

Curso 2009/10  
**CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/17**  
I.S.B.N.: 978-84-7756-957-2

**CARLOS JAVIER PÉREZ-GONZÁLEZ**

**Avances en el diseño óptimo de planes  
de muestreo en fiabilidad**

**Director**

**ARTURO JAVIER FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ**



**SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS**  
**Serie Tesis Doctorales**

Si hasta en sus ángeles  
encuentra Dios defectos

*Job,4:18*

---

# Índice

---

<b>Lista de Tablas</b>	<b>XII</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>XX</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>XXVII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XXIX</b>
<b>1. El muestreo de aceptación</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Curva operativa característica . . . . .	5
1.3. Curva del proceso . . . . .	6
1.4. Tipología de los planes de muestreo . . . . .	7
1.5. Tipos de censura . . . . .	9
1.5.1. Censura de tipo II o por número de fallos . . . . .	10
1.5.2. Censura de tipo I o por el tiempo . . . . .	12

1.5.3. Censura progresiva . . . . .	13
1.6. Diseño de planes por atributos . . . . .	16
1.7. Diseño de planes por variables . . . . .	20
1.8. Metodologías en el diseño de los planes de muestreo . . . . .	21
1.8.1. Planes de muestreo bayesianos . . . . .	25
1.8.2. Planes de muestreo de coste óptimo . . . . .	26
1.9. Otras referencias . . . . .	27
<b>2. Planes clásicos con censura progresiva: caso exponencial</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Diseños óptimos en el caso exponencial . . . . .	33
2.2.1. Distribución uniparamétrica . . . . .	34
2.2.2. Distribución biparamétrica . . . . .	36
2.3. Diseños óptimos aproximados en el caso exponencial uniparamétrico .	38
2.3.1. Diseño aproximado I . . . . .	38
2.3.2. Diseño aproximado II . . . . .	39
2.3.3. Comparativa de los diseños exactos y aproximados . . . . .	40
2.4. Diseños óptimos aproximados en el caso exponencial biparamétrico .	43
2.4.1. Diseño aproximado I . . . . .	43
2.4.2. Diseño aproximado II . . . . .	46
2.4.3. Comparativa de los diseños exactos y aproximados . . . . .	48
2.5. Nomogramas del tamaño muestral . . . . .	52
<b>3. Planes clásicos para las distribuciones log-normal y de Weibull</b>	<b>57</b>
3.1. Introducción . . . . .	57

3.2. Diseños óptimos aproximados . . . . .	59
3.2.1. Distribución normal . . . . .	60
3.2.2. Distribución de valor extremo . . . . .	62
3.2.3. Determinación del diseño con censura progresiva . . . . .	63
3.2.4. Determinación del diseño con censura de tipo II . . . . .	65
3.3. Diseños óptimos aproximados utilizando MLEs . . . . .	66
3.3.1. Análisis y comparación de los diseños . . . . .	68
3.3.2. Nomogramas del tamaño muestral de los diseños con censura de tipo II . . . . .	79
3.4. Otros diseños óptimos aproximados: planes con censura progresiva y ABLUEs . . . . .	84
3.4.1. Diseños óptimos aproximados utilizando ABLUE(2) . . . . .	86
3.4.2. Diseños óptimos aproximados utilizando ABLUE(3) . . . . .	86
3.5. Diseños óptimos aproximados con censura de tipo II y ABLUEs . . . . .	94
<b>4. Planes de muestreo utilizando riesgos promedios . . . . .</b>	<b>101</b>
4.1. Introducción . . . . .	101
4.2. Distribuciones a priori de la proporción de unidades defectuosas . . . . .	103
4.2.1. Distribución beta generalizada . . . . .	103
4.2.2. Propiedades de la distribución beta generalizada . . . . .	104
4.2.3. Distribuciones de máxima entropía . . . . .	112
4.2.4. Distribución beta generalizada de máxima entropía . . . . .	119
4.2.5. Otras distribuciones a priori . . . . .	121
4.3. Diseños óptimos utilizando riesgos promedios . . . . .	122
4.4. Diseños óptimos para la distribución exponencial . . . . .	126

4.4.1. Caso uniparamétrico . . . . .	126
4.4.2. Caso biparamétrico . . . . .	129
4.5. Diseños óptimos aproximados para las distribuciones log-normal y de Weibull . . . . .	134
<b>5. Planes de muestreo utilizando riesgos a posteriori</b>	<b>149</b>
5.1. Distribuciones condicionales de la proporción de disconformes . . . . .	154
5.2. Diseños óptimos en el caso exponencial . . . . .	155
5.3. Diseños óptimos aproximados para las distribuciones log-normal y de Weibull . . . . .	160
5.4. Comparación de riesgos de los diseños óptimos . . . . .	166
<b>Apéndice A. Métodos de estimación paramétrica en fiabilidad</b>	<b>171</b>
A.1. Estimadores de máxima verosimilitud (MLEs) . . . . .	172
A.1.1. Distribución normal . . . . .	176
A.1.2. Distribución de valor extremo . . . . .	178
A.2. Mejores estimadores lineales insesgados (BLUEs) . . . . .	180
A.2.1. Momentos de estadísticos de orden con censura progresiva . . . . .	181
A.2.2. Aproximaciones de los momentos de estadísticos de orden con censura progresiva . . . . .	184
A.2.3. Aproximaciones de los momentos de estadísticos de orden con censura de tipo II . . . . .	188
<b>Apéndice B. Métodos de simulación</b>	<b>189</b>
B.1. Simulación de muestras pseudo-aleatorias sometidas a censura . . . . .	189
B.2. Simulación de la curva OC de un plan con riesgos clásicos . . . . .	190

---

B.3. Simulación de la curva OC de un diseño con riesgos promedios y a posteriori . . . . .	192
B.4. Métodos de optimización numérica . . . . .	194
B.4.1. Método Quasi-Newton . . . . .	196
B.4.2. Método de Gauss-Newton . . . . .	197
<b>Conclusiones y líneas de trabajo</b>	<b>199</b>
<b>Abreviaturas y notación</b>	<b>213</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>217</b>

---

## Lista de tablas

---

2.1. Diseños óptimos $(m, k), (m, k)_I$ y $(m, k)_{II}$ de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	41
2.2. Diseños óptimos $(m, k), (m, k)_I$ y $(m, k)_{II}$ de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ . . . . .	41
2.3. Diseños óptimos $(n, m, k), (n, m, k)_I$ y $(n, m, k)_{II}$ de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ para niveles de censura $q \equiv 0\%$ y $50\%$ . . . . .	50
2.4. Diseños óptimos $(n, m, k), (n, m, k)_I$ y $(n, m, k)_{II}$ de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ para niveles de censura $q \equiv 70\%$ y $90\%$ . . . . .	51
3.1. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	69

3.2. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{MLE}}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	70
3.3. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)_{\text{MLE}}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes niveles de censura de tipo II cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	72
3.4. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)_{\text{MLE}}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes niveles de censura de tipo II cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	73
3.5. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	87
3.6. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	88
3.7. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	90
3.8. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes esquemas de censura progresiva cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	91
3.9. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes niveles de censura de tipo II cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	96

3.10. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$ y riesgos simulados $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$ para diferentes niveles de censura de tipo II cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	97
4.1. Comparativa de métodos iterativos de resolución de ecuaciones . . . . .	112
4.2. Comparativa de métodos iterativos de resolución de ecuaciones . . . . .	117
4.3. Comparativa de métodos iterativos de optimización . . . . .	120
4.4. Valores de $m_l$ y $m_u$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $c = p_\alpha - p_{lag}$ , $d = p_\beta + p_{lag}$ y $p_{lag} = 0.8p_\alpha$ . . . . .	128
4.5. Diseños óptimos $(m, k)$ y riesgos simulados $(APR_{sim}, ACR_{sim})$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ -imparcial . . . . .	130
4.6. Diseños óptimos $(m, k)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ no imparcial . . . . .	130
4.7. Diseños óptimos $(m, k)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. de máxima entropía . . . . .	131
4.8. Diseños óptimos $(m, k)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. beta generalizada de máxima entropía . . . . .	131
4.9. Valores de $(n_l, m_l)$ y $(n_u, m_u)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $c = p_\alpha - p_{lag}$ , $d = p_\beta + p_{lag}$ y $p_{lag} = 0.8p_\alpha$ . . . . .	132
4.10. Diseños óptimos $(n, m, k)$ y riesgos simulados $(APR_{sim}, ACR_{sim})$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ - imparcial . . . . .	135

4.11. Diseños óptimos $(n, m, k)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ no imparcial . . . . .	136
4.12. Diseños óptimos $(n, m, k)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ y $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ . . . . .	136
4.13. Diseños óptimos $(n, m, k)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. de máxima entropía . . . . .	137
4.14. Diseños óptimos $(n, m, k)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. beta generalizada de máxima entropía . . . . .	137
4.15. Valores de $(n_l, m_l)$ y $(n_u, m_u)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	139
4.16. Valores de $(n_l, m_l)$ y $(n_u, m_u)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	139
4.17. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ y riesgos sim. $(APR_{sim}, ACR_{sim})$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ -imparcial . . . . .	143
4.18. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ y riesgos sim. $(APR_{sim}, ACR_{sim})$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ -imparcial . . . . .	144
4.19. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ no imparcial . . .	145
4.20. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ no imparcial . . . . .	145

4.21. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ . . . . .	146
4.22. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ . . . . .	146
4.23. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una distribución de máxima entropía . . . . .	147
4.24. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una distribución de máxima entropía . . . . .	147
4.25. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una distribución beta gene- ralizada de máxima entropía . . . . .	148
4.26. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una distribución beta generalizada de máxima entropía . . . . .	148
5.1. Diseños óptimos $(m, k)$ y riesgos simulados $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ -imparcial . . . . .	156
5.2. Diseños óptimos $(m, k)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ no imparcial . . . . .	156
5.3. Diseños óptimos $(m, k)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01$ , $p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. de máxima entropía . . . . .	156

- 
- 5.4. Diseños óptimos  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial . . . . . 158
- 5.5. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial . . . 159
- 5.6. Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una dist. de máxima entropía . . . . . 159
- 5.7. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ - imparcial . . . . . 162
- 5.8. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial . . . . . 163
- 5.9. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial . . . . . 164
- 5.10. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial . . . . . 164
- 5.11. Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una dist. de máxima entropía . . . . . 165

---

5.12. Diseños óptimos aproximados $(n, m, k)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01, p_\beta = 0.03$ y $p$ sigue una dist. de máxima entropía . . . . .	165
5.13. Riesgos de diseños óptimos $(n, m, k)$ basados en riesgos clásicos cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01, p_\beta = 0.03$ y $q \equiv 0\%$	167
5.14. Riesgos de diseños óptimos $(n, m, k)$ basados en riesgos promedios cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01, p_\beta = 0.03$ y $q \equiv 0\%$ . . . . .	168
5.15. Riesgos de diseños óptimos $(n, m, k)$ basados en riesgos a posteriori cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01, p_\beta = 0.03$ y $q \equiv 0\%$ . . . . .	169

---

## Lista de figuras

---

2.1. Curvas características de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.01, \beta = 0.05$ y: (a) $p_\alpha = 0.0300$ y $p_\beta = 0.0375$ ; (b) $p_\alpha = 0.0400$ y $p_\beta = 0.0550$ . . . . .	42
2.2. Curvas características de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ y: (c) $p_\alpha = 0.0100$ y $p_\beta = 0.0140$ ; (d) $p_\alpha = 0.0200$ y $p_\beta = 0.0350$ . . . . .	42
2.3. Curvas características de planes de muestreo cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ para $\alpha=0.05, \beta=0.1, q \equiv 50\%$ y: (a) $p_\alpha=0.005$ y $p_\beta=0.050$ ; (b) $p_\alpha=0.005$ y $p_\beta=0.100$ ; (c) $p_\alpha=0.005$ y $p_\beta=0.150$ . . . . .	49
2.4. Nomogramas de los planes aproximados cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.10$ . . . . .	53
2.5. Nomogramas de los planes aproximados cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$ y $q \equiv 0\%$ . . . . .	54

2.6. Nomogramas de los planes aproximados cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ y $q \equiv 50\%$ . . . . .	55
2.7. Nomogramas de los planes aproximados cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ y $q \equiv 90\%$ . . . . .	55
3.1. Curvas características $L^{MLE}(p)$ y $L_{sim}^{MLE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01090$ , $p_\beta = 0.05350$ y: (a) $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b) $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c) $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$ . . . . .	75
3.2. Curvas características $L^{MLE}(p)$ y $L_{sim}^{MLE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01090$ , $p_\beta = 0.05350$ y: (a) $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b) $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c) $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$ . . . . .	76
3.3. Curvas características $L^{MLE}(p)$ y $L_{sim}^{MLE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01090$ , $p_\beta = 0.05350$ y: (a) $q \equiv 0\%$ ; (b) $q \equiv 50\%$ ; (c) $q \equiv 90\%$ . . . . .	77
3.4. Curvas características $L^{MLE}(p)$ y $L_{sim}^{MLE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ , $p_\alpha = 0.01090$ , $p_\beta = 0.05350$ y: (a) $q \equiv 0\%$ ; (b) $q \equiv 50\%$ ; (c) $q \equiv 90\%$ . . . . .	78
3.5. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ y $q \equiv 0\%$ . . . . .	80
3.6. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ y $q \equiv 50\%$ . . . . .	80
3.7. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05$ , $\beta = 0.10$ y $q \equiv 90\%$ . . . . .	81

3.8. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$ y $q \equiv 0\%$ . . . . .	81
3.9. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$ y $q \equiv 50\%$ . . . . .	82
3.10. Nomogramas de los planes aproximados cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$ y $q \equiv 90\%$ . . . . .	82
3.11. Curvas características $L^{ABLUE(3)}(p)$ y $L_{sim}^{ABLUE(3)}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01090, p_\beta = 0.05350$ y: (a) $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b) $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c) $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$ . . . . .	92
3.12. Curvas características $L^{ABLUE(3)}(p)$ y $L_{sim}^{ABLUE(3)}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01090, p_\beta = 0.05350$ y: (a) $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b) $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c) $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$ . . . . .	93
3.13. Curvas características $L^{ABLUE}(p)$ y $L_{sim}^{ABLUE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01090, p_\beta = 0.05350$ y: (a) $q \equiv 0\%$ ; (b) $q \equiv 50\%$ ; (c) $q \equiv 90\%$ . . . . .	98
3.14. Curvas características $L^{ABLUE}(p)$ y $L_{sim}^{ABLUE}(p)$ de planes de muestreo cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ , $\alpha = 0.05, \beta = 0.10, p_\alpha = 0.01090, p_\beta = 0.05350$ y: (a) $q \equiv 0\%$ ; (b) $q \equiv 50\%$ ; (c) $q \equiv 90\%$ . . . . .	99
4.1. Curvas de densidad de la distribución $BG(a, b, c, d, r)$ con $c = 0.002$ y $d = 0.045$ . . . . .	107

- 
- 4.2. Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  con  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$  cuando  $r = -0.9$  (línea sólida),  $r = 0$  (línea discontinua) y  $r = 0.9$  (línea de puntos y discontinua) . . . . . 108
- 4.3. Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $r = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$  (línea sólida),  $\varepsilon = 0.3$  (línea discontinua) y  $\varepsilon = 0.4$  (línea de puntos y discontinua) . . . . . 109
- 4.4. Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y  $r = 0$  cuando  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  (izquierda) y  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  (derecha) . . . . . 109
- 4.5. Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\mu_1 = 0.013$  (línea sólida),  $\mu_1 = 0.019$  (línea discontinua) y  $\mu_1 = 0.025$  (línea de puntos y discontinua) . . . . 110
- 4.6. Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\mu_1 = 0.019$  y  $\sigma_1 = 0.006$  (línea sólida),  $\sigma_1 = 0.012$  (línea discontinua) y  $\sigma_1 = 0.018$  (línea de puntos y discontinua) . . . . . 111
- 4.7. Curvas de densidad de la distribución exponencial de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y media  $\mu_1 = 0.016$  (línea sólida),  $\mu_1 = 0.021$  (línea discontinua),  $\mu_1 = 0.026$  (línea de puntos y discontinua) y  $\mu_1 = 0.031$  (línea de puntos) . . . . . 118
- 4.8. Curvas de densidad de la distribución normal de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ , media  $\mu_1 = 0.019$  y desviación típica  $\sigma_1 = 0.006$  (línea sólida),  $\sigma_1 = 0.009$  (línea discontinua) y  $\sigma_1 = 0.012$  (línea de puntos y discontinua). . . . . 118

---

4.9. Variación de $m(c, d)$ cuando $T \sim Exp(0, \sigma)$ con $c = p_\alpha - p_{lag}$ y $d =$ $p_\beta + p_{lag}$ . . . . .	129
4.10. Variación de $n(c, d)$ cuando $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ con $c = p_\alpha - p_{lag}$ y $d =$ $p_\beta + p_{lag}$ . . . . .	133
4.11. Variación de $n(c, d)$ cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $c = p_\alpha - p_{lag}$ y $d =$ $p_\beta + p_{lag}$ . . . . .	140
4.12. Variación de $n(c, d)$ cuando $X \sim EV(\mu, \sigma)$ con $c = p_\alpha - p_{lag}$ y $d =$ $p_\beta + p_{lag}$ . . . . .	140
5.1. Curvas de densidad a priori y condicionales cuando $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ $\varepsilon$ -imparcial con $c = 0.002$ , $d = 0.045$ y: (a) $\varepsilon = 0.2$ , (b) $\varepsilon = 0.3$ y (c) $\varepsilon = 0.4$ . . . . .	153
5.2. Curvas de densidad a priori y condicionales cuando $p$ sigue una dis- tribución de máxima entropía con $c = 0.002$ , $d = 0.045$ y media $\mu_1 = 0.016$ . . . . .	154
5.3. Curvas de densidad a priori y condicionales cuando $p$ sigue una dis- tribución de máxima entropía con $c = 0.002$ , $d = 0.045$ , media $\mu_1 =$ $0.019$ y desviación típica $\sigma_1 = 0.012$ . . . . .	155
5.4. Relación entre los riesgos promedios y a posteriori cuando la distribu- ción de $p$ es $\varepsilon$ -imparcial . . . . .	170

---

# Agradecimientos

---

Deseo expresar un sincero agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Arturo Javier Fernández Rodríguez por su orientación, comentarios y sugerencias, caracterizadas por el rigor y la precisión propios de la Estadística, durante toda la fase de elaboración del presente trabajo. Espero que la colaboración que hemos mantenido hasta la actualidad se extienda a los distintos proyectos y trabajos que nos depare el futuro.

Asimismo, quiero dedicar este trabajo a mi familia, en especial a la memoria de mi padre y como un motivo de satisfacción especial para mi madre en el duro trance de su enfermedad.

También les debo mucho a todos mis antiguos profesores y actuales compañeros de todas las áreas del Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación de la Universidad de La Laguna. Sin duda alguna, me han demostrado su gran nivel profesional como docentes e investigadores cuando he necesitado su ayuda. Deseo dar un especial agradecimiento al Dr. Sergio Alonso Rodríguez, quien me

animó durante la fase docente de mi programa de doctorado a presentarme a mi actual plaza como profesor asociado y entrar en el departamento así como a colaborar, posteriormente, en proyectos con el Instituto Canario de Estadística. Por supuesto, no puedo olvidar a mi amigo el Dr. Carlos González Alcón, con quien he mantenido interesantes conversaciones acerca de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y del software estadístico R además de disfrutar de grandes momentos recorriendo los montes de la isla de Tenerife. Por último, quiero agradecer a los doctores Roberto Dorta Guerra y Enrique Francisco González Dávila su amistad y su invitación a colaborar en proyectos de investigación conjunta, así como al Dr. Dionisio Pérez Brito.

Por supuesto, debido a mi trayectoria profesional en la Universidad de La Laguna realizando estudios y trabajos de carácter estadístico, quiero citar a todos los compañeros del personal de Administración y Servicios de la Universidad de La Laguna, quienes con su trabajo consiguen mejorar día a día esta universidad. En esta mención quiero citar, especialmente, a Soledad Muñoz Muñoz y a Andrés Francisco Palenzuela Rodríguez; con todos ellos comparto un sinfín de anécdotas durante todo este tiempo que hemos colaborado y trabajado conjuntamente.

Finalmente, como no podría ser de otra forma, el agradecimiento se hace extensivo a todas aquellas personas a las que haya podido omitir aquí y que han facilitado, en algún momento, mi trabajo en la Universidad de La Laguna. En todos ellos, sin duda, he encontrado muchos ejemplos y detalles gracias a los cuales cada persona logra mejorar la calidad de su modo de vida y trabajo diarios.

---

# Introducción

---

Los métodos estadísticos utilizados en el control de la calidad juegan un papel muy importante en la descripción de la variabilidad de los procesos de producción y fabricación de productos de la industria moderna. En dicho contexto, uno de los aspectos primordiales en relación al estudio de la calidad es el grado de *conformidad* o satisfacción de un conjunto especificado de requerimientos del producto con el objetivo de poder llevar a cabo decisiones sobre la aceptación o el rechazo del mismo. Este estudio de conformidad se lleva a cabo por medio del *muestreo de aceptación* aplicado a conjuntos o lotes de unidades del producto, concretamente a través de la definición de *planes de muestreo*.

En general, las especificaciones de calidad de un producto se suelen plantear en función de los intereses simultáneos tanto de los productores como de los consumidores del mismo. Dichos intereses hacen referencia a los niveles de calidad requeridos, los cuales se pueden medir como la proporción de unidades defectuosas,  $p$ , presentes en los lotes de producto, y los *riesgos del muestreo* asociados a los mismos. Con frecuencia, el *diseño de un plan de muestreo* se basa en un acuerdo entre el productor

y el consumidor sobre los niveles de calidad así como los riesgos que ambos están dispuestos a aceptar. Entre los planes que satisfacen las condiciones impuestas por el productor y el consumidor, se suele seleccionar el diseño que verifica un determinado criterio de optimalidad (por ejemplo, el plan con menor tamaño muestral).

Este trabajo considera los métodos y procedimientos del muestreo de aceptación cuando la variable característica de calidad del producto sometido a estudio es su tiempo de vida o tiempo hasta que se produce un fallo, que se denotará como  $T$ . En esta situación, el control de calidad se realiza a través del estudio de la conformidad de los requisitos o especificaciones concernientes a la fiabilidad del producto. Por tanto, los planes de muestreo que utilizan este tipo de especificaciones se conocen como *planes de muestreo de aceptación de fiabilidad*. En estos planes se observan los tiempos de fallo de las unidades o items del producto mediante pruebas o experimentos denominados, a menudo, *contrastes o ensayos de tiempo de vida o contrastes de fiabilidad* ("life or reliability testing"). A partir de la información recogida en estos experimentos el plan de muestreo permite tomar decisiones acerca de la aceptabilidad/rechazo del lote o el proceso de fabricación. En los contrastes de fiabilidad resulta habitual que sólo se observe el tiempo hasta el fallo de algunas de las unidades muestrales, mientras que el resto de observaciones estarían censuradas. Se pueden definir los siguientes tipos de censura más comunes:

- Censura por tiempo o de tipo I: El experimento finaliza en un tiempo fijado con anterioridad.
- Censura por el número de fallos o de tipo II: El experimento finaliza cuando se alcance un número prefijado de observaciones de tiempos de fallo.

Los mecanismos de observación de datos en contrastes de fiabilidad admiten, en

ocasiones, un mayor nivel de complejidad. Por ejemplo, en la censura progresiva se retiran unidades funcionales antes de su fallo durante el desarrollo del experimento y no sólo a su finalización.

El Capítulo 1 recoge las definiciones y los métodos más importantes del muestreo de aceptación en fiabilidad. A lo largo del capítulo proporcionamos una recopilación de referencias bibliográficas sobre el muestreo de aceptación. Asimismo, se presenta la definición del riesgo de muestreo clásico, así como de los riesgos promedios y a posteriori, a partir de una distribución a priori de  $p$ .

El Capítulo 2 expone el método para determinar los planes de muestreo en fiabilidad con menor tamaño muestral que utilizan riesgos clásicos. En particular, se obtienen los diseños cuando  $T$  sigue una distribución exponencial. En este capítulo se muestran los procedimientos para hallar los planes exponenciales óptimos de forma exacta aunque, también, se proporcionan varias aproximaciones a los mismos. La utilidad de dichos diseños aproximados se justifica de forma razonada mediante tablas y gráficos comparativos. Algunos de los resultados de este capítulo se encuentran recogidos en diferentes publicaciones, véase Pérez González y Fernández (2006, [139], 2009, [141]) y Fernández y Pérez-González (2006, [64]).

En el Capítulo 3 se estudian los planes óptimos (con mínimo tamaño muestral) que utilizan riesgos clásicos cuando  $T$  sigue una distribución de log-localización y escala. Concretamente, analizamos las distribuciones log-normal y de Weibull. En esta situación no es posible determinar los planes de forma exacta pero se proponen diferentes aproximaciones considerando distintos tipos de estimadores de los parámetros de localización y escala de la distribución de  $X = \log(T)$ . El autor describe diferentes

procedimientos para hallar los planes óptimos aproximados y analiza, de forma separada, los casos con censura de tipo II y con censura progresiva. Debido a la utilización de métodos aproximados, realizamos un estudio de simulación de los riesgos reales del muestreo. Mediante este análisis se podrá evaluar el grado de ajuste de los planes a los requisitos fijados por el productor y el consumidor. Los resultados del estudio se muestran en distintas tablas así como en varios gráficos comparativos. Una parte del análisis ha sido presentado por Pérez-González y Fernández (2009, [142]).

A partir de la utilización de una distribución a priori de  $p$ , se obtienen en el Capítulo 4 los planes con menor tamaño muestral basados en riesgos promedios. Estudiamos diferentes tipos de distribuciones de  $p$ , cuyas características se comparan en varios gráficos mediante un ejemplo ilustrativo. Con este propósito, se considera en este capítulo la familia de distribuciones a priori beta generalizada, varias distribuciones de máxima entropía que verifican diversas restricciones admisibles y otros modelos a priori, los cuales permiten además limitar el rango de posibles valores de  $p$ . Este estudio se recoge, de forma parcial, en el trabajo de Fernández y Pérez-González (2009, [65]). Asimismo, detallamos los procedimientos para la determinación de los planes de muestreo óptimos cuando  $T$  sigue las distribuciones exponencial, log-normal y de Weibull. Los diseños presentados en este capítulo sólo consideran la censura de tipo II y los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de localización y escala de  $T$  (cuando la distribución es exponencial) o de  $X = \log(T)$  (cuando la distribución es log-normal o de Weibull). Con estas condiciones se simplifican los procedimientos para hallar los correspondientes diseños óptimos. Estos planes se agrupan en un conjunto de tablas junto con un estudio por simulación de los riesgos promedios reales del muestreo. En concreto, se presentan varios ejemplos que permiten comparar los

diseños en los que se requiere la imparcialidad de la distribución de  $p$  con respecto a las especificaciones del productor y el consumidor. Algunos de los diseños con riesgos promedios se muestran en un trabajo de Pérez-González y Fernández (2007, [140]). Actualmente, estos autores están trabajando en un artículo donde se analizan, de forma más detallada, este tipo de planes.

Los planes de muestreo que utilizan riesgos a posteriori se estudian en el Capítulo 5. A partir de las distribuciones a priori de  $p$  consideradas en el Capítulo 4, definimos diferentes procedimientos para determinar los diseños óptimos. En este caso, supondremos que la censura es de tipo II y los estimadores de los parámetros de  $T$  (o  $X = \log(T)$ ) son los de máxima verosimilitud. De nuevo, recogemos los diseños en varias tablas utilizando un ejemplo similar al considerado en el Capítulo 4 con el propósito de poder realizar un análisis de las características de los planes. En particular, no sólo se estudian los riesgos reales a posteriori mediante simulación sino que, además, se comparan con los diseños óptimos con riesgos promedios. En este capítulo, el autor ofrece una comparativa del comportamiento de los planes de acuerdo a cada tipo de riesgo y se deducen algunas propiedades de interés.

---

# El muestreo de aceptación

## 1.1. Introducción

El muestreo de aceptación es el procedimiento adoptado para obtener muestras a partir de lotes o procesos de fabricación de algún producto industrial, y realizar pruebas o inspecciones de las unidades del producto o items de dichas muestras con el propósito de alcanzar ciertos objetivos sobre la calidad del producto. Los objetivos para el productor podrían ser los siguientes:

- Comprobar las propiedades o el funcionamiento del producto (pruebas de demostración).
- Cumplir ciertos requerimientos estándares, como aquellos que se especifican en algún procedimiento para el control de calidad.
- Controlar la presencia de lotes no satisfactorios en la entrega al consumidor o en una fase posterior de la producción.
- Estimar y optimizar los costes relacionados con la producción o el funcionamiento del producto.

Para el consumidor que recibe el producto, los objetivos podrían ser:

- Confirmar que los lotes suministrados cumplen los requerimientos de calidad estandarizados.
- Prevenir la utilización de productos procedentes de lotes no satisfactorios en otros procesos de producción.
- Motivar al productor a suministrar la calidad deseada.

El **muestreo de aceptación** se podría definir como un problema de decisión sobre la calidad de los lotes o los procesos de fabricación sometidos a inspección. Si se cumplen determinados requisitos o especificaciones sobre la calidad del producto se considera que éste es satisfactorio. En caso contrario, se dice que es defectuoso o no satisfactorio. El problema de decisión consiste en determinar el grado de verificación de los requisitos de calidad del lote o el proceso. En general, los **planes de muestreo** son procedimientos que proporcionan el tamaño de las muestras que se han de obtener y una regla o criterio para decidir si el lote o el proceso es satisfactorio o aceptable o, por el contrario, se considera no satisfactorio o rechazable.

Existen diversos trabajos de carácter introductorio y monográfico que exponen los principales métodos del muestreo de aceptación. En particular, Chiu y Wetherill (1972, [36]) y Wetherill y Chiu (1975, [179]) llevan a cabo una revisión bastante completa de dichos métodos. En estos artículos se recogen definiciones y conceptos básicos, así como una bibliografía clasificada con los trabajos más destacados sobre el tema. Entre los autores que proporcionan guías detalladas y prácticas de los planes de muestreo cabe mencionar a Dodge y Romig (1959, [51]), Bowker y Goode (1952, [22]), Hamaker (1958, [87]), Hill (1961, [88]), Wetherill (1977, [177]), Duncan (1986,

[52]), Grant y Leavenworth (1996, [74]) y Montgomery (2000, [125]).

Una característica importante de la calidad de un producto es la **fiabilidad** o su capacidad para realizar la función para la que ha sido diseñado, bajo ciertas condiciones operativas, durante un cierto periodo de tiempo. Entre otros, los objetivos de un análisis de fiabilidad incluyen:

- Estudiar los datos consistentes en periodos de tiempo transcurridos hasta que se produce algún tipo de evento (a menudo, el fallo) durante el funcionamiento del producto.
- Obtener información acerca de las causas y modos de los fallos de comportamiento del producto.
- Determinar los periodos de tiempo durante su funcionamiento en los que el producto es más susceptible de generar fallos.
- Comparar la fiabilidad de productos o diseños diferentes.
- Estudiar los factores que influyen en la fiabilidad.
- Predecir los costes de las garantías del producto.

De lo anterior, se deduce que la variable en estudio en un análisis de fiabilidad es el tiempo de vida o tiempo hasta que se produce el fallo de un ítem del producto. Denotaremos dicha variable por  $T$  y se considerará que es absolutamente continua y no negativa.

**Definición 1.1.** *A partir del estudio de  $T$  se pueden definir las siguientes medidas de calidad:*

- *Función de supervivencia (o fiabilidad):*

$$S(t) = \Pr(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

donde  $f(t)$  denota la función de densidad de  $T$ .

- *Tiempo medio hasta el fallo:*

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt, \quad t \geq 0.$$

- *Tasa de riesgo:*

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}, \quad t \geq 0.$$

- *Tiempo de vida fiable:*

$$t_{s_0} = S^{-1}(s_0), \quad 0 < s_0 < 1.$$

En el análisis de la fiabilidad, las pruebas o experimentos para obtener datos de fallo o supervivencia de los productos sometidos a ensayo reciben el nombre de **ensayos de tiempo de vida** o **contrastos de fiabilidad**. Entre las referencias más destacadas sobre los contrastes de fiabilidad, cabe citar a Lawless (1981, [106]), Nelson (1982, [129]), Martz y Waller (1982, [116]) y Meeker y Escobar (1998, [118]). Este tipo de pruebas permiten recoger información concerniente a las características de fiabilidad de un producto a través del análisis de muestras de lotes del mismo. A partir de los datos muestrales es posible aplicar una regla de decisión sobre la aceptabilidad

del producto con respecto a dichas características a través de los **planes de muestreo de aceptación de fiabilidad**. Esta clase de planes de muestreo representa el tema de estudio principal de este trabajo.

## 1.2. Curva operativa característica

El criterio de decisión de un plan de muestreo se determina a partir de una medida o nivel de la calidad  $\vartheta$  de los lotes o los procesos sometidos a inspección. Dicho nivel, como se verá más adelante, se cuantifica a través de alguna característica (unidimensional o multidimensional) que puede ser observada sobre cada unidad del producto inspeccionada. En el diseño de los planes de muestreo convencionales el nivel de calidad suele ser, de forma habitual, la proporción  $p \in [0, 1]$  de unidades defectuosas del lote o del proceso que están dispuestos a admitir el productor y el consumidor. Además, en el análisis de fiabilidad, se pueden definir otros niveles de calidad utilizando algunas de las medidas definidas en (1.1). En particular, Epstein y Sobel (1953, [59]) consideran el tiempo medio hasta el fallo y Fertig y Mann (1980, [66]) la fiabilidad como medidas de calidad.

**Definición 1.2.** *La probabilidad de aceptación del lote o del proceso cuando  $p$  es el nivel de calidad se define como*

$$L(p) = \Pr(\text{"aceptar el lote"}|p),$$

*cuya representación frente a  $p$  se conoce como curva operativa característica (OC) del plan de muestreo.*

La curva OC permite analizar un plan de muestreo frente a diferentes valores de  $p$

observados sobre los lotes o procesos sometidos a inspección. En la curva OC existen varios puntos de interés general que se describen a continuación:

- El nivel de calidad aceptable se define como un valor  $p_\alpha$  de  $p$  en el cual la probabilidad de rechazar lotes de buena calidad es "baja". En los planes de muestreo clásicos, esta probabilidad se define como riesgo del productor, quien especifica un valor máximo  $\alpha$  para dicho riesgo. Por ejemplo, suele ser frecuente fijar  $\alpha = 0.05$ .
- El nivel de calidad rechazable se define como un valor  $p_\beta$  de  $p$  en el que la probabilidad de aceptar lotes de mala calidad es "baja". En los planes clásicos, dicha probabilidad se define como riesgo del consumidor. El valor máximo tolerable de dicho riesgo se denota por  $\beta$  y una especificación habitual puede ser  $\beta = 0.10$ .
- El nivel de indiferencia en la calidad se define como el valor de  $p$  en el cual el producto tiene la misma probabilidad de aceptación que de rechazo.

En general, los planes de muestreo de aceptación se determinan a partir de especificaciones de estos puntos de la curva OC. Dichas especificaciones son establecidas, de común acuerdo, por el productor y el consumidor según sus intereses.

### 1.3. Curva del proceso

Bajo ciertas condiciones es posible disponer de información sobre la calidad del proceso de fabricación de los lotes, la cual puede servir de ayuda en el diseño del plan de muestreo. Dicha información suele tener un carácter subjetivo o consistir de información histórica que procede de inspecciones previas de lotes similares. En

muchos casos, esta información se podría representar mediante una distribución de probabilidad sobre el nivel de calidad  $p$ .

En un proceso de fabricación bajo control estadístico la calidad del lote es el resultado del nivel de calidad  $p$  (del proceso que genera los lotes) y de la variabilidad de dicho nivel entre los sucesivos lotes generados por el proceso y sometidos a inspección. Esta variación se puede definir en términos de una distribución de probabilidad  $\pi(p)$ , que recibe el nombre de curva del proceso o distribución a priori sobre  $p$ . En concreto, Mood (1943, [126]) ha demostrado la importancia de  $\pi(p)$  en procesos donde el nivel de calidad no es constante. En general, los planes bayesianos verifican algún criterio de optimalidad que utiliza una distribución de la calidad  $p$ . Sin embargo, existen otros planes que no son bayesianos pero en su determinación se suele considerar algún tipo de información a priori de  $p$ .

Generalmente, las distribuciones a priori continuas suelen ser más utilizadas que las discretas en los diseños de planes bayesianos. En particular, la distribución beta es muy habitual en el muestreo de aceptación cuando  $p \in [0, 1]$ . Sin embargo, algunos autores consideran que el uso extendido de esta distribución no resulta satisfactorio y proponen otros modelos que podrían ser más apropiadas en determinados procesos de producción.

#### 1.4. Tipología de los planes de muestreo

En los planes de muestreo de fiabilidad la característica individual de calidad que se observa del producto es el tiempo de vida o tiempo hasta el fallo,  $T$ . En este caso, una unidad del producto se considera defectuosa si no se cumplen ciertos requerimientos de calidad con respecto a  $T$ . Las características del muestreo de aceptación

en fiabilidad son similares a las del muestreo de aceptación convencional. La selección de las muestras que se han de inspeccionar presenta varios tipos: muestreo simple, muestreo doble, muestreo múltiple, muestreo secuencial y muestreo continuo. Según la forma de realizar la prueba, el contraste de fiabilidad puede ser simultáneo si todos los items muestrales se someten a la prueba de forma simultánea o secuencial si la prueba se realiza a cada item uno a uno. En ciertas situaciones, es posible realizar un muestreo con reemplazo de las unidades muestrales defectuosas observadas durante la prueba por otras unidades funcionales. En el muestreo sin reemplazo sólo se retiran las unidades defectuosas y se continua la observación del resto de items muestrales. Por otra parte, dependiendo del tipo de información recogida de las unidades muestrales, los ensayos de tiempo de vida se clasifican en dos categorías, por atributos o por variables.

En un **contraste de tiempo de vida por atributos** la información que se obtiene es el número de unidades muestrales que fallan durante la realización del experimento. Por ejemplo, en una prueba por atributos realizada a un conjunto de cien transformadores eléctricos de un cierto tamaño y tipo de una planta energética se sabe que han fallado seis durante un plazo de tiempo de un año. Por tanto, el dato que se observa es el número de fallos de las unidades muestrales y no el tiempo de ocurrencia de los mismos. Las pruebas que registran los datos de tiempos hasta el fallo se denominan **contrastos de tiempo de vida por variables**. Por ejemplo, en esta situación se podrían haber registrado los tiempos de supervivencia de los transformadores eléctricos durante un año.

Una prueba de tiempo de vida por atributos tiene una serie de ventajas sobre el ensayo por variables. En primer lugar, los costes de equipos de experimentación, de

monitorización y de registro de datos son más reducidos. En segundo lugar, no es necesario conocer una distribución de probabilidad de la variable de tiempo hasta el fallo y los resultados son independientes del modelo de distribución de dicha variable. Sin embargo, existen algunas desventajas en las pruebas por atributos. Si la distribución de tiempos de fallo es conocida, las estimaciones de la fiabilidad serán mejores en una prueba por variables. Además, dichas estimaciones obtenidas a partir de los datos por atributos pueden estar relacionadas con la fiabilidad durante un periodo de tiempo igual a la duración del experimento y no durante otros periodos de tiempo. Hay que mencionar, también, que es posible transformar los datos de las pruebas por variables a datos por atributos pero no viceversa.

De acuerdo al tipo de contraste de tiempo de vida utilizado en un **plan de muestreo de fiabilidad**, éstos se clasifican por atributos o por variables.

## 1.5. Tipos de censura

En los ensayos de tiempo de vida suele ser habitual que la prueba finalice antes de que se produzca el fallo de todas las unidades muestrales. En estos casos, las unidades que sobreviven al experimento y que no han fallado se eliminan o se retiran, en cuyo caso se dice que las observaciones correspondientes a dichas unidades están censuradas. Por tanto, el análisis se realiza sobre los datos de tiempos de vida que se hayan observado hasta el momento de la finalización de la prueba. La retirada puede ser de carácter no intencionado como, por ejemplo, la rotura accidental de una unidad experimental o el final de la disponibilidad de las instalaciones o laboratorios donde se realizan los ensayos. Sin embargo, la situación más usual es que la retirada de unidades sea intencional y esté planificada de antemano. Por ejemplo, se podría llevar a cabo

para ahorrar en los costes de realización y en el tiempo de duración de las pruebas. También, puede tener como objetivo la reducción del tiempo de utilización de las instalaciones donde se desarrollan las mismas. En el caso de una retirada planificada de unidades de una prueba hay varias formas o métodos para llevar a cabo la **censura de los datos**. Existen numerosas referencias sobre los procedimientos de censura en fiabilidad. Además de los trabajos ya mencionados de Lawless (1981, [106]) y Nelson (1982, [129]) podemos citar a Schneider (1986, [158]) y Cohen (1991, [38]).

A continuación, consideramos una muestra de  $n$  items cuyos tiempos de vida son observados durante una prueba. Los tiempos hasta el fallo de los items se denotan como  $n$  variables independientes e idénticamente distribuidas,  $T_1, \dots, T_n$ . En este caso, la variable  $T_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , tiene una función de distribución acumulada  $F(\cdot; \boldsymbol{\omega})$  y función de densidad  $f(\cdot; \boldsymbol{\omega})$ , donde  $\boldsymbol{\omega}$  denota el parámetro vectorial de la distribución, el cual pertenece a un espacio paramétrico  $\Omega$ . Las observaciones ordenadas de los tiempos de fallo se denotan por  $T_{1:n} \leq \dots \leq T_{n:n}$ , donde  $T_{i:n}$  es el  $i$ -ésimo estadístico de orden de la muestra  $T_1, \dots, T_n$ , con  $i = 1, \dots, n$ .

### 1.5.1. Censura de tipo II o por número de fallos

La censura de tipo II por la derecha consiste en fijar de antemano el número de fallos que se han de observar en una prueba de fiabilidad con  $n$  items. En este caso, en el momento de la finalización de la prueba, los tiempos hasta el fallo de las unidades o items supervivientes se desconocen. En la censura de este tipo sólo se recogen las  $m$  primeras observaciones,  $T_{1:n}, \dots, T_{m:n}$ , con  $1 \leq m < n$  y  $m$  prefijado de antemano. El resto de los  $(n - m)$  tiempos de fallo estarían censurados en  $T_{m:n}$ . La censura de tipo II se caracteriza por el hecho de que el número de observaciones  $m$  es conocido y la prueba finaliza en el instante del  $m$ -ésimo fallo. Por tanto, la

duración total de la prueba es aleatoria y viene dada por  $T^d = T_{m:n}$ . Los libros de Sarhan y Greenberg (1962, [149]) y David (1970, [44]) recogen las propiedades de los estadísticos de orden y otros procedimientos de inferencia utilizando datos con censura de este tipo. Cuando  $T$  sigue una distribución exponencial, conviene señalar las primeras referencias de Epstein y Sobel (1954, [60]) y Epstein (1960, [58]). Si  $T$  sigue una distribución de Weibull, podemos citar los trabajos de Engelhardt y Bain (1973, [55] y 1974, [56]), Engelhardt (1975, [54]) y Mann y Fertig (1977, [115]). Por su parte, Persson y Rootzen (1974, [143]) y Mann (1977, [114]) estudian la censura de tipo II cuando  $T$  sigue una distribución log-normal.

**Definición 1.3.** *La función de verosimilitud de  $\omega \in \Omega$  dada una muestra fija de observaciones con censura de tipo II,  $0 < T_{1:n} < \dots < T_{m:n} < \infty$ , es:*

$$\mathcal{L}(\omega \mid T_{1:n}, \dots, T_{m:n}) = \frac{n!}{(n-m)!} \left\{ \prod_{i=1}^m f(T_{i:n}; \omega) \right\} \{1 - F(T_{m:n}; \omega)\}^{n-m}.$$

También es posible definir la censura de tipo II por la izquierda. En esta situación, al comienzo de la prueba sólo se conoce que previamente han fallado un número determinado de items pero los correspondientes tiempos están censurados. Esta forma de censura se justifica en casos donde los primeros tiempos de fallo no pueden ser observados. Por ejemplo, cuando dichos fallos suceden de forma muy rápida y éstos no pueden ser medidos correctamente. Asimismo, esta censura aparece cuando las unidades del producto han estado funcionando un tiempo determinado en una fase previa antes del comienzo de la prueba y se han producido fallos no observados.

Los procedimientos anteriores se pueden generalizar para definir la censura doble, cuando ésta sucede al principio y al final de la prueba.

### 1.5.2. Censura de tipo I o por el tiempo

La censura de tipo I por la derecha se caracteriza por la especificación de un periodo de tiempo  $[0, U]$  fijo. En el transcurso de dicho periodo, se observan los tiempos  $T_{i:n}$  de los items sometidos a experimentación que fallen. En el instante de tiempo  $U$  se retiran de la prueba las unidades o items que no han fallado y que permanecen en funcionamiento, es decir, se realiza una censura por el tiempo.

En ciertas situaciones, puede resultar conveniente especificar un tiempo de censura para cada item o unidad sometida a la prueba como, por ejemplo, cuando las unidades no comienzan el experimento de forma simultánea. En el caso general de la censura de tipo I se determinan las observaciones de tiempos de fallo de la muestra de  $n$  items del producto durante periodos limitados de tiempo  $\mathcal{C}_i = [0, U_i]$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Los tiempos de censura  $U_i$  están especificados de antemano y son independientes de los tiempos  $T_{i:n}$  de los items sometidos a la prueba. En este tipo de censura los fallos observados verifican que  $T_{i:n} \leq U_i$  pero se desconocen los tiempos de vida de las unidades para las cuales  $T_{i:n} > U_i$ . Entre las características que describen la censura de tipo I hay que mencionar que la duración máxima de la prueba es conocida de antemano y es, exactamente,  $T^d = \max_{i=1}^n U_i$ , mientras que el número de observaciones,  $m$ , es una variable aleatoria desconocida. En concreto, se tiene que

$$m = \sum_{i=1}^n I_{\mathcal{C}_i}(T_{i:n}),$$

donde  $I_A(x) = 1$  si  $x \in A$ , o  $I_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ . De hecho,  $m$  es la suma de  $n$  distribuciones binomiales  $Bi(1, p_i)$  independientes, donde  $p_i = F(U_i; \boldsymbol{\omega})$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Cuando  $U_1 = \dots = U_n = U$ , se tendría que  $m \sim Bi(n, p)$ , con  $p = F(U; \boldsymbol{\omega})$ .

Existen diversos problemas que dificultan los procedimientos exactos de inferencia utilizando datos con censura de tipo I. Por esta razón, los estudios con este método de censura suelen utilizar resultados asintóticos. Por ejemplo, Kalbfleisch y Prentice (1980, [97]) y Basu y Ghosh (1980, [17]).

En una muestra de  $n$  items con censura de tipo I, las observaciones de  $T$  se pueden representar como  $T_i^* = \min\{T_{i:n}, U_i\}$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Entonces

**Definición 1.4.** *La función de verosimilitud de  $\omega \in \Omega$  dada la muestra fija de observaciones  $0 < T_1^* < \dots < T_n^* < \infty$  es*

$$\mathcal{L}(\omega \mid T_1^*, \dots, T_n^*) = \prod_{i=1}^n f(T_i^*; \omega)^{\delta_i} \{1 - F(T_i^*; \omega)\}^{1-\delta_i},$$

donde la variable  $\delta_i$  indica si el tiempo de fallo  $T_{i:n}$  está censurado ( $\delta_i = 0$ ) o no ( $\delta_i = 1$ ).

La forma más simple de censura de tipo I por la derecha se obtiene cuando  $U = U_1 = \dots = U_n$ . Aunque es menos común que el tipo anterior, también es posible definir la censura de tipo I por la izquierda al considerar sólo las observaciones de  $T_{i:n}$  que suceden a partir de un instante de tiempo prefijado antes del comienzo de la prueba. De nuevo, este tipo de censura puede ser aplicable en los casos comentados anteriormente para la censura de tipo II.

### 1.5.3. Censura progresiva

Los métodos de censura anteriores sólo permiten la retirada de unidades no defectuosas de las pruebas en el momento de su finalización. Sin embargo, en ciertas situaciones podría resultar conveniente efectuar dicha retirada en distintas fases del

ensayo y no sólo en el instante final. Por ejemplo, es posible que el coste de utilización de las instalaciones donde se realizan las pruebas sea muy alto o que exista un tiempo limitado para su uso. Este tipo de censura se conoce como **censura progresiva**. Entre los primeros estudios sobre la importancia de la censura progresiva en las pruebas de fiabilidad es necesario mencionar a Cohen (1963, [37]). Un trabajo más reciente de Balakrishnan y Aggarwala (2000, [7]) recoge los métodos y propiedades de los métodos de la censura progresiva aunque han sido ampliamente estudiados por numerosos autores. En este sentido, Balakrishnan (2007, [6]) presenta una revisión actualizada de muchos de los desarrollos que se han realizado en esta línea.

Supongamos que en una prueba de vida se ponen en funcionamiento  $n$  items en un instante  $T_0 = 0$ . En la censura progresiva de tipo II por la derecha se especifica el número  $m$  de las observaciones de eventos de fallo. También, antes del comienzo de la prueba, se fija  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  formado por  $m$  cantidades enteras no negativas tales que  $\sum_{i=1}^m (R_i + 1) = n$ , y que representan el esquema de censura progresiva. Entonces, en cada uno de los instantes de fallo observados se retiran aleatoriamente  $R_i$  unidades supervivientes del experimento, con  $i = 1, \dots, m$ . Las observaciones de tiempos de fallo se denotan por  $T_{i:m:n}^{\mathbf{R}}$  o, de forma más simplificada,  $T_{i:m:n}$ , con  $i = 1, \dots, m$ . Conviene señalar que  $T_{i:m:n}$  es un estadístico de orden que depende del esquema de censura, es decir,  $T_{i:m:n}$  no es igual al  $i$ -ésimo estadístico de orden usual,  $T_{i:n}$ , cuando  $i \geq 2$ . Sin embargo, como no se produce censura antes del primer fallo, se verifica que  $T_{1:m:n} = T_{1:n}$ . En este caso,  $\mathbf{T} = (T_{1:m:n}, \dots, T_{m:m:n})$  denotan los estadísticos de orden con censura progresiva de tipo II. Algunas referencias que describen los procedimientos de inferencia y simulación utilizando estadísticos de orden con censura progresiva de tipo II son Aggarwala y Balakrishnan (1998, [1]), Balakrishnan, Childs

y Chandrasekar (2002, [8]) y Ng, Chan y Balakrishnan (2002, [130]).

**Definición 1.5.** *La verosimilitud de  $\omega \in \Omega$  dada una muestra fija de observaciones con censura progresiva de tipo II por la derecha,  $0 < T_{1:m:n} < \dots < T_{m:m:n} < \infty$ , se expresa como*

$$\mathcal{L}(\omega \mid \mathbf{T}, \mathbf{R}) = c' \prod_{i=1}^m f(T_{i:m:n}; \omega) \{1 - F(T_{i:m:n}; \omega)\}^{R_i},$$

donde  $c' = n(n - R_1 - 1) \cdots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$ .

La censura progresiva de tipo I por la derecha se caracteriza por la especificación de  $m$  tiempos de censura  $U_1, \dots, U_m$  de tal forma que en dichos instantes de tiempo se retiran aleatoriamente  $R_1, \dots, R_m$  unidades supervivientes del experimento, respectivamente. Los tiempos  $U_i$  están prefijados, con  $i = 1, \dots, m$ , aunque el número de observaciones es una variable aleatoria. Las cantidades  $R_1, \dots, R_m$  también están prefijadas con la condición de que existan, al menos,  $R_i$  unidades supervivientes en el tiempo de censura  $U_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ . El experimento finaliza en el instante  $U_m$  con la retirada de las  $R_m$  unidades supervivientes hasta ese momento.

Al considerar una muestra de  $n$  items con censura progresiva de tipo I, las observaciones de  $T$  se denotan como  $\mathbf{T}^{**} = (T_1^{**}, \dots, T_n^{**})$  y se definen de la forma siguiente:

- si el tiempo de fallo del item  $i$ -ésimo,  $T_{i:m:n}$ , es observado, entonces  $T_i^{**} = T_{i:m:n}$ ,
- si  $T_{i:m:n}$  está censurado, entonces  $T_i^{**} = \{U_j : U_{j-1} < T_{i:m:n} \leq U_j\}$  para  $j = 1, \dots, m$ .

**Definición 1.6.** *La verosimilitud de  $\omega \in \Omega$  dada la muestra fija de observaciones*

$\mathbf{T}^{**} = (T_1^{**}, \dots, T_n^{**})$  es:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{T}^{**}, \mathbf{R}) = \prod_{i=1}^n f(T_i^{**}; \boldsymbol{\omega})^{\delta_i} \{1 - F(T_i^{**}; \boldsymbol{\omega})\}^{1-\delta_i},$$

donde  $\delta_i$  indica si  $T_{i:m:n}$  está censurado ( $\delta_i = 0$ ) o no ( $\delta_i = 1$ ).

El estudio de las propiedades teóricas de los tiempos de fallo ordenados de una muestra con censura progresiva de tipo I presenta bastantes dificultades. La razón es que, debido a la naturaleza aleatoria de los fallos que suceden en cada intervalo de observación, existe una posibilidad de que el experimento finalice antes de alcanzar el último periodo o intervalo de censura.

## 1.6. Diseño de planes por atributos

En general, el muestreo simple por atributos representa el método más sencillo y más ampliamente desarrollado del control de aceptación. El procedimiento general de los planes por atributos consiste en extraer una muestra de tamaño  $n$  de un lote de  $N$  unidades del producto o items sometido a inspección. En este caso, el plan se puede aplicar a un lote individual o a una serie de lotes producidos a partir de un proceso determinado. Los items inspeccionados de la muestra se clasifican como no defectuosos, si se verifican determinados requerimientos de calidad, o defectuosos, en caso contrario. El criterio general de decisión es el siguiente

- si  $m \leq c$ , se acepta el lote,
- en otro caso, se rechaza el lote,

donde  $m$  es el número de unidades del producto defectuosas en la muestra de tamaño  $n$  y  $c$  se denomina constante de aceptación. Por tanto, los diseños por atributos quedan

determinados por dos características: el tamaño muestral,  $n$  ( $\leq N$ ), y el número de aceptación,  $c$ .

Los planes por atributos se describen en muchos trabajos de carácter introductorio y monográfico entre los que podemos citar a Dodge y Romig (1959, [51]), Hill (1961, [88]), Duncan (1965, [52]), Wetherill (1969, [177]) y Stephens (2001, [166]). Hald (1967, [84]) presenta una discusión sobre planes de muestreo y compara los diseños obtenidos a partir de distintas expresiones de las curvas OC. Existen un gran número de estándares de control de calidad publicados que utilizan tablas de planes de muestreo de aceptación por atributos. Conviene mencionar el estándar americano MIL-STD-105D (1963, [119]) y el británico DEF-131A (1966, [47]) aunque, actualmente, estos esquemas se han sustituido por ANSI/ASQC Z1.4 (1993, [3]). En estos estándares los planes de muestreo se clasifican en función a un índice o nivel de calidad de aceptación. Según la definición de MIL-STD105D, este nivel de calidad de aceptación, denominado AQL, es la proporción máxima de unidades defectuosas que, a los propósitos del muestreo de inspección, se puede considerar que es satisfactoria como promedio del proceso. Otra característica de este tipo de esquemas de muestreo es la definición de una regla de intercambio entre los tipos de inspección realizados sobre los procesos o lotes sometidos a muestreo (normal, severa y reducida). El trabajo de Pérez-González (2004, [138]) recoge los resultados más importantes de los planes de muestreo clásicos por atributos así como una descripción de los estándares mencionados.

Los resultados conocidos del muestreo de aceptación convencional se aplican directamente al caso de los planes por atributos en fiabilidad. En este sentido, existen varios modelos del muestreo por atributos que se describen a continuación.

### Muestreo binomial e hipergeométrico

La distribución binomial permite estudiar el número de fallos en  $n$  pruebas independientes, en las cuales la probabilidad de fallo en cada prueba es constante e igual a  $p$ , con  $0 < p < 1$ . En este caso, el estimador puntual más frecuente de  $p$  es  $\hat{p} = M/n$ , donde  $M$  es el número de fallos. Si el tamaño muestral  $n$  está prefijado de antemano, la distribución de  $M$  es binomial  $Bi(n, p)$  y su función de probabilidad se expresa como

$$g(m | p, n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Debemos señalar que la distribución binomial resulta adecuada cuando el tamaño de lote  $N$  es grande. Si el muestreo se aplica a lotes de tamaño  $N$  conocido entonces la distribución de  $M$  es hipergeométrica, con función de probabilidad

$$g(m | p, n, N) = \frac{\binom{Np}{m} \binom{N(1-p)}{n-m}}{\binom{N}{n}}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1.$$

Como se aprecia en Wetherill y Kollerstrom (1979, [180]), cuando  $N \gg n$ , la curva OC correspondiente a la distribución binomial representa una aproximación bastante precisa de la curva asociada a un muestreo con distribución hipergeométrica.

### Muestreo de Pascal

En este tipo de muestreo el número de fallos  $m$  está prefijado de antemano y el tamaño muestral es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial negativa o de Pascal. Este esquema de muestreo resulta más apropiado en los casos en que  $m$  tiene mayor importancia en la determinación de los costes de la prueba. Por ejemplo,

puede suceder que las unidades que fallan tengan un coste significativamente mayor que las unidades supervivientes. En esta situación es preciso determinar cuántas unidades del producto se han de someter al ensayo hasta que se obtenga un número prefijado de observaciones de fallo. La distribución de Pascal del número de pruebas necesarias para observar  $m$  fallos se expresa de la forma

$$g(n | p, m) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad n = m, m+1, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

### Muestreo de Poisson

Un proceso de Poisson es aquél en el cual los tiempos que separan eventos sucesivos son independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo a una distribución exponencial. Sea  $M_t$  una variable aleatoria que denota el número de fallos que ocurren en un intervalo de tiempo  $[0, t]$ , con  $t > 0$  prefijado. Entonces se puede caracterizar la prueba de tiempo de vida como un proceso de Poisson. En este caso,  $M_t$  sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda t$  ( $\lambda$  por unidad de tiempo) y se expresa como

$$g(m_t | \lambda) = \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{m_t}}{m_t!}, \quad t > 0, \quad m_t = 0, 1, \dots, \quad (\lambda > 0),$$

donde  $\lambda$  representa la tasa de fallos del proceso.

El muestreo binomial y de Pascal se utilizan en el control de aceptación convencional. En fiabilidad también se suelen emplear a menudo, además del muestreo de Poisson. Por otro lado, los modelos anteriores permiten incorporar una distribución a priori sobre el nivel de calidad utilizado. De este modo, es posible considerar una distribución sobre  $p$ , en el caso del muestreo binomial y de Pascal, o sobre  $\lambda$ , en el

caso del modelo de Poisson.

## 1.7. Diseño de planes por variables

En muchas ocasiones, los planes de muestreo convencionales por variables asumen que la característica de calidad,  $X$ , que se mide sobre el producto se distribuye según una normal  $N(\mu, \sigma)$ . Si  $\ell_L$  denota un límite de especificación inferior de  $X$ , entonces una unidad del producto o item inspeccionado se considera inaceptable o defectuoso si  $X < \ell_L$ , y aceptable en caso contrario. Si el límite es superior,  $\ell_U$ , el producto es inaceptable si  $X > \ell_U$ . La especificación es unilateral cuando se utiliza un sólo límite,  $\ell_L$  o  $\ell_U$ , y bilateral cuando se utilizan ambos límites. Considerando sólo un límite inferior para  $X$ , existen varias posibilidades en el planteamiento del criterio de decisión del plan de muestreo por variables:

- cuando  $\mu$  es desconocida y  $\sigma$  conocida, se acepta el lote si  $(\bar{X} - \ell_L)/\sigma \geq k$ ,
- cuando  $\mu$  y  $\sigma$  son desconocidas, se acepta el lote si  $(\bar{X} - \ell_L)/S \geq k$ ,

donde  $\bar{X}$  y  $S$  denotan la media y la cuasidesviación típica muestrales de las observaciones  $X_1, \dots, X_n$  de la variable  $X$ . El parámetro  $k$  se denomina constante de aceptación. De este modo, el diseño de los planes por variables queda determinado por el tamaño muestral,  $n$ , y la constante de aceptación,  $k$ .

Una gran parte de los trabajos sobre los planes de muestreo por variables estudian el caso de la distribución normal de  $X$ , como Bowker y Goode (1952, [22]), Liebermann y Resnikoff (1955, [108]) y Duncan (1965, [52]). Owen (1967, [135], 1969, [136]) ha estudiado los planes de muestreo por variables cuando  $\sigma$  es desconocida utilizando propiedades de la distribución  $t$  de Student no central. También se pueden mencionar

los trabajos de Das y Mitra (1964, [43]), Rossow (1972, [148]), y Schneider y Wilrich (1981, [160]) sobre el efecto de la desviación de la hipótesis de normalidad en los planes unilaterales. El estándar de planes de muestreo por variables MIL-STD-414 (1957, [120]) reproduce completamente los resultados y las tablas publicadas por Liebermann y Resnikoff (1955, [108]). En la actualidad, este estándar se ha sustituido íntegramente por la norma civil ANSI/ASQC Z1.9 (1993, [4]). Estos esquemas de muestreo, que incluyen la regla de intercambio entre tipos de inspección (normal, severa y reducida), clasifican los planes en función al nivel de calidad aceptable, AQL, y el nivel de calidad rechazable, LTPD. El nivel de tolerancia o de calidad rechazable, LTPD, representa un nivel de calidad no satisfactoria que se define como la máxima proporción de unidades defectuosas del producto para la cual se da una probabilidad muy baja de aceptación por parte del plan de muestreo. También en este contexto, Pérez-González (2004, [138]) expone el diseño de los planes clásicos por variables, así como las metodologías utilizadas en las normas y estándares correspondientes.

Los planes de fiabilidad por variables pueden ser de varios tipos según sea la forma de observar los tiempos de fallo en las pruebas de vida. El método de censura utilizado resulta muy importante en la determinación del plan de muestreo.

## **1.8. Metodologías en el diseño de los planes de muestreo**

Los diseños de los planes de muestreo presentan varias metodologías de acuerdo a las especificaciones o requerimientos que ha de verificar el plan así como el criterio de decisión, y que determinan las características del mismo. Además, en muchas situaciones es posible que existan varios planes de muestreo distintos que cumplan

las condiciones propuestas. Por tanto, es preciso definir alguna condición o criterio de optimalidad adicional que permita llevar a cabo una selección del plan óptimo. En este sentido, suele ser habitual determinar el plan con tamaño muestral mínimo o el plan con menor duración de la prueba de vida.

El método convencional para obtener el plan de muestreo requiere especificar de antemano los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , y los correspondientes riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , que están dispuestos a asumir el productor y el consumidor, respectivamente. A continuación, se describen diferentes criterios para la definición del tipo de riesgo que puede ser utilizado en el diseño de los planes.

Supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  denotan las decisiones de aceptación y de rechazo del lote, respectivamente, que se determinan al aplicar el plan de muestreo. De este modo, según la Definición 1.2, la curva OC se expresa como  $L(p) = \Pr(\mathcal{A}|p)$ , con  $0 < p < 1$ . Los riesgos se pueden clasificar de la forma siguiente (1982, [116], 2008, [85]):

- Riesgos fijos o clásicos:

$$CPR \equiv \Pr(\mathcal{R}|p_\alpha) = 1 - L(p_\alpha) \quad y \quad CCR \equiv \Pr(\mathcal{A}|p_\beta) = L(p_\beta) \quad (1.1)$$

Según esta definición, *CPR* (*classical producer's risk*) representa el riesgo del productor de rechazar un lote con un nivel  $p_\alpha$  que se considera aceptable y *CCR* (*classical consumer's risk*) es el riesgo del consumidor de aceptar un lote con un nivel tolerable  $p_\beta$ . Por tanto, este método consiste en "fijar" ciertos puntos de la curva OC y es una forma habitual de proporcionar las especificaciones de un plan de muestreo.

- Riesgos promedios:

$$APR \equiv \Pr(\mathcal{R}|p \leq p_\alpha) \quad y \quad ACR \equiv \Pr(\mathcal{A}|p \geq p_\beta) \quad (1.2)$$

En este tipo de riesgos se tiene en cuenta la distribución a priori sobre  $p$ . De este modo,  $APR$  (*average producer's risk*) representa el promedio sobre valores aceptables de  $p$  del riesgo clásico del productor y  $ACR$  (*average consumer's risk*) es el promedio sobre valores inaceptables de  $p$  del riesgo clásico del consumidor. Por tanto, si  $\pi(p)$  denota una distribución a priori sobre  $p$ , los riesgos promedios se podrían expresar como:

$$APR \equiv \int_0^{p_\alpha} \{1 - L(p)\} \pi(p) dp \quad y \quad ACR \equiv \int_{p_\beta}^1 L(p) \pi(p) dp.$$

- Riesgos a posteriori:

$$PPR \equiv \Pr(p \leq p_\alpha | \mathcal{R}) \quad y \quad CPR \equiv \Pr(p \geq p_\beta | \mathcal{A}) \quad (1.3)$$

De forma similar al caso de los riesgos promedios, en este tipo de riesgos se especifica una distribución a priori  $\pi(p)$ . Entonces, los riesgos a posteriori  $PPR$  (*posterior producer's risk*) y  $CPR$  (*posterior consumer's risk*) se calculan de la forma siguiente:

$$PPR \equiv \frac{1}{\Pr(\mathcal{R})} \int_0^{p_\alpha} \{1 - L(p)\} \pi(p) dp \quad y \quad CPR \equiv \frac{1}{\Pr(\mathcal{A})} \int_{p_\beta}^1 L(p) \pi(p) dp,$$

donde

$$\Pr(\mathcal{A}) = \int_0^1 L(p)\pi(p)dp \quad \text{y} \quad \Pr(\mathcal{R}) = \int_0^1 \{1 - L(p)\}\pi(p)dp.$$

En este trabajo de investigación se introducen los planes de muestreo en fiabilidad utilizando riesgos clásicos y, a partir de estos diseños, se presentan los correspondientes a los planes que utilizan los riesgos promedios y a posteriori. Los riesgos promedios proporcionan resultados aceptables, en término medio, sobre una secuencia de planes de fiabilidad. Los riesgos clásicos son más apropiados cuando la decisión que se debe adoptar en una determinada prueba es más importante que garantizar la efectividad del plan cuando se aplica de forma continuada.

A través de la especificación de los riesgos clásicos o riesgos promedios, el productor y el consumidor intentan que los lotes satisfactorios o no defectuosos sean aceptados mientras que los no satisfactorios sean rechazados. Sin embargo, el interés de ambos puede estar en asegurar que los lotes aceptados sean, de hecho, lotes satisfactorios y que los lotes rechazados sean realmente insatisfactorios. Este objetivo es posible a través de la especificación de valores pequeños en los riesgos a posteriori.

Además de las especificaciones de niveles de calidad y riesgos, existen otras metodologías en el diseño de planes de muestreo. Los planes bayesianos permiten incorporar la información a priori disponible sobre la calidad de los lotes o del proceso. Dicha información se puede referir, también, a los parámetros desconocidos de los modelos utilizados en los planes. También es posible determinar diseños óptimos o eficientes utilizando funciones de pérdida (ante decisiones de aceptación correctas e incorrectas).

### 1.8.1. Planes de muestreo bayesianos

Los planes de muestreo bayesianos por atributos suelen utilizar criterios que tienen en cuenta la información disponible sobre el nivel de calidad del proceso o de los lotes del producto. Goel y Joglekar (1976, [72]) realizan un extenso estudio recopilando los procedimientos del muestreo de aceptación bayesiano en fiabilidad. En particular, Calvin (1990, [29]) presenta un estudio comparativo con varios diseños bayesianos por atributos considerando una distribución beta. Pham y Turkkan (1992, [145]) obtienen un plan de muestreo por atributos cuando la proporción de unidades defectuosas sigue una distribución beta generalizada mientras que Savchuk y Martz (1994, [150]) proponen un diseño binomial utilizando distribuciones de máxima entropía de  $p$ . Existen otras referencias de planes bayesianos en fiabilidad que emplean los distintos tipos de riesgos definidos en la Sección 1.8. Por ejemplo, Tobias y Trindade (1995, [172]) estudian el muestreo por atributos con riesgos clásicos y, por su parte, Martz y Waller (1982, [116]) y Hamada et al. (2008, [85]) consideran los riesgos promedios y a posteriori en el desarrollo de sus diseños. Entre los trabajos sobre muestreo bayesiano por variables en fiabilidad hay que señalar los estudios de planes secuenciales de Schafer y Singpurwalla (1970, [152]), MacFarland (1971, [112]), y Berger y Sun (1993, [20]).

Wetherill y Chiu (1975, [179]) presentan una discusión sobre la conveniencia de la aplicación práctica de los esquemas de muestreo bayesianos. En su trabajo concluyen que los conjuntos de tablas o estándares de planes de muestreo clásicos resultan más idóneos para consumidores como administraciones gubernamentales o grandes industrias con un alto nivel de adquisiciones del producto de un fabricante o productor. Sin embargo, los esquemas que utilizan planes bayesianos presentan la ventaja de ser más precisos y más adecuados para el estudio de procesos donde la característica de

calidad presenta una apreciable variabilidad estadística.

Lindley y Singpurwalla (1993, [111]) también obtienen un diseño de los planes de muestreo en fiabilidad que utiliza los procedimientos de decisión bayesianos. En particular, su estudio recoge las diferencias con los planes no bayesianos del estándar MIL-STD 481C (1977, [123]). Conviene destacar que los diseños presentados por estos autores consideran la situación en la que el productor y el consumidor están de acuerdo en el modelo de la variable  $T$  pero utilizan distintas distribuciones a priori.

### 1.8.2. Planes de muestreo de coste óptimo

Los trabajos de Chiu y Wetherill (1972, [36]) y Wetherill y Chiu (1975, [179]) proporcionan una revisión detallada de los planes de coste óptimo por atributos. La metodología del diseño de este tipo de planes consiste en evaluar y optimizar de forma conjunta los costes y pérdidas involucrados en la aplicación del plan. Además, estos diseños utilizan la proporción  $p$  de unidades defectuosas, de forma habitual, como medida de especificación de la calidad de los lotes o procesos. En este tipo de planes el incremento del tamaño de las muestras  $y$ , por tanto, de los costes implica una disminución de las pérdidas que conllevan las decisiones incorrectas y viceversa.

En ciertas situaciones, el plan de muestreo se determina mediante la optimización del coste promedio de los lotes sometidos a inspección sin que se requiera una distribución a priori de  $p$ . Entre los trabajos que presentan diseños de este tipo se encuentran Truscott (1969, [173]) y Brown y Rutenmiller (1974, [25]), además de las referencias citadas por Wetherill y Chiu (1975, [179]).

También existen algunas contribuciones sobre planes de coste óptimo bayesianos. Estos diseños consideran un modelo funcional de costes con funciones de pérdida así como una distribución a priori de  $p$ . Guthrie y Johns (1959, [79]) introducen un

modelo lineal de costes y determinan un plan de muestreo asintótico para lotes de gran tamaño en el caso de varias distribuciones a priori. Hald (1960, [81]) discute, de forma detallada, los problemas involucrados en los planes por atributos y por variables que utilizan distribuciones a priori y funciones de pérdida. Existen otros estudios de Hald (1964, [82], 1967, [83]) relacionados con los diseños de coste óptimo. Dichos trabajos establecen algunos resultados importantes cuando se consideran ciertas hipótesis sobre los modelos de costes. Wetherill y Campling (1966, [178]) estudian las propiedades de eficiencia y optimalidad de los planes propuestos por Hald.

Existen otras referencias destacadas sobre planes de coste óptimo. Evans y Thyregod (1986, [61]) obtienen un diseño óptimo tanto por atributos como por variables a partir de resultados aproximados. Moskowitz y Tang (1992, [127]) utilizan un modelo de costes propuesto por Schmidt, Case y Bennet (1974, [157]) para determinar un diseño de coste óptimo bayesiano por variables.

Finalmente, los planes de coste óptimo en fiabilidad se han estudiado para varias distribuciones de  $T$ . Soland (1968, [165]) presenta un diseño óptimo bayesiano cuando  $T$  se distribuye según una Weibull. Thyregod (1975, [171]) y Nigm e Ismail (1985, [132]) proponen diseños óptimos bayesianos cuando  $T$  sigue las distribuciones exponenciales uniparamétrica y biparamétrica, respectivamente. Otra referencia más reciente que se puede señalar es el trabajo de Huang y Wu (2008, [91]).

## 1.9. Otras referencias

A continuación, se recogen algunas contribuciones de interés sobre el muestreo de aceptación. En los capítulos siguientes se estudiarán, en mayor profundidad, los diseños por variables en fiabilidad y se citarán otros trabajos importantes.

Muestreo por atributos	
<b>Planes clásicos:</b>	Freeman et al. (1948, [69]); Hamaker (1958, [87]); Dodge (1963, [50]); DEF-131A (1966, [47]); Hald (1967, [84]); Craig (1968, [40]); Schilling y Johnson (1980, [155])
<b>Planes de coste óptimo:</b>	Hamaker (1951, [86]); Guenther (1971, [75]); Chiu (1974, [34]); Collani (1986, [39])
<b>Planes bayesianos:</b>	Sheng y Fan (1992, [163]); Tagaras y Lee (1987, [167]); Lee y Tagaras (1989, [107]); Case y Keats (1982, [30]); Guild y Raka (1980, [77])
Muestreo por variables	
<b>Planes clásicos:</b>	Garner (1958, [70]); Schilling (1970, [154]); Takagi (1972, [168]); DEF-05-30 (1974, [48])
<b>Planes bayesianos (con coste óptimo):</b>	Davies (1959, [45]); Dayananda y Evans (1973, [46]); Lam (1988, [101]); Kwon (1996, [100])
Muestreo en fiabilidad por atributos	
<b>Planes clásicos:</b>	Gupta y Groll (1961, [78]); Danziger y Papp (1988, [42]); Nachlas y Kim (1989, [128])
<b>Planes de coste óptimo:</b>	Breakwell (1956, [24]); Pfanzagl (1963, [144]); Case et al. (1975, [31]); Riew y Bai (1984, [146])
<b>Planes bayesianos:</b>	Guild (1973, [76]); Chiu y Lin (1992, [35])
Muestreo en fiabilidad por variables	
<b>Planes clásicos:</b>	H108 (1960, [80]); MIL-STD-690B (1960, [121]); MIL-STD-781B (1967, [122]); Wu et al. (2001, [182]); Balasooriya y Low (2004, [14]); Jun et al. (2006, [96])
<b>Planes bayesianos (con coste óptimo):</b>	Thyregod (1974, [170]); Schmidt et al. (1980, [156]); Lam (1990, [102], 1994, [103]); Lin (1999, [110]); Huang y Lin (2004, [92]); Chen et al. (2007, [33])

---

## Planes clásicos con censura progresiva: caso exponencial

### 2.1. Introducción

En los diseños de planes de muestreo por variables convencionales se supone, de forma habitual, que la característica de calidad en estudio sigue una distribución normal. En general, no se suelen aplicar esquemas de censura a las unidades o items muestrales sobre los que se mide dicha característica de calidad. Sin embargo, en los planes de muestreo por variables en fiabilidad la hipótesis de normalidad no resulta adecuada para describir la distribución de la variable tiempo de vida o tiempo hasta el fallo. Las distribuciones exponencial, log-normal y Weibull son las más utilizadas en el diseño de este tipo de planes de muestreo.

Supongamos que  $T$  denota la variable tiempo de vida. En este caso:

- Si  $T$  sigue una distribución del tipo de localización y escala, la función de distribución acumulada se representará por  $F(t; \mu, \sigma) = F_0((t - \mu)/\sigma)$ , donde  $\mu$  es el parámetro de localización,  $\sigma > 0$  el parámetro de escala y  $F_0$  es la función de distribución estandarizada de  $T$ . Entre las distribuciones de este tipo cabe mencionar la exponencial biparamétrica, la normal y la de valor extremo.

- Si  $T$  sigue una distribución del tipo de log-localización y escala, entonces la distribución de  $X = \log(T)$  es del tipo de localización y escala. Por tanto, se pueden aplicar los resultados de esta última familia de distribuciones en el diseño de los correspondientes planes de muestreo. Ejemplos de distribuciones de log-localización y escala son la log-normal y la de Weibull, y sus correspondientes distribuciones de localización y escala son la normal y la de valor extremo.

A continuación se describe la metodología para determinar el diseño de los planes de muestreo en fiabilidad cuando la distribución de  $T$  es de localización y escala. Estos diseños utilizan la definición de riesgos clásicos en los requisitos fijados por el productor y el consumidor. Supongamos que  $\ell_L$  es un límite de especificación inferior de la variable  $T$  y que los niveles de calidad se miden mediante la proporción  $p$  de unidades defectuosas o disconformes del lote o del proceso de producción. En consecuencia,  $\ell_L$  es el cuantil  $p$  de la distribución de  $T$ , i.e.  $\xi_p = \mu + \sigma F_0^{-1}(p)$ . El productor considera que un lote del producto o el proceso es aceptable o satisfactorio si  $p \leq p_\alpha$ , donde  $p_\alpha$  se denomina nivel de calidad aceptable. Por otro lado, para el consumidor, el lote o el proceso es rechazable o no satisfactorio si  $p \geq p_\beta$ , donde  $p_\beta$  se denomina nivel de calidad rechazable. De esta forma, la decisión sobre la aceptación del lote consiste en resolver el contraste de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : p \leq p_\alpha, \\ H_1 : p \geq p_\beta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Para aplicar el criterio de decisión se obtiene una muestra aleatoria de  $n$  unidades del producto, las cuales se someten a experimentación de forma simultánea mediante un ensayo o prueba de fiabilidad. Durante el experimento se observan los tiempos

de fallo aplicando alguno de los esquemas de censura definidos en la Sección 1.5 del Capítulo 1. En general, si  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  denota un esquema de censura progresiva, entonces la muestra de observaciones es  $T_{1:1:n}^{\mathbf{R}}, \dots, T_{1:m:n}^{\mathbf{R}}$  o, para mayor simplicidad,  $T_{1:1:n}, \dots, T_{1:m:n}$ . De este forma,  $m + \sum_{i=1}^m R_i = n$  y la proporción de censura aplicada vendría dada por  $q = 1 - m/n$ , con  $q \in [0, 1)$ .

El criterio de decisión más ampliamente utilizado en el diseño de planes de muestreo de aceptación por variables se basa en el siguiente estadístico

$$K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = (\hat{\mu} - \ell_L)/\hat{\sigma}, \quad (2.2)$$

donde  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  son estimadores equivariantes de  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente, obtenidos a partir de la muestra de tiempos de fallos observados. Como se demuestra en Lawless (1981, [106]), la propiedad de equivarianza de los estimadores garantiza que  $K_p$  es una cantidad pivotal. En general, los estimadores de máxima verosimilitud (*maximum likelihood estimators*, MLEs) suelen ser los más utilizados. Sin embargo, también se pueden usar otros estimadores como los mejores estimadores lineales insesgados (*best linear unbiased estimators*, BLUEs). A partir del estadístico  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ , el criterio de aceptación se define de la siguiente forma:

- Si  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) > k$ , se acepta el lote, donde  $k$  se denomina constante de aceptación.
- En otro caso, se rechaza el lote.

En consecuencia, la curva OC del plan de muestreo está definida por

$$L(p) \equiv L(p; n, m, k, \mathbf{R}) = \Pr(\hat{\mu} - k\hat{\sigma} > \xi_p) = \Pr(Y_1 - kY_2 > F_0^{-1}(p)), \quad 0 < p < 1, \quad (2.3)$$

donde

$$Y_1 = (\hat{\mu} - \mu)/\sigma \quad \text{e} \quad Y_2 = \hat{\sigma}/\sigma \quad (2.4)$$

son cantidades pivotaes.

Si la censura es de tipo II, la expresión de la curva OC se simplifica ya que sólo es necesario fijar el porcentaje de censura,  $q$ , en lugar de un esquema  $\mathbf{R}$ .

La curva OC permite obtener los planes de muestreo a partir de los requerimientos fijados, mediante algún tipo de acuerdo entre el productor y el consumidor. Dichas especificaciones vienen determinadas por los niveles de calidad sobre la proporción  $p$  de disconformes del lote,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , así como los riesgos máximos correspondientes,  $\alpha$  y  $\beta$ . En general, el productor está dispuesto a aceptar lotes satisfactorios (i.e. con  $p \leq p_\alpha$ ) con una probabilidad de, al menos,  $1 - \alpha$ . Por otro lado, el consumidor rechazará los lotes no satisfactorios (i.e. con  $p > p_\beta$ ) con una probabilidad de, al menos,  $1 - \beta$ . Entonces, el plan de muestreo debe verificar las inecuaciones siguientes:

$$CPR \equiv 1 - L(p_\alpha; n, m, k, \mathbf{R}) \leq \alpha \quad \text{y} \quad CCR \equiv L(p_\beta; n, m, k, \mathbf{R}) \leq \beta, \quad (2.5)$$

donde  $CPR$  y  $CCR$  denotan los riesgos clásicos del productor y el consumidor, respectivamente. Entre los planes que cumplen las anteriores condiciones, se elegirá como plan óptimo el correspondiente al menor tamaño muestral  $n$ . De este modo, un plan de muestreo por variables con un esquema de censura progresiva  $\mathbf{R}$  quedará determinado por el tamaño muestral,  $n$ , y la constante de aceptación,  $k$ . El número de tiempos de fallo observados,  $m$ , depende de  $n$  y de las proporciones de censura  $q_i = R_i/n$ , con  $i = 1, \dots, m$ .

En las secciones siguientes se presentan los diseños de planes de muestreo de

menor tamaño muestral (en adelante, diseños óptimos) cuando la variable tiempo de vida,  $T$ , sigue una distribución exponencial. Además de los diseños determinados de forma exacta presentamos algunos planes aproximados alternativos. Pérez-González y Fernández (2006, [139], 2009, [141]) estudian dichas aproximaciones y justifican su utilidad para deducir de forma explícita la expresión del correspondiente diseño. En general, para cada uno de los diferentes diseños, se describen los procedimientos de determinación a partir de los requerimientos de calidad especificados sobre la curva OC. En dichos procedimientos se utiliza la siguiente notación para la obtención de los valores enteros de  $n$  y  $m$ :  $\lceil x \rceil$  denota el menor entero mayor o igual a  $x$ , mientras que  $\lfloor x \rfloor$  representa la parte entera de  $x$ .

## 2.2. Diseños óptimos en el caso exponencial

Considérese que  $T$  se distribuye según un modelo exponencial  $Exp(\mu, \sigma)$  con función de distribución acumulada

$$F(t; \mu, \sigma) = F_0((t - \mu)/\sigma), \quad t \geq \mu \quad (\mu \geq 0, \sigma > 0),$$

donde  $F_0(x) = 1 - \exp(-x)$ , mientras que  $\mu$  y  $\sigma$  son los parámetros de localización y escala, respectivamente.

Epstein (1954, [57]), y Epstein y Sobel (1953, [59]) estudian los planes de muestreo exponenciales cuando  $\mu$  es conocida y la censura es de tipo II. Epstein presenta un plan que se obtiene a partir del test uniformemente de máxima potencia entre todos los tests del contraste (2.1) con nivel de significación  $\alpha$ . Epstein y Sobel también desarrollan un diseño que considera los casos de un muestreo con y sin reemplazo de las unidades defectuosas inspeccionadas. En este diseño se considera que la prueba finaliza

en un tiempo  $T_{end} = \min\{T_{m:n}, T_0\}$ , con  $T_0$  especificado de antemano. Recientemente, Fernández (2005, [62]), y Fernández y Pérez-González (2006, [64]) han estudiado el diseño de planes de muestreo cuando  $\mu$  es desconocida y la censura es progresiva.

En esta sección se presentan los planes de muestreo óptimos correspondientes a la distribución exponencial cuando la censura es progresiva. Se distinguen dos situaciones posibles en el estudio de estos diseños dependiendo si  $\mu$  es conocido o no.

### 2.2.1. Distribución uniparamétrica

Cuando  $T$  sigue una distribución exponencial  $Exp(0, \sigma)$  y la censura es progresiva, el MLE (y BLUE) de  $\sigma$  viene dado por la expresión

$$\hat{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^m (R_i + 1) T_{i:m:n} \right\} / m.$$

De acuerdo con (2.2), el estadístico del contraste sería  $K_p(0, \hat{\sigma}) = \ln(1 - p)/Y_2$ , donde  $Y_2$  se definió en (2.4). Se puede comprobar que  $2mY_2 \sim \chi^2(2m)$ , donde  $\chi^2(\nu)$  denota una distribución chi-cuadrado con  $\nu$  grados de libertad. De este modo, a partir de (2.3), la curva OC se expresa como

$$L(p) \equiv L(p; m, k) = \Pr(\chi^2(2m) > 2m \ln(1 - p)/k), \quad 0 < p < 1. \quad (2.6)$$

Obsérvese que la curva OC es independiente de  $n$  ( $\geq m$ ) y, por tanto, del esquema de censura. Por esta razón, el diseño de los planes de muestreo queda definido completamente mediante la especificación de  $m$  y de  $k$ . La elección de  $n$  vendría determinada por otros factores como la duración esperada del contraste, el coste económico de las unidades y el esquema de censura.

---

**Procedimiento 2.1:** Diseño óptimo  $(m, k)$  del plan de muestreo cuando  $T \sim \text{Exp}(0, \sigma)$

---

- Se fijan los riesgos,  $\alpha$  y  $\beta$ , así como los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , del productor y el consumidor, respectivamente. También se fija la proporción de censura,  $q$ .
- El diseño  $(m, k)$  se determina como  $m = \lceil m_0 \rceil$ , donde  $m_0$  es la solución exacta de (2.8), y  $k$  puede ser cualquier valor de  $[k_\beta, k_\alpha]$ , donde:

$$k_\alpha = 2m \ln(1 - p_\alpha) / \chi_\alpha^2(2m) \quad \text{y} \quad k_\beta = 2m \ln(1 - p_\beta) / \chi_{1-\beta}^2(2m).$$

Un valor razonable de  $k$  podría ser  $k^* = (k_\beta + k_\alpha)/2$ .

- El tamaño muestral puede ser cualquier valor entero  $n \geq m$ . La elección del mínimo tamaño muestral  $n$  sería la siguiente:
  - si  $q = 0$ , entonces  $n = m$ ,
  - si  $q \neq 0$ , entonces  $n = \lceil m_0 / (1 - q) \rceil$ .

Debido a que  $n$  y  $m$  son enteros, se tiene que la proporción de censura del plan de muestreo es, exactamente,  $q^* = 1 - m/n \simeq q$ .

---

Para determinar el diseño con el valor óptimo de  $m$  es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 - L(p_\alpha; m_0, k_0) &= \alpha, \\ L(p_\beta; m_0, k_0) &= \beta. \end{cases} \quad (2.7)$$

Sustituyendo la expresión (2.6) de la curva OC en las ecuaciones (2.7) se deduce que

$$\chi_\alpha^2(2m_0) / \chi_{1-\beta}^2(2m_0) = \ln(1 - p_\alpha) / \ln(1 - p_\beta), \quad (2.8)$$

donde  $\chi_\eta^2(\nu)$  denota el cuantil  $\eta$  de la distribución chi-cuadrado con  $\nu$  grados de libertad. Entonces, el diseño óptimo exacto  $(m, k)$  se obtiene aplicando el Procedimiento 2.1.

### 2.2.2. Distribución biparamétrica

Cuando el parámetro de localización  $\mu$  se desconoce y la censura es progresiva, los MLEs (y BLUEs) de  $\mu$  y  $\sigma$  son

$$\hat{\mu} = T_{1:m:n} \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^m (R_i + 1)T_{i:m:n} - nT_{1:m:n} \right\} / m \quad (m \geq 2),$$

respectivamente. De este modo

$$K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \{Y_1 + \ln(1 - p)\} / Y_2,$$

donde  $Y_1$  e  $Y_2$  están definidos en (2.4). Ambas variables son independientes y, además, verifican que

$$2nY_1 \sim \chi^2(2) \quad \text{y} \quad 2mY_2 \sim \chi^2(2m - 2). \quad (2.9)$$

Entonces, la expresión general de la curva OC definida a partir de (2.3) es la siguiente

$$L(p) \equiv L(p; n, m, k) = \Pr(Y_1 - kY_2 > -\ln(1 - p)), \quad 0 < p < 1. \quad (2.10)$$

Se observa que la curva OC es independiente del esquema de censura aplicado y, por tanto,  $m$  depende de  $n$  sólo a través de la proporción de censura,  $q$ . Según Fernández (2005, [62]), la curva OC viene dada por

$$L(p) \equiv L(p; n, m, k) = \begin{cases} \frac{(1 - p)^n}{(1 + kn/m)^{m-1}} & \text{si } k \geq 0, \\ 1 - \frac{(-m/k)^{m-1}}{\Gamma(m-1)} \int_0^{-\ln(1-p)} \frac{1 - (1 - p)^n \exp(ny)}{y^{2-m} \exp(-my/k)} dy & \text{si } k < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

---

**Procedimiento 2.2:** Diseño óptimo  $(n, m, k)$  del plan de muestreo cuando  $T \sim \text{Exp}(\mu, \sigma)$

---

- Se establecen las especificaciones de riesgos y niveles de calidad del productor y el consumidor, así como la proporción de censura.
- Se determina la solución  $(n_0, k_0)$  del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - L(p_\alpha; n_0, m_0, k_0) &= \alpha, \\ L(p_\beta; n_0, m_0, k_0) &= \beta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $m_0 = n_0(1 - q)$ .

- El tamaño muestral mínimo se calcula como  $n = \lceil n_0 \rceil$ . Si  $q = 0$ , entonces  $m = n$ , y si  $q \neq 0$ :
  - se escoge  $m = \lfloor (1 - q)n_0 \rfloor$  cuando  $(n, m)$  verifica las condiciones (2.5).
  - en otro caso,  $m = \lceil (1 - q)n_0 \rceil$ .

Como  $n$  y  $m$  son enteros, la proporción real de censura del plan de muestreo es  $q^* = 1 - m/n \simeq q$ .

- La constante de aceptación  $k$  puede ser cualquier valor de  $[k_\beta, k_\alpha]$ , donde:

$$\begin{aligned} 1 - L(p_\alpha; n, m, k_\alpha) &= \alpha, \\ L(p_\beta; n, m, k_\beta) &= \beta. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que, dado que siempre se cumple que  $p_\alpha < p_\beta$ , entonces  $k_\beta \leq k_\alpha$ . Una elección razonable para  $k$  podría ser  $k^* = (k_\beta + k_\alpha)/2$ .

---

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función gamma y  $0 < p < 1$ . El Procedimiento 2.2 utiliza esta expresión de la curva OC para obtener el diseño óptimo exacto  $(n, m, k)$ .

## 2.3. Diseños óptimos aproximados en el caso exponencial uniparamétrico

### 2.3.1. Diseño aproximado I

Es preciso observar que el valor de  $m_0$  que verifica la condición (2.8) no puede hallarse de forma explícita, y que se han de emplear técnicas de resolución iterativa de ecuaciones como, por ejemplo, los métodos de Newton-Raphson o de la secante. Sin embargo, podemos obtener una expresión analítica y prácticamente exacta de  $m$  utilizando una excelente aproximación de la curva OC mediante la transformación de Wilson-Hilferty (1931, [181])

$$\sqrt{9\nu/2} [\{\chi^2(\nu)/\nu\}^{1/3} + \{2/(9\nu)\} - 1] \simeq N(0, 1) \quad (2.13)$$

cuando  $\nu$  es suficientemente grande (digamos,  $\nu \geq 10$ ) y donde  $N(0, 1)$  denota la distribución normal estándar. Luego, si  $m \geq 5$ , es posible aproximar la curva OC de la forma siguiente

$$L(p) \simeq L_I(p) \equiv L_I(p; m, k) = 1 - \Phi \left( \left[ \{\ln(1-p)/k\}^{1/3} - \{1 - 1/(9m)\} \right] \sqrt{9m} \right), \quad (2.14)$$

donde  $\Phi(\cdot)$  denota la función de distribución normal estándar. Si se utiliza esta aproximación en (2.8) y se denota por  $z_\eta$  el cuantil  $\eta$  de la distribución normal estándar, entonces podemos deducir (véase Pérez-González y Fernández, 2009, [141]) que

$$m_0 = \left( \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{6} \right)^2, \quad (2.15)$$

---

**Procedimiento 2.3:** Diseño óptimo aproximado  $(m, k)_I$  del plan de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$

---

- Se establecen las especificaciones de riesgos y niveles de calidad del productor y el consumidor, así como la proporción de censura.
- El valor de  $m$  viene determinado por  $m = \lceil m_0 \rceil$ , donde  $m_0$  se obtiene a partir de (2.15).
- Además,  $k \in [k_\beta, k_\alpha]$ , con

$$k_\alpha = \ln(1 - p_\alpha)/h_\alpha(m) \quad \text{y} \quad k_\beta = \ln(1 - p_\beta)/h_{1-\beta}(m),$$

donde  $h_\eta(m) = (1 - 1/9m + z_\eta/\sqrt{9m})^3$ . De nuevo, se puede escoger  $k = (k_\alpha + k_\beta)/2$ .

- La elección del tamaño muestral  $n$  se puede realizar de acuerdo al criterio del Procedimiento 2.1.
- 

donde  $s = (z_{1-\beta}u^{1/3} - z_\alpha)/(1 - u^{1/3})$  y  $u = \ln(1 - p_\alpha)/\ln(1 - p_\beta)$ .

En consecuencia, el diseño óptimo aproximado del plan de muestreo denotado como  $(m, k)_I$  se determina de la forma que se describe en el Procedimiento 2.3.

### 2.3.2. Diseño aproximado II

También se han estudiado aproximaciones normales a la curva característica (2.6). En esta situación, sin embargo, la aproximación que obtenemos no es muy precisa pero, al menos, proporciona una cota superior de  $m$ . Como demuestra Fernández (2002, [63]), se considera que  $\sqrt{n}k(\hat{\sigma} - \sigma)$  sigue una distribución asintótica  $N(0, k^2\sigma^2/(1 - q))$ , cuando  $q$  es fijo. De esta forma, la curva OC se puede aproximar como:

$$L(p) \simeq L_{II}(p) \equiv L_{II}(p; m, k) = 1 - \Phi(\sqrt{m}\{\ln(1 - p)/k - 1\}). \quad (2.16)$$

**Procedimiento 2.4:** Diseño óptimo aproximado  $(m, k)_{II}$  del plan de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$

- Se establecen las especificaciones de riesgos y niveles de calidad del productor y el consumidor. También se fija la proporción de censura.
- En esta situación,  $m = \lceil m_0 \rceil$ , donde  $m_0$  se obtiene a partir de (2.17).
- La constante de aceptación  $k \in [k_\beta, k_\alpha]$ , con

$$k_\alpha = \ln(1 - p_\alpha)/(1 + z_\alpha/\sqrt{m}) \quad \text{y} \quad k_\beta = \ln(1 - p_\beta)/(1 + z_{1-\beta}/\sqrt{m}).$$

- La elección de  $k$  y  $n$  se puede hacer siguiendo el mismo criterio presentado en el Procedimiento 2.1.

Pérez-González y Fernández (2009, [141]) utilizan esta aproximación en el sistema de ecuaciones (2.7) y obtienen que

$$m_0 = \left[ \frac{\ln \{(1 - p_\beta)^{z_\alpha} / (1 - p_\alpha)^{z_{1-\beta}}\}}{\ln \{(1 - p_\alpha) / (1 - p_\beta)\}} \right]^2. \quad (2.17)$$

El diseño óptimo aproximado del plan de muestreo denotado como  $(m, k)_{II}$  se determina mediante el Procedimiento 2.4.

### 2.3.3. Comparativa de los diseños exactos y aproximados

Las Tablas 2.1 y 2.2 muestran una comparativa de los planes de muestreo óptimos que se obtienen aplicando los procedimientos descritos anteriormente. En particular, se presenta el diseño  $(m, k)$  correspondiente a la expresión exacta (2.6) de la curva OC, así como los planes aproximados  $(m, k)_I$  y  $(m, k)_{II}$ . En la Tabla 2.1 seleccionamos  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$  y los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  de la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]). La Tabla 2.2 utiliza otros requerimientos de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  para obtener diseños con tamaños muestrales de distinta magnitud y poder apreciar mejor las

**Tabla 2.1:** Diseños óptimos  $(m, k)$ ,  $(m, k)_I$  y  $(m, k)_{II}$  de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ 

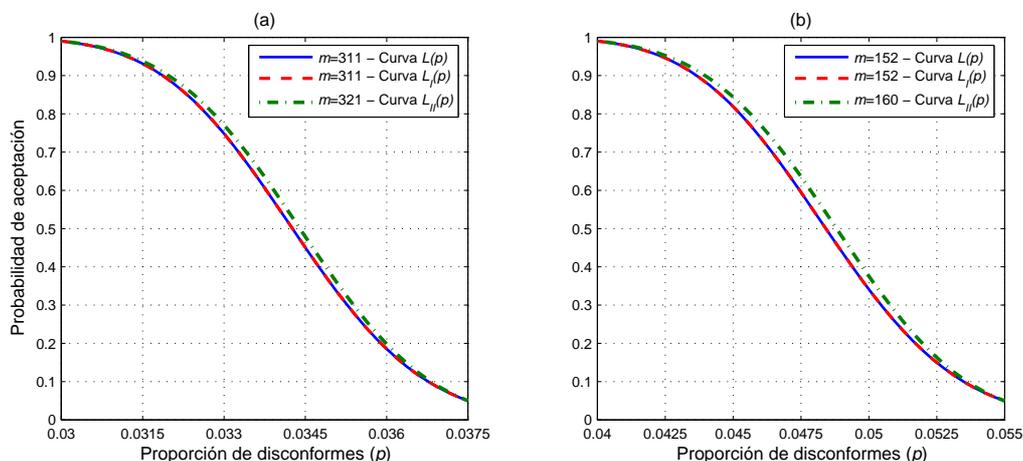
$p_\alpha$	$p_\beta$	Diseño $(m, k)$		Diseño $(m, k)_I$		Diseño $(m, k)_{II}$	
		$m$	$k$	$m$	$k$	$m$	$k$
0.00041	0.01840	1	-8.030E-03	2	-5.982E-03	3	-9.410E-03
0.00284	0.03110	2	-0.01613	3	-0.01419	4	-0.01764
0.00654	0.04260	3	-0.02431	3	-0.02445	5	-0.02625
0.01090	0.05350	4	-0.03250	4	-0.03260	6	-0.03473
0.02090	0.07420	6	-0.04919	6	-0.04924	8	-0.05177
0.03190	0.09420	8	-0.06620	8	-0.06624	10	-0.06898
0.03760	0.10400	9	-0.07476	9	-0.07480	11	-0.07762
0.04940	0.12300	11	-0.09202	11	-0.09205	13	-0.09500
0.06150	0.14200	12	-0.11036	12	-0.11039	14	-0.11367
0.07400	0.16100	14	-0.12840	14	-0.12843	16	-0.13176
0.09950	0.19800	17	-0.16578	17	-0.16580	19	-0.16942
0.11900	0.22500	19	-0.19455	19	-0.19458	21	-0.19841

**Tabla 2.2:** Diseños óptimos  $(m, k)$ ,  $(m, k)_I$  y  $(m, k)_{II}$  de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ 

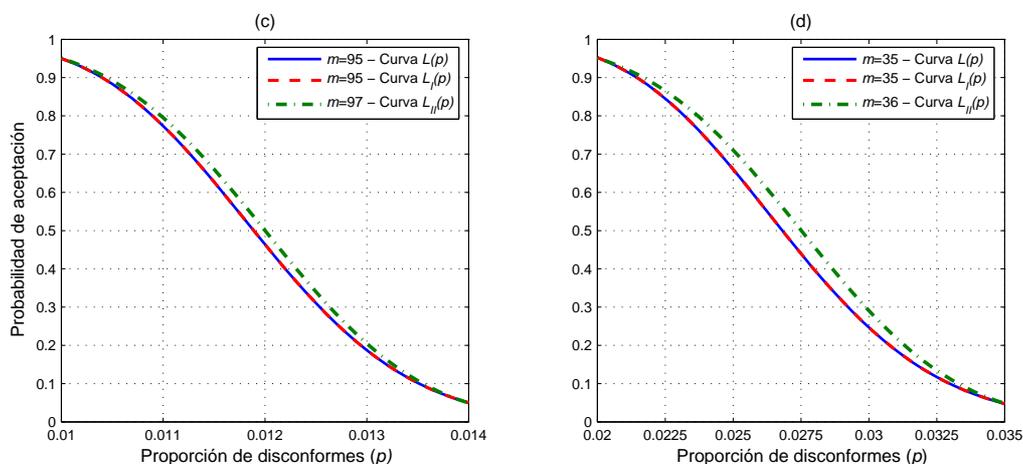
$\alpha$	$\beta$	$p_\alpha$	$p_\beta$	Diseño $(m, k)$		Diseño $(m, k)_I$		Diseño $(m, k)_{II}$	
				$m$	$k$	$m$	$k$	$m$	$k$
0.01	0.05	0.0200	0.0230	797	-0.02197	797	-0.02197	812	-0.02200
		0.0300	0.0375	311	-0.03490	311	-0.03490	321	-0.03501
		0.0400	0.0550	152	-0.04974	152	-0.04974	160	-0.05004
0.05	0.05	0.0100	0.0140	95	-0.01200	95	-0.01200	97	-0.01207
		0.0200	0.0350	35	-0.02744	35	-0.02744	36	-0.02790
		0.0300	0.0700	15	-0.04957	15	-0.04958	17	-0.05128

diferencias entre los mismos.

Las Figuras 2.1 y 2.2 representan las curvas características de varios de los planes obtenidos. Los diseños  $(m, k)_I$  son prácticamente iguales a los  $(m, k)$  que utilizan la



**Figura 2.1:** Curvas características de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.01, \beta = 0.05$  y: (a)  $p_\alpha = 0.0300$  y  $p_\beta = 0.0375$ ; (b)  $p_\alpha = 0.0400$  y  $p_\beta = 0.0550$



**Figura 2.2:** Curvas características de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$  y: (c)  $p_\alpha = 0.0100$  y  $p_\beta = 0.0140$ ; (d)  $p_\alpha = 0.0200$  y  $p_\beta = 0.0350$

curva OC exacta, tanto para valores pequeños como altos del tamaño muestral. Por otro lado, el plan  $(m, k)_{II}$  es bastante conservador y muestra resultados más alejados de los diseños  $(m, k)$ . Este plan aproximado proporciona una cota superior cercana a

$m$  suficientemente válida para muchas aplicaciones prácticas. En las figuras se puede apreciar que la curva  $L_I(p)$  es prácticamente exacta si se compara con  $L(p)$ , mientras que  $L_{II}(p)$  representa una aproximación bastante precisa a pesar de las diferencias entre el plan aproximado y el exacto.

Una característica de las aproximaciones presentadas es que  $m$  se determina directamente a partir de las especificaciones del diseño. El plan  $(m, k)_I$  tiene la ventaja, con respecto al  $(m, k)_{II}$ , del alto nivel de precisión en el cálculo de  $m$ .

## 2.4. Diseños óptimos aproximados en el caso exponencial biparamétrico

### 2.4.1. Diseño aproximado I

De nuevo, para hallar el valor de  $n$  del plan de muestreo exacto cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  es preciso emplear técnicas o métodos iterativos de resolución de ecuaciones. Estos métodos precisan un valor inicial suficientemente próximo para converger a la solución. En esta situación también se puede deducir una expresión explícita para calcular de forma aproximada el tamaño muestral. En primer lugar, se utiliza la aproximación  $\chi^2$  de Patnaik a la distribución del estadístico  $\hat{\mu} - k\hat{\sigma}$  y, a continuación, se aplica la transformación de Wilson-Hilferty. Mediante este método de aproximación, Pérez-González y Fernández (2009, [141]) determinan un diseño suficientemente preciso comparado con el que se obtiene al aplicar el Procedimiento 2.2.

A partir de (2.4) y (2.9), es posible expresar la cantidad pivotal

$U = \{(\hat{\mu} - k\hat{\sigma}) - \mu\}/\sigma$  en términos de una combinación lineal de variables  $\chi^2$  independientes puesto que

$$U = \{1/(2n)\}2nY_1 + \{-k/(2m)\}2mY_2.$$

De acuerdo a Patnaik (1950, [137]), la distribución de  $U/c$  se puede aproximar a una  $\chi^2_\nu$ , donde  $c$  y  $\nu$  verifican que

$$E[U] = c\nu \quad y \quad Var[U] = 2c^2\nu. \quad (2.18)$$

Entonces, utilizando la aproximación de Wilson-Hilferty (2.13), la curva OC se expresa del siguiente modo

$$L(p) \simeq L_I(p) \equiv L_I(p; \nu, c) = 1 - \Phi \left( \left[ \{-\ln(1-p)/(c\nu)\}^{1/3} - \{1 - 2/(9\nu)\} \right] \sqrt{9\nu/2} \right). \quad (2.19)$$

Considerando la expresión anterior de  $L(p)$  en las condiciones (2.12), el plan de muestreo óptimo aproximado ha de verificar los siguientes requerimientos

$$L_I(p_\alpha; \nu_0, c_0) = 1 - \alpha \quad y \quad L_I(p_\beta; \nu_0, c_0) = \beta,$$

o, de forma equivalente

$$\begin{cases} c_0\nu_0 \left(1 - \frac{2}{9\nu_0} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9\nu_0}}\right)^3 = -\ln(1 - p_\alpha), \\ c_0\nu_0 \left(1 - \frac{2}{9\nu_0} + z_{1-\beta} \sqrt{\frac{2}{9\nu_0}}\right)^3 = -\ln(1 - p_\beta), \end{cases} \quad (2.20)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que

$$u^{1/3} = \{1 - 2/(9\nu_0) + z_\alpha \sqrt{2/(9\nu_0)}\} / \{1 - 2/(9\nu_0) + z_{1-\beta} \sqrt{2/(9\nu_0)}\},$$

donde  $u = \ln(1 - p_\alpha) / \ln(1 - p_\beta)$ . Por tanto, se puede demostrar que

$$\nu_0 = (s + \sqrt{s^2 + 2/9})^2,$$

con  $s = (u^{1/3} z_{1-\beta} - z_\alpha) / \{\sqrt{18}(1 - u^{1/3})\}$ . Esta expresión de  $\nu_0$  permite hallar el valor de  $c_0$  a partir de (2.20).

Para determinar los valores de  $n$  y  $k$  es preciso tener en cuenta que la media de  $U$  viene dada por

$$E_U = E[U|m, k] = \{(1 - q) - k(m - 1)\} / m, \quad (2.21)$$

y la varianza por

$$V_U = Var[U|m, k] = \{(1 - q)^2 + k^2(m - 1)\} / m^2. \quad (2.22)$$

Mediante las propiedades anteriores se obtienen las siguientes expresiones cuando  $c = c_0$  y  $\nu = \nu_0$

$$E_U = c_0 \nu_0 = 1/n_0 - k_0(m_0 - 1)/m_0 \quad \text{y} \quad V_U = 2c_0^2 \nu_0 = 1/n_0^2 + k_0^2(m_0 - 1)/m_0^2.$$

Para  $k_0 \neq -(1 - q)$ , estas ecuaciones proporcionan el siguiente resultado

$$A'k_0^2 + B'k_0 + C' = 0,$$

**Procedimiento 2.5:** Diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)_I$  del plan de muestreo cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$

- Se especifican los riesgos,  $\alpha$  y  $\beta$ , así como los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , del productor y el consumidor, respectivamente. Asimismo, se selecciona el porcentaje de censura,  $q$ .
- El tamaño muestral es  $n = \lceil n_0 \rceil$ , donde  $n_0$  viene dado por (2.23). El valor de  $m$  se determina de la forma descrita en el Procedimiento 2.2.
- La constante de aceptación se determina como

$$k = (1 - q)(1 - nE_U) / \{n(1 - q) - 1\}.$$

donde

$$A' = (1 - q) - E_U, \quad B' = 2(1 - q)E_U - E_U^2 - V_U \quad \text{y} \quad C' = (1 - q)(E_U^2 - V_U),$$

con lo cual, denotando  $\Delta = B'^2 - 4A'C'$ , se tiene que

$$k_0 = \frac{-B' + \sqrt{\Delta}}{2A'} \quad \text{y} \quad n_0 = \frac{1 + k_0/(1 - q)}{E_U + k_0}. \quad (2.23)$$

Finalmente, el Procedimiento 2.5 describe el método para obtener el diseño óptimo aproximado del plan de muestreo.

### 2.4.2. Diseño aproximado II

Pérez-González y Fernández (2009, [141]) también consideran otras aproximaciones distintas de la curva característica (2.10). Para valores suficientemente altos de  $m$  se puede deducir un diseño aproximado a partir de una aproximación normal asintótica de  $U = \{1/(2n)\}2nY_1 + \{-k/(2m)\}2mY_2$ , donde  $Y_1$  e  $Y_2$  han sido definidas

en (2.4). Teniendo en cuenta las expresiones de la media y la varianza de  $U$  dadas en (2.21-2.22), la curva OC se puede aproximar del siguiente modo

$$L(p) \simeq L_{II}(p) \equiv L_{II}(p; n, m, k) = 1 - \Phi \left( \frac{-m \ln(1-p) - (1-q) + k(m-1)}{\sqrt{(1-q)^2 + k^2(m-1)}} \right)$$

con  $m = (1-q)n$ .

Para hallar el plan de muestreo es necesario resolver el sistema de ecuaciones de  $n_0$  y  $k_0$

$$L_{II}(p_\alpha; n_0, m_0, k_0) = 1 - \alpha \quad \text{y} \quad L_{II}(p_\beta; n_0, m_0, k_0) = \beta,$$

donde  $m_0 = (1-q)n_0$ . Entonces, si  $k_0 \neq -(1-q)$ , se obtiene la ecuación

$$A''k_0^2 + B''k_0 + C'' = 0,$$

cuyos coeficientes vienen dados por

$$A'' = (w-1)(D+G), \quad B'' = -2DG - G^2 - E^2 \quad \text{y} \quad C'' = (1-q)(G^2 - E^2),$$

con  $w = z_\alpha/z_{1-\beta}$ ,

$$D = (w-1)(1-q), \quad E = \frac{w-1}{z_\alpha - z_{1-\beta}} \ln \left( \frac{1-p_\beta}{1-p_\alpha} \right) \quad \text{y} \quad G = \ln \left( \frac{(1-p_\beta)^w}{1-p_\alpha} \right).$$

Denotando  $\Omega = B''^2 - 4A''C''$ , se deduce que

$$k_0 = \frac{-B'' + \sqrt{\Omega}}{2A''} \quad \text{y} \quad n_0 = \frac{1 + k_0/(1-q)}{G/(1-w) + k_0}. \quad (2.24)$$

En esta ocasión, el Procedimiento 2.6 proporciona el diseño óptimo aproximado del

**Procedimiento 2.6:** Diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)_{II}$  del plan de muestreo cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$

- Se establecen las especificaciones de riesgos  $(\alpha, \beta)$  y niveles de calidad  $(p_\alpha, p_\beta)$  del productor y el consumidor. También, se selecciona el porcentaje de censura,  $q$ .
- El tamaño muestral es  $n = \lceil n_0 \rceil$ , donde  $n_0$  viene dado por (2.24). De nuevo, el valor de  $m$  se obtiene como se explica en el Procedimiento 2.2.
- La constante de aceptación es  $k = \{nG/(w - 1) + 1\}/\{n - 1/(1 - q)\}$ .

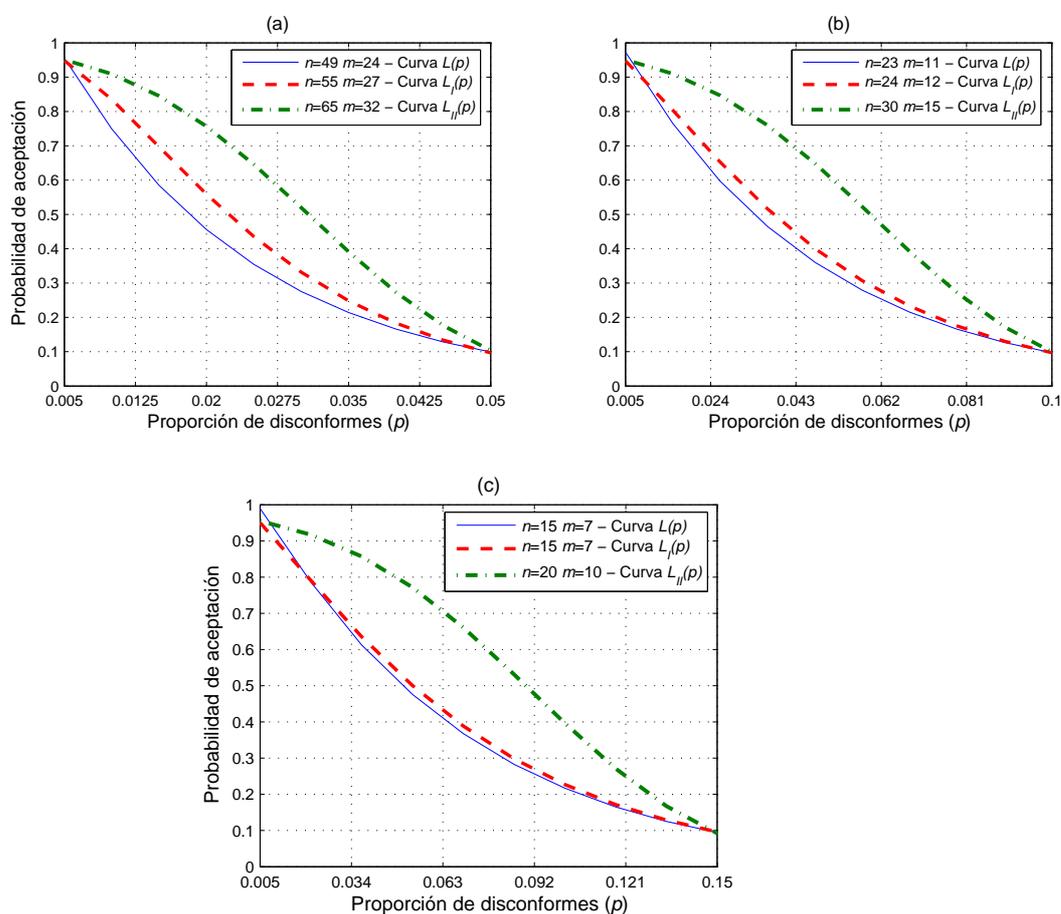
plan de muestreo.

### 2.4.3. Comparativa de los diseños exactos y aproximados

De nuevo, en las Tablas 2.3 y 2.4, así como en la Figura 2.3, se muestra un estudio comparativo de los diferentes planes que se obtienen a partir de los procedimientos anteriores, i.e. el diseño  $(n, m, k)$  correspondiente a la curva OC exacta (2.10) y los diseños aproximados  $(n, m, k)_I$  y  $(n, m, k)_{II}$ . Los requerimientos de dichos planes vuelven a considerar ciertos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , así como los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  de la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]).

Se aprecia claramente que los planes de muestreo  $(n, m, k)_I$  se aproximan bastante al diseño  $(n, m, k)$  correspondiente a la curva OC exacta. En cambio, los diseños  $(n, m, k)_{II}$  muestran un mayor error y resultan bastante imprecisos. Los gráficos de la Figura 2.3 ilustran la característica conservadora de estos diseños, así como el error en la curva OC que presenta el plan  $(n, m, k)_{II}$  para valores de  $p$  diferentes a  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ .

De nuevo, en ambas aproximaciones se puede calcular el tamaño muestral  $n$  mediante una expresión explícita a partir de las especificaciones iniciales, sin necesidad de acudir a procedimientos iterativos. La primera aproximación permite obtener un



**Figura 2.3:** Curvas características de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  para  $\alpha=0.05$ ,  $\beta=0.1$ ,  $q \equiv 50\%$  y: (a)  $p_\alpha=0.005$  y  $p_\beta=0.050$ ; (b)  $p_\alpha=0.005$  y  $p_\beta=0.100$ ; (c)  $p_\alpha=0.005$  y  $p_\beta=0.150$

valor de  $n$  suficientemente aceptable mientras que la segunda aproximación sólo proporciona una cota superior. Esta cota puede utilizarse para buscar el valor exacto de  $n$  mediante métodos iterativos.

**Tabla 2.3:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$ ,  $(n, m, k)_I$  y  $(n, m, k)_{II}$  de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$  para niveles de censura  $q \equiv 0\%$  y  $50\%$

$p_\alpha$	$p_\beta$	Diseño $(n, m, k)$			Diseño $(n, m, k)_I$			Diseño $(n, m, k)_{II}$		
		$n$	$m$	$k$	$n$	$m$	$k$	$n$	$m$	$k$
$q \equiv 0\%$										
0.00041	0.01840	124	124	7.161E-07	126	126	-3.765E-04	162	162	-4.473E-03
0.00284	0.03110	79	79	-2.348E-03	87	87	-5.471E-03	103	103	-9.386E-03
0.00654	0.04260	62	62	-6.180E-03	71	71	-0.01217	80	80	-0.01503
0.01090	0.05350	52	52	-0.01065	61	61	-0.01963	68	68	-0.02131
0.02090	0.07420	42	42	-0.02213	50	50	-0.03697	54	54	-0.03471
0.03190	0.09420	36	36	-0.03517	43	43	-0.05661	47	47	-0.04959
0.03760	0.10400	34	34	-0.04234	41	41	-0.06739	44	44	-0.05708
0.04940	0.12300	32	32	-0.05855	38	38	-0.09012	40	40	-0.07278
0.06150	0.14200	30	30	-0.07518	35	35	-0.11475	38	38	-0.08993
0.07400	0.16100	29	29	-0.09346	33	33	-0.14144	35	35	-0.10682
0.09950	0.19800	27	27	-0.13081	31	31	-0.19780	33	33	-0.14398
0.11900	0.22500	27	27	-0.16124	30	30	-0.24241	32	32	-0.17291
$q \equiv 50\%$										
0.00041	0.01840	124	61	7.221E-07	126	63	-3.522E-04	162	81	-4.501E-03
0.00284	0.03110	79	39	-2.381E-03	88	44	-5.089E-03	103	52	-9.479E-03
0.00654	0.04260	62	30	-6.345E-03	71	35	-0.01076	81	41	-0.01538
0.01090	0.05350	53	26	-0.01148	62	31	-0.01723	69	35	-0.02185
0.02090	0.07420	43	21	-0.02396	51	25	-0.03119	56	28	-0.03601
0.03190	0.09420	39	19	-0.03980	45	23	-0.04654	50	25	-0.05188
0.03760	0.10400	37	18	-0.04783	44	22	-0.05512	48	24	-0.06018
0.04940	0.12300	36	18	-0.06595	41	21	-0.07183	45	23	-0.07716
0.06150	0.14200	36	17	-0.08595	40	20	-0.09004	44	22	-0.09549
0.07400	0.16100	36	18	-0.10533	39	20	-0.10882	43	22	-0.11440
0.09950	0.19800	38	19	-0.14674	40	20	-0.14868	44	22	-0.15420
0.11900	0.22500	41	21	-0.17808	42	21	-0.17968	46	23	-0.18506

**Tabla 2.4:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$ ,  $(n, m, k)_I$  y  $(n, m, k)_{II}$  de planes de muestreo cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$  para niveles de censura  $q \equiv 70\%$  y  $90\%$

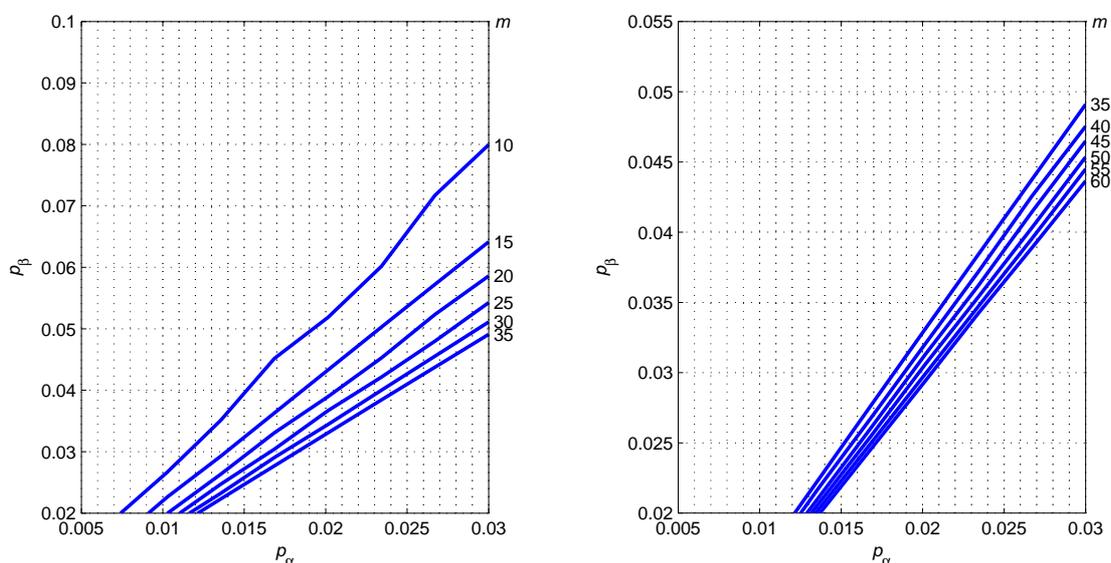
$p_\alpha$	$p_\beta$	Diseño $(n, m, k)$			Diseño $(n, m, k)_I$			Diseño $(n, m, k)_{II}$		
		$n$	$m$	$k$	$n$	$m$	$k$	$n$	$m$	$k$
$q \equiv 70\%$										
0.00041	0.01840	124	37	7.300E-07	126	37	-3.560E-04	163	49	-4.577E-03
0.00284	0.03110	79	23	-2.431E-03	88	26	-5.169E-03	104	32	-9.699E-03
0.00654	0.04260	62	18	-6.582E-03	72	21	-0.01117	82	25	-0.01579
0.01090	0.05350	53	16	-0.01201	62	19	-0.01763	71	22	-0.02269
0.02090	0.07420	45	14	-0.02647	53	16	-0.03277	59	18	-0.03777
0.03190	0.09420	43	12	-0.04534	49	14	-0.04967	54	17	-0.05466
0.03760	0.10400	42	13	-0.05383	48	14	-0.05858	53	16	-0.06364
0.04940	0.12300	44	13	-0.07460	48	14	-0.07725	53	16	-0.08226
0.06150	0.14200	46	14	-0.09469	49	14	-0.09671	55	17	-0.10187
0.07400	0.16100	49	15	-0.11551	51	15	-0.11692	57	18	-0.12192
0.09950	0.19800	57	17	-0.15769	57	17	-0.15794	64	20	-0.16277
0.11900	0.22500	63	19	-0.18871	63	18	-0.18907	70	21	-0.19369
$q \equiv 90\%$										
0.00041	0.01840	124	12	7.749E-07	126	12	-3.765E-04	164	16	-4.814E-03
0.00284	0.03110	79	7	-2.809E-03	88	8	-5.611E-03	108	10	-0.01074
0.00654	0.04260	65	6	-9.130E-03	74	7	-0.01275	89	8	-0.01815
0.01090	0.05350	60	6	-0.01781	68	6	-0.02122	82	8	-0.02677
0.02090	0.07420	65	7	-0.03892	68	6	-0.04088	84	8	-0.04618
0.03190	0.09420	78	8	-0.06118	79	7	-0.06187	97	9	-0.06634
0.03760	0.10400	86	9	-0.07113	86	8	-0.07210	105	10	-0.07625
0.04940	0.12300	103	11	-0.09057	103	10	-0.09194	122	12	-0.09560
0.06150	0.14200	119	12	-0.11123	119	11	-0.11150	139	13	-0.11495
0.07400	0.16100	135	14	-0.13031	135	13	-0.13119	155	15	-0.13457
0.09950	0.19800	165	17	-0.16976	165	16	-0.17052	187	18	-0.17387
0.11900	0.22500	187	19	-0.19983	187	18	-0.20030	209	20	-0.20371

## 2.5. Nomogramas del tamaño muestral

En el muestreo de aceptación los nomogramas pueden representar una herramienta gráfica de gran utilidad. Mediante este tipo de gráficos sería posible obtener el diseño aproximado de un plan de muestreo a partir de un conjunto de requisitos de forma sencilla. En particular, el diseño clásico por atributos se puede determinar utilizando un nomograma binomial desarrollado por Larson (1966, [105]). Sin embargo, la elaboración del nomograma presenta algunas dificultades de gran importancia. Por un lado, el trazado de la gráfica resulta extremadamente complicado para un número muy alto de variables (niveles de calidad y riesgos especificados tanto por el productor como por el consumidor). Por esta razón, en los nomogramas que presentamos a continuación, se fijan los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  y sólo se utilizan los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  como variables. El gráfico representa los tamaños muestrales de los diseños aproximados correspondientes. Sin embargo, el tiempo de cómputo para realizar dicha representación resulta ser muy elevado si no existen expresiones analíticas que permitan obtener, de forma inmediata, el valor de  $n$  y  $m$  a partir de unas condiciones  $(\alpha, \beta)$  y  $(p_\alpha, p_\beta)$ . En este sentido, se pueden utilizar los resultados estudiados en las Secciones 2.3 y 2.4, y desarrollar una serie de nomogramas que ayuden a determinar los diseños aproximados.

En la Sección 2.2.1 se ha comprobado que la aproximación (2.15) proporciona, con una precisión casi exacta, el valor de  $m$  del diseño cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ . Los nomogramas de la Figura 2.4 ayudan a determinar dicho valor, de forma orientativa, a partir de un conjunto de requisitos dados.

Para la distribución exponencial biparamétrica también se puede utilizar la expresión (2.23) del diseño  $(n, m, k)_I$  y trazar un nomograma aproximado de forma



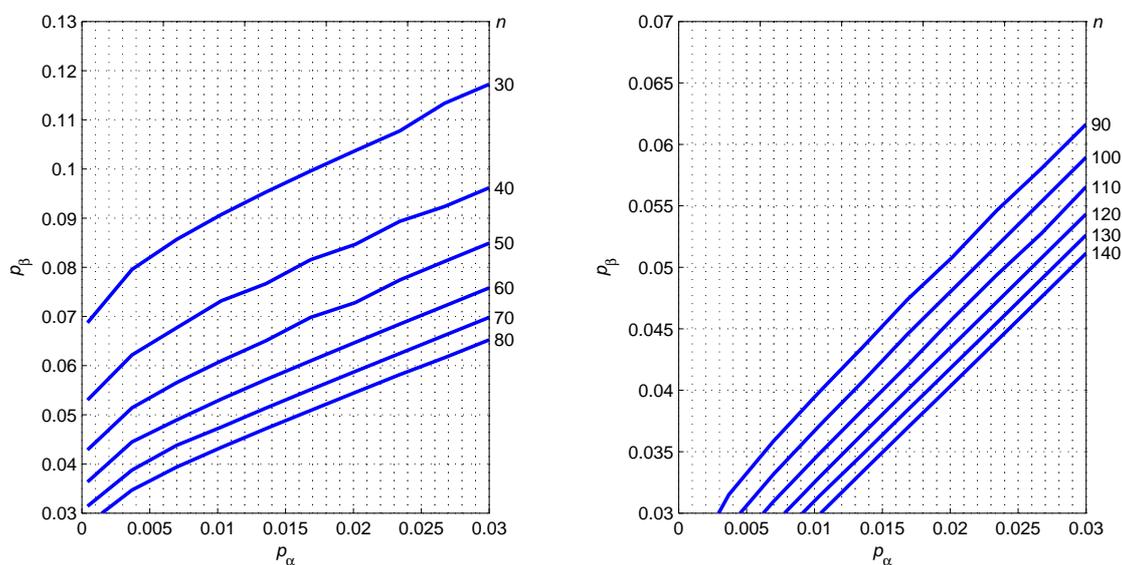
**Figura 2.4:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

sencilla. Como ya se ha podido comprobar, esta aproximación permite calcular el valor de  $n$  con una precisión aceptable. Los nomogramas de las Figuras 2.5, 2.6 y 2.7 ilustran la utilidad de este resultado para determinar el diseño aproximado con unas especificaciones particulares.

### Ejemplo

Supongamos que se desea obtener el tamaño muestral aproximado de los diseños exponenciales que se han de aplicar en la inspección de un proceso o un conjunto de lotes determinado. El productor especifica un riesgo máximo  $\alpha = 0.05$  para un nivel de calidad  $p_\alpha = 0.025$  mientras que el consumidor fija  $\beta = 0.10$  y un nivel  $p_\beta = 0.06$ .

Se puede observar que si  $T$  sigue la distribución uniparamétrica, entonces el valor



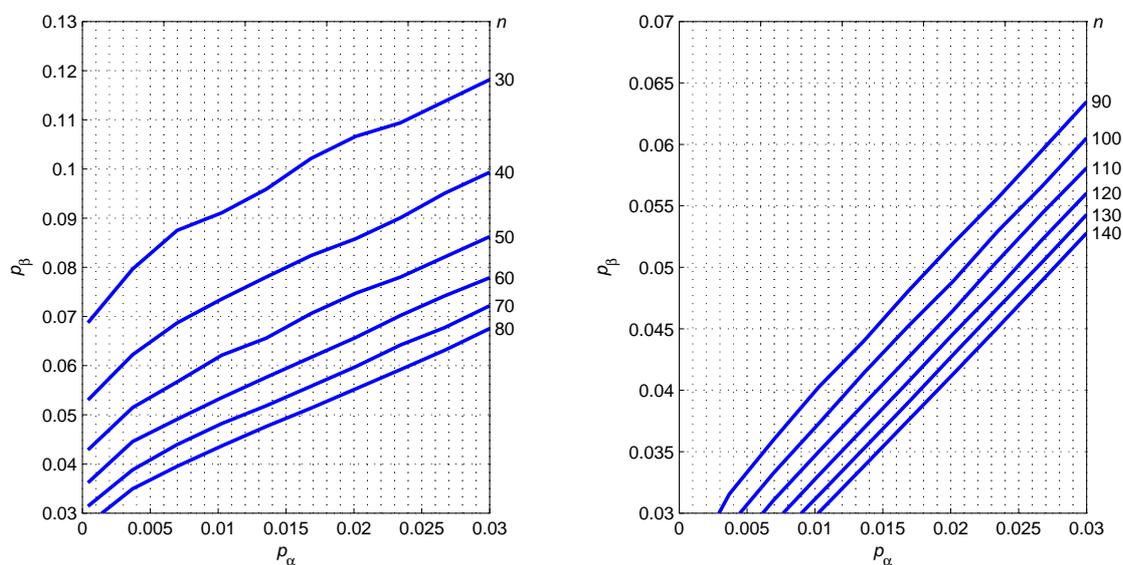
**Figura 2.5:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 0\%$

aproximado de  $m$  estaría en torno a 12 ó 13. De hecho, el diseño exacto con los requerimientos anteriores es  $(m, k) = (12, -0.04431)$ .

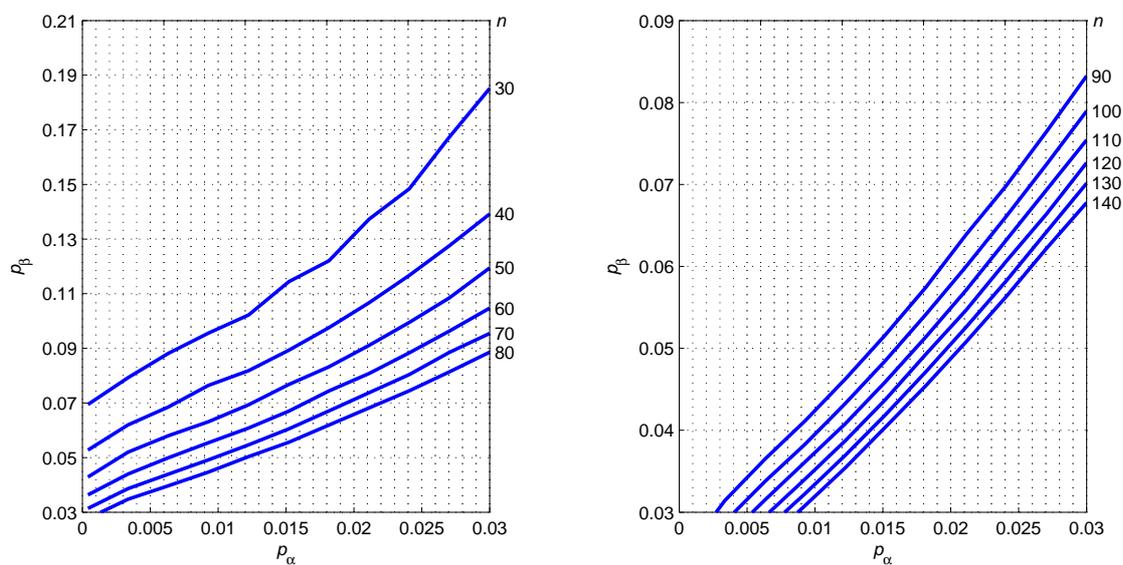
En el caso que  $T$  siga una distribución biparamétrica, se tiene que  $n$  es 80, aproximadamente, cuando  $q \equiv 0\%$  y  $50\%$  mientras que su valor se sitúa alrededor de 130 cuando  $q \equiv 90\%$ . En esta situación, los diseños exactos  $(n, m, k)$  son:

$$(66, 66, -0.02688), \quad (70, 34, -0.02892) \quad \text{y} \quad (126, 13, -0.03930),$$

cuando los niveles de censura son  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$ , respectivamente.



**Figura 2.6:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 50\%$



**Figura 2.7:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 90\%$

---

## Planes clásicos para las distribuciones log-normal y de Weibull

### 3.1. Introducción

En este capítulo se estudia el diseño de planes de muestreo utilizando riesgos clásicos cuando la variable tiempo de vida  $T$  sigue una distribución log-normal o de Weibull. Por tanto, al tratarse de distribuciones de log-localización y escala, los procedimientos que se describen a continuación consideran la variable  $X = \log(T)$  en la determinación del diseño. En consecuencia, los planes que se obtienen corresponden a las distribuciones normal y de valor extremo de  $X$ . Estas distribuciones se denotarán como  $N(\mu, \sigma)$  y  $EV(\mu, \sigma)$ , respectivamente, donde  $\mu$  y  $\sigma$  serán los parámetros de localización y escala de  $X$ . Cuando  $T$  sigue una distribución de log-localización y escala, se puede aplicar a la variable  $X$  la metodología descrita en la introducción del Capítulo 2.

Si  $\ell_L$  es un límite de especificación inferior de la variable  $T$ , entonces el estadístico

para decidir entre las hipótesis  $H_0 : p \leq p_\alpha$  y  $H_1 : p \geq p_\beta$  se define como

$$K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = (\hat{\mu} - \ell'_L) / \hat{\sigma}, \quad (3.1)$$

donde  $\ell'_L = \log(\ell_L)$  es el correspondiente límite de especificación inferior de  $X$ , y  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  representan los estimadores equivariantes de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , respectivamente. En este capítulo, se presentan diferentes diseños que utilizan tanto los estimadores de máxima verosimilitud (MLEs) como los mejores estimadores lineales insesgados (BLUEs). El Apéndice A recoge las expresiones generales que permiten calcular, de forma aproximada, dichos estimadores para las distribuciones normal y de valor extremo.

De nuevo, la curva OC  $L(p) \equiv L(p; n, m, k, \mathbf{R})$  tiene la expresión general (2.3) y los diseños han de verificar las inecuaciones (2.5). Sin embargo, al contrario que en el caso de la distribución exponencial, no se puede hallar la expresión exacta de  $L(p)$  cuando  $X$  sigue las distribuciones log-normal o de Weibull. Por esta razón, en la determinación del plan de muestreo se suele utilizar una aproximación de la función OC. De esta forma, una vez fijadas las especificaciones del productor y el consumidor, es posible obtener un diseño aproximadamente óptimo  $(n, m, k, \mathbf{R})$ .

A continuación, presentamos los diseños aproximados con tamaño muestral óptimo (en adelante, diseños óptimos) así como los procedimientos para su obtención. Además, realizaremos un estudio de los riesgos de dichos planes con el fin de comprobar que se cumplen los requisitos. En general, los diseños se denotarán de acuerdo a la expresión correspondiente de  $L(p)$ . Esta notación dependerá del método de aproximación utilizado en cada caso y del tipo de estimador de los parámetros de la distribución que se haya considerado.

### 3.2. Diseños óptimos aproximados

Si  $F_0(\cdot)$  denota la función de distribución estandarizada de  $X$ , entonces  $\ell'_L$  es el cuantil  $p$  de la distribución de  $X$ , i.e.  $\ell'_L = \xi_p$ , donde  $\xi_p = \mu + \sigma F_0^{-1}(p)$ . De acuerdo a (2.3), la expresión general de la curva característica del plan de muestreo viene dada por

$$\begin{aligned} L(p) \equiv L(p; n, m, k, \mathbf{R}) &= \Pr(\hat{\mu} - k\hat{\sigma} > \xi_p) \\ &= \Pr(Y_1 - kY_2 > F_0^{-1}(p)), \quad 0 < p < 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $Y_1$  e  $Y_2$  se han definido en (2.4).

Cuando  $n$  es suficientemente grande, la distribución de  $\sqrt{n}(Y_1, Y_2 - 1)$  es aproximadamente normal con media el vector  $(0, 0)$  y matriz de varianzas-covarianza  $(n/\sigma^2)Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ . Según el tipo de estimador de  $\mu$  y  $\sigma$  considerado, es posible determinar una buena aproximación de dicha matriz. En concreto, la matriz aproximada de varianzas-covarianza de los estimadores  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$  es:

$$Acov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} \gamma_{11}(n) & \gamma_{12}(n) \\ \gamma_{21}(n) & \gamma_{22}(n) \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} J_{11}(n) & J_{12}(n) \\ J_{21}(n) & J_{22}(n) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (3.3)$$

donde  $J_{ij}(n)$ , con  $i, j = 1, 2$ , es el elemento  $(i, j)$  de la matriz de información de Fisher esperada. La obtención de dicha matriz cuando los estimadores son los MLEs, i.e.  $Acov(\hat{\mu}_{MLE}, \hat{\sigma}_{MLE})$ , se muestra, de forma detallada, en el Apéndice A.

Si los estimadores son los BLUEs, la expresión exacta de  $Cov(\hat{\mu}_{BLUE}, \hat{\sigma}_{BLUE})$  puede hallarse pero su cálculo resulta muy complicado. En esta situación, si  $n$  es grande, los elementos  $\gamma_{ij}(n)$  de la matriz (3.3) también se deducen de forma aproximada en el Apéndice A.

La aproximación normal del estadístico  $V = \sqrt{n}\{Y_1 - k(Y_2 - 1)\}$  permite expresar la curva OC de la siguiente forma

$$L(p) \equiv L(p; n, m, k, \mathbf{R}) = \Pr(D_{n,k} > \delta_{n,k}) \simeq 1 - \Phi(\delta_{n,k}), \quad (3.4)$$

donde

$$D_{n,k} = \frac{\sqrt{n}\{Y_1 - k(Y_2 - 1)\}}{A_{n,k}(p)} \quad \text{y} \quad \delta_{n,k} = \frac{\sqrt{n}\{F_0^{-1}(p) + k\}}{A_{n,k}(p)},$$

con  $A_{n,k}(p) = \{\gamma_{11}(n) + k^2\gamma_{22}(n) - 2k\gamma_{12}(n)\}^{1/2}$ .

Si la censura es de tipo II, conviene mencionar que las expresiones de la matriz de varianzas-covarianza (3.3) y de la curva OC (3.4) se simplifican si los estimadores de  $\mu$  y  $\sigma$  son los MLEs. En esta ocasión, fijada la proporción de censura  $q$ , los elementos de la matriz de información de Fisher asintótica se calculan como  $J_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{ij}(n)$ , con  $i, j = 1, 2$ , tal y como se describe en el Apéndice A. De esta forma, la distribución de  $V = \sqrt{n}\{Y_1 - k(Y_2 - 1)\}$  es asintóticamente normal con media 0 y varianza  $\gamma_{11} + k^2\gamma_{22} - 2k\gamma_{12}$ , donde  $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} J_{ij} / (J_{11}J_{22} - J_{12}^2)$ . Por tanto, la expresión correspondiente de la curva OC es similar a (3.4) aunque  $A_{n,k}(p)$  no depende de  $n$ .

### 3.2.1. Distribución normal

Supongamos que  $T$  sigue una distribución log-normal o, de forma equivalente, que  $X = \log(T)$  se distribuye según una  $N(\mu, \sigma)$ , con  $-\infty < \mu < \infty$  y  $\sigma > 0$ . En este caso, la función de distribución acumulada se puede expresar como

$$F(x; \mu, \sigma) = F_0\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

donde  $F_0(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2) dx$  es la función de distribución normal estandarizada.

Una de las referencias más destacadas sobre el diseño de planes de muestreo en fiabilidad con la distribución log-normal se debe a Schneider (1989, [159]). Dicho trabajo presenta un plan con censura de tipo II y utiliza la aproximación normal (3.4) de la curva OC. También, existen algunos estudios con diseños que utilizan los BLUEs de  $\mu$  y  $\sigma$  en lugar de los MLEs. En concreto, Balasooriya y Balakrishnan (2000, [13]) obtienen un plan de muestreo con censura progresiva considerando una aproximación de los BLUEs (estos estimadores aproximados se denotarán como ABLUEs).

En la Sección 3.3 generalizamos los resultados de Schneider (1989, [159]) con los MLEs para obtener un diseño óptimo aproximado cuando la censura es progresiva. Además, se realiza una comparativa de este plan con los diseños planteados por Balasooriya y Balakrishnan (2000, [13]) con los ABLUEs. Dicha comparativa se muestra en la Sección 3.4 y, como resultado de la misma, proponemos un diseño óptimo alternativo con censura progresiva utilizando una mejor aproximación a los BLUEs. Concretamente, Pérez-González y Fernández (2009, [142]) presentan y analizan los diferentes diseños mediante un estudio por simulación de los riesgos del productor y del consumidor con objeto de evaluar su grado de ajuste a las especificaciones fijadas por éstos.

En las Secciones 3.3 y 3.4 también se determinan los planes y el correspondiente análisis de riesgos cuando la censura es de tipo II, en cuyo caso la metodología para obtener el diseño se simplifica.

### 3.2.2. Distribución de valor extremo

Cuando  $T$  sigue una distribución de Weibull, la variable  $X = \log(T)$  se distribuye según un modelo de valor extremo. En esta situación, se considera que  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  tiene una función de distribución acumulada

$$F(x; \mu, \sigma) = F_0\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad (-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0),$$

donde  $F_0(x) = 1 - \exp\{-\exp(x)\}$  es la función de distribución de valor extremo estandarizada.

Cuando la censura es de tipo II, el diseño aproximado propuesto por Schneider (1989, [159]) se aplica también a la distribución de valor extremo. Hay que recordar que este plan utiliza los MLEs de  $\mu$  y  $\sigma$ . Ng et al. (2004, [130]) generalizan dicho diseño al caso de la censura progresiva estudiando, además, diversos criterios de optimalidad en la obtención del plan de muestreo. Balasooriya et al. (2000, [16]) desarrollan un diseño alternativo al propuesto por Ng et al. a partir de una aproximación de los MLEs. La diferencia entre ambos resultados es que el plan de muestreo de Ng et al. (2004, [130]) considera, igual que el diseño presentado por Schneider (1989, [159]), una aproximación de la matriz de varianzas-covarianza de los MLEs mientras que el diseño de Balasooriya et al. (2000, [16]) se obtiene a partir de la expresión exacta de dicha matriz para los MLEs aproximados.

La Sección 3.3 muestra el plan aproximado con MLEs y censura progresiva propuesto por Ng et al. (2004, [130]). En la Sección 3.4 presentamos un diseño alternativo óptimo considerando la aproximación de los BLUEs sugerida en el caso normal. De nuevo, se realiza un estudio comparativo de los planes a partir de los riesgos simulados

---

**Procedimiento 3.1:** Determinación del esquema de censura progresiva para un valor de  $n$

---

- Se fijan las proporciones de censura en cada tiempo de fallo,  $q_i \in [0, 1)$ , con  $i = 1, \dots, m$ .
  - Para un tamaño muestral  $n$ , el correspondiente esquema de censura progresiva,  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ , se obtiene como  $R_i = \langle q_i \cdot n \rangle$ , de tal forma que  $m + \sum_{i=1}^m R_i = n$ .
- 

del productor y del consumidor. En las dos secciones también se obtienen los diseños correspondientes a ambos estimadores y sus riesgos simulados cuando la censura es de tipo II.

### 3.2.3. Determinación del diseño con censura progresiva

El esquema de censura progresiva  $(R_1, \dots, R_m)$  suele especificarse mediante las proporciones de censura (sobre el tamaño de la muestra) en cada tiempo observado de fallo, i.e.  $q_i \in [0, 1)$ , con  $i = 1, \dots, m$ , tales que  $0 \leq \sum_{i=1}^m q_i < 1$ . Resulta inmediato comprobar que el esquema  $(R_1, \dots, R_m)$  depende de  $n$  a través de  $m$ . Como  $n$  es desconocido, estas proporciones se pueden definir de forma sistemática, e.g.  $q_1 = 0.25$ ,  $q_2 = q_3 = \dots = q_{m-1} = 0$ ,  $q_m = 0.25$ . Para un valor fijo de  $n$ , el Procedimiento 3.1 describe la forma de obtener el correspondiente esquema de censura progresiva. En particular, denotaremos por  $\langle x \rangle$  al entero más próximo a  $x$ .

A partir del resto de especificaciones, y considerando las expresiones de las curvas OC asintóticas, el diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)$  se obtiene a partir de la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - L(p_\alpha; n_0, m_0, k_0, \mathbf{R}) &= \alpha, \\ L(p_\beta; n_0, m_0, k_0, \mathbf{R}) &= \beta, \end{aligned} \tag{3.5}$$

---

**Procedimiento 3.2:** Diseño óptimo aproximado  $(n, m, k, \mathbf{R})$  del plan de muestreo con censura progresiva

---

- Se fijan los riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , así como los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , del productor y el consumidor, respectivamente. También se especifican las proporciones de censura  $q_i$ , con  $i = 1, \dots, m$ .
- El tamaño muestral óptimo,  $n$ , se calcula iterativamente de la forma siguiente:
  1. Se define  $t = 0$  y se selecciona un valor inicial del tamaño muestral,  $n_{(0)}$ .
  2. Se determina el esquema de censura progresiva correspondiente a  $n_{(t)}$  mediante el Procedimiento 3.1. A su vez, se calculan los valores  $\gamma_{ij}(n_{(t)})$ , con  $i, j = 1, 2$ , a partir de las expresiones del Apéndice A correspondientes a la distribución y el tipo de estimador considerado.
  3. De acuerdo a (3.6), se calcula

$$n_{temp} = \left( \frac{z_\alpha - z_{1-\beta}}{z_{p_\alpha} - z_{p_\beta}} \right)^2 \{ \gamma_{11}(n_{(t)}) + k_0^2 \gamma_{22}(n_{(t)}) - 2k_0 \gamma_{12}(n_{(t)}) \}.$$

Si  $n_{(t+1)} = \langle n_{temp} \rangle \neq n_{(t)}$  entonces  $t = t + 1$  y se repite el paso 2. En otro caso, la búsqueda iterativa finaliza y el tamaño muestral sería  $n = n_{(t)}$ .

- La constante de aceptación es  $k = k_0$ , donde  $k_0$  se ha definido en (3.6).
- 

donde  $m_0$  es el número de fallos observados así como la dimensión del esquema de censura progresiva. Se puede demostrar a partir de (3.4) que

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{z_{p_\alpha} z_{1-\beta} - z_{p_\beta} z_\alpha}{z_\alpha - z_{1-\beta}}, \\ n_0 &= \left( \frac{z_\alpha - z_{1-\beta}}{z_{p_\alpha} - z_{p_\beta}} \right)^2 \{ \gamma_{11}(n_0) + k_0^2 \gamma_{22}(n_0) - 2k_0 \gamma_{12}(n_0) \}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde  $z_\eta = F_0^{-1}(\eta)$ . El diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)$  se determina de la forma descrita en el Procedimiento 3.2.

### 3.2.4. Determinación del diseño con censura de tipo II

El Procedimiento 3.3 describe el método iterativo para determinar el diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)$  cuando la censura es de tipo II. Dicho método resulta especialmente adecuado cuando las varianzas y la covarianza asintóticas de los estimadores de  $\mu$  y  $\sigma$  dependen de  $n$  y  $m$ . Sin embargo, es posible simplificar el procedimiento si los estimadores son los MLEs ya que, en esta situación, la matriz  $Acov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  se puede aproximar calculando la inversa de la matriz asintótica de Fisher cuyos elementos son  $J_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{ij}(n)$ .

En general, para distribuciones de localización y escala, podemos demostrar (véase el Apéndice A) que los elementos de la matriz de información de Fisher asintótica se expresarían como

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} dt + \frac{f_0(u_q)^2}{q}, \\
 J_{12} &= \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} t dt + f_0(u_q) + \frac{f_0(u_q)^2 u_q}{q} = J_{21}, \\
 J_{22} &= \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} t^2 dt + 2u_q f_0(u_q) + \frac{f_0(u_q)^2 u_q^2}{q} - (1 - q),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde  $u_q = F_0^{-1}(1 - q)$ . A partir de estas expresiones, se deduce un método directo para determinar un diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)_{\text{MLE}}$  con censura de tipo II y utilizando MLEs. En concreto, este método se describe en el Procedimiento 3.4.

**Procedimiento 3.3:** Diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)$  del plan de muestreo con censura de tipo II

- Se fijan los riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , y los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , del productor y el consumidor, respectivamente, así como la proporción total de censura,  $q \in [0, 1)$ .
- El tamaño muestral óptimo,  $n$  se determina de la forma siguiente:
  1. Para  $t = 0$ , se fija un valor inicial del tamaño muestral,  $n_{(0)}$ .
  2. Si  $q = 0$ ,  $m_{(t)} = n_{(t)}$ , y si  $q \neq 0$ ,  $m_{(t)} = \langle (1 - q)n_{(t)} \rangle$ . Entonces, se calculan los valores  $\gamma_{ij}(n_{(t)})$ , con  $i, j = 1, 2$ , a partir de las expresiones del Apéndice A de los estimadores y la distribución correspondientes.
  4. Se calcula

$$n_{temp} = \left( \frac{z_\alpha - z_{1-\beta}}{z_{p_\alpha} - z_{p_\beta}} \right)^2 \{ \gamma_{11}(n_{(t)}) + k_0^2 \gamma_{22}(n_{(t)}) - 2k_0 \gamma_{12}(n_{(t)}) \}.$$

Si  $n_{(t+1)} = \langle n_{temp} \rangle \neq n_{(t)}$  entonces  $t = t + 1$  y se repite el paso 2. En otro caso, la búsqueda iterativa finaliza y el tamaño muestral sería  $n = n_{(t)}$ .

- La constante de aceptación es  $k = k_0$ , donde  $k_0$  se ha definido en (3.6).

### 3.3. Diseños óptimos aproximados utilizando MLEs

En el Apéndice A se detallan las ecuaciones que permiten calcular los MLEs de  $\mu$  y  $\sigma$  para las distribuciones normal y de valor extremo de  $X$ . Asimismo, también se deducen las expresiones correspondientes de los elementos  $\gamma_{ij}(n)$ , con  $i, j = 1, 2$ , de la matriz (3.3). En este caso, la curva OC aproximada (3.4) se denotará como  $L^{\text{MLE}}(p; n, m, k, \mathbf{R})$ , cuando la censura es progresiva, o bien como  $L^{\text{MLE}}(p; n, m, k)$ , si la censura es de tipo II. En este capítulo se presentarán, en varias tablas, los diseños óptimos con ambos tipos de censura. Las especificaciones que se van a utilizar para

---

**Procedimiento 3.4:** Diseño óptimo aproximado  $(n, m, k)_{\text{MLE}}$  del plan de muestreo con censura de tipo II y MLEs

---

- Se fijan los riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , y los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , del productor y el consumidor, respectivamente, así como la proporción total de censura,  $q \in [0, 1)$ .
  - En esta situación, podemos obtener una aproximación asintótica de  $Acov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  mediante el cálculo de  $J_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{ij}(n)$  a partir de las expresiones (3.7). De esta forma, el valor de  $n_0$  en (3.6) se determina de forma inmediata.
  - El tamaño muestral óptimo es  $n = \lceil n_0 \rceil$ . Si  $q = 0$ , entonces  $m = n$ , y si  $q \neq 0$ :
    - se selecciona  $m = \lfloor (1 - q)n_0 \rfloor$  cuando  $(n, m)$  verifica las condiciones (2.5).
    - en otro caso, se escoge  $m = \lceil (1 - q)n_0 \rceil$ .
  - La constante de aceptación es  $k = k_0$ , donde  $k_0$  se ha definido en (3.6).
- 

los riesgos máximos son  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$  y los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  corresponden a la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]).

Los diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{MLE}}$  con censura progresiva se determinan mediante el Procedimiento 3.2. Las Tablas 3.1 y 3.2 presentan estos planes cuando  $X$  sigue las distribuciones citadas. Para mayor simplicidad, los esquemas de censura progresiva utilizados consideran que la censura se produce en la primera y última observación, es decir

$$q_1 > 0, q_m > 0, q_2 = \dots = q_{m-1} = 0, \quad q_1 + q_m < 1.$$

Por otro lado, en las Tablas 3.3 y 3.4 se recogen los planes óptimos aproximados  $(n, m, k)_{\text{MLE}}$  para las distribuciones mencionadas y los niveles de censura de tipo II 0 %, 50 %, 70 % y 90 %. En esta situación, cuando se utilizan los MLEs en los diseños,

el Procedimiento 3.4 permite obtener el plan de forma inmediata y sin que sea preciso emplear un método iterativo.

Para comprobar la desviación con respecto a los requisitos de los planes aproximados mostrados se simulan los riesgos  $CPR$  y  $CCR$  del productor y el consumidor, respectivamente. Aplicando el Procedimiento B.3 del Apéndice B para cada diseño, se generan  $N = 2000$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $X$  para cada tipo de censura y se calculan los riesgos simulados  $CPR_{sim}$  y  $CCR_{sim}$ .

### 3.3.1. Análisis y comparación de los diseños

#### Diseños con censura progresiva

Los planes  $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$  de las Tablas 3.1 y 3.2 presentan, para unos requisitos determinadas, un tamaño muestral  $n$  que es cada vez mayor a medida que aumenta la asimetría de los esquemas de censura. Esto se aprecia claramente cuando  $q_1$  es mucho mayor que  $q_m$ .

Podemos señalar que el valor de  $CPR_{sim}$  en los planes de muestreo normales con el esquema de censura  $q_1 \equiv 90\%$ ,  $q_m \equiv 0\%$  se aleja del riesgo máximo  $\alpha = 0.05$  fijado por el productor. Algo similar parece ocurrir con el riesgo del consumidor cuando  $q_1$  disminuye y  $q_m$  aumenta para los planes con niveles de calidad restrictivos (valores bajos de la proporción  $p$  de items defectuosos). Sin embargo, con la excepción mencionada del esquema  $q_1 \equiv 90\%$ ,  $q_m \equiv 0\%$ , los riesgos simulados se aproximan a los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para restricciones de calidad menos exigentes.

En relación a la distribución de valor extremo, el Procedimiento 3.2 sólo permite determinar los planes para niveles altos de calidad con el esquema de censura  $q_1 \equiv 90\%$ ,  $q_m \equiv 0\%$ . En este caso, existe un buen ajuste en los riesgos  $CPR_{sim}$  y  $CCR_{sim}$ .

**Tabla 3.1:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{MLE}}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
0.00041	0.01840	(54, 5) (0.062, 0.116)	(63, 7) (0.062, 0.123)	(44, 13) (0.057, 0.134)	(46, 14) (0.039, 0.135)	(74, 7) (0.032, 0.171)	2.639
0.00284	0.03110	(112, 11) (0.081, 0.102)	(99, 10) (0.054, 0.124)	(69, 20) (0.046, 0.129)	(66, 20) (0.041, 0.125)	(87, 9) (0.042, 0.152)	2.259
0.00654	0.04260	(162, 16) (0.071, 0.096)	(123, 13) (0.053, 0.107)	(84, 25) (0.059, 0.128)	(76, 23) (0.047, 0.119)	(89, 9) (0.043, 0.143)	2.054
0.01090	0.05350	(202, 20) (0.084, 0.108)	(139, 14) (0.059, 0.116)	(94, 28) (0.047, 0.130)	(82, 25) (0.050, 0.119)	(89, 9) (0.043, 0.139)	1.910
0.02090	0.07420	(265, 26) (0.079, 0.093)	(161, 16) (0.060, 0.091)	(107, 32) (0.052, 0.129)	(88, 26) (0.041, 0.132)	(89, 9) (0.056, 0.117)	1.704
0.03190	0.09420	(313, 31) (0.082, 0.096)	(175, 18) (0.051, 0.111)	(114, 34) (0.052, 0.100)	(90, 27) (0.053, 0.107)	(93, 9) (0.050, 0.120)	1.551
0.03760	0.10400	(331, 33) (0.074, 0.086)	(179, 18) (0.058, 0.110)	(116, 35) (0.054, 0.111)	(90, 27) (0.049, 0.123)	(98, 9) (0.064, 0.092)	1.487
0.04940	0.12300	(362, 36) (0.059, 0.114)	(191, 19) (0.060, 0.094)	(120, 36) (0.056, 0.111)	(90, 27) (0.047, 0.112)	(104, 10) (0.051, 0.090)	1.375
0.06150	0.14200	(382, 38) (0.079, 0.093)	(196, 20) (0.060, 0.104)	(120, 36) (0.059, 0.110)	(89, 26) (0.048, 0.111)	(114, 11) (0.067, 0.081)	1.278
0.07400	0.16100	(395, 39) (0.072, 0.089)	(201, 20) (0.059, 0.112)	(119, 35) (0.042, 0.099)	(87, 26) (0.046, 0.116)	(123, 13) (0.057, 0.078)	1.190
0.09950	0.19800	(415, 41) (0.068, 0.101)	(215, 22) (0.058, 0.095)	(118, 35) (0.065, 0.126)	(85, 25) (0.049, 0.095)	(178, 17) (0.063, 0.078)	1.040
0.11900	0.22500	(425, 42) (0.075, 0.086)	(223, 23) (0.057, 0.097)	(116, 35) (0.050, 0.090)	(85, 25) (0.061, 0.092)	(206, 20) (0.067, 0.076)	0.941

**Tabla 3.2:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
		$(n, m)$					
		$(CPR_{sim}, CCR_{sim})$					
0.00041	0.01840	(68, 7) (0.062, 0.071)	(53, 5) (0.059, 0.142)	(28, 8) (0.060, 0.166)	(25, 7) (0.053, 0.232)	(37, 4) (0.054, 0.305)	5.656
0.00284	0.03110	(137, 14) (0.056, 0.079)	(96, 10) (0.059, 0.112)	(47, 14) (0.058, 0.144)	(40, 12) (0.060, 0.188)	(62, 5) (0.069, 0.195)	4.509
0.00654	0.04260	(198, 20) (0.047, 0.098)	(130, 13) (0.065, 0.094)	(62, 19) (0.056, 0.137)	(51, 15) (0.067, 0.156)	(74, 7) (0.063, 0.159)	3.963
0.01090	0.05350	(250, 25) (0.046, 0.078)	(155, 16) (0.061, 0.105)	(74, 22) (0.052, 0.119)	(58, 17) (0.055, 0.132)	(83, 9) (0.061, 0.117)	3.607
0.02090	0.07420	(323, 32) (0.052, 0.079)	(204, 20) (0.058, 0.081)	(91, 27) (0.066, 0.125)	(70, 21) (0.056, 0.145)	(105, 10) (0.058, 0.072)	3.130
0.03190	0.09420	- -	(235, 24) (0.044, 0.080)	(102, 31) (0.051, 0.113)	(78, 23) (0.060, 0.141)	(120, 12) (0.045, 0.070)	2.802
0.03760	0.10400	- -	(249, 25) (0.046, 0.080)	(108, 32) (0.059, 0.120)	(81, 24) (0.055, 0.133)	(125, 13) (0.037, 0.086)	2.670
0.04940	0.12300	- -	(273, 27) (0.042, 0.073)	(116, 35) (0.054, 0.114)	(86, 26) (0.054, 0.115)	(141, 14) (0.044, 0.052)	2.448
0.06150	0.14200	- -	(287, 29) (0.044, 0.078)	(122, 37) (0.059, 0.105)	(90, 27) (0.050, 0.115)	(147, 15) (0.045, 0.052)	2.262
0.07400	0.16100	- -	(299, 30) (0.044, 0.065)	(125, 37) (0.058, 0.104)	(91, 27) (0.046, 0.102)	(158, 16) (0.041, 0.057)	2.101
0.09950	0.19800	- -	(322, 32) (0.040, 0.057)	(130, 39) (0.052, 0.093)	(94, 28) (0.046, 0.107)	(176, 18) (0.070, 0.061)	1.837
0.11900	0.22500	- -	(327, 33) (0.041, 0.057)	(132, 40) (0.053, 0.094)	(96, 29) (0.051, 0.081)	(190, 20) (0.087, 0.079)	1.673

Como sucede en los diseños con la distribución normal, a medida que disminuye  $q_1$  y aumenta  $q_m$  se observa una falta de ajuste del riesgo del consumidor. La diferencia entre el riesgo simulado  $CCR_{sim}$  y  $\beta = 0.10$  es muy grande para valores más exigentes de  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  (proporciones bajas de disconformes). Asimismo, en los planes con el esquema  $q_1 \equiv 15\%$ ,  $q_m \equiv 75\%$  se observan las mayores desviaciones del riesgo del consumidor respecto de  $\beta$ . En concreto, para los niveles de calidad más bajos, el riesgo  $CCR_{sim}$  llega a ser notablemente inferior a  $\beta$ . Incluso, en algunos diseños, el riesgo  $CPR_{sim}$  también se desvía significativamente de  $\alpha = 0.05$ .

En general, en los diseños de las tablas se aprecia que el tamaño muestral  $n$  aumenta cuando los niveles de calidad son menos restrictivos (valores altos de  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ ). Conviene recordar que, para los planes exponenciales que se muestran en el Capítulo 2, sucede el efecto contrario. Por tanto, se puede concluir que el diseño es sensible, no sólo al esquema de censura considerado, sino a una posible desviación en la hipótesis de la distribución de  $T$ .

### Diseños con censura de tipo II

Las Tablas 3.3 y 3.4 muestran los riesgos simulados de los diseños  $(n, m, k)_{MLE}$  con censura de tipo II. Se aprecia que  $CPR_{sim}$  y  $CCR_{sim}$  están bastante más próximos a las condiciones fijadas por el productor y el consumidor. Sin embargo, en estos planes se observa también que las diferencias con respecto a los requisitos  $\alpha$  y  $\beta$  aumentan para niveles exigentes de calidad y porcentajes altos de censura. Aún así, en general, el ajuste de los riesgos cuando la censura es de tipo II es mejor que en el caso de la censura progresiva.

**Tabla 3.3:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)_{MLE}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes niveles de censura de tipo II cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)			$k$	
		0 %	50 %	70 %		90 %
				$(n, m)$		
				$(CPR_{sim}, CCR_{sim})$		
0.00041	0.01840	(25, 25) (0.053, 0.096)	(38, 19) (0.056, 0.100)	(49, 15) (0.040, 0.126)	(76, 8) (0.034, 0.149)	2.639
0.00284	0.03110	(38, 38) (0.050, 0.097)	(55, 28) (0.053, 0.093)	(66, 20) (0.043, 0.109)	(86, 9) (0.034, 0.119)	2.259
0.00654	0.04260	(47, 47) (0.043, 0.116)	(63, 32) (0.056, 0.103)	(74, 22) (0.047, 0.124)	(87, 9) (0.037, 0.125)	2.054
0.01090	0.05350	(53, 53) (0.048, 0.114)	(69, 35) (0.052, 0.092)	(78, 24) (0.051, 0.105)	(86, 9) (0.045, 0.113)	1.910
0.02090	0.07420	(61, 61) (0.046, 0.111)	(75, 38) (0.048, 0.095)	(81, 25) (0.055, 0.105)	(84, 9) (0.045, 0.108)	1.704
0.03190	0.09420	(66, 66) (0.051, 0.094)	(78, 39) (0.059, 0.100)	(82, 25) (0.049, 0.104)	(87, 9) (0.047, 0.088)	1.551
0.03760	0.10400	(67, 67) (0.053, 0.102)	(78, 39) (0.052, 0.097)	(81, 24) (0.048, 0.095)	(90, 9) (0.063, 0.078)	1.487
0.04940	0.12300	(70, 70) (0.055, 0.117)	(79, 40) (0.056, 0.094)	(80, 24) (0.044, 0.104)	(99, 10) (0.066, 0.080)	1.375
0.06150	0.14200	(71, 71) (0.055, 0.105)	(78, 39) (0.057, 0.099)	(78, 23) (0.054, 0.102)	(113, 12) (0.059, 0.073)	1.278
0.07400	0.16100	(71, 71) (0.040, 0.094)	(76, 38) (0.053, 0.101)	(76, 23) (0.049, 0.106)	(130, 13) (0.065, 0.069)	1.190
0.09950	0.19800	(70, 70) (0.041, 0.109)	(73, 37) (0.050, 0.098)	(74, 23) (0.054, 0.095)	(173, 18) (0.065, 0.067)	1.040
0.11900	0.22500	(69, 69) (0.045, 0.093)	(71, 36) (0.056, 0.096)	(74, 23) (0.060, 0.094)	(212, 22) (0.066, 0.072)	0.941

**Tabla 3.4:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)_{MLE}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes niveles de censura de tipo II cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)			$k$
		0 %	50 %	70 %	
			$(n, m)$		
			$(CPR_{sim}, CCR_{sim})$		
0.00041	0.01840	(14, 14) (0.040, 0.126)	(28, 14) (0.039, 0.129)	(39, 12) (0.039, 0.121)	(71, 8) (0.036, 0.124)
0.00284	0.03110	(24, 24) (0.040, 0.124)	(43, 22) (0.036, 0.116)	(57, 18) (0.042, 0.126)	(87, 9) (0.034, 0.122)
0.00654	0.04260	(31, 31) (0.038, 0.119)	(53, 27) (0.040, 0.115)	(67, 21) (0.042, 0.113)	(91, 9) (0.046, 0.125)
0.01090	0.05350	(36, 36) (0.046, 0.130)	(60, 30) (0.048, 0.121)	(74, 22) (0.044, 0.119)	(90, 9) (0.037, 0.138)
0.02090	0.07420	(45, 45) (0.048, 0.106)	(69, 35) (0.044, 0.111)	(80, 25) (0.042, 0.113)	(88, 9) (0.041, 0.099)
0.03190	0.09420	(51, 51) (0.049, 0.112)	(74, 37) (0.041, 0.106)	(83, 25) (0.045, 0.116)	(87, 9) (0.053, 0.088)
0.03760	0.10400	(53, 53) (0.047, 0.107)	(76, 38) (0.045, 0.112)	(83, 25) (0.046, 0.115)	(89, 9) (0.059, 0.088)
0.04940	0.12300	(57, 57) (0.046, 0.102)	(78, 39) (0.038, 0.115)	(83, 25) (0.045, 0.111)	(97, 10) (0.066, 0.078)
0.06150	0.14200	(60, 60) (0.050, 0.104)	(78, 39) (0.049, 0.123)	(81, 24) (0.044, 0.108)	(111, 12) (0.051, 0.071)
0.07400	0.16100	(62, 62) (0.049, 0.106)	(78, 39) (0.054, 0.100)	(79, 24) (0.050, 0.114)	(129, 13) (0.065, 0.068)
0.09950	0.19800	(64, 64) (0.042, 0.111)	(76, 38) (0.040, 0.106)	(76, 23) (0.055, 0.103)	(184, 19) (0.069, 0.083)
0.11900	0.22500	(65, 65) (0.052, 0.103)	(74, 37) (0.057, 0.101)	(75, 23) (0.052, 0.097)	(238, 24) (0.067, 0.081)

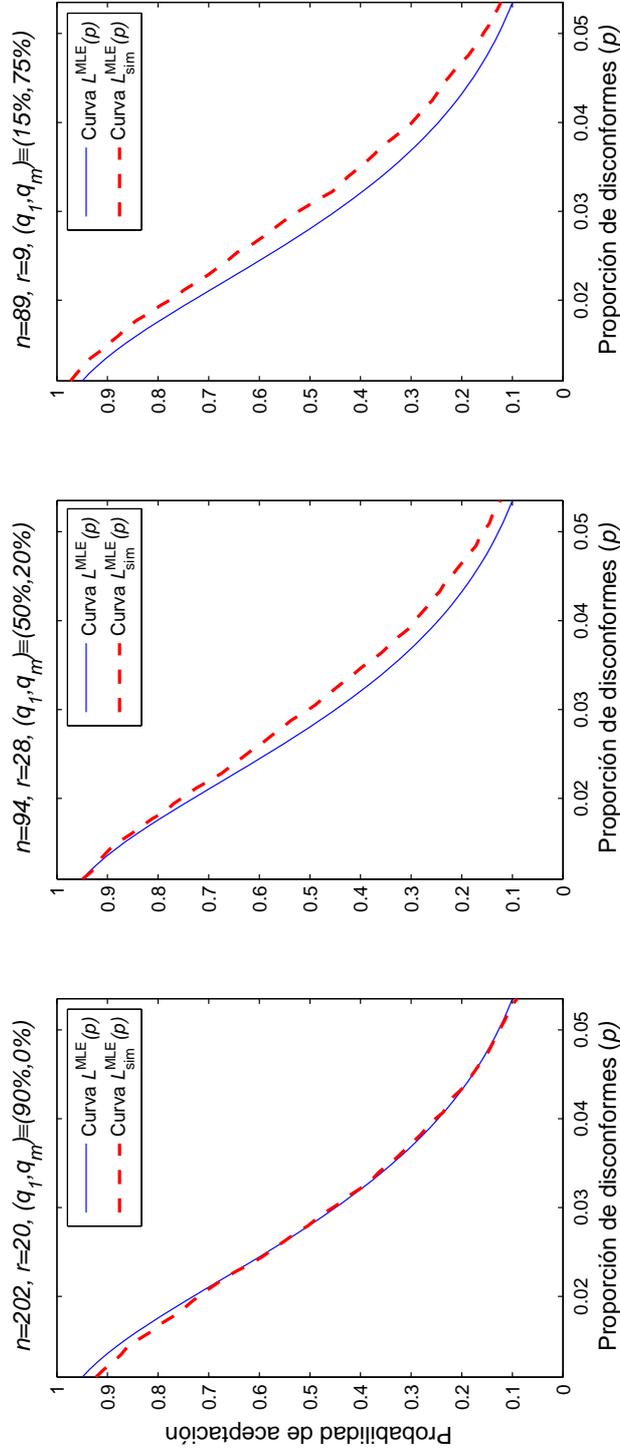
Algunos aspectos comentados en las tablas anteriores se pueden contrastar más claramente en las Figuras 3.1 hasta 3.4. En dichas figuras se representan, en primer lugar, la curva  $L^{\text{MLE}}(p; n, m, k, \mathbf{R})$ , cuando la censura es progresiva, y  $L^{\text{MLE}}(p; n, m, k)$ , si la censura es de tipo II. Estas curvas OC se obtienen a partir de la expresión general (3.4). Por otro lado, aplicando el Procedimiento B.3 del Apéndice B, es posible calcular la probabilidad simulada de aceptación de un plan de muestreo para cualquier valor de  $p$ . Esta función OC simulada se denotará como  $L_{sim}^{\text{MLE}}(p; n, m, k, \mathbf{R})$  y  $L_{sim}^{\text{MLE}}(p; n, m, k)$ , de acuerdo al tipo de censura considerado.

### Curvas OC con censura progresiva

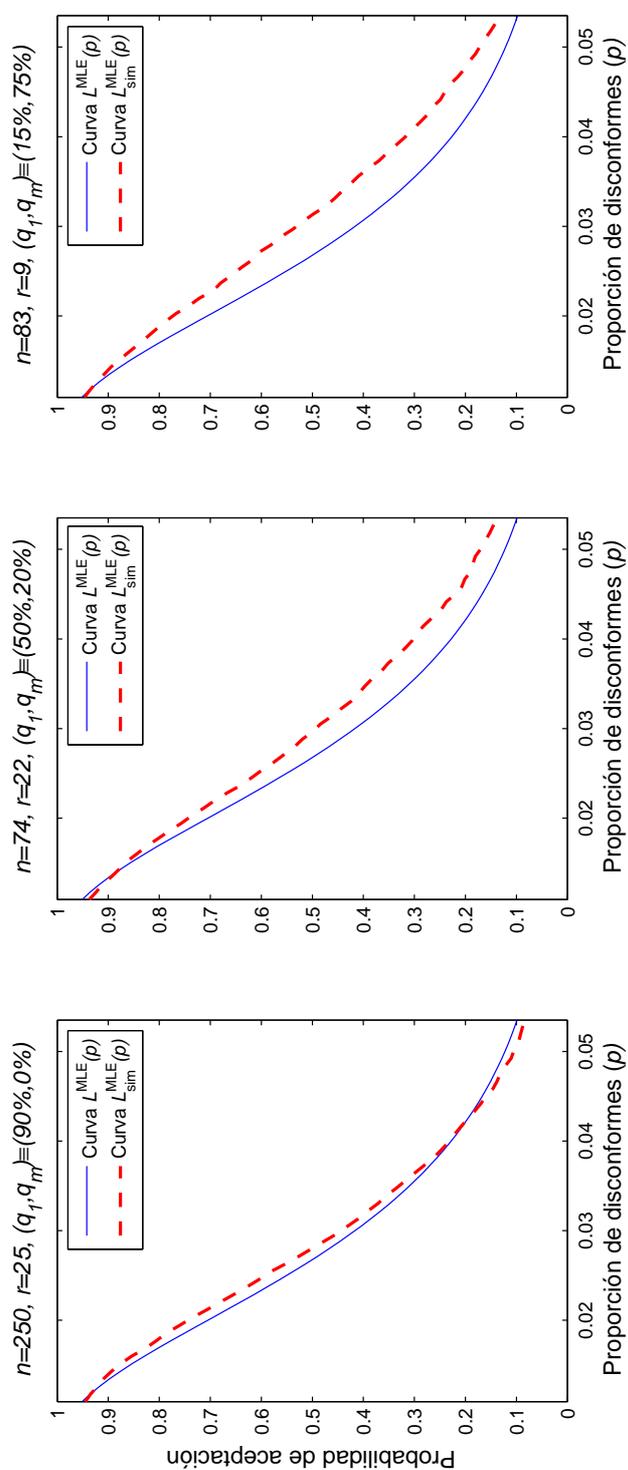
Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran, para los dos tipos de distribuciones, las curvas OC (aproximada y simulada) de algunos de los diseños que se recogen en las Tablas 3.1 y 3.2, respectivamente. Las gráficas ilustran las diferencias existentes en los riesgos del plan de muestreo. Esto permite comprobar que, salvo para los esquemas de censura con  $q_1$  grande, los diseños representados presentan un carácter conservador con respecto al riesgo del consumidor.

### Curvas OC con censura de tipo II

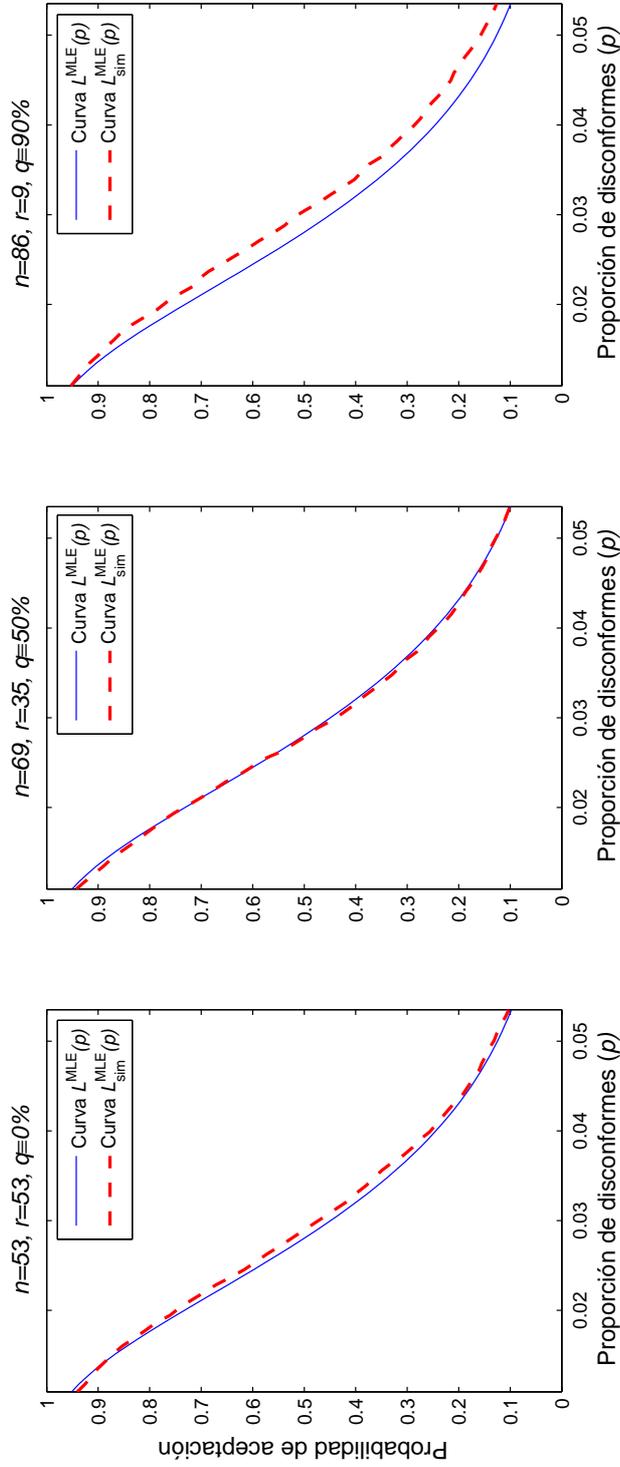
Si la censura es de tipo II, las Figuras 3.3 y 3.4 ilustran las curvas OC aproximadas y simuladas de algunos diseños de las Tablas 3.3 y 3.4 correspondientes a las distribuciones estudiadas. El ajuste parece ser, quizás, algo mejor en el caso de los planes normales al compararlos con los diseños para la distribución de valor extremo.



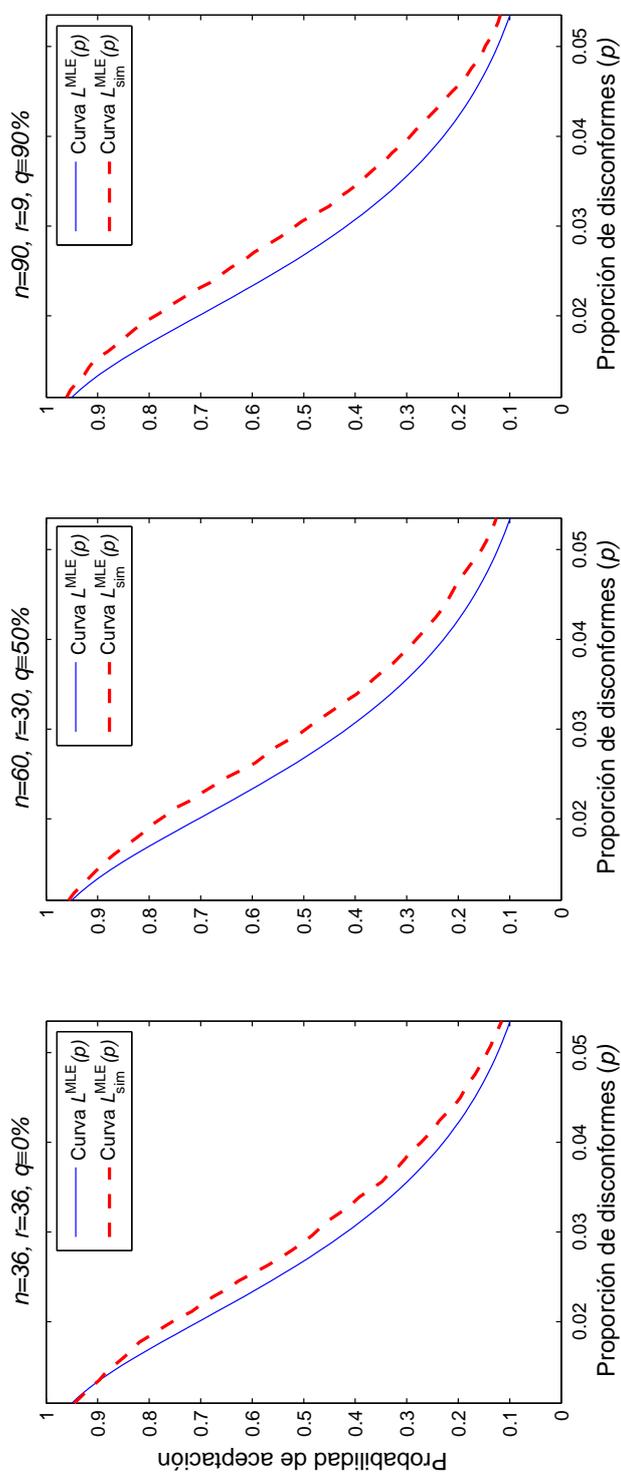
**Figura 3.1:** Curvas características  $L^{MLE}(p)$  y  $L_{sim}^{MLE}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b)  $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c)  $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$



**Figura 3.2:** Curvas características  $L^{\text{MLE}}(p)$  y  $L^{\text{MLE}}_{\text{sim}}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b)  $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c)  $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$



**Figura 3.3:** Curvas características  $L^{MLE}(p)$  y  $L_{sim}^{MLE}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $q \equiv 0\%$ ; (b)  $q \equiv 50\%$ ; (c)  $q \equiv 90\%$



**Figura 3.4:** Curvas características  $L^{MLE}(p)$  y  $L_{sim}^{MLE}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $q \equiv 0\%$ ; (b)  $q \equiv 50\%$ ; (c)  $q \equiv 90\%$

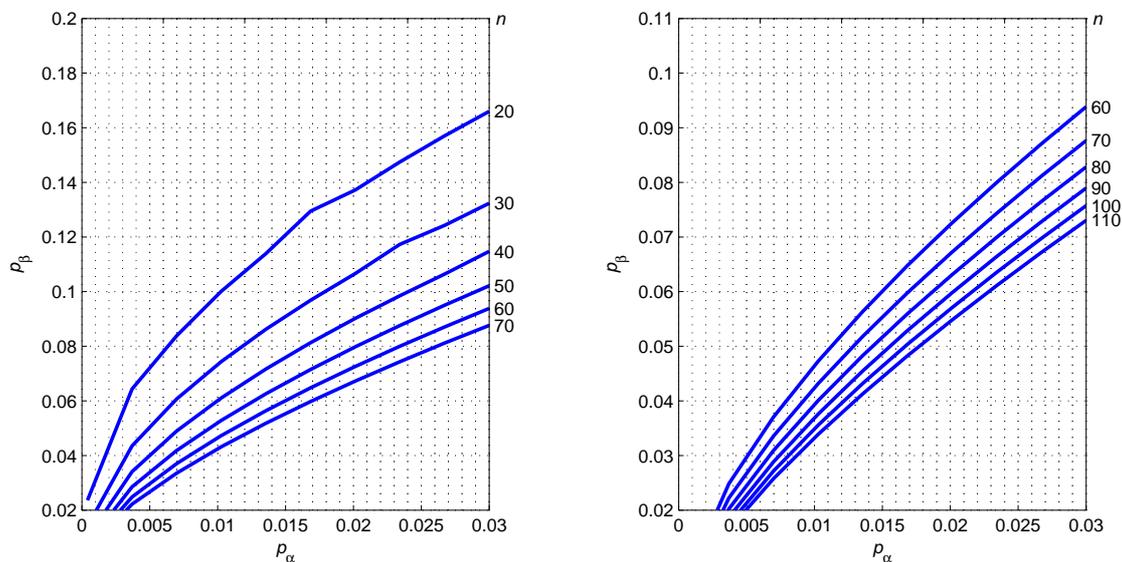
A través de estos gráficos ilustrativos, es posible observar el grado de similitud existente entre cada curva aproximada y su correspondiente curva simulada, lo que permite evaluar la precisión de las diferentes planes aproximados. Es preciso señalar que ambas curvas se ajustan de forma más precisa en los niveles de  $p$  fijados por el productor ( $p_\alpha$ ) y el consumidor ( $p_\beta$ ). Sin embargo, las características operativas del diseño óptimo aproximado son bastante sensibles ante variaciones en los requisitos.

En definitiva, en la mayoría de los casos, las diferencias observadas en los riesgos parecen ser suficientemente aceptables para alcanzar, dentro de los niveles de calidad prefijados, una decisión correcta sobre la aceptación o el rechazo del lote aplicando el plan de muestreo aproximado.

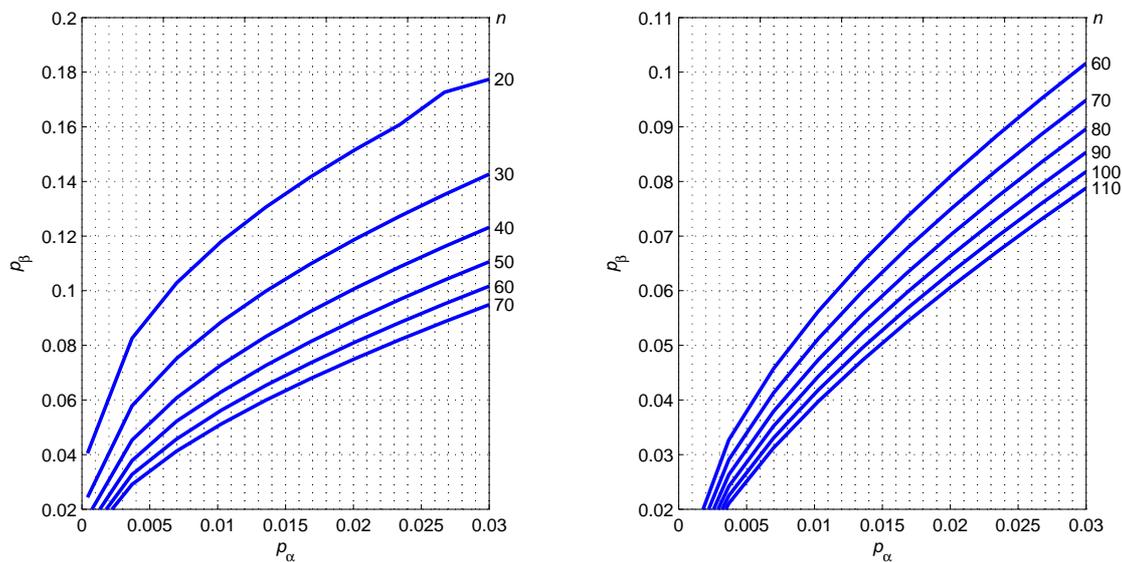
### 3.3.2. Nomogramas del tamaño muestral de los diseños con censura de tipo II

La expresión de  $n_0$  en (3.6) permite obtener el tamaño muestral de los planes aproximados aplicando los procedimientos descritos anteriormente. En general, este cálculo se suele realizar de forma iterativa pero, como se explica en el Procedimiento 3.4, resulta inmediato cuando se utilizan los MLEs y la censura de tipo II. De esta forma, se puede representar un gráfico que facilite la determinación del tamaño muestral óptimo de estos diseños a partir de unas especificaciones particulares. En dichos gráficos aproximados se fijan los riesgos máximos,  $\alpha$  y  $\beta$ , así como el nivel de censura,  $q$ , y se representan los valores correspondientes de  $n$  para los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ .

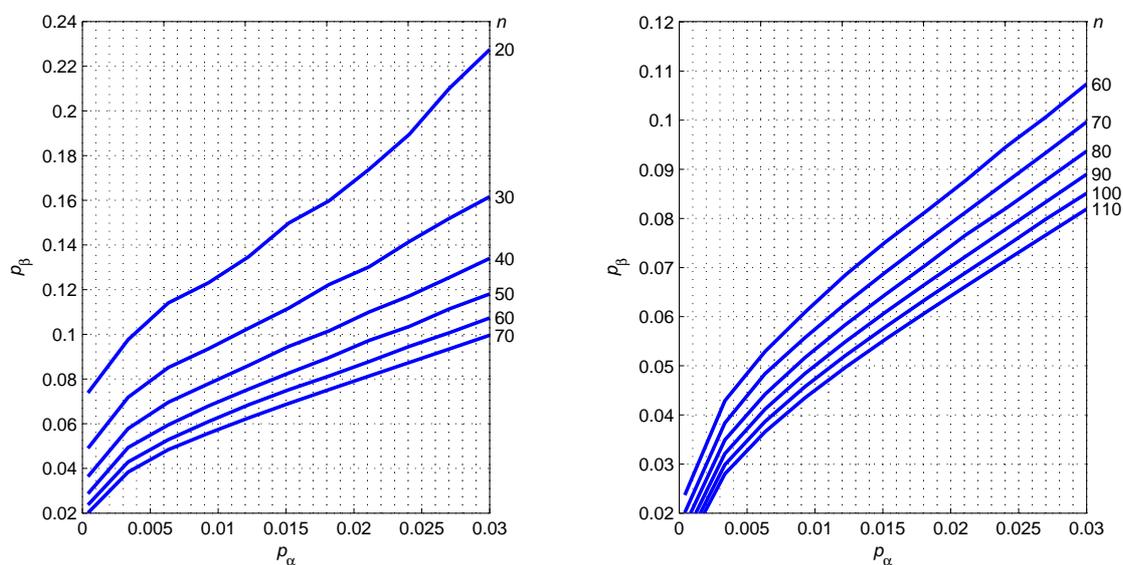
Las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7 ilustran los nomogramas para la distribución normal cuando  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$ , respectivamente. Los gráficos correspondientes a la distribución de valor extremo se muestran en las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10.



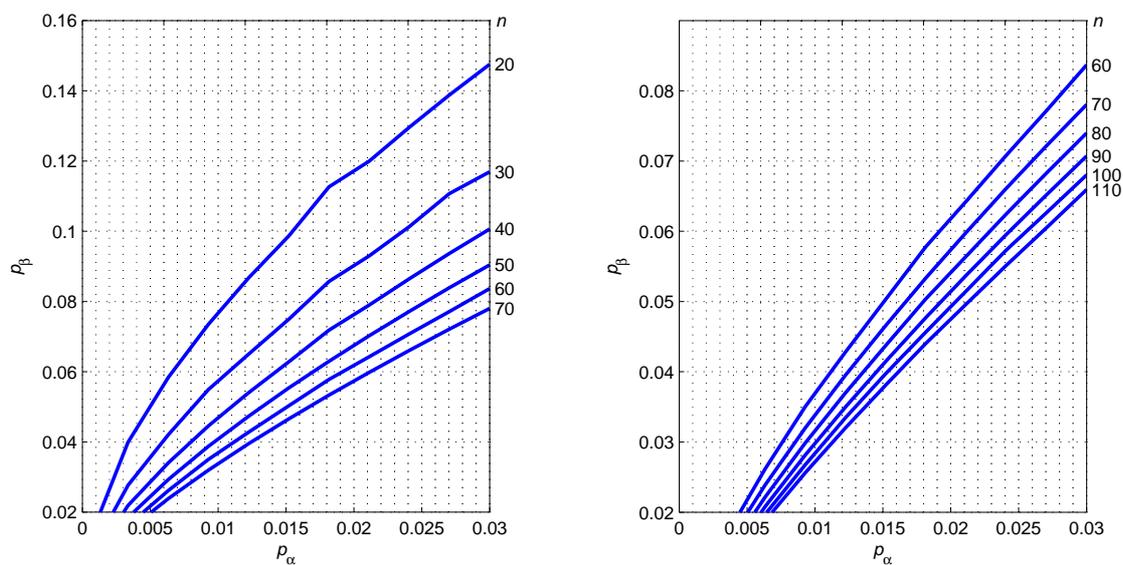
**Figura 3.5:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 0\%$



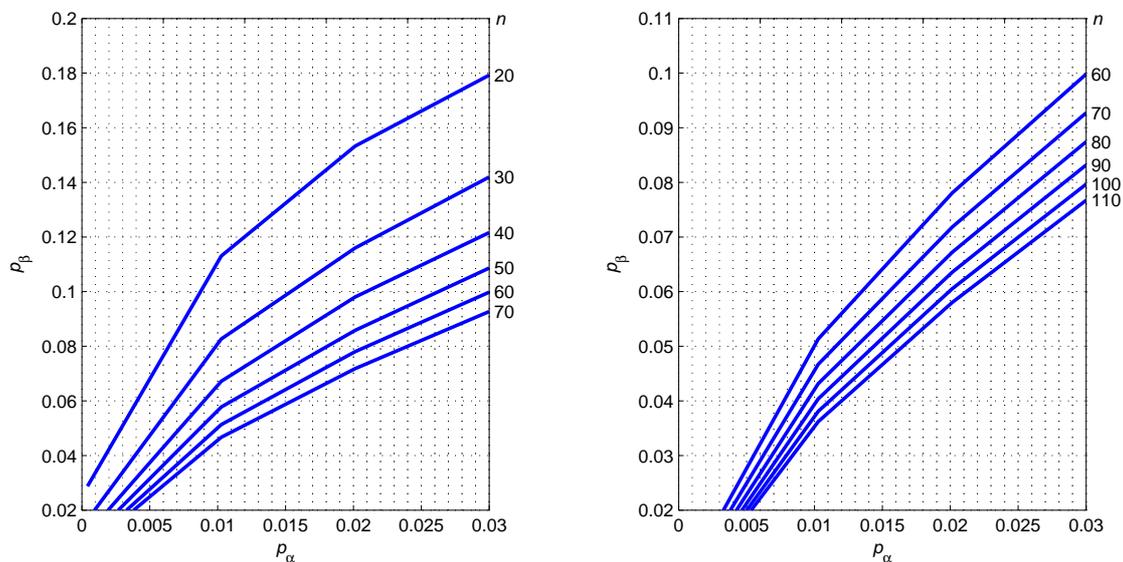
**Figura 3.6:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 50\%$



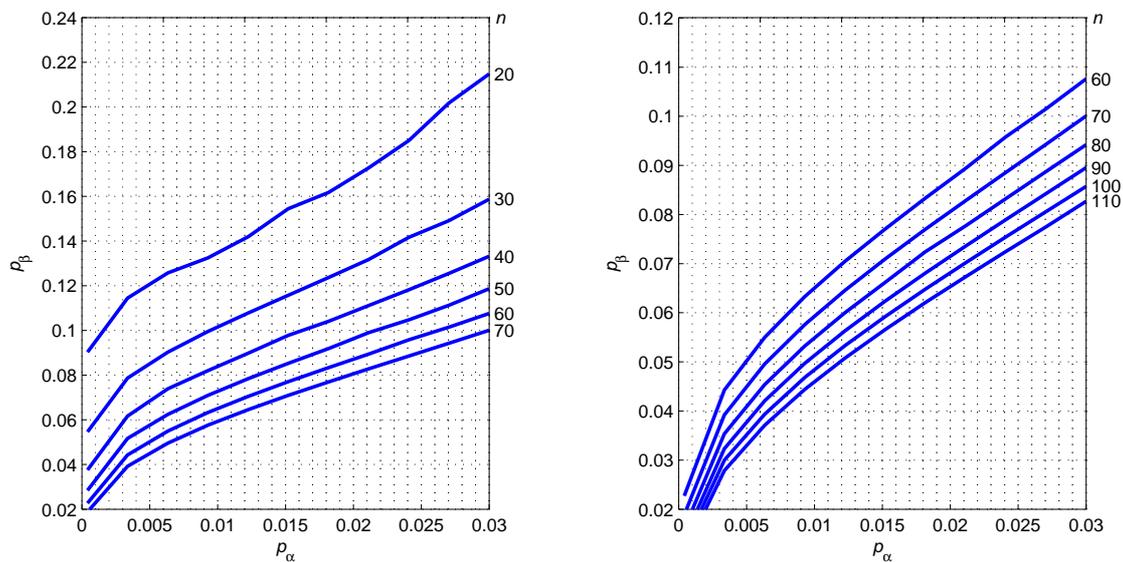
**Figura 3.7:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 90\%$



**Figura 3.8:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 0\%$



**Figura 3.9:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 50\%$



**Figura 3.10:** Nomogramas de los planes aproximados cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y  $q \equiv 90\%$

Los nomogramas presentados permiten estudiar la variación del tamaño muestral de los diseños cuando se producen pequeñas modificaciones en las restricciones de los niveles de calidad, sobre todo para valores bajos de  $p$ . En concreto, si el productor o el consumidor fijan, de forma precisa, un nivel de la proporción de disconformes ( $p_\alpha$  o  $p_\beta$ ), el gráfico proporciona un rango de valores de  $n$  para distintos requisitos del otro nivel.

### Ejemplo

Supongamos que se necesita conocer el tamaño muestral de los diseños en la inspección de un conjunto de lotes. Las condiciones del productor son  $\alpha = 0.05$  y  $p_\alpha = 0.015$ , mientras que el consumidor fija  $\beta = 0.10$  y  $p_\beta = 0.080$ .

Cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $n$  es aproximadamente 40 cuando  $q \equiv 0\%$ , y se sitúa en torno a 50 si  $q \equiv 50\%$  o  $90\%$ . Los diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  con las condiciones anteriores serían

$$(37, 37, 1.7401), \quad (47, 24, 1.7401) \quad \text{y} \quad (53, 5, 1.7401),$$

cuando los niveles de censura son  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$ , respectivamente.

Por otro lado, si  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $n$  está alrededor de 30, 40 y 55 cuando  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$ , respectivamente. En esta situación, los correspondientes planes óptimos aproximados a partir de las especificaciones son los siguientes

$$(27, 27, 3.2322), \quad (43, 22, 3.2322) \quad \text{y} \quad (56, 6, 3.2322).$$

### 3.4. Otros diseños óptimos aproximados: planes con censura progresiva y ABLUEs

Balasooriya y Balakrishnan (2000, [13]) utilizan una aproximación de los BLUEs (ABLUEs) de  $\mu$  y  $\sigma$  para determinar un diseño óptimo con censura progresiva cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . En esta sección se muestra dicho plan y se señalan algunas dificultades que presenta. Por esta razón, proponemos una aproximación más precisa de los estimadores que permite obtener un plan alternativo con mejores características. Además, los ABLUEs también se pueden utilizar para deducir un diseño óptimo cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ .

Como se explica en el Apéndice A, la obtención de los BLUEs requiere el cálculo de los momentos de estadísticos de orden de una muestra de observaciones con censura progresiva,  $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ . Esta notación simplificada no incluye el esquema de censura considerado, aunque conviene mencionar que la muestra depende de dicho esquema. Balakrishnan et al. (2000, [8]) desarrollan las expresiones para determinar dichos momentos, las cuales se detallan en el Apéndice A. Estas expresiones requieren una alta precisión computacional cuando el número de observaciones  $m$  es grande ya que son bastante inestables frente a los errores de redondeo. Por esta razón, no se calculan de forma exacta los BLUEs sino que, mediante aproximaciones a los momentos de los estadísticos de orden, se obtienen los ABLUEs que permiten deducir el correspondiente diseño aproximado.

A partir de los estadísticos de orden estandarizados  $Y_{i:m:n} = (X_{i:m:n} - \mu)/\sigma$ , con  $i = 1, \dots, m$ , el Apéndice A muestra el cálculo de forma aproximada de

$$E[Y_{i:m:n}], \quad i = 1, \dots, m \quad \text{y} \quad E[Y_{i:m:n}Y_{j:m:n}], \quad i, j = 1, \dots, m,$$

mediante el desarrollo por polinomios de Taylor de orden  $s$  de  $Y_{i:m:n}$ , tal y como se muestra en (A.11). Los ABLUEs obtenidos a partir de estas aproximaciones se denotarán como  $ABLUE(s)$ . En particular, el diseño que presentan Balasooriya y Balakrishnan (2000, [13]) utiliza desarrollos de Taylor de orden 2 en el cálculo de los momentos y, por tanto, los estimadores son  $ABLUE(2)$ . Estas aproximaciones se exponen en las expresiones (A.17) en el Apéndice A.

Cuando la censura es progresiva, la expresión general (3.4) de la curva OC aproximada se puede representar de la siguiente forma

$$L^{ABLUE(s)}(p; n, m, k, \mathbf{R}) = 1 - \Phi \left( \frac{\sqrt{n}(z_p + k)}{\{\gamma_{11}^*(n) + k^2\gamma_{22}^*(n) - 2k\gamma_{12}^*(n)\}^{1/2}} \right), \quad (3.8)$$

donde  $\gamma_{ij}^*(n)$ , con  $i, j = 1, 2$ , es el correspondiente elemento  $(i, j)$  de la matriz aproximada de varianzas-covarianza de los  $ABLUE(s)$  cuando  $n$  es suficientemente grande. El cálculo de dichos elementos  $\gamma_{ij}^*(n)$ , para  $s \geq 1$ , se muestra en el Apéndice A.

Una vez fijados las condiciones del productor y el consumidor, el diseño óptimo aproximado con  $ABLUE(s)$  y censura progresiva,  $(n, m, k, \mathbf{R})_{ABLUE(s)}$ , se obtiene mediante el Procedimiento 3.2. En esta situación, los elementos  $\gamma_{ij}(n)$  se sustituyen por los  $\gamma_{ij}^*(n)$ .

En las Secciones 3.4.1 y 3.4.2 se determinan diferentes planes siguiendo este procedimiento. En concreto, las condiciones para los riesgos máximos son  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ , y los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  corresponden a la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]). Se utilizan esquemas de censura progresiva con niveles  $q_1$  y  $q_m$  no nulos. Los diseños se recogen en varias tablas y, para cada uno de ellos, se calculan sus riesgos simulados ( $N = 2000$ ). El análisis de los riesgos permitirá comparar los planes con  $ABLUE(2)$  de la Sección 3.4.1 y los que utilizan  $ABLUE(3)$  que proponemos en

la Sección 3.4.2.

### 3.4.1. Diseños óptimos aproximados utilizando ABLUE(2)

Las Tablas 3.5 y 3.6 muestran los diseños  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$  correspondientes a las distribuciones normal y de valor extremo de  $X$ , respectivamente. En primer lugar, se observa que los planes de la Tabla 3.5 presentan un tamaño muestral menor que los diseños  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{MLE}}$  que aparecen en la Tabla 3.1. Sin embargo, los riesgos  $CPR_{sim}$  y  $CCR_{sim}$  de los planes con estimadores ABLUE(2) resultan muy ilustrativos puesto que, en general, no verifican las condiciones previas del productor y el consumidor. En concreto, hay una diferencia notable en el riesgo del productor ya que toma un valor bastante alto en comparación con  $\alpha = 0.05$ . Con respecto al riesgo del consumidor, se produce una falta de ajuste aunque los valores simulados, que también superan el valor  $\beta = 0.10$ , no se diferencian tanto como en el caso del productor.

Cuando la distribución es de valor extremo, los riesgos simulados de los diseños de la Tabla 3.6 tampoco se ajustan a las especificaciones iniciales. Las diferencias son muy acentuadas tanto en el riesgo del productor como en el del consumidor.

### 3.4.2. Diseños óptimos aproximados utilizando ABLUE(3)

En esta sección proponemos un diseño alternativo que utiliza los estimadores ABLUE(3) con el propósito de obtener un plan de muestreo con mejores características operativas que los planes con ABLUE(2). Estos planes  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$  se incluyen en las Tablas 3.7 y 3.8, así como los correspondientes riesgos simulados.

Al estudiar los diseños  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$  de las Tablas 3.7 y 3.8 se observa que tienen tamaños muestrales mayores en comparación con los planes correspondientes  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$  mostrados anteriormente.

**Tabla 3.5:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
0.00041	0.01840	(34, 3) (0.145, 0.174)	(47, 5) (0.099, 0.152)	(34, 10) (0.101, 0.142)	(39, 11) (0.095, 0.139)	(59, 6) (0.106, 0.136)	2.639
0.00284	0.03110	(55, 5) (0.112, 0.189)	(63, 7) (0.111, 0.145)	(51, 15) (0.100, 0.115)	(54, 16) (0.092, 0.115)	(68, 7) (0.096, 0.145)	2.259
0.00654	0.04260	(84, 8) (0.115, 0.150)	(79, 8) (0.097, 0.134)	(64, 19) (0.104, 0.125)	(62, 19) (0.087, 0.155)	(71, 7) (0.113, 0.132)	2.054
0.01090	0.05350	(112, 11) (0.112, 0.154)	(90, 8) (0.112, 0.147)	(72, 22) (0.116, 0.144)	(67, 20) (0.084, 0.117)	(71, 7) (0.091, 0.134)	1.910
0.02090	0.07420	(161, 16) (0.100, 0.159)	(109, 11) (0.113, 0.131)	(84, 25) (0.076, 0.132)	(74, 22) (0.096, 0.135)	(75, 8) (0.071, 0.132)	1.704
0.03190	0.09420	(202, 20) (0.101, 0.144)	(117, 11) (0.108, 0.142)	(90, 27) (0.097, 0.147)	(76, 23) (0.084, 0.113)	(82, 8) (0.077, 0.100)	1.551
0.03760	0.10400	(220, 22) (0.100, 0.131)	(132, 13) (0.096, 0.139)	(92, 28) (0.073, 0.139)	(76, 23) (0.080, 0.116)	(83, 9) (0.072, 0.115)	1.487
0.04940	0.12300	(252, 25) (0.110, 0.137)	(147, 15) (0.080, 0.116)	(97, 29) (0.086, 0.104)	(77, 23) (0.074, 0.132)	(95, 10) (0.069, 0.107)	1.375
0.06150	0.14200	(275, 27) (0.105, 0.124)	(159, 16) (0.089, 0.113)	(98, 29) (0.086, 0.120)	(77, 23) (0.073, 0.114)	(112, 11) (0.064, 0.096)	1.278
0.07400	0.16100	(299, 30) (0.081, 0.125)	(167, 17) (0.081, 0.121)	(100, 30) (0.079, 0.111)	(77, 23) (0.070, 0.117)	(131, 13) (0.067, 0.095)	1.190
0.09950	0.19800	(332, 33) (0.094, 0.115)	(187, 19) (0.070, 0.119)	(101, 30) (0.058, 0.127)	(77, 23) (0.073, 0.105)	(160, 16) (0.051, 0.114)	1.040
0.11900	0.22500	(352, 35) (0.084, 0.135)	(210, 20) (0.068, 0.102)	(102, 31) (0.082, 0.105)	(78, 23) (0.063, 0.115)	(206, 20) (0.052, 0.098)	0.941

**Tabla 3.6:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(2)}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
		$(n, m)$					
		$(CPR_{sim}, CCR_{sim})$					
0.00041	0.01840	(28, 3) (0.118, 0.144)	(29, 3) (0.138, 0.172)	(16, 5) (0.162, 0.185)	(23, 6) (0.131, 0.174)	(42, 4) (0.131, 0.170)	5.656
0.00284	0.03110	(49, 5) (0.143, 0.140)	(45, 4) (0.147, 0.172)	(27, 8) (0.161, 0.171)	(29, 8) (0.151, 0.164)	(45, 5) (0.148, 0.187)	4.509
0.00654	0.04260	(67, 7) (0.147, 0.160)	(52, 5) (0.164, 0.164)	(33, 9) (0.157, 0.195)	(34, 10) (0.155, 0.181)	(47, 5) (0.151, 0.162)	3.963
0.01090	0.05350	(87, 9) (0.136, 0.171)	(62, 6) (0.164, 0.177)	(39, 11) (0.134, 0.188)	(39, 11) (0.149, 0.186)	(45, 4) (0.155, 0.175)	3.607
0.02090	0.07420	(124, 12) (0.144, 0.184)	(73, 7) (0.142, 0.170)	(51, 15) (0.148, 0.176)	(44, 13) (0.142, 0.182)	(45, 4) (0.148, 0.186)	3.130
0.03190	0.09420	(160, 16) (0.128, 0.167)	(83, 9) (0.126, 0.191)	(57, 17) (0.148, 0.188)	(48, 14) (0.139, 0.174)	(57, 5) (0.133, 0.157)	2.802
0.03760	0.10400	(173, 17) (0.139, 0.175)	(90, 8) (0.130, 0.188)	(59, 17) (0.141, 0.179)	(49, 14) (0.140, 0.164)	(63, 5) (0.125, 0.164)	2.670
0.04940	0.12300	(201, 20) (0.129, 0.158)	(96, 10) (0.129, 0.182)	(64, 19) (0.142, 0.166)	(51, 15) (0.124, 0.173)	(69, 7) (0.106, 0.140)	2.448
0.06150	0.14200	(221, 22) (0.116, 0.177)	(103, 11) (0.131, 0.172)	(66, 20) (0.126, 0.172)	(52, 16) (0.131, 0.162)	(89, 9) (0.083, 0.115)	2.262
0.07400	0.16100	(234, 23) (0.136, 0.158)	(120, 12) (0.123, 0.151)	(69, 20) (0.142, 0.176)	(53, 15) (0.132, 0.150)	(122, 11) (0.074, 0.112)	2.101
0.09950	0.19800	(261, 26) (0.115, 0.169)	(142, 14) (0.104, 0.158)	(71, 21) (0.132, 0.157)	(55, 16) (0.115, 0.145)	(177, 17) (0.061, 0.104)	1.837
0.11900	0.22500	(272, 27) (0.121, 0.146)	(160, 15) (0.097, 0.143)	(74, 22) (0.109, 0.164)	(58, 17) (0.108, 0.156)	(211, 21) (0.056, 0.122)	1.673

De cualquier forma, la conclusión más clara que se deduce del análisis de dichos diseños corresponde al estudio de los riesgos simulados. En primer lugar, los riesgos  $CPR_{sim}$  se encuentran bastante más ajustados al valor fijado para  $\alpha$ . En el caso concreto de los diseños con la distribución de valor extremo,  $CPR_{sim}$  se sitúa por encima de la restricción fijada por el productor, de forma general. En cambio, desde el punto de vista del consumidor, el riesgo  $CCR_{sim}$  muestra un valor que se sitúa por debajo de la especificación. Por tanto, se puede afirmar que el diseño  $(n, m, k, \mathbf{R})_{ABLUE(3)}$  se comporta de forma más conservadora que los diseños  $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$  en relación a las condiciones fijadas por el consumidor.

En definitiva, estos diseños pueden representar una alternativa más precisa a los planes de muestreo  $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$ . Esto es particularmente cierto cuando la distribución es de valor extremo y se tienen niveles altos de censura  $q_m$ . En este sentido, resulta conveniente destacar que los planes de la Tabla 3.2 correspondientes al esquema de censura  $q_1 \equiv 15\%$ ,  $q_m \equiv 75\%$  no presentan un buen ajuste del riesgo  $CCR_{sim}$ .

Es preciso aclarar que no se han podido determinar los diseños para ciertas especificaciones cuando  $q_1 \equiv 90\%$ ,  $q_m \equiv 0\%$ . A medida que las condiciones son menos restrictivas, los tamaños muestrales son cada vez mayores y su determinación se complica debido a que el método iterativo del Procedimiento 3.2 no converge. Además, como ya se ha observado en los planes  $(n, m, k, \mathbf{R})_{MLE}$ , la asimetría en el esquema de censura tiene el efecto de aumentar el tamaño de  $n$  en los diseños con las mismas restricciones.

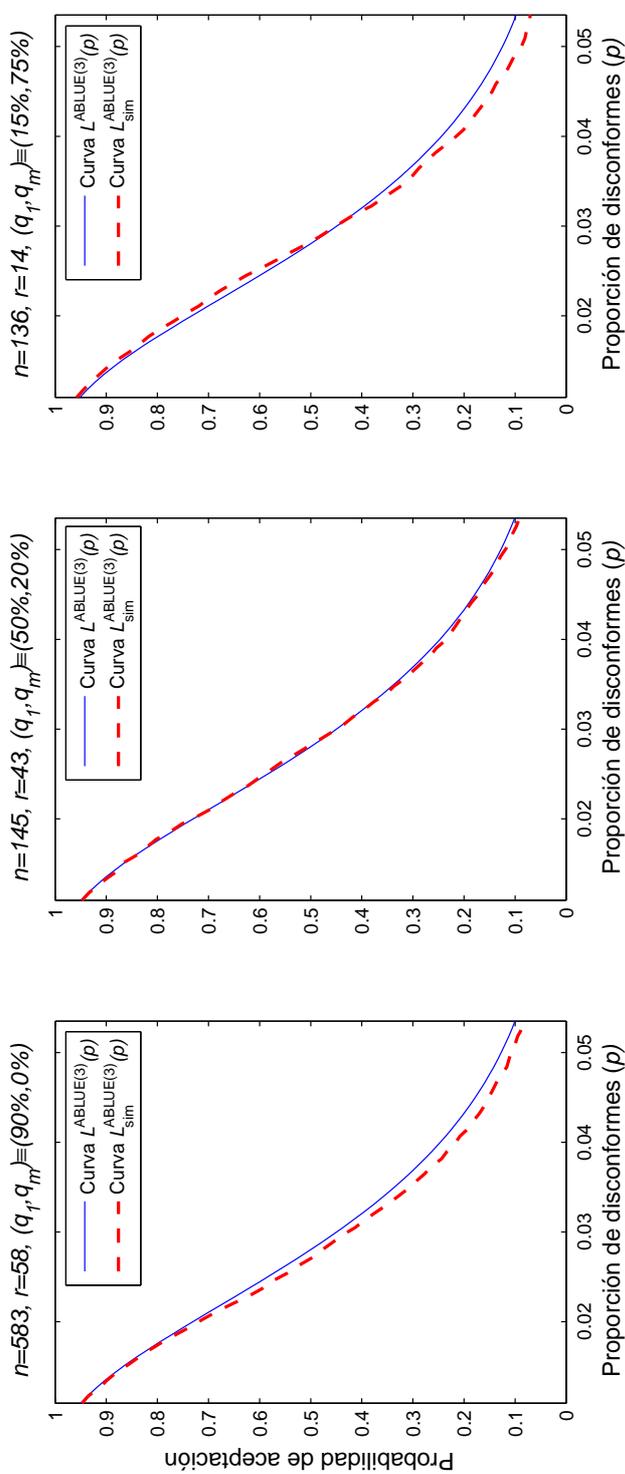
En las Figuras 3.11 y 3.12 es posible examinar las desviaciones entre las curvas aproximadas  $L^{ABLUE(3)}(p; n, m, k, \mathbf{R})$  y las curvas OC obtenidas por simulación.

**Tabla 3.7:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

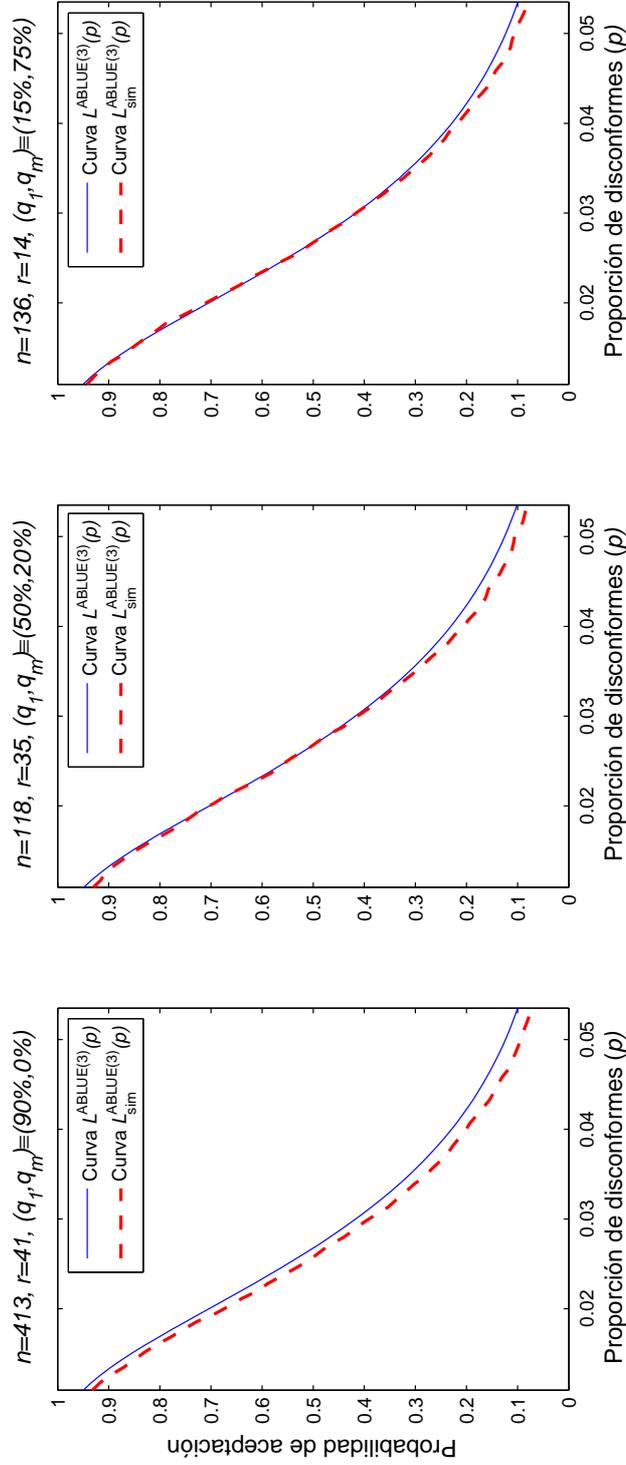
$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
		$(n, m)$					
		$(CPR_{sim}, CCR_{sim})$					
0.00041	0.01840	(292, 29) (0.049, 0.072)	(211, 21) (0.054, 0.071)	(82, 25) (0.053, 0.076)	(73, 21) (0.057, 0.072)	(129, 13) (0.055, 0.087)	2.639
0.00284	0.03110	(428, 43) (0.048, 0.069)	(280, 28) (0.046, 0.088)	(116, 34) (0.059, 0.073)	(92, 28) (0.066, 0.079)	(142, 14) (0.054, 0.075)	2.259
0.00654	0.04260	(520, 51) (0.053, 0.077)	(314, 31) (0.054, 0.070)	(135, 40) (0.058, 0.079)	(105, 31) (0.055, 0.076)	(141, 14) (0.050, 0.076)	2.054
0.01090	0.05350	(583, 58) (0.053, 0.084)	(330, 34) (0.059, 0.074)	(145, 43) (0.049, 0.072)	(110, 33) (0.051, 0.088)	(136, 13) (0.052, 0.073)	1.910
0.02090	0.07420	(647, 65) (0.054, 0.075)	(354, 34) (0.057, 0.078)	(160, 47) (0.053, 0.087)	(115, 34) (0.045, 0.080)	(123, 13) (0.058, 0.075)	1.704
0.03190	0.09420	- -	(351, 35) (0.042, 0.076)	(164, 49) (0.047, 0.076)	(114, 34) (0.045, 0.078)	(115, 12) (0.054, 0.077)	1.551
0.03760	0.10400	- -	(351, 35) (0.052, 0.081)	(164, 50) (0.051, 0.080)	(113, 33) (0.066, 0.073)	(112, 11) (0.055, 0.080)	1.487
0.04940	0.12300	- -	(343, 35) (0.055, 0.073)	(166, 50) (0.048, 0.087)	(111, 33) (0.053, 0.085)	(113, 11) (0.044, 0.080)	1.375
0.06150	0.14200	- -	(335, 34) (0.047, 0.075)	(165, 49) (0.055, 0.085)	(107, 32) (0.054, 0.088)	(120, 12) (0.057, 0.095)	1.278
0.07400	0.16100	- -	(324, 32) (0.051, 0.078)	(160, 48) (0.047, 0.094)	(104, 31) (0.049, 0.091)	(131, 13) (0.049, 0.106)	1.190
0.09950	0.19800	- -	(304, 31) (0.061, 0.074)	(154, 46) (0.052, 0.081)	(97, 29) (0.040, 0.095)	(169, 17) (0.052, 0.107)	1.040
0.11900	0.22500	- -	(298, 29) (0.047, 0.079)	(148, 44) (0.046, 0.086)	(94, 28) (0.059, 0.088)	(211, 21) (0.042, 0.099)	0.941

**Tabla 3.8:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k, \mathbf{R})_{\text{ABLUE}(3)}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes esquemas de censura progresiva cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q_1, q_m$ (%)					$k$
		90%, 00%	75%, 15%	50%, 20%	20%, 50%	15%, 75%	
0.00041	0.01840	(184, 18) (0.061, 0.062)	(164, 16) (0.059, 0.063)	(56, 17) (0.061, 0.080)	(55, 16) (0.054, 0.061)	(116, 12) (0.053, 0.055)	5.656
0.00284	0.03110	(286, 29) (0.059, 0.070)	(238, 23) (0.057, 0.067)	(85, 25) (0.055, 0.074)	(72, 22) (0.060, 0.073)	(138, 13) (0.057, 0.065)	4.509
0.00654	0.04260	(359, 36) (0.059, 0.076)	(269, 27) (0.053, 0.086)	(105, 31) (0.064, 0.077)	(90, 27) (0.057, 0.076)	(136, 14) (0.052, 0.074)	3.963
0.01090	0.05350	(413, 41) (0.058, 0.074)	(295, 30) (0.063, 0.079)	(118, 35) (0.054, 0.080)	(99, 29) (0.049, 0.075)	(136, 14) (0.058, 0.072)	3.607
0.02090	0.07420	(499, 50) (0.054, 0.084)	(328, 33) (0.054, 0.079)	(139, 41) (0.057, 0.079)	(108, 32) (0.049, 0.076)	(127, 13) (0.052, 0.072)	3.130
0.03190	0.09420	- -	(340, 34) (0.053, 0.079)	(148, 44) (0.060, 0.092)	(108, 32) (0.063, 0.096)	(119, 12) (0.062, 0.076)	2.802
0.03760	0.10400	- -	(344, 34) (0.053, 0.095)	(150, 45) (0.064, 0.079)	(109, 32) (0.053, 0.086)	(113, 11) (0.054, 0.084)	2.670
0.04940	0.12300	- -	(350, 34) (0.060, 0.083)	(156, 47) (0.052, 0.082)	(110, 33) (0.054, 0.079)	(114, 11) (0.062, 0.076)	2.448
0.06150	0.14200	- -	(346, 34) (0.065, 0.074)	(157, 47) (0.067, 0.083)	(109, 32) (0.060, 0.080)	(120, 12) (0.057, 0.093)	2.262
0.07400	0.16100	- -	(338, 33) (0.060, 0.075)	(158, 47) (0.061, 0.082)	(106, 32) (0.060, 0.084)	(138, 13) (0.048, 0.097)	2.101
0.09950	0.19800	- -	(321, 32) (0.063, 0.086)	(155, 46) (0.063, 0.090)	(100, 30) (0.064, 0.091)	(174, 18) (0.038, 0.135)	1.837
0.11900	0.22500	- -	(303, 31) (0.055, 0.102)	(151, 45) (0.058, 0.077)	(96, 29) (0.055, 0.089)	(238, 23) (0.048, 0.111)	1.673



**Figura 3.11:** Curvas características  $L^{ABLUE(3)}(p)$  y  $L_{sim}^{ABLUE(3)}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b)  $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c)  $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$



**Figura 3.12:** Curvas características  $L^{ABLUE(3)}(p)$  y  $L_{sim}^{ABLUE(3)}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $(q_1, q_m) \equiv (90\%, 0\%)$ ; (b)  $(q_1, q_m) \equiv (50\%, 20\%)$ ; (c)  $(q_1, q_m) \equiv (15\%, 75\%)$

En general, se puede asumir que las diferencias observadas son muy pequeñas y que los diseños son bastante precisos. De este modo, el plan no sólo se ajusta a las condiciones fijadas por el productor y el consumidor, sino que proporciona ciertas garantías con respecto a la decisión de aceptar o rechazar el lote.

### 3.5. Diseños óptimos aproximados con censura de tipo II y ABLUEs

Cuando la censura es de tipo II, podemos presentar un diseño que utiliza también desarrollos de Taylor de los BLUEs hasta cierto orden. Los detalles de la aproximación se encuentran en la Sección A.2.3 del Apéndice A. En esta situación, la curva OC, cuya expresión es similar a (3.8), se denotará como  $L^{\text{ABLUE}}(p; n, m, k)$ . Al contrario que en los planes con censura de tipo II y MLEs, no es posible expresar los elementos  $\gamma_{ij}^*(n)$  de  $\text{Acov}(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  en función de la proporción de censura,  $q$ . Por tanto, el correspondiente diseño óptimo aproximado se debe hallar aplicando el Procedimiento iterativo 3.3.

Las Tablas 3.9 y 3.10 recogen los diseños  $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$ , así como sus riesgos simulados. Las condiciones de los riesgos máximos de estos planes son  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ , mientras que los niveles de calidad corresponden a la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]). Los porcentajes de censura de tipo II son 0 %, 50 %, 70 % y 90 %.

Es destacable el alto grado de similitud que presentan los planes de estas tablas con los diseños  $(n, m, k)_{\text{MLE}}$  de las Tablas 3.3 y 3.4. Efectivamente, los tamaños muestrales son muy parecidos, salvo quizás para niveles altos de censura ( $q \equiv 90\%$ ). En concreto, los diseños  $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$  tienen un valor de  $n$  superior al de  $(n, m, k)_{\text{MLE}}$  para las mismas condiciones. Asimismo, existe un alto grado de ajuste en los riesgos simulados,

al igual que se había observado en la Tablas 3.3 y 3.4, incluso mejor que en el caso de los planes con censura progresiva. Este buen ajuste o corrección en los riesgos reales del productor y el consumidor se obtiene también con niveles altos de censura, al contrario de lo que se concluía en los diseños  $(n, m, k)_{MLE}$ .

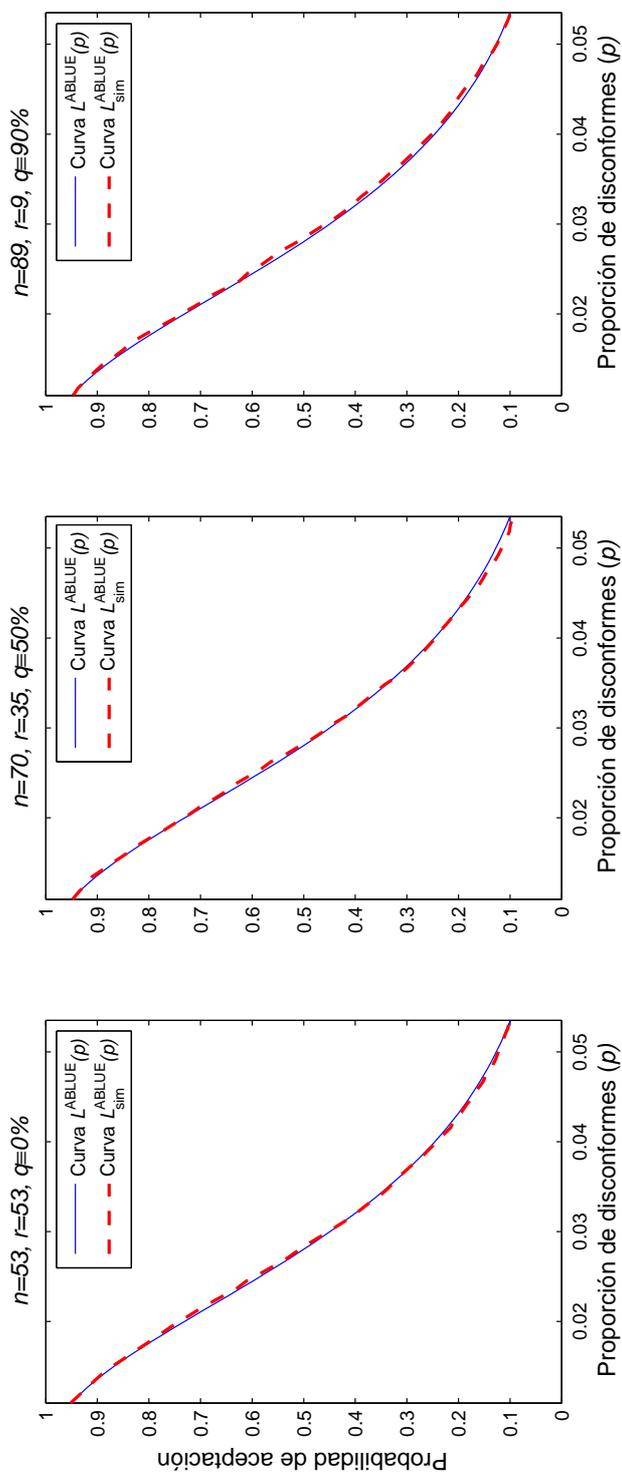
Las Figuras 3.13 y 3.14 permiten ilustrar las diferencias entre las curvas OC aproximadas y simuladas de los planes presentados. De nuevo, se aprecia que las desviaciones en los riesgos cuando la censura es de tipo II son mucho más reducidas en comparación a los diseños con censura progresiva.

**Tabla 3.9:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes niveles de censura de tipo II cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

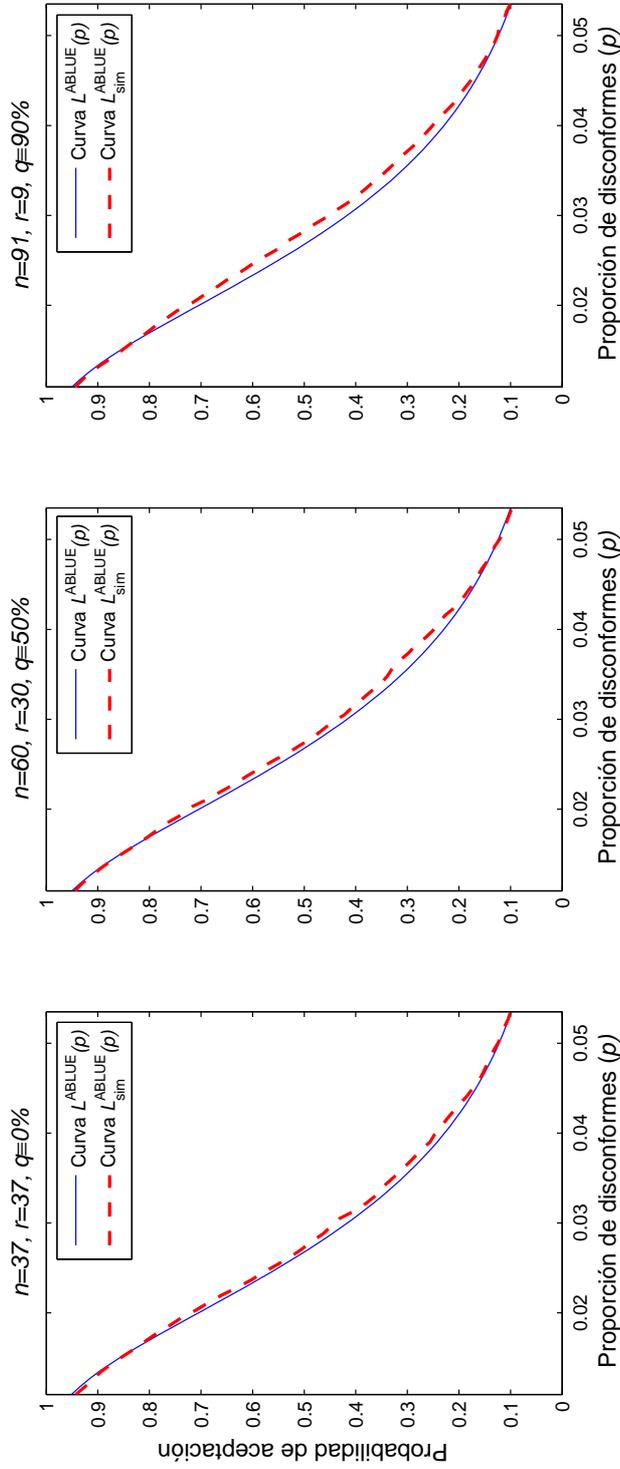
$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)				$k$
		0 %	50 %	70 %	90 %	
0.00041	0.01840	(25, 25) (0.053, 0.102)	(39, 20) (0.060, 0.093)	(51, 16) (0.053, 0.106)	(85, 8) (0.059, 0.106)	2.639
0.00284	0.03110	(38, 38) (0.041, 0.091)	(56, 28) (0.050, 0.100)	(68, 21) (0.056, 0.097)	(92, 9) (0.059, 0.096)	2.259
0.00654	0.04260	(47, 47) (0.051, 0.105)	(64, 33) (0.066, 0.091)	(76, 23) (0.048, 0.103)	(91, 9) (0.056, 0.093)	2.054
0.01090	0.05350	(53, 53) (0.043, 0.094)	(70, 35) (0.046, 0.098)	(80, 24) (0.049, 0.111)	(89, 9) (0.047, 0.089)	1.910
0.02090	0.07420	(61, 61) (0.044, 0.103)	(76, 38) (0.059, 0.098)	(83, 25) (0.047, 0.095)	(86, 9) (0.055, 0.105)	1.704
0.03190	0.09420	(66, 66) (0.048, 0.104)	(79, 40) (0.056, 0.095)	(82, 25) (0.047, 0.090)	(88, 9) (0.055, 0.090)	1.551
0.03760	0.10400	(67, 67) (0.052, 0.103)	(79, 40) (0.052, 0.103)	(82, 25) (0.044, 0.098)	(91, 9) (0.055, 0.099)	1.487
0.04940	0.12300	(70, 70) (0.056, 0.097)	(79, 40) (0.047, 0.104)	(80, 24) (0.053, 0.106)	(102, 10) (0.053, 0.108)	1.375
0.06150	0.14200	(71, 71) (0.047, 0.087)	(78, 39) (0.054, 0.096)	(78, 23) (0.058, 0.089)	(116, 12) (0.056, 0.104)	1.278
0.07400	0.16100	(71, 71) (0.050, 0.093)	(76, 38) (0.052, 0.101)	(77, 23) (0.050, 0.103)	(134, 14) (0.050, 0.086)	1.190
0.09950	0.19800	(70, 70) (0.052, 0.086)	(73, 37) (0.050, 0.104)	(74, 23) (0.044, 0.100)	(178, 18) (0.048, 0.088)	1.040
0.11900	0.22500	(69, 69) (0.048, 0.099)	(71, 36) (0.044, 0.093)	(74, 23) (0.049, 0.091)	(217, 22) (0.048, 0.097)	0.941

**Tabla 3.10:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)_{\text{ABLUE}}$  y riesgos simulados  $(CPR_{sim}, CCR_{sim})$  para diferentes niveles de censura de tipo II cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)				$k$
		0 %	50 %	70 %	90 %	
0.00041	0.01840	(15, 15) (0.055, 0.100)	(28, 14) (0.059, 0.098)	(40, 12) (0.057, 0.089)	(74, 7) (0.046, 0.095)	5.656
0.00284	0.03110	(24, 24) (0.059, 0.111)	(43, 22) (0.053, 0.088)	(59, 18) (0.055, 0.094)	(89, 9) (0.052, 0.101)	4.509
0.00654	0.04260	(31, 31) (0.058, 0.101)	(53, 27) (0.060, 0.091)	(68, 20) (0.048, 0.099)	(92, 9) (0.056, 0.086)	3.963
0.01090	0.05350	(37, 37) (0.047, 0.101)	(60, 30) (0.056, 0.107)	(74, 22) (0.056, 0.103)	(91, 9) (0.059, 0.089)	3.607
0.02090	0.07420	(45, 45) (0.050, 0.098)	(69, 35) (0.054, 0.102)	(81, 24) (0.057, 0.099)	(88, 9) (0.060, 0.084)	3.130
0.03190	0.09420	(51, 51) (0.057, 0.092)	(74, 37) (0.055, 0.100)	(83, 25) (0.057, 0.086)	(88, 9) (0.056, 0.095)	2.802
0.03760	0.10400	(53, 53) (0.059, 0.097)	(76, 38) (0.050, 0.089)	(83, 25) (0.055, 0.098)	(91, 9) (0.056, 0.088)	2.670
0.04940	0.12300	(57, 57) (0.052, 0.095)	(78, 39) (0.054, 0.089)	(82, 25) (0.057, 0.093)	(100, 10) (0.052, 0.098)	2.448
0.06150	0.14200	(60, 60) (0.051, 0.096)	(78, 39) (0.053, 0.092)	(81, 24) (0.058, 0.099)	(114, 11) (0.056, 0.100)	2.262
0.07400	0.16100	(62, 62) (0.059, 0.102)	(77, 39) (0.056, 0.101)	(79, 24) (0.054, 0.095)	(142, 14) (0.054, 0.092)	2.101
0.09950	0.19800	(64, 64) (0.059, 0.094)	(75, 38) (0.054, 0.091)	(76, 23) (0.056, 0.094)	(187, 19) (0.051, 0.094)	1.837
0.11900	0.22500	(65, 65) (0.054, 0.091)	(73, 37) (0.049, 0.097)	(75, 23) (0.049, 0.088)	(251, 25) (0.046, 0.087)	1.673



**Figura 3.13:** Curvas características  $L^{\text{ABLUE}}(p)$  y  $L^{\text{ABLUE}}_{\text{sim}}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $q \equiv 0\%$ ; (b)  $q \equiv 50\%$ ; (c)  $q \equiv 90\%$



**Figura 3.14:** Curvas características  $L^{ABLUE}(p)$  y  $L_{sim}^{ABLUE}(p)$  de planes de muestreo cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01090$ ,  $p_\beta = 0.05350$  y: (a)  $q \equiv 0\%$ ; (b)  $q \equiv 50\%$ ; (c)  $q \equiv 90\%$

---

# Planes de muestreo utilizando riesgos promedios

## 4.1. Introducción

Un problema habitual en el muestreo de aceptación en fiabilidad es la excesiva duración total de los ensayos de tiempo de vida, sobre todo en pruebas con productos de alta fiabilidad. En algunas situaciones, los ensayos pueden tener carácter destructivo. Además, es posible que las unidades defectuosas sean irre recuperables o, incluso, que al reparar dichas unidades se pierdan propiedades funcionales del producto. Una de las soluciones consiste en la utilización de esquemas de censura aplicados a los tiempos de fallo observados. Otra posibilidad consiste en incorporar información a priori sobre alguna característica del producto. El resultado sería la reducción del tamaño muestral requerido en las pruebas.

Como ya se ha comentado en los capítulos anteriores, el nivel de calidad de los lotes de productos procedentes de un proceso de producción se mide, habitualmente, mediante la proporción  $p$  de unidades defectuosas del lote. En general, los planes de muestreo convencionales asumen que  $p$  es constante. A menudo, sin embargo, es lógico suponer que  $p$  podría variar de un lote a otro, incluso cuando el proceso de fabricación

es estable.

En este capítulo se utiliza una distribución a priori sobre  $p$  para obtener los riesgos promedios de un plan de muestreo. Este tipo de riesgos (véase la Sección 1.8) se define como el promedio de los riesgos clásicos para los valores de  $p$  satisfactorios (riesgo promedio del productor) o no satisfactorios (riesgo promedio del consumidor). Easterling (1970, [53]), y Martz y Waller (1982, [116]) consideran que esta definición del riesgo del plan resulta más apropiada para garantizar, en promedio, una decisión correcta de aceptación o rechazo de los lotes sometidos a inspección en una secuencia continua de ensayos. Es decir, el riesgo promedio permite obtener resultados aceptables en la repetición continuada del muestreo de aceptación. Cuando se trata de evaluar la calidad de un proceso de producción el plan de muestreo suele ser mucho más estricto y este tipo de riesgo podría no resultar apropiado.

A veces no se dispone de información precisa y puede resultar muy difícil determinar la distribución adecuada en una situación real. Sin embargo, existen resultados que muestran que el conocimiento de la distribución a priori no tiene que ser muy preciso. Sólo es necesario que la distribución elegida sea suficientemente razonable como aproximación. En este sentido, hay que mencionar los trabajos de Wetherill (1960, [176]), Wetherill y Campling (1966, [178]), Hald (1967, [83]) y Chiu (1974, [34]).

Las siguientes distribuciones a priori de  $p$ , donde  $0 < p < 1$ , representan algunos modelos teóricos propuestos por diversos autores:

- (i)  $h(p) \propto (1 - p)^s$ , donde  $s$  es un parámetro (Sittig, 1951, [164]),
- (ii)  $h(p) \propto p^{s-1}(1 - p)^{t-1}$ , donde  $s, t$  son parámetros (Champernowne, 1953, [32]),
- (iii)  $h(p) \propto \pi_i I_{p_i}(p)$ , donde  $\pi_i, p_i$  son constantes, con  $i = 1, \dots, k$ . Además,  $I_p(p) = 1$

y  $I_p(x) = 0$ , si  $x \neq p$  (Wetherill, 1960, [176]),

(iv)  $h(p) = \sigma^{-1} \exp\{y^2/2 - (y - c)^2/(2\sigma^2)\}$ , donde  $y \sim N(c, \sigma)$ , con  $c, \sigma$  parámetros, y  $p = \Phi(-y)$  (Chiu, 1974, [34]).

Los modelos (i-ii) y (iii) corresponden a la distribución beta y la distribución discreta degenerada en un número finito de puntos, respectivamente. El modelo (iv) se genera a partir de la distribución normal.

Fernández y Pérez-González (2009, [65]) presentan otras distribuciones que podrían ayudar a describir, con mayor precisión, el conocimiento a priori sobre  $p$ . A continuación, se recogen dichas distribuciones y se analizan mediante un ejemplo ilustrativo.

## 4.2. Distribuciones a priori de la proporción de unidades defectuosas

### 4.2.1. Distribución beta generalizada

La distribución beta es ampliamente utilizada en estadística como distribución a priori de  $p$  debido a sus propiedades y las diversas formas de su curva de densidad. La función de densidad de la distribución beta es

$$h(p; a, b) = \{1/B(a, b)\}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, \quad 0 < p < 1,$$

donde  $a > 0$  y  $b > 0$  son los parámetros y  $B(a, b)$  es la función beta. Sin embargo, en la práctica, debido a su naturaleza biparamétrica, tiene ciertas limitaciones para representar la información a priori disponible. Por ejemplo, en algunas situaciones

$c \leq p \leq d$ , donde  $c$  y  $d$  son límites o cotas conocidas de  $p$ . En este caso, es necesario tener en cuenta dichos límites en el modelo de distribución a priori.

Consideramos que una variable aleatoria tiene una distribución beta generalizada definida en un intervalo  $[c, d]$  si su función de densidad es

$$h(p) \equiv h(p; a, b, c, d, r) = \frac{(1-r)^a (d-c)(p-c)^{a-1} (d-p)^{b-1}}{\{d-c-r(p-c)\}^{a+b} B(a, b)}, \quad c \leq p \leq d, \quad (4.1)$$

donde  $a, b, c, d$  y  $r$  son parámetros ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $0 \leq c < d \leq 1$  y  $r < 1$ ). En adelante, esta distribución se denotará como  $BG(a, b, c, d, r)$ . La función de distribución acumulada se expresa en términos de la función beta incompleta de la siguiente forma

$$H(p) \equiv H(p; a, b, c, d, r) = B_{a,b} \left[ \frac{(p-c)(r-1)}{r(p-c) - (d-c)} \right], \quad c \leq p \leq d, \quad (4.2)$$

donde

$$B_{a,b}(z) = \{1/B(a, b)\} \int_0^z p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp, \quad z \in [0, 1].$$

Se observa que la distribución beta generalizada se obtiene a partir de la beta estándar realizando el cambio de variable  $p' = (p-c)(r-1)/\{r(p-c) - (d-c)\}$ .

### 4.2.2. Propiedades de la distribución beta generalizada

Los momentos de  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  se definen de la forma siguiente

$$E[p^s | a, b, c, d, r] = \sum_{i=0}^s \frac{\binom{s}{i} \binom{a+i-1}{i} {}_2F_1(a+b, a+i, a+b+i, r)}{c^{i-s} (d-c)^{-i} (1-r)^{-a} \binom{a+b+i-1}{i}}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

donde  ${}_2F_1(a+b, a+i, a+b+i, r)$  es la función hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1(a+b, a+i, a+b+i, r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\binom{a+i+s-1}{s} \binom{a+b+s-1}{s} r^s}{\binom{a+b+i+s-1}{s} s!},$$

cuya representación integral es

$${}_2F_1(a+b, a+i, a+b+i, r) = \int_0^1 \frac{t^{a+i-1} (1-t)^{b-1}}{B(a+i, b) (1-rt)^{a+b}} dt.$$

En la distribución beta generalizada se puede restringir el rango de  $p$  a un intervalo  $[c, d]$  cuando existe información a priori al respecto. En caso contrario, se supone que  $c = 0$  y  $d = 1$ . Además, también resulta posible obtener una amplia variedad de formas y asimetrías de las curvas de densidad en función de los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $r$ . Por ejemplo, se pueden dar las siguientes posibilidades:

- si  $c = 0$ ,  $d = 1$  y  $r = 0$ , se obtiene la distribución estándar  $Beta(a, b)$ ,
- si  $a = b = 1$  y  $r = 0$ , la distribución resultante es uniforme  $U(c, d)$ ,
- si  $a = b$  y  $r = 0$ , la distribución es simétrica,
- si  $a > 1$  y  $b > 1$ , la distribución es unimodal y campaniforme,
- si  $a < 1$  y  $b < 1$ , la densidad de la distribución tiene forma de bañera.

La función de densidad de la distribución beta generalizada puede ser decreciente o creciente, y puede tener una moda y una anti-moda. Por tanto, esta distribución resulta bastante adecuada para representar cualquier clase de información a priori que exista acerca de  $p$ .

A continuación, mediante un ejemplo, se muestran algunas formas características de las curvas de densidad de la distribución beta generalizada.

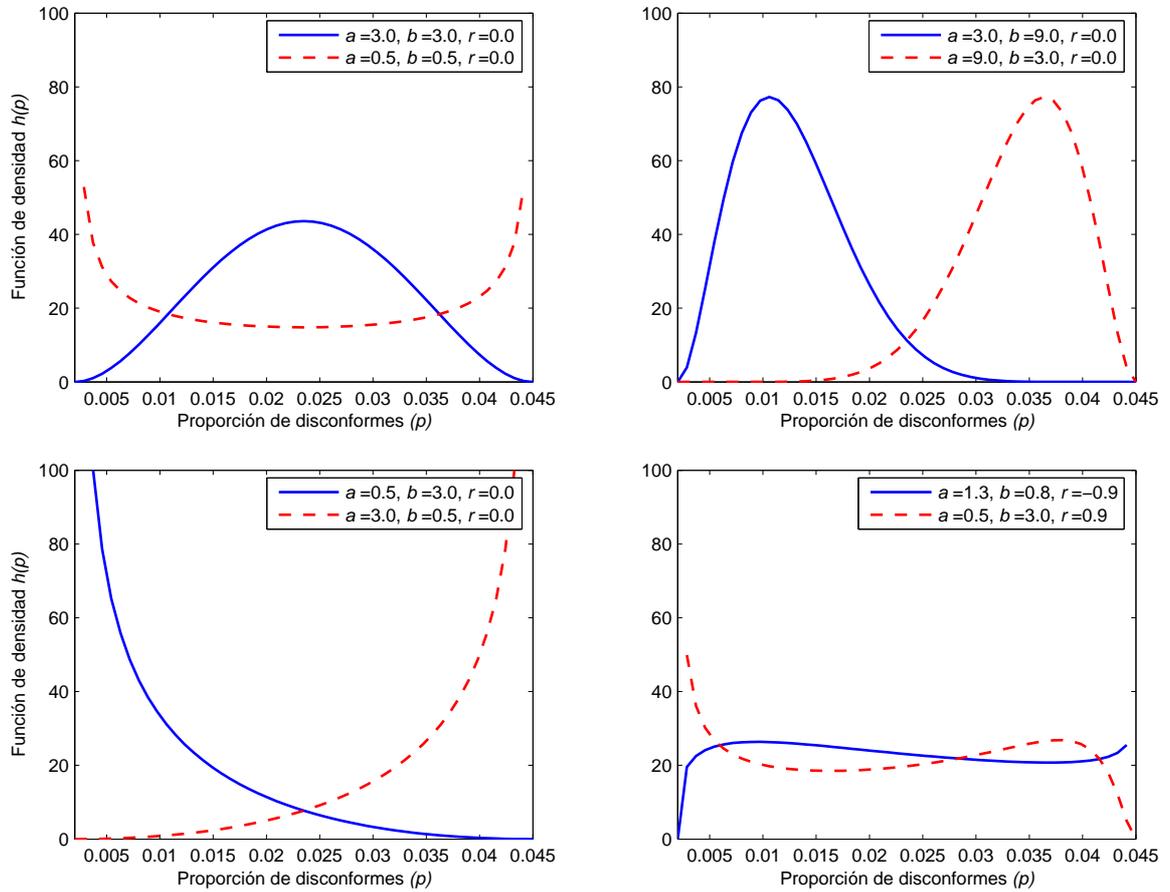
### Ejemplo

Se considera un proceso de producción de un producto determinado cuya fiabilidad se desea estudiar. Por ejemplo, en referencia a Montanari y Cacciari (1988,[124]), dicho producto podría ser un tipo de cable de tendido eléctrico con aislamiento (XLPE) fabricado en una industria de componentes eléctricos. Después de realizar un muestreo sobre los lotes de producto generados en el proceso, se comprueba que  $p$  varía entre  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$ .

La Figura 4.1 ilustra distintos modelos de la densidad beta generalizada que podrían describir este proceso. También es posible obtener diferentes formas de la curva mediante el parámetro  $r$  de la distribución, tal y como se aprecia en la Figura 4.2. Las figuras anteriores recogen una gran variedad de posibles distribuciones sobre la proporción de unidades defectuosas de un proceso de producción o un conjunto de lotes. Esto demuestra la flexibilidad de la familia de distribuciones beta generalizada para incorporar la información disponible sobre  $p$  en el diseño de un plan de muestreo.

A continuación, se exponen varios ejemplos de la distribución beta generalizada de acuerdo al tipo de información conocida sobre  $p$ . Con respecto al muestreo de aceptación, supongamos que el productor especifica un riesgo  $\alpha = 0.05$  de rechazar los lotes con un nivel de calidad aceptable  $p_\alpha = 0.01$ . Por otro lado, el consumidor acepta con una probabilidad  $\beta = 0.10$  los lotes que tienen un nivel de calidad no satisfactorio  $p_\beta = 0.03$ . Se consideran los siguientes tipos de información sobre  $p$ :

- La distribución de  $p$  es imparcial, i.e. el modelo se caracteriza por presentar

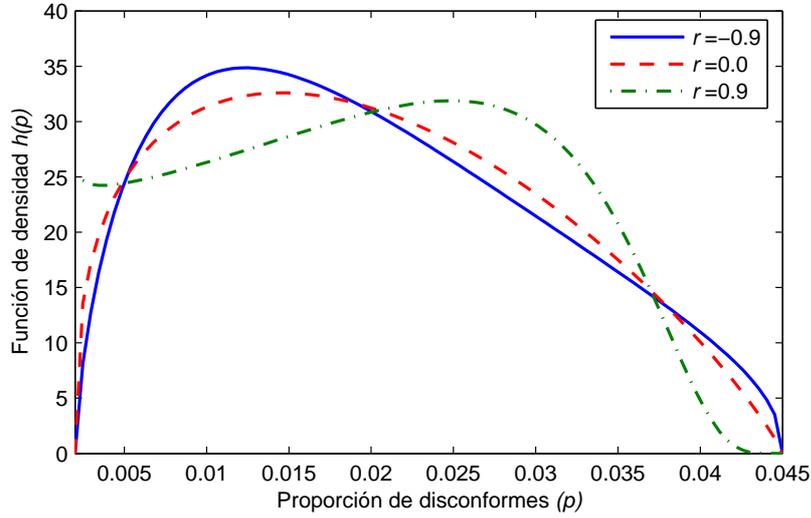


**Figura 4.1:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  con  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$

cierta propiedad de neutralidad entre  $H_0 : p \leq p_\alpha$  y  $H_1 : p \geq p_\beta$ . Si

$$\Pr(p \leq p_\alpha) = \Pr(p \geq p_\beta) = \varepsilon,$$

con  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ , la distribución se denominará  $\varepsilon$ -imparcial. En esta situación, fijando el valor de un parámetro de la distribución (se escoge el parámetro  $r$ ) y

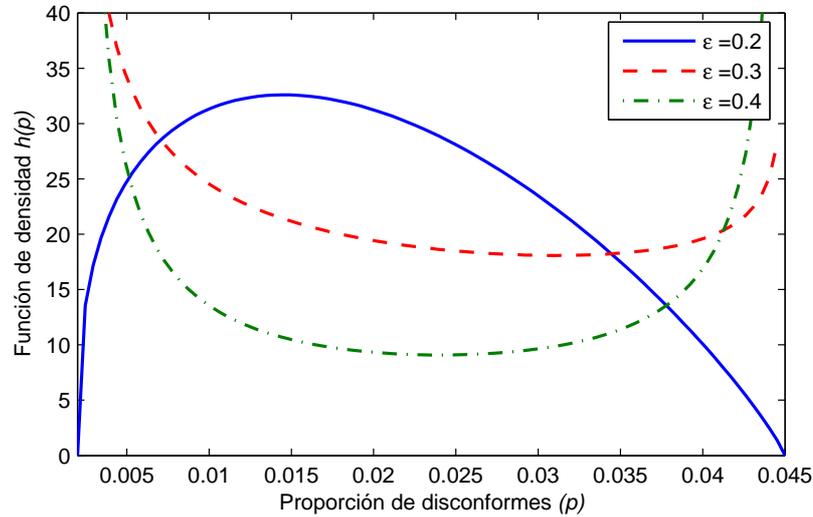


**Figura 4.2:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  con  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$  cuando  $r = -0.9$  (línea sólida),  $r = 0$  (línea discontinua) y  $r = 0.9$  (línea de puntos y discontinua)

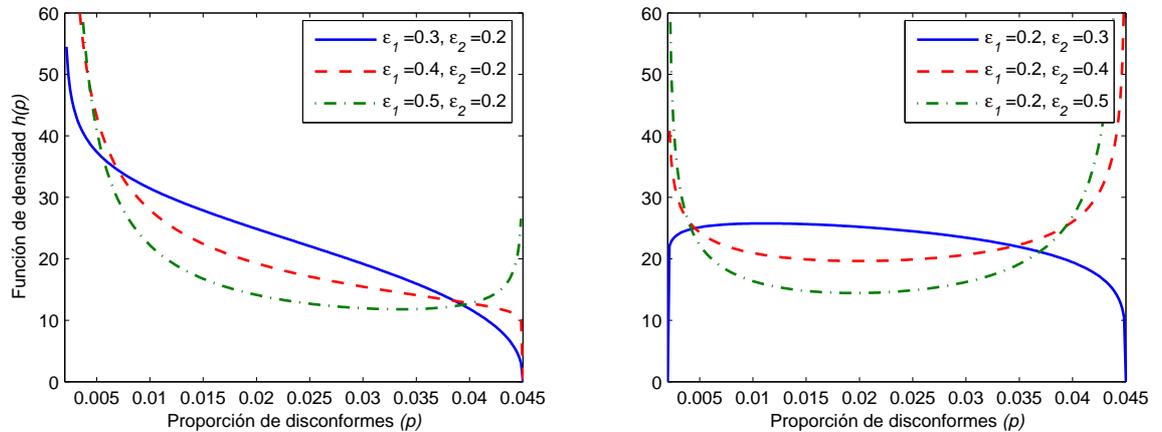
conocido  $\varepsilon$ , se trata de resolver el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} H(p_\alpha; a, b, c, d, r) &= \varepsilon, \\ 1 - H(p_\beta; a, b, c, d, r) &= \varepsilon, \\ a > 0, b > 0, r < 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

La imparcialidad de una distribución a priori de  $p$  se justifica en determinadas situaciones en las que se quiere garantizar una postura objetiva y equitativa ante los intereses del productor y los del consumidor. De esta forma, esta propiedad proporciona una posible distribución a priori de consenso entre ambos. Esta condición puede ser impuesta, bien por el productor y el consumidor de forma simultánea, o bien por una autoridad neutral que no desee favorecer ni perjudicar a uno u otro. Si no se verifica la propiedad de imparcialidad se tiene que

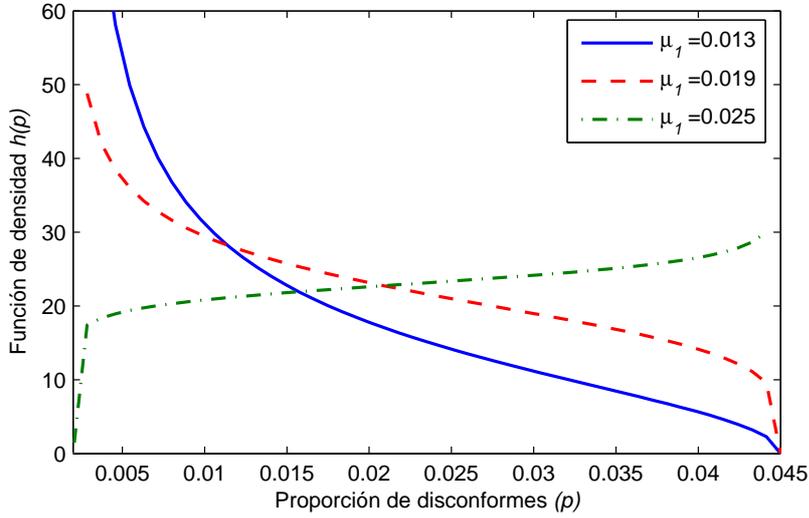


**Figura 4.3:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $r = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$  (línea sólida),  $\varepsilon = 0.3$  (línea discontinua) y  $\varepsilon = 0.4$  (línea de puntos y discontinua)



**Figura 4.4:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y  $r = 0$  cuando  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  (izquierda) y  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  (derecha)

$\Pr(p \leq p_\alpha) = \varepsilon_1$  y  $\Pr(p \geq p_\beta) = \varepsilon_2$ , con  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  y  $0 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 1$ . De este modo, el problema que hay que resolver es similar a (4.3). En las Figuras 4.3 y 4.4 se representan varios ejemplos de curvas de densidad de distribuciones beta generalizada imparciales y no imparciales, respectivamente.



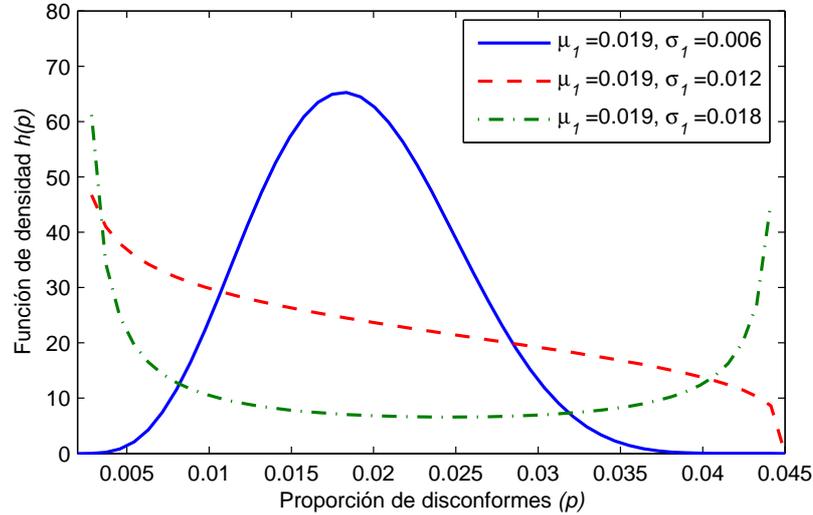
**Figura 4.5:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\mu_1 = 0.013$  (línea sólida),  $\mu_1 = 0.019$  (línea discontinua) y  $\mu_1 = 0.025$  (línea de puntos y discontinua)

- La media  $\mu_1$  de  $p$  es conocida y la distribución de  $p$  es  $\varepsilon$ -imparcial. En esta ocasión, no es necesario prefijar el valor de ningún parámetro de la distribución (aparte de  $c$  y  $d$ ) y se trata de resolver el sistema:

$$\begin{cases} E[p \mid a, b, c, d, r] & = \mu_1, \\ H(p_\alpha; a, b, c, d, r) & = \varepsilon, \\ 1 - H(p_\beta; a, b, c, d, r) & = \varepsilon, \\ a > 0, b > 0, r < 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

La Figura 4.5 muestra algunas curvas de densidad para diversos valores de  $\mu_1$  de la distribución beta generalizada imparcial.

- La media  $\mu_1$  y la varianza  $\sigma_1^2$  de  $p$  son conocidas. En la Figura 4.6 se ilustran varios ejemplos de curvas de densidad para  $\mu_1 = 0.019$  y distintos valores de  $\sigma_1$ .



**Figura 4.6:** Curvas de densidad de la distribución  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ ,  $\varepsilon = 0.25$ ,  $\mu_1 = 0.019$  y  $\sigma_1 = 0.006$  (línea sólida),  $\sigma_1 = 0.012$  (línea discontinua) y  $\sigma_1 = 0.018$  (línea de puntos y discontinua)

De nuevo, se puede seleccionar un valor para  $r$  y determinar  $a$  y  $b$  a partir del sistema:

$$\begin{cases} E[p | a, b, c, d, r] &= \mu_1, \\ Var[p | a, b, c, d, r] &= \sigma_1^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

En general, la resolución de los sistemas (4.3), (4.4) y (4.5) se lleva a cabo utilizando algún método iterativo. Concretamente, se ha comprobado que el método de Gauss-Newton (descrito en el Apéndice B) proporciona muy buenos resultados computacionales. La siguiente tabla recoge una comparativa de dicho método y otros de mayor complejidad utilizados en la resolución de algunos casos de los problemas anteriores. En particular, se muestra el promedio del número de iteraciones hasta la convergencia del algoritmo y el tiempo medio de resolución en segundos.

**Tabla 4.1:** Comparativa de métodos iterativos de resolución de ecuaciones

Problema a resolver	Algoritmo	Iteraciones	Tiempo (seg.)
(4.3)	Gauss-Newton	5.8	0.069
	Levenberg-Marquardt	6.7	0.080
	Región de confianza	7.3	0.061
(4.4)	Gauss-Newton	46.0	13.719
	Levenberg-Marquardt	65.8	23.707
	Región de confianza	6.0	0.609
(4.5)	Gauss-Newton	4.7	0.391
	Levenberg-Marquardt	4.0	0.318
	Región de confianza	2.7	0.140

Se observa que los resultados del método de Gauss-Newton son bastante aceptables. Además, su programación es más sencilla en comparación con los algoritmos de Levenberg-Marquardt y de región de confianza, que suelen estar justificados en problemas de mayor complejidad. La descripción detallada de estos métodos se encuentra en Nocedal y Wright (2006, [133]).

### 4.2.3. Distribuciones de máxima entropía

Es muy frecuente que no se disponga de suficiente información para especificar completamente la distribución a priori, y que sólo exista cierta información parcial como, por ejemplo, algunos momentos o cuantiles de la distribución. Desde el punto de vista del análisis bayesiano, resulta apropiado elegir la "mejor" distribución a priori entre las que verifican la información parcial disponible. El método tradicional para hacer esta selección utiliza la entropía de una distribución. El concepto de entropía ha sido estudiado, entre otros, por Jaynes (1968, [93], 1983, [94]), Rosenkrantz (1977,

[147]) y Berger (1985, [19]). La entropía de la función de densidad  $\pi(\cdot)$  se define como

$$Ent(\pi) = E^\pi[-\log\{\pi(p)/\pi_0(p)\}] = - \int_0^1 \pi(p) \log\{\pi(p)/\pi_0(p)\} dp, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad (4.6)$$

donde  $\pi_0(\cdot)$  denota la densidad a priori invariante no informativa de referencia. Hay que observar que la entropía de  $\pi_0(\cdot)$  es 0 y el resto de las distribuciones tienen menor entropía.

El concepto de entropía está relacionado con la distancia de Kullback-Liebler (1951, [99], 1987, [98]) entre  $\pi(\cdot)$  y la distribución  $\pi_0(\cdot)$  ya que ésta es igual a  $-Ent(\pi)$ . De este modo, a mayor desviación de la distribución  $\pi_0(\cdot)$ , mayor es la distancia de Kullback-Liebler y menor será la entropía de  $\pi(\cdot)$ . En cierto sentido, la entropía mide la "cantidad" de incertidumbre de la distribución  $\pi(\cdot)$  y, para ello, se considera una distribución de referencia completamente no informativa.

El problema de determinar la distribución a priori menos informativa consiste en hallar aquella que maximice la entropía entre las que satisfacen ciertas restricciones. En general, estas restricciones vienen impuestas por la información parcial conocida.

Entre las funciones de densidad a priori no informativas de  $p$ , donde  $0 < p < 1$ , cabe citar los siguientes ejemplos:

- (i)  $\pi(p) = 1$ , i.e., la densidad de la distribución uniforme  $U[0, 1]$ , propuesta por Bayes (1783, [18]) y Laplace (1812, [104]).
- (ii)  $\pi(p) = p^{-1}(1-p)^{-1}$ , que se puede considerar la densidad de una distribución beta impropia, utilizada por Novick y Hall (1965, [134]), Jaynes (1968, [93]) y Villegas (1977, [174]).
- (iii)  $\pi(p) \propto p^{-1/2}(1-p)^{-1/2}$ , i.e., la densidad de una distribución  $Beta(1/2, 1/2)$ ,

sugerida por Jeffreys (1961, [95]), Box y Tiao (1973, [23]), Akaike (1978, [2]) y Bernardo (1979, [21]).

(iv)  $\pi(p) \propto p^p(1-p)^p$ , considerada por Zellner (1977, [183]).

Si la información a priori se expresa en la forma siguiente

$$E^\pi[g_k(p)] = \int_0^1 g_k(p)\pi(p)dp = \mu_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4.7)$$

entonces la densidad  $\pi^*(\cdot)$  que maximiza la entropía  $Ent(\pi)$  entre las que satisfacen las restricciones anteriores se determina aplicando resultados del cálculo de variaciones.

En concreto

$$\pi^*(p) = \frac{\pi_0(p) \exp\{\sum_{i=1}^m \lambda_k g_k(p)\}}{\int_0^1 \pi_0(p') \exp\{\sum_{i=1}^m \lambda_k g_k(p')\} dp'}, \quad 0 < p < 1,$$

donde  $\lambda_k$ , con  $k = 1, \dots, m$ , son constantes que se obtienen a partir de las restricciones (4.7).

De esta forma, se trata de hallar la densidad no informativa  $\pi(\cdot)$  que es solución del siguiente problema

$$\begin{aligned} & \text{máx}_\pi \quad E^\pi[-\log\{\pi(p)/\pi_0(p)\}] \\ & \text{sujeto a} \quad E^\pi[g_k(p)] = \mu_k, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones de densidad de distribuciones de máxima entropía (en adelante, se denotarán como distribuciones *ME*) según el tipo de información parcial conocida sobre  $p$ . Se supondrá que la distribución natural no informativa es  $\pi_0(p) = 1$  (Geisser, 1984, [71]) y que  $p \in [c, d]$ , donde

$$0 \leq c < d \leq 1.$$

- Sin información parcial conocida, es evidente que la densidad de máxima entropía es  $U[c, d]$ , es decir,  $\pi^*(p) = 1/(d - c)$ .
- Si se requiere que la distribución a priori sea  $\varepsilon$ -imparcial, donde  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ , entonces la densidad de máxima entropía es una densidad uniforme definida a trozos

$$\pi^*(p) = \begin{cases} \varepsilon/(p_\alpha - c) & \text{si } c \leq p \leq p_\alpha, \\ (1 - 2\varepsilon)/(p_\beta - p_\alpha) & \text{si } p_\alpha < p < p_\beta, \\ \varepsilon/(d - p_\beta), & \text{si } p_\beta \leq p \leq d. \end{cases} \quad (4.9)$$

- Si  $\rho_{\gamma_i} \in (c, d)$  es el cuantil  $\gamma_i$  de  $p$ , con  $i = 1, \dots, m$ , donde  $\gamma_{i-1} < \gamma_i < \gamma_{i+1}$  (se considera que  $\gamma_0 = 0$  y  $\gamma_{m+1} = 1$ ), la densidad de máxima entropía es

$$\pi^*(p) = \frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{\rho_{\gamma_i} - \rho_{\gamma_{i-1}}}, \quad \rho_{\gamma_{i-1}} < p < \rho_{\gamma_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.10)$$

- Si  $E^\pi[p] = \mu_1$ , entonces la densidad de máxima entropía es

$$\pi^*(p) = \pi^*(p; \lambda, c, d) = \frac{\lambda \exp(-\lambda p)}{\exp(-\lambda c) - \exp(-\lambda d)}, \quad c \leq p \leq d, \quad (4.11)$$

donde el parámetro  $\lambda$  viene determinado por la condición  $E^{\pi^*}[p] = \mu_1$ , en la cual

$$E^{\pi^*}[p] = E[p \mid \pi^*(p; \lambda, c, d)] = \frac{(1 + \lambda c) \exp(-\lambda c) - (1 + \lambda d) \exp(-\lambda d)}{\lambda \{ \exp(-\lambda c) - \exp(-\lambda d) \}}. \quad (4.12)$$

Se puede observar que si  $\lambda < 0$  la distribución es exponencial uniparamétrica

truncada. Si  $\lambda \rightarrow 0$ , la distribución tiende a ser  $U[c, d]$ .

- Si  $E^\pi[p] = \mu_1$  y, además, se exige que la distribución sea  $\varepsilon$ -imparcial, donde  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ , entonces la densidad de máxima entropía es

$$\pi^*(p) = \begin{cases} \varepsilon\pi^*(p; \lambda, c, p_\alpha) & \text{si } c \leq p \leq p_\alpha, \\ (1 - 2\varepsilon)\pi^*(p; \lambda, p_\alpha, p_\beta) & \text{si } p_\alpha < p < p_\beta, \\ \varepsilon\pi^*(p; \lambda, p_\beta, d) & \text{si } p_\beta \leq p \leq d. \end{cases} \quad (4.13)$$

donde  $\pi^*(p; \lambda, \cdot, \cdot)$  es la densidad definida en (4.11). En esta situación, el parámetro  $\lambda$  queda determinado por  $E^{\pi^*}[p] = \mu_1$ , donde

$$E^{\pi^*}[p] = \varepsilon E[p | \pi^*(p; \lambda, c, p_\alpha)] + (1 - 2\varepsilon)E[p | \pi^*(p; \lambda, p_\alpha, p_\beta)] + \varepsilon E[p | \pi^*(p; \lambda, p_\beta, d)],$$

y  $E[p | \pi^*(p; \lambda, \cdot, \cdot)]$  está definido en (4.12).

- Si  $E^\pi[p] = \mu_1$  y  $Var^\pi[p] = \sigma_1^2$ , entonces la densidad de máxima entropía es

$$\pi^*(p) = \pi^*(p; \lambda_1, \lambda_2, c, d) = \frac{\exp(\lambda_2[p - \{\mu_1 - \lambda_1/(2\lambda_2)\}]^2)}{\int_c^d \exp(\lambda_2[p' - \{\mu_1 - \lambda_1/(2\lambda_2)\}]^2) dp'}, \quad c \leq p \leq d, \quad (4.14)$$

que corresponde a una distribución normal truncada de media  $\mu = \mu_1 - \lambda_1/(2\lambda_2)$  y varianza  $\sigma^2 = -1/(2\lambda_2)$ , es decir

$$\pi^*(p) = \pi^*(p; \lambda_1, \lambda_2, c, d) = \frac{\phi\{(p - \mu)/\sigma\}}{\sigma[\Phi\{(d - \mu)/\sigma\} - \Phi\{(c - \mu)/\sigma\}]}, \quad c \leq p \leq d. \quad (4.15)$$

**Tabla 4.2:** Comparativa de métodos iterativos de resolución de ecuaciones

Información a priori	Algoritmo	Iteraciones	Tiempo (seg.)
$\mu_1$ conocido	Gauss-Newton	3.8	0.016
	Levenberg-Marquardt	3.8	0.012
	Región de confianza	7.0	0.024
$\mu_1$ y $\sigma_1$ conocidos	Gauss-Newton	2	0.047
	Levenberg-Marquardt	2	0.046
	Región de confianza	18.0	0.609

Se puede comprobar que

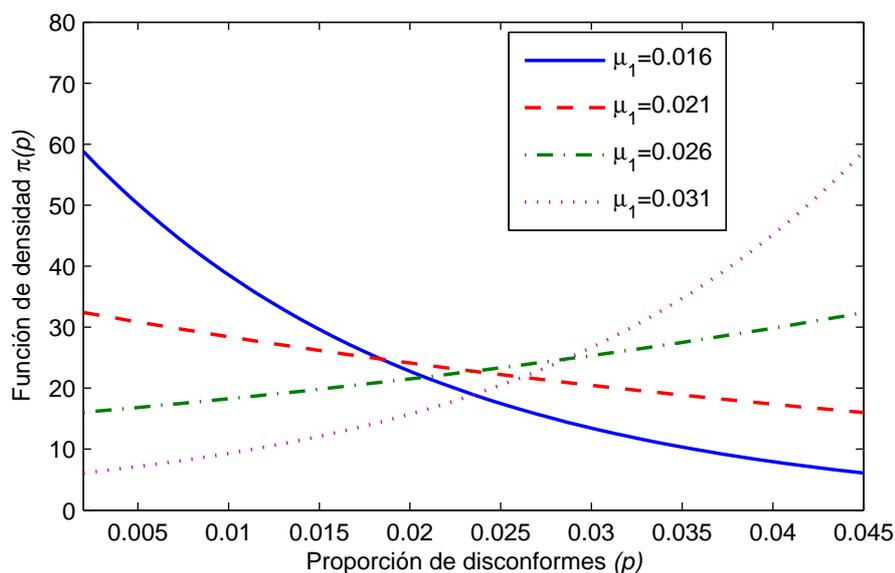
$$\begin{cases} E^\pi[p] &= \mu - \sigma \frac{\phi(\xi_1) - \phi(\xi_0)}{\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0)}, \\ Var^\pi[p] &= \sigma^2 \left[ 1 + \frac{\xi_0 \phi(\xi_0) - \xi_1 \phi(\xi_1)}{\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0)} - \left( \frac{\phi(\xi_1) - \phi(\xi_0)}{\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_0)} \right)^2 \right], \end{cases} \quad (4.16)$$

donde  $\xi_0 = (c - \mu)/\sigma$  y  $\xi_1 = (d - \mu)/\sigma$ .

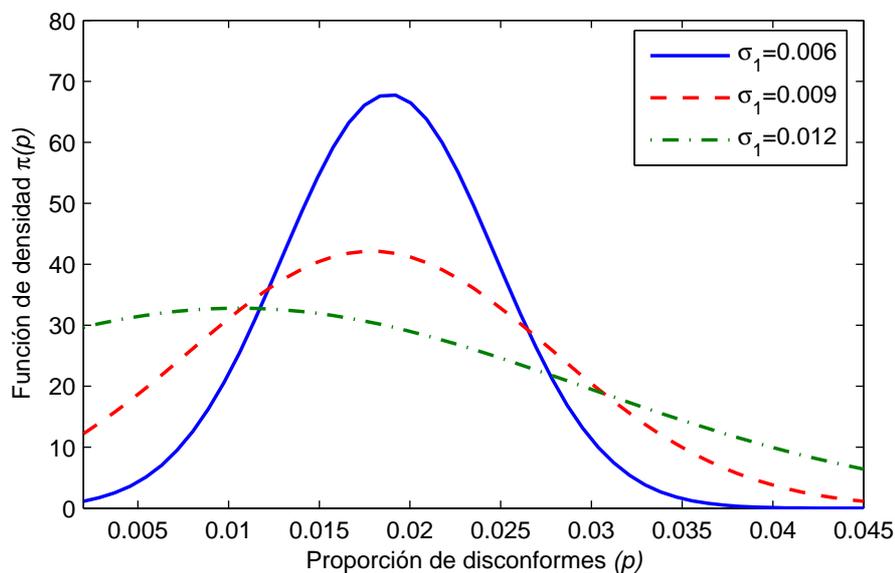
### Ejemplo (continuación)

De nuevo, consideramos el proceso de fabricación de un producto (e.g., cable de tendido eléctrico XLPE) con  $p \in [c, d]$ , donde  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$ . La Figura 4.7 presenta algunas curvas de densidad de máxima entropía cuando la media  $\mu_1$  de  $p$  es conocida. Si, además, se conoce la varianza  $\sigma_1^2$  de  $p$  entonces las correspondientes curvas de densidad de máxima entropía se muestran en la Figura 4.8.

El método de Gauss-Newton también resulta aceptable para determinar completamente la distribución de máxima entropía. Como se aprecia en la Tabla 4.2, este algoritmo muestra buenos resultados de convergencia al realizar la comparación con otras técnicas de resolución.



**Figura 4.7:** Curvas de densidad de la distribución exponencial de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y media  $\mu_1 = 0.016$  (línea sólida),  $\mu_1 = 0.021$  (línea discontinua),  $\mu_1 = 0.026$  (línea de puntos y discontinua) y  $\mu_1 = 0.031$  (línea de puntos)



**Figura 4.8:** Curvas de densidad de la distribución normal de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ , media  $\mu_1 = 0.019$  y desviación típica  $\sigma_1 = 0.006$  (línea sólida),  $\sigma_1 = 0.009$  (línea discontinua) y  $\sigma_1 = 0.012$  (línea de puntos y discontinua).

#### 4.2.4. Distribución beta generalizada de máxima entropía

En ciertas situaciones puede resultar conveniente determinar la distribución de máxima entropía en una clase particular. Por ejemplo, la región factible de soluciones del problema (4.8) se podría restringir a la familia de distribuciones beta generalizada. En adelante, dicha distribución beta generalizada de máxima entropía se denotará como *MEBG*. A continuación se describen algunos tipos de información a priori disponible acerca de esta distribución y el planteamiento del correspondiente problema de optimización que permite su obtención.

- Si suponemos que la distribución de  $p$  es imparcial, se trata de resolver en  $a$ ,  $b$  y  $r$  el problema de optimización con restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{máx}_h \quad -E^h[\log h(p)] \\ \text{sujeto a} \quad H(p_\alpha; a, b, c, d, r) = \varepsilon, \\ \quad \quad \quad 1 - H(p_\beta; a, b, c, d, r) = \varepsilon, \\ \quad \quad \quad a > 0, b > 0, r < 1, \end{array} \right. \quad (4.17)$$

donde  $h(p)$  y  $H(p)$  vienen dadas por (4.1) y (4.2), respectivamente.

- Cuando se conoce el valor  $\mu_1$  de la media de  $p$ , el problema a resolver para determinar los parámetros de la distribución *MEBG* se define de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{máx}_h \quad -E^h[\log h(p)] \\ \text{sujeto a} \quad E^h[p \mid a, b, c, d, r] = \mu_1, \\ \quad \quad \quad a > 0, b > 0, r < 1. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

- Si sabemos que la media y la varianza de  $p$  es  $\mu_1$  y  $\sigma_1^2$ , respectivamente, el

**Tabla 4.3:** Comparativa de métodos iterativos de optimización

Problema a resolver	Algoritmo	Iteraciones	Tiempo (seg.)
(4.17)	Quasi-Newton	6.0	12.151
	Otros <sup>(*)</sup>	23.8	7.511
(4.18)	Quasi-Newton	5.5	20.113
	Otros <sup>(*)</sup>	39.8	32.324
(4.19)	Quasi-Newton	3.0	19.281
	Otros <sup>(*)</sup>	37.0	20.235

(\*) Sección áurea, Nelder-Mead

siguiente problema permite hallar la correspondiente distribución *MEBG*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{máx}_h \quad -E^h[\log h(p)] \\ \text{sujeto a} \quad E^h[p \mid a, b, c, d, r] = \mu_1, \\ \quad \quad \quad \text{Var}^h[p \mid a, b, c, d, r] = \sigma_1^2, \\ \quad \quad \quad a > 0, b > 0, r < 1. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

En esta situación, la solución de los problemas (4.17), (4.18) y (4.19) se obtiene mediante un método de optimización Quasi-Newton (descrito en el Apéndice B). La Tabla 4.3 recoge un análisis de diferentes ejemplos de los problemas mencionados, así como los datos de convergencia de este método. En la comparación con otros algoritmos de optimización, se observan buenos resultados en la resolución de estos problemas.

### 4.2.5. Otras distribuciones a priori

Obviamente, es posible utilizar otras distribuciones a priori de  $p$  en los diseños de planes de muestreo. Por ejemplo, si  $Z$  es una variable aleatoria con distribución  $N(\mu_z, \sigma_z)$ , entonces la función de densidad de  $p_1 = \{c + d \exp(Z)\} / \{1 + \exp(Z)\}$  es

$$h_1(p) = \frac{\exp[-(\log\{(p-c)/(d-p)\} - \mu_z)^2 / (2\sigma_z)]}{(p-c)(d-p)\sqrt{2\pi\sigma_z}}, \quad c < p < d.$$

Por otro lado, si  $Z$  es una variable aleatoria  $Gamma(\alpha_z, \beta_z)$ , donde  $\alpha_z > 0$  y  $\beta_z > 0$  son los parámetros de forma y escala, respectivamente, la densidad de  $p_2 = c + (d-c) \exp(-Z)$  es

$$h_2(p) = \frac{(p-c)^{1/\beta_z-1} [\log\{(d-c)/(p-c)\}]^{\alpha_z-1}}{\beta_z^{\alpha_z} \Gamma(\alpha_z) (d-c)^{1/\beta_z}}, \quad c < p < d.$$

Es posible determinar otra familia general de densidades a priori definidas en  $(c, d)$  de la siguiente forma. Si  $g(\cdot)$  y  $G(\cdot)$  son funciones de densidad y de distribución acumuladas, respectivamente, del tipo de localización y escala, entonces la densidad sería

$$h_3(p) = \frac{g[G_0^{-1}(p)]/g_0[G_0^{-1}(p)]}{G[G_0^{-1}(d)] - G[G_0^{-1}(c)]}, \quad c < p < d,$$

donde  $g_0(\cdot)$  y  $G_0(\cdot)$  denotan las correspondientes funciones estandarizadas. Es preciso observar que, si  $z = G_0^{-1}(p)$ , entonces

$$\int_c^d \frac{g[G_0^{-1}(p)]}{g_0[G_0^{-1}(p)]} dp = \int_{G_0^{-1}(c)}^{G_0^{-1}(d)} g(z) dz = G[G_0^{-1}(d)] - G[G_0^{-1}(c)].$$

En ocasiones, una función simple de densidad puede que no resulta apropiada para recoger con suficiente precisión el conocimiento previo disponible sobre  $p$ , en especial si dicha información es aportada por varias fuentes (ingenieros, auditores de calidad, etc.). Sin embargo, una mixtura finita de distribuciones a priori puede ser bastante flexible. De hecho, la utilización de mixturas de distribuciones discretas suponen un método fácil y conveniente de combinar las opiniones de varios expertos sobre  $p$  sin la necesidad de elegir una distribución a priori por consenso. Además, hay que señalar que cualquier densidad a priori arbitraria puede ser aproximada por mixturas de distribuciones naturales conjugadas (véase Dalal y Hall, 1983, [41]). En particular, la información a priori de  $p$  puede ser descrita de forma apropiada por una mixtura finita de distribuciones  $BG$ .

### 4.3. Diseños óptimos utilizando riesgos promedios

Si denotamos por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  las decisiones de aceptación y rechazo del lote, respectivamente, los riesgos promedios de un plan de muestro se definen de la forma siguiente:

**Definición 4.1.** *El riesgo promedio del productor se define como la probabilidad promedio de rechazar un lote o un proceso satisfactorio, i.e. aquellos con  $p \leq p_\alpha$ , y se expresa como  $APR \equiv \Pr(\mathcal{R} \mid p \leq p_\alpha)$ . Por otro lado, el riesgo promedio del consumidor es la probabilidad promedio de aceptar un lote o proceso no satisfactorio, i.e. con  $p \geq p_\beta$ , en cuyo caso se expresa como  $ACR \equiv \Pr(\mathcal{A} \mid p \geq p_\beta)$ .*

Conviene mencionar que el productor y el consumidor pueden estar de acuerdo en una determinada distribución a priori sobre  $p$ . Sin embargo, es posible que ambos especifiquen distribuciones diferentes. En general, se denotarán por  $h_1(p)$  y  $H_1(p)$

( $h_2(p)$  y  $H_2(p)$ ) las funciones de densidad y de distribución seleccionadas por el productor (consumidor), respectivamente. Por tanto, el riesgo promedio del productor viene dado por

$$APR \equiv E^{h_1}[1 - L(p) \mid p \leq p_\alpha] = 1 - \frac{1}{H_1(p_\alpha)} \int_c^{p_\alpha} L(p)h_1(p)dp,$$

mientras que el riesgo promedio del consumidor se calcula como

$$ACR \equiv E^{h_2}[L(p) \mid p \geq p_\beta] = \frac{1}{\{1 - H_2(p_\beta)\}} \int_{p_\beta}^d L(p)h_2(p)dp,$$

supuesto que  $p \in [c, d]$  y  $L(p)$  es la curva OC tal y como se ha expresado en los Capítulos 2 y 3 para los distintos casos de la distribución de la variable  $T$ . Cabe recordar que, en general, la expresión  $L(p)$  de la curva OC depende del tamaño muestral,  $n$ , del número de observaciones no censuradas,  $m$ , y de la constante de aceptación,  $k$ . Para planes con censura progresiva hay que especificar, además, el esquema de censura,  $\mathbf{R}$ . Si se trata de diseños con censura de tipo II sólo se necesita fijar el porcentaje de censura,  $q$ . En particular, en este capítulo presentamos los diseños con censura de tipo II. Dichos planes utilizarían la curva OC  $L(p) \equiv L(p; n, m, k)$  que se obtiene a partir de los MLEs de  $\mu$  y  $\sigma$ .

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los riesgos promedios que, como mucho, están dispuestos a tolerar el productor y el consumidor, respectivamente. Entonces, el plan de muestreo ha de satisfacer las siguientes inecuaciones

$$E^{h_1}[1 - L(p; n, m, k) \mid p \leq p_\alpha] \leq \alpha \quad \text{y} \quad E^{h_2}[L(p; n, m, k) \mid p \geq p_\beta] \leq \beta. \quad (4.20)$$

---

**Procedimiento 4.1:** Diseño óptimo general del plan de muestreo con riesgos promedios y censura de tipo II

---

- Se fijan los valores máximos de los riesgos promedios,  $\alpha$  y  $\beta$ , y los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , así como las densidades a priori,  $h_1(p)$  y  $h_2(p)$ , del productor y el consumidor, respectivamente. Además, se selecciona también el porcentaje de censura,  $q \in [0, 1)$ .
- Considerando que  $m_0 = n_0(1 - q)$ , se halla la solución  $(n_0, k_0)$  del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} E^{h_1}[1 - L(p; n_0, m_0, k_0) \mid p \leq p_\alpha] &= \alpha, \\ E^{h_2}[L(p; n_0, m_0, k_0) \mid p \geq p_\beta] &= \beta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

- El tamaño muestral mínimo es  $n = \lceil n_0 \rceil$ . Si  $q = 0$ , entonces  $m = n$ , y si  $q \neq 0$ :
  - se selecciona  $m = \lfloor (1 - q)n_0 \rfloor$  cuando  $(n, m)$  verifica las condiciones (4.20).
  - en otro caso,  $m = \lceil (1 - q)n_0 \rceil$ .
- La constante de aceptación  $k$  puede ser cualquier valor del intervalo  $[k_\beta, k_\alpha]$ , donde

$$\begin{aligned} E^{h_1}[1 - L(p; n, m, k_\alpha) \mid p \leq p_\alpha] &= \alpha, \\ E^{h_2}[L(p; n, m, k_\beta) \mid p \geq p_\beta] &= \beta. \end{aligned}$$

Una elección razonable para  $k$  podría ser  $k^* = (k_\beta + k_\alpha)/2$ .

---

Aplicando el Procedimiento 4.1 es posible obtener el diseño  $(n, m, k)$  del plan de muestreo con menor tamaño muestral (diseño óptimo) y censura de tipo II. De nuevo,  $\lceil x \rceil$  y  $\lfloor x \rfloor$  denotan el menor entero mayor o igual a  $x$  así como la parte entera de  $x$ , respectivamente.

En la Sección 4.4 se obtienen los diseños cuando la distribución de la variable tiempo de vida,  $T$ , es exponencial y en la Sección 4.5 se analizan los planes log-normales y de Weibull. En general, las distribuciones a priori de  $p$  que se utilizarán son la beta generalizada y las de máxima entropía.

Hay que señalar que si se considera una distribución a priori degenerada en  $p_\alpha$  y

$p_\beta$ , es decir, si

$$\Pr(p = p_\alpha \mid p \leq p_\alpha) = \Pr(p = p_\beta \mid p \geq p_\beta) = 1,$$

el plan óptimo con riesgos promedios coincide con el diseño basado en riesgos clásicos que se ha estudiado en los Capítulos 2 y 3.

El ejemplo siguiente fija los requisitos que se utilizarán para determinar los planes de muestreo con riesgos promedios. De esta forma, se podrán efectuar comparaciones entre los diseños correspondientes a diferentes distribuciones de  $T$  y de  $p$ . En general, como se puede apreciar en las ecuaciones (4.21) del Procedimiento 4.1, no siempre será posible hallar la solución  $(n_0, k_0)$  de forma explícita para dos distribuciones  $h_1(p)$  y  $h_2(p)$ . Cuando se tienen distribuciones no degeneradas, se deben emplear métodos iterativos. Si  $T$  sigue una distribución exponencial, las aproximaciones utilizadas en los planes de muestreo del Capítulo 2 proporcionan una elección adecuada del valor inicial. Si la distribución es log-normal o de Weibull, dicho valor se puede obtener a partir de las ecuaciones (3.6) que aparecen en el Capítulo 3.

### **Ejemplo (continuación)**

Se desean obtener los planes con riesgos promedios para el muestreo de aceptación de la fiabilidad de un producto (por ejemplo, el cable de tendido eléctrico con aislamiento XLPE). En adelante, consideramos que el productor especifica un riesgo máximo  $\alpha = 0.05$  para un nivel de calidad  $p_\alpha = 0.01$  mientras que el consumidor fija el riesgo  $\beta = 0.10$  para un nivel  $p_\beta = 0.03$ . De nuevo,  $p \in [c, d]$ , donde  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$ . Se supondrá que tanto el productor como el consumidor están de acuerdo en establecer la misma distribución a priori de  $p$ . Para determinar los diseños óptimos con distintas distribuciones a priori se utilizará el Procedimiento 4.1 y los

riesgos promedios simulados se podrán calcular mediante el Procedimiento B.5. En este caso, se generan una muestra de  $N_1 = 2000$  valores de  $p$  y  $N_2 = 2000$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $T$  (diseños exponenciales) o de  $X$  (diseños log-normal y de Weibull).

## 4.4. Diseños óptimos para la distribución exponencial

En esta sección se deducen los planes de muestreo óptimos con censura de tipo II cuando  $T$  sigue una distribución exponencial. Mediante un ejemplo ilustrativo, se muestran dichos diseños en diferentes tablas utilizando las distribuciones a priori consideradas en la Sección 4.2.

### 4.4.1. Caso uniparamétrico

Cuando  $T$  sigue una distribución exponencial uniparamétrica, la curva  $L(p; m, k)$  viene dada por la expresión (2.6), la cual no depende del tamaño muestral  $n$  ( $\geq m$ ). La elección de  $n$  se ha de realizar atendiendo a otros criterios. El plan de muestreo viene determinado por el número de observaciones y la constante de aceptación. El diseño clásico óptimo con riesgos máximos  $\alpha$  y  $\beta$  en los niveles de calidad  $p^{(1)}$  y  $p^{(2)}$ , respectivamente, satisface las condiciones

$$1 - L(p^{(1)}; m', k') \leq \alpha \quad \text{y} \quad L(p^{(2)}; m', k') \geq \beta. \quad (4.22)$$

Supongamos, a partir de las especificaciones anteriores, que dicho diseño óptimo se denota como  $m' = m(p^{(1)}, p^{(2)})$  y  $k' = k(p^{(1)}, p^{(2)})$ .

Si existe una distribución a priori con  $p \in [c, d]$ , donde  $0 \leq c \leq p_\alpha < p_\beta \leq d \leq 1$ ,

el valor de  $m$  del plan de muestreo óptimo con riesgos promedios máximos  $\alpha$  y  $\beta$  en los correspondientes niveles de calidad  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , verifica

$$m_l = m(c, d) \leq m \leq m_u = m(p_\alpha, p_\beta),$$

es decir,  $m_l = m(c, d)$  y  $m_u = m(p_\alpha, p_\beta)$  son una cota inferior y superior de  $m$ , respectivamente. La Tabla 4.4 muestra los valores  $m_u$  para  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$  y los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  de la Tabla X-K-1 del estándar ANSI Z1.4 (1993, [3]). Además, para ilustrar la posible variación potencial de  $m$  en el diseño con riesgos promedios, se calcula  $m_l$  cuando  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$ . En este caso,  $p_{lag}$  representa un 80% del valor de  $p_\alpha$ .

Se puede apreciar claramente que las mayores diferencias posibles en el valor de  $m$  se observan para porcentajes altos de  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  (niveles de calidad menos restrictivos), puesto que la separación entre ambos niveles es mayor.

#### **Ejemplo (continuación)**

Supongamos que el tiempo de vida del cable eléctrico XLPE sigue una distribución  $Exp(0, \sigma)$ . La Figura 4.9 ilustra la variación de  $m(c, d)$  cuando  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$ , donde  $0 < p_{lag} < 0.8p_\alpha$ . El cálculo de  $m(c, d)$  se realiza a partir de la aproximación (2.15) correspondiente al diseño  $(m, k)_I$  descrito en el Capítulo 2. Dicha aproximación ha demostrado ser suficientemente precisa y cercana al valor exacto de  $m$ . La Figura 4.9 ilustra la reducción que se puede alcanzar en el valor de  $m$  cuando se elige un intervalo amplio para los valores de  $c$  y  $d$ .

En particular, el diseño óptimo con distribución a priori degenerada en  $p_\alpha$  y  $p_\beta$

**Tabla 4.4:** Valores de  $m_l$  y  $m_u$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $c = p_\alpha - p_{lag}$ ,  $d = p_\beta + p_{lag}$  y  $p_{lag} = 0.8p_\alpha$

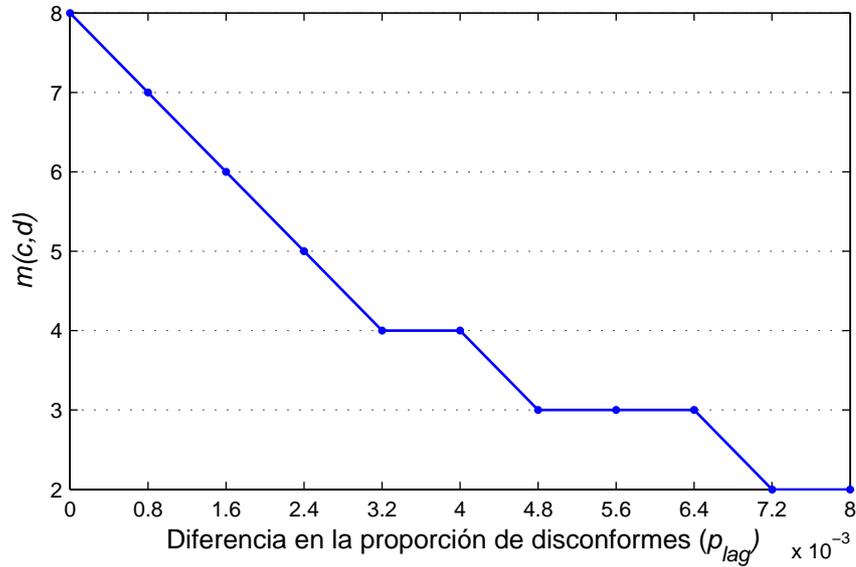
$p_\alpha$	$p_\beta$	$m_l$	$m_u$
0.00041	0.01840	1	1
0.00284	0.03110	1	2
0.00654	0.04260	2	3
0.01090	0.05350	2	4
0.02090	0.07420	2	6
0.03190	0.09420	2	8
0.03760	0.10400	2	9
0.04940	0.12300	2	11
0.06150	0.14200	2	12
0.07400	0.16100	2	14
0.09950	0.19800	2	17
0.11900	0.22500	2	19

(diseño clásico), es

$$(m, k) = (8, -0.0204). \quad (4.23)$$

A continuación, se recogen en varias tablas los diseños óptimos con riesgos promedios para las distribuciones a priori de  $p$  estudiadas en la Sección 4.2. En general, en estos planes se puede apreciar una disminución considerable del valor de  $m$  y, por tanto, del tamaño muestral, con respecto al diseño clásico (4.23).

La Tabla 4.5 presenta los diseños óptimos cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial para diferentes valores de  $r$  y  $\varepsilon$ . Aunque los tamaños muestrales son bastante reducidos, se observa una mayor disminución de  $m$  para valores altos de  $\varepsilon$ . Sin embargo, no existen diferencias entre los diseños para distintos valores del parámetro  $r$  de la distribución con  $\varepsilon$  fijo. Por otro lado, en las Tablas 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran los



**Figura 4.9:** Variación de  $m(c, d)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$

diseños cuando  $p$  sigue las distribuciones  $BG$  no imparcial,  $ME$  y  $MEBG$ , respectivamente. Considerando las especificaciones utilizadas en este ejemplo, los planes para estas distribuciones a priori son prácticamente similares entre sí.

Con el propósito de verificar el cumplimiento de los requisitos prefijados de antemano, se toman como referencia los diseños de la Tabla 4.5 y se calculan sus riesgos simulados  $APR_{sim}$  y  $ACR_{sim}$ . Podemos señalar que dichos riesgos verifican, de forma general, las condiciones (4.20). Es necesario comentar que en los diseños con  $\varepsilon > 0.2$  los tamaños muestrales son muy bajos y los riesgos resultantes son bastante inferiores a los valores máximos  $\alpha$  y  $\beta$ .

#### 4.4.2. Caso biparamétrico

Cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  la curva OC  $L(p; n, m, k)$  del plan de muestreo con censura de tipo II viene dada por la expresión (2.11). Si  $p^{(1)}$  y  $p^{(2)}$  son los niveles de calidad

**Tabla 4.5:** Diseños óptimos  $(m, k)$  y riesgos simulados  $(APR_{sim}, ACR_{sim})$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$m$	$k$	$APR_{sim}$	$ACR_{sim}$
0	0.1	5	-0.0207	0.043	0.109
	0.2	4	-0.0210	0.044	0.097
	0.3	3	-0.0213	0.050	0.094
	0.4	3	-0.0196	0.032	0.053
0.5	0.1	5	-0.0205	0.043	0.107
	0.2	4	-0.0206	0.044	0.087
	0.3	3	-0.0209	0.038	0.077
	0.4	3	-0.0193	0.034	0.080
-0.5	0.1	5	-0.0209	0.044	0.093
	0.2	4	-0.0212	0.045	0.079
	0.3	4	-0.0203	0.041	0.085
	0.4	3	-0.0197	0.040	0.074
0.9	0.1	5	-0.0202	0.043	0.100
	0.2	4	-0.0201	0.038	0.089
	0.3	3	-0.0203	0.049	0.077
	0.4	3	-0.0190	0.037	0.058
-0.9	0.1	5	-0.0210	0.045	0.103
	0.2	4	-0.0213	0.045	0.086
	0.3	4	-0.0205	0.043	0.089
	0.4	3	-0.0198	0.039	0.084

**Tabla 4.6:** Diseños óptimos  $(m, k)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$m$	$k$
0	0.4	0.2	3	-0.0206
	0.5	0.2	3	-0.0194
	0.2	0.4	4	-0.0208
	0.2	0.5	3	-0.0219
0.9	0.4	0.2	3	-0.0196
	0.5	0.2	3	-0.0185
	0.2	0.4	4	-0.0199
	0.2	0.5	3	-0.0210
-0.9	0.4	0.2	3	-0.0210
	0.5	0.2	3	-0.0198
	0.2	0.4	4	-0.0212
	0.2	0.5	3	-0.0223

fijados por el productor y el consumidor, respectivamente, el diseño clásico óptimo con riesgos máximos  $\alpha$  y  $\beta$  verifica las siguientes condiciones

$$1 - L(p^{(1)}; n', m', k') \leq \alpha \quad \text{y} \quad L(p^{(2)}; n', m', k') \geq \beta. \quad (4.24)$$

**Tabla 4.7:** Diseños óptimos  $(m, k)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$m$	$k$
-	-	0.1	4	-0.0210
		0.2	4	-0.0210
		0.3	4	-0.0210
		0.4	4	-0.0210
0.019	-	-	4	-0.0206
0.019	-	0.1	4	-0.0204
		0.2	4	-0.0201
		0.3	4	-0.0196
		0.4	4	-0.0190
0.019	0.012	-	4	-0.0206

**Tabla 4.8:** Diseños óptimos  $(m, k)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución beta generalizada de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$m$	$k$
-	-	0.1	5	-0.0207
		0.2	4	-0.0212
		0.3	4	-0.0204
		0.4	3	-0.0188
0.019	-	-	4	-0.0206
0.019	0.012	-	4	-0.0206

En esta situación, consideremos que el diseño óptimo se expresa como  $n' = n(p^{(1)}, p^{(2)})$ ,  $m' = m(p^{(1)}, p^{(2)})$  y  $k' = k(p^{(1)}, p^{(2)})$ .

Se puede comprobar que, para una distribución a priori con  $p \in [c, d]$ , donde  $0 \leq c \leq p_\alpha < p_\beta \leq d \leq 1$ , las cotas de  $n$  y  $m$  del diseño óptimo con riesgos promedios máximos  $\alpha$  y  $\beta$  en los correspondientes niveles de calidad  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  son

$$n_l = n(c, d) \leq n \leq n_u = n(p_\alpha, p_\beta),$$

y

$$m_l = m(c, d) \leq m \leq m_u = m(p_\alpha, p_\beta).$$

En la Tabla 4.9 se observa la diferencia entre las cotas anteriores de  $n$  y  $m$  con varios niveles de censura  $q$ . De nuevo, se calcula  $n_l = n(c, d)$  y  $m_l = m(c, d)$  cuando

**Tabla 4.9:** Valores de  $(n_l, m_l)$  y  $(n_u, m_u)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $c = p_\alpha - p_{lag}$ ,  $d = p_\beta + p_{lag}$  y  $p_{lag} = 0.8p_\alpha$

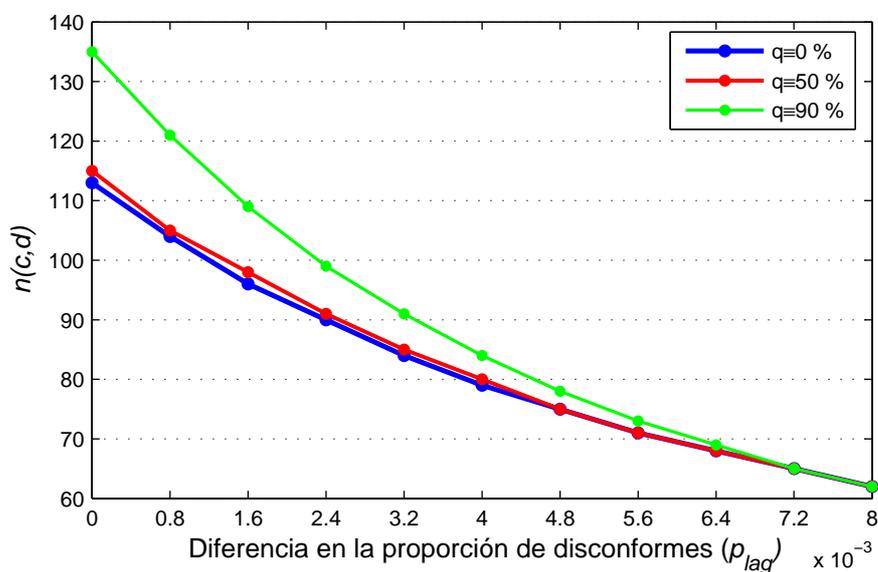
$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)					
		0%		50%		90%	
		$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$
0.00041	0.01840	(120, 120)	(124, 124)	(120, 59)	(124, 61)	(120, 11)	(124, 12)
0.00284	0.03110	(68, 68)	(79, 79)	(68, 33)	(79, 39)	(68, 6)	(79, 7)
0.00654	0.04260	(48, 48)	(62, 62)	(48, 23)	(62, 30)	(48, 4)	(65, 6)
0.01090	0.05350	(37, 37)	(52, 52)	(37, 18)	(53, 26)	(37, 3)	(60, 6)
0.02090	0.07420	(25, 25)	(42, 42)	(25, 12)	(43, 21)	(25, 2)	(65, 7)
0.03190	0.09420	(19, 19)	(36, 36)	(19, 9)	(39, 19)	(19, 2)	(78, 8)
0.03760	0.10400	(17, 17)	(34, 34)	(17, 8)	(37, 18)	(18, 2)	(86, 9)
0.04940	0.12300	(14, 14)	(32, 32)	(14, 6)	(36, 18)	(16, 2)	(103, 11)
0.06150	0.14200	(12, 12)	(30, 30)	(12, 5)	(36, 17)	(16, 2)	(119, 12)
0.07400	0.16100	(10, 10)	(29, 29)	(10, 4)	(36, 18)	(10, 1)	(135, 14)
0.09950	0.19800	(8, 8)	(27, 27)	(8, 3)	(38, 19)	(8, 1)	(165, 17)
0.11900	0.22500	(7, 7)	(27, 27)	(7, 3)	(41, 21)	(7, 1)	(187, 19)

$c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$  en el caso que  $p_{lag} = 0.8p_\alpha$ . Cuando los niveles de calidad  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  no son restrictivos, la Tabla 4.9 muestra que las diferencias entre los valores de  $n$  y los de  $m$  son bastante grandes, sobre todo para niveles altos de censura.

### Ejemplo (continuación)

En esta ocasión, se considera que  $T$  sigue una distribución exponencial  $Exp(\mu, \sigma)$ . En la Figura 4.10 se puede observar como varía el tamaño muestral  $n(c, d)$  para diferentes niveles de censura  $q$  cuando  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$ , donde  $0 < p_{lag} < 0.8p_\alpha$ . Si la diferencia de los valores de  $c$  y  $d$  se amplía con respecto a  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  se consigue una mayor disminución de  $n$  y  $m$ . Además, cuando  $p_{lag}$  aumenta, los tamaños muestrales convergen a un mismo valor con independencia del nivel de censura  $q$ .

Los diseños óptimos  $(n, m, k)$  con distribución a priori degenerada en  $p_\alpha$  y  $p_\beta$



**Figura 4.10:** Variación de  $n(c, d)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$

(diseños clásicos) son

$$(113, 113, -0.01004), \quad (115, 57, -0.01044) \quad \text{y} \quad (135, 14, -0.01339),$$

cuando  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$ , respectivamente.

Las Tablas 4.10 hasta 4.14 recogen los correspondientes diseños óptimos  $(n, m, k)$  para diferentes distribuciones a priori de  $p$  y con varios niveles de censura. En general, los diseños de estas tablas se caracterizan por una reducción significativa del tamaño muestral en comparación con los diseños clásicos.

Los planes imparciales de la Tabla 4.10 para un nivel de censura dado presentan diferencias cuando cambia el valor de  $\varepsilon$  y el valor de  $r$  se mantiene fijo. La variación del tamaño muestral  $n$  se aprecia, también, en los diseños no imparciales de la Tabla 4.11, así como en los planes *MEBG* imparciales de la Tabla 4.14. Sin embargo, en este

ejemplo, los diseños de ambas tablas apenas tienen modificaciones cuando cambia el valor del parámetro  $r$ .

Tampoco existen diferencias entre los diseños de las Tablas 4.12 y 4.13 cuando la media y/o la varianza de  $p$  son conocidas. Cabe destacar la alta similitud entre los tamaños muestrales de los diseños sin censura y con  $q \equiv 50\%$ . Si la censura alcanza el 90% se obtienen cambios de mayor magnitud en el tamaño muestral de ciertos planes.

Para evaluar el ajuste a las especificaciones de los diseños, se toman como referencia los planes de la Tabla 4.10 y se calculan los riesgos promedios simulados con el Procedimiento B.5. Es necesario señalar que al utilizar la expresión (2.11) de la curva OC se pueden determinar los riesgos de forma exacta y, de este modo, el Procedimiento 4.1 permite deducir el diseño óptimo exacto del plan de muestreo. En efecto, tal y como se observa en la Tabla 4.10, las desviaciones de los riesgos promedios con respecto a  $\alpha$  y  $\beta$  son mínimas y, por tanto, se consideran aceptables a efectos del muestreo de aceptación.

## 4.5. Diseños óptimos aproximados para las distribuciones log-normal y de Weibull

En el Capítulo 3 se obtiene la expresión general (3.4) de la curva OC aproximada  $L(p; n, m, k)$  cuando la censura es de tipo II y  $X = \log(T)$  sigue una distribución de localización y escala. Por tanto, es posible aplicar el Procedimiento 4.1 y determinar los planes aproximados para las distribuciones normal o de valor extremo de  $X$ .

**Tabla 4.10:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(APR_{sim}, ACR_{sim})$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ - imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0%	50%	90%
		$(n, m, k)$ $(APR_{sim}, ACR_{sim})$		
0	0.1	(91, 91, -0.00825)	(92, 45, -0.00856)	(100, 10, -0.0110)
		(0.043, 0.110)	(0.049, 0.101)	(0.052, 0.107)
	0.2	(82, 82, -0.00736)	(82, 40, -0.00750)	(88, 9, -0.00974)
		(0.051, 0.088)	(0.051, 0.107)	(0.048, 0.098)
0.3	(72, 72, -0.00603)	(73, 36, -0.00637)	(75, 7, -0.00807)	
	(0.048, 0.094)	(0.044, 0.101)	(0.052, 0.102)	
0.4	(61, 61, -0.00375)	(61, 30, -0.00383)	(64, 6, -0.00633)	
	(0.049, 0.100)	(0.051, 0.094)	(0.051, 0.096)	
0.5	0.1	(92, 92, -0.00820)	(92, 45, -0.00835)	(101, 10, -0.0109)
		(0.042, 0.100)	(0.049, 0.099)	(0.052, 0.096)
	0.2	(83, 83, -0.00725)	(83, 41, -0.00738)	(88, 9, -0.00941)
		(0.046, 0.104)	(0.048, 0.102)	(0.048, 0.095)
0.3	(73, 73, -0.00593)	(73, 36, -0.00604)	(76, 7, -0.00790)	
	(0.053, 0.101)	(0.052, 0.108)	(0.052, 0.106)	
0.4	(61, 61, -0.00353)	(61, 30, -0.00360)	(65, 6, -0.00666)	
	(0.049, 0.094)	(0.059, 0.093)	(0.050, 0.088)	
-0.5	0.1	(90, 90, -0.00824)	(91, 45, -0.00854)	(100, 10, -0.0112)
		(0.052, 0.096)	(0.047, 0.098)	(0.052, 0.108)
	0.2	(81, 81, -0.00736)	(82, 40, -0.00768)	(87, 9, -0.00979)
		(0.053, 0.103)	(0.049, 0.108)	(0.048, 0.100)
0.3	(72, 72, -0.00623)	(72, 35, -0.00635)	(75, 7, -0.00831)	
	(0.048, 0.085)	(0.048, 0.100)	(0.050, 0.090)	
0.4	(61, 61, -0.00387)	(61, 30, -0.00396)	(63, 6, -0.00600)	
	(0.046, 0.101)	(0.048, 0.102)	(0.045, 0.100)	
0.9	0.1	(93, 93, -0.00806)	(93, 46, -0.00821)	(101, 11, -0.0104)
		(0.043, 0.108)	(0.053, 0.096)	(0.056, 0.100)
	0.2	(85, 85, -0.00718)	(85, 42, -0.00730)	(90, 9, -0.00925)
		(0.049, 0.091)	(0.052, 0.113)	(0.054, 0.101)
0.3	(75, 75, -0.00582)	(75, 37, -0.00592)	(78, 7, -0.00772)	
	(0.045, 0.100)	(0.048, 0.114)	(0.050, 0.099)	
0.4	(62, 62, -0.00341)	(62, 30, -0.00349)	(68, 6, -0.00757)	
	(0.049, 0.105)	(0.048, 0.100)	(0.050, 0.102)	
-0.9	0.1	(90, 90, -0.00831)	(91, 45, -0.00862)	(100, 10, -0.0113)
		(0.041, 0.109)	(0.045, 0.104)	(0.045, 0.096)
	0.2	(81, 81, -0.00746)	(82, 40, -0.00778)	(87, 9, -0.00991)
		(0.047, 0.097)	(0.048, 0.093)	(0.045, 0.103)
0.3	(72, 72, -0.00634)	(72, 35, -0.00646)	(75, 7, -0.00845)	
	(0.051, 0.099)	(0.047, 0.103)	(0.047, 0.090)	
0.4	(61, 61, -0.00395)	(61, 30, -0.00403)	(63, 6, -0.00602)	
	(0.050, 0.102)	(0.047, 0.103)	(0.056, 0.090)	

**Tabla 4.11:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(74, 74, -0.00589)	(74, 36, -0.00600)	(76, 8, -0.00739)
	0.5	0.2	(69, 69, -0.00473)	(69, 34, -0.00482)	(71, 7, -0.00621)
	0.2	0.4	(72, 72, -0.00651)	(72, 35, -0.00664)	(75, 8, -0.00844)
	0.2	0.5	(67, 67, -0.00594)	(67, 33, -0.00606)	(69, 7, -0.00775)
0.9	0.4	0.2	(76, 76, -0.00547)	(76, 37, -0.00557)	(79, 7, -0.00727)
	0.5	0.2	(71, 71, -0.00434)	(71, 35, -0.00441)	(73, 7, -0.00571)
	0.2	0.4	(75, 75, -0.00626)	(75, 37, -0.00637)	(78, 8, -0.00807)
	0.2	0.5	(70, 70, -0.00581)	(70, 34, -0.00592)	(72, 7, -0.00751)
-0.9	0.4	0.2	(73, 73, -0.00597)	(73, 36, -0.00608)	(76, 7, -0.00798)
	0.5	0.2	(69, 69, -0.00503)	(69, 34, -0.00512)	(70, 7, -0.00629)
	0.2	0.4	(71, 71, -0.00659)	(72, 35, -0.00695)	(75, 7, -0.00909)
	0.2	0.5	(67, 67, -0.00622)	(67, 33, -0.00634)	(69, 7, -0.00810)

**Tabla 4.12:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$  y  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0%	50%	90%
				$(n, m, k)$		
0.019	-	0.1	-0.999	(76, 76, -0.00673)	(76, 37, -0.00686)	(80, 8, -0.00888)
		0.2	-0.029	(76, 76, -0.00645)	(77, 38, -0.00677)	(80, 8, -0.00851)
		0.3	0.009	(76, 76, -0.00644)	(76, 37, -0.00656)	(80, 7, -0.00876)
		0.4	0.000	(76, 76, -0.00644)	(76, 37, -0.00656)	(80, 7, -0.00876)
0.019	0.012	-	0	(76, 76, -0.00643)	(77, 38, -0.00676)	(80, 8, -0.00850)
			0.5	(77, 77, -0.00632)	(78, 38, -0.00664)	(81, 8, -0.00833)
			-0.5	(76, 76, -0.00659)	(77, 38, -0.00691)	(80, 8, -0.00871)
			0.9	(78, 78, -0.00607)	(79, 39, -0.00637)	(81, 8, -0.00779)
			-0.9	(76, 76, -0.00669)	(77, 38, -0.00702)	(80, 8, -0.00884)

**Tabla 4.13:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0 %	50 %	90 %
			$(n, m, k)$		
-	-	0.1	(75, 75, -0.00682)	(76, 37, -0.00717)	(80, 8, -0.00924)
		0.2	(75, 75, -0.00682)	(76, 37, -0.00717)	(80, 8, -0.00924)
		0.3	(75, 75, -0.00682)	(76, 37, -0.00717)	(80, 8, -0.00924)
		0.4	(75, 75, -0.00682)	(76, 37, -0.00717)	(80, 8, -0.00924)
0.019	-	-	(76, 76, -0.00667)	(77, 38, -0.00700)	(80, 8, -0.00882)
0.019	-	0.1	(77, 77, -0.00667)	(77, 38, -0.00679)	(81, 8, -0.00879)
		0.2	(78, 78, -0.00659)	(78, 38, -0.00672)	(82, 8, -0.00867)
		0.3	(79, 79, -0.00640)	(79, 39, -0.00651)	(82, 9, -0.00803)
		0.4	(80, 80, -0.00598)	(80, 39, -0.00609)	(84, 8, -0.00789)
0.019	0.012	-	(79, 79, -0.00700)	(79, 39, -0.00713)	(84, 8, -0.00937)

**Tabla 4.14:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución beta generalizada de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0 %	50 %	90 %
				$(n, m, k)$		
-	-	0.1	0.120	(91, 91, -0.00821)	(92, 45, -0.00852)	(100, 10, -0.01096)
		0.2	-0.424	(82, 82, -0.00751)	(82, 40, -0.00766)	(87, 9, -0.00976)
		0.3	-0.669	(72, 72, -0.00628)	(72, 35, -0.00640)	(75, 7, -0.00837)
		0.4	0.967	(63, 63, -0.00354)	(63, 31, -0.00361)	(64, 6, -0.00476)
0.019	-	-	-0.890	(76, 76, -0.00670)	(76, 37, -0.00683)	(80, 8, -0.00885)
0.019	-	-	0	(77, 77, -0.00657)	(78, 38, -0.00689)	(81, 8, -0.00867)
			0.5	(79, 79, -0.00663)	(79, 39, -0.00674)	(83, 8, -0.00867)
			-0.5	(77, 77, -0.00677)	(77, 38, -0.00689)	(81, 8, -0.00890)
			0.9	(81, 81, -0.00650)	(82, 40, -0.00679)	(85, 9, -0.00830)
			-0.9	(76, 76, -0.00668)	(77, 38, -0.00701)	(80, 8, -0.00884)
0.019	0.012	-	-0.858	(76, 76, -0.00668)	(77, 38, -0.00701)	(80, 8, -0.00883)

En las Tablas 4.15 y 4.16 se calculan las cotas (inferior y superior) de  $n$  y  $m$  para los diseños con riesgos promedios máximos  $\alpha$  y  $\beta$  cuando  $p \in (c, d)$ , donde  $0 \leq c \leq p_\alpha < p_\beta \leq d \leq 1$ . Es decir

$$n_l = n(c, d) \leq n \leq n_u = n(p_\alpha, p_\beta)$$

y

$$m_l = m(c, d) \leq m \leq m_u = m(p_\alpha, p_\beta).$$

Como en el caso exponencial, las diferencias son más amplias para valores altos de las condiciones  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ . De la misma forma, cuando la censura aumenta también se observa un incremento notable en la amplitud de los intervalos.

### Ejemplo (continuación)

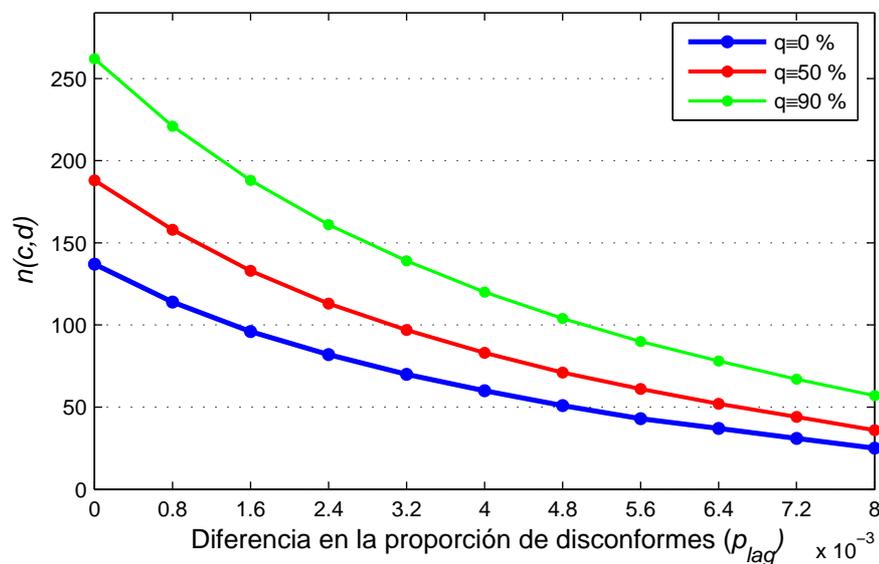
Supongamos, a continuación, que el logaritmo de tiempo de vida de un producto (e.g. cable eléctrico XLPE) sigue una distribución normal o de valor extremo. Las Figuras 4.11 y 4.12 ilustran la variación de  $n(c, d)$  para ciertos niveles de censura cuando  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$ , donde  $0 < p_{lag} < 0.8p_\alpha$ . A medida que aumenta  $p_{lag}$  se reducen las diferencias entre los tamaños muestrales con distintos valores de  $q$ . Cuando  $q \equiv 90\%$ , los valores de  $n(c, d)$  son muy similares para ambas distribuciones. Esto sugiere que, con una censura tan alta, las correspondientes curvas OC aproximadas utilizadas en el diseño serían bastante similares.

**Tabla 4.15:** Valores de  $(n_l, m_l)$  y  $(n_u, m_u)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ 

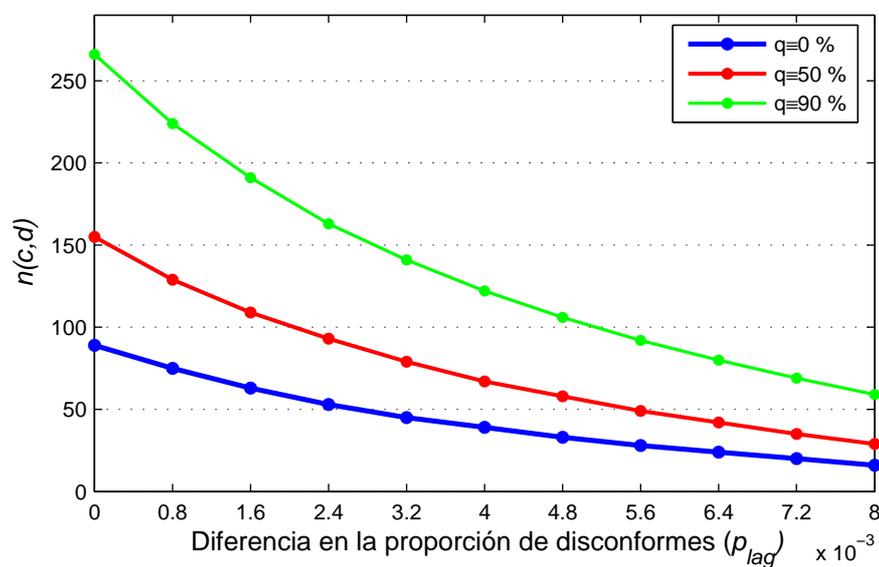
$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)					
		0 %		50 %		90 %	
		$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$
0.00041	0.01840	(15, 15)	(25, 25)	(24, 12)	(38, 19)	(53, 6)	(76, 8)
0.00284	0.03110	(18, 18)	(38, 38)	(26, 13)	(55, 28)	(46, 5)	(86, 9)
0.00654	0.04260	(17, 17)	(47, 47)	(25, 13)	(63, 32)	(39, 4)	(87, 9)
0.01090	0.05350	(17, 17)	(53, 53)	(23, 12)	(69, 35)	(32, 4)	(86, 9)
0.02090	0.07420	(15, 15)	(61, 61)	(19, 10)	(75, 38)	(24, 2)	(84, 9)
0.03190	0.09420	(13, 13)	(66, 66)	(16, 8)	(78, 39)	(19, 2)	(87, 9)
0.03760	0.10400	(12, 12)	(67, 67)	(15, 8)	(78, 39)	(17, 2)	(90, 9)
0.04940	0.12300	(11, 11)	(70, 70)	(13, 7)	(79, 40)	(14, 2)	(99, 10)
0.06150	0.14200	(10, 10)	(71, 71)	(11, 6)	(78, 39)	(13, 2)	(113, 12)
0.07400	0.16100	(9, 9)	(71, 71)	(10, 5)	(76, 38)	(12, 2)	(130, 13)
0.09950	0.19800	(8, 8)	(70, 70)	(8, 4)	(73, 37)	(12, 2)	(173, 18)
0.11900	0.22500	(7, 7)	(69, 69)	(7, 4)	(71, 36)	(13, 2)	(212, 22)

**Tabla 4.16:** Valores de  $(n_l, m_l)$  y  $(n_u, m_u)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$  y  $\beta = 0.10$ 

$p_\alpha$	$p_\beta$	$q$ (%)					
		0 %		50 %		90 %	
		$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$	$(n_l, m_l)$	$(n_u, m_u)$
0.00041	0.01840	(9, 9)	(14, 14)	(17, 9)	(28, 14)	(50, 5)	(71, 8)
0.00284	0.03110	(11, 11)	(24, 24)	(20, 10)	(43, 22)	(47, 5)	(87, 9)
0.00654	0.04260	(11, 11)	(31, 31)	(20, 10)	(53, 27)	(41, 5)	(91, 9)
0.01090	0.05350	(11, 11)	(36, 36)	(19, 10)	(60, 30)	(35, 4)	(90, 9)
0.02090	0.07420	(11, 11)	(45, 45)	(17, 9)	(69, 35)	(27, 3)	(88, 9)
0.03190	0.09420	(10, 10)	(51, 51)	(15, 8)	(74, 37)	(21, 2)	(87, 9)
0.03760	0.10400	(9, 9)	(53, 53)	(15, 8)	(76, 38)	(19, 2)	(89, 9)
0.04940	0.12300	(9, 9)	(57, 57)	(13, 7)	(78, 39)	(16, 2)	(97, 10)
0.06150	0.14200	(8, 8)	(60, 60)	(12, 6)	(78, 39)	(14, 2)	(111, 12)
0.07400	0.16100	(8, 8)	(62, 62)	(11, 6)	(78, 39)	(12, 2)	(129, 13)
0.09950	0.19800	(7, 7)	(64, 64)	(9, 5)	(76, 38)	(11, 2)	(184, 19)
0.11900	0.22500	(6, 6)	(65, 65)	(8, 4)	(74, 37)	(11, 2)	(238, 24)



**Figura 4.11:** Variación de  $n(c, d)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$



**Figura 4.12:** Variación de  $n(c, d)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $c = p_\alpha - p_{lag}$  y  $d = p_\beta + p_{lag}$

Los diseños óptimos aproximados con distribución a priori degenerada en  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  (diseños clásicos) correspondientes a los niveles  $q \equiv 0\%$ ,  $50\%$  y  $90\%$  son, respectivamente

$$(137, 137, 2.076), \quad (188, 94, 2.076) \quad \text{y} \quad (262, 27, 2.076),$$

cuando la distribución de  $X$  es normal y

$$(89, 89, 3.977), \quad (155, 78, 3.977) \quad \text{y} \quad (266, 27, 3.977),$$

cuando  $X$  sigue la distribución de valor extremo.

Los diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  con distintas distribuciones de  $p$  se recogen en las Tablas 4.17 hasta 4.26.

De forma general, se observa una notable reducción del tamaño muestral cuando  $p$  sigue una distribución  $BG(a, b, c, d, r)$  en los diseños  $\varepsilon$ -imparciales de las Tablas 4.17 y 4.18, así como en los planes no imparciales de las Tablas 4.19 y 4.20. En ambos tipos de diseños, si  $r$  se mantiene fijo, el tamaño muestral  $n$  depende de  $\varepsilon$  y  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , respectivamente. Algo similar sucede con los diseños  $MEBG$  imparciales de las Tablas 4.25 y 4.26.

De nuevo, el conocimiento de  $\mu_1$ , de  $\sigma_1$  o ambos de forma simultánea determina, en este ejemplo, diseños bastante similares. En concreto, son similares los diseños de la familia beta generalizada de las Tablas 4.21 y 4.22 y los correspondientes a distribuciones de máxima entropía, que se encuentran recogidos en las Tablas 4.23 y 4.24. Considerando los mismos casos de información a priori, los planes  $MEBG$  de las Tablas 4.25 y 4.26 tampoco muestran tamaños muestrales distintos.

Podemos advertir que los planes de las distribuciones normal y de valor extremo presentan una gran similitud cuando la censura es  $q \equiv 90\%$ , tal y como se ilustraba

en las Figuras 4.11 y 4.12.

Debido a la utilización de la curva OC aproximada en la obtención de los planes, es necesario evaluar su grado de ajuste a las especificaciones de riesgos. Por ello, en las Tablas 4.17 y 4.18 se realiza un estudio preliminar de los riesgos simulados para cada diseño cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial. Si la distribución es normal y el nivel  $q$  es bajo-medio, los diseños parecen mostrar un buen comportamiento con respecto a los valores fijados por el productor y el consumidor. Pero si el nivel de censura es alto, el diseño presenta mayores diferencias en los riesgos. Si la distribución es de valor extremo, dichas diferencias se pueden considerar aceptables. En definitiva, en los diseños para ambas distribuciones se observa un riesgo simulado del productor bastante conservador e inferior a  $\alpha = 0.05$ . El riesgo simulado del consumidor está situado por encima de  $\beta = 0.01$  pero, en general, esta discrepancia es asumible en la utilización del plan de muestreo.

**Tabla 4.17:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(APR_{sim}, ACR_{sim})$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0%	50%	90%
		$(n, m, k)$		
		$(APR_{sim}, ACR_{sim})$		
0	0.1	(85, 85, 2.087)	(118, 59, 2.087)	(166, 16, 2.087)
		(0.045, 0.108)	(0.051, 0.103)	(0.036, 0.126)
	0.2	(68, 68, 2.093)	(94, 47, 2.093)	(133, 14, 2.093)
		(0.043, 0.109)	(0.058, 0.102)	(0.037, 0.119)
0.3	(52, 52, 2.106)	(72, 35, 2.106)	(102, 10, 2.106)	
	(0.048, 0.113)	(0.051, 0.097)	(0.034, 0.136)	
0.4	(35, 35, 2.136)	(49, 25, 2.136)	(72, 7, 2.136)	
	(0.047, 0.110)	(0.057, 0.092)	(0.032, 0.134)	
0.5	0.1	(85, 85, 2.091)	(118, 59, 2.091)	(166, 17, 2.091)
		(0.051, 0.108)	(0.053, 0.105)	(0.036, 0.125)
	0.2	(68, 68, 2.100)	(94, 47, 2.100)	(134, 13, 2.100)
		(0.046, 0.105)	(0.057, 0.110)	(0.036, 0.141)
0.3	(52, 52, 2.113)	(72, 35, 2.113)	(103, 10, 2.113)	
	(0.044, 0.109)	(0.050, 0.097)	(0.040, 0.145)	
0.4	(35, 35, 2.141)	(49, 25, 2.141)	(72, 7, 2.141)	
	(0.047, 0.111)	(0.051, 0.097)	(0.029, 0.139)	
-0.5	0.1	(86, 86, 2.084)	(118, 59, 2.084)	(166, 16, 2.084)
		(0.054, 0.096)	(0.046, 0.098)	(0.034, 0.124)
	0.2	(69, 69, 2.089)	(95, 47, 2.089)	(133, 14, 2.089)
		(0.050, 0.110)	(0.053, 0.102)	(0.036, 0.122)
0.3	(52, 52, 2.101)	(72, 36, 2.101)	(102, 11, 2.101)	
	(0.058, 0.105)	(0.055, 0.099)	(0.039, 0.132)	
0.4	(36, 36, 2.133)	(50, 24, 2.133)	(72, 7, 2.133)	
	(0.050, 0.113)	(0.048, 0.118)	(0.032, 0.146)	
0.9	0.1	(85, 85, 2.097)	(118, 59, 2.097)	(167, 16, 2.097)
		(0.051, 0.123)	(0.048, 0.101)	(0.039, 0.121)
	0.2	(68, 68, 2.109)	(95, 47, 2.109)	(135, 14, 2.109)
		(0.048, 0.096)	(0.056, 0.091)	(0.033, 0.129)
0.3	(52, 52, 2.124)	(72, 36, 2.124)	(104, 11, 2.124)	
	(0.045, 0.099)	(0.057, 0.106)	(0.036, 0.132)	
0.4	(35, 35, 2.149)	(49, 25, 2.149)	(73, 7, 2.149)	
	(0.050, 0.116)	(0.054, 0.092)	(0.029, 0.138)	
-0.9	0.1	(86, 86, 2.082)	(119, 59, 2.082)	(166, 16, 2.082)
		(0.045, 0.099)	(0.051, 0.099)	(0.036, 0.124)
	0.2	(69, 69, 2.087)	(95, 47, 2.087)	(133, 14, 2.087)
		(0.044, 0.123)	(0.052, 0.106)	(0.031, 0.132)
0.3	(52, 52, 2.098)	(72, 36, 2.098)	(103, 10, 2.098)	
	(0.049, 0.110)	(0.056, 0.096)	(0.037, 0.139)	
0.4	(36, 36, 2.131)	(50, 25, 2.131)	(72, 7, 2.131)	
	(0.046, 0.113)	(0.056, 0.102)	(0.030, 0.159)	

**Tabla 4.18:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(APR_{sim}, ACR_{sim})$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0%	50%	90%
		$(n, m, k)$ $(APR_{sim}, ACR_{sim})$		
0	0.1	(56, 56, 4.014)	(98, 49, 4.014)	(169, 17, 4.014)
		(0.043, 0.115)	(0.046, 0.110)	(0.041, 0.113)
	0.2	(45, 45, 4.037)	(78, 39, 4.037)	(137, 14, 4.037)
		(0.045, 0.119)	(0.039, 0.116)	(0.040, 0.118)
0.3	(34, 34, 4.078)	(60, 30, 4.077)	(106, 11, 4.076)	
	(0.045, 0.113)	(0.039, 0.114)	(0.037, 0.113)	
0.4	(23, 23, 4.180)	(41, 21, 4.177)	(75, 8, 4.176)	
	(0.046, 0.118)	(0.041, 0.123)	(0.034, 0.118)	
0.5	0.1	(56, 56, 4.026)	(97, 49, 4.026)	(170, 17, 4.025)
		(0.044, 0.114)	(0.041, 0.117)	(0.043, 0.119)
	0.2	(45, 45, 4.053)	(78, 39, 4.053)	(137, 14, 4.053)
		(0.039, 0.121)	(0.051, 0.103)	(0.038, 0.125)
0.3	(34, 34, 4.096)	(60, 30, 4.095)	(106, 11, 4.095)	
	(0.043, 0.115)	(0.037, 0.118)	(0.040, 0.119)	
0.4	(23, 23, 4.193)	(41, 20, 4.194)	(75, 8, 4.189)	
	(0.038, 0.134)	(0.033, 0.127)	(0.033, 0.122)	
-0.5	0.1	(56, 56, 4.007)	(98, 49, 4.007)	(169, 17, 4.007)
		(0.034, 0.110)	(0.043, 0.109)	(0.042, 0.116)
	0.2	(45, 45, 4.027)	(79, 39, 4.027)	(137, 14, 4.027)
		(0.037, 0.113)	(0.038, 0.109)	(0.039, 0.124)
0.3	(34, 34, 4.066)	(60, 30, 4.066)	(106, 11, 4.065)	
	(0.041, 0.141)	(0.042, 0.123)	(0.036, 0.120)	
0.4	(24, 24, 4.167)	(41, 21, 4.169)	(75, 8, 4.168)	
	(0.039, 0.126)	(0.037, 0.114)	(0.035, 0.122)	
0.9	0.1	(56, 56, 4.041)	(97, 49, 4.041)	(170, 17, 4.041)
		(0.042, 0.108)	(0.050, 0.113)	(0.049, 0.109)
	0.2	(45, 45, 4.074)	(78, 39, 4.075)	(139, 14, 4.074)
		(0.047, 0.122)	(0.044, 0.113)	(0.039, 0.120)
0.3	(34, 34, 4.123)	(60, 30, 4.123)	(108, 11, 4.122)	
	(0.047, 0.116)	(0.043, 0.117)	(0.039, 0.119)	
0.4	(23, 23, 4.213)	(41, 21, 4.211)	(76, 8, 4.210)	
	(0.043, 0.124)	(0.037, 0.127)	(0.032, 0.119)	
-0.9	0.1	(56, 56, 4.003)	(98, 49, 4.002)	(169, 17, 4.002)
		(0.042, 0.114)	(0.039, 0.130)	(0.049, 0.112)
	0.2	(45, 45, 4.021)	(79, 39, 4.021)	(137, 14, 4.021)
		(0.042, 0.115)	(0.039, 0.113)	(0.038, 0.119)
0.3	(35, 35, 4.058)	(60, 30, 4.059)	(106, 11, 4.058)	
	(0.042, 0.124)	(0.041, 0.115)	(0.039, 0.110)	
0.4	(24, 24, 4.162)	(42, 21, 4.163)	(76, 8, 4.161)	
	(0.038, 0.123)	(0.037, 0.116)	(0.036, 0.128)	

**Tabla 4.19:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0 %	50 %	90 %
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(51, 51, 2.119)	(72, 35, 2.119)	(103, 10, 2.118)
	0.5	0.2	(43, 43, 2.138)	(60, 30, 2.138)	(88, 8, 2.138)
	0.2	0.4	(54, 54, 2.091)	(75, 37, 2.091)	(105, 11, 2.091)
	0.2	0.5	(47, 47, 2.092)	(65, 33, 2.092)	(92, 9, 2.092)
0.9	0.4	0.2	(51, 51, 2.137)	(71, 36, 2.137)	(104, 11, 2.137)
	0.5	0.2	(43, 43, 2.157)	(60, 30, 2.157)	(89, 9, 2.157)
	0.2	0.4	(55, 55, 2.109)	(76, 38, 2.109)	(108, 11, 2.109)
	0.2	0.5	(48, 48, 2.109)	(66, 33, 2.109)	(94, 10, 2.109)
-0.9	0.4	0.2	(52, 52, 2.111)	(72, 36, 2.111)	(104, 10, 2.110)
	0.5	0.2	(44, 44, 2.130)	(61, 30, 2.130)	(88, 9, 2.130)
	0.2	0.4	(55, 55, 2.084)	(75, 38, 2.084)	(105, 11, 2.084)
	0.2	0.5	(48, 48, 2.085)	(66, 32, 2.085)	(92, 9, 2.085)

**Tabla 4.20:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0 %	50 %	90 %
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(34, 34, 4.110)	(60, 30, 4.109)	(106, 11, 4.110)
	0.5	0.2	(28, 28, 4.170)	(50, 25, 4.169)	(91, 9, 4.170)
	0.2	0.4	(36, 36, 4.039)	(62, 31, 4.040)	(109, 11, 4.040)
	0.2	0.5	(31, 31, 4.049)	(55, 27, 4.049)	(96, 10, 4.047)
0.9	0.4	0.2	(34, 34, 4.156)	(59, 30, 4.157)	(108, 11, 4.156)
	0.5	0.2	(28, 28, 4.219)	(50, 25, 4.218)	(92, 9, 4.220)
	0.2	0.4	(36, 36, 4.083)	(63, 32, 4.083)	(112, 12, 4.082)
	0.2	0.5	(32, 32, 4.090)	(55, 28, 4.090)	(98, 10, 4.091)
-0.9	0.4	0.2	(34, 34, 4.090)	(60, 30, 4.090)	(107, 11, 4.089)
	0.5	0.2	(29, 29, 4.147)	(51, 25, 4.148)	(92, 9, 4.148)
	0.2	0.4	(36, 36, 4.022)	(63, 31, 4.022)	(109, 11, 4.022)
	0.2	0.5	(32, 32, 4.031)	(55, 28, 4.031)	(96, 10, 4.031)

**Tabla 4.21:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0%	50%	90%
				$(n, m, k)$		
0.019	-	0.1	-0.999	(58, 58, 2.097)	(81, 40, 2.097)	(114, 12, 2.097)
		0.2	-0.029	(57, 57, 2.105)	(79, 40, 2.105)	(113, 11, 2.105)
		0.3	0.009	(57, 57, 2.106)	(79, 39, 2.106)	(112, 11, 2.106)
		0.4	0.000	(57, 57, 2.106)	(79, 39, 2.106)	(112, 12, 2.105)
0.019	0.012	-	0	(58, 58, 2.105)	(80, 40, 2.105)	(114, 12, 2.104)
			0.5	(57, 57, 2.112)	(79, 40, 2.112)	(114, 11, 2.112)
			-0.5	(59, 59, 2.100)	(81, 41, 2.100)	(115, 11, 2.100)
			0.9	(56, 56, 2.123)	(78, 39, 2.123)	(113, 11, 2.123)
			-0.9	(59, 59, 2.097)	(82, 40, 2.097)	(115, 12, 2.097)

**Tabla 4.22:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0%	50%	90%
				$(n, m, k)$		
0.019	-	0.1	-0.999	(39, 39, 4.050)	(67, 34, 4.051)	(118, 12, 4.051)
		0.2	-0.029	(38, 38, 4.071)	(66, 33, 4.072)	(117, 12, 4.071)
		0.3	0.009	(37, 37, 4.074)	(66, 33, 4.073)	(116, 12, 4.073)
		0.4	0.000	(38, 38, 4.073)	(66, 33, 4.073)	(116, 12, 4.073)
0.019	0.012	-	0	(38, 38, 4.070)	(67, 33, 4.071)	(118, 12, 4.070)
			0.5	(38, 38, 4.089)	(66, 33, 4.090)	(117, 12, 4.089)
			-0.5	(39, 39, 4.057)	(67, 34, 4.058)	(119, 12, 4.057)
			0.9	(37, 37, 4.118)	(65, 33, 4.118)	(117, 12, 4.117)
			-0.9	(39, 39, 4.051)	(68, 34, 4.051)	(119, 12, 4.051)

**Tabla 4.23:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
-	-	0.1	(59, 59, 2.090)	(82, 40, 2.090)	(115, 11, 2.090)
		0.2	(59, 59, 2.090)	(82, 40, 2.090)	(115, 11, 2.090)
		0.3	(59, 59, 2.090)	(82, 40, 2.090)	(115, 11, 2.090)
		0.4	(59, 59, 2.090)	(82, 40, 2.090)	(115, 11, 2.090)
0.019	-	-	(59, 59, 2.097)	(82, 41, 2.097)	(116, 11, 2.097)
0.019	-	0.1	(59, 59, 2.101)	(82, 41, 2.101)	(116, 12, 2.101)
		0.2	(59, 59, 2.107)	(82, 41, 2.107)	(117, 11, 2.107)
		0.3	(59, 59, 2.116)	(82, 40, 2.116)	(117, 12, 2.116)
		0.4	(58, 58, 2.130)	(81, 40, 2.130)	(117, 12, 2.129)
0.019	0.012	-	(63, 63, 2.097)	(87, 44, 2.097)	(124, 12, 2.097)

**Tabla 4.24:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
-	-	0.1	(39, 39, 4.033)	(68, 34, 4.033)	(119, 12, 4.032)
		0.2	(39, 39, 4.033)	(68, 34, 4.033)	(119, 12, 4.032)
		0.3	(39, 39, 4.033)	(68, 34, 4.033)	(119, 12, 4.032)
		0.4	(39, 39, 4.033)	(68, 34, 4.033)	(119, 12, 4.032)
0.019	-	-	(39, 39, 4.051)	(68, 34, 4.051)	(119, 12, 4.051)
0.019	-	0.1	(39, 39, 4.061)	(68, 34, 4.062)	(120, 12, 4.061)
		0.2	(39, 39, 4.076)	(68, 34, 4.076)	(120, 12, 4.076)
		0.3	(39, 39, 4.097)	(68, 34, 4.097)	(121, 12, 4.097)
		0.4	(38, 38, 4.133)	(67, 33, 4.134)	(120, 12, 4.134)
0.019	0.012	-	(42, 42, 4.047)	(72, 36, 4.048)	(127, 13, 4.048)

**Tabla 4.25:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución beta generalizada de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0%	50%	90%
				$(n, m, k)$		
-	-	0.1	0.120	(85, 85, 2.088)	(118, 59, 2.088)	(166, 16, 2.088)
		0.2	-0.424	(68, 68, 2.090)	(95, 47, 2.090)	(133, 14, 2.090)
		0.3	-0.669	(52, 52, 2.100)	(72, 36, 2.100)	(102, 11, 2.099)
		0.4	0.982	(36, 36, 2.153)	(50, 25, 2.153)	(74, 7, 2.152)
0.019	-	-	-0.889	(58, 58, 2.097)	(81, 40, 2.097)	(115, 11, 2.097)
0.019	0.012	-	-0.858	(59, 59, 2.097)	(81, 41, 2.097)	(115, 12, 2.097)
0.019	-	-	0	(59, 59, 2.103)	(82, 41, 2.103)	(117, 11, 2.103)
			0.5	(60, 60, 2.110)	(83, 41, 2.110)	(118, 12, 2.110)
			-0.5	(59, 59, 2.099)	(82, 41, 2.099)	(116, 11, 2.099)
			0.9	(61, 61, 2.118)	(85, 42, 2.118)	(122, 13, 2.118)
			-0.9	(59, 59, 2.097)	(82, 41, 2.097)	(116, 11, 2.097)

**Tabla 4.26:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución beta generalizada de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$r$	$q$ (%)		
				0%	50%	90%
				$(n, m, k)$		
-	-	0.1	0.120	(56, 56, 4.017)	(98, 49, 4.016)	(169, 17, 4.017)
		0.2	-0.424	(45, 45, 4.028)	(79, 39, 4.028)	(137, 14, 4.028)
		0.3	-0.669	(35, 35, 4.061)	(60, 30, 4.063)	(106, 11, 4.062)
		0.4	0.982	(23, 23, 4.223)	(41, 21, 4.221)	(77, 8, 4.219)
0.019	-	-	-0.889	(39, 39, 4.052)	(67, 34, 4.052)	(118, 12, 4.052)
0.019	0.012	-	-0.858	(39, 39, 4.051)	(68, 34, 4.051)	(119, 12, 4.051)
0.019	-	-	0	(39, 39, 4.067)	(68, 34, 4.067)	(120, 12, 4.067)
			0.5	(39, 39, 4.082)	(69, 34, 4.083)	(122, 12, 4.082)
			-0.5	(39, 39, 4.056)	(68, 34, 4.056)	(120, 12, 4.056)
			0.9	(40, 40, 4.102)	(71, 35, 4.102)	(126, 13, 4.101)
			-0.9	(39, 39, 4.050)	(68, 34, 4.050)	(119, 12, 4.050)

---

## Planes de muestreo utilizando riesgos a posteriori

Consideremos, de nuevo, la situación en la que el productor y el consumidor especifican una distribución a priori de  $p$ . Ambos pueden estar de acuerdo y adoptar conjuntamente la misma distribución sobre  $p$ , pero también pueden proporcionar sus propias definiciones de forma separada. En general, sean  $h_1(p)$  y  $H_1(p)$  ( $h_2(p)$  y  $H_2(p)$ ) las funciones de densidad y de distribución del productor (consumidor), respectivamente. De acuerdo con la Sección 1.8 del Capítulo 1, supongamos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{R}$  denotan las decisiones de aceptación y rechazo del lote. A continuación, se definen los riesgos a posteriori de un plan de muestreo:

**Definición 5.1.** *El riesgo a posteriori del productor se define como la probabilidad de que un lote rechazado sea satisfactorio, i.e. que tenga una proporción de unidades defectuosas  $p \leq p_\alpha$ , y se expresa como  $PPR \equiv \Pr(p \leq p_\alpha \mid \mathcal{R})$ . Por otro lado, el riesgo a posteriori del consumidor es la probabilidad de que un lote aceptado sea no satisfactorio o rechazable, i.e. con  $p \geq p_\beta$ , en cuyo caso se expresa como  $PCR \equiv \Pr(p \geq p_\beta \mid \mathcal{A})$ .*

Schick and Drnas (1972, [153]) utilizan este tipo de riesgos así como Martz y Waller

(1982, [116]) y Hamada et al. (2008, [85]), quienes estudian el muestreo por atributos (binomial y de Poisson) con riesgos a posteriori. Por otro lado, Brush (1986, [27]), y Sharma y Bhutani (1992, [162]) analizan la importancia de los riesgos a posteriori y la diferencia que existe entre éstos y los riesgos promedios.

De acuerdo a la definición de la curva característica  $L(p)$  especificada en los Capítulos 2 y 3

$$L(p) = \Pr(K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) > k \mid p), \quad 0 < p < 1,$$

donde  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  es la cantidad pivotal definida en (2.2). Entonces, se obtiene que  $\Pr(\mathcal{A}) = L(p)$  y  $\Pr(\mathcal{R}) = 1 - L(p)$ , con lo cual las funciones de densidad de  $p$  condicionadas a la decisión sobre la aceptación/rechazo del lote se definen como

$$h_1(p \mid \mathcal{R}) \propto \{1 - L(p)\}h_1(p) \quad \text{y} \quad h_2(p \mid \mathcal{A}) \propto L(p)h_2(p) \quad (5.1)$$

para el productor y el consumidor, respectivamente. Considerando que  $p \in [c, d]$ , el riesgo a posteriori del productor ( $PPR$ ) se calcula como

$$H_1(p_\alpha \mid \mathcal{R}) = \frac{\int_c^{p_\alpha} \{1 - L(p)\}h_1(p)dp}{\int_c^d \{1 - L(p)\}h_1(p)dp},$$

y el riesgo a posteriori del consumidor ( $PCR$ ) es

$$1 - H_2(p_\beta \mid \mathcal{A}) = \frac{\int_{p_\beta}^d L(p)h_2(p)dp}{\int_c^d L(p)h_2(p)dp},$$

donde  $H_1(p \mid \mathcal{R})$  y  $H_2(p \mid \mathcal{A})$  denotan las correspondientes funciones de distribución

acumuladas de  $p$  condicionales.

Este capítulo recoge los diseños con censura de tipo II que utilizan los MLEs de  $\mu$  y  $\sigma$ . De esta forma, la curva OC del plan de muestreo es función de  $(n, m, k)$ , i.e.  $L(p) \equiv L(p; n, m, k)$ . La determinación del diseño óptimo requiere que el productor y el consumidor fijen los valores máximos de los riesgos a posteriori, es decir

$$H_1(p_\alpha | \mathcal{R}; n, m, k) \leq \alpha \quad \text{y} \quad 1 - H_2(p_\beta | \mathcal{A}; n, m, k) \leq \beta. \quad (5.2)$$

El diseño  $(n, m, k)$  con menor tamaño muestral (diseño óptimo) y censura de tipo II se puede obtener aplicando el Procedimiento 5.1.

En la sección siguiente se ilustran algunas curvas de densidad de la distribución condicional de  $p$  cuando se acepta y cuando se rechaza el lote. Se utiliza un ejemplo similar al planteado en el Capítulo 4 con las mismas especificaciones y distribuciones a priori. También, a partir de dicho ejemplo, se presentarán diferentes diseños con riesgos a posteriori para las distribuciones exponencial, normal y de valor extremo en las Secciones 5.2 y 5.3. Finalmente, en la Sección 5.4 se realiza un estudio comparativo de los diferentes tipos de riesgos estudiados en este trabajo.

### Ejemplo

Supongamos que se desea estudiar la fiabilidad de un producto. Por ejemplo, el producto podría ser el cable de tendido eléctrico con aislamiento de Montanari y Cacciari (1988, [124]). Se considera que  $p \in [c, d]$ , con  $c = 0.002$  y  $d = 0.045$ . El productor (consumidor) fija un nivel de calidad  $p_\alpha = 0.01$  ( $p_\beta = 0.03$ ) con un riesgo máximo a posteriori  $\alpha = 0.05$  ( $\beta = 0.10$ ). Además, tanto el productor como el consumidor se ponen de acuerdo en utilizar la misma distribución a priori de  $p$ .

---

**Procedimiento 5.1:** Diseño óptimo del plan de muestreo con riesgos a posteriori y censura de tipo II

---

- El productor y el consumidor especifican los valores máximos tolerados para los riesgos,  $\alpha$  y  $\beta$ , los niveles de calidad,  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , y las densidades *a priori* de  $p$ ,  $h_1(p)$  y  $h_2(p)$ . También se especifica un nivel de censura  $q \in [0, 1)$ .
- Se obtiene la solución  $(n_0, k_0)$  del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} H_1(p_\alpha \mid \mathcal{R}; n_0, m_0, k_0) &= \alpha, \\ 1 - H_2(p_\beta \mid \mathcal{A}; n_0, m_0, k_0) &= \beta, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde  $m_0 = n_0(1 - q)$ .

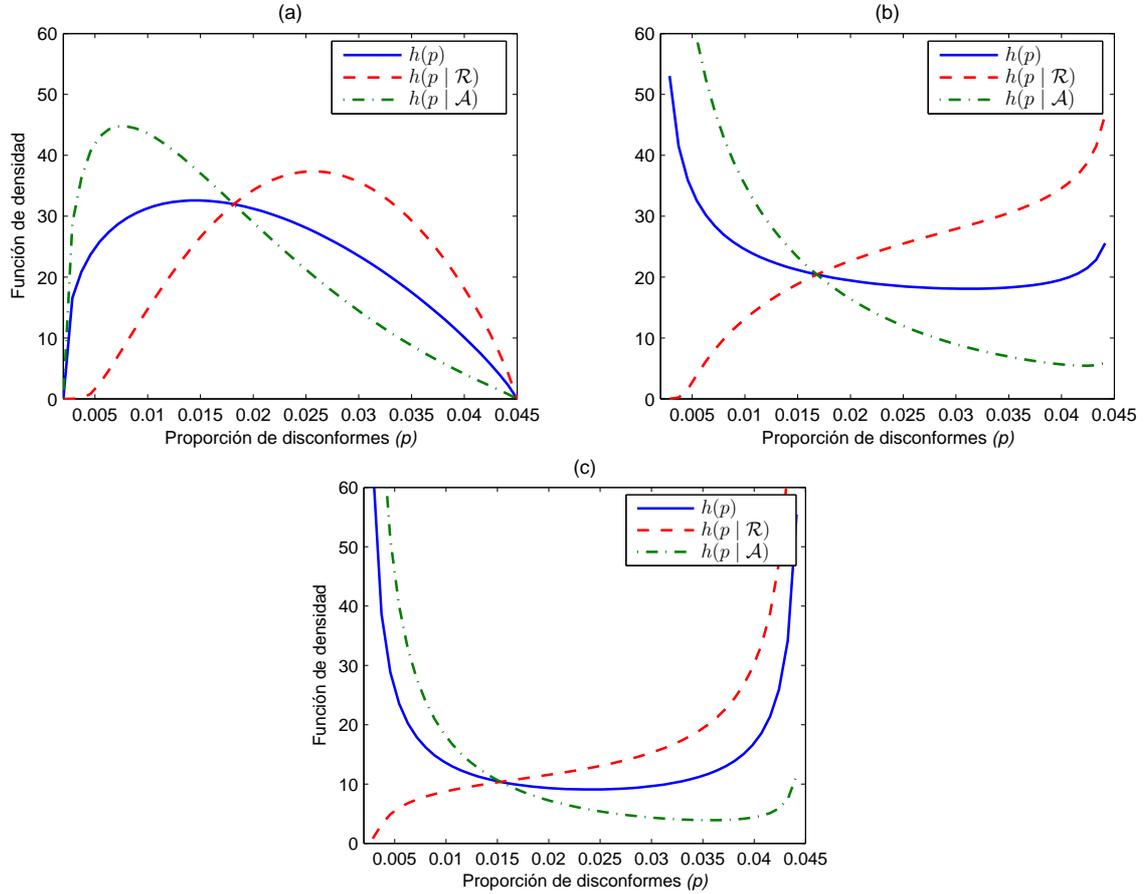
- El tamaño muestral mínimo se calcula como  $n = \lceil n_0 \rceil$ . Si  $q = 0$ , entonces  $m = n$ , y si  $q \neq 0$ :
  - se selecciona  $m = \lfloor (1 - q)n_0 \rfloor$  cuando  $(n, m)$  verifica las condiciones (5.2).
  - en otro caso,  $m = \lceil (1 - q)n_0 \rceil$ .
- La constante de aceptación es  $k \in [k_\beta, k_\alpha]$ , donde

$$\begin{aligned} H_1(p_\alpha \mid \mathcal{R}; n, m, k_\alpha) &= \alpha, \\ 1 - H_2(p_\beta \mid \mathcal{A}; n, m, k_\beta) &= \beta, \end{aligned}$$

Como ya se ha sugerido en otros diseños, se puede elegir  $k$  como  $k^* = (k_\beta + k_\alpha)/2$ .

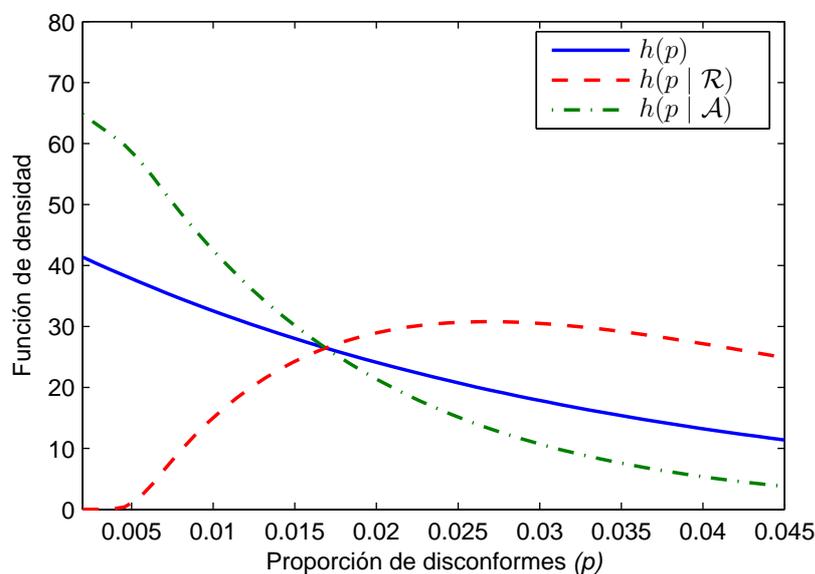
---

Mediante el Procedimiento 5.1 se determinarán los diseños óptimos aproximados. Es necesario mencionar que se han de emplear técnicas de resolución iterativa para obtener la solución  $(n_0, k_0)$  del sistema (5.3) en el Procedimiento 5.1. Cuando  $T$  sigue la distribución exponencial, se puede encontrar un valor inicial adecuado a partir de las aproximaciones utilizadas en los planes de muestreo del Capítulo 2. Si  $T$  sigue una distribución log-normal o de Weibull, entonces una buena elección del punto inicial se obtiene de las ecuaciones (3.6) del Capítulo 3.



**Figura 5.1:** Curvas de densidad a priori y condicionales cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y: (a)  $\varepsilon = 0.2$ , (b)  $\varepsilon = 0.3$  y (c)  $\varepsilon = 0.4$

Los riesgos a posteriori se podrán simular a partir del método descrito en el Procedimiento B.6 del Apéndice B. De nuevo, se generan una muestra de  $N_1 = 2000$  valores de  $p$  y  $N_2 = 2000$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $T$  (diseños exponenciales) o de  $X$  (diseños log-normal y de Weibull).

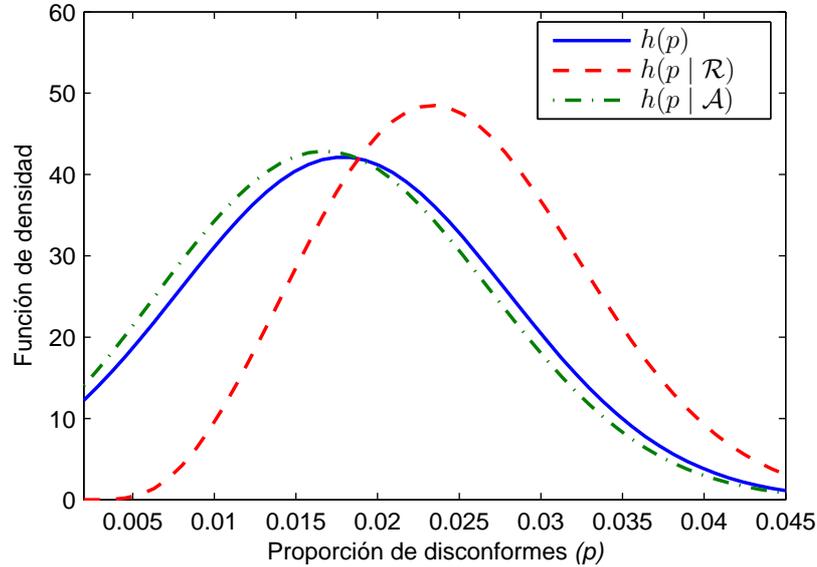


**Figura 5.2:** Curvas de densidad a priori y condicionales cuando  $p$  sigue una distribución de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$  y media  $\mu_1 = 0.016$

## 5.1. Distribuciones condicionales de la proporción de disconformes

La distribución a priori de  $p$  representa el promedio de las distribuciones condicionales (5.1) cuando se decide la aceptación/rechazo de lotes sucesivos. En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3 se ilustran las curvas de densidad a priori y condicionales para ciertos diseños óptimos que se determinarán en la Sección 5.2. A modo de referencia, se consideran los diseños óptimos para la distribución exponencial biparamétrica y se utilizan varios ejemplos de distribuciones de  $p$ . Conviene precisar que, para unas especificaciones y una distribución  $h(p)$  común para el productor y el consumidor, las curvas de densidad condicionales con diseños óptimos de otras distribuciones son similares a las que se muestran en estas figuras.

La densidad  $h(p | \mathcal{R})$  muestra la distribución de los niveles bajos de  $p$  en los lotes



**Figura 5.3:** Curvas de densidad a priori y condicionales cuando  $p$  sigue una distribución de máxima entropía con  $c = 0.002$ ,  $d = 0.045$ , media  $\mu_1 = 0.019$  y desviación típica  $\sigma_1 = 0.012$

de buena calidad que son rechazados por el productor al aplicar el plan de muestreo. Desde el punto de vista del consumidor,  $h(p | \mathcal{A})$  ilustra la distribución de los niveles altos de  $p$  que indican mala calidad en aquellos lotes aceptados por el plan.

## 5.2. Diseños óptimos en el caso exponencial

Las tablas que se incluyen en esta sección recogen los diseños óptimos utilizando riesgos a posteriori cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  y la censura es de tipo II. En la determinación de los planes se utilizan las expresiones (2.6) y (2.11) de las correspondientes curvas OC, por lo cual los diseños obtenidos son exactos. El siguiente ejemplo analiza las distintas situaciones para la distribución exponencial, dependiendo si  $\mu$  es o no conocida.

**Tabla 5.1:** Diseños óptimos  $(m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$m$	$k$	$PPR_{sim}$	$PCR_{sim}$
0	0.2	2	-0.0258	0.045	0.086
	0.4	2	-0.0216	0.044	0.077
0.5	0.2	2	-0.0247	0.042	0.079
	0.4	2	-0.0212	0.042	0.079
-0.5	0.2	2	-0.0266	0.040	0.089
	0.4	2	-0.0218	0.045	0.089
0.9	0.2	2	-0.0234	0.040	0.079
	0.4	2	-0.0206	0.049	0.075
-0.9	0.2	2	-0.0271	0.045	0.087
	0.4	2	-0.0220	0.040	0.086

**Tabla 5.2:** Diseños óptimos  $(m, k)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$m$	$k$
0	0.4	0.2	3	-0.0279
	0.5	0.2	3	-0.0291
	0.2	0.4	2	-0.0173
	0.2	0.5	2	-0.0156
0.9	0.4	0.2	3	-0.0260
	0.5	0.2	3	-0.0273
	0.2	0.4	2	-0.0161
	0.2	0.5	2	-0.0147
-0.9	0.4	0.2	3	-0.0288
	0.5	0.2	3	-0.0299
	0.2	0.4	2	-0.0179
	0.2	0.5	2	-0.0160

**Tabla 5.3:** Diseños óptimos  $(m, k)$  cuando  $T \sim Exp(0, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$m$	$k$
-	-	0.1	2	-0.7703
-	-	0.2	2	-0.0254
-	-	0.3	3	-0.0221
-	-	0.4	3	-0.0226
0.019	-	-	3	-0.0255
0.019	0.012	-	2	-0.0318

### Ejemplo (continuación)

Las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3 muestran los diseños óptimos exponenciales uniparamétricos ( $\mu$  es conocida) correspondientes a las distribuciones beta generalizada y de máxima entropía de  $p$ . El tamaño muestral de estos planes es bastante reducido. Incluso,

al compararlos con los correspondientes planes con riesgos promedios, el valor de  $m$  que se obtiene resulta ligeramente inferior. En primer lugar, en las Tablas 5.1 y 5.2 aparecen los diseños  $\varepsilon$ -imparciales (i.e.,  $\Pr(p \leq p_\alpha) = \Pr(p \geq p_\beta) = \varepsilon$ ) y no imparciales (i.e.,  $\Pr(p \leq p_\alpha) = \varepsilon_1$  y  $\Pr(p \geq p_\beta) = \varepsilon_2$ , con  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ), respectivamente, cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$ . En esta situación, debido a la escasa magnitud del tamaño muestral, los planes apenas presentan diferencias entre sí. La similitud entre ellos se advierte, también, en la Tabla 5.3 que recoge los planes que corresponden a las distribuciones de máxima entropía: (i) imparcial, (ii) con media conocida y (iii) con media y varianza conocidas.

Como referencia, en la Tabla 5.1 se simulan los riesgos a posteriori  $PPR_{sim}$  y  $PCR_{sim}$  de los diferentes diseños. En particular, se observa que ambos riesgos toman valores conservadores, sobre todo en el caso del consumidor.

Por otro lado, las Tablas 5.4 hasta 5.6 agrupan los diseños exponenciales bi-paramétricos ( $\mu$  es desconocida) para varios niveles de censura,  $q$ . En esta ocasión, los planes ofrecen mayores diferencias en los tamaños muestrales para las distintas distribuciones a priori. Además, es posible apreciar una mayor disminución de  $n$  en comparación con los correspondientes planes con riesgos promedios del Capítulo 4. Sin embargo, el tamaño muestral de los diseños se mantiene prácticamente invariable cuando cambia el valor de  $q$ . Esto se debe a la elección particular de las especificaciones del productor y el consumidor que se han utilizado en este ejemplo. En general,  $n$  varía según el nivel de censura cuando se consideran otros requerimientos.

**Tabla 5.4:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0 %	50 %	90 %
		$(n, m, k)$		
		$(PPR_{sim}, PCR_{sim})$		
0	0.2	(40, 40, -0.00456) (0.042, 0.104)	(40, 19, -0.00461) (0.046, 0.107)	(40, 4, -0.00530) (0.049, 0.095)
	0.3	(52, 52, -0.00440) (0.047, 0.104)	(52, 25, -0.00448) (0.046, 0.102)	(53, 5, -0.00611) (0.040, 0.110)
	0.4	(53, 53, -0.00303) (0.039, 0.098)	(53, 26, -0.00310) (0.041, 0.094)	(54, 5, -0.00448) (0.048, 0.095)
0.5	0.2	(41, 41, -0.00383) (0.052, 0.099)	(41, 20, -0.00388) (0.047, 0.097)	(42, 4, -0.00623) (0.041, 0.098)
	0.3	(53, 53, -0.00418) (0.044, 0.100)	(53, 26, -0.00426) (0.044, 0.089)	(54, 5, -0.00582) (0.045, 0.098)
	0.4	(53, 53, -0.00260) (0.048, 0.099)	(54, 26, -0.00330) (0.042, 0.100)	(54, 5, -0.00403) (0.046, 0.095)
-0.5	0.2	(40, 40, -0.00585) (0.031, 0.093)	(40, 19, -0.00591) (0.030, 0.092)	(40, 3, -0.00731) (0.047, 0.104)
	0.3	(52, 52, -0.00497) (0.043, 0.097)	(52, 25, -0.00506) (0.039, 0.098)	(52, 5, -0.00595) (0.045, 0.105)
	0.4	(53, 53, -0.00327) (0.045, 0.095)	(53, 26, -0.00334) (0.040, 0.099)	(53, 5, -0.00407) (0.046, 0.106)
0.9	0.2	(43, 43, -0.00383) (0.044, 0.104)	(43, 21, -0.00388) (0.041, 0.102)	(43, 4, -0.00450) (0.049, 0.099)
	0.3	(55, 55, -0.00396) (0.045, 0.097)	(55, 27, -0.00403) (0.047, 0.092)	(56, 5, -0.00550) (0.050, 0.091)
	0.4	(55, 55, -0.00303) (0.045, 0.090)	(55, 27, -0.00310) (0.042, 0.103)	(55, 5, -0.00380) (0.044, 0.098)
-0.9	0.2	(39, 39, -0.00504) (0.040, 0.097)	(39, 19, -0.00510) (0.039, 0.098)	(39, 4, -0.00582) (0.044, 0.094)
	0.3	(51, 51, -0.00447) (0.040, 0.106)	(51, 25, -0.00455) (0.040, 0.101)	(52, 5, -0.00629) (0.047, 0.102)
	0.4	(53, 53, -0.00340) (0.041, 0.096)	(53, 26, -0.00347) (0.048, 0.092)	(53, 5, -0.00423) (0.046, 0.099)

**Tabla 5.5:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(32, 32, -0.00553)	(32, 15, -0.00574)	(34, 3, -0.01098)
	0.5	0.2	(29, 29, -0.00548)	(29, 14, -0.00573)	(31, 3, -0.01116)
	0.2	0.4	(71, 71, -0.00380)	(71, 35, -0.00383)	(71, 7, -0.00412)
	0.2	0.5	(77, 77, -0.00291)	(77, 38, -0.00294)	(77, 7, -0.00316)
0.9	0.4	0.2	(34, 34, -0.00512)	(34, 16, -0.00530)	(35, 4, -0.00776)
	0.5	0.2	(30, 30, -0.00465)	(30, 14, -0.00487)	(32, 3, -0.00976)
	0.2	0.4	(75, 75, -0.00317)	(75, 37, -0.00320)	(75, 7, -0.00346)
	0.2	0.5	(81, 81, -0.00278)	(81, 40, -0.00280)	(81, 8, -0.00300)
-0.9	0.4	0.2	(31, 31, -0.00525)	(31, 15, -0.00545)	(33, 4, -0.00937)
	0.5	0.2	(28, 28, -0.00507)	(28, 13, -0.00533)	(31, 3, -0.01201)
	0.2	0.4	(70, 70, -0.00420)	(70, 34, -0.00424)	(70, 6, -0.00462)
	0.2	0.5	(76, 76, -0.00299)	(76, 37, -0.00302)	(76, 7, -0.00324)

**Tabla 5.6:** Diseños óptimos  $(n, m, k)$  cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
-	-	0.2	(37, 37, -0.00471)	(37, 18, -0.00478)	(37, 3, -0.00584)
-	-	0.3	(55, 55, -0.00578)	(55, 27, -0.00586)	(56, 5, -0.00758)
-	-	0.4	(66, 66, -0.00650)	(66, 32, -0.00659)	(68, 7, -0.00833)
0.019	-	-	(38, 38, -0.00537)	(38, 18, -0.00550)	(39, 4, -0.00801)
0.019	0.012	-	(33, 33, -0.00532)	(33, 16, -0.00544)	(34, 3, -0.00880)

Las Tablas 5.4 y 5.5 recogen los diseños óptimos cuando  $p$  sigue una distribución beta generalizada imparcial y no imparcial, respectivamente. Podemos señalar otra diferencia entre estos planes y los diseños con riesgos promedios. En los diseños  $\varepsilon$ -imparciales de la Tabla 5.4 se observa que  $n$  aumenta a medida que lo hace el valor de  $\varepsilon$ , al contrario de lo que sucede en los correspondientes planes con riesgos promedios.

Por otro lado, el tamaño muestral de los diseños no imparciales mostrados en la Tabla 5.5 difiere notablemente según la relación entre  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ . En cambio, en los planes con riesgos promedios, la variación de  $n$  en los planes con  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  es similar a la observada cuando  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . En cualquier caso, el parámetro  $r$  de la distribución tampoco parece influir de forma significativa, al menos en este ejemplo, en el tamaño muestral del diseño.

Al estudiar los planes correspondientes a las distribuciones de máxima entropía de la Tabla 5.6 se detectan otras diferencias con respecto a los diseños con riesgos promedios. En concreto, se aprecia una relación entre el tamaño muestral y el tipo de información conocida (media y varianza). Incluso, los diseños con una distribución de máxima entropía  $\varepsilon$ -imparcial tienen valores distintos de  $n$  según el valor de  $\varepsilon$ .

De nuevo, se calculan los riesgos simulados de los diseños de la Tabla 5.4 como referencia. Como se puede comprobar, éstos se ajustan de forma precisa a las especificaciones máximas fijadas por el productor y el consumidor.

### 5.3. Diseños óptimos aproximados para las distribuciones log-normal y de Weibull

En esta sección se muestran los diseños óptimos con censura de tipo II cuando  $X = \log(T)$  sigue una distribución normal o de valor extremo. Estos planes se determinan

a partir de la expresión aproximada de la curva OC dada en (3.4). De nuevo, mediante un ejemplo, resulta posible realizar un estudio comparativo de los diferentes planes de muestreo.

### Ejemplo (continuación)

Como ya se había observado en los planes exponenciales de la Sección 5.2, los diseños que se muestran en las tablas siguientes para ambas distribuciones de  $X$  presentan tamaños muestrales inferiores en comparación a los planes con riesgos promedios. En esta ocasión, el tamaño muestral varía según el nivel de censura.

Las Tablas 5.7 y 5.8 recogen los diseños óptimos aproximados correspondientes cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial. En este ejemplo, podemos observar un cambio en la variación de  $n$  a medida que aumenta  $\varepsilon$ , al contrario que en los planes con riesgos promedios. Dicha variación no es similar a la observada en los diseños exponenciales puesto que, cuando  $\varepsilon > 0.3$ , se aprecia un decrecimiento de  $n$ .

Los diseños cuando  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial aparecen en las Tablas 5.9 y 5.10. De nuevo, la situación difiere de la observada en los planes con riesgos promedios. Además, conviene señalar que la variación de  $n$  en estos planes con riesgos a posteriori es bastante moderada, al menos para los niveles de censura  $q \equiv 50\%$  y  $q \equiv 90\%$ .

Por otro lado, los diseños cuando  $p$  sigue una distribución de máxima entropía se detallan en las Tablas 5.11 y 5.12. Como ya se ha señalado en los planes exponenciales, existe una cierta dependencia entre el tamaño muestral de estos diseños y la información de la distribución de  $p$  (media, varianza) que es conocida.

**Tabla 5.7:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ - imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0%	50%	90%
		$(n, m, k)$ $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$		
0	0.2	(23, 23, 2.019)	(31, 15, 2.018)	(41, 4, 2.018)
		(0.054, 0.108)	(0.044, 0.117)	(0.041, 0.125)
	0.3	(31, 31, 2.083)	(42, 21, 2.083)	(59, 5, 2.083)
		(0.044, 0.110)	(0.041, 0.122)	(0.036, 0.122)
	0.4	(29, 29, 2.125)	(40, 19, 2.126)	(57, 6, 2.125)
		(0.053, 0.105)	(0.044, 0.133)	(0.036, 0.136)
0.5	0.2	(23, 23, 2.036)	(31, 15, 2.035)	(42, 4, 2.035)
		(0.047, 0.114)	(0.042, 0.109)	(0.037, 0.126)
	0.3	(30, 30, 2.096)	(42, 21, 2.096)	(59, 6, 2.096)
		(0.051, 0.101)	(0.044, 0.101)	(0.041, 0.125)
	0.4	(28, 28, 2.132)	(40, 19, 2.132)	(57, 6, 2.132)
		(0.054, 0.107)	(0.043, 0.122)	(0.039, 0.131)
-0.5	0.2	(23, 23, 2.008)	(31, 15, 2.007)	(41, 4, 2.007)
		(0.046, 0.104)	(0.040, 0.116)	(0.034, 0.115)
	0.3	(31, 31, 2.076)	(42, 21, 2.076)	(59, 5, 2.075)
		(0.048, 0.107)	(0.040, 0.119)	(0.036, 0.139)
	0.4	(29, 29, 2.121)	(40, 20, 2.121)	(57, 6, 2.120)
		(0.041, 0.108)	(0.041, 0.116)	(0.030, 0.138)
0.9	0.2	(23, 23, 2.059)	(31, 16, 2.059)	(43, 4, 2.059)
		(0.047, 0.098)	(0.043, 0.111)	(0.031, 0.133)
	0.3	(31, 31, 2.114)	(43, 21, 2.114)	(61, 6, 2.113)
		(0.043, 0.107)	(0.046, 0.115)	(0.034, 0.131)
	0.4	(29, 29, 2.142)	(40, 20, 2.142)	(58, 6, 2.142)
		(0.046, 0.109)	(0.042, 0.120)	(0.033, 0.134)
-0.9	0.2	(23, 23, 2.002)	(31, 15, 2.001)	(41, 4, 2.001)
		(0.047, 0.106)	(0.042, 0.126)	(0.032, 0.121)
	0.3	(31, 31, 2.071)	(43, 21, 2.071)	(59, 5, 2.071)
		(0.043, 0.108)	(0.040, 0.118)	(0.035, 0.126)
	0.4	(29, 29, 2.118)	(40, 20, 2.118)	(57, 6, 2.118)
		(0.043, 0.103)	(0.042, 0.123)	(0.032, 0.135)

**Tabla 5.8:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  y riesgos simulados  $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial

$r$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
		0%	50%	90%
		$(n, m, k)$ $(PPR_{sim}, PCR_{sim})$		
0	0.2	(15, 15, 3.878)	(25, 13, 3.876)	(41, 4, 3.878)
		(0.046, 0.115)	(0.043, 0.123)	(0.045, 0.109)
	0.3	(20, 20, 4.041)	(35, 17, 4.042)	(61, 6, 4.040)
		(0.044, 0.116)	(0.049, 0.115)	(0.042, 0.115)
	0.4	(19, 19, 4.163)	(33, 16, 4.166)	(60, 6, 4.162)
		(0.039, 0.119)	(0.045, 0.127)	(0.040, 0.128)
0.5	0.2	(15, 15, 3.920)	(25, 13, 3.919)	(42, 4, 3.921)
		(0.046, 0.106)	(0.043, 0.115)	(0.047, 0.122)
	0.3	(20, 20, 4.072)	(35, 17, 4.073)	(61, 6, 4.074)
		(0.047, 0.109)	(0.041, 0.118)	(0.043, 0.108)
	0.4	(19, 19, 4.180)	(33, 16, 4.184)	(60, 6, 4.180)
		(0.043, 0.125)	(0.040, 0.119)	(0.041, 0.126)
-0.5	0.2	(15, 15, 3.851)	(25, 13, 3.849)	(41, 4, 3.848)
		(0.047, 0.107)	(0.042, 0.119)	(0.044, 0.129)
	0.3	(20, 20, 4.022)	(35, 18, 4.019)	(61, 6, 4.019)
		(0.044, 0.128)	(0.043, 0.115)	(0.045, 0.128)
	0.4	(19, 19, 4.151)	(33, 17, 4.150)	(60, 6, 4.150)
		(0.041, 0.127)	(0.041, 0.126)	(0.042, 0.124)
0.9	0.2	(15, 15, 3.978)	(26, 13, 3.976)	(44, 4, 3.978)
		(0.041, 0.116)	(0.047, 0.113)	(0.042, 0.108)
	0.3	(20, 20, 4.118)	(35, 18, 4.116)	(63, 6, 4.119)
		(0.043, 0.112)	(0.045, 0.111)	(0.037, 0.108)
	0.4	(19, 19, 4.207)	(33, 17, 4.206)	(61, 6, 4.207)
		(0.044, 0.111)	(0.051, 0.107)	(0.034, 0.122)
-0.9	0.2	(15, 15, 3.835)	(25, 13, 3.833)	(41, 4, 3.830)
		(0.044, 0.111)	(0.045, 0.123)	(0.041, 0.123)
	0.3	(20, 20, 4.010)	(35, 18, 4.008)	(61, 6, 4.007)
		(0.050, 0.115)	(0.042, 0.117)	(0.042, 0.109)
	0.4	(19, 19, 4.144)	(33, 17, 4.143)	(60, 6, 4.143)
		(0.043, 0.117)	(0.044, 0.109)	(0.043, 0.132)

**Tabla 5.9:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(24, 24, 1.911)	(31, 15, 1.907)	(38, 3, 1.907)
	0.5	0.2	(22, 22, 1.879)	(29, 14, 1.878)	(35, 3, 1.878)
	0.2	0.4	(34, 34, 2.219)	(49, 24, 2.219)	(76, 7, 2.219)
	0.2	0.5	(35, 35, 2.270)	(51, 25, 2.269)	(81, 8, 2.270)
0.9	0.4	0.2	(23, 23, 1.937)	(31, 15, 1.937)	(39, 3, 1.937)
	0.5	0.2	(22, 22, 1.905)	(29, 14, 1.903)	(35, 3, 1.901)
	0.2	0.4	(35, 35, 2.249)	(50, 25, 2.249)	(79, 8, 2.249)
	0.2	0.5	(35, 35, 2.298)	(51, 26, 2.296)	(84, 8, 2.297)
-0.9	0.4	0.2	(24, 24, 1.898)	(32, 15, 1.898)	(39, 3, 1.898)
	0.5	0.2	(22, 22, 1.868)	(29, 14, 1.868)	(35, 3, 1.869)
	0.2	0.4	(35, 35, 2.203)	(49, 25, 2.203)	(75, 8, 2.203)
	0.2	0.5	(36, 36, 2.255)	(51, 25, 2.258)	(81, 8, 2.257)

**Tabla 5.10:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p \sim BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial

$r$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
0	0.4	0.2	(14, 14, 3.598)	(24, 12, 3.603)	(35, 3, 3.596)
	0.5	0.2	(13, 13, 3.527)	(21, 11, 3.527)	(31, 3, 3.522)
	0.2	0.4	(24, 24, 4.375)	(43, 21, 4.385)	(83, 9, 4.367)
	0.2	0.5	(25, 25, 4.507)	(45, 22, 4.522)	(90, 9, 4.521)
0.9	0.4	0.2	(14, 14, 3.671)	(24, 12, 3.674)	(36, 3, 3.668)
	0.5	0.2	(13, 13, 3.589)	(21, 11, 3.587)	(31, 3, 3.579)
	0.2	0.4	(24, 24, 4.460)	(44, 22, 4.457)	(87, 9, 4.451)
	0.2	0.5	(25, 25, 4.579)	(45, 23, 4.583)	(93, 10, 4.569)
-0.9	0.4	0.2	(15, 15, 3.582)	(24, 12, 3.574)	(35, 3, 3.569)
	0.5	0.2	(13, 13, 3.501)	(22, 10, 3.498)	(31, 3, 3.500)
	0.2	0.4	(24, 24, 4.341)	(43, 22, 4.337)	(83, 8, 4.346)
	0.2	0.5	(25, 25, 4.478)	(45, 23, 4.478)	(90, 9, 4.486)

**Tabla 5.11:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
-	-	0.2	(20, 20, 2.014)	(26, 13, 2.013)	(35, 3, 2.013)
-	-	0.3	(35, 35, 2.065)	(48, 24, 2.065)	(67, 6, 2.065)
-	-	0.4	(48, 48, 2.078)	(66, 33, 2.078)	(92, 9, 2.078)
0.019	-	-	(26, 26, 1.969)	(34, 17, 1.967)	(44, 4, 1.967)
0.019	0.012	-	(21, 21, 1.933)	(28, 14, 1.933)	(36, 3, 1.934)

**Tabla 5.12:** Diseños óptimos aproximados  $(n, m, k)$  cuando  $X \sim EV(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $p$  sigue una distribución de máxima entropía

$\mu_1$	$\sigma_1$	$\varepsilon$	$q$ (%)		
			0%	50%	90%
			$(n, m, k)$		
-	-	0.2	(13, 13, 3.876)	(21, 11, 3.875)	(35, 4, 3.871)
-	-	0.3	(23, 23, 3.988)	(40, 20, 3.987)	(69, 7, 3.985)
-	-	0.4	(32, 32, 4.008)	(55, 27, 4.009)	(95, 10, 4.007)
0.019	-	-	(16, 16, 3.749)	(27, 14, 3.749)	(43, 4, 3.746)
0.019	0.012	-	(13, 13, 3.667)	(22, 11, 3.667)	(34, 3, 3.664)

Finalmente, se calculan los riesgos simulados  $PPR_{sim}$  y  $PCR_{sim}$  correspondientes a los planes  $\varepsilon$ -imparciales de las Tablas 5.7 y 5.8. En general, en ambas distribuciones, se observan ciertas diferencias con respecto a las especificaciones. Como sucedía en los planes con riesgos promedios, cuando la censura es alta, los diseños óptimos presentan un valor conservador de  $PPR$  mientras que  $PCR$  tiende a ser superior al valor máximo  $\beta$ . En niveles de censura más bajos, los riesgos se acercan más a los valores prefijados.

## 5.4. Comparación de riesgos de los diseños óptimos

Un método apropiado para comparar diferentes planes de muestreo consiste en estudiar la relación que existe entre los distintos tipos de riesgos. Hoadley (1981, [89]), Brush et al. (1981, [28]) y Brush (1986, [27]) utilizan esta técnica para analizar los planes del estándar MIL-STD 105D (1963, [119]). En esta sección efectuaremos una comparativa del comportamiento en los riesgos de los diseños óptimos obtenidos en este capítulo y en los anteriores.

### Ejemplo (continuación)

Supongamos que, a partir de unas especificaciones determinadas, se obtiene un plan de muestreo óptimo utilizando un determinado tipo de riesgo. Por ejemplo, la Tabla 5.13 muestra un diseño óptimo con riesgos clásicos, i.e.  $PPR \simeq \alpha$  y  $PCR \simeq \beta$ , donde  $\alpha = 0.05$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.10$  y  $p_\beta = 0.03$ . Como ya se ha explicado, los riesgos clásicos representan un caso particular de los riesgos promedios cuando  $p$  sigue una distribución a priori degenerada en los niveles de calidad. En la tabla se presentan, además, los riesgos promedios y a posteriori del diseño considerando, a modo

**Tabla 5.13:** Riesgos de diseños óptimos  $(n, m, k)$  basados en riesgos clásicos cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $q \equiv 0\%$ 

Dist.	$(n, m, k)$	$(APR, ACR)$	$(PPR, PCR)$	$PPR/APR$	$PCR/ACR$
(a)	(113, 113, -0.01004)	(0.004, 0.058)	(0.002, 0.025)	0.363	0.441
(b)	(113, 113, -0.01004)	(0.002, 0.049)	(0.002, 0.017)	0.955	0.344
(c)	(113, 113, -0.01004)	(0.001, 0.044)	(0.002, 0.014)	1.382	0.313
(d)	(113, 113, -0.01004)	(0.003, 0.042)	(0.001, 0.045)	0.319	1.074
(e)	(113, 113, -0.01004)	(0.002, 0.035)	(0.001, 0.052)	0.300	1.497
(f)	(113, 113, -0.01004)	(0.003, 0.047)	(0.001, 0.021)	0.358	0.453
(g)	(113, 113, -0.01004)	(0.003, 0.050)	(0.002, 0.021)	0.607	0.419
(h)	(113, 113, -0.01004)	(0.003, 0.054)	(0.002, 0.020)	0.505	0.373

Distribuciones de  $p$ :

- (a)  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $r = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (b)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.4$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (c)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (d)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.4$ ;
- (e)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.5$ ;
- (f) Máxima entropía  $\varepsilon$ -imparcial con  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (g) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$ ;
- (h) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$  y  $\sigma = 0.012$ .

de referencia, distintas distribuciones de  $p$ . En este caso particular, se observa que el riesgo promedio del productor disminuye más de un 90% con respecto al correspondiente riesgo clásico, y el del consumidor en un 50%. La disminución es aún mayor en los riesgos a posteriori. Asimismo, en las Tablas 5.14 y 5.15 se recogen algunos diseños óptimos utilizando riesgos promedios y riesgos a posteriori, respectivamente. En estas tablas se aprecia que los valores de ambos tipos de riesgos son mayores y la comparación resulta más clara.

En general, se deducen las siguientes relaciones entre los riesgos promedios y a

**Tabla 5.14:** Riesgos de diseños óptimos  $(n, m, k)$  basados en riesgos promedios cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $q \equiv 0\%$

Dist.	$(n, m, k)$	$(APR, ACR)$	$(PPR, PCR)$	$PPR/APR$	$PCR/ACR$
(a)	(82, 82, -0.00736)	(0.048, 0.099)	(0.017, 0.044)	0.364	0.443
(b)	(74, 74, -0.00859)	(0.047, 0.099)	(0.043, 0.035)	0.916	0.355
(c)	(69, 69, -0.00473)	(0.048, 0.099)	(0.062, 0.032)	1.299	0.325
(d)	(72, 72, -0.00651)	(0.048, 0.099)	(0.016, 0.101)	0.329	1.019
(e)	(67, 67, -0.00594)	(0.048, 0.099)	(0.015, 0.136)	0.315	1.373
(f)	(75, 75, -0.00682)	(0.049, 0.100)	(0.009, 0.023)	0.174	0.235
(g)	(76, 76, -0.00667)	(0.050, 0.100)	(0.030, 0.042)	0.598	0.425
(h)	(79, 79, -0.00700)	(0.048, 0.099)	(0.024, 0.038)	0.498	0.378

Distribuciones de  $p$ :

- (a)  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $r = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (b)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.4$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (c)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (d)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.4$ ;
- (e)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.5$ ;
- (f) Máxima entropía  $\varepsilon$ -imparcial con  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (g) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$ ;
- (h) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$  y  $\sigma = 0.012$ .

posteriori:

$$\begin{aligned}
 PPR/APR &= \Pr(p \leq p_\alpha) / \Pr(\mathcal{R}) = \frac{H_1(p_\alpha)}{\int_c^d \{1 - L(p)\} h_1(p) dp}, \\
 PCR/ACR &= \Pr(p \geq p_\beta) / \Pr(\mathcal{A}) = \frac{1 - H_2(p_\beta)}{\int_c^d L(p) h_2(p) dp}.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Las relaciones anteriores son muy útiles para analizar un plan de muestreo. Si las distribuciones a priori del productor y el consumidor favorecen los niveles de calidad aceptables, i.e.  $H_1(p_\alpha)$  es alto y  $1 - H_2(p_\beta)$  bajo, entonces la probabilidad de rechazar (aceptar) los lotes es baja (alta), en cuyo caso el valor de  $PPR/APR$  irá en aumento y  $PCR/ACR$  disminuirá. Por el contrario, a medida que los lotes presentan niveles de calidad superiores a los tolerados, la probabilidad de rechazo será cada vez mayor,

**Tabla 5.15:** Riesgos de diseños óptimos  $(n, m, k)$  basados en riesgos a posteriori cuando  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$  con  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.10$ ,  $p_\alpha = 0.01$ ,  $p_\beta = 0.03$  y  $q \equiv 0\%$

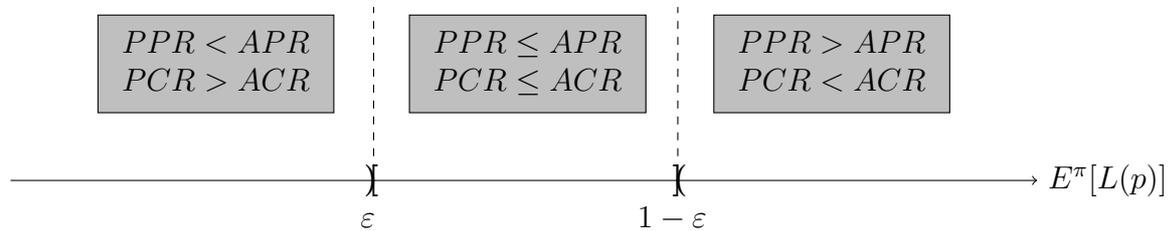
Dist.	$(n, m, k)$	$(APR, ACR)$	$(PPR, PCR)$	$PPR/APR$	$PCR/ACR$
(a)	(40, 40, -0.00456)	(0.087, 0.286)	(0.041, 0.100)	0.469	0.348
(b)	(32, 32, -0.00553)	(0.027, 0.358)	(0.039, 0.099)	1.438	0.277
(c)	(29, 29, -0.00548)	(0.017, 0.381)	(0.037, 0.099)	2.185	0.259
(d)	(71, 71, -0.00380)	(0.135, 0.085)	(0.041, 0.099)	0.304	1.167
(e)	(77, 77, -0.00291)	(0.156, 0.056)	(0.044, 0.099)	0.280	1.757
(f)	(37, 37, -0.00471)	(0.065, 0.292)	(0.032, 0.099)	0.488	0.339
(g)	(38, 38, -0.00537)	(0.049, 0.296)	(0.040, 0.100)	0.816	0.338
(h)	(33, 33, -0.00532)	(0.049, 0.355)	(0.037, 0.099)	0.754	0.280

Distribuciones de  $p$ :

- (a)  $BG(a, b, c, d, r)$   $\varepsilon$ -imparcial con  $r = 0$  y  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (b)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.4$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (c)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.5$  y  $\varepsilon_2 = 0.2$ ;
- (d)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.4$ ;
- (e)  $BG(a, b, c, d, r)$  no imparcial con  $r = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0.2$  y  $\varepsilon_2 = 0.5$ ;
- (f) Máxima entropía  $\varepsilon$ -imparcial con  $\varepsilon = 0.2$ ;
- (g) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$ ;
- (h) Máxima entropía con  $\mu = 0.019$  y  $\sigma = 0.012$ .

en cuyo caso  $PPR/APR$  disminuirá, y aumentará el valor de  $PCR/ACR$ . Estas situaciones contrapuestas se observan en los diseños no imparciales de las Tablas 5.13 hasta 5.15. Efectivamente, en los planes de dichas tablas con  $\varepsilon_2 = 0.2$  se observa que  $PPR/APR$  tiene un valor alto (y, en general, mayor que 1) y que  $PCR/ACR < 1$ . Por su parte, en los diseños correspondientes a  $\varepsilon_1 = 0.2$  se obtiene que  $PPR/APR < 1$  y  $PCR/ACR > 1$ .

El resto de los diseños de las tablas, que corresponden a distribuciones de  $p$   $\varepsilon$ -imparciales y de máxima entropía, muestran valores intermedios en las relaciones  $PPR/APR$  y  $PCR/ACR$ . Esto se debe al hecho de que, en general, estos planes utilizan distribuciones a priori en las que existe cierto equilibrio entre los niveles



**Figura 5.4:** Relación entre los riesgos promedios y a posteriori cuando la distribución de  $p$  es  $\varepsilon$ -imparcial

de calidad aceptables y tolerados. Dicho equilibrio permite comparar la probabilidad de aceptación frente a rechazo de los planes  $\varepsilon$ -imparciales. Por ejemplo, si  $PPR/APR > PCR/ACR$  entonces  $\Pr(\mathcal{R}) < \Pr(\mathcal{A})$ , tal y como se observa en los diseños  $\varepsilon$ -imparciales con riesgos a posteriori de la Tabla 5.15. Por el contrario, los planes  $\varepsilon$ -imparciales con riesgos clásicos y riesgos promedios tienen mayores posibilidades de rechazo de los lotes que de aceptación de los mismos.

Cuando la distribución de  $p$  es  $\varepsilon$ -imparcial y el productor y el consumidor se ponen de acuerdo en la distribución a priori, i.e.  $h(p) = h_1(p) = h_2(p)$ , se puede estudiar la relación entre los riesgos promedios y a posteriori según el valor de  $E^h[L(p)] = \int_c^d L(p)h(p)dp$ . La Figura 5.4 muestra, de forma gráfica, dicha relación.

En particular, cuando  $\Pr(\mathcal{A}) = E^h[L(p)] \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , con  $0 < \varepsilon < 0.5$ , se puede demostrar que  $n_{pr} \leq n_{ar}$ , donde  $n_{pr}$  y  $n_{ar}$  denotan los tamaños muestrales de los diseños óptimos con riesgos a posteriori y con riesgos promedios, respectivamente, para un mismo conjunto de especificaciones. Efectivamente, en esta situación, se tendría que  $PPR \leq APR < \alpha$  y  $PCR \leq ACR < \beta$ . Además, se comprueba que si  $E^h[L(p)] = \varepsilon$  entonces  $PCR = ACR$ , mientras que si  $E^h[L(p)] = 1 - \varepsilon$  se tiene que  $PPR = APR$ .

---

## Métodos de estimación paramétrica en fiabilidad

Considérese que  $-\infty < X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < \dots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}} < \infty$  es una muestra de  $m$  estadísticos de orden con censura progresiva de tipo II, donde  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  representa el esquema de censura. En adelante, para mayor simplicidad en la notación y sin olvidar la dependencia del esquema de censura progresiva, se denotará la muestra como  $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ . Esta muestra se determina a partir de las observaciones de una variable aleatoria  $X$  sobre  $n$  unidades idénticas de un cierto producto en un experimento de fiabilidad.

En general, en este apéndice se supondrá que  $X$  pertenece a una familia de distribuciones de localización y escala, y que tiene una función de distribución acumulada  $F(x; \mu, \sigma) = F_0((x-\mu)/\sigma)$ , y una función de densidad  $f(x; \mu, \sigma) = (1/\sigma)f_0((x-\mu)/\sigma)$ , donde  $\mu$  es el parámetro de localización y  $\sigma > 0$  el parámetro de escala. En esta situación,  $F_0$  y  $f_0$  denotan las funciones de distribución y de densidad estandarizadas de  $X$ . En particular, las distribuciones normal y de valor extremo son ejemplos de distribuciones de localización y escala. Estas distribuciones se suelen utilizar cuando  $X$  representa el logaritmo de la variable  $T$  de tiempo de fallo observado. Es decir,  $X_{i:m:n} = \log(T_{i:m:n})$ , con  $i = 1, \dots, m$ , donde  $T_{i:m:n}$  denota, de forma general, la  $i$ -ésima

observación de  $T$  en una muestra de tamaño  $n$  cuando la censura es progresiva de tipo II.

En las secciones siguientes se presentan las expresiones que permiten obtener los estimadores de máxima verosimilitud (MLEs), así como los mejores estimadores lineales insesgados (BLUEs), de  $\mu$  y  $\sigma$ . Además, también se calculan, de forma aproximada, las varianzas y covarianza de dichos estimadores.

## A.1. Estimadores de máxima verosimilitud (MLEs)

De acuerdo al apartado 1.5.3 del Capítulo 1, la log-verosimilitud de  $\mu$  y  $\sigma$  dada la muestra  $\mathbf{X}$  con esquema de censura progresiva  $\mathbf{R}$  se expresa como

$$\log \mathcal{L}(\mu, \sigma | \mathbf{X}, \mathbf{R}) = c' - m \log \sigma + \sum_{i=1}^m \log f_0(Y_{i:m:n}) + \sum_{i=1}^m R_i \log \{1 - F_0(Y_{i:m:n})\},$$

donde  $Y_{i:m:n} = (X_{i:m:n} - \mu)/\sigma$  con  $i = 1, \dots, m$  y  $c'$  es una constante.

Por tanto, las ecuaciones de verosimilitud de  $\mu$  y  $\sigma$  son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m \frac{f'_0(Y_{i:m:n})}{f_0(Y_{i:m:n})} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m R_i \frac{f_0(Y_{i:m:n})}{1 - F_0(Y_{i:m:n})} = 0, \\ \frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \sigma} &= -\frac{m}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m Y_{i:m:n} \frac{f'_0(Y_{i:m:n})}{f_0(Y_{i:m:n})} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m R_i Y_{i:m:n} \frac{f_0(Y_{i:m:n})}{1 - F_0(Y_{i:m:n})} = 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Balakrishnan y Mi (2003, [10]), y Balakrishnan y Kateri (2008, [9]) establecen la existencia y unicidad de los MLEs a partir de las ecuaciones de verosimilitud en el caso de las distribuciones normal y de valor extremo, respectivamente.

En general, las ecuaciones anteriores no permiten obtener de forma analítica los

estimadores de  $\mu$  y  $\sigma$ , y sólo se pueden resolver mediante métodos iterativos. El algoritmo de Newton-Raphson representa uno de los métodos más utilizados, aunque requiere el cálculo de las segundas derivadas parciales de la log-verosimilitud. En algunos casos, dicho cálculo puede llegar a ser bastante complicado. Un método alternativo que evita el cálculo de las derivadas segundas es el algoritmo EM desarrollado por Dempster et al. (1977, [49]) y estudiado, entre otros, por McLachlan y Krishnan (1997, [117]). Ng et al. (2002, [130]) aplican este algoritmo a la obtención de los MLEs y estudian el caso particular de las distribuciones normal y de valor extremo.

Para determinar las varianzas y covarianza de los MLEs suele considerarse la aproximación normal asintótica a la distribución conjunta de  $(\hat{\mu}_{\text{MLE}}, \hat{\sigma}_{\text{MLE}})$ . En tal situación, cuando  $n$  es grande, la matriz de varianzas-covarianza de los MLEs,  $Cov(\hat{\mu}_{\text{MLE}}, \hat{\sigma}_{\text{MLE}})$ , se puede aproximar por

$$Acov(\hat{\mu}_{\text{MLE}}, \hat{\sigma}_{\text{MLE}}) = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} \gamma_{11}(n) & \gamma_{12}(n) \\ \gamma_{21}(n) & \gamma_{22}(n) \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} J_{11}(n) & J_{12}(n) \\ J_{21}(n) & J_{22}(n) \end{pmatrix}^{-1}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $J_{ij}(n)$  es el correspondiente elemento  $(i, j)$  de la matriz de información de Fisher esperada, es decir

$$J_{11}(n) = \frac{\sigma^2}{n} E_{\mathbf{Y}} \left[ -\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \mu^2} \right], \quad J_{12}(n) = J_{21}(n) = \frac{\sigma^2}{n} E_{\mathbf{Y}} \left[ -\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma} \right]$$

y

$$J_{22}(n) = \frac{\sigma^2}{n} E_{\mathbf{Y}} \left[ -\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} \right].$$

Si la censura es de tipo II, podemos obtener la matriz asintótica de varianzas-covarianza de los MLEs a partir de (A.2) mediante el cálculo de  $J_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{ij}(n)$

cuando la proporción de censura,  $q$ , se mantiene fija. Como demostramos en el siguiente resultado, los elementos  $J_{ij}$  sólo dependen de  $n$  a través de la proporción de censura.

**Proposición A.1.1.** *Si la proporción de censura,  $q$ , está fija, los elementos de la matriz de Fisher asintótica son*

$$\begin{aligned} J_{11} &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{11}(n) = \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} dt + \frac{f_0(u_q)^2}{q}, \\ J_{12} &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{12}(n) = \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} t dt + f_0(u_q) + \frac{f_0(u_q)^2 u_q}{q} = J_{21}, \\ J_{22} &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_{22}(n) = \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f_0'(t)^2}{f_0(t)} t^2 dt + 2u_q f_0(u_q) + \frac{f_0(u_q)^2 u_q^2}{q} - (1 - q), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde  $u_q = F_0^{-1}(1 - q)$ .

*Demostración.* Supongamos que la muestra con censura de tipo II se denota por  $-\infty < X_{1:n} < \dots < X_{m:n} < \infty$  e  $Y_{i:n} = (X_{i:n} - \mu)/\sigma$ , con  $i = 1, \dots, n$ . A partir de las expresiones de (A.1), se comprueba que

$$\begin{aligned} \frac{-\sigma^2}{n} \left( \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \mu^2} \right) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{f_0''(Y_{i:n}) f_0(Y_{i:n}) - f_0'(Y_{i:n})^2}{f_0(Y_{i:n})^2} \\ &\quad + \left( \frac{n-m}{n} \right) \frac{f_0'(Y_{m:n}) \{1 - F_0(Y_{m:n})\} + f_0(Y_{m:n})^2}{\{1 - F_0(Y_{m:n})\}^2}, \\ \frac{-\sigma^2}{n} \left( \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma} \right) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{f_0'(Y_{i:n})}{f_0(Y_{i:n})} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{f_0''(Y_{i:n}) f_0(Y_{i:n}) - f_0'(Y_{i:n})^2}{f_0(Y_{i:n})^2} Y_{i:n} \\ &\quad + \left( \frac{n-m}{n} \right) \left[ \frac{f_0'(Y_{m:n}) \{1 - F_0(Y_{m:n})\} + f_0(Y_{m:n})^2}{\{1 - F_0(Y_{m:n})\}^2} Y_{m:n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_0(Y_{m:n})}{1 - F_0(Y_{m:n})} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-\sigma^2}{n} \left( \frac{\partial^2 \log \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} \right) = & -\frac{m}{n} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m \frac{f'_0(Y_{i:n})}{f_0(Y_{i:n})} Y_{i:n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{f''_0(Y_{i:n}) f_0(Y_{i:n}) - f'_0(Y_{i:n})^2}{f_0(Y_{i:n})^2} Y_{i:n}^2 \\ & + \left( \frac{n-m}{n} \right) \left[ \frac{f'_0(Y_{m:n}) \{1 - F_0(Y_{m:n})\} + f_0(Y_{m:n})^2}{\{1 - F_0(Y_{m:n})\}^2} Y_{m:n}^2 \right. \\ & \left. + \frac{2f_0(Y_{m:n})}{1 - F_0(Y_{m:n})} Y_{m:n} \right]. \end{aligned}$$

Cuando  $n$  es grande, se puede demostrar la convergencia casi segura (c.s.) de

$$Y_{m:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}} u_q \quad \text{y} \quad (1/n) \sum_{i=1}^m h(Y_{i:n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}} \int_{-\infty}^{u_q} h(t) f_0(t) dt$$

para cualquier función  $h(\cdot)$  integrable. Aplicando estas propiedades se deduce que

$$\begin{aligned} J_{11} = & - \int_{-\infty}^{u_q} f''_0(t) dt + \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f'_0(t)^2}{f_0(t)} dt + q \left\{ \frac{f'_0(u_q)}{q} + \frac{f_0(u_q)^2}{q^2} \right\}, \\ J_{12} = & - \int_{-\infty}^{u_q} f'_0(t) dt - \int_{-\infty}^{u_q} f''_0(t) t dt + \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f'_0(t)^2}{f_0(t)} t dt \\ & + q \left[ \frac{f_0(u_q)}{q} + u_q \left\{ \frac{f'_0(u_q)}{q} + \frac{f_0(u_q)^2}{q^2} \right\} \right], \\ J_{22} = & -(1-q) - 2 \int_{-\infty}^{u_q} f'_0(t) t dt - \int_{-\infty}^{u_q} f''_0(t) t^2 dt + \int_{-\infty}^{u_q} \frac{f'_0(t)^2}{f_0(t)} t^2 dt \\ & + q u_q \left[ \frac{2f_0(u_q)}{q} + u_q \left\{ \frac{f'_0(u_q)}{q} + \frac{f_0(u_q)^2}{q^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Por último, las expresiones anteriores de  $J_{11}$ ,  $J_{12}$  y  $J_{22}$  se simplifican considerando que

$$\int_{-\infty}^{u_q} f''_0(t) dt = f'_0(u_q),$$

$$\int_{-\infty}^{u_q} f_0''(t)t dt = u_q f_0'(u_q) - f_0(u_q),$$

y

$$\int_{-\infty}^{u_q} f_0''(t)t^2 dt = u_q^2 f_0'(u_q) - 2u_q f_0(u_q) + 2 \int_{-\infty}^{u_q} f_0(t) dt.$$

□

### A.1.1. Distribución normal

Cuando  $X$  sigue una distribución  $N(\mu, \sigma)$  y la censura es progresiva, las ecuaciones de verosimilitud (A.1) se pueden simplificar. Si  $f_0(x) = \phi(x)$  y  $F_0(x) = \Phi(x)$  denotan las funciones de distribución y de densidad normal estandarizadas, entonces

$$\begin{aligned} (\bar{X} - \mu) &= -\sigma \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_i}{m} \right) W(Y_{i:m:n}), \\ S^2 + (\bar{X} - \mu)^2 &= \sigma^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^m \left( \frac{R_i Y_{i:m:n}}{m} \right) W(Y_{i:m:n}) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= (1/m) \sum_{i=1}^m X_{i:m:n}, \\ S^2 &= (1/m) \sum_{i=1}^m (X_{i:m:n} - \bar{X})^2, \\ W(Y_{i:m:n}) &= \phi(Y_{i:m:n}) / \{1 - \Phi(Y_{i:m:n})\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

En este caso, los elementos  $J_{ij}(n)$  se expresan de la forma siguiente

$$\begin{aligned} J_{11}(n) &= \frac{m}{n} \left( 1 + \sum_{i=1}^m (R_i/m) E [W(Y_{i:m:n}) \{W(Y_{i:m:n}) - Y_{i:m:n}\}] \right), \\ J_{12}(n) &= \frac{m}{n} \left( \sum_{i=1}^m (R_i/m) E [W(Y_{i:m:n}) (Y_{i:m:n} \{W(Y_{i:m:n}) - Y_{i:m:n}\} - 1)] \right) = J_{21}(n), \\ J_{22}(n) &= \frac{m}{n} \left( 2 + \sum_{i=1}^m (R_i/m) E [W(Y_{i:m:n}) Y_{i:m:n} (Y_{i:m:n} \{W(Y_{i:m:n}) - Y_{i:m:n}\} - 1)] \right). \end{aligned}$$

Utilizando los resultados de la Sección A.2.2 es posible calcular, de forma aproximada, las expresiones anteriores. En concreto, si  $n$  es grande,  $Y_{i:m:n} \simeq \Phi^{-1}(\eta_i)$ , donde  $\eta_i = 1 - \zeta_{1i}$  se obtendrá a partir de (A.14).

En particular, si la censura es de tipo II, la muestra se denota como  $X_{1:n}, \dots, X_{m:n}$  y los MLEs se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{\text{MLE}} &= \bar{X} - \frac{\Omega(Y_{m:n})}{\Omega(Y_{m:n}) + Y_{m:n}} (\bar{X} - X_{m:n}), \\ \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 &= S^2 + \frac{\Omega(Y_{m:n})}{\Omega(Y_{m:n}) + Y_{m:n}} (\bar{X} - X_{m:n})^2,\end{aligned}\tag{A.5}$$

donde  $Y_{m:n} = (X_{m:n} - \mu)/\sigma$  y

$$\begin{aligned}\bar{X} &= (1/m) \sum_{i=1}^m X_{i:n}, \\ S^2 &= (1/m) \sum_{i=1}^m (X_{i:n} - \bar{X})^2, \\ \Omega(Y_{m:n}) &= \{(n - m)/m\} W(Y_{m:n}).\end{aligned}$$

En esta situación, se observa que los elementos  $J_{ij}$  de la matriz de información de Fisher asintótica admiten la siguiente representación particular, de acuerdo a la Proposición A.1.1

$$\begin{aligned}J_{11} &= (1 - q)[1 + \Omega(u_q) \{W(u_q) - u_q\}], \\ J_{12} &= (1 - q)[\Omega(u_q) (u_q \{W(u_q) - u_q\} - 1)] = J_{21}, \\ J_{22} &= (1 - q)[2 + \Omega(u_q)u_q (u_q \{W(u_q) - u_q\} - 1)],\end{aligned}$$

donde  $Y_{m:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}} u_q = \Phi^{-1}(1 - q)$ , con  $q$  fijo.

### A.1.2. Distribución de valor extremo

Cuando  $X$  sigue una distribución de valor extremo, las ecuaciones de verosimilitud (A.1) se expresan como

$$\begin{aligned} m &= \exp(-\mu/\sigma) \sum_{i=1}^m (R_i + 1) \exp(X_{i:m:n}/\sigma), \\ \bar{X} &= -\sigma + \frac{\sum_{i=1}^m (R_i + 1) X_{i:m:n} \exp(X_{i:m:n}/\sigma)}{\sum_{i=1}^m (R_i + 1) \exp(X_{i:m:n}/\sigma)}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se comprueba que los elementos de la matriz de información de Fisher esperada son

$$\begin{aligned} J_{11}(n) &= m/n, \\ J_{12}(n) &= (1/n) \left\{ m + \sum_{i=1}^m E[Y_{i:m:n}] \right\} = J_{21}(n), \\ J_{22}(n) &= (1/n) \left\{ m + \sum_{i=1}^m (R_i + 1) E[Y_{i:m:n}^2 \exp(Y_{i:m:n})] \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando la función generatriz de momentos de  $Y_{i:m:n}$ , se obtienen las siguientes expresiones, de acuerdo a Ng. et al (2002, [130] y 2004, [131]),

$$\begin{aligned} E[e^{tY_{i:m:n}}] &= c_i \Gamma(t+1) \sum_{j=1}^i \frac{a_{j,i}}{r_j^{t+1}}, \\ E[Y_{i:m:n} e^{tY_{i:m:n}}] &= c_i \Gamma(t+1) \sum_{j=1}^i \frac{a_{j,i}}{r_j^{t+1}} \{\psi(t+1) - \log r_j\}, \\ E[Y_{i:m:n}^2 e^{tY_{i:m:n}}] &= c_i \Gamma(t+1) \sum_{j=1}^i \frac{a_{j,i}}{r_j^{t+1}} [\psi'(t+1) + \{\psi(t+1) - \log r_j\}^2], \end{aligned}$$

donde  $\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \log \Gamma(x)$  y  $\psi'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x)$  son las funciones digamma y trigamma, respectivamente, y

$$\begin{aligned} r_i &= n - i + 1 + \sum_{j=i}^m R_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ c_i &= \prod_{j=i}^i r_j, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_{j,i} &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^i \frac{1}{r_l - r_j}, \quad 1 \leq j \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Cuando la censura es de tipo II, las ecuaciones que permiten calcular los MLEs dada una muestra  $X_{1:n}, \dots, X_{m:n}$  son las siguientes

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^m X_{i:n} e^{X_{i:n}/\sigma} + (n - m) X_{m:n} e^{X_{m:n}/\sigma}}{\sum_{i=1}^m e^{X_{i:n}/\sigma} + (n - m) e^{X_{m:n}/\sigma}} - \sigma, \\ e^\mu &= \left[ (1/m) \sum_{i=1}^m e^{X_{i:n}/\sigma} + (n - m) e^{X_{m:n}/\sigma} \right]^\sigma, \end{aligned} \tag{A.7}$$

Como  $X$  sigue una distribución de valor extremo, los elementos de la matriz de información de Fisher asintótica se calculan según la Proposición A.1.1. En particular

$$\begin{aligned} J_{11} &= 1 - q, \\ J_{12} &= (1 - q) \left\{ 1 + \frac{1}{1 - e^{-e^{u_q}}} \Gamma'(1, e^{u_q}) \right\} = J_{21}, \\ J_{22} &= (1 - q) \left[ 1 + \frac{1}{1 - e^{-e^{u_q}}} \{ 2\Gamma'(1, e^{u_q}) + \Gamma''(1, e^{u_q}) \} \right], \end{aligned}$$

donde  $Y_{m:n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}} u_q = \ln(-\ln q)$ , con  $q$  fijo, y

$$\Gamma'(k, e^{u_q}) = \int_0^{e^{u_q}} t^{k-1} \ln(t) \exp(-t) dt \quad y \quad \Gamma''(k, e^{u_q}) = \int_0^{e^{u_q}} t^{k-1} \{\ln(t)\}^2 \exp(-t) dt.$$

## A.2. Mejores estimadores lineales insesgados (BLUEs)

Si  $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$  y  $\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^t - \mu \mathbf{1})/\sigma$ , con  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t$  vector  $m$ -dimensional, los BLUEs se obtienen minimizando la varianza generalizada

$$Q(\eta) = (\mathbf{X}^t - \eta)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{X}^t - \eta),$$

donde  $\eta = E[\mathbf{Y}]$  y  $\Sigma = Var(\mathbf{Y})$ .

Por tanto, los BLUEs de  $\mu$  y  $\sigma$  se expresan de la siguiente forma

$$\hat{\mu}_{\text{BLUE}} = -\eta^t \Gamma \mathbf{X}^t \quad y \quad \hat{\sigma}_{\text{BLUE}} = \mathbf{1}^t \Gamma \mathbf{X}^t,$$

donde  $\Gamma = (1/\Delta) \Sigma^{-1} (\mathbf{1} \eta^t - \eta \mathbf{1}^t) \Sigma^{-1}$  y  $\Delta = (\eta^t \Sigma^{-1} \eta) (\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}) - (\eta^t \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2$ .

La matriz de varianzas-covarianza de los BLUEs viene dada por

$$Cov(\hat{\mu}_{\text{BLUE}}, \hat{\sigma}_{\text{BLUE}}) = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} \gamma_{11}(n) & \gamma_{12}(n) \\ \gamma_{21}(n) & \gamma_{22}(n) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\gamma_{11}(n) = n \frac{\eta^t \Sigma^{-1} \eta}{\Delta}, \quad \gamma_{12}(n) = \gamma_{21}(n) = -n \frac{\eta^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\Delta} \quad y \quad \gamma_{22}(n) = n \frac{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\Delta}. \quad (\text{A.9})$$

Con respecto al cálculo de  $\eta$  y  $\Sigma$ , las secciones siguientes recogen las expresiones

para el cálculo de los momentos de los estadísticos de orden  $Y_{i:m:n}$ . Sin embargo, la determinación de dichos momentos presenta algunas dificultades. Por esta razón, se proponen algunas aproximaciones que facilitan su obtención, en cuyo caso los correspondientes mejores estimadores lineales insesgados aproximados se denominarán ABLUEs. En esta situación, si  $n$  es grande, la matriz (A.8) es aproximadamente igual a

$$Cov(\hat{\mu}_{\text{BLUE}}, \hat{\sigma}_{\text{BLUE}}) = \frac{\sigma^2}{n} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^*(n) & \gamma_{12}^*(n) \\ \gamma_{21}^*(n) & \gamma_{22}^*(n) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $\gamma_{ij}^*(n)$  se calculan a partir de (A.9) utilizando las expresiones de los momentos que se estudiarán en las Secciones A.2.2 y A.2.3. Es preciso señalar que la matriz anterior es una buena aproximación de la matriz asintótica de varianzas-covarianza de  $\hat{\mu}_{\text{BLUE}}$  y  $\hat{\sigma}_{\text{BLUE}}$  cuando  $n$  es grande.

### A.2.1. Momentos de estadísticos de orden con censura progresiva

Existen varios métodos para determinar los momentos de los estadísticos de orden de los tiempos de fallo (o de sus logaritmos) cuando la censura es progresiva. Thomas y Wilson (1972, [169]) presentan un procedimiento por medio del cual se pueden obtener las medias, varianzas y covarianza de dichos estadísticos de orden. Balakrishnan et al. (2002, [8]) desarrollan un método computacional alternativo para calcular los momentos. Cabe destacar que los métodos citados resultan válidos para cualquier distribución. Además, ambos utilizan los momentos de los estadísticos de orden usuales. Sin embargo, desde el punto de vista computacional, el procedimiento de Balakrishnan et al. (2002) es más eficiente que el propuesto por Thomas y Wilson (1972).

De acuerdo a Balakrishnan et al. (2002), el  $k$ -ésimo momento del estadístico de orden con censura progresiva  $Y_{i:m:n}$  se expresa como

$$E[Y_{i:m:n}^k] = \varepsilon \sum_{u=0}^{i-1} \frac{\eta_1(u, 1, i-1)}{\eta_2(u, 1, i-1)} \mu_{1:\eta_2(u, 1, i-1)}^{(k)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $\varepsilon = n(n - R_1 + 1) \cdots \{n - \sum_{s=1}^{i-1} (R_s + 1)\}$  y

$$\eta_1(u, i, j) = (-1)^u \eta_{11}(u, i, j) \eta_{12}(u, i, j), \quad u = 0, \dots, j - i + 1, \quad 1 \leq i \leq j \leq m,$$

con

$$\begin{aligned} \eta_{11}(u, i, j) &= \left\{ \prod_{s=1}^u \sum_{t=j-u+1}^{j-u+s} (R_t + 1) \right\}^{-1}, \quad u = 1, \dots, j - i + 1, \\ \eta_{12}(u, i, j) &= \left\{ \prod_{s=1}^{j-i+1-u} \sum_{t=s+i-1}^{j-u} (R_t + 1) \right\}^{-1}, \quad u = 0, \dots, j - i, \\ \eta_{11}(0, i, j) &= \eta_{12}(j - i + 1, i, j) = 1, \end{aligned}$$

y, además

$$\begin{aligned} \eta_2(u, i, j) &= n + \eta_3(i, j) + \eta_3(j - u + 1, j), \quad u = 1, \dots, j - i + 1, \\ \eta_2(0, i, j) &= n + \eta_3(i, j), \end{aligned}$$

donde  $\eta_3(i, j) = \sum_{s=i}^j (R_s + 1)$ . En este caso,  $\mu_{1:\eta_2(u, 1, i-1)}^{(k)}$  denota el  $k$ -ésimo momento del estadístico de orden 1 en una muestra de tamaño  $\eta_2(u, 1, i-1)$ , es decir,  $E[Y_{1:\eta_2(u, 1, i-1)}^k]$ .

El momento producto de los estadísticos de orden con censura progresiva viene

dado por

$$E[Y_{i:m:n}Y_{j:m:n}] = \varepsilon \sum_{u=0}^{i-1} \sum_{v=0}^{j-i-1} \sum_{w=0}^{\eta_3(i-u, j-1-v)-1} \frac{\binom{\eta_3(i-u, j-1-v)-1}{w}}{(w+1)(w+2) \binom{\vartheta(i, j, u, v)}{w+2}} \\ \times \eta_1(u, 1, i-1) \eta_1(u, i+1, j-1) \mu_{1, (w+2):\vartheta(i, j, u, v)}, \\ i, j = 1, \dots, m, \quad i < j,$$

donde

$$\vartheta(i, j, u, v) = \{\eta_3(i-u, j-1-v) + \eta_2(v, 1, j-1)\},$$

y  $\mu_{1, (w+2):\vartheta(i, j, u, v)}$  es el momento producto de los estadísticos de orden 1 y  $(w+2)$  en una muestra de tamaño  $\vartheta(i, j, u, v)$ .

Para obtener los momentos de los estadísticos de orden usuales,  $\mu_{1:n}$  y  $\mu_{i:j:n}$ , conviene recordar que la función de densidad de  $Y_{i:n}$  es

$$g_{Y_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F_0(x)^{i-1} \{1 - F_0(x)\}^{n-i} f_0(x),$$

y la función de densidad conjunta de  $Y_{i:n}$  e  $Y_{j:n}$  es

$$g_{Y_{i:n}, Y_{j:n}}(x, y) = \frac{n! F_0(x)^{i-1} \{F_0(x) - F_0(y)\}^{j-i-1} \{1 - F_0(x)\}^{n-j}}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f_0(x) f_0(y), \quad x < y.$$

Hay que mencionar que, para ciertas distribuciones como la normal, el cálculo exacto de los momentos de los estadísticos de orden con censura progresiva requiere una precisión numérica bastante alta para evitar los errores de redondeo. Cuando la censura es de tipo II, el cálculo de los momentos correspondientes también puede

presentar cierta complejidad. Por tanto, en estos casos, se suele recurrir a expresiones alternativas. En concreto, en las Secciones A.2.2 y A.2.3 se presentan aproximaciones a los momentos mediante polinomios de Taylor que facilitan su cálculo de forma significativa.

Para la distribución de valor extremo, las expresiones presentadas por Balakrishnan et al. (2002) se simplifican notablemente debido a sus propiedades. Lieblein (1953, [109]) desarrolla dichas expresiones cuando la censura es de tipo II. Mann (1971, [113]) estudia los momentos con censura progresiva para deducir los mejores estimadores lineales invariantes (BLIE) de  $\mu$  y  $\sigma$ . También se han estudiado aproximaciones a los momentos de los estadísticos de orden cuando la distribución es de valor extremo. Por ejemplo, Thomas y Wilson (1972, [169]) utilizan una aproximación a dichos momentos para obtener los ABLUE. En este sentido, las aproximaciones mediante polinomios de Taylor presentadas en las Secciones A.2.2 y A.2.3 se pueden aplicar a esta distribución.

### A.2.2. Aproximaciones de los momentos de estadísticos de orden con censura progresiva

Tal y como se ha comentado al final de la sección anterior, el cálculo de los momentos de estadísticos de orden con censura progresiva resulta muy complicado. Por tanto, a menudo es aconsejable utilizar ciertas aproximaciones que faciliten dicho cálculo. Concretamente, Balakrishnan y Rao (1997, [11]) y Balasooriya y Saw (1999, [15]) utilizan los desarrollos de Taylor de  $Y_{i:m:n}$ . Mediante la transformada de la integral de probabilidad, se tiene que:

$$Y_{i:m:n} \equiv F_0^{-1}(U_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $U_{i:m:n}$  denota el  $i$ -ésimo estadístico de orden con censura progresiva de una distribución uniforme  $U(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Suponiendo la existencia de las derivadas correspondientes, el desarrollo de Taylor de orden  $s$  de  $F_0^{-1}(U_{i:m:n})$  en torno a  $\eta_i = E[U_{i:m:n}]$  viene dado por

$$F_0^{-1}(U_{i:m:n}) \simeq \sum_{u=0}^s \frac{F_0^{-1(u)}(\eta_i)}{u!} (U_{i:m:n} - \eta_i)^u, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $F_0^{-1(0)}(x) = F_0^{-1}(x)$  y  $F_0^{-1(u)}(x) = \frac{\partial^u}{\partial x^u} F_0^{-1}(x)$  es la derivada  $u$ -ésima de  $F_0^{-1}(x)$ .

En particular, si la distribución de  $Y$  es normal, se tiene que

$$F_0^{-1(1)}(y) = \frac{\partial \Phi^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(y))}$$

y

$$F_0^{-1(2)}(y) = \frac{\partial^2 \Phi^{-1}(x)}{\partial x^2} = \frac{\Phi^{-1}(y)}{\phi(\Phi^{-1}(y))^2}.$$

Si  $Y$  sigue la distribución de valor extremo, entonces

$$F_0^{-1(1)}(y) = \frac{-1}{\{(1-y) \ln(1-y)\}}$$

y

$$F_0^{-1(2)}(y) = \frac{-\{1 + \ln(1-y)\}}{\{(1-y)^2 \ln(1-y)^2\}}.$$

Por tanto, las aproximaciones de orden  $s$  a los momentos de los estadísticos de orden  $Y_{i:m:n}$  vienen dadas por

$$\begin{aligned}
E[Y_{i:m:n}] &\simeq \sum_{u=0}^s \frac{F_0^{-1(u)}(\eta_i)}{u!} E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^u], \\
E[Y_{i:m:n}^2] &\simeq \sum_{u=0}^s \left\{ \frac{F_0^{-1(u)}(\eta_i)}{u!} \right\}^2 E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^{2u}] \\
&\quad + 2 \sum_{u=0}^{s-1} \sum_{v=u+1}^s \left\{ \frac{F_0^{-1(u)}(\eta_i) F_0^{-1(v)}(\eta_i)}{u! v!} \right\} E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^{u+v}], \\
E[Y_{i:m:n} Y_{j:m:n}] &\simeq \sum_{u=0}^s \sum_{v=0}^s \left\{ \frac{F_0^{-1(u)}(\eta_i) F_0^{-1(v)}(\eta_j)}{u! v!} \right\} E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^u (U_{j:m:n} - \eta_j)^v].
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Balakrishnan y Sandhu (1995, [12]) establecen que

$$U_{i:m:n} = 1 - \prod_{u=1}^i W_u, \quad i = 1, \dots, m, \tag{A.12}$$

donde  $W_u \sim \text{Beta}(\eta_3(u, m), 1)$ , con  $u = 1, \dots, m$ , son independientes y  $\eta_3(u, m) = \sum_{s=u}^m (R_s + 1)$ , como ya se había denotado previamente. Se puede comprobar que

$$U_{i:m:n} - \eta_i = \zeta_{1i} - \prod_{u=1}^i W_u, \quad i = 1, \dots, m, \tag{A.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
\zeta_{0i} &= 1, \\
\zeta_{hi} &= \prod_{u=1}^i \frac{\eta_3(u, m)}{\eta_3(u, m) + h}, \quad h = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{A.14}$$

A partir de (A.13), Balasooriya y Saw (1999, [15]) desarrollan los momentos de los estadísticos de orden  $U_{i:m:n}$ , para  $i = 1, \dots, m$ , con lo cual

$$\begin{aligned}
 m_{10}(i, 0) &= E[(U_{i:m:n} - \eta_i)] = 0, \\
 m_{u0}(i, 0) &= E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^u] = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u}{k} \zeta_{1i}^{u-k} \zeta_{ki}, \quad u = 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

En general, si  $i < j$ , con  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 m_{uv}(i, j) &= E[(U_{i:m:n} - \eta_i)^u (U_{j:m:n} - \eta_j)^v] \\
 &= \sum_{k=0}^u \sum_{l=0}^v (-1)^{k+l} \binom{u}{k} \binom{v}{l} \zeta_{1i}^{u-k} \zeta_{1j}^{v-l} \zeta_{(k+l)i} \zeta_{lj} / \zeta_{li}, \quad u, v = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

Utilizando las expresiones anteriores, se obtienen las aproximaciones de cualquier orden a los momentos de los estadísticos de orden de  $Y_{i:m:n}$ . Por ejemplo, denotando por  $\tau_i = F_0^{-1}(\eta_i)$ ,  $\tau'_i = F_0^{-1(1)}(\eta_i)$  y  $\tau''_i = F_0^{-1(2)}(\eta_i)$ , se tiene la siguiente aproximación de segundo orden

$$\begin{aligned}
 E[Y_{i:m:n}] &\simeq \tau_i + \frac{\tau''_i}{2} m_{20}(i, 0), \\
 E[Y_{i:m:n}^2] &\simeq \tau_i^2 + \{(\tau'_i)^2 + \tau_i \tau''_i\} m_{20}(i, 0) + \tau'_i \tau''_i m_{30}(i, 0) + \frac{(\tau''_i)^2}{4} m_{40}(i, 0), \\
 E[Y_{i:m:n} Y_{j:m:n}] &\simeq \tau_i \tau_j + \frac{\tau_i \tau''_j}{2} m_{02}(i, j) + \tau'_i \tau'_j m_{11}(i, j) + \frac{\tau'_i \tau''_j}{2} m_{12}(i, j) \\
 &\quad + \frac{\tau''_i \tau_j}{2} m_{20}(i, j) + \frac{\tau''_i \tau'_j}{2} m_{21}(i, j) + \frac{\tau''_i \tau''_j}{4} m_{22}(i, j),
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

donde  $\eta_k = E[U_{k:m:n}] = 1 - \zeta_{1k}$ , con  $k = i, j$ .

Los desarrollos de Taylor presentados permiten calcular los estimadores lineales insesgados aproximados de  $\mu$  y  $\sigma$ , en cuyo caso se denotan como ABLUE( $s$ ) dependiendo del orden  $s$  considerado en la aproximación. A partir de (A.8), es posible obtener los elementos  $\gamma_{ij}^*(n)$  de la matriz aproximada (A.10) de varianzas-covarianza de estos ABLUE( $s$ ).

### A.2.3. Aproximaciones de los momentos de estadísticos de orden con censura de tipo II

Cuando la censura es de tipo II, las aproximaciones a los momentos de estadísticos de orden se simplifican de forma significativa. Si  $X_{1:n}, \dots, X_{m:n}$  es una muestra con censura de tipo II, entonces  $Y_{i:n} \equiv F_0^{-1}(U_{i:n})$ , donde  $U_{i:n}$  denota el  $i$ -ésimo estadístico de orden usual de una distribución uniforme  $U(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . De este modo, el desarrollo de Taylor de  $Y_{i:n}$  en torno a  $p_i = E[U_{i:n}]$  se expresa como

$$F_0^{-1}(U_{i:n}) \simeq \sum_{u=0}^s \frac{F_0^{-1(u)}(p_i)}{u!} (U_{i:n} - p_i)^u, \quad i = 1, \dots, m,$$

donde  $p_i = i/(n+1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . David (1970, [44]) ha estudiado la precisión del desarrollo anterior hasta el orden  $(n+2)^{-2}$ . Denotando por  $\xi_i = F_0^{-1}(p_i)$ ,  $\xi'_i = F_0^{-1(1)}(p_i)$ ,  $\xi''_i = F_0^{-1(2)}(p_i)$  y así sucesivamente, se deducen las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned} \mu_{i:n} = E[Y_{i:n}] &\simeq \xi_i + \frac{p_i(1-p_i)}{2(n+2)} \xi''_i + \frac{p_i(1-p_i)}{(n+2)^2} \left\{ \frac{1}{3}(1-2p_i)\xi'''_i + \frac{1}{8}p_i(1-p_i)\xi''''_i \right\}, \\ \sigma_{i:n}^2 = Var[Y_{i:n}^2] &\simeq \frac{p_i(1-p_i)}{(n+2)} (\xi'_i)^2 + \frac{p_i(1-p_i)}{(n+2)^2} \left\{ 2(1-2p_i)\xi'_i\xi''_i + p_i(1-p_i) \right. \\ &\quad \left. \times (\xi'_i\xi'''_i + (\xi''_i)^2/2) \right\}, \\ \sigma_{i,j:n} = Cov[Y_{i:n}Y_{j:n}] &\simeq \frac{p_i(1-p_j)}{(n+2)} \xi'_i\xi'_j + \frac{p_i(1-p_i)}{(n+2)} \left\{ (1-2p_i)\xi''_i\xi'_j + (1-2p_j)\xi'_i\xi''_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}p_i(1-p_i)\xi'''_i\xi'_j + \frac{1}{2}p_j(1-p_j)\xi'_i\xi'''_j + \frac{1}{2}p_i(1-p_j)\xi''_i\xi''_j \right\}. \end{aligned} \tag{A.18}$$

---

## Métodos de simulación

A continuación se describen los procedimientos para generar muestras con censura progresiva o censura de tipo II de una variable  $X$ . También se describe el método empleado para simular los riesgos del productor y el consumidor en los diseños de planes de muestreo presentados en este trabajo.

### B.1. Simulación de muestras pseudo-aleatorias sometidas a censura

Sea  $X$  una variable aleatoria continua con una función de distribución acumulada  $F(x; \boldsymbol{\omega})$ , donde  $\boldsymbol{\omega}$  denota el vector de parámetros de la distribución definido sobre un espacio paramétrico  $\Omega$ .

Balakrishnan y Sandhu (1995, [12]) desarrollan el procedimiento B.1 que permite obtener una muestra pseudo-aleatoria  $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$  cuando la censura es progresiva. El esquema de censura viene dado por  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ , de forma que  $m + \sum_{i=1}^m R_i = n$ .

Cuando la censura es de tipo II, el Procedimiento B.2 describe el método para generar una muestra pseudo-aleatoria  $\mathbf{X} = (X_{1:n}, \dots, X_{m:n})$  (véase Meeker y Escobar,

**Procedimiento B.1:** Generación de una muestra  $(X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$  con censura progresiva de la variable  $X$  con función de distribución  $F(x; \boldsymbol{\omega})$

- Dada una muestra de  $m$  valores pseudo-aleatorios  $U_1, \dots, U_m$  de una distribución  $U[0, 1]$ , se calculan las cantidades  $V_i = U_i^{1/(i + \sum_{j=m-i+1}^m R_j)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- Los estadísticos de orden pseudo-aleatorios con censura progresiva de la distribución uniforme se obtienen como

$$U_{i:m:n} = 1 - \prod_{u=0}^{i-1} V_{m-u}.$$

- La muestra pseudo-aleatoria procedente de la distribución  $F(x; \boldsymbol{\omega})$  se obtiene como

$$X_{i:m:n} = F^{-1}(U_{i:m:n}; \boldsymbol{\omega}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Por ejemplo, si la distribución es de localización y escala se considera que  $\boldsymbol{\omega} = (\mu, \sigma)$ . Entonces, la función de distribución acumulada es  $F(x; \mu, \sigma) = F_0((x - \mu)/\sigma)$  y

$$X_{i:m:n} = \mu + \sigma F_0^{-1}(U_{i:m:n}), \quad i = 1, \dots, m.$$

1998, [118]). En este tipo de censura se someten a experimentación  $n$  unidades muestrales y sólo se consideran las  $m$  primeras observaciones.

## B.2. Simulación de la curva OC de un plan con riesgos clásicos

En el caso de algunas distribuciones, los diseños de planes de muestreo clásicos que se presentan en los Capítulos 2 y 3 se obtienen a partir de aproximaciones asintóticas de la curva característica. Por tanto, la aplicación del plan de muestreo está sujeta a unos riesgos que no coinciden de forma exacta con los valores especificados tanto el productor como el consumidor. Como no se conoce la expresión exacta de la curva

---

**Procedimiento B.2:** Generación de una muestra  $(X_{1:n}, \dots, X_{m:n})$  con censura de tipo II de la variable  $X$  con función de distribución  $F(x; \boldsymbol{\omega})$

---

- A partir de una muestra de  $m$  valores pseudo-aleatorios  $U_1, \dots, U_m$  de una distribución  $U[0, 1]$ , se calculan los estadísticos de orden pseudo-aleatorios de la distribución uniforme

$$U_{i:n} = 1 - (1 - U_{i-1:n})(1 - U_i)^{1/(n-i+1)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

donde  $U_{0:n} = 0$ .

- La muestra pseudo-aleatoria procedente de la distribución  $F(x; \boldsymbol{\omega})$  se obtiene como

$$X_{i:n} = F^{-1}(U_{i:n}; \boldsymbol{\omega}), \quad i = 1, \dots, m.$$

Por ejemplo, si la distribución es de localización y escala, se considera que  $\boldsymbol{\omega} = (\mu, \sigma)$ . La función de distribución acumulada es  $F(x; \mu, \sigma) = F_0((x - \mu)/\sigma)$  y

$$X_{i:n} = \mu + \sigma F_0^{-1}(U_{i:n}), \quad i = 1, \dots, m.$$


---

característica, resulta necesario simular los puntos de dicha curva con objeto de estudiar en qué medida se satisfacen los requerimientos del plan de muestreo. En general, sean  $\alpha$  y  $\beta$  los riesgos máximos especificados para unos niveles de calidad  $p_\alpha$  y  $p_\beta$  por el productor y el consumidor, respectivamente. Entonces, a partir del diseño del plan de muestreo correspondiente a dichas especificaciones, se trata de simular los riesgos exactos del plan. De acuerdo a la notación del Capítulo 1, los riesgos clásicos simulados del productor y del consumidor se denominarán  $CPR_{sim}$  y  $CCR_{sim}$ , respectivamente. En particular, el Procedimiento B.3 describe la metodología que permite determinar dichos riesgos.

---

**Procedimiento B.3:** Simulación de los riesgos clásicos del productor y del consumidor

---

- Se considera el diseño  $(n, m, k, \mathbf{R})$ , si la censura es progresiva, o  $(n, m, k)$ , si la censura es de tipo II, de un plan de muestreo con riesgos clásicos.
- Se generan  $N$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $X$ . En concreto, se supone que  $X$  sigue una distribución de localización  $\mu$  y escala  $\sigma$ . El método para obtener dichas muestras está descrito en los Procedimientos B.1 (si la censura es progresiva) y B.2 (si la censura es de tipo II).
- Para cada una de las  $N$  muestras generadas se determinan los correspondientes estimadores equivariantes  $\hat{\mu}_v$  y  $\hat{\sigma}_v$  de los parámetros de localización y escala, con  $v = 1, \dots, N$ . En particular, en el Apéndice A se muestran las expresiones que permiten calcular los MLEs y los BLUEs.
- La curva OC del plan es  $L(p) = \Pr(K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) > k)$ , donde  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  es la cantidad pivotal definida en (2.2) para los estimadores  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ . Considerando la función indicatriz  $I_A(x) = 1$  si  $x \in A$ , ó  $I_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ , la probabilidad empírica de aceptar el lote se obtiene como

$$L_{sim}(p) = (1/N) \sum_{v=1}^N I_S(\hat{\mu}_v, \hat{\sigma}_v), \quad (\text{B.1})$$

donde  $S = \{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) : K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) > k\}$ .

- Los riesgos clásicos simulados del productor y el consumidor serían  $CPR_{sim} = 1 - L_{sim}(p_\alpha)$  y  $CCR_{sim} = L_{sim}(p_\beta)$ , respectivamente.
- 

### B.3. Simulación de la curva OC de un diseño con riesgos promedios y a posteriori

En esta sección se detallan los procedimientos de simulación de los riesgos reales de los planes óptimos con riesgos promedios y a posteriori presentados en los Capítulos 4 y 5. De nuevo, de acuerdo al Capítulo 1, los riesgos promedios simulados del productor y el consumidor se denotarán como  $APR_{sim}$  y  $ACR_{sim}$ , respectivamente. Por otro

---

**Procedimiento B.4:** Generación de una muestra  $(p_1, \dots, p_N)$  de la variable  $p$  con función de distribución  $H(p; \boldsymbol{\omega}_p)$

---

- Se generan  $N$  valores pseudo-aleatorios  $U_1, \dots, U_N$  de la distribución  $U[0, 1]$ .
- La muestra pseudo-aleatoria procedente de la variable  $p$  se obtiene mediante el método de inversión de la función de distribución:

$$p_i = H^{-1}(U_i; \boldsymbol{\omega}_p), \quad i = 1, \dots, N.$$


---

lado, los riesgos simulados a posteriori se denominarán  $PPR_{sim}$  y  $PCR_{sim}$ . Como principal diferencia con respecto al método de simulación de riesgos clásicos, hay que señalar la necesidad de tener en cuenta la distribución a priori de la proporción de unidades defectuosas  $p$ .

Supóngase que  $H_1(p; \boldsymbol{\omega}_p^{(1)})$  y  $H_2(p; \boldsymbol{\omega}_p^{(2)})$  denotan las funciones de distribución de  $p$  especificadas por el productor y el consumidor, respectivamente. En esta situación,  $\boldsymbol{\omega}_p^{(1)}$  y  $\boldsymbol{\omega}_p^{(2)}$  denotan los vectores de parámetros de ambas distribuciones a priori definidos, de forma respectiva, sobre los espacios paramétricos  $\Omega_p^{(1)}$  y  $\Omega_p^{(2)}$ . Mediante el Procedimiento B.4 es posible generar una muestra  $(p_1, \dots, p_N)$  de valores de  $p$  para dichas distribuciones. Una vez obtenida la muestra, los riesgos promedios simulados de un plan de muestreo se pueden hallar aplicando el Procedimiento B.5 mientras que los riesgos a posteriori se obtendrían a partir del Procedimiento B.6.

La incorporación de una distribución a priori de  $p$  en los diseños óptimos para ambos tipos de riesgos dificulta su determinación puesto que es necesario utilizar métodos de resolución numérica. En particular, la Sección B.4 describe algunos de los métodos empleados en los Capítulos 4 y 5 para obtener los parámetros de las diferentes distribuciones de  $p$ .

---

**Procedimiento B.5:** Simulación de los riesgos promedios del productor y el consumidor con censura de tipo II

---

- Sean  $h_1(p)$  y  $h_2(p)$  ( $H_1(p)$  y  $H_2(p)$ ) las funciones de densidad (funciones de distribución) a priori del productor y el consumidor, respectivamente.
- Suponiendo que  $p \in [c, d]$ , se aplica el Procedimiento (B.4) para obtener una muestra de  $N_1$  valores de  $p$  para cada distribución. La muestra con la distribución del productor es  $p_1^{(1)}, \dots, p_{N_1}^{(1)}$ , y con la distribución del consumidor es  $p_1^{(2)}, \dots, p_{N_1}^{(2)}$ .
- Se considera el diseño  $(n, m, k)$  de un plan de muestreo con riesgos promedios y con censura de tipo II. Utilizando el procedimiento B.2 se generan  $N_2$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $X$ . De nuevo,  $X$  sigue una distribución de localización  $\mu$  y escala  $\sigma$ .
- Sean  $\hat{\mu}_v$  y  $\hat{\sigma}_v$  los estimadores equivariantes (e.g., los MLEs) de los parámetros de  $X$ , con  $v = 1, \dots, N_2$ . Las expresiones para obtener los MLEs se presentan en el Apéndice A.
- Considerando la función indicatriz  $I_A(x) = 1$  si  $x \in A$ , ó  $I_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ , la probabilidad empírica de aceptar el lote es

$$L_{sim}(p) = (1/N_2) \sum_{v=1}^{N_2} I_S(\hat{\mu}_v, \hat{\sigma}_v), \quad (\text{B.2})$$

donde  $S = \{(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) : K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) > k\}$ .

- Los riesgos promedios simulados se calculan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} APR_{sim} &= \frac{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[c, p_\alpha]}(p_u^{(1)}) \{1 - L_{sim}(p_u^{(1)})\}}{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[c, p_\alpha]}(p_u^{(1)})}, \\ ACR_{sim} &= \frac{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[p_\beta, d]}(p_u^{(2)}) L_{sim}(p_u^{(2)})}{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[p_\beta, d]}(p_u^{(2)})}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

---

## B.4. Métodos de optimización numérica

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función vectorial tal que  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^t$ , con  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no lineales,  $i = 1, \dots, m$ . Consideremos el siguiente problema de

---

**Procedimiento B.6:** Simulación de los riesgos a posteriori del productor y el consumidor con censura de tipo II

---

- Se aplica el Procedimiento B.4 para generar las muestras de  $N_1$  valores de  $p \in [c, d]$  para las distribuciones del productor y el consumidor. Dichas muestras son  $p_1^{(1)}, \dots, p_{N_1}^{(1)}$  y  $p_1^{(2)}, \dots, p_{N_1}^{(2)}$ , respectivamente.
- Considérese el diseño  $(n, m, k)$  de un plan de muestreo con riesgos a posteriori y con censura de tipo II. Se generan  $N_2$  muestras de tamaño  $n$  de la distribución estandarizada de  $X$  mediante el Procedimiento B.2.
- Se calculan los estimadores equivariantes (e.g., los MLEs)  $\hat{\mu}_v$  y  $\hat{\sigma}_v$  de los parámetros de localización y escala de  $X$ , con  $v = 1, \dots, N_2$  (véase el Apéndice A).
- A partir de la probabilidad empírica de aceptación del lote dada por (B.2), los riesgos a posteriori simulados se calculan de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 PPR_{sim} &= \frac{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[c, p_\alpha]}(p_u^{(1)}) \{1 - L_{sim}(p_u^{(1)})\}}{\sum_{u=1}^{N_1} \{1 - L_{sim}(p_u^{(1)})\}}, \\
 PCR_{sim} &= \frac{\sum_{u=1}^{N_1} I_{[p_\beta, d]}(p_u^{(2)}) L_{sim}(p_u^{(2)})}{\sum_{u=1}^{N_1} L_{sim}(p_u^{(2)})}.
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$


---

optimización:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x). \tag{B.5}$$

En general, la resolución de este problema se realiza mediante métodos iterativos que proporcionan una solución óptima aproximada del mismo. Estos métodos permiten generar una secuencia  $\{x_l\}_{l=0}^{\infty}$  de posibles soluciones, comenzando en un punto inicial  $x_0$ , y finalizan cuando se consigue una solución suficientemente óptima. En la iteración  $l$ , el algoritmo busca un nuevo valor  $x_{l+1}$  a partir de  $x_l$  de tal forma que  $f(x_{l+1}) \leq f(x_l)$ . Concretamente, en los procedimientos de búsqueda lineal se determina una

dirección,  $d_l$ , y una longitud de paso,  $\delta_l$ , de tal forma que  $x_{l+1} = x_l + \delta_l d_l$ .

La dirección  $d_l$  se puede determinar de forma aproximada a partir del desarrollo de Taylor de segundo orden de  $f(x_l + d)$ . De esta forma

$$f(x_l + d) \simeq p_l(d) = f(x_l) + d^t \nabla f(x_l) + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(x_l) d, \quad (\text{B.6})$$

donde  $\nabla f(x)$  y  $\nabla^2 f(x)$  denotan el gradiente y el Hessiano de  $f(x)$ , respectivamente. Suponiendo que  $\nabla^2 f(x_l)$  es definida positiva, se puede obtener  $d_l$  como solución del sistema:

$$\nabla^2 f(x_l) d_l = -\nabla f(x_l). \quad (\text{B.7})$$

Esta dirección  $d_l$  se denomina dirección de Newton y se considera aceptable en un entorno suficientemente cercano a  $x_l$ , es decir, cuando la diferencia entre  $f(x_l + d)$  y  $p_l(d)$  no es muy grande.

Por otro lado, la longitud de paso  $\delta_l$  se determina mediante condiciones que garanticen una reducción adecuada de  $f$ . En concreto, se suelen utilizar las condiciones de Wolfe:

$$\begin{aligned} f(x_l + \delta_l d_l) &\leq f(x_l) + c_1 \delta_l \nabla^t f(x_l) d_l, \\ \nabla f(x_l + \delta_l d_l)^t &\geq c_2 \nabla^t f(x_l) d_l, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

con  $c_1, c_2$  constantes tales que  $0 < c_1 < c_2 < 1$ .

### B.4.1. Método Quasi-Newton

Para determinar la dirección de Newton,  $d_l$ , a partir del sistema B.7 es necesario calcular la inversa del Hessiano de  $f$  en cada iteración. Se puede utilizar una aproximación  $H_l$  a dicha inversa que sea fácil de calcular en cada paso del algoritmo. El método de optimización se ilustra en el siguiente procedimiento, donde  $\|\cdot\|_2$  denota

la norma euclídea.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo del método Quasi-Newton
 

---

- 1: Sea  $x_0$  punto inicial y  $\varepsilon > 0$  el nivel de tolerancia;
- 2: Sea  $H_0$  una aproximación inicial del inverso del Hessiano de  $f$  (véase Nocedal y Wright, 2006, [133]);
- 3:  $l = 0$ ;
- 4: **while**  $\|\nabla f(x_l)\|_2 > \varepsilon$  **do**
- 5:   Calcular  $d_l = -H_l \nabla f(x_l)$ ;
- 6:   Obtener  $x_{l+1} = x_l + \delta_l d_l$ , donde  $\delta_l$  verifica las condiciones (B.8);
- 7:   Si  $s_l = x_{l+1} - x_l$  e  $y_l = \nabla f(x_{l+1}) - \nabla f(x_l)$ , entonces  $H_{l+1}$  se calcula considerando la fórmula BFGS propuesta por Broyden (1970, [26]), Fletcher (1970, [68]), Goldfarb (1970, [73]) y Shanno (1970, [161])

$$H_{l+1} = (1 - \rho_l s_l y_l^t) H_l (1 - \rho_l s_l y_l^t) + \rho_l s_l s_l^t, \quad (\text{B.9})$$

donde  $\rho_l = 1/(y_l^t s_l)$ ;

- 8:    $l = l + 1$ ;
  - 9: **end while**
- 

### B.4.2. Método de Gauss-Newton

Las técnicas de búsqueda lineal se pueden aplicar también a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.10})$$

El problema se puede expresar de la forma  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$ , con  $g(x) = (1/2)\|f(x)\|_2^2$ , y se denomina problema no lineal de mínimos cuadrados. En este caso, no se trata sólo de hallar una solución óptima  $x^*$  que minimice  $g(x)$  sino, además, que se cumplan todas las ecuaciones  $f_i(x^*) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

El gradiente y el hessiano de  $g(x)$  se pueden expresar de la forma

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= J(x)^t f(x), \\ \nabla^2 g(x) &= J(x)^t J(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) \nabla^2 f_i(x),\end{aligned}$$

donde  $J(x) = (\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_m(x))^t$  es el jacobiano definido a partir de los gradientes de  $f_i(x)$ , con  $i = 1, \dots, m$ .

Cuando  $x$  está cerca de una solución óptima, los  $\nabla f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , son relativamente pequeños y se puede aproximar el hessiano de  $g(x)$  por  $\nabla^2 g(x) \simeq J(x)^t J(x)$ . El método de Gauss-Newton utiliza esta aproximación para simplificar el sistema (B.7) y evitar el cálculo de las derivadas de segundo orden de  $g(x)$ .

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo del método de Gauss-Newton

---

- 1: Sea  $x_0$  punto inicial y  $\varepsilon > 0$  el nivel de tolerancia;
- 2:  $l = 0$ ;
- 3: **while**  $\|\nabla f(x_l)\|_2 > \varepsilon$  **do**
- 4:   Calcular  $d_l^{GN}$  como solución del sistema

$$J(x_l)^t J(x_l) d_l^{GN} = -J(x_l)^t f(x_l); \quad (\text{B.11})$$

- 5:   Obtener  $x_{l+1} = x_l + \delta_l d_l$ , donde  $\delta_l$  verifica las condiciones (B.8);
  - 6:    $l = l + 1$ ;
  - 7: **end while**
-

---

## Conclusiones y líneas de trabajo

---

En este trabajo hemos estudiado los planes de muestreo de aceptación en análisis de fiabilidad en función de las especificaciones del productor y del consumidor así como del tipo de censura (progresiva o de tipo II). El Capítulo 1 proporciona algunas referencias importantes sobre este tema e introduce los resultados necesarios para el diseño de los planes.

Mediante los diferentes procedimientos generales que hemos presentado es posible determinar los planes con menor tamaño muestral óptimo a partir de unas restricciones determinados. Estos procedimientos se aplican cuando la distribución de la variable "tiempo hasta el fallo",  $T$ , o su logaritmo, es de localización  $\mu$  y escala  $\sigma$ . A partir de las correspondientes expresiones de la curva OC,  $L(p)$ , se obtienen los diseños óptimos utilizando riesgos clásicos.

Si la distribución de  $T$  es exponencial, se pueden obtener los planes con riesgos clásicos de forma exacta pero es necesario aplicar métodos de búsqueda iterativa (Newton-Raphson, método de la secante u otros). En esta situación, se plantean varias

aproximaciones de la curva OC que proporcionan, en general, expresiones explícitas del tamaño muestral,  $n$ , y el número de tiempos de fallo observados,  $m$ , así como la constante  $k$ . Cuando el modelo es  $Exp(\mu, \sigma)$  y  $\mu$  es conocida, se consigue obtener una aproximación casi exacta (cuando  $m > 5$ ) de  $L(p)$ . Si  $\mu$  es desconocida, se obtienen unas cotas superiores de los valores de  $n$  y  $m$  que pueden servir de puntos iniciales para la búsqueda iterativa de la solución exacta. Conviene señalar que en los planes exponenciales con censura progresiva bastaría con especificar la proporción de censura total,  $q$ , para determinar el diseño.

Para las distribuciones log-normal y de Weibull no es posible obtener una expresión exacta de la curva OC. Por esta razón, se recurre a resultados asintóticos que nos permite desarrollar diseños óptimos con riesgos clásicos suficientemente precisos. En ambas distribuciones, se proporcionan procedimientos para obtener los planes aproximados que difieren si la censura es progresiva o si es de tipo II. También se deducen los diseños óptimos en función de la clase de estimador considerado en el criterio de decisión del plan (MLEs o BLUEs). Los resultados obtenidos mediante simulación reflejan un buen ajuste de estos diseños aproximados a los requerimientos fijados por el productor y el consumidor. En particular, sugerimos una aproximación en los planes correspondientes a los BLUEs que consigue mejorar un diseño similar propuesto por otros autores (Balasooriya y Balakrishnan, 2000, [13]).

En los planes con riesgos clásicos se supone, con frecuencia, que la proporción de unidades defectuosas del lote,  $p$ , es constante. En ocasiones, es posible elegir de forma adecuada un modelo a priori que describa adecuadamente las fluctuaciones aleatorias de  $p$ . En este trabajo se estudian varias distribuciones que son útiles para reflejar la información disponible sobre  $p$  y que puede ser de gran importancia en el diseño de los

planes en fiabilidad. Prácticamente en todas las situaciones se dispone de información cuantitativa y subjetiva sobre el comportamiento probabilístico de  $p$  a partir de la experiencia previa acumulada. Este trabajo presenta un enfoque para incorporar dicha información utilizando diversas distribuciones a priori de  $p$ . En particular, se analiza la familia de distribuciones beta generalizada, la cual proporciona un rango extenso de formas posibles y permite restringir el rango de  $p$  cuando esta limitación forma parte de la información a priori. Por su parte, las distribuciones de máxima entropía son de gran utilidad cuando sólo se dispone de información parcial y se exige utilizar un modelo lo menos informativo posible. Generalmente, el enfoque utilizado en este trabajo no requiere una cantidad considerable de información a priori. De este modo, el efecto de asumir en el diseño del plan una determinada distribución que difiere (de forma no considerable) del verdadero modelo de  $p$  se puede considerar despreciable.

En muchos procesos suele existir alguna evidencia a priori de que la fiabilidad del producto es muy alta. En estas situaciones, las distribuciones a priori de  $p$  con dominio  $(0, 1)$  pueden resultar inapropiadas. Con frecuencia, parece razonable asumir un espacio paramétrico reducido  $(c, d) \subset (0, 1)$ . Esta condición no es muy restrictiva cuando productores y consumidores han acumulado un conocimiento suficiente del proceso de fabricación. Los intervalos  $[n_l, n_u]$  de posibles tamaños muestrales de los planes óptimos se han determinado en función del rango de posibles valores de  $p$ .

De acuerdo al principio de imparcialidad, la veracidad a priori de las hipótesis de un contraste debe ser idéntica salvo que se demuestre lo contrario. De este modo, si no hay ninguna razón previa conocida por la cual alguna de las hipótesis debería ser elegida de forma preferente, la consideración de ambas sería equivalente. En general,

los ensayos de fiabilidad consideran la situación en la que el productor y el consumidor son adversarios, i.e. en muchos casos tienen intereses contrapuestos. Ambos suelen estar de acuerdo en el modelo estadístico del tiempo de vida,  $T$ , pero proponen distribuciones a priori diferentes. La propiedad de imparcialidad puede quedar justificada cuando no se desea favorecer los intereses del productor sobre los del consumidor o viceversa. De esta forma, el empleo de una distribución a priori imparcial de  $p$  es una forma equilibrada de resolver este conflicto puesto que dicha distribución asigna la misma probabilidad a priori de aceptación y rechazo del lote. Por tanto, si se requiere un consenso en la distribución a priori, una elección natural sería aquella que verifique la propiedad de imparcialidad.

El diseño de los planes con riesgos promedios y a posteriori recogidos en este trabajo incorpora una distribución a priori de  $p$ . Con la utilización de dicha distribución de  $p$ , además de reducir los costes del muestreo, es posible una evaluación más realista de los riesgos del productor y del consumidor. Si se utiliza información a priori relevante sobre  $p$ , el tamaño muestral requerido para el diseño óptimo se reduce de forma significativa con respecto a los planes convencionales, sobre todo cuando la distribución no se encuentra muy concentrada en  $[p_\alpha, p_\beta]$ . Por tanto, este punto de vista es particularmente interesante cuando las unidades sometidas a inspección son muy costosas o escasas.

En esta memoria se describen los procedimientos para determinar los planes con riesgos promedio y a posteriori cuando se utilizan los MLEs y la censura de tipo II. La metodología propuesta utiliza un modelo en el que se incluye, de forma muy sencilla, la distribución de  $p$  en la definición de los riesgos. Los diseños presentados utilizan

las distribuciones a priori mencionadas anteriormente (beta generalizada y de máxima entropía). También se obtienen los planes cuando seleccionamos la distribución generalizada de máxima entropía. Además, en los casos log-normal y de Weibull, la simulación de los riesgos permite apreciar que los correspondientes planes aproximados se ajustan de forma bastante precisa a las especificaciones.

Finalmente, realizamos un análisis comparativo entre los distintos tipos de riesgos para varios diseños óptimos. A través de este análisis se observa el comportamiento del plan con respecto a las posibilidades de aceptación/rechazo de los lotes de buena/mala calidad. En concreto, mediante dicho estudio comparativo resulta posible analizar las diferencias existentes entre los diseños imparciales y los no imparciales.

Los procedimientos para determinar los planes descritos en este trabajo han sido programados utilizando MATLAB<sup>®</sup>. En particular, entre estos procedimientos están los algoritmos de Newton-Raphson y el método de la secante, los cuales han permitido la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales. Además, también se ha programado las distintas rutinas para el cálculo de los estimadores de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  de las distribuciones de localización y escala con censura progresiva y de tipo II. Las expresiones de dichos estimadores se muestran en el Apéndice A. La programación incluye las fórmulas de los momentos de los estadísticos de orden con censura progresiva, que requieren de una alta precisión computacional para evitar la propagación de los errores de redondeo. Por otro lado, a partir de los resultados publicados por diversos autores, se han escrito otras rutinas como los procedimientos de generación de muestras pseudo-aleatorias con censura progresiva y de tipo II así como los métodos de simulación de los riesgos de los diseños. Con respecto a la determinación de los parámetros de las distribuciones de  $p$  a partir de condiciones previas, el tiempo de

desarrollo ha sido menor puesto que los métodos de búsqueda lineal explicados en el Apéndice A ya se encuentran programados en las últimas versiones de MATLAB<sup>®</sup>. El código de programación resulta bastante extenso para ser incluido en el presente estudio.

La utilización de MATLAB<sup>®</sup> en la resolución de los problemas planteados tiene algunas ventajas. Entre ellas, cabe citar la facilidad que supone procesar una elevada cantidad de datos en los resultados de salida, ya que éstos pueden ser fácilmente exportados a L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (en formato de tabla) utilizando un software de hoja de cálculo como Excel<sup>®</sup>. En concreto, a través de una sencilla macro es posible importar completamente el área de trabajo de MATLAB<sup>®</sup> correspondiente a una sesión de usuario.

## Posibles líneas de trabajo actuales y futuras

Entre las líneas de trabajo actuales cabe destacar el estudio de los planes de muestreo clásicos y los que utilizan una distribución a priori de  $p$  (planes con riesgos promedio y a posteriori) cuando se consideran distribuciones de log-localización y escala de  $T$  diferentes a la log-normal y de Weibull.

Asimismo, otra posible línea de trabajo consiste en la determinación de los diseños por atributos que utilizan riesgos promedios y a posteriori. Algunos autores, como Hamanda et al. (2008, [85]), han estudiado este tipo de diseños. Una posible generalización de este tipo de diseños consiste en el empleo de las distribuciones beta generaliza o de máxima entropía de  $p$ . Además, en esta situación también se analizan las diferencias cuando se verifica la propiedad de imparcialidad en la distribución. Es posible obtener el diseño de los planes que utilizan distribuciones a priori de  $p$

cuando se utilizan esquemas de muestreo más complejos que el simple (muestreo doble, muestreo múltiple, etc.).

También se pueden plantear algunas posibles líneas de trabajo futuras que, en algunos casos, supondrían una extensión o generalización de los resultados presentados en este trabajo.

Los diseños presentados en este estudio consideran una regla de decisión para la aceptación del lote que se determina a partir de la cantidad pivotal  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  definida en el Capítulo 2. Esta regla de decisión es muy utilizada, a menudo, en los diseños por variables con distribuciones de localización y escala, sobre todo a partir del trabajo de Liebermann y Resnikoff (1955, [108]). Sin embargo, en los planes de muestreo se pueden considerar otras reglas de decisión, las cuales pueden ser de carácter frecuentista o no. El método empleado para determinar los planes estudiados en este trabajo suele emplear, con frecuencia, la matriz de Fisher aproximada o asintótica de los estimadores  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ . También se podrían utilizar otros métodos, como el test de razón de verosimilitudes. Supongamos que  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$  denota una muestra de observaciones cuya distribución se caracteriza por un parámetro (escalar o vectorial)  $\omega \in \Omega$ . Por ejemplo, como se puede ver en Nelson (1982, [129]), la razón de verosimilitudes para contrastar  $H_0 : \omega = \omega_0$  frente a  $H_1 : \omega \neq \omega_0$  se define como

$$\Lambda = \frac{\mathcal{L}(\omega_0 | \mathbf{T})}{\max_{\omega \in \Omega} \mathcal{L}(\omega | \mathbf{T})},$$

donde  $\mathcal{L}(\omega | \mathbf{T})$  es la verosimilitud asociada a  $\omega$  dada la muestra fija  $\mathbf{T}$ . De este modo, el criterio sería

- Si  $\Lambda > \lambda$ , se acepta  $H_0$ ,

- En otro caso, se rechaza,

donde  $\lambda$  denota una constante de aceptación. En concreto,  $\omega_0$  puede indicar el nivel de referencia para la aceptación de un lote cuyo nivel de calidad se mide en términos de  $\omega$ . Por otro lado, algunos autores proponen otros criterios de decisión diferentes. Por ejemplo, en el caso de la distribución exponencial uniparamétrica de  $T$ , Epstein y Sobel (1953, [59]) estudian un plan de muestreo secuencial con censura de tipo II que emplea un criterio estadístico basado en la duración del experimento. En concreto, si  $T_{1:n} \leq \dots \leq T_{m:n}$  son los tiempos de fallo observados durante la prueba, el tiempo total acumulado por todas las unidades es  $V(m) = \sum_{i=1}^m T_{i:n} + (n - m)T_{m:n}$ . El criterio de decisión propuesto es de la forma siguiente:

- Si  $V(m) > c$ , se acepta el lote,
- En otro caso, se rechaza,

donde  $c$  denota una constante de aceptación. También se pueden definir reglas para decidir la aceptación/rechazo del lote desde un punto de vista bayesiano. Por ejemplo, si  $T \sim Exp(\mu, \sigma)$ , Nigm e Ismail (1985, [132]) determinan un método de decisión calculando la pérdida esperada por ítem en los lotes que son aceptados. En esta situación, dicho procedimiento permite obtener un diseño bayesiano utilizando una distribución a priori de  $\mu$  y  $\sigma$ . Otros autores, como Kwon (1996, [100]) y Lin (1999, [110]), proponen planes bayesianos cuando  $T$  sigue las distribuciones de Weibull y exponencial uniparamétricas, respectivamente, considerando una distribución a priori del parámetro desconocido. El estudio de los criterios frecuentistas y bayesianos permitiría desarrollar diseños con riesgos promedios y a posteriori diferentes a los propuestos en este trabajo. El problema de estos métodos es que, con frecuencia, es

necesario calcular los estimadores de  $\mu$  y  $\sigma$ , y esto puede suponer una gran dificultad según la distribución de  $T$  y el tipo de censura considerado. Este problema se puede solventar mediante el uso de aproximaciones de los estimadores, tal y como se ha explicado en este trabajo.

En muchos casos, los planes de muestreo se determinan a partir de la curva OC, i.e. la probabilidad de aceptación del lote. En los diseños por variables en fiabilidad no siempre es posible definir dicha curva de forma analítica. Como ya se ha explicado en el Capítulo 3, cuando  $T$  sigue una distribución log-normal o de Weibull, es necesario emplear resultados asintóticos para obtener la curva OC aproximada definida a partir de  $K_p(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ . Sin embargo, la utilización de los criterios de decisión por atributos permite obtener la curva característica de forma analítica. Por ejemplo, se puede aplicar un muestreo binomial o de Poisson y se decide la aceptación del lote de acuerdo al número de tiempos de fallo observados. El inconveniente de este tipo de reglas es que implican una pérdida de información. Por esta razón, para mejorar las características operativas de estos planes, es posible incorporar en los modelos correspondientes alguna distribución a priori sobre los parámetros de  $T$ . En concreto, Hamada et al. (2008, [85]) desarrollan este tipo de planes bayesianos por atributos considerando los riesgos a posteriori. Para las distribuciones mencionadas anteriormente, los procedimientos por atributos se pueden combinar con los criterios por variables y proponer diseños "mixtos" alternativos utilizando riesgos promedios y a posteriori. Por otro lado, la aplicación de métodos de inferencia condicional puede facilitar la estimación de los parámetros de  $T$ . Viveros y Balkrishnan (1994, [175]) estudian un método condicional con censura progresiva de tipo II que se puede considerar en el diseño de los planes de muestreo en fiabilidad. Por su parte, Hamada et al. (2008, [85]) desarrollan un criterio

de aceptación condicionado a una muestra de datos observados y proponen un plan bayesiano utilizando riesgos a posteriori cuando  $T$  sigue una distribución de Weibull. Cabe la posibilidad de emplear este método para otras distribuciones y diferentes tipos de riesgos.

En los diseños estudiados en este trabajo, el nivel de calidad del lote se mide como la proporción de unidades defectuosas,  $p$ . Sin embargo, otras medidas alternativas que se pueden considerar son el tiempo medio hasta el fallo ( $E[T] = \theta$ ) o el tiempo de vida fiable ( $t_{s_0} = S^{-1}(s_0)$ ). Martz y Waller (1982, [116]) discuten el diseño de los planes con distintos tipos de riesgos (clásicos, promedios, a posteriori, etc.) cuando el productor especifica un tiempo medio de fallo aceptable,  $\theta_\alpha$ , mientras que el consumidor fija el valor mínimo  $\theta_\beta$  que está dispuesto a tolerar. En particular, estos autores describen los planes bayesianos de Schafer (1971, [151]) y Goel y Joglekar (1976, [72]) cuando  $T$  sigue una distribución exponencial con parámetro  $\lambda = 1/\theta$ . En ciertos casos, los diseños combinan la censura de tipo II con la de tipo I, de tal forma que el experimento de fiabilidad finaliza antes de un tiempo máximo prefijado. Estos resultados sugieren la posibilidad de desarrollar planes de muestreo con dichas características cuando  $T$  sigue una distribución log-normal o de Weibull y, además, se utilizan riesgos promedios o a posteriori. Por ejemplo, Fertig y Mann (1980, [66]) determinan un plan de muestreo con duración limitada y con riesgos clásicos para la distribución de Weibull que considera la fiabilidad en un instante de tiempo  $t_0$  como medida de calidad del lote.

Los procedimientos presentados en este trabajo permiten seleccionar los planes de muestreo con tamaño muestral óptimo. Sin embargo, este criterio de optimalidad se puede modificar para determinar planes que tengan otras propiedades. Por ejemplo,

Lam (1990, [102], 1994, [103]) y Huang y Lin (2004, [92]) desarrollan algunos planes bayesianos con la distribución exponencial que utilizan una función de pérdida que mide el coste de la decisión de aceptación/rechazo adoptada sobre un lote. Mediante esta función se obtiene el diseño con un riesgo Bayes óptimo. También se pueden citar otros autores, como Tagaras y Lee (1987, [167]), Moskowitz y Tang (1992, [127]) y Lin (1999, [110]), que determinan planes bayesianos con un coste total esperado óptimo. Dichos diseños no utilizan las especificaciones de riesgos del productor y el consumidor. Por tanto, se pueden utilizar estos modelos de función de pérdida en los planes estudiados en este trabajo para determinar diseños con coste óptimo. También se pueden utilizar los criterios de optimalidad definidos sobre la matriz de información de Fisher de  $\hat{\mu}$  y  $\hat{\sigma}$ , cuya inversa es la matriz de varianzas-covarianza de dichos estimadores. Considerando que

$$Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \begin{pmatrix} V_{11}(n) & V_{12}(n) \\ V_{21}(n) & V_{22}(n) \end{pmatrix},$$

entonces se podrían emplear, entre otros, los siguientes criterios

- *A*-optimalidad: Minimizar la traza de  $Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

$$tr[Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})] = V_{11}(n) + V_{22}(n).$$

- *D*-optimalidad: Minimizar el determinante de  $Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

$$det[Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma})] = V_{11}(n)V_{22}(n) - V_{12}(n)^2.$$

Ng, Chan y Balakrishnan (2004, [131]) proponen diseños clásicos óptimos de acuerdo a los criterios anteriores cuando  $T$  sigue una distribución de Weibull y la censura es progresiva. A partir de los resultados presentados en este trabajo, otra posible línea de trabajo consistiría en el estudio de los diseños  $A$ -óptimos y  $D$ -óptimos con riesgos promedios y a posteriori para distintos modelos de  $T$ .

Los planes con riesgos promedios y a posteriori de los Capítulos 4 y 5 utilizan los MLEs de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  y la censura de tipo II. En esta situación, los procedimientos para determinar los diseños óptimos proporcionan el tamaño muestral  $n$  de forma directa, sin emplear métodos iterativos. Estos métodos se podrían generalizar para obtener los planes con censura progresiva de acuerdo a la metodología planteada en el Capítulo 3. Además, si se consideran los BLUEs, es posible mejorar este tipo de diseños utilizando esquemas de censura óptimos, de acuerdo a los resultados de Balakrishnan y Aggarwala (2000, [7]) y Hoffman et al. (2005, [90]). En concreto, dichos esquemas reducen la varianza de los estimadores con respecto a la censura de tipo II.

Algunos autores combinan varios tipos de riesgos en la determinación de planes de muestreo alternativos. Balaban (1975, [5]) utiliza un criterio con el riesgo clásico del productor y, por otro lado, considera el riesgo a posteriori del consumidor. Schafer y Sheffield (1971, [151]) proporcionan algunas tablas con diseños que emplean, también, un criterio mixto con el par de riesgos clásico y bayesiano. Goel y Joglekar (1976, [72]) desarrollan las rutinas apropiadas para calcular planes de muestreo utilizando varias combinaciones de riesgos bayesianos. También presentan algunos ejemplos con diseños donde se pueden especificar más de dos riesgos. La combinación de los riesgos promedios y a posteriori ha sido estudiada por Fitzgerald et al. (1999, [67]) en el muestreo binomial. Por ejemplo, el plan podría considerar el riesgo a posteriori del

consumidor y, por otro lado, el riesgo promedio del productor. De esta forma, el diseño debe verificar las siguientes condiciones

$$APR \equiv \Pr(\mathcal{R} \mid p \leq p_\alpha) \leq \alpha \quad \text{y} \quad PCR \equiv \Pr(p \geq p_\beta \mid \mathcal{A}) \leq \beta,$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las especificaciones máximas de los correspondientes riesgos en los niveles  $p_\alpha$  y  $p_\beta$ , respectivamente. Fitzgerald et al. (1999, [67]) señalan que, en ciertas aplicaciones del muestreo en fiabilidad, el productor y el consumidor son la misma persona o entidad. En esta situación, puede que no sea necesario especificar dos niveles distintos de calidad en la selección del plan. Por tanto, las condiciones del plan serían

$$\Pr(\mathcal{R} \mid p \leq p^*) \leq \alpha \quad \text{y} \quad \Pr(p \geq p^* \mid \mathcal{A}) \leq \beta,$$

donde  $p^*$  representa un nivel fijo de calidad. Una de las posibilidades de desarrollo futuro consistiría en desarrollar planes de muestreo por variables que consideren este tipo de criterios "híbridos".

---

# Abreviaturas y notación

---

## Planes de muestreo

$T$	Variable aleatoria del tiempo de vida o hasta el fallo
$\ell_L$	Límite de especificación inferior de $T$
$\mathbf{T} = (T_{1:n}, \dots, T_{m:n})$	Muestra de observaciones de $T$ con censura de tipo II
$\mathbf{T} = (T_{1:m:n}, \dots, T_{m:m:n})$	Muestra de observaciones de $T$ con censura progresiva
$\mathcal{A}$	Acción consistente en la aceptación de un lote
$\mathcal{R}$	Acción consistente en el rechazo de un lote
$\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$	Esquema de censura progresiva
$p$	Proporción de disconformes
$L(p)$	Probabilidad de aceptación del plan de muestreo (curva OC)
$\alpha$	Riesgo máximo del productor

---

$\beta$	Riesgo máximo del consumidor
$p_\alpha$	Nivel de calidad aceptable del productor
$p_\beta$	Nivel de calidad tolerable del consumidor
$CPR$	Riesgo clásico del productor
$CCR$	Riesgo clásico del consumidor
$APR$	Riesgo promedio del productor
$ACR$	Riesgo promedio del consumidor
$PPR$	Riesgo a posteriori del productor
$PCR$	Riesgo a posteriori del consumidor

### Características de las distribuciones

$F_0(\cdot)$	Función de distribución de localización y escala estandarizada
$f_0(\cdot)$	Densidad de la distribución de localización y escala estandarizada
$\Phi(\cdot)$	Función de distribución normal estándar
$\phi(\cdot)$	Densidad de la distribución normal estándar
$N(0, 1)$	Distribución gaussiana o normal estándar
$z_\eta$	Cuantil $\eta$ de la distribución normal estándar
$\chi^2(\nu)$	Distribución chi-cuadrado con $\nu$ grados de libertad

$\chi_{\eta}^2(\nu)$  Cuantil  $\eta$  de la distribución chi-cuadrado con  $\nu$  grados de libertad

$\xi_p$  Cuantil  $p$  de una distribución de localización y escala

### Distribuciones

$Exp(\mu, \sigma)$  Distribución exponencial con localización  $\mu$  y escala  $\sigma$

$N(\mu, \sigma)$  Distribución normal con localización  $\mu$  y escala  $\sigma$

$EV(\mu, \sigma)$  Distribución de valor extremo con localización  $\mu$  y escala  $\sigma$

$h(p), \pi(p)$  Densidades a priori de la proporción de disconformes  $p$

$Beta(a, b)$  Distribución beta con parámetros  $a$  y  $b$

$BG(a, b, c, d, r)$  Distribución beta generalizada con parámetros  $a, b, c, d$  y  $r$

$Ent(\pi)$  Entropía de la función de densidad  $\pi(\cdot)$

$ME$  Máxima entropía

$B(\cdot, \cdot)$  Función beta

$\Gamma(\cdot)$  Función gamma

### Estimación

$\hat{\mu}$  Estimador equivariante de  $\mu$

$\hat{\sigma}$  Estimador equivariante de  $\sigma$

MLEs Estimadores de máxima verosimilitud

---

BLUEs	Mejores estimadores lineales insesgados
ABLUEs	Mejores estimadores lineales insesgados aproximados
$J_{ij}(n)$	Elemento $(i, j)$ de la matriz de Fisher esperada, con $i, j = 1, 2$
$J_{ij}$	Elemento $(i, j)$ de la matriz de Fisher asintótica, con $i, j = 1, 2$

### Notación matemática

$I_A(x)$	Función indicatriz dada por $I_A(x) = 1$ si $x \in A$ , o $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$
$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{c.s.}}$	Convergencia casi seguro
$[x]$	Menor entero mayor o igual a $x$
$\lfloor x \rfloor$	Parte entera de $x$
$\langle x \rangle$	Entero más próximo a $x$

---

## Bibliografía

---

- [1] Aggarwala, R. y Balakrishnan, N. (1998). Some properties of progressive censored order statistics from arbitrary and uniform distributions with applications to inference and simulation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **70**, 35–49.
- [2] Akaike, H. (1978). A new look at the Bayes procedure. *Biometrika*, **65**, 53–59.
- [3] ANSI/ASQC Z1.4 (1993). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. Milwaukee: ASQC.
- [4] ANSI/ASQC Z1.9 (1993). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Nonconforming*. Milwaukee: ASQC.
- [5] Balaban, H. (1975). Reliability demonstration: purposes, practices, and value. *Proceedings 1975 Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 246–248.

- 
- [6] Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: an appraisal. *Test*, **16**(2), 211–259 (with discussion).
- [7] Balakrishnan, N. y Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Boston: Birkhauser.
- [8] Balakrishnan, N., Childs, A. y Chandrasekar, B. (2002). An efficient computational method for moments of order statistics under progressive censoring. *Statistics and Probability Letters*, **60**(4), 359–365.
- [9] Balakrishnan, N. y Kateri, M. (2008). On the maximum likelihood estimation of parameters of weibull distribution based on complete and censored data. *Statistics and Probability Letters*, **78**, 2971–2975.
- [10] Balakrishnan, N. y Mi, J. (2003). Existence and uniqueness of the MLEs for normal distribution based on general progressively Type-II censored samples. *Statistics and Probability Letters*, **64**, 407–414.
- [11] Balakrishnan, N. y Rao, C.R. (1997). Large-sample approximations to the best linear unbiased estimation and best linear unbiased prediction based on progressively censored samples and some applications. En *Advances in Statistics Decision Theory and Applications*, editors Panchapakesan y Balakrishnan, pp. 431–444. Birkhuser.
- [12] Balakrishnan, N. y Sandhu, R.A. (1995). A simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *The American Statistician*, **49**(2), 229–230.

- 
- [13] Balasooriya, U. y Balakrishnan, N. (2000). Reliability sampling plans for lognormal distribution, based on progressively-censored samples. *IEEE Transactions on Reliability*, **49**(2), 199–203.
- [14] Balasooriya, U. y Low, C.K. (2004). Competing causes of failure and reliability tests for Weibull lifetimes under type I progressive censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, **53**(1), 29–36.
- [15] Balasooriya, U. y Saw, S.L.C. (1999). A note on approximate moments of progressively censored order statistics. *Metron - International Journal of Statistics*, **57**, 117–130.
- [16] Balasooriya, U., Saw, S.L.C. y Gadag, V. (2000). Progressively censored reliability sampling plans for the Weibull distribution. *Technometrics*, **42**(2), 160–167.
- [17] Basu, A.P. y Ghosh, J.K. (1980). Asymptotic properties of a solution to the likelihood equation with the life-testing applications. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 410–414.
- [18] Bayes, T. (1783). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **53**, 370–418.
- [19] Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag.
- [20] Berger, J.O. y Sun, D. (1993). Bayesian analysis for the poly-Weibull model. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 1412–1418.

- 
- [21] Bernardo, J.M. (1979). Reference posterior distributions for Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **41**, 113–147.
- [22] Bowker, A.H. y Goode, H.P. (1952). *Sampling Inspection by Variables*. New York: McGraw-Hill.
- [23] Box, G.E.P. y Tiao, G.C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
- [24] Breakwell, J.V. (1956). Economically optimum acceptance tests. *Journal of the American Statistical Association*, **51**, 243–256.
- [25] Brown, G.G. y Rutenmiller, H.C. (1974). Tables for determining expected cost per unit under MIL-STD-105D single sampling schemes. *AIIE Transactions*, **6**, 135–142.
- [26] Broyden, C.G. (1970). The convergence of a class of double-rank minimization algorithms. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, **6**, 76–90.
- [27] Brush, G.G. (1986). A comparison of classical and Bayes producer's risk. *Technometrics*, **28**, 69–72.
- [28] Brush, G.G., Cautin, H. y Lewin, B. (1981). Outgoing quality distributions for MIL-STD-105D sampling plans. *Journal of Quality Technology*, **13**, 254–263.
- [29] Calvin, T.W. (1990). *How and When to Perform Bayesian Acceptance Sampling: Plus a BLAST with TNT*. Milwaukee: ASQC.

- 
- [30] Case, K.E. y Keats, J.B. (1982). On the selection of a prior distribution in Bayesian acceptance sampling. *Journal of Quality Technology*, **14**, 10–18.
- [31] Case, K.E., Schmidt, J.W. y Bennet, G.K. (1975). A discrete economic multi-attribute acceptance sampling. *AIIE Transactions*, **7**, 363–369.
- [32] Champernowne, D.G. (1953). The economics of sequential sampling procedure for defectives. *Applied Statistics*, **2**, 118–130.
- [33] Chen, J., Li, K.H. y Lam, Y. (2007). Bayesian single and double variable sampling plans for the Weibull distribution with censoring. *European Journal of Operational Research*, **2**, 1062–1073.
- [34] Chiu, W.K. (1974). A new prior distribution for attributes sampling. *Technometrics*, **16**, 93–102.
- [35] Chiu, W.K. y Lin, D. (1992). Reliability assessment through life test in a Bayesian situation. En *Proceedings of the Second Conference of the Operational Research Society of Hong Kong*, pp. 30–37.
- [36] Chiu, W.K. y Wetherill, G.B. (1972). A review of acceptance sampling practices. En *Royal Statistical Society Conference, London*.
- [37] Cohen, A.C. (1963). Progressively censored samples in life testing. *Technometrics*, **5**, 327–329.
- [38] Cohen, A.C. (1991). *Truncated And Censored Samples: Theory And Applications*. New York: Marcel-Dekker.

- 
- [39] Collani, E.V. (1986). The  $\alpha$ -optimal acceptance sampling scheme. *Journal of Quality Technology*, **18**, 63–66.
- [40] Craig, C.C. (1968). The average sample number for truncated single and double attributes acceptance sampling plans. *Technometrics*, **10**, 685–692.
- [41] Dalal, S. y Hall, W. (1983). Approximating priors by mixtures of natural conjugate priors. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **45**, 278–286.
- [42] Danziger, L. y Papp, Z. (1988). Multiple criteria sampling plans for total fraction nonconformance. *Journal of Quality Technology*, **20**, 181–187.
- [43] Das, N.G. y Mitra, S.K. (1964). The effect of non-normality on sampling inspection. *Sankhya A*, **26**, 169–176.
- [44] David, H.A. (1970). *Order Statistics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [45] Davies, O.L. (1959). Some statistical aspects of the economics of analytical testing. *Technometrics*, **1**, 49–61.
- [46] Dayananda, R.A. y Evans, I.G. (1973). Bayesian acceptance sampling schemes for two-sided tests of the mean of a normal distribution of known variance. *Journal of the American Statistical Association*, **68**, 131–136.
- [47] DEF-131A (1966). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. Her Majesty's Stationery Office, London.
- [48] DEF-STAN-05-30 (1974). *Sampling Procedures and Charts for Inspection by Variables*. Quality Assurance Directorate (Weapons), London.

- 
- [49] Dempster, A.P., Laird, N.M. y Rubin, D.B. (1977). Maximun likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 1–38.
- [50] Dodge, H.F. (1963). A general procedure for sampling inspection by attributes based on the AQL concept. *ASQC Annual Convention Transactions*, pp. 7–19.
- [51] Dodge, H.F. y Romig, H.G. (1959). *Sampling Inspection Tables*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [52] Duncan, A.J. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*. Homewood, Illinois: Irwin, 5th. edition.
- [53] Easterling, R.G. (1970). On the use of prior distribution in acceptance sampling. *Annals of Reliability and Maintainability*, **5**, 861–873.
- [54] Engelhardt, M. (1975). On simple estimation of the parameters of the Weibull or extreme value distribution. *Technometrics*, **17**, 369–374.
- [55] Engelhardt, M. y Bain, L.J. (1973). Some complete and censored sampling results for the Weibull or extreme value distribution. *Technometrics*, **15**, 541–549.
- [56] Engelhardt, M. y Bain, L.J. (1974). Some results on point estimation for the two-parameter Weibull or extreme value distribution. *Technometrics*, **16**, 49–56.
- [57] Epstein, B. (1954). Truncated life test in the exponential case. *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 555–564.

- 
- [58] Epstein, B. (1960). Statistical life test acceptance procedures. *Technometrics*, **2**, 435–446.
- [59] Epstein, B. y Sobel, M. (1953). Life testing. *Journal of the American Statistical Association*, **48**, 486–502.
- [60] Epstein, B. y Sobel, M. (1954). Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 373–381.
- [61] Evans, I.G. y Thyregod, P. (1984). Some asymptotic properties of bayesian variable and attribute sampling plans. En *Frontiers in Statistical Quality Control*, H. J. Lenz et al. eds, volume 2, pp. 182–198. Wurzburg, Germany: Physica-Verlag.
- [62] Fernández, A.J. (2005). Progressively censored variables sampling plans for two-parameter exponential distributions. *Journal of Applied Statistics*, **32**(8), 823–829.
- [63] Fernández, A.J., Bravo, J.I. y de Fuentes, I. (2002). Computing maximum likelihood estimates from type II doubly censored exponential data. *Statistical Methods & Applications*, **11**, 187–200.
- [64] Fernández, A.J. y Pérez-González, C.J. (2006). Diseño de planes de aceptación óptimos para la distribución exponencial biparamétrica. En *Contribuciones a la Estadística y a la Investigación Operativa*, J. Sicilia et al., eds, pp. 351–358. ISBN 84-689-8552-X.
- [65] Fernández, A.J. y Pérez-González, C.J. (2009). Distribuciones a priori para la proporción de artículos defectuosos. En *Actas del XXXI Congreso Nacional de*

- Estadística e Investigación Operativa*, pp. 1–13. Murcia, España. ISBN 978-84-691-8159-1.
- [66] Fertig, K.W. y Mann, N.R. (1980). Life-test sampling plans for two-parameter Weibull populations. *Technometrics*, **22**(2), 165–177.
- [67] Fitzgerald, M., Martz, H.F. y Parker, R.L. (1999). Bayesian single-level binomial and exponential reliability demonstration test plans. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **6**, 123–137.
- [68] Fletcher, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *Computer Journal*, **13**, 317–322.
- [69] Freeman, H.A., Friedman, H., Mosteller, F. y Wallis, W.A. (1948). *Sampling inspection*. New York: McGraw-Hill.
- [70] Garner, N.R. (1958). Curtailed sampling for variables. *Journal of the American Statistical Association*, **53**, 862–867.
- [71] Geisser, S. (1984). On prior distributions for binary trials. *The American Statistician*, **38**, 244–251.
- [72] Goel, A.L. y Joglekar, A.M. (1976). *Reliability Acceptance Sampling Plans Based upon Prior Distribution*. Technical Reports 76-1 hasta 76-5. Department of Industrial Engineering and Operations Research. Syracuse University.
- [73] Goldbard, D. (1970). A family of variable metric updates derived by variational means. *Mathematics of Computation*, **24**, 23–26.

- 
- [74] Grant, E.L. y Leavenworth, R.S. (1996). *Statistical Quality Control*. McGraw-Hill Series in Industrial Engineering and Management Science. McGraw-Hill, 7th. edition.
- [75] Guenther, W.C. (1971). On the determination of single sampling attribute plans based on a linear cost model and a prior distribution. *Technometrics*, **13**, 483–498.
- [76] Guild, R.D. (1973). Bayesian MFR life test sampling plans. *Journal of Quality Technology*, **5**, 11–15.
- [77] Guild, R.D. y Raka, I.I.D.G. (1980). Effective sampling plans based on a prior distribution. *Journal of Quality Technology*, **12**, 88–93.
- [78] Gupta, S.S. y Groll, P.A. (1961). Gamma distribution in acceptance sampling based on life tests. *Journal of the American Statistical Association*, **56**, 943–970.
- [79] Guthrie, D. y Johns, M.V. (1959). Bayes acceptance sampling procedures for large lots. *Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 896–925.
- [80] H108 (1960). *Sampling Procedures and Tables for Life and Reliability Testing (Based on Exponential Distribution)*. Quality Control and Reliability Handbook, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [81] Hald, A. (1960). The compound hypergeometric distribution and a system of single sampling inspection plans based on prior distributions and costs. *Technometrics*, **2**, 275–340.

- 
- [82] Hald, A. (1964). Efficiency of sampling inspection plans for attributes. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **40**, 681–697.
- [83] Hald, A. (1967). Asymptotic properties of Bayesian single sampling plans. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **29**, 162–173.
- [84] Hald, A. (1967). The determination of single sampling attribute plans with given producer's and consumer's risks. *Technometrics*, **9**, 401–415.
- [85] Hamada, M.S., Wilson, A.G., Reese, C.S. y Martz, H.F. (2008). *Bayesian Reliability*. New York: Springer.
- [86] Hamaker, H.C. (1951). Economic principles in industrial sampling problems. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **33**, 105–122.
- [87] Hamaker, H.C. (1958). Some basic principles of sampling inspection by attributes. *Applied Statistics*, **7**, 149–159.
- [88] Hill, I.D. (1961). *An Introduction to Sampling Inspection*. London: Institution of Engineering Inspection.
- [89] Hoadley, A.B. (1981). Quality measurement plan. *Bell System Technical Journal*, **60**, 215–273.
- [90] Hoffmann, G., Cramer, E., Balakrishnan, N. y Kunert, G. (2005). An asymptotic approach to progressive censoring. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **130**, 207–227.

- 
- [91] Huang, S.R. y Wu, S.J. (2008). Reliability sampling plans under progressive type-I interval censoring using cost functions. *IEEE Transactions on reliability*, **57**, 445–451.
- [92] Huang, W.T. y Lin, Y.P. (2004). Bayesian sampling plans for exponential distribution based on uniform random censored data. *Computational Statistics & Data Analysis*, **44**, 669–691.
- [93] Jaynes, E.T. (1968). Prior Probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, **4**, 227–241.
- [94] Jaynes, E.T. (1983). *Papers on Probability, Statistics and Statistical Physics*. Dordrecht: Reidel, E. D. Rosenkrantz (ed.).
- [95] Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probability*. London: Oxford University Press, 3rd. edition.
- [96] Jun, C.H., Balamurali, S. y Lee, S.H. (2006). Variables sampling plans for Weibull distributed lifetimes under sudden death testing. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**(1), 53–58.
- [97] Kalbfleisch, J.D. y Prentice, R.L. (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [98] Kullback, S. (1987). The Kullback-Leibler distance. *The American Statistician*, **41**, 340–341.
- [99] Kullback, S. y Leibler, R.A. (1951). On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79–86.

- 
- [100] Kwon, Y.I. (1996). A Bayesian life test sampling plan for products with Weibull lifetime distribution sold under warranty. *Reliability Engineering and System Safety*, **53**, 61–66.
- [101] Lam, Y. (1988). Bayesian approach to single variable sampling plans. *Biometrika*, **75**, 387–391.
- [102] Lam, Y. (1990). An optimal single variable sampling plan with censoring. *The Statistician*, **39**, 53–66.
- [103] Lam, Y. (1994). Bayesian variable sampling plans for the exponential distribution with type I censoring. *The Annals of Statistics*, **22**, 696–711.
- [104] Laplace, P.S. (1812). *Theorie Analytique des Probabilities*. Paris: Courcier.
- [105] Larson, H.R. (1966). A nomograph of the cumulative binomial distribution. *Industrial Quality Control*, **23**, 270–278.
- [106] Lawless, J.F. (1981). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [107] Lee, H.L. y Tagaras, G. (1989). On the robustness of the modified beta distributions for acceptance sampling in statistical quality control. *Naval Research Logistics*, **36**, 447–461.
- [108] Lieberman, G.J. y Resnikoff, G.J. (1955). Sampling plans for inspection by variables. *Journal of the American Statistical Association*, **1**, 457–516.

- 
- [109] Lieblein, J. (1953). On the exact evaluation of the variances and covariances of order statistics in samples from the extreme-value distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, **24**(2), 282–287.
- [110] Lin, D. (1999). A Bayesian life test acceptance sampling plan by variables with cost considerations. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **28**(4), 1113–1133.
- [111] Lindley, D. y Singpurwalla, N. (1993). Adversarial life testing. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **55**(4), 837–847.
- [112] MacFarland, W.J. (1971). Sequential analysis and Bayesian demonstration. *Proceedings 1971 Annual Reliability and Maintainability Symposium*, pp. 24–38.
- [113] Mann, N.R. (1967). Best linear invariant estimation for Weibull parameters under progressive censoring. *Technometrics*, **13**, 521–533.
- [114] Mann, N.R. (1977). An F approximation for two-parameter Weibull and log-normal tolerance bounds based on possibly censored data. *Naval Research Logistics*, **24**, 187–196.
- [115] Mann, N.R. y Fertig, K.W. (1977). Efficient unbiased quantile estimators for moderate-size complete samples from extreme value and Weibull distributions: confidence bounds and tolerance and prediction intervals. *Technometrics*, **19**, 87–93.
- [116] Martz, H.F. y Waller, R.A. (1982). *Bayesian Reliability Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

- 
- [117] McLachlan, G.J. y Krishnan, T. (1997). *The EM Algorithm and Extensions*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [118] Meeker, W.Q. y Escobar, L.A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [119] MIL-STD-105D (1963). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*. Military Standard, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [120] MIL-STD-414 (1957). *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective*. Military Standard, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [121] MIL-STD-690B (1960). *Failure Rate Sampling Plans and Procedures*. Military Standard, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [122] MIL-STD-781B (1967). *Reliability Tests: Exponential Distribution*. Military Standard, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [123] MIL-STD-781C (1977). *Reliability design Qualification and Production Acceptance Tests: Exponential Distribution*. Military Standard, U.S. Department of Defense, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [124] Montanari, G.C. y Cacciari, M. (1988). Progressively-censored aging tests on XLPE-insulated cable models. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, **23**, 365–372.

- 
- [125] Montgomery, D.C. (2000). *Introduction to Statistical Quality Control*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 4th. edition.
- [126] Mood, A.M. (1943). On the dependence of sampling inspection plans upon population distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, **14**, 415–425.
- [127] Moskowitz, H. y Tang, K. (1992). Bayesian variables acceptance-sampling plans: quadratic loss function and step-loss function. *Technometrics*, **34**(4), 340–347.
- [128] Nachlas, J.A. y Kim, S.I. (1989). Generalized attribute acceptance sampling plans. *Journal of Quality Technology*, **21**, 32–40.
- [129] Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [130] Ng, H.K.T., Chan, P.S. y Balakrishnan, N. (2002). Estimation of parameters from progressively censored data using EM algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, **39**, 371–386.
- [131] Ng, H.K.T., Chan, P.S. y Balakrishnan, N. (2004). Optimal progressive censoring plans for the Weibull distribution. *Technometrics*, **46**(4), 470–481.
- [132] Nigm, A.M. y Ismail, M.A. (1985). Bayesian life test sampling plans for the two parameter exponential distribution. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **14**(3), 691–707.
- [133] Nocedal, J. y Wright, S.J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, 2nd. edition.

- 
- [134] Novick, M.R. y Hall, W.J. (1965). A Bayesian indifference procedure. *Journal of the American Statistical Association*, **60**, 1104–1117.
- [135] Owen, D.B. (1967). Variables sampling plans based on the normal distribution. *Technometrics*, **9**, 417–423.
- [136] Owen, D.B. (1969). Summary of recent work on variables acceptance sampling with emphasis on non-normality. *Technometrics*, **11**, 631–637.
- [137] Patnaik, P.B. (1950). The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika*, **37**, 78–87.
- [138] Pérez-González, C.J. (2004). *Diseño de planes de muestreo en control de aceptación con datos censurados*. Memoria de Licenciatura, Universidad de La Laguna.
- [139] Pérez-González, C.J. y Fernández, A.J. (2006). Planes de muestreo de aceptación aproximados con censura progresiva. En *Contribuciones a la Estadística y a la Investigación Operativa*, J. Sicilia et al., eds, pp. 1032–1046. ISBN 84-689-8552-X.
- [140] Pérez-González, C.J. y Fernández, A.J. (2007). Planes de muestreo de aceptación utilizando riesgos promedios. En *Actas del XXX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, pp. 1–15. Valladolid, España. ISBN 978-84-690-7249-3.
- [141] Pérez-González, C.J. y Fernández, A.J. (2009). Accuracy of approximate progressively censored reliability sampling plans for exponential models. *Statistical Papers*, **50**(1), 161–170.

- 
- [142] Pérez-González, C.J. y Fernández, A.J. (2009). Comparación de diseños aproximados de planes de muestreo para la distribución log-normal con censura progresiva. En *Actas del XXXI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, pp. 1–12. Murcia, España. ISBN 978-84-691-8159-1.
- [143] Persson, T. y Rootzen, H. (1977). Simple and highly efficient estimators for a type I censored normal sample. *Biometrika*, **64**, 123–128.
- [144] Pfanzagl, J. (1963). Sampling procedures based on prior distributions and costs. *Technometrics*, **5**, 47–61.
- [145] Pham, T.G. y Turkkan, N. (1992). Bayes binomial sampling by attributes with a general-beta prior distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **41**(2), 310–316.
- [146] Riew, M.C. y Bai, D.S. (1984). An economic attributes acceptance sampling plan with three decision criteria. *Journal of Quality Technology*, **16**, 136–143.
- [147] Rosenkrantz, R.D. (1977). *Inference, Method, and Decision: Towards a Bayesian Philosophy of Science*. Boston: Reidel.
- [148] Rossow, K.M. (1972). Is it necessary to assume a normal distribution in applying sampling schemes for variables? *Qualitat und Zuverlässigkeit*, **17**, 134–137.
- [149] Sarhan, A.E. y Greenberg, B.G. (1962). *Contributions to Order Statistics*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- [150] Savchuk, V.P. y Martz, H.F. (1994). Bayes reliability estimation using multiple sources of prior information: Binomial sampling. *IEEE Transactions on Reliability*, **43**(1), 138–144.

- 
- [151] Schafer, R.E. y Sheffield, T.S. (1971). *Bayesian Reliability Demonstration, Phase II - Development of a Prior Distribution*. RADC-TR-71-209, Rome Air Development Center, Rome.
- [152] Schafer, R.E. y Singpurwalla, N.D. (1970). A Sequential Bayes Procedure for Reliability Demonstration. *Naval Research Logistics Quarterly*, **17**, 55–67.
- [153] Schick, G.J. y Drnas, T.M. (1972). Bayesian Reliability Demonstration. *AIIE Transactions*, **4**, 92–102.
- [154] Schilling, E.G. (1970). Variables Sampling and MIL-STD-414. *ASQC Annual Convention Transactions*, pp. 175–188.
- [155] Schilling, E.G. y Johnson, L.I. (1980). Tables for construction of matched single, double and multiple sampling plans with application to MIL-STD-105D. *Journal of Quality Technology*, **12**(4), 220–229.
- [156] Schmidt, J.W., Bennett, G.K. y Case, K.E. (1980). A three action cost model for acceptance sampling by variables. *Journal of Quality Technology*, **12**, 10–18.
- [157] Schmidt, J.W., Case, K.E. y Bennett, G.K. (1974). The choice of variables sampling plans using cost effective criteria. *AIIE Transactions*, **6**, 178–184.
- [158] Schneider, H. (1986). *Truncated and Censored Samples from Normal Populations*. New York: Marcel-Dekker.
- [159] Schneider, H. (1989). Failure-censored variables-sampling plans for lognormal and Weibull distributions. *Technometrics*, **31**(2), 199–206.

- 
- [160] Schneider, H. y Wilrich, P.T. (1981). The robustness of sampling plans for inspection by variables. *Computational Statistics*, pp. 281–295.
- [161] Shanno, D.F. (1970). Conditioning of Quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of Computation*, **24**, 647–656.
- [162] Sharma, K.K. y Bhutani, R.K. (1992). A comparison of classical and Bayes risks when the quality varies randomly. *Microelectronics and Reliability*, **32**, 493–495.
- [163] Sheng, Z. y Fan, D.Y. (1992). Bayes attribute acceptance-sampling plan. *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 307–309.
- [164] Sittig, J. (1951). The economic choice of sampling system in acceptance sampling. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **33**, 51–84.
- [165] Soland, R.M. (1968). Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale parameter and its application to acceptance sampling. *IEEE Transactions on Reliability*, **R-17**, 84–90.
- [166] Stephens, K.S. (2001). *The Handbook of Applied Acceptance Sampling: Plans, Procedures and Principles*. Milwaukee: American Society for Quality Press.
- [167] Tagaras, G. y Lee, H.L. (1987). Optimal Bayesian single-sampling attribute plans with modified beta prior distribution. *Naval Research Logistics*, **34**, 789–801.
- [168] Takagi, K. (1972). On designing unknown-sigma sampling plans based on a wide class of non-normal distributions. *Technometrics*, **14**(3), 669–678.

- 
- [169] Thomas, D.R. y Wilson, W.M. (1972). Linear order statistic estimation for the two-parameter Weibull and extreme-value distributions from type II progressively censored samples. *Technometrics*, **14**, 679–691.
- [170] Thyregod, P. (1974). Bayesian single sampling acceptance plans for finite lot sizes. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **36**, 305–319.
- [171] Thyregod, P. (1975). Bayesian single sampling plans for life-testing with truncation of the number of failures. *Scandinavian Journal of Statistics*, **2**, 61–70.
- [172] Tobias, P.A. y Trindade, D.C. (1995). *Applied Reliability*. New York: Van Nostrand Reinhold, 2nd. edition.
- [173] Truscott, W.T. (1969). Batch acceptance sampling by attributes to reduce overall costs. *The Quality Engineer*, **33**, 9–18.
- [174] Villegas, C. (1977). On the representation of ignorance. *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 651–654.
- [175] Viveros, R. y Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of parameters of life from progressively censored data. *Technometrics*, **36**, 84–91.
- [176] Wetherill, G.B. (1960). Some remarks on the Bayesian solution of single sample inspection scheme. *Technometrics*, **2**, 341–352.
- [177] Wetherill, G.B. (1977). *Sampling Inspection and Quality Control*. London: Chapman and Hall, 2nd. edition.

- 
- [178] Wetherill, G.B. y Campling, G.E.G. (1966). The decision theory approach to sampling inspection. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **28**, 381–416.
- [179] Wetherill, G.B. y Chiu, W.K. (1975). A review of acceptance sampling schemes with emphasis on the economic aspect. *International Statistical Review*, **43**(2), 191–210.
- [180] Wetherill, G.B. y Kollerstrom, J. (1979). Sampling inspection simplified. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, **142**(1), 1–32.
- [181] Wilson, E.B. y Hilferty, M.M. (1931). The distribution of chi-square. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **17**, 684–688.
- [182] Wu, J.W., Tsai, T.R. y Ouyang, L.Y. (2001). Limited failure-censored life test for the Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **50**, 107–111.
- [183] Zellner, A. (1977). Maximal data information prior distributions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **41**, 113–147.