métodos mencionados:

Resultados para el Método 1

De la relación

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)\sqrt{1-x^2}}{|x+\lambda|^r} dx = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}|x+\lambda|^r} dx$$

con

$$g(x) = f(x)(1-x^2),$$

podemos usar las fórmulas explícitas para los nodos y pesos mencionadas en el caso 1. La aproximación de las dos integrales anteriores son:

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>2,035432052...</u>	2,03543204817...
$\lambda = 1,1$	<u>1,675941276...</u>	1,67594127475...

Tabla 14

Resultados para el Método 2

Las expresiones de los momentos trigonométricos vienen dadas por

$$\mu_k = \begin{cases} 2\pi|\alpha| & \text{si } k = 0 \\ \pi\alpha|\alpha| & \text{si } k = 1 \\ -\pi|\alpha|\alpha^{k-2}(1-\alpha^2) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

cuando  $r = 1$ , y

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{-4\pi}{1-\alpha^2} & \text{si } k = 0 \\ -2\pi\frac{\alpha^k}{1-\alpha^2} (2\alpha + k - 1 - \alpha^2(k+3)) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

cuando  $r = 2$ .

Computando de nuevo el algoritmo split Levinson en lenguaje FORTRAN con doble precisión obtenemos los nodos y pesos que mostramos en las siguientes tablas:

$r = 1, \lambda = 1,1$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$0,8473567133 + \pm 0,5310241053i$	0,0809799064
$-0,9095350917 + \pm 0,4156271369i$	0,4250829076
$-0,5968012792 + \pm 0,8023890784i$	0,6749529041
$0,4377179772 + \pm 0,8991123247i$	0,2923674821
$-0,0996095352 + \pm 0,9950266029i$	0,5427101048

Tabla 15

$r = 1, \lambda = 1,01$	$n = 10$
Nodos	Pesos
$0,8432691294 + \pm 0,5374915584i$	0,0884264387
$-0,9380253965 + \pm 0,3465665239i$	0,8084274344
$-0,6342873464 + \pm 0,7730973821i$	0,8785194976
$0,4228259917 + \pm 0,906210892i$	0,3244615048
$-0,1278951430 + \pm 0,9917876952i$	0,6277760750

Tabla 16

Mostramos finalmente, la estimación de las dos integrales anteriores:

$r = 1$	Estimación	Valor exacto
$\lambda = 1,01$	<u>2,03543204774</u> ...	2,03543204817 ...
$\lambda = 1,1$	<u>1,67594127382</u> ...	1,67594127475 ...

Tabla 17

De nuevo, los resultados numéricos obtenidos por ambos métodos son muy similares.

## Capítulo 4

# Familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad: “ordenamiento” general

### 4.1. Introducción

En este último capítulo consideraremos familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a una medida positiva de Borel  $\omega$  y a una sucesión generadora fija pero arbitraria  $p(n)$ . Tales familias son necesarias para la obtención de bases ortogonales de ciertos subespacios de  $L_2^\omega(\mathbb{T})$ , de modo que nuestro interés se centrará fundamentalmente en establecer, en este nuevo contexto, que lo “natural” y “óptimo” a la hora de escoger una sucesión generadora  $p(n)$  es que ésta sea alguna de las dos equilibradas, constatándose tal hecho tanto en la construcción de fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad con máximo L-grado de precisión como en el análisis de la estructura de la matriz de representación del operador multiplicación en  $\Lambda$ .

En el capítulo primero se demostró que el problema de calcular los nodos y pesos de una fórmula de cuadratura sobre intervalos finitos del eje real es equivalente al problema de calcular los autovalores y la primera componente de los autovectores normalizados de las matrices tridiagonales de Jacobi (que aparecen originalmente en [68]) asociadas a la medida en cuestión (véase también [60]). Han sido varios autores los que han trabajado en el problema análogo en la circunferencia unidad, destacando cronológicamente entre otros: [63], [4], [5], [23] y [105]. Sin embargo, fue el grupo formado por M.J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez en [25] el que, con la idea básica de ortonormalizar  $1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots$  (es decir, a partir de la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  considerada en el capítulo anterior) dedujeron una expresión matricial pentadiagonal para el operador multiplicación en  $\Lambda$ , cuyos elementos se expresan en términos de los coeficientes de Verblunsky y la cual puede ser factorizada como producto de dos matrices tridiagonales. Esto permitirá resolver el problema de encontrar los nodos y pesos de las fórmulas de Szegő via problema de autovalores y autovectores de matrices penta-diagonales, frente a las matrices de Hessenberg (véase por ejemplo [4], [46] y [47]), por lo que hablamos pues, del análogo a la matriz de Jacobi en la circunferencia unidad. Tal representación originó lo que B. Simon ha denominado teoría CMV (véase [93] y [95]), la cual ha tenido un gran impacto en los últimos

cinco años.

El capítulo se organiza como sigue: en la segunda sección recordamos el concepto de familia de polinomio de Laurent ortogonal con respecto a una medida en la circunferencia unidad y a una sucesión generadora, estableciendo ahora en este contexto general tanto una conexión con la familia de polinomios de Szegő con respecto a dicha medida como una ley de recurrencia a tres términos y un teorema de Favard que generaliza el mismo para el caso polinómico ordinario y para los ordenamientos equilibrados (Teorema 3.5.5) que ya hemos comentado a lo largo de esta Memoria. En la tercera sección consideraremos el operador multiplicación en  $\Lambda$ , analizando la estructura de la matriz de representación de éste en función del ordenamiento elegido y probando que esta estructura es la más estrecha cuando el ordenamiento es uno de los dos equilibrados, recuperando de esta manera la teoría CMV. Como ejemplo particular elijeremos un ordenamiento para el que tal matriz de representación es heptadiagonal. En la cuarta sección estudiaremos, por un lado, las fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad con máximo grado de precisión, es decir exactas en subespacios de Laurent lo más grande posible. De nuevo, probaremos que el carácter óptimo se alcanza cuando la sucesión generadora elegida coincide con alguna de las dos equilibradas. Por otro lado, analizaremos en este contexto el problema de autovalores comentado, dando una demostración alternativa y mucho más simple del procedimiento para calcular los nodos y pesos de las fórmulas de Szegő con un enfoque matricial. Para finalizar el capítulo llevaremos a la práctica los resultados de la sección previa considerando la función peso particular de Rogers-Szegő.

## 4.2. Polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad. Leyes de recurrencia

Consideremos la familia de subespacios  $\{\mathcal{L}_n\}_{n=0}^\infty$  verificando (3.3) siendo  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  una sucesión no decreciente de enteros no negativos cumpliendo  $p(0) = 0$ ,  $0 \leq p(n) \leq n$  y  $s(n) = p(n) - p(n-1) \in \{0, 1\}$  para  $n \geq 1$  ( $p(n)$  es lo que hemos definido una sucesión generadora). En algunos casos será conveniente definir  $p(-1) = 0$ , por lo que  $s(0) = 0$ . Definimos pues  $\mathcal{L}_n$  según (3.4), teniéndose que  $\{q(n)\}_{n=0}^\infty$  es también una sucesión generadora, que  $\Lambda = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{L}_n$ , sí y sólo sí,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$  y además se cumple (3.5). De este modo decimos que  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  ha inducido un orden en  $\Lambda$ , que en el capítulo anterior prefijábamos:  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  y  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  induciendo respectivamente los órdenes (3.1) y (3.2).

Consideremos ahora una medida positiva de Borel  $\omega$  con soporte en  $\mathbb{T}$  y supondremos sin pérdida de generalidad que está normalizada por la condición  $\int_{-\pi}^{\pi} d\omega(\theta) = 1$  (es decir, una medida de probabilidad), la cual induce el producto interior (1.27). Siguiendo la construcción del capítulo anterior, si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para todo  $n \geq 1$  en el espacio  $\mathcal{L}_n$  obtenemos la familia  $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  (esencialmente única salvo factor multiplicativo) de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , la cual verifica (3.6). El polinomio de Laurent  $\psi_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  diremos que tiene L-grado  $n$ . Para seguir con la misma nomenclatura, denotaremos por  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y por  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  a las correspondientes familias de polinomios de Laurent mónicos ortogonales y ortonormales respectivamente con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ . En cuanto a la familia ortogonal

mónica entendemos el concepto de *coeficiente director* como el coeficiente del monomio  $z^{q(n)}$  ó  $z^{-p(n)}$  cuando  $s(n) = 0$  ó  $s(n) = 1$  respectivamente mientras que en cuanto a la correspondiente familia ortonormal, entendemos que  $\kappa_n = 1$  para todo  $n \geq 1$  en (3.6), la cual queda únicamente determinada si imponemos que tales cantidades sean positivas. Adoptaremos también la notación  $\{\tilde{\phi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\tilde{\chi}_n(z)\}_{n=0}^\infty$  para las correspondientes familias de polinomios de Laurent mónicos ortogonales y ortonormales respectivamente con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{q(n)\}_{n=0}^\infty$ . Recordemos también que cuando  $p(n) = 0$  y por tanto  $q(n) = n$  para todo  $n \geq 0$  tendremos que  $\mathcal{L}_n = \mathbb{P}_n$  y la familia de polinomios de Laurent coincidirá con la familia de polinomios de Szegő, es decir,  $\phi_n(z) = \rho_n(z)$  y  $\chi_n(z) = \varphi_n(z)$  para todo  $n \geq 0$ .

Los próximos dos resultados son una generalización de los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 del capítulo anterior. El primero establece una relación directa entre las familias de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a las sucesiones generadoras  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{q(n)\}_{n=0}^\infty$ , mientras que el segundo establece una relación también directa entre la familia de polinomios de Laurent ortogonales y la familia de polinomios ordinarios de Szegő. Este último resultado explica cómo construir familias de polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad, y como ya comentamos, establece un resultado totalmente diferente a lo que ocurre cuando la medida tiene su soporte en el eje real. Las demostraciones de ambos resultados para ordenamientos equilibrados aparecen en las Proposiciones 2.1 y 2.2 de [25].

**Lema 4.2.1** *Sea  $\{\zeta_n(z)\}_{n=0}^\infty$  una familia de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{q(n)\}_{n=0}^\infty$ . Entonces,  $\zeta_n(z) = \psi_{n^*}(z)$  para todo  $n \geq 0$ , siendo  $\{\psi_n(z)\}_{n \geq 0}$  la familia de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ .*

*Demostración.*- Se comprueba fácilmente que haciendo  $\tilde{\mathcal{L}}_n = \Lambda_{-q(n),p(n)}$ , entonces

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = \mathcal{L}_{n^*} = \{L_* : L \in \mathcal{L}_n = \Lambda_{-p(n),q(n)}\}.$$

□

**Lema 4.2.2** *Las familias  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  son las sucesiones de polinomios de Laurent mónicos ortogonales y ortonormales respectivamente en la circunferencia unidad para la medida  $\omega$  y el orden inducido por la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , sí y sólo sí,*

$$\phi_n(z) = \begin{cases} \frac{\rho_n(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } s(n) = 0 \\ \frac{\rho_n^*(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } s(n) = 1 \end{cases}, \quad \chi_n(z) = \begin{cases} \frac{\varphi_n(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } s(n) = 0 \\ \frac{\varphi_n^*(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } s(n) = 1 \end{cases}, \quad (4.1)$$

siendo  $\{\rho_n(z)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  las familias de polinomios ordinarios mónicos y ortonormales de Szegő respectivamente para la medida  $\omega$ .

*Demostración.*- Probando el caso mónico se sigue directamente el caso ortonormal de las relaciones (3.9) y (3.10).

“ $\Rightarrow$ ” Dado que

$$\phi_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-1} = \Lambda_{-p(n-1),q(n-1)} = \text{span} \{z^j : -p(n-1) \leq j \leq q(n-1)\},$$

podemos escribir  $\langle \phi_n(z), z^j \rangle_\omega = 0$  para  $-p(n-1) \leq j \leq q(n-1)$ , lo cual implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) z^{-j} d\omega(\theta) = 0, \quad z = e^{i\theta}, \quad -p(n-1) \leq j \leq q(n-1).$$

Asumamos primero que  $s(n) = 0$ . Entonces, dado que  $\phi_n(z) = \frac{B_n(z)}{z^{p(n)}}$  es mónico, esto significa que  $B_n(z)$  es un polinomio mónico de grado exacto  $n$  verificando

$$\int_{-\pi}^{\pi} B_n(z) z^{-(p(n)+j)} d\omega(\theta) = 0, \quad z = e^{i\theta}, \quad -p(n-1) \leq j \leq q(n-1)$$

o equivalentemente,  $\langle B_n(z), z^{j+s(n)} \rangle_\omega = \langle B_n(z), z^j \rangle_\omega = 0$  para  $0 \leq j \leq n-1$ . Por tanto,  $B_n(z) = \rho_n(z)$ . El caso  $s(n) = 1$  se prueba de manera similar.

“ $\Leftarrow$ ” La demostración es trivial de las condiciones de ortogonalidad para  $\rho_n(z)$  y  $\rho_n^*(z)$  cuando  $s(n) = 0$  y  $s(n) = 1$  respectivamente. □

Del Lema 4.2.2 vemos que los ceros de  $\phi_n(z)$  para  $n \geq 1$  no pueden caer en  $\mathbb{T}$ , y no pueden ser usados por tanto como nodos en una fórmula de cuadratura. Para solucionar este inconveniente introduciremos en la sección cuarta los polinomios de Laurent “cuasi ortogonales”. El siguiente resultado es una ley de recurrencia a tres términos para la familia  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  que involucra multiplicación por  $z$  y por  $z^{-1}$ , generalizando los Teoremas 3.2.4 y 3.2.7. Definimos para este resultado  $p(-1) = 0$  y por tanto  $s(0) = 0$ .

**Teorema 4.2.3** *La familia de polinomios mónicos de Laurent  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  satisface para  $n \geq 2$  la ley de recurrencia a tres términos*

$$\phi_n(z) = \frac{(A_n B_n + C_n z^{1-2s(n)}) \phi_{n-1}(z) + (-1)^{1+s(n-2)-s(n-1)} D_n E_n \eta_{n-1}^2 z^{1-s(n)-s(n-2)} \phi_{n-2}(z)}{\quad} \quad (4.2)$$

con condiciones iniciales

$$\phi_0(z) \equiv 1, \quad \phi_1(z) = K_1 + z^{1-2s(1)} \quad (4.3)$$

donde

$$K_1 = \begin{cases} \delta_1 & \text{si } s(1) = 0 \\ \bar{\delta}_1 & \text{si } s(1) = 1 \end{cases}$$

y para  $n \geq 2$ ,

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{si } s(n) \neq s(n-1) \\ \delta_{n-1}^{2s(n)-1} & \text{si } s(n) = s(n-1), s(n-2) = 0 \\ (\bar{\delta}_{n-1})^{1-2s(n)} & \text{si } s(n) = s(n-1), s(n-2) = 1 \end{cases}, \quad (4.4)$$

$$B_n = \begin{cases} \delta_n & \text{si } s(n) = 0 \\ \bar{\delta}_n & \text{si } s(n) = 1 \end{cases}, \quad (4.5)$$

$$C_n = \begin{cases} 1 & \text{si } s(n) = s(n-1) \\ \delta_{n-1}^{s(n-1)-s(n)} & \text{si } s(n) \neq s(n-1), s(n-2) = 0 \\ (\bar{\delta}_{n-1})^{s(n)-s(n-1)} & \text{si } s(n) \neq s(n-1), s(n-2) = 1 \end{cases}, \quad (4.6)$$

$$D_n = \begin{cases} \delta_n & \text{si } s(n-1) = s(n) = 0 \\ \overline{\delta_n} & \text{si } s(n-1) = s(n) = 1 \\ 1 & \text{si } s(n-1) \neq s(n) \end{cases}, \quad (4.7)$$

$$E_n = \begin{cases} 1/\delta_{n-1} & \text{si } s(n-2) = s(n-1) = 0 \\ 1/\overline{\delta_{n-1}} & \text{si } s(n-2) = s(n-1) = 1 \\ 1 & \text{si } s(n-2) \neq s(n-1) \end{cases}. \quad (4.8)$$

Como es usual,  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  denota la familia de coeficientes de Verblunsky asociada a la medida  $\omega$  y  $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$  la sucesión real dada por (1.32). En los casos  $s(n-2) = s(n-1)$  la ley de recurrencia a tres términos existe, sí y sólo sí,  $\delta_{n-1} \neq 0$ .

*Demostración.*- Las condiciones iniciales (4.3) se siguen del Lema 3.2.1 y (1.40). Consideremos, para  $n \geq 2$ , los ocho casos  $(s(n), s(n-1), s(n-2)) = (i, j, k)$  con  $i, j, k \in \{0, 1\}$ . Ya hemos establecido la demostración para los casos equilibrados  $(0, 1, 0)$  y  $(1, 0, 1)$ . Procediendo de la misma manera (haciendo uso del Lema 4.2.1 y de la ley de recurrencia para los polinomios de Szegő (1.40)) obtenemos:

1. Caso  $(0, 0, 0)$ :

$$\phi_n(z) = \left( \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} + z \right) \phi_{n-1}(z) - \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \eta_{n-1}^2 z \phi_{n-2}(z). \quad (4.9)$$

2. Caso  $(0, 0, 1)$ :

$$\phi_n(z) = (\delta_n \overline{\delta_{n-1}} + z) \phi_{n-1}(z) + \delta_n \eta_{n-1}^2 \phi_{n-2}(z). \quad (4.10)$$

3. Caso  $(0, 1, 1)$ :

$$\phi_n(z) = \left( \delta_n + \frac{z}{\delta_{n-1}} \right) \phi_{n-1}(z) - \frac{1}{\delta_{n-1}} \eta_{n-1}^2 \phi_{n-2}(z). \quad (4.11)$$

4. Caso  $(1, 0, 0)$ :

$$\phi_n(z) = \left( \overline{\delta_n} + \frac{1}{\delta_{n-1} z} \right) \phi_{n-1}(z) - \frac{1}{\delta_{n-1}} \eta_{n-1}^2 \phi_{n-2}(z). \quad (4.12)$$

5. Caso  $(1, 1, 0)$ :

$$\phi_n(z) = \left( \overline{\delta_n} \delta_{n-1} + \frac{1}{z} \right) \phi_{n-1}(z) + \overline{\delta_n} \eta_{n-1}^2 \phi_{n-2}(z). \quad (4.13)$$

6. Caso  $(1, 1, 1)$ :

$$\phi_n(z) = \left( \frac{\overline{\delta_n}}{\delta_{n-1}} + \frac{1}{z} \right) \phi_{n-1}(z) - \frac{\overline{\delta_n}}{\delta_{n-1} z} \eta_{n-1}^2 \phi_{n-2}(z). \quad (4.14)$$

Junto con las dos restantes expresiones ya demostradas para los casos equilibrados escribimos finalmente todas estas leyes de recurrencia a tres términos en la forma cerrada (4.2) junto a (4.3)-(4.8).

□

**Nota 4.2.4** Si consideramos la familia de polinomios de Laurent ortonormales  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , la relación (4.2) se convierte en

$$\eta_n \chi_n(z) = (A_n B_n + C_n z^{1-2s(n)}) \chi_{n-1}(z) + (-1)^{1+s(n-2)-s(n-1)} D_n E_n \eta_{n-1} z^{1-s(n)-s(n-2)} \chi_{n-2}(z) \quad (4.15)$$

con las condiciones iniciales  $\chi_i(z) = \frac{\phi_i(z)}{\|\phi_i(z)\|_w}$  para  $i = 0, 1$ .

**Nota 4.2.5** Observemos que como consecuencia de la restricción  $\delta_{n-1} \neq 0$  cuando  $s(n-2) = s(n-1)$  en el Teorema 4.2.3 se deduce que, en general, no existe una ley de recurrencia a tres términos para polinomios de Szegő. En el caso de disponer de una sucesión de coeficientes de Verblunsky que verifique  $\delta_n \neq 0$  para todo  $n \geq 1$  podremos computar tal familia del Teorema 4.2.3 a través de la ley de recurrencia a tres términos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\delta_{n-1}} [(\delta_n + \delta_{n-1}z) \rho_{n-1}(z) - \delta_n \eta_{n-1}^2 z \rho_{n-2}(z)] \quad , \quad n \geq 2$$

con las condiciones iniciales

$$\rho_0(z) \equiv 1 \quad , \quad \rho_1(z) = \delta_1 + z.$$

El siguiente resultado completa la equivalencia entre leyes de recurrencia, probando que (4.2)-(4.8) implica la ley de Szegő (1.40). La prueba en los casos equilibrados quedó establecida en el Teorema 3.2.5, y la prueba cuando se considera un ordenamiento general arbitrario puede realizarse con argumentos similares partiendo en este caso de la correspondiente ley de recurrencia (4.9)-(4.14). En el siguiente resultado consideramos una sucesión generadora fija pero arbitraria y probamos un resultado similar, pero esta vez sin hacer uso de condiciones de ortogonalidad, por lo que no podemos aplicar el Lema 4.2.2 en este caso.

**Teorema 4.2.6** Sea  $\{p(n)\}_{n \geq 0}$  una sucesión generadora y definamos  $p(-1) = 0$ . Consideremos  $\{s(n)\}_{n \geq 0}$  definida por  $s(n) = p(n) - p(n-1)$  y una sucesión arbitraria de números complejos  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  donde  $\delta_0 = 1$  y  $|\delta_n| \neq 1$  para todo  $n \geq 1$ . Supongamos que  $\delta_{n-1} \neq 0$  si  $s(n-2) = s(n-1)$ . Sea  $\{\phi_n(z)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios de Laurent definida por la ley recurrente (4.2) junto a (4.4)-(4.8) y las condiciones iniciales (4.3). Entonces,

1. Para todo  $n \geq 0$ ,  $\phi_n(z)$  es un polinomio mónico de Laurent con  $\phi_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$ .
2. Escribamos  $\phi_n(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}}$  con  $N_n(z) \in \mathbb{P}_n$  y hagamos  $F_0(z) \equiv N_0(z) \equiv 1$  y

$$F_n(z) = \begin{cases} N_n(z) & \text{si } s(n) = 0 \\ N_n^*(z) & \text{si } s(n) = 1 \end{cases} \quad , \quad n \geq 1. \quad (4.16)$$

Entonces,  $\{F_n(z)\}_{n=1}^\infty$  satisface la ley de recurrencia

$$\begin{aligned} F_n(z) &= z F_{n-1}(z) + \delta_n F_{n-1}^*(z) \\ F_n^*(z) &= \overline{\delta_n} z F_{n-1}(z) + F_{n-1}^*(z) \end{aligned} \quad , \quad n \geq 1. \quad (4.17)$$

*Demostración.*- (1) Procediendo por inducción se prueba para todo  $n \geq 1$  que  $\phi_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  y que los coeficientes de los monomios  $z^{q(n)}$  y  $z^{-p(n)}$  son iguales a 1 cuando  $s(n) = 0$  y  $s(n) = 1$  respectivamente, que el coeficiente del monomio  $z^{-p(n)}$  es igual a  $\delta_n$  cuando  $s(n) = 0$  y que el coeficiente del monomio  $z^{q(n)}$  es igual a  $\overline{\delta_n}$  cuando  $s(n) = 1$ . La afirmación se verifica para  $n = 1$  de las condiciones iniciales (4.3) y la demostración se alcanza por inducción de (4.2) dividiendo por separado en los ocho casos  $(s(n), s(n-1), s(n-2)) = (i, j, k)$ , con  $i, j, k \in \{0, 1\}$ .

(2) Procedemos también por inducción. De (4.3) claramente se sigue que  $N_0(z) \equiv 1$  y

$$N_1(z) = \begin{cases} \delta_1 + z & \text{si } s(1) = 0 \\ \overline{\delta_1}z + 1 & \text{si } s(1) = 1 \end{cases},$$

implicando que  $F_1(z) = zF_0(z) + \delta_1 F_0^*(z)$ . Supongamos (hipótesis de inducción) que

$$\begin{aligned} F_{n-1}(z) &= zF_{n-2}(z) + \delta_{n-1}F_{n-2}^*(z) \\ F_{n-1}^*(z) &= \overline{\delta_{n-1}}zF_{n-2}(z) + F_{n-2}^*(z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

De (4.2) obtenemos para  $n \geq 2$  que

$$\begin{aligned} \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}} &= (A_n B_n + C_n z^{1-2s(n)}) \frac{N_{n-1}(z)}{z^{p(n)-s(n)}} + \\ &(-1)^{1+s(n-2)-s(n-1)} D_n E_n \eta_{n-1}^2 z^{1-s(n)-s(n-2)} \frac{N_{n-2}(z)}{z^{p(n)-[s(n)+s(n-1)]}} \end{aligned}$$

lo cual implica la siguiente relación de recurrencia para la familia de polinomios ordinarios  $\{N_n(z)\}_{n \geq 2}$ :

$$N_n(z) = (A_n B_n z^{s(n)} + C_n z^{1-s(n)}) N_{n-1}(z) + (-1)^{1+s(n-2)-s(n-1)} D_n E_n \eta_{n-1}^2 z^{1+s(n-1)-s(n-2)} N_{n-2}(z). \quad (4.19)$$

Consideremos ahora los cuatro casos  $(s(n), s(n-1), s(n-2)) = (0, j, k)$ , con  $j, k \in \{0, 1\}$ . De (4.18) y de la relación (4.19) se deduce:

- Caso  $(0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \left( \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} + z \right) N_{n-1}(z) - \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z) \\ &= z N_{n-1}(z) + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} [N_{n-1}(z) - \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} [z N_{n-2}(z) + \delta_{n-1} N_{n-2}^*(z) - \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} [|\delta_{n-1}|^2 z N_{n-2}(z) + \delta_{n-1} N_{n-2}^*(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n [\overline{\delta_{n-1}} z N_{n-2}(z) + N_{n-2}^*(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n N_{n-1}^*(z). \end{aligned}$$

- Caso  $(0, 0, 1)$ :

$$\begin{aligned} N_n(z) &= (\overline{\delta_{n-1}} \delta_n + z) N_{n-1}(z) + \delta_n \eta_{n-1}^2 N_{n-2}(z) \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n [\overline{\delta_{n-1}} N_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2 N_{n-2}(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n [\overline{\delta_{n-1}} z N_{n-2}^*(z) + |\delta_{n-1}|^2 N_{n-2}(z) + \eta_{n-1}^2 N_{n-2}(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n [\overline{\delta_{n-1}} z N_{n-2}^*(z) + N_{n-2}(z)] \\ &= z N_{n-1}(z) + \delta_n N_{n-1}^*(z). \end{aligned}$$

- Caso (0, 1, 0):

$$\begin{aligned}
 N_n(z) &= (\delta_n + \delta_{n-1}z) N_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2 z^2 N_{n-2}(z) \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z [\delta_{n-1} N_{n-1}(z) + \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z [|\delta_{n-1}|^2 z N_{n-2}(z) + \delta_{n-1} N_{n-2}^*(z) + \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z [z N_{n-2}(z) + \delta_{n-1} N_{n-2}^*(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z N_{n-1}^*(z).
 \end{aligned}$$

- Caso (0, 1, 1):

$$\begin{aligned}
 N_n(z) &= \left( \delta_n + \frac{z}{\delta_{n-1}} \right) N_{n-1}(z) - \frac{1}{\delta_{n-1}} \eta_{n-1}^2 z N_{n-2}(z) \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z \frac{1}{\delta_{n-1}} [N_{n-1}(z) - \eta_{n-1}^2 N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z \frac{1}{\delta_{n-1}} [\overline{\delta_{n-1}} z N_{n-2}^*(z) + N_{n-2}(z) - \eta_{n-1}^2 N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z \frac{1}{\delta_{n-1}} [\overline{\delta_{n-1}} z N_{n-2}^*(z) + |\delta_{n-1}|^2 N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z [z N_{n-2}^*(z) + \delta_{n-1} N_{n-2}(z)] \\
 &= \delta_n N_{n-1}(z) + z N_{n-1}^*(z).
 \end{aligned}$$

Finalmente, la prueba para los cuatro casos restantes se obtiene de las cuatro pruebas anteriores tomando en ambos lados de las igualdades la operación super-estrella.

□

Para finalizar esta sección consideramos un teorema de Favard para la sucesión mónica de polinomios de Laurent  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  respecto a una sucesión generadora arbitraria  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ <sup>1</sup>. La demostración que presentamos, que es bastante simple (compárese con la del Teorema 3.5.5 para los casos equilibrados), está basada en las anteriores leyes de recurrencia y en el Teorema 4.2.6. De nuevo debemos tener presente los conceptos de familias de polinomios de Laurent ortogonales con respecto a un funcional lineal cuasi definido y definido positivo, establecido también en el capítulo anterior.

**Teorema 4.2.7 (Favard)** *Sea  $\{p(n)\}_{n \geq 0}$  una sucesión generadora, definamos  $p(-1) = 0$  y la sucesión  $\{s(n)\}_{n \geq 0}$  por  $s(n) = p(n) - p(n-1) \in \{0, 1\}$ . Consideremos una sucesión arbitraria de números complejos  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  con  $\delta_0 = 1$ ,  $|\delta_n| \neq 1$  para todo  $n \geq 1$  y definamos  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  por  $\lambda_n = 1 - |\delta_n|^2$ . Supongamos también la restricción  $\delta_{n-1} \neq 0$  en los casos  $s(n-2) = s(n-1)$ . Sea  $\{\phi_n(z)\}_{n \geq 0}$  la sucesión de polinomios de Laurent definida para  $n \geq 2$  por la ley de recurrencia*

$$\begin{aligned}
 \phi_n(z) &= \left( A_n B_n + C_n z^{1-2s(n)} \right) \phi_{n-1}(z) \\
 &\quad + (-1)^{1+s(n-2)-s(n-1)} D_n E_n \lambda_{n-1} z^{1-s(n)-s(n-2)} \phi_{n-2}(z)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

con las condiciones iniciales (4.3) y donde  $A_n, B_n, C_n, D_n$  y  $E_n$  son constantes complejas dadas por (4.4)-(4.8). Entonces, fijado  $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  existe un único funcional lineal cuasi definido  $\mu$  tal que  $\mu(1) = \mu_0$  y  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  es la sucesión de polinomios mónicos de Laurent con respecto a  $\mu$  y el orden inducido en  $\Lambda$  por la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n \geq 0}$ . Además, si tomamos  $\mu_0 > 0$  entonces  $\mu$  es definido positivo, sí y sólo sí,  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$ .

<sup>1</sup>Recordemos las referencias ya comentadas en el capítulo 3: [2],[50] y [71].

*Demostración.*- Del Teorema 4.2.6 vemos que para  $n \geq 1$ ,  $\phi_n(z) \in \mathcal{L}_n \setminus \mathcal{L}_{n-1}$  de manera que podemos escribir  $\phi_n(z) = \frac{N_n(z)}{z^{p(n)}}$  con  $N_n(z) \in \mathbb{P}_n$ . Si definimos ahora la sucesión de polinomios ordinarios  $\{\rho_n(z)\}_{n \geq 0}$  por

$$\rho_n(z) = \begin{cases} N_n(z) & \text{si } s(n) = 0 \\ N_n^*(z) & \text{si } s(n) = 1 \end{cases} ,$$

entonces, las relaciones (4.17)-(4.16) se convierten en (1.40). Así, haciendo uso del Teorema de Favard en el caso polinómico ordinario vemos que la familia  $\{\rho_n(z)\}_{n \geq 0}$  representa la familia de polinomios mónicos ortogonales (polinomios de Szegő) con respecto a un único funcional lineal cuasi definido  $\mu$  con  $\mu(1) = \mu_0$  y definido positivo, sí y sólo sí,  $\mu_0 > 0$  y  $|\delta_n| < 1$  para todo  $n \geq 1$ . Finalmente, la prueba se sigue del Lema 4.2.2 que claramente se cumple cuando la medida  $\mu$  es reemplazada por un funcional lineal cuasi definido (positivo) o definido positivo. □

### 4.3. El operador multiplicación en $\Lambda$

De las leyes de recurrencia equivalentes probadas en el capítulo anterior cabe observar que las dadas por (3.11)-(3.12) y (3.22)-(3.23) involucran multiplicación por  $z$  y  $z^{-1}$  conjuntamente mientras que la dada en la Proposición 3.2.9 involucra sólo multiplicación por  $z$ . Es esta última ley recurrente la que va a jugar un papel fundamental en la presente sección. Comencemos considerando el operador multiplicación definido en  $\Lambda$ :

$$M : \begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \\ L(z) & \longrightarrow & zL(z) \end{array} .$$

Como hemos visto, si consideramos la sucesión de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $p(n) = 0$  para todo  $n \geq 0$ , entonces el  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal coincide con el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal de Szegő, para todo  $n \geq 0$ . Dado que el operador  $M$  deja invariante al espacio  $\mathbb{P}$ , tomando  $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  como base de  $\mathbb{P}$  se obtiene la siguiente representación matricial de la restricción de  $M$  a  $\mathbb{P}$  (véase por ejemplo [58], [63] ó [95]):

$$\mathcal{H}(\delta) = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ h_{1,0} & h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & 0 & \cdots \\ h_{2,0} & h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} . \tag{4.21}$$

Los elementos de esta matriz, con estructura de Hessenberg, vienen dados por

$$h_{i,j} = \begin{cases} -\overline{\delta_j} \delta_{i+1} \prod_{k=j+1}^i \eta_k & \text{if } j = 0, 1, \dots, i-1, \\ -\overline{\delta_i} \delta_{i+1} & \text{if } j = i, \\ \eta_{i+1} & \text{if } j = i+1. \end{cases} \tag{4.22}$$

Si consideramos ahora la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  se sigue de la ley de recurrencia dada en la Proposición 3.2.9 la siguiente matriz penta-diagonal (representación CMV,

véase [95]) para el operador multiplicación  $M$  (véase [25]), la cual puede expresarse como producto de dos matrices tri-diagonales:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\delta) &= \begin{pmatrix} -\delta_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\eta_1\delta_2 & -\overline{\delta_1}\delta_2 & -\eta_2\delta_3 & \eta_2\eta_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \eta_1\eta_2 & \overline{\delta_1}\eta_2 & -\overline{\delta_2}\delta_3 & \overline{\delta_2}\eta_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\eta_3\delta_4 & -\overline{\delta_3}\delta_4 & -\eta_4\delta_5 & \eta_4\eta_5 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \eta_3\eta_4 & \overline{\delta_3}\eta_4 & -\overline{\delta_4}\delta_5 & \overline{\delta_4}\eta_5 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\delta_2 & \eta_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \eta_2 & \overline{\delta_2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_4 & \eta_4 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \eta_4 & \overline{\delta_4} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \eta_1 & \overline{\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\delta_3 & \eta_3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \eta_3 & \overline{\delta_3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_5 & \eta_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Además, es fácil comprobar que la matriz de representación cuando se escoge la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  es precisamente  $\mathcal{C}(\delta)^T$ .

El propósito de esta sección es analizar la estructura de la matriz de representación para el operador multiplicación  $M$  cuando se considera una sucesión generadora fija pero arbitraria. Comenzamos con el siguiente resultado, que es una generalización de la Proposición 2.4 en [25] donde se prefijaron las familias de polinomios de Laurent ortogonales asociadas a los ordenamientos equilibrados.

**Teorema 4.3.1** *Sea  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios de Laurent ortonormales respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ . Entonces, para cada  $n \geq 0$  existe  $k = k(n) \geq 1$  y  $t = t(n) \geq 1$  tal que  $z\chi_n(z) \in \text{span}\{\chi_{n-t}(z), \dots, \chi_{n+k}(z)\}$ , es decir*

$$z\chi_n(z) = \sum_{s=n-t}^{n+k} a_{n,s} \chi_s(z) \quad , \quad a_{n,s} = \langle z\chi_n(z), \chi_s(z) \rangle_\omega.$$

Además,  $k = k(n)$  y  $t = t(n)$  se definen como sigue:

1.  $k = 1$  si  $s(n+1) = 0$  y en otro caso  $k \geq 2$  se define verificando  $s(n+1) = \dots = s(n+k-1) = 1$ ,  $s(n+k) = 0$ .
2.  $t = 1$  si  $s(n-1) = 1$  y en otro caso  $t \geq 2$  se define verificando  $s(n-1) = \dots = s(n+1-t) = 0$ ,  $s(n-t) = 1$ .

*Demostración.*- Por un lado, dado que  $\chi_n(z) \in \mathcal{L}_n$  entonces

$$z\chi_n(z) \in z\mathcal{L}_n = \text{span}\left\{ \frac{1}{z^{p(n)-1}}, \dots, z^{q(n)+1} \right\} \subset \mathcal{L}_{n+k}$$

con  $k = k(n) \geq 1$ . Obsérvese que la condición  $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$  garantiza la existencia de  $k$ . Por otro lado, dado que  $\chi_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-1}$  entonces

$$z\chi_n(z) \perp z\mathcal{L}_{n-1} = \text{span}\left\{ \frac{1}{z^{p(n-1)-1}}, \dots, z^{q(n-1)+1} \right\} \supset \mathcal{L}_{n-1-t}$$

con  $t = t(n) \geq 1$ . Como  $z\chi_n(z) \in \mathcal{L}_{n+k}$  y  $z\chi_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-1-t}$  se concluye la prueba.  $\square$

A partir del Teorema 4.3.1 podemos analizar ahora la matriz de representación del operador  $M$  con respecto a una sucesión generadora arbitraria de manera que posea el número mínimo de diagonales principales. Como hemos visto, los ordenamientos equilibrados dan lugar a matrices penta-diagonales, y podríamos preguntarnos si existen otras posibles sucesiones generadoras que den lugar a matrices de representación con un número de diagonales menor o igual que cinco. Al respecto comenzamos remarcando que una representación pentadiagonal se obtiene cuando ocurre alguno de los tres casos siguientes:

1.  $k(n) = 1, t(n) \leq 3$  para todo  $n$ ,
  2.  $k(n) \leq 2, t(n) \leq 2$  para todo  $n$ ,
  3.  $k(n) \leq 3, t(n) = 1$  para todo  $n$ .
- (4.24)

Tenemos por tanto las siguientes consideraciones:

1. **Lema 4.3.2** *No se obtiene una representación penta-diagonal si  $\{s(n)\}_{n \geq 1}$  contiene tres o más ceros o unos consecutivos.*

*Demostración.*- Del Teorema 4.3.1 se sigue que un bloque  $(s(n), s(n+1), s(n+2), s(n+3), s(n+4)) = (1, 0, 0, 0, 1)$  implica  $(k(n), k(n+1), k(n+2)) = (1, 1, 1)$  con  $k(n+3) \geq 2$  y  $(t(n+1), t(n+2), t(n+3), t(n+4)) = (1, 2, 3, 4)$  mientras que un bloque  $(s(n), s(n+1), s(n+2), s(n+3), s(n+4)) = (0, 1, 1, 1, 0)$  implica  $(k(n), k(n+1), k(n+2), k(n+3)) = (4, 3, 2, 1)$  y  $t(n+1) \geq 2$  con  $(t(n+2), t(n+3), t(n+4)) = (1, 1, 1)$ . La prueba se sigue dado que la condición (4.24) falla en ambas situaciones. De aquí, la prueba cuando  $\{s(n)\}_{n \geq 1}$  contiene más de tres ceros o unos consecutivos es trivial.  $\square$

Como consecuencia del Lema 4.3.2, el número de ceros o unos consecutivos en la sucesión  $\{s(n)\}_{n \geq 1}$  es como máximo dos.

2. Si el número de ceros o unos consecutivos es precisamente uno para todo  $n$  entonces la situación se corresponde con las sucesiones generadoras:

$$p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right] \quad , \quad p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$$

y como ya hemos comentado, se obtiene la representación matricial penta-diagonal  $\mathcal{C}(\delta)$  y  $\mathcal{C}(\delta)^T$  respectivamente.

Concentrémonos a continuación en lo que ocurre si aparecen dos ceros o unos consecutivos en la sucesión  $\{s(n)\}_{n \geq 1}$ . De hecho, un bloque de la forma

$$(s(n), s(n+1), s(n+2), s(n+3)) = (1, 0, 0, 1)$$

implica  $t(n+2) = 2, k(n+2) \geq 2, t(n+3) = 3, k(n+3) \geq 1$  y por lo tanto no se obtiene una representación penta-diagonal dado que no se cumple la condición (4.24). Supongamos ahora un bloque de la forma

$$(s(n), s(n+1), s(n+2), s(n+3)) = (0, 1, 1, 0).$$

Si  $s(n-1) = 0$  entonces  $t(n+1) = 3$  y  $k(n+1) = 2$  mientras que si  $s(n-1) = 1$  entonces  $t(n) = 1$ ,  $k(n) = 3$  y  $t(n+1) = k(n+1) = 2$ , implicando en ambos casos que la situación (4.24) no se cumple. Observemos que este argumento es válido para todo  $n \geq 2$ , pero realmente se cumple para  $n \geq 0$ . De hecho, si consideramos las sucesiones generadoras  $p(n) = E\left[\frac{n+1}{2}\right]$  para todo  $n \geq 2$  con  $p(0) = p(1) = 0$  ó  $p(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$  para todo  $n \geq 2$  con  $p(0) = 0$  y  $p(1) = 1$  entonces es fácil comprobar que se obtiene una matriz de representación no penta-diagonal. Resumiendo establecemos el siguiente

**Teorema 4.3.3** *La matriz de representación del operador multiplicación  $M$  es penta-diagonal, sí y sólo sí,  $p(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$  ó  $p(n) = E\left[\frac{n+1}{2}\right]$ . Además, esta representación es la más estrecha en el sentido de que cualquier otra representación matricial para otro ordenamiento inducido por otra sucesión generadora da lugar a una representación matricial  $l$ -diagonal con  $l \geq 6$ .*

□

**Nota 4.3.4** *Nuestra deducción del Teorema 4.3.3 usa meramente condiciones de ortogonalidad. Este resultado ha sido recientemente probado en [28] usando técnicas de Teoría de Operadores.*

**Ejemplo 4.3.5** *Supongamos que el espacio  $\Lambda$  se expande según la base ordenada*

$$\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^{-3}, z^3, z^4, z^{-4}, z^{-5}, z^5, z^6, z^{-6}, z^{-7}, \dots\}.$$

*Aquí  $\{s(n)\}_{n \geq 1} = \{0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$  y se observa que*

$$z\chi_0(z) \in \text{span}\{\chi_0(z), \chi_1(z)\} \quad , \quad z\chi_1(z) \in \text{span}\{\chi_0(z), \chi_1(z), \chi_2(z), \chi_3(z)\}.$$

*De la sucesión  $\{s(n)\}_{n \geq 1}$  y del Teorema 4.3.1 construimos las sucesiones  $\{t(n)\}_{n \geq 2} = \{2, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 1, \dots\}$  y  $\{k(n)\}_{n \geq 2} = \{1, 3, 2, 1, 1, 3, 2, 1, \dots\}$ . Tales sucesiones nos indican el número de elementos no nulos en cada fila y en cada columna de la matriz. Ahora, podemos obtener los coeficientes de la matriz en términos de los polinomios ortonormales de Szegő haciendo uso de la fórmula dada en el Teorema 4.3.1 y del Lema 4.2.2, deduciendo expresiones de la forma  $\langle z^l f(z), g(z) \rangle_\omega$  donde  $l \geq 0$  y  $f(z), g(z) \in \{\varphi_n(z)\}_{n \geq 0} \cup \{\varphi_n^*(z)\}_{n \geq 0}$ . Algunas de estas cantidades se pueden calcular explícitamente en términos de la familia de coeficientes de Verblunsky (véase [95, Capítulo 1]). Las cantidades restantes podemos obtenerlas de estas fórmulas y de las relaciones  $\langle z^t \varphi_m^*(z), \varphi_n(z) \rangle_\omega = \langle z^{t+m-n} \varphi_n^*(z), \varphi_m(z) \rangle_\omega$  y  $\langle z^t \varphi_m^*(z), \varphi_n(z) \rangle_\omega = \langle z^{t+m-n} \varphi_n^*(z), \varphi_m(z) \rangle_\omega$  las cuales se cumplen para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $n, m \geq 0$ , y dado que  $\varphi_n^*(z) = z^n \overline{\varphi_n(z)}$  cuando  $z \in \mathbb{T}$ . El resultado es la siguiente matriz de representación con estructura hepta-diagonal:*

$$\begin{pmatrix} -\delta_1 & \eta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\eta_1\delta_2 & -\bar{\delta}_1\delta_2 & -\eta_2\delta_3 & \eta_2\eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \eta_1\eta_2 & \bar{\delta}_1\eta_2 & -\bar{\delta}_2\delta_3 & \bar{\delta}_2\eta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\eta_3\delta_4 & -\bar{\delta}_3\delta_4 & -\eta_4\delta_5 & -\eta_4\eta_5\delta_6 & \eta_4\eta_5\eta_6 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \eta_3\eta_4 & \bar{\delta}_3\eta_4 & -\bar{\delta}_4\delta_5 & -\bar{\delta}_4\eta_5\delta_6 & \bar{\delta}_4\eta_5\eta_6 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_5 & -\bar{\delta}_5\delta_6 & \bar{\delta}_5\eta_6 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_6\delta_7 & -\bar{\delta}_6\delta_7 & \eta_7 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_6\eta_7\delta_8 & -\bar{\delta}_6\eta_7\delta_8 & -\bar{\delta}_7\delta_8 & -\eta_8\delta_9 & -\eta_8\eta_9\delta_{10} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_6\eta_7\eta_8 & \bar{\delta}_6\eta_7\eta_8 & \bar{\delta}_7\eta_8 & -\bar{\delta}_8\delta_9 & -\bar{\delta}_8\eta_9\delta_{10} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_9 & -\bar{\delta}_9\delta_{10} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_{10}\delta_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Concluimos finalmente esta sección considerando brevemente el operador de multiplicación inverso  $N$  definido en  $\Lambda$ , a saber:

$$N : \Lambda \longrightarrow \Lambda \\ L(z) \longrightarrow \frac{1}{z}L(z).$$

Nuestro primer resultado es un análogo al Teorema 4.3.1 cuya demostración omitimos.

**Teorema 4.3.6** *Sea  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , y supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$ . Entonces, para cada  $n \geq 0$  existe  $\tilde{k} = \tilde{k}(n) \geq 1$  y  $\tilde{t} = \tilde{t}(n) \geq 1$  tal que  $\frac{1}{z}\chi_n(z) \in \text{span}\{\chi_{n-\tilde{t}}(z), \dots, \chi_{n+\tilde{k}}(z)\}$ , es decir*

$$\frac{1}{z}\chi_n(z) = \sum_{s=n-\tilde{t}}^{n+\tilde{k}} \tilde{a}_{n,s}\chi_s(z) \quad , \quad \tilde{a}_{n,s} = \overline{a_{s,n}}, \quad (4.25)$$

con  $a_{s,n}$  dada en el Teorema 4.3.1. Además, definimos  $\tilde{k} = \tilde{k}(n)$  y  $\tilde{t} = \tilde{t}(n)$  como sigue:

1.  $\tilde{k} = 1$  si  $s(n+1) = 1$  y en otro caso  $\tilde{k} \geq 2$  se define verificando  $s(n+1) = \dots = s(n+\tilde{k}-1) = 0$ ,  $s(n+\tilde{k}) = 1$ .
2.  $\tilde{t} = 1$  si  $s(n-1) = 0$  y en otro caso  $\tilde{t} \geq 2$  se define verificando  $s(n-1) = \dots = s(n+1-\tilde{t}) = 1$ ,  $s(n-\tilde{t}) = 0$ .

□

Finalmente, indicar que procediendo como antes, deducimos un resultado similar al Teorema 4.3.3 para el operador inverso  $N$ . Además, de (4.25) se sigue que la matriz de representación del operador  $N$  coincide con la traspuesta conjugada del operador  $M$ . Por tanto, cuando se trabaja con la sucesión generadora equilibrada  $p(n) = E\left[\frac{n}{2}\right]$  se tiene  $\mathcal{C}(\delta)^* = \overline{\mathcal{C}(\delta)}^T$ .

### 4.4. Fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad

Hemos visto en el capítulo primero como construir fórmulas de cuadratura (fórmulas de Szegő) con el fin de calcular integrales sobre la circunferencia unidad con exactitud en  $\Lambda_{-(n-1),n-1}$ . El propósito de esta sección es recuperar de nuevo las fórmulas de Szegő y los polinomios para-ortogonales pero partiendo del contexto más natural de los polinomios de Laurent ortogonales en la circunferencia unidad y respecto a un ordenamiento general. Como ya hemos visto y debido al hecho de que  $\mathcal{L}_{n-1}$  es un sistema de Chebyshev en  $\mathbb{T}$  de dimensión  $n$  (dado que  $0 \notin \mathbb{T}$ ), para  $n$  nodos distintos  $z_1, \dots, z_n$  en  $\mathbb{T}$  podemos determinar unívocamente los parámetros  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de manera que:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{L}_{n-1}.$$

Ahora, una vez fijado en  $\Lambda$  el orden inducido por la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  aparecen dos cuestiones: ¿será posible escoger el conjunto de nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{T}$  de manera que el dominio de validez  $\mathcal{L}_{n-1}$  para  $I_n(f)$  pueda agrandarse? y ¿cómo agrandar  $\mathcal{L}_{n-1}$ ? Con respecto a esto, inspirado en el caso polinómico ordinario (recordemos que la fórmula Gaussiana con  $n$  nodos es exacta en  $\mathbb{P}_{2n-1} = \mathbb{P}_n \mathbb{P}_{n-1}$ ), trabajaremos con subespacios de  $\Lambda$  de la forma  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*} = \Lambda_{-[p(n)+q(r)], [q(n)+p(r)]}$  para  $r \geq 0$ , con dimensión  $n + r + 1$  ( $\mathcal{L}_{n-1}$  es un dominio de validez tal que  $\mathcal{L}_{n-1} \subset \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$ ). La cuestión ahora es: ¿cuánto de grande podemos escoger  $r = r(n)$ ? Por lo que hemos visto en el capítulo primero, no puede existir una fórmula de cuadratura (1.64) que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{n*} = \Lambda_{-n,n}$ . Como consecuencia vemos que  $0 \leq r \leq n - 1$  y nos planteamos ahora si es posible construir una fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  con  $n$  nodos en  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-1)*}$ . Al respecto debemos primero recordar que si tomamos los órdenes particulares inducidos por  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  ó  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$ , vemos del capítulo anterior (Teorema 3.4.3) que no puede existir una fórmula de cuadratura con nodos en  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-1)*} = \Lambda_{-n,n-1}$  ó en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-1)*} = \Lambda_{-(n-1),n}$  respectivamente. Cuando trabajamos con una sucesión generadora general, necesitamos primero la siguiente condición necesaria para los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$ :

**Teorema 4.4.1** *Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos como (1.64) exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$  con  $0 \leq r \leq n - 1$ , y tomemos  $\phi_n(z) = \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)}} = \frac{\prod_{j=1}^n (z - z_j)}{z^{p(n)}} \in \mathcal{L}_n$ . Entonces,*

$$\langle \phi_n(z), R(z) \rangle_\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) \overline{R(z)} d\omega(\theta) = 0 \quad , \quad \forall R(z) \in \mathcal{L}_r \quad , \quad z = e^{i\theta}.$$

*Demostración.-* Recordemos que  $\mathcal{L}_r = \Lambda_{-p(r),q(r)}$  y  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*} = \Lambda_{-[p(n)+q(r)], [q(n)+p(r)]}$ . Luego, es suficiente comprobar que  $\langle \phi_n(z), z^j \rangle_\omega = 0$  para todo  $-p(r) \leq j \leq q(r)$ . Dado que  $Q_n$  posee grado  $n$ , vemos que

$$\phi_n(z) z^{-j} \in \Lambda_{-[p(n)+j], [n-p(n)-j]} = \Lambda_{-[p(n)+j], [q(n)-j]} \subset \Lambda_{-[p(n)+q(r)], [q(n)+p(r)]} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$$

cuando  $-p(r) \leq j \leq q(r)$ . Además,  $\langle \phi_n(z), z^j \rangle_\omega = I_\omega(\phi_n(z) z^{-j}) = I_n(\phi_n(z) z^{-j}) = 0$ , dado que  $\phi_n(z_j) = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$ .

□

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado negativo que generaliza al Teorema 3.4.3:

**Corolario 4.4.2** *No puede existir una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos como (1.64) con nodos en  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_{(n-1)*}$  para cualquier sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ .*

*Demostración.-* Asumamos que (1.64), con nodos en  $\mathbb{T}$ , es exacta en  $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_{(n-1)*}$ . Entonces,  $\phi_n(z)$  (tal y como se ha definido en el Teorema 4.4.1) coincide, salvo factor multiplicativo, con el  $n$ -ésimo polinomio de Laurent mónico ortogonal en la circunferencia unidad con respecto a la medida  $\omega(\theta)$  y la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ . Por lo tanto, se sigue como consecuencia del Lema 4.2.2 que los ceros de  $\phi_n(z)$  se encuentran en  $\mathbb{D}$  (si  $s(n) = 0$ ) ó en  $\mathbb{E}$  (si  $s(n) = 1$ ), lo cual implica una contradicción. □

También podemos establecer el siguiente resultado en dirección opuesta:

**Teorema 4.4.3** *Sea  $\phi_n(z) \in \mathcal{L}_n$  tal que  $\phi_n(z) \perp \mathcal{L}_r$  con  $0 \leq r \leq n-1$  y asumamos que  $\phi_n(z)$  tiene  $n$  ceros distintos  $z_1, \dots, z_n$  sobre  $\mathbb{T}$ . Entonces, existen coeficientes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$$

cumple  $I_n(f) = I_\omega(f)$  para todo  $f \in \mathcal{L}_n\mathcal{L}_{r*}$ .

*Demostración.-* Sea  $L^{(j)}$  perteneciente al espacio  $\mathcal{L}_{n-1}$  y que satisfaga las condiciones  $L^{(j)}(z_k) = \delta_{j,k}$  (función delta de Kronecker) para todo  $j = 1, \dots, n$ . Entonces tenemos que:

$$I_\omega(L^{(k)}) = I_n(L^{(k)}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j L^{(k)}(z_j) = \lambda_k,$$

es decir,  $\lambda_k = I_\omega(L^{(k)})$  para todo  $k$ . Ahora bien, sea  $L \in \mathcal{L}_n\mathcal{L}_{r*}$  y definamos  $R(z) = L(z) - \sum_{j=1}^n L(z_j)L^{(j)}(z)$ . Entonces,  $R \in \mathcal{L}_n\mathcal{L}_{r*}$  y  $R(z_j) = 0$  para todo  $j$  por lo que debemos escribir por tanto  $R(z) = \phi_n(z)T_*(z)$ , donde  $T(z) = \frac{S(z)}{z^{q(r)}}$ ,  $S \in \Pi_r$ . Se sigue que

$$I_\omega(L) = I_\omega(R) + I_\omega\left(\sum_{j=1}^n L(z_j)L^{(j)}(z)\right) = \langle \phi_n(z), T(z) \rangle_\omega + \sum_{j=1}^n \lambda_j L(z_j) = I_n(L),$$

dado que claramente,  $T \in \mathcal{L}_r$  y por lo tanto  $\langle \phi_n(z), T(z) \rangle_\omega = 0$ . □

Nuestro siguiente paso será considerar el caso  $r = n-2$  e investigar si es posible construir una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos sobre  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_{(n-2)*}$ . Para este propósito, hagamos  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2)$  para todo  $n \geq 2$  ( $q(n) - q(n-2) = 2 - \lambda(n)$ ), por lo que:

$$\mathcal{L}_n\mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-[p(n)+q(n-2)], q(n)+p(n-2)} = \Lambda_{-[n-2+\lambda(n)], n-\lambda(n)}.$$

Así, si existe una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos como (1.64) que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}$ , con  $R_n(z) = \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)}} = \frac{\prod_{j=1}^n (z - z_j)}{z^{p(n)}} \in \mathcal{L}_n$ , del Teorema 4.4.1 tenemos que

$$\langle R_n(z), h(z) \rangle_\omega = 0 \quad , \quad \forall h(z) \in \mathcal{L}_{n-2}.$$

Esto significa que  $R_n(z) \perp \mathcal{L}_{n-2}$  y tendremos pues que

$$R_n(z) = \alpha_n \phi_n(z) + \beta_n \phi_{n-1}(z) \quad , \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_n \neq 0. \quad (4.26)$$

Dado que  $\lambda(n) \in \{0, 1, 2\}$  para todo  $n \geq 2$ , analizamos por separado los tres siguientes casos:

**Caso 1.**  $\lambda(n) = 2$ . Esto significa  $p(n) > p(n-1) > p(n-2)$  y del Lema 4.2.2 tendremos que  $\phi_n(z) = \frac{\rho_n^*(z)}{z^{p(n)}}$  y  $\phi_{n-1}(z) = \frac{\rho_{n-1}^*(z)}{z^{p(n-1)}}$ . Por tanto, dado que  $p(n) = p(n-1) + 1$ , de (4.26) obtenemos que

$$R_n(z) = \frac{\alpha_n \rho_n^*(z) + z \beta_n \rho_{n-1}^*(z)}{z^{p(n)}}.$$

Ahora el dominio de validez para  $I_n(f)$  es  $\Lambda_{-n, n-2}$  y los nodos de la fórmula de cuadratura deberán ser los ceros de  $Q_n(z) = \alpha_n \rho_n^*(z) + z \beta_n \rho_{n-1}^*(z)$ , con  $\alpha_n$  y  $\beta_n$  elegidos convenientemente.

**Caso 2.**  $\lambda(n) = 1$ . El dominio de validez para  $I_n(f)$  es ahora  $\Lambda_{-(n-1), n-1}$  y del mismo argumento se sigue que

$$R_n(z) = \begin{cases} \frac{\alpha_n \rho_n^*(z) + z \beta_n \rho_{n-1}^*(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } p(n) > p(n-1) = p(n-2) \\ \frac{\alpha_n \rho_n(z) + \beta_n \rho_{n-1}^*(z)}{z^{p(n)}} & \text{si } p(n) = p(n-1) > p(n-2) \end{cases}.$$

**Caso 3.**  $\lambda(n) = 0$ . Esto significa que  $p(n) = p(n-1) = p(n-2)$  y el dominio de validez para  $I_n(f)$  es  $\Lambda_{-(n-2), n}$ . En este caso se sigue que

$$R_n(z) = \frac{\alpha_n \rho_n(z) + \beta_n \rho_{n-1}(z)}{z^{p(n)}}.$$

Resumimos estos resultados en la siguiente

**Proposición 4.4.4** *Asumamos que existe una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  que sea exacta en  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-[p(n)+q(n-2)], p(n-2)+q(n)}$ . Denotemos por  $Q_n(z)$  su polinomio nodal, es decir,  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ , y hagamos  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2) \in \{0, 1, 2\}$ . Entonces, existe  $\alpha_n \neq 0$  y  $\beta_n$  tal que*

1. Si  $\lambda(n) = 2$ , entonces  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-n, n-2}$  y

$$Q_n(z) = \alpha_n \rho_n^*(z) + z \beta_n \rho_{n-1}^*(z). \quad (4.27)$$

2. Si  $\lambda(n) = 1$ , entonces  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-(n-1), n-1}$  y

$$Q_n(z) = \alpha_n \rho_n^*(z) + z \beta_n \rho_{n-1}(z) \quad , \quad \text{si } p(n) > p(n-1) = p(n-2), \quad (4.28)$$

$$Q_n(z) = \alpha_n \rho_n(z) + \beta_n \rho_{n-1}^*(z) \quad , \quad \text{si } p(n) = p(n-1) > p(n-2). \quad (4.29)$$

3. Si  $\lambda(n) = 0$ , entonces  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-(n-2),n}$  y

$$Q_n(z) = \alpha_n \rho_n(z) + \beta_n \rho_{n-1}(z). \quad (4.30)$$

□

Como requerimos que los nodos estén localizados sobre  $\mathbb{T}$ ,  $Q_n(z)$  debe tener grado exacto  $n$  y ser invariante. Nuestro propósito ahora es comprobar cuándo un polinomio  $Q_n(z)$  con tales condiciones tiene exactamente  $n$  nodos distintos en  $\mathbb{T}$ . Concentrémonos primero en el caso  $\lambda(n) = 1$ , recordando ahora que  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*} = \Lambda_{-(n-1),n-1}$ .

Si  $p(n) > p(n-1)$ , de (4.28) y dado que  $\rho_n(z)$  es mónico, se sigue por comparación de los monomios  $z^n$  y  $z^0 = 1$  que  $\beta_n + \overline{\delta_n} \alpha_n = 1$  y  $\alpha_n = (-1)^n z_1 \cdots z_n$  respectivamente, implicando  $\alpha_n \in \mathbb{T}$  para todo  $n \geq 0$ . Por tanto,  $1 - \overline{\delta_n} \alpha_n \neq 0$  y

$$Q_n(z) = \alpha_n \rho_n^*(z) + (1 - \overline{\delta_n} \alpha_n) z \rho_{n-1}(z) \quad , \quad \alpha_n \in \mathbb{T}. \quad (4.31)$$

Obsérvese que la propiedad  $\deg(Q_n(z)) = n$  queda garantizada. Verifiquemos las propiedades de ortogonalidad para  $Q_n(z)$ . De (1.30) y (4.31) se sigue que  $\langle Q_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$  para todo  $1 \leq k \leq n-1$ , mientras que

$$\langle Q_n(z), z^n \rangle_\omega = (1 - \overline{\delta_n} \alpha_n) \langle \rho_{n-1}(z), z^{n-1} \rangle_\omega \neq 0.$$

Además, tenemos

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_\omega = \alpha_n \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_\omega + (1 - \overline{\delta_n} \alpha_n) \langle z \rho_{n-1}(z), 1 \rangle_\omega$$

y de las relaciones de recurrencia (1.40) para  $\rho_n(z)$  se cumple

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_\omega = (\alpha_n - \delta_n) \langle \rho_{n-1}^*(z), 1 \rangle_\omega \neq 0,$$

dado que  $|\alpha_n| = 1$  y  $|\delta_n| < 1$ . Además,  $Q_n(z)$  también satisface la propiedad de invarianza deseada. En efecto, de la ley de recurrencia (1.40) se sigue que

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \alpha_n \rho_n^*(z) + \frac{1 - \overline{\alpha_n} \overline{\delta_n}}{\eta_n^2} [\rho_n(z) - \delta_n \rho_n^*(z)] = \left( \alpha_n - \frac{\delta_n (1 - \overline{\alpha_n} \overline{\delta_n})}{\eta_n^2} \right) \rho_n^*(z) + \frac{1 - \overline{\alpha_n} \overline{\delta_n}}{\eta_n^2} \rho_n(z) \\ &= \frac{\alpha_n - \delta_n}{\eta_n^2} \rho_n^*(z) + \frac{1 - \overline{\alpha_n} \overline{\delta_n}}{\eta_n^2} \rho_n(z), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$Q_n^*(z) = \frac{1 - \overline{\alpha_n} \delta_n}{\eta_n^2} \rho_n^*(z) + \frac{\overline{\alpha_n} - \overline{\delta_n}}{\eta_n^2} \rho_n(z) = k_n Q_n(z) \quad , \quad k_n = \frac{1}{\alpha_n} = \frac{(-1)^n}{z_1 \cdots z_n} \in \mathbb{T}.$$

Comprobamos ahora el caso  $p(n) = p(n-1)$ . Tenemos, de la fórmula (4.29), que  $Q_n(z) = \alpha_n \rho_n(z) + \beta_n \rho_{n-1}^*(z)$ . Dado que  $Q_n(z)$  y  $\rho_n(z)$  son ambos mónicos, de nuevo por comparación de los monomios  $z^n$  y  $z^0 = 1$  se sigue que  $\alpha_n = 1$  y  $\alpha_n \delta_n + \beta_n = (-1)^n z_1 \cdots z_n$  respectivamente. Esto implica que  $\deg(Q_n(z)) = n$ ,  $|\delta_n + \beta_n| = 1$  y por lo tanto  $\beta_n \neq 0$ . Ahora, de (1.43) se cumple

$$Q_n(z) = \rho_n(z) + \frac{\beta_n}{\eta_n^2} (\rho_n^*(z) - \overline{\delta_n} \rho_n(z)) = \frac{1 - \overline{\delta_n} (\delta_n + \beta_n)}{\eta_n^2} \rho_n(z) + \frac{\beta_n}{\eta_n^2} \rho_n^*(z). \quad (4.32)$$

Dado que  $|\delta_n + \beta_n| = 1$  y  $\beta_n \neq 0$  se sigue que  $\langle Q_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$  para todo  $1 \leq k \leq n-1$  y que

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_\omega = \frac{\beta_n}{\eta_n^2} \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_\omega \neq 0,$$

$$\langle Q_n(z), z^n \rangle_\omega = \frac{1 - \overline{\delta_n}(\delta_n + \beta_n)}{\eta_n^2} \langle \rho_n(z), z^n \rangle_\omega \neq 0,$$

es decir,  $Q_n(z)$  es para-ortogonal. Finalmente, la propiedad de invarianza se sigue de (4.32). En efecto,

$$Q_n^*(z) = \frac{\overline{\beta_n}}{\eta_n^2} \rho_n(z) + \frac{1 - \delta_n(\overline{\delta_n} + \overline{\beta_n})}{\eta_n^2} \rho_n^*(z) = k_n Q_n(z) \quad , \quad k_n = \overline{\delta_n + \beta_n} = \frac{(-1)^n}{z_1 \cdots z_n} \in \mathbb{T}.$$

Paralelamente al caso polinómico ordinario, dada la familia de polinomios mónicos de Laurent ortogonales  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , un polinomio de Laurent de la forma

$$R_n(z) = \alpha \phi_n(z) + \beta \phi_{n-1}(z) \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

se denominará “polinomio de Laurent cuasi-ortogonal”. Así, como consecuencia directa del Teorema 1.3.4 estamos en condiciones de establecer el siguiente

**Teorema 4.4.5 (ceros de polinomios de Laurent cuasi-ortogonales)** *Consideremos la familia  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  de polinomios mónicos de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y a la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ . Supongamos que  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2) = 1$  y denotemos por  $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociada a la medida  $\omega$ . Sea*

$$R_n(z) = c_n [\phi_n(z) + \tau_n \phi_{n-1}(z)] \tag{4.33}$$

con  $c_n \neq 0$  y

$$\tau_n = \begin{cases} \overline{\alpha_n - \delta_n} & \text{si } s(n) = 1 \\ \alpha_n - \delta_n & \text{si } s(n) = 0 \end{cases} \quad , \quad \alpha_n \in \mathbb{T}. \tag{4.34}$$

Entonces,  $R_n(z)$  tiene exactamente  $n$  ceros distintos en  $\mathbb{T}$ .

□

**Nota 4.4.6** *Ahora, de (1.38) y el Lema 4.2.2 se sigue que si  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  representa la familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ , entonces la relación (4.33) se convierte en:*

$$R_n(z) = c_n [\eta_n \chi_n(z) + \tau_n \chi_{n-1}(z)] \tag{4.35}$$

donde  $c_n \neq 0$ ,  $\tau_n$  dado por (4.34) y  $\eta_n$  por (1.32). Necesitaremos esta última relación en el Teorema 4.4.12.

A continuación establecemos la conexión entre para-ortogonalidad y cuasi-ortogonalidad:

**Teorema 4.4.7** Sea  $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión de polinomios mónicos de Laurent ortogonales con respecto a la medida  $\omega$  y al orden inducido por la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ . Denotemos por  $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión de coeficientes de Verblunsky asociados a  $\omega$  y consideremos  $R_n(z)$  dado por (4.33)-(4.34). Entonces,  $R_n(z) = \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)}}$  con  $Q_n(z)$  para-ortogonal e invariante, sí y sólo sí,  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2) = 1$ .

*Demostración.*- “ $\Rightarrow$ ” Las condiciones de para-ortogonalidad de  $Q_n(z)$

$$\langle Q_n(z), z^j \rangle_{\omega} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} \neq 0, \quad \langle Q_n(z), z^n \rangle_{\omega} \neq 0$$

implican

$$R_n(z) \perp \text{span} \left\{ z^k : -p(n) + 1 \leq k \leq q(n) - 1 \right\}$$

y

$$\langle R_n(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} \neq 0, \quad \langle R_n(z), z^{q(n)} \rangle_{\omega} \neq 0.$$

Entonces, queda claro que si  $\lambda(n) = 0$  ó  $\lambda(n) = 2$ ,  $R_n(z)$  no es ortogonal a  $\mathcal{L}_{n-2}$ , lo cual es una contradicción. Tenemos por tanto que  $\lambda(n) = 1$ .

“ $\Leftarrow$ ” Observemos antes de nada que

$$\langle Q_n(z), z^j \rangle_{\omega} = \langle R_n(z), z^{j-p(n)} \rangle_{\omega} = c_n \left[ \langle \phi_n(z), z^{j-p(n)} \rangle_{\omega} + \tau_n \langle \phi_{n-1}(z), z^{j-p(n)} \rangle_{\omega} \right].$$

Entonces, dado que  $\lambda(n) = 1$  se sigue que  $\langle Q_n(z), z^j \rangle_{\omega} = 0$  para todo  $j = p(n) - p(n-2), \dots, p(n) + q(n-2)$ , es decir, para todo  $j = 1, \dots, n-1$ . Ahora,

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} = c_n \left[ \langle \phi_n(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} + \tau_n \langle \phi_{n-1}(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} \right].$$

Si  $s(n) = 0$  entonces  $p(n) = p(n-1) = p(n-2) + 1$  y  $\langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} = c_n \tau_n \langle \phi_{n-1}(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} \neq 0$ . Sin embargo, si  $s(n) = 1$  entonces

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} = c_n \left[ \langle \phi_n(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} + \tau_n \langle \phi_{n-1}(z), z^{-p(n)} \rangle_{\omega} \right],$$

y de acuerdo con el Lema 4.2.2 esto implica que

$$\langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} = c_n \left[ \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_{\omega} + \tau_n \langle z \rho_{n-1}(z), 1 \rangle_{\omega} \right].$$

Aplicando la ley de recurrencia (1.40) a este último término obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} &= c_n \left\{ \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_{\omega} + \tau_n \left[ \langle \rho_{n-1}(z), 1 \rangle_{\omega} - \delta_n \langle \rho_{n-1}^*(z), 1 \rangle_{\omega} \right] \right\} \\ &= c_n \left[ \langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_{\omega} - \tau_n \delta_n \langle \rho_{n-1}^*(z), 1 \rangle_{\omega} \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\tau_n = \overline{\alpha_n} - \overline{\delta_n}$  y  $\langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_{\omega} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$  y  $\frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} = 1 - |\delta_n|^2$ , tenemos además que

$$\begin{aligned} \langle Q_n(z), 1 \rangle_{\omega} &= c_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \left[ \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} - \tau_n \delta_n \right] \\ &= c_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \left[ 1 - |\delta_n|^2 - \overline{\alpha_n} \delta_n + |\delta_n|^2 \right] = c_n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \left[ 1 - \overline{\alpha_n} \delta_n \right], \end{aligned}$$

que es no nulo dado que  $|\alpha_n| = 1$  y  $|\delta_n| < 1$ . Por lo tanto, se sigue también en este caso que  $\langle Q_n(z), 1 \rangle_\omega \neq 0$ . Un argumento similar implica  $\langle Q_n(z), z^n \rangle_\omega \neq 0$ , demostrando así las condiciones de para-ortogonalidad. Ahora, dado que

$$Q_n(z) = \begin{cases} c_n [\rho_n(z) + \tau_n \rho_{n-1}^*(z)] & \text{si } s(n) = 0 \\ c_n [\rho_n^*(z) + \tau_n z \rho_{n-1}(z)] & \text{si } s(n) = 1 \end{cases}$$

se demuestra de (1.43) fácilmente la propiedad de  $k$ -invarianza con  $k = \frac{\overline{c_n}}{c_n} \alpha_n \in \mathbb{T}$  si  $s(n) = 0$  y  $k = \frac{\overline{c_n}}{c_n} \alpha_n \in \mathbb{T}$  si  $s(n) = 1$ . □

Como consecuencia del Teorema 4.4.3 tenemos el siguiente

**Corolario 4.4.8** *Bajo las mismas condiciones que en el Teorema 4.4.5, sean  $z_1, \dots, z_n$  los ceros de  $R_n(z)$ . Entonces, existen números positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tales que*

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) = I_\omega(f) \quad , \quad \forall f \in \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{(n-2)*}. \quad (4.36)$$

□

Finalmente consideremos los dos casos restantes correspondientes a  $\lambda(n) = 2$  y  $\lambda(n) = 0$ :

**Teorema 4.4.9** *Bajo las suposiciones del Teorema 4.4.5 cuando  $\lambda(n) = 2$  ó  $\lambda(n) = 0$ , los ceros del polinomio  $Q_n(z)$ , dados por (4.27) ó (4.30) no pueden estar localizados en  $\mathbb{T}$ .*

*Demostración.-* De (4.27) expresamos  $Q_n(z)$  como

$$Q_n(z) = \alpha \rho_n^*(z) + \beta z \rho_{n-1}^*(z) \quad , \quad |\alpha| + |\beta| > 0. \quad (4.37)$$

Asumamos que todos los ceros de  $Q_n(z)$  se encuentran en  $\mathbb{T}$ . Entonces, existe  $k_n \in \mathbb{T}$  tal que

$$Q_n^*(z) = k_n Q_n(z) = \overline{\alpha} \rho_n(z) + \overline{\beta} \rho_{n-1}(z). \quad (4.38)$$

De (4.37),  $\langle Q_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$  para  $2 \leq k \leq n$  y de (4.38),  $\langle Q_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$  para  $0 \leq k \leq n-2$ . Por lo tanto, se sigue que  $\langle Q_n(z), z^k \rangle_\omega = 0$  para  $0 \leq k \leq n$ , es decir,  $Q_n(z) \equiv 0$ , lo cual es una contradicción. Se deduce un resultado similar para  $Q_n(z)$  dado por (4.30). □

De la Proposición 4.4.4 y el Teorema 4.4.9 tenemos el siguiente:

**Corolario 4.4.10** *No puede existir una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos sobre  $\mathbb{T}$  que sea exacta en  $\Lambda_{-(n-2),n}$  ó  $\Lambda_{-n,n-2}$ .* □

Hemos visto que obtenemos el “máximo dominio de validez”  $\mathcal{L}_n \mathcal{L}_{r*}$  para la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  cuando  $r = n-2$  y el orden es el inducido por una sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  tal que  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2) = 1$  para todo  $n \geq 2$ . El siguiente resultado caracteriza tales ordenamientos del espacio  $\Lambda$ :

**Proposición 4.4.11** *Las soluciones de la ecuación en diferencias finitas  $\lambda(n) = p(n) - p(n-2) = 1$  para  $n \geq 2$  vienen dadas por*

$$p(n) = \begin{cases} E \left[ \frac{n}{2} \right] & \text{si } p(0) = p(1) = 0 \\ E \left[ \frac{n+1}{2} \right] & \text{si } p(0) = 0, p(1) = 1 \end{cases}.$$

*Demostración.-* La solución general viene dada por  $p(n) = p_1(n) + p_2(n)$ , siendo  $p_1(n)$  la solución general de la ecuación en diferencias homogénea  $\lambda(n) = 0$  y  $p_2(n)$  una solución particular de la ecuación en diferencias  $\lambda(n) = 1$ . Dado que  $\{1, (-1)^n\}$  es un sistema fundamental, se sigue que  $p_1(n) = A + B(-1)^n$ , siendo  $A$  y  $B$  constantes complejas. Como solución particular podemos tomar  $p_2(n) = \frac{n}{2}$ . Así pues,  $p(n) = A + B(-1)^n + \frac{n}{2}$ . Ahora, en cuanto a las condiciones iniciales tenemos que

1.  $p(0) = p(1) = 0$  implica  $A = -\frac{1}{4}$ ,  $B = \frac{1}{4}$  y por lo tanto

$$p(n) = -\frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{n}{2} = \frac{-1 + (-1)^n + 2n}{4} = E \left[ \frac{n}{2} \right].$$

2.  $p(0) = 0$ ,  $p(1) = 1$  implica  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$  y por lo tanto

$$p(n) = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^n}{4} + \frac{n}{2} = \frac{1 - (-1)^n + 2n}{4} = E \left[ \frac{n+1}{2} \right].$$

□

Vemos de esta manera que recuperamos los órdenes naturales equilibrados introducidos por W.J. Thron en [100], siendo éstos los únicos que producen fórmulas de cuadraturas con nodos sobre  $\mathbb{T}$  con el “máximo dominio de validez”.

Nuestro siguiente paso será dar una expresión explícita para los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  de la fórmula de cuadratura (4.36) en términos de  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ . Al respecto, dado que  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  es exacta en  $\mathcal{L}_{n-1} = \Lambda_{-p(n-1), q(n-1)}$  se cumple que  $\lambda_j = I_\omega(l_j(z))$  con  $l_j(z) \in \mathcal{L}_{n-1}$  tal que  $l_j(z_k) = \delta_{j,k}$  (función delta de Kronecker). Ahora bien, puede comprobarse fácilmente que

$$l_j(z) = \left( \frac{z_j}{z} \right)^{p(n-1)} \frac{Q_n(z)}{(z - z_j)Q_n'(z_j)}, \quad j = 1, \dots, n$$

siendo  $Q_n(z)$  el polinomio nodal, es decir  $Q_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$ . Por lo tanto,

$$\lambda_j = \frac{z_j^{p(n-1)}}{Q_n'(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_n(z)}{(z - z_j)z^{p(n-1)}} d\omega(\theta), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.39)$$

Observemos ahora que de (4.39) y dado que  $R_n(z) = \frac{Q_n(z)}{z^{p(n)}}$  se sigue que

$$\lambda_j = \frac{z_j^{p(n-1)}}{Q_n'(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_n(z)}{(z - z_j)z^{p(n-1)}} d\omega(\theta) = \frac{1}{z_j^{s(n)} R_n'(z_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^{s(n)} R_n(z)}{(z - z_j)} d\omega(\theta), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.40)$$

Podemos enunciar ahora el siguiente resultado general donde deducimos expresiones para los pesos análogas a las dadas por (1.19), (1.68), (2.83), (3.42) y (3.51). En cuanto a la demostración del resultado, basta con hacer uso de la fórmula de Christoffel-Darboux para la sucesión  $\{\chi_n(z)\}_{n=0}^\infty$  establecida en el Teorema 3.5.1 para el caso equilibrado junto con las relaciones (4.40) y (4.1).

**Teorema 4.4.12** *Sea  $\{\chi_n^p(z)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y al orden inducido por una sucesión generadora arbitraria  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ . Entonces, los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  para la fórmula de cuadratura (4.36) vienen dados por*

$$\lambda_j = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} |\chi_k^p(z_j)|^2} \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (4.41)$$

donde los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los ceros de  $R_n(z)$  dado por (4.35). □

Dada la arbitrariedad de la sucesión  $p(n)$ , supongamos ahora que tomamos  $p(n) = 0$  para todo  $n \geq 0$ . Entonces, de la conocida fórmula de Christoffel-Darboux para el caso polinómico ordinario establecida en el Teorema 1.3.9 se sigue del Teorema 4.4.12 que

$$\frac{1}{\lambda_j} = \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{\chi_n^*(z) \overline{\chi_n^*(z_j)} - \chi_n(z) \overline{\chi_n(z_j)}}{1 - z \overline{z_j}} = \frac{(\chi_n^*)'(z_j) \overline{\chi_n^*(z_j)} - \chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)}}{-\overline{z_j}}.$$

Teniendo en cuenta que  $\chi_n^*(z) = z^n \overline{\chi_n(1/\overline{z})} = z^n \overline{\chi_n}(1/z)$ , obtenemos después de algunos cálculos elementales que:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{\overline{z_j}}{\chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)} - (\chi_n^*)'(z_j) \overline{\chi_n^*(z_j)}} = \frac{\overline{z_j}}{\chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)} - n \overline{z_j} |\chi_n(z_j)|^2 + \overline{z_j}^2 \chi_n(z_j) \overline{\chi_n'(z_j)}} \\ &= \frac{1}{2\Re[z_j \chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)}] - n |\chi_n(z_j)|^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

De manera similar para un orden arbitrario  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$  es fácil comprobar del Lema 4.2.2 y de (4.42) que si  $s(n) = 0$  entonces

$$\lambda_j = \frac{1}{2\Re[z_j \chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)}] + (2p(n) - n) |\chi_n(z_j)|^2},$$

mientras que si  $s(n) = 1$  entonces

$$\lambda_j = \frac{-1}{2\Re[z_j \chi_n'(z_j) \overline{\chi_n(z_j)}] + (n - 2q(n)) |\chi_n(z_j)|^2},$$

probando así el siguiente

**Teorema 4.4.13** *Sea  $\{\chi_n^p(z)\}_{n=0}^\infty$  la sucesión de polinomios de Laurent ortonormales con respecto a la medida  $\omega$  y el orden inducido por la sucesión generadora  $\{p(n)\}_{n=0}^\infty$ . Entonces, los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  para la fórmula de cuadratura (4.36) vienen dados por*

$$\lambda_j = \frac{(-1)^{s(n)}}{2\Re[z_j (\chi_n^p)'(z_j) \overline{\chi_n^p(z_j)}] + (p(n) - q(n)) |\chi_n^p(z_j)|^2}, \quad (4.43)$$

con los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  como en el Teorema 4.4.12. □

Para finalizar esta sección, dado que ya hemos introducido y caracterizado las fórmulas de cuadratura en  $\mathbb{T}$  con máximo dominio de validez, parece lógico que consideremos la computación efectiva de éstas. Al respecto, debemos hacer notar que la mayoría de los experimentos numéricos llevados a cabo con fórmulas de cuadratura de Szegő involucran a medidas cuyos polinomios de Szegő son conocidos explícitamente, o han sido computados mediante el algoritmo de Levinson (véase por ejemplo [40] y [62]). En estos casos, los ceros de (4.33) pueden computarse aplicando cualquier método estándar para localizar ceros de polinomios disponible en la literatura (véase [61] para un procedimiento específico al considerar modificaciones racionales de la medida de Lebesgue). Por lo tanto, en lo que resta de sección revisaremos una estrategia para computar efectivamente los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  y pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  para una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j) \quad , \quad |z_j| = 1 \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

De (1.48) podemos escribir el polinomio nodal  $P_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$  salvo constante multiplicativa como

$$P_n(z) = P_n(z, u) = z\rho_{n-1}(z) + u\rho_{n-1}^*(z) \quad , \quad |u| = 1.$$

Ahora bien, puede comprobarse fácilmente que  $\{z\varphi_0(z), \dots, z\varphi_{n-2}(z), -u\varphi_{n-1}^*(z)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{P}_{n-1}$  la cual debe relacionarse con  $\{\varphi_0(z), \dots, \varphi_{n-1}(z)\}$  mediante una matriz unitaria  $U_n$ . Haciendo para  $n \geq 0$ ,  $e_n = \langle \rho_n(z), \rho_n(z) \rangle_\omega$  (recordemos que  $e_n = \prod_{k=1}^n \eta_k^2$  para  $n \geq 1$  y que  $\varphi_n(z) = \frac{\rho_n(z)}{\sqrt{e_n}}$ ), es directo comprobar que  $U_n$  es la siguiente matriz de Hessenberg irreducible:

$$U_n = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & d_{n,3} & \cdots & d_{n,n} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

donde

$$d_{i,j} = \begin{cases} -\overline{\delta_{j-1}}u\sqrt{\frac{e_{n-1}}{e_{j-1}}} & si \quad i = n, \\ -\overline{\delta_{j-1}}\delta_i\sqrt{\frac{e_{i-1}}{e_{j-1}}} & si \quad i \leq n-1 \quad , \quad j \leq i, \\ \eta_i & si \quad i \leq n-1 \quad , \quad j = i+1. \end{cases} \quad (4.45)$$

Podemos escribir por tanto,

$$\begin{pmatrix} z\varphi_0(z) \\ \vdots \\ z\varphi_{n-2}(z) \\ -u\varphi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \varphi_0(z) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}(z) \\ \varphi_{n-1}(z) \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que si introducimos la notación  $\mathcal{H}_n(\delta_0, \dots, \delta_n)$  para indicar la principal submatriz de  $\mathcal{H}(\delta)$  (dada por (4.21)) de orden  $n$  con valores de entrada  $\{\delta_k\}_{k=0}^n$ , entonces

$U_n = \mathcal{H}_n(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}, u)$ , esto es, la principal submatriz de  $\mathcal{H}(\delta)$  de orden  $n$  donde el coeficiente de Verblunsky  $\delta_n$  se reemplaza por  $u \in \mathbb{T}$ . Ahora,

$$\begin{pmatrix} z\varphi_0(z) \\ \vdots \\ z\varphi_{n-2}(z) \\ -u\varphi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\varphi_0(z) \\ \vdots \\ z\varphi_{n-2}(z) \\ z\varphi_{n-1}(z) - z\varphi_{n-1}(z) - u\varphi_{n-1}^*(z) \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \varphi_0(z) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}(z) \\ \varphi_{n-1}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{P_n(z,u)}{\sqrt{e_{n-1}}} \end{pmatrix}.$$

Así, tenemos la identidad

$$zV_n(z) = U_n V_n(z) + b_n(z) \tag{4.46}$$

donde

$$V_n(z) = (\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_{n-1}(z))^T ; \quad b_n(z) = \left(0, \dots, 0, \frac{P_n(z,u)}{\sqrt{e_{n-1}}}\right)^T$$

y  $|u| = 1$ . De (4.46) vemos que cualquier cero  $\xi$  de  $P_n(z,u)$  es un autovalor de  $U_n$ , y viceversa, con autovector asociado  $V_n(\xi)$ . Así, sea  $z_j$  un cero de  $P_n(z,u)$  para  $j = 1, \dots, n$  y consideremos el correspondiente autovector normalizado de  $U_n$ :

$$W_n(z_j) = \frac{V_n(z_j)}{\left[\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(z_j)|^2\right]^{1/2}}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que para todo  $z \in \mathbb{T}$ ,  $|\varphi_k(z)|^2 = |\chi_k(z)|^2$ , de (4.41) se sigue que

$$W_n(z_j) = \lambda_j^{1/2} V_n(z_j). \tag{4.47}$$

Si escribimos  $W_n(z_j) = (q_{0,j}, \dots, q_{n-1,j})^T$  e igualamos las primeras componentes de ambos lados de (4.47), obtenemos  $q_{0,j} = \lambda_j^{1/2} \varphi_0(z_j)$ . Pero, dado que estamos considerando una medida de probabilidad ( $\int_{\mathbb{T}} d\omega(\theta) = 1$ ) entonces  $\varphi_0(z) \equiv 1$  y por lo tanto

$$\lambda_j = q_{0,j}^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

En resumen, hemos probado el siguiente

**Teorema 4.4.14** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos. Entonces:*

1. *Existe  $u \in \mathbb{T}$  tal que los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los autovalores de  $U_n = \mathcal{H}_n(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}, u)$  dada por (4.44)-(4.45).*
2. *Los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por las primeras componentes de los correspondientes autovectores normalizados.*

□

Concluimos mostrando un enfoque alternativo para la computación de la fórmula de Szegő (4.36) usando truncaciones de la matriz penta-diagonal  $\mathcal{C}(\delta)$ . En el siguiente resultado usaremos la matriz  $\mathcal{C}_n(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, u)$ , esto es, la  $n$ -ésima submatriz principal de  $\mathcal{C}(\delta)$  de orden  $n$  donde reemplazamos el coeficiente de Verblunsky  $\delta_n$  por  $u \in \mathbb{T}$ . La primera parte del resultado se dedujo recientemente en [27] usando técnicas basadas en Teoría de Operadores mientras que nuestra demostración alternativa se basa en las leyes de recurrencia que satisface la familia de polinomios de Laurent ortonormales. Sin pérdida de generalidad, podemos fijar el orden inducido por la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n}{2} \right]$  (recordemos que la matriz de representación asociada al ordenamiento inducido por la sucesión generadora  $p(n) = E \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  es  $\mathcal{C}(\delta)^T$ ).

**Teorema 4.4.15** *Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(z_j)$  una fórmula de cuadratura de Szegő con  $n$  nodos. Entonces:*

1. *Existe  $u \in \mathbb{T}$  tal que los nodos  $\{z_j\}_{j=1}^n$  son los autovalores de  $\mathcal{C}_n(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, u)$ .*
2. *Los pesos  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  vienen dados por las primeras componentes de los correspondientes autovectores normalizados.*

*Demostración.-* Como hemos visto, los nodos son los ceros de  $R_n(z)$  dados por (4.33)-(4.34). Haciendo  $X_n(z) = (\tilde{\chi}_0(z), \dots, \tilde{\chi}_{n-1}(z))^T$  se sigue de (3.26) que

$$zX_n(z) = \mathcal{C}_n(\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, u)X_n(z) + T_n(z),$$

siendo

$$T_n(z) = \begin{cases} (0, \dots, 0, A(z))^T & \text{si } n = 2k \\ (0, \dots, 0, B(z), C(z))^T & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= \eta_{2k-1}(u - \delta_{2k})\tilde{\chi}_{2k-2}(z) + \overline{\delta_{2k-1}}(u - \delta_{2k})\tilde{\chi}_{2k-1}(z) - \\ &\quad \eta_{2k}\delta_{2k+1}\tilde{\chi}_{2k}(z) + \eta_{2k}\eta_{2k+1}\tilde{\chi}_{2k+1}(z), \\ B(z) &= \eta_{2k}(u - \delta_{2k+1})\tilde{\chi}_{2k}(z) + \eta_{2k}\eta_{2k+1}\tilde{\chi}_{2k+1}(z), \\ C(z) &= \overline{\delta_{2k}}(u - \delta_{2k+1})\tilde{\chi}_{2k}(z) + \overline{\delta_{2k}}\eta_{2k+1}\tilde{\chi}_{2k+1}(z). \end{aligned}$$

Ahora, por un lado, en el caso impar ( $n = 2k + 1$ ) se sigue de (4.33)-(4.34) que

$$T_n(z) = (0, \dots, 0, \eta_{n-1}R_n(z), \overline{\delta_{n-1}}R_n(z))^T$$

implicando que  $T_n(z) \equiv (0, \dots, 0)^T$ , sí y sólo sí,  $R_n(z) = 0$ . Por otro lado, de (3.24)-(3.25) y dado que  $u \in \mathbb{T}$  se sigue en el caso par ( $n = 2k$ ) que

$$\begin{aligned} A(z) &= (u - \delta_{2k}) [z\eta_{2k}\tilde{\chi}_{2k}(z) - (\overline{\delta_{2k}}z + \overline{\delta_{2k-1}})\tilde{\chi}_{2k-1}(z)] \\ &\quad + \overline{\delta_{2k-1}}(u - \delta_{2k})\tilde{\chi}_{2k-1}(z) - \eta_{2k}\delta_{2k+1}\tilde{\chi}_{2k}(z) + \\ &\quad \eta_{2k}[(\delta_{2k+1} + \delta_{2k}z)\tilde{\chi}_{2k}(z) + \eta_{2k}z\tilde{\chi}_{2k-1}(z)] \\ &= uzR_n(z) \end{aligned}$$

y por lo tanto, se sigue de nuevo que  $T_n(z) \equiv (0, \dots, 0)^T$ , sí y sólo sí,  $R_n(z) = 0$ . La prueba para la segunda parte se sigue de los mismos argumentos que en el Teorema 4.4.14.

□

### 4.5. Ejemplos numéricos. La función peso de Rogers-Szegő

Con el fin de ilustrar numéricamente los resultados obtenidos en la sección previa mostramos la computación de los nodos y pesos de las fórmulas de Szegő considerando la medida absolutamente continua definida en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  por  $d\omega(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)d\theta$  con

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log\left(\frac{1}{q}\right)}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\theta - 2\pi j)^2}{2 \log\left(\frac{1}{q}\right)}\right), \quad q \in (0, 1). \quad (4.48)$$

Los correspondientes polinomios ortogonales mónicos son los denominados *q-polinomios de Rogers-Szegő* y a lo largo de esta sección fijaremos el orden inducido por la sucesión generadora  $p(n) = E\left[\frac{n+1}{2}\right]$ . Una expresión explícita para tal familia de polinomios viene dada en [95, Capítulo 1] y por lo tanto, del Lema 4.2.2 deducimos una expresión explícita para la familia de polinomios mónicos de Laurent:

$$\phi_n(z) = \begin{cases} \sum_{j=-k}^k (-1)^{j+k} \begin{bmatrix} 2k \\ j+k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k-j}{2}} z^j & \text{si } n = 2k \\ \sum_{j=-(k+1)}^k (-1)^{j+k+1} \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j+k+1}{2}} z^j & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \quad (4.49)$$

donde como es usual, los coeficientes *q*-binomiales  $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q$  se definen por

$$\begin{aligned} \binom{n}{j}_q &= (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n), \quad \binom{0}{0}_q \equiv 1 \\ \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q &= \frac{\binom{n}{j}_q}{\binom{j}{j}_q \binom{n-j}{n-j}_q} = \frac{(1-q^n)\cdots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)\cdots(1-q^j)}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ahora, escribiendo  $\phi_{2k}(z) = \sum_{j=-k}^k a_j z^j$  y  $\phi_{2k+1}(z) = \sum_{j=-(k+1)}^k b_j z^j$  podemos computar recursivamente los coeficientes  $\{a_j\}_{j=-k}^k$  y  $\{b_j\}_{j=-(k+1)}^k$  según

$$\begin{aligned} a_k = 1, \quad a_j &= -a_{j+1} \sqrt{q} \frac{1 - q^{k+j+1}}{1 - q^{k-j}}, \quad -k \leq j \leq k-1, \\ b_{-(k+1)} = 1, \quad b_{j+1} &= -b_j \sqrt{q} \frac{1 - q^{k-j}}{1 - q^{k+j+2}}, \quad -(k+1) \leq j \leq k-1. \end{aligned}$$

Las dos siguientes tablas muestran los ceros de  $\phi_{10}(z)$  y  $\phi_{11}(z)$  tomando  $q = 0,1, 0,25, 0,5, 0,75$  y  $0,9$ . Computamos los valores usando el método de Jenkins-Traub (véase [70]) para buscar raíces de polinomios, apropiado en este caso dado que los polinomios tienen coeficientes reales, y son similares a los obtenidos en [95, Capítulo 8] donde se considera la distribución de ceros de los polinomios de Rogers-Szegő.

$q = 0,1$	$q = 0,25$	$q = 0,5$
$-0,263951 \pm 0,174154i$	$-0,409021 \pm 0,287579i$	$-0,527476 \pm 0,470924i$
$-0,125825 \pm 0,290117i$	$-0,180061 \pm 0,466453i$	$-0,17216 \pm 0,685829i$
$0,0511275 \pm 0,312067i$	$0,098943 \pm 0,490113i$	$0,206793 \pm 0,676193i$
$0,210458 \pm 0,236024i$	$0,341839 \pm 0,364892i$	$0,514293 \pm 0,485287i$
$0,303873 \pm 0,0875295i$	$0,481633 \pm 0,134275i$	$0,684966 \pm 0,17556i$

$q = 0,75$	$q = 0,9$
$-0,393726 \pm 0,771349i$	$0,124834 \pm 0,940434i$
$0,0489867 \pm 0,864639i$	$0,462595 \pm 0,828255i$
$0,428192 \pm 0,752763i$	$0,702756 \pm 0,637286i$
$0,703385 \pm 0,505222i$	$0,860419 \pm 0,399599i$
$0,847676 \pm 0,17733i$	$0,938886 \pm 0,135991i$

Tabla 1 (ceros de  $\phi_{10}(z)$ )

$q = 0,1$	$q = 0,25$	$q = 0,5$
$-2,72231 \pm 1,60904i$	$-1,69549 \pm 1,0608i$	$-1,11671 \pm 0,867729i$
$-1,53463 \pm 2,76494i$	$-0,905586 \pm 1,78323i$	$-0,492373 \pm 1,32573i$
$0,0582758 \pm 3,16174i$	$0,108083 \pm 1,99708i$	$0,213177 \pm 1,39805i$
$1,62247 \pm 2,71433i$	$1,07198 \pm 1,68845i$	$0,838469 \pm 1,13885i$
$2,75188 \pm 1,55793i$	$1,75435 \pm 0,960348i$	$1,26386 \pm 0,634561i$
$3,16228$	$2,00000$	$1,41421$

$q = 0,75$	$q = 0,9$
$-0,616013 \pm 0,976658i$	$0,0506551 \pm 1,05287i$
$-0,0673631 \pm 1,15273i$	$0,42438 \pm 0,96489i$
$0,428796 \pm 1,07213i$	$0,701775 \pm 0,786526i$
$0,819912 \pm 0,813067i$	$0,897689 \pm 0,552509i$
$1,06918 \pm 0,436101i$	$1,01499 \pm 0,28444i$
$1,1547$	$1,054409$

Tabla 2 (ceros de  $\phi_{11}(z)$ )

Mostremos gráficamente estos ceros para hacernos una idea de su localización. Como es usual, las circunferencias representan la circunferencia unidad.

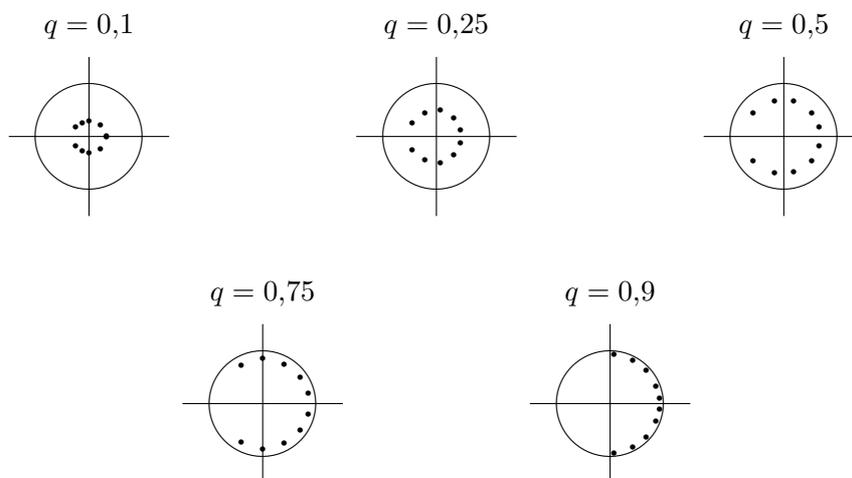


Figura 1 (ceros de  $\phi_{10}(z)$ )

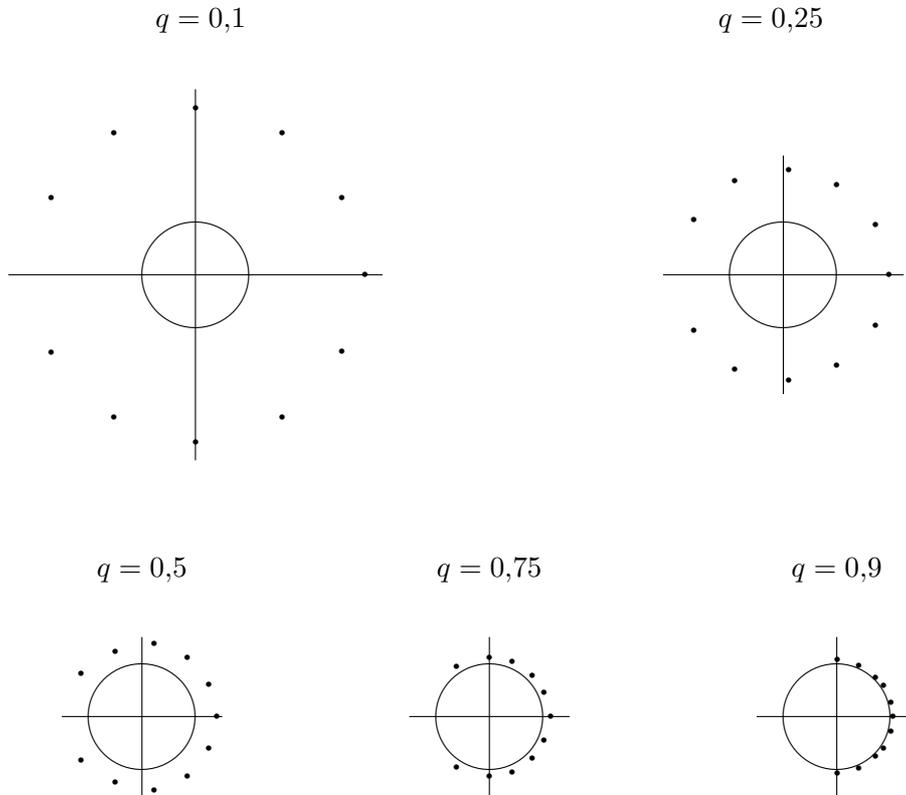


Figura 2 (ceros de  $\phi_{11}(z)$ )

De las figuras 1 y 2 observamos que los ceros de  $\phi_{10}(z)$  están localizados en la circunferencia  $\{z : |z| = q^{1/2}\}$  mientras que los de  $\phi_{11}(z)$  están localizados en la circunferencia  $\{z : |z| = q^{-1/2}\}$ , de acuerdo con el Lema 4.2.2 y el Teorema de Mazel-Geronimo-Hayes (véase [86]).

A continuación computamos también los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura (4.36) también para  $n = 10$  y  $q = 0,1, 0,25, 0,5, 0,75$  y  $0,9$ . Los nodos son los ceros de  $R_{10}(z, u)$  dados por (4.33) (tomamos  $u = 1$ ). La correspondiente sucesión de coeficientes de Verblunsky viene dada por  $\delta_n = (-1)^n q^{\frac{n}{2}}$  para todo  $n \geq 1$  (véase [95]). En cuanto a los pesos, podemos hacer uso de (4.43) teniendo en cuenta que

$$\chi_n(z) = \frac{\phi_n(z)}{\sqrt{(1-q) \cdots (1-q^n)}}$$

con  $\phi_n(z)$  dado explícitamente por (4.49). Mostramos los resultados en las tablas 3 a 7.

Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
$-0,940400 \pm 0,34007i$	0,0459602	$-0,922051 \pm 0,387069i$	0,0195773
$-0,531157 \pm 0,847273i$	0,0669775	$-0,473103 \pm 0,881007i$	0,0466391
$0,0668824 \pm 0,997761i$	0,100057	$0,119954 \pm 0,992779i$	0,0947585
$0,624424 \pm 0,781086i$	0,133157	$0,650270 \pm 0,759703i$	0,150362
$0,955949 \pm 0,293533i$	0,153848	$0,959239 \pm 0,282596i$	0,188665

Tabla 3 ( $q = 0,1, n = 10$ )

Tabla 4 ( $q = 0,25, n = 10$ )

Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
$-0,842988 \pm 0,537932i$	0,00312009	$-0,517559 \pm 0,855648i$	0,000196919
$-0,333209 \pm 0,942853i$	0,0207928	$0,0096185 \pm 0,999954i$	0,00541542
$0,234605 \pm 0,972091i$	0,0737936	$0,467501 \pm 0,883993i$	0,0439839
$0,703537 \pm 0,710659i$	0,163017	$0,801825 \pm 0,597559i$	0,158275
$0,965879 \pm 0,258994i$	0,239274	$0,977622 \pm 0,210369i$	0,292128

Tabla 5 ( $q = 0,5, n = 10$ )

Tabla 6 ( $q = 0,75, n = 10$ )

Nodos	Pesos
$0,112467 \pm 0,993655i$	0,0000221869
$0,475746 \pm 0,879582i$	0,000173911
$0,734593 \pm 0,678508i$	0,0276214
$0,904709 \pm 0,426031i$	0,146351
$0,989421 \pm 0,145076i$	0,324221

Tabla 7 ( $q = 0,9, n = 10$ )

**Nota 4.5.1** De las tablas anteriores vemos que los pesos correspondientes a pares de nodos complejos conjugados son iguales. Esto se sigue directamente de (4.41) dado que en este caso, los coeficientes del  $n$ -ésimo polinomio de Laurent ortonormal son reales.

Con el fin de establecer la efectividad de los Teoremas 4.4.14 y 4.4.15 computamos también para  $n = 10, q = 0,1, 0,25, 0,5, 0,75, 0,9$  y  $u = 1$  los autovalores y la primera componente de los autovectores normalizados de  $\mathcal{C}_{10}(\delta_1, \dots, \delta_9, 1)$  y  $\mathcal{H}_{10}(\delta_0, \dots, \delta_9, 1)$ , obteniendo así los nodos y pesos de la fórmula de cuadratura (4.36). Los cálculos fueron efectuados usando un método estandar de búsqueda de autovalores y los resultados obtenidos exactamente los mismo obtenidos anteriormente. En las siguientes tablas mostramos también los resultados de los cálculos para  $n = 11$ .

Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
-1	0,03873768	-1	0,01403402
$-0,814432 \pm 0,580259i$	0,04723999	$-0,778821 \pm 0,627246i$	0,00025263
$-0,355944 \pm 0,934507i$	0,06942034	$-0,301023 \pm 0,953617i$	0,05384075
$0,199254 \pm 0,979948i$	0,09817396	$0,243118 \pm 0,969997i$	0,09739723
$0,68359 \pm 0,729866i$	0,12485883	$0,70384 \pm 0,710359i$	0,14346753
$0,963208 \pm 0,268755i$	0,14093668	$0,965731 \pm 0,259545i$	0,17367845

Tabla 8 ( $q = 0,1, n = 11$ )

Tabla 9 ( $q = 0,25, n = 11$ )

Nodos	Pesos	Nodos	Pesos
-1	0,00105402	-1	0,00000331
$-0,681725 \pm 0,731608i$	0,00606822	$-0,400355 \pm 0,91636i$	0,00047627
$-0,178603 \pm 0,983921i$	0,02834884	$0,0972837 \pm 0,995257i$	0,00836960
$0,335240 \pm 0,942133i$	0,08185750	$0,517853 \pm 0,85547i$	0,05348059
$0,745084 \pm 0,666970i$	0,16052782	$0,821232 \pm 0,570595i$	0,16811708
$0,970795 \pm 0,239909i$	0,22291291	$0,979848 \pm 0,199745i$	0,29160532

Tabla 10 ( $q = 0,5, n = 11$ )

Tabla 11 ( $q = 0,75, n = 11$ )

Nodos	Pesos
-1	0,00000000058
$0,149722 \pm 0,988728i$	0,00005234
$0,498881 \pm 0,866671i$	0,00328985
$0,746631 \pm 0,665238i$	0,04447931
$0,909098 \pm 0,416581i$	0,21730036
$0,989911 \pm 0,141688i$	0,46353159

Tabla 12 ( $q = 0,9, n = 11$ )

Debemos remarcar aquí que cuando requerimos computaciones para valores grandes de  $n$  necesitamos considerar métodos especiales de búsqueda de autovalores debido a la propagación de errores. Además, en [25] se puntualiza lo siguiente:

1. El coste computacional usando técnicas para matrices banda se reduce en comparación con técnicas para matrices de Hessenberg.
2. En la matriz  $\mathcal{C}(\delta)$  los coeficientes de Verblunsky aparecen sólo en un número finito de elementos y por tanto, cualquier perturbación de un número finito de coeficientes de Verblunsky induce una perturbación finito-dimensional, algo que no ocurre con la matriz de Hessenberg.

A lo largo de esta última sección efectuamos los cálculos empleando software MATHEMATICA. Como hemos comentado, nuestro propósito principal es meramente ilustrativo y por esta razón hemos elegido un número de nodos pequeño.

# Apéndice A

## Problemas abiertos

En este Apéndice incluimos algunas cuestiones que han surgido a lo largo de este trabajo y que podrían ser abordadas en el futuro como continuación de esta Memoria.

### A.1. Generalización del algoritmo split Levinson

Hemos visto en el capítulo primero que el algoritmo de Levinson puede ser interpretado como una implementación numérica de la ley de recurrencia de Szegő, mientras que el algoritmo split Levinson computa directamente, con aproximadamente la mitad del número de operaciones y salvo factores multiplicativos, los polinomios para-ortogonales  $B_n(z, \pm 1)$  cuyos ceros son los nodos de las fórmulas de Szegő de  $n$  puntos con respecto a la función peso simétrica  $\omega(\theta)$  en  $(-\pi, \pi]$ . Se conocen dos versiones de este algoritmo: la versión simétrica, ó  $\{1\}$  – *invariante*, que computa el polinomio  $B_n(z, 1)$  y la antisimétrica, ó  $\{-1\}$  – *invariante*, que computa el polinomio  $B_n(z, -1)$ . Dado que disponemos de una familia uniparamétrica de fórmulas de Szegő para  $\omega(\theta)$ , cuyos nodos vienen determinados por los ceros de  $B_n(z, \tau)$ , siendo  $\tau$  un número en general complejo de módulo la unidad, planteamos pues generalizar este algoritmo en función del parámetro  $\tau \in \mathbb{T}$  no necesariamente real. Este enfoque nos permitiría computar al completo las fórmulas de Szegő con respecto a la función peso  $\omega(\theta)$ .

### A.2. Fórmulas de cuadratura con máximo grado de precisión exactas en subespacios de $\mathcal{T}^{1/2}$

Hemos visto en el Corolario 2.5.6 del capítulo segundo que una fórmula de cuadratura  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$  con nodos distintos en  $(-\pi, \pi]$  alcanza el máximo grado de precisión trigonométrica, es decir, es exacta en  $\mathcal{T}_{n-1}^0$ , sí y sólo sí, la fórmula de cuadratura es exacta en un subespacio de  $\mathcal{T}_{n-1}^0$  de dimensión  $n$  y los nodos son los ceros de  $T_k^\gamma(\theta) = af_k^{(\gamma)}(\theta) + bg_k^{(\gamma)}(\theta) \in \mathcal{T}_k^\gamma$  para ciertos números reales  $a$  y  $b$ , siendo  $\{f_j^{(\gamma)}(\theta), g_j^{(\gamma)}(\theta)\}_{j=0}^\infty$  un sistema bi-ortogonal para  $\omega$  con  $f_0^{(0)} \neq 0$ ,  $g_0^{(0)} \equiv 0$  y tomando  $\gamma = 0$  si  $n$  es par ó  $\gamma = 1/2$  si  $n$  es impar. Así pues, junto con el Teorema 2.5.7 quedan completamente caracterizadas las fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos en  $(-\pi, \pi]$  que integren exactamente a polinomios trigonométricos de grado lo más grande posible.

Nuestra modificación técnica con respecto al artículo de G. Szegő [99] al considerar espacios de funciones trigonométricas de la forma (2.1) permite solucionar el problema cuando el número de nodos  $n$  es impar considerando  $\gamma = 1/2$  en este caso. Sin embargo, no sabemos si esta modificación técnica permite también resolver el problema de caracterizar las fórmulas de cuadratura con mayor grado de precisión y que sean exactas en subespacios de  $\mathcal{T}^{1/2}$ . Planteamos pues un análogo al Corolario 2.5.6 y al Teorema 2.5.7 donde ahora  $I_n(T) = I_\omega(T)$  para todo  $T \in \mathcal{T}_m^{1/2}$  donde  $m$  es un número natural a determinar y que sea lo más grande posible.

### A.3. Computación eficiente de las fórmulas de Szegő con un enfoque matricial

En el capítulo primero analizamos el problema de computar los nodos y los pesos de las fórmulas Gaussianas mediante un problema de cálculo de autovalores y autovectores de la matriz tri-diagonal de Jacobi asociada a la medida cuyo soporte es un intervalo del eje real. En el capítulo cuarto se analizó el problema análogo en la circunferencia unidad donde las matrices que aparecen ahora pueden tener o bien estructura de Hessenberg ó bien estructura penta-diagonal. Ciertamente, cuando se requiere una cierta precisión prefijada necesitamos usar un número elevado de nodos y esto nos motiva proponer el diseñar algoritmos eficientes para la computación numérica de autovalores y autovectores de las matrices particulares de Hessenberg o penta-diagonales que aparecen. Dado que también se ha probado que la matriz penta-diagonal puede a su vez factorizarse como producto de dos matrices tri-diagonales, planteamos también el analizar para estas matrices tri-diagonales particulares que aparecen en la factorización, algoritmos numéricos eficientes para el cálculo de autovalores y autovectores de matrices producto, tal y como se estudia por ejemplo, en [104].

### A.4. Fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad con nodos prefijados

En el capítulo primero revisamos las fórmulas de cuadraturas sobre el eje real con uno o dos nodos prefijados y máximo grado de precisión algebraico, esto es, las denominadas fórmulas de Gauss-Radau y de Gauss-Lobatto respectivamente, que junto a las Gaussianas denominamos fórmulas tipo-Gauss. Como bien hemos visto, las fórmulas de Szegő son las análogas a las Gaussianas para la integración de funciones periódicas, dado que integran exactamente a polinomios trigonométricos con el máximo grado alcanzable. Una gran diferencia entre estos dos tipos de fórmulas es que las Gaussianas son únicas mientras que las de Szegő constituyen una familia uniparamétrica de fórmulas. Dado que queda un parámetro libre, éste podría usarse para dejar prefijado un nodo, surgiendo así las llamadas *fórmulas de Szegő-Radau* (véase [38] y [69]). Por otro lado, en [69] se analizan las fórmulas de cuadratura de Szegő-Lobatto, análogas a las de Gauss-Lobatto y en las que por tanto se dejan prefijados dos nodos en la circunferencia unidad. Se prueba que en general este tipo de fórmulas no son únicas y también se establecen propiedades y se discuten métodos numéricos para su computación. Planteamos pues una generalización a

este problema caracterizando las fórmulas de cuadratura con  $n$  nodos en la circunferencia unidad, con  $m$  nodos prefijados y que tengan el máximo grado de precisión alcanzable, así como un análisis de su computación efectiva.

## Apéndice B

# Trabajos contenidos

Esta Memoria contiene trabajos que ya han sido publicados o aceptados en diferentes revistas, y que citamos a continuación:

- En el Capítulo 1:

[1] **R. Cruz-Barroso and P. González-Vera.**- *On reproducing kernels and para-orthogonal polynomials on the unit circle*, Revista de la Academia Canaria de Ciencias, XV No. 1-2 (2003), 79-91.

[2] **R. Cruz-Barroso and P. González-Vera.**- *On the computation of Gauss-type and Szegő quadrature formulas by the Levinson and the split Levinson algorithm*, Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, Vol. X (2002), 30-47.

- En el Capítulo 2:

[3] **R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad.**- *Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality*. Annales Mathematicae et Informaticae 32 (2005), 5-44.

Disponible en <http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami/>.

[4] **R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad.**- *On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands*. Aceptado en Numerical Algorithms (2007).

- En el Capítulo 3:

[5] **R. Cruz-Barroso and P. González-Vera.**- *Orthogonal Laurent Polynomials and Quadratures on the Unit Circle and the Real Half-Line*, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 19 (2005), 113-134.

Disponible en <http://www.etna.mcs.kent.edu/>.

[6] **R. Cruz-Barroso and P. González-Vera.**- *A Christoffel-Darboux formula*

and a Favard's theorem for sequences of orthogonal Laurent polynomials on the unit circle, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 179 (2005), 157-173.

■ En el Capítulo 4:

[7] **R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad.**- *Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 200 (2007), 424-440.

[8] **M.J. Cantero, R. Cruz-Barroso and P. González-Vera.**- *A matrix approach to the computation of quadrature formulas on the unit circle*. Aceptado en *Applied Numerical Mathematics* (2007). [arXiv:math/0606388](https://arxiv.org/abs/math/0606388).

Así mismo, como trabajos relacionados citamos también:

■ [9] **R. Cruz-Barroso, F. Perdomo-Pío and P. González-Vera.**- *On the computation of the coefficients in a Fourier series expansion*, In: B.H.V. Topping et al. ed., *Innovation in Engineering Computational Technology*, Saxe-Coburg Publications, Stirling, Scotland (2006), 347-470.

■ [10] **R. Cruz-Barroso, F. Perdomo-Pío and P. González-Vera.**- *Quadrature formulas associated with Rogers-Szegő polynomials* (en preparación).

# Bibliografía

- [1] **N.I. Akhiezer.**- *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Hafner, New York, 1965.
- [2] **R. Álvarez-Nodarse and F. Marcellán.**- *On the “Favard’s theorem” and its extensions*, J. Comp. Appl. Math. 127 (2001), 231-254.
- [3] **G.S. Ammar and W.B. Gragg.**- *Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems*, SIAM J. Matrix Anal, Appl., Vol. 9 (1988).
- [4] **G.S. Ammar, W.B. Gragg and L. Reichel.**- *On the eigenproblem for orthogonal matrices*, Proc. 25th Conference on Decision and Control (Athens, 1986), 1963-1966.
- [5] **G.S. Ammar, W.B. Gragg and L. Reichel.**- *Constructing a unitary Hessenberg matrix from spectral data*, Num. Lin. Alg., Digital Signal Processing and Parallel Algorithms (Leuven 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F. Comput. Systems Sci. 70, 385-395.
- [6] **K.E. Atkinson.**- *An Introduction to numerical analysis*, John Wiley and Sons, 1989.
- [7] **E. Berriochoa and A. Cachafeiro.**- *Nodal systems with maximal domain of exactness for Gaussian quadrature formulas*, J. Comp. Appl. Math. (2007) En prensa.
- [8] **M. Bertola and M. Gekhtman.**- *Biorthogonal Laurent polynomials, Töplitz determinants, minimal Toda orbits and isomonodromic tau functions.*  
[www.mathstat.concordia.ca/faculty/bertola/Research\\_files.html](http://www.mathstat.concordia.ca/faculty/bertola/Research_files.html).
- [9] **R. Bressan, S.F. Menegasso and A.Sri Ranga.**- *Szegő Polynomials: Quadrature Rules on the Unit Circle and on  $[-1, 1]$* , Rocky Mt. J. Math. Vol. 33, No. 2 (2003), 567-584.
- [10] **C. Brezinski.**- *Biorthogonality and its applications to numerical analysis*, Vol. 156 of Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Marcel Dekker Inc., 1992.
- [11] **A. Bultheel.**- *Algorithms to compute the reflection coefficients of digital filters*, In: L. Collatz, G.Meinardus, H. Werner editors, Numer. Meth. Approx. Theory, Vol. 7, Birkhäuser, Basel (1984), 33-50.
- [12] **A. Bultheel.**- *On the ill conditioning of locating transmission zeros in least squares ARMA filtering*, J. Comp. Appl. Math. 11 (1984), 103-118.

- [13] **A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera.**- *A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval  $[-1, 1]$* , Appl. Numer. Math. 132 (2001), 1-14.
- [14] **A. Bultheel, L. Daruis and P. González-Vera.**- *Positive interpolatory quadrature formulas and para-orthogonal polynomials*, J. Comp. Appl. Math. 179 (2005), 97-119.
- [15] **A. Bultheel, C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera and R. Orive.**- *On the convergence of certain Gauss-type quadrature formulas for unbounded intervals*, Math. Comp. 69 (2000), 721-747.
- [16] **A. Bultheel, C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera and R. Orive.**- *Orthogonal Laurent polynomials and quadrature formulas for unbounded intervals: I. Gauss-type formulas*, Rocky Mt. J. Math. Vol. 33, No. 2 (2003), 585-608.
- [17] **A. Bultheel, C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera and R. Orive.**- *Quadrature on the half-line and two point Padé approximants to Stieljes functions: II. Convergence*, J. Comp. Appl. Math. 77 (1997), 53-76.
- [18] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, and O. Njåstad.**- *Orthogonal rational functions*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, Cambridge University Press, 1999.
- [19] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad.**- *Orthogonal rational functions and quadrature on the real half-line*, J. Complexity Vol. 19, No. 3 (2002), 212-230.
- [20] **A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad.**- *Orthogonality and quadrature on the unit circle*, In: C. Brezinski, L. Gori, and A. Ronveaux editors, Orthogonal Polynomials and their Applications, Vol. 9 of IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, Basel, J.C. Baltzer AG (1991), 205-210.
- [21] **A. Bultheel, P. González-Vera and R. Orive.**- *Quadrature on the half-line and two point Padé approximants to Stieljes functions: I. Algebraic aspects*, J. Comp. Appl. Math. 65 (1996), 57-72.
- [22] **A. Bultheel and M. Van Barel.**- *Linear prediction: mathematics and engineering*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society 1 (1994), 1-58.
- [23] **A. Bunse-Gerstner and L. Elsner.**- *Schur parameters pencils for the solution of the unitary eigenproblem*, Lin. Alg. Appl. 154/156 (1991), 741-778.
- [24] **M. Camacho and P. González-Vera.**- *A note on para-orthogonality and biorthogonality*, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter 3 (1992), 1-16.
- [25] **M. Cantero, L. Moral and L. Velázquez.**- *Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra Appl. 362 (2003), 29-56.
- [26] **M. Cantero, L. Moral and L. Velázquez.**- *Measures and para-orthogonal polynomials on the unit circle*, East J. Approx., Vol. 8 (2002), 447-464.

- [27] **M.J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez.**- *Measures on the unit circle and unitary truncations of unitary operators*, J. Approx. Theory 139 (2006), 430-468.
- [28] **M.J. Cantero, L. Moral and L. Velázquez.**- *Minimal representations of unitary operators and orthogonal polynomials on the unit circle*. Linear Algebra Appl. 408 (2005), 40-65.
- [29] **M. M. Chawla and T. R. Ramakrishnan.**- *Numerical evaluation of integrals of periodic functions with Cauchy and Poisson type kernels*, Numer. Math. 22 (1974), 317-323.
- [30] **M.O. Cheney III, M.J. Witsot and S.C. Cooper.**- *A Comparison of Two Definitions for Orthogonal Laurent Polynomials*, Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, Vol. VIII (Sp. 2000), 28-56.
- [31] **T.S. Chihara.**- *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and Its Applications Series. Gordon and Breach, New York, 1978.
- [32] **L. Cochran and S.C. Cooper.**- *Orthogonal Laurent polynomials on the real line*, Continued Fractions and Orthogonal Functions. In: S.C. Cooper and W.J. Thron editors, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series 154 , Marcel Dekker, New York (1994), 47-100.
- [33] **G. Cybenko.**- *The numerical stability of the Levinson-Durbin Algorithm for Toeplitz systems of equations*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., Vol. 1 No. 3 (1980).
- [34] **L. Daruis.**- *Sobre polinomios de Szegő y fórmulas de cuadratura en la circunferencia unidad*, Doctoral Dissertation, Universidad de La Laguna, 2001.
- [35] **L. Daruis and P. González-Vera.**- *Interpolatory quadrature formulas on the unit circle for Chebyshev weight functions*, Numer. Math. 90 (2002), 641-664.
- [36] **L. Daruis and P. González-Vera.**- *Ortogonalidad y cuadratura sobre la circunferencia unidad*, XVIII Escuela Venezolana de Matemáticas (2005).
- [37] **L. Daruis and P. González-Vera.**- *Szegő polynomials and quadrature formulas on the unit circle*, Appl. Numer. Math. 36 (2000), 79-112.
- [38] **L. Daruis and P. González-Vera.**- *Szegő quadrature formulas on the unit circle*, Appl. Numer. Math. 36 (2000), 79-112.
- [39] **L. Daruis and P. González-Vera, M. Jiménez-Páiz.**- *Quadrature formulas associated with rational modifications of the Chebyshev weight function*. Comp. Math. Appl. 51 (2006), 419-430.  
Math. 140 No. 1-2 (2002), 159-183.
- [40] **L. Daruis and P. González-Vera and O. Njåstad.**- *Szegő quadrature formulas for certain Jacobi-type weight functions*, Math. Comp., Vol. 71, No. 238 (2001), 683-701.
- [41] **P.J. Davis.**- *Interpolation and Approximation*. Dover Publications, New York, 1975.

- [42] **P.J. Davis and P. Rabinowitz.**- *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1984.
- [43] **P. Delsarte and Y. Genin.**- *On the role of Orthogonal Polynomials on the Unit Circle in digital signal processing applications*, Orthogonal polynomials (Columbus, OH, 1989), NATO adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 294, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1990), 115-133.
- [44] **P. Delsarte and Y. Genin.**- *The Split Levinson Algorithm*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. ASSP-34 (1986), 470-478.
- [45] **P. Delsarte and Y. Genin.**- *The Tridiagonal approach to Szegő Orthogonal Polynomials, Toeplitz Linear Systems and related Interpolation problems*, SIAM J. Math. An., Vol. 19 (1988).
- [46] **S. Delvaux and M. Van Barel.**- *A Hessenberg reduction algorithm for rank structured matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. (2007) En prensa.
- [47] **S. Delvaux and M. Van Barel.**- *Eigenvalue computation for unitary rank structured matrices*, J. Comp. Appl. Math. (2007) En prensa.
- [48] **C. Díaz-Mendoza, P. González-Vera and M. Jiménez-Paiz.**- *Strong Stieltjes distributions and orthogonal Laurent polynomials with applications to quadratures and Padé approximation*, Math. Comp., Vol. 74, No. 252 (2005), 1843-1870.
- [49] **L. Féjer.**- *Über trigonometrische Polynome*, J. für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 146 (1915), 53-82.
- [50] **T. Erdelyi, P. Nevai, J. Zhang and J. Geronimo.**- *A simple proof of the “Favard’s theorem” on the unit circle*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Moderna 39 (1991), 551-556.
- [51] **W. Gautschi.**- *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, In: E.B. Christoffel; The Influence of his Work in Mathematics and the Physical Sciences, P. L. Eatzer and F. Fehér editors, Birkhäuser, Basel (1981), 72-147.
- [52] **W. Gautschi.**- *Gauss-type quadrature rules for rational functions*, In: H. Brass, G. Hämmerlin editors., Numerical Integration IV, International Series of Numer. Math., Vol. 112, Birkhäuser, Basel (1993), 111-130.
- [53] **W. Gautschi.**- *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Sci. Stat. Comp. 3 (1982), 289-317.
- [54] **W. Gautschi.**- *On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments*, Math. Comp. 24 (1970), 245-260.
- [55] **W. Gautschi.**- *Orthogonal polynomials and quadrature*, Elect. Trans. Numer. Anal. Vol. 9 (1999), 65-76.
- [56] **Ya. L. Geronimus.**- *Orthogonal Polynomials: Estimates, Asymptotic Formulas, and Series of Polynomials Orthogonal on the Unit Circle and on an Interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.

- [57] **Ya. L. Geronimus.**- *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, Amer. Math. Soc. Transl. Series 1, Vol. 3, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1962), 1-78.
- [58] **E. Godoy and F. Marcellán.**- *Orthogonal polynomials on the unit circle: distribution of zeros*, J. Comp. Appl. Math. 37 (1991), 195-208.
- [59] **L. Golinskii.**- *Quadrature formulas and zeros of para-orthogonal polynomials on the unit circle*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 96, No. 3 (2002), 169-186.
- [60] **G.H. Golub and J.H. Welsch.**- *Calculation of Gauss Quadrature Rules*, Math. Comp. 23 (1969), 221-230.
- [61] **P. González-Vera, H. Martínez and J.J. Trujillo.**- *An application of Szegő quadratures to the computation of the Fourier Transform*, Submitted (2005).
- [62] **P. González-Vera, J.C. Santos-León and O. Njåstad.**- *Some results about numerical quadrature on the unit circle*, Adv. Comp. Math. 5 (1996), 297-328.
- [63] **W. B. Gragg.**- *Positive definite Toeplitz matrices, the Arnoldi process for isometric operators and Gaussian quadrature on the unit circle*, J. Comp. Appl. Math. 46 (1993), 183-198. This is a slightly revised version of a paper by the same author and published in Russian in: E. S. Nicholaev editor, Numerical Methods in Linear Algebra, Moscow University Press, Moscow (1982), 16-32.
- [64] **U. Grenander, G. Szegő.**- *Toeplitz forms and their applications*, Chelsea, New York (1984).
- [65] **P.E. Gustafson and B.A. Hagler.**- *Gaussian quadrature rules and numerical examples for strong extensions of mass distribution functions*, J. Comp. Appl. Math. 105, 1-2 (1999), 317-326.
- [66] **E. Hendriksen and C. Nijhuis.**- *Laurent-Jacobi matrices and the strong Hamburger moment problem*, Acta Applicandae Mathematicae 61 (2000), 119-132.
- [67] **J. Illán-González and G. López-Lagomasino.**- *Quadrature formulas for unbounded intervals*, Rev. Cienc. Mat 3 (1982), 29-47.
- [68] **C. G. J. Jacobi.**- *Über die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder*, Crelle Journal für die reine angew. Math. 39 (1848), 290-292.
- [69] **C. Jagels, L. Reichel.**- *Szegő-Lobatto quadrature rules*, J. Comp. Appl. Math. 200 (2007), 116-126.
- [70] **M.A. Jenkins and J.F. Traub.**- *A three-stage variable-shift iteration for polynomial zeros and its relation to generalized Rayleigh iteration*, Numer. Math. 14 (1970), 252-263.
- [71] **W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron.**- *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 113-152.

- [72] **W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron.**- *Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem*, J. Math. Anal. Appl. 98 (1984), 528-554.
- [73] **W.B. Jones, O. Njåstad and W.J. Thron.**- *Two-point Padé expansions for a family of analytic functions*, J. Comp. Appl. Math. 9 (1983), 105-123.
- [74] **W.B. Jones and W.J. Thron.**- *Survey of continued fractions methods of solving moment problems and related topics*, Analytic Theory of Continued Fractions, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York, Vol. 932 (1982), 4-37.
- [75] **W.B. Jones and W.J. Thron.**- *Orthogonal Laurent polynomials and Gaussian quadrature*, In: Quantum Mechanics in Mathematics, Chemistry and Physics. K.E. Gustafson and W.P. Reinhardt editors, Plenum, New York (1981), 449-455.
- [76] **W.B. Jones, W.J. Thron and H. Waadeland.**- *A Strong Stieltjes Moment Problem*, Trans. AMS 261 (1980), 503-528.
- [77] **W. Jones and H. Waadeland.**- *Bounds for remainder terms in Szegő quadrature on the Unit Circle*, Approx. Comp. In: R.V.M. Zahar editor. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 119, Birkhäuser, Basel (1994), 325-346.
- [78] **S. V. Khruschev.**- *Schur's algorithm, orthogonal polynomials, and convergence of Wall's continued fractions in  $L^2(\mathbb{T})$* , J. Approx. Theory, 108 No. 2 (2001), 161-248.
- [79] **V.I. Krylov.**- *Approximate Calculation of Integrals*, The MacMillan Company, New York, 1962.
- [80] **A. B. J. Kuijlaars and K. T-R. McLaughlin.**- *A Riemann-Hilbert problem for biorthogonal polynomials*, 2003.  
arXiv:math.CV/0310204.
- [81] **D.P. Laurie.**- *Computation of Gauss-type quadrature formulas*, J. Comp. Appl. Math. 127 (2001), 201-217.
- [82] **F.G. Lether.**- *Subtracting out complex singularities in numerical integration*, Math. Comp. Vol. 31 No. 137 (1977), 223-229.
- [83] **N. Levinson.**- *The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction*, J. Math. Phys., Vol. 25 (1947), 261-278.
- [84] **G. López-Lagomasino and A. Martínez-Finkelshtein.**- *Rate of convergence of two-point Padé approximants and logarithmic asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials*, Constr. Approx. 11 (1995), 255-286.
- [85] **H. C. Madhekar and N. K. Thakare.**- *Biorthogonal polynomials suggested by the Jacobi polynomials*, Pacific J. Math. 100 (2) (1982), 417-424.
- [86] **D.S. Mazel, J.S. Geronimo and M.H. Hayes.**- *On the geometric sequences of reflection coefficients*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process 38 (1990), 1810-1812.

- [87] **S. D. Morgera.**- *On bi-orthogonality of Hermitian and skew-Hermitian Szegő/Levinson polynomials*, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process 37 (3) (1989), 436-439.
- [88] **O. Njåstad and W.J. Thron.**- *The theory of sequences of orthogonal L-polynomials*, In: H. Waadeland and H. Wallin editors, Padé Approximants and Continued Fractions, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter (1983), 54-91.
- [89] **F. Peherstorfer.**- *On the remainder of Gaussian quadrature formulas for Bernstein-Szegő weight functions*, Math. Comp., Vol. 60, 201 (1993), 317-325.
- [90] **J.C. Santos-León.**- *Fórmulas de cuadratura lineales. Extensiones y aplicaciones*, Doctoral Dissertation, Universidad de La Laguna, 1995.
- [91] **J.C. Santos-León.**- *Computation of integrals over the unit circle with nearby poles*, Appl. Numer. Math. 36 No. 2-3 (2001), 179-195.
- [92] **J.C. Santos-León and O. Njåstad.**- *Domain of validity of Szegő quadrature formulas*, J. Comp. Appl. Math. 202 (2) (2007), 440-449.
- [93] **B. Simon.**- *CMV matrices: five years after*, to appear in the Proceedings of the W. D. Evans 65th Birthday Conference.
- [94] **B. Simon.**- *OPUC on one foot*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005), 431-460.
- [95] **B. Simon.**- *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 54.1, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 2005.
- [96] **A. Sri Ranga.**- *Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision*, Numer. Math. 68 (1991), 283-294.
- [97] **A. Sri Ranga.**- *J-Fractions and strong moment problems*, In: W.J. Thron editor, Analytic Theory of Continued Fractions, II, Proceedings Pitlochry and Aviemore 1985. Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag 1199 (1986), 269-284.
- [98] **G. Szegő.**- *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1975.
- [99] **G. Szegő.**- *On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials*. Magyar. Tud. Akad. Kutató Int. Közl. 8 (1963), 255-273.
- [100] **W.J. Thron.**- *L-polynomials orthogonal on the unit circle*, In: A. Cuyt editor, Non-linear Methods and Rational Approximation. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1988), 271-278.
- [101] **W. Van Assche.**- *Analytic aspects of Orthogonal Polynomials*, Katholieke Universiteit Leuven, 1993.
- [102] **H. Waadeland.**- *A Szegő quadrature formula for the Poisson integral*, J. Comp. Appl. Math. In: C. Brezinski and U. Kulish editors, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), IMACS, (1992), 479-486.

- [103] **J. L. Walsh.**- *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 20, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1969.
- [104] **D. Watkins.**- *Product eigenvalue problems*, SIAM Review, Vol. 47 (2005), pp. 3-40.
- [105] **D. Watkins.**- *Some perspectives on the eigenvalue problem*, SIAM Review, Vol. 35 No. 3 (1993), 430-471.
- [106] **K. Yue-Kuen and T. Kin-Kiu.**- *Modified quadrature formula for integrand with nearby poles*, Appl. Math. Letters, Vol. 6 No. 3 (1993), 63-65.