Curso 2010/11
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/9
I.S.B.N.: 978-84-15287-29-2

ISRAEL GARCÍA ALONSO

Influencia de los contextos cotidiano y matemático en el significado de los términos estadísticos estudiados en Bachillerato. Un estudio sobre la comprensión

Director
JUAN ANTONIO GARCÍA CRUZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A María, Carlos y Álvaro

Agradecimientos

A María por su dedicación y apoyo durante todo el proceso de investigación y elaboración de esta memoria, sin ella no hubiera sido posible su finalización.

A Carlos y Álvaro, por el tiempo que les tomé prestado.

A mi director Juan Antonio García Cruz por su sabia dirección y orientación, y sobre todo por su paciencia durante todos estos años.

A todo el profesorado del Área de Didáctica de la Matemática por sus ánimos y aportaciones a este trabajo en sus diferentes fases.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.

PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

A lo largo de los últimos años, la estadística ha sido la parte de las matemáticas que con más frecuencia se utiliza para dar cualquier tipo de información en la vida cotidiana, ya sea a través de gráficas, tablas o mediante informes. Son muchas las situaciones habituales en que las conclusiones de estudios o investigaciones se fundamentan en un estudio estadístico.

Es por tanto muy importante conocer los términos y expresiones, así como saber interpretar las informaciones, que vienen dadas por medio de una estadística.

En este sentido, son muchos los campos de estudio en los que ciertos elementos del razonamiento estadístico se han convertido en un requisito. Esto conlleva que en la prensa aparezcan informaciones médicas, económicas o estudios psicológicos, que puedan comprenderse o evaluarse con cierto conocimiento estadístico.

Este hecho ha producido que la escuela, para no quedarse al margen de los cambios sociales, dedique, en el currículo de matemáticas, un bloque al estudio de la probabilidad y la estadística, desde que el estudiante comienza la Educación Secundaria Obligatoria.

Holmes (2002) señala que desde 1961 aparece en el currículo de Inglaterra la enseñanza de la estadística y probabilidad de forma opcional para los estudiantes de 12 a 16 años que querían especializarse en matemáticas.

Vivimos actualmente en una sociedad cambiante, por lo que es necesario reflexionar sobre la forma en la que debemos formar los jóvenes. Pues lo que hoy nos puede parecer esencial y a lo que dedicamos gran parte del tiempo de enseñanza, puede quedar obsoleto en poco tiempo. La estadística es una materia fundamental en una variedad de áreas de conocimiento, algunas de las cuales las encuentran los alumnos durante su formación secundaria: matemáticas, ciencias sociales, ciencias naturales. Asimismo, la mayoría de estudiantes universitarios deben seguir un curso básico de estadística y con frecuencia encuentran datos y estudios estadísticos en su futura vida profesional. ¿Qué conocimientos son esenciales en estadística? ¿Qué formación debe tener el profesorado que desarrolla la estadística en su aula? ¿Cómo entiende el alumnado y desarrolla la estadística que se estudia en el aula?.

Si nos preguntamos qué habilidades y hábitos presenta un profesional de la estadística, McLean (2002) señala que desarrollan tres características fundamentales:

- Habilidad para leer y comprender argumentos estadísticos.
- Habilidad para desarrollar análisis estadísticos.

Cada una de estas características representa a su vez un rango de habilidades: Leer, comprender y analizar argumentos sencillos y también otros más complejos.

- Y como tercera característica presenta el hábito en la utilización del pensamiento crítico cuantitativo cuando es necesario.

Además, este autor agrega que dependiendo del papel en la vida que tengamos necesitaremos un determinado nivel de "*statistacy*" ("*estadisticidad*") y por tanto la pregunta que surge inmediatamente es: ¿cuáles serán los conceptos estadísticos que debemos pedir que posea cualquier ciudadano?

La respuesta, según el autor, es la enumeración de los siguientes conceptos:

- Probabilidad como una formalización del modo normal de pensamiento.
- Desarrollo y utilización de modelos probabilísticos.
- Utilización predictiva de modelos probabilísticos.

- Papel de los distintos métodos de cuantificación de la probabilidad.
- Concepto de población, particularmente como un modelo.
- Concepto de muestreo aleatorio de una población conocida.
- "*Random variation*" (variación aleatoria) y su modelización.
- Diseño de Muestreo aleatorio y razones para ello.
- Aproximación de una variable mediante intervalos.
- Modelo probabilístico para la variabilidad de una muestra estadística sobre una población de muestras.
- Intervalos de confianza para un parámetro.
- Selección entre modelos basados en una muestra de datos.
- Contraste de hipótesis como modelo de selección.
- Modelos de recuento para diferentes variaciones.
- Más selección entre modelos.

El autor reconoce que su lista difiere de otras en el tipo de expresiones utilizadas y en que ha escogido el contraste de hipótesis como elemento básico que debe conocer cualquier ciudadano. Son dos razones las que aporta para integrar este conocimiento como básico para cualquier ciudadano: es el equivalente estadístico del método científico y por otro lado, tanto el contraste de hipótesis como la investigación científica son desarrollos formalizados de un método de pensamiento cotidiano.

Otro elemento que debemos tener en cuenta es que ante un resultado estadístico existe un aspecto que fácilmente aparece en cualquier ciudadano y que no debemos subestimar: las intuiciones. No podemos perder de vista que las intuiciones en probabilidad, si no se orientan adecuadamente, pueden ser elementos que nos distraigan en la toma de decisiones o cuando realizamos juicios de valor. Un ciudadano estadísticamente culto debe controlar sus intuiciones sobre el azar, utilizando el razonamiento estadístico. En Carrera (2002) se aprecia que hay alumnos universitarios, y por tanto con una gran formación que llegan con intuiciones incorrectas acerca de la probabilidad y que les producen dificultades en la comprensión de términos y conceptos de inferencia.

Todo lo anterior nos muestra las habilidades, hábitos, intuiciones, conocimientos y expresiones que de la cultura estadística se requiere en nuestra sociedad, y que debemos controlar y utilizar de manera correcta. En este sentido, el profesorado será el responsable de desarrollar en los ciudadanos la estadística que se exige. Pero previamente el profesorado debe poseer dicha cultura estadística. Por ello es muy importante la formación y motivación del profesorado. Que la estadística aparezca en el currículo no significa que se esté enseñando en las aulas. El profesor debe encontrarse con la formación y capacidad suficiente para poder desarrollar la formación estadística en el aula con confianza y seguridad. Y esto se consigue con una formación adecuada. ¿Se está teniendo esto en cuenta en la formación del profesorado?

Un aspecto a considerar en la formación del profesorado es el conocimiento didáctico de la materia (Thompson, 1992). Este conocimiento didáctico no es exclusivamente el conocimiento de la materia, sino que además debe haber realizado el profesorado una reflexión epistemológica del significado de los conceptos, estudio de las dificultades, errores y obstáculos del alumnado en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas, y análisis de los recursos metodológicos disponibles.

Los libros de texto son un recurso muy importante en la formación de cualquier ciudadano, y no puede ser menos cuando hablamos de la formación estadística. Holmes (2002) señala que como los libros de texto los desarrollan matemáticos el objetivo de las lecciones estadísticas es matemático y no estadístico. Esto produce que el alumnado no adquiera la competencia necesaria para desarrollar una investigación en estadística.

Todo lo anterior hace que se investigue en Educación Estadística y podemos decir que son numerosas las investigaciones que se están realizando en este campo. Así, Garfield et al. (1988) hace un balance de cómo la probabilidad y la estadística han ido ocupando un puesto relevante en las investigaciones y estudios realizados a partir de los años 80. Por otro lado, en ese mismo trabajo se señala que el estudio de la comprensión de la probabilidad se ha extendido más que la investigación en estadística.

En Batanero et al. (2000) se plantean una serie de cuestiones prioritarias a la comunidad científica sobre las investigaciones que se están realizando en Educación Estadística. En este mismo trabajo encontramos la respuesta de Maxine Pfannkuch que indica que el pensamiento estadístico opera en tres áreas diferentes: investigación empírica, evaluación de investigaciones y vida cotidiana. Y, según esta última autora, habría que investigar sobre el desarrollo del pensamiento estadístico en cada una de estas tres áreas particulares. Nuestra propia investigación se focaliza en el área de la vida cotidiana, puesto que se centra en el estudio del desarrollo del pensamiento estadístico orientado a que los individuos puedan operar y comprender mejor su entorno, para así conocer sus propias reacciones y racionalizar adecuadamente las decisiones a tomar cuando se enfrentan a situaciones de incertidumbre y es pertinente el uso de la Estadística.

La estadística siempre tiene por finalidad extraer conclusiones de una cantidad importante de datos. Por eso es importante que entendamos que, como indica Moore (2005), "la estadística son números en un contexto" y en este sentido, añade que "el contexto nos permite sacar partido de nuestros conocimientos sobre el tema de estudio y emitir juicios".

A nivel curricular, la estadística, tradicionalmente ha sido dividida en dos ramas: descriptiva e inferencial. La estadística descriptiva trata sobre cómo realizar el estudio de estos datos, mientras que la inferencial "va más allá de los datos disponibles y obtiene conclusiones sobre un universo más amplio" (Moore, 2005), teniendo en cuenta la variabilidad y la incertidumbre.

El razonamiento estadístico se erige como elemento fundamental del aprendizaje estadístico y diferenciado de otros tipos de razonamiento. Wild & Pfannkuch (1999) describen cinco componentes fundamentales presentes en el razonamiento estadístico:

- Reconocer la necesidad de los datos: muchas situaciones reales sólo se pueden comprender con el análisis de los datos que estas proporcionan. Debemos separar las anécdotas y los juicios de valor que nos pueden impedir una correcta toma de decisiones.
- Transnumeración: este término lo utiliza para señalar la comprensión que surge tras la representación de los datos, es decir, la nueva visión que de los datos se tiene con los distintos tipos de representación y agrupación de los datos.
- Percepción de la variación: que es inherente al trabajo con los datos y la toma de decisiones en base a ellos. Debemos comprender que la variación existe y se transmite en los datos.
- Razonamiento con modelos estadísticos: denominando así a cualquier herramienta matemática que nos permita representar la realidad. Debemos diferenciar el modelo de los datos y a la vez relacionarlos.
- Integración de la estadística y el contexto: es un elemento esencial pues la toma de decisiones, los juicios de valor se toman a raíz de los datos que hemos

extraído de un contexto concreto. Y por tanto, los resultados tienen que volver a estar dentro de este mismo contexto.

Por todo lo anteriormente citado, vemos que la Educación Estadística es un campo muy importante dentro del ámbito de la investigación en educación. Si la estadística es un conocimiento social importante, paralelamente lo será su enseñanza y aprendizaje. Y este paralelismo hace que debamos reflexionar y profundizar cómo enseñar y cómo aprender cada vez mejor la estadística.

1.1 La investigación en educación estadística

En el mundo de la investigación, la Educación Estadística ha ido adquiriendo un interés creciente debido en gran parte por la trascendencia que asume la aplicación de estos contenidos en la vida de cualquier ciudadano. Consecuentemente, es necesario que la enseñanza y aprendizaje de la estadística se oriente adecuadamente, de modo que los alumnos adquieran la preparación que les permitan afrontar los desafíos que les depara la vida. Prueba de toda esta revolución en la Educación Estadística se puede observar en el mundo de la investigación con la aparición de diferentes marcos en los que se exponen los estudios que en este sentido se van desarrollando. Nos referimos a la existencia de las conferencias ICOTS (International Conference on Statistical Education), la celebración de conferencias satélites del ICME (International Congress of Mathematics Education), llamadas Round Table Conference sobre temas específicos de educación estadística. En 1991 nace el IASE (International Association for Statistical Education) como sociedad científica y profesional cuyo objetivo principal es el desarrollo y mejora de la educación estadística en el ámbito internacional. Y también aparecen otros congresos importantes que incluyen grupos temáticos de educación estadística como son PME (Psicology Mathematical Education), ICME (International Congress of Mathematical Education) y el CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática).

Consecuentemente, asistimos en las últimas décadas a un aumento progresivo de investigaciones relacionadas con el estudio y comprensión de los conceptos estadísticos. Según Shaughnessy (1992), el cruce de metodologías y tradiciones de investigación en estadística, hace que esta rama de investigación sea una de las más ricas en educación matemática a nivel teórico. Este autor comenta que los psicólogos han jugado un papel importante en la construcción de teorías en este campo, observando y describiendo lo que ocurre cuando el alumnado se enfrenta a tareas de inferencia. Mientras que los educadores matemáticos y estadísticos de todo el mundo han hecho importantes contribuciones tratando de modificar las concepciones existentes sobre estadística y probabilidad.

En la vida de cualquier ciudadano aparecen, en diversas situaciones, aplicaciones de estos contenidos estadísticos, y esta es una de las explicaciones para el creciente interés de la investigación en educación estadística. Según Shaughnessy (1992) aprender sobre estadística es de gran importancia pues se ha convertido en un medio de comunicación y de toma de decisiones a través del uso de datos y gráficos. Además, la estadística contribuye a preparar ciudadanos más informados y consumidores responsables. A todo esto contribuye la introducción de la estadística en las aulas de manera que el estudiante tome contacto con ella desde edades cada vez más tempranas.

Por otro lado, la introducción de la estadística como elemento curricular, en las aulas provoca que se investigue la forma de trabajarla con el alumnado y la manera en que estos aprenden. Según Jolliffe (1998), este es probablemente uno de los principales propósitos de la investigación en educación estadística, pues se trata de mejorar la práctica de la enseñanza y la comprensión e interpretación de la estadística. Este mismo autor señala que otro objetivo de la investigación consiste en fomentar la cultura estadística (*statistical literacy*) en el mundo, esto es, mejorar la forma en la que se presentan hechos estadísticos, tanto al público general como a los investigadores que utilizan la estadística como herramienta básica para el desarrollo de sus trabajos.

La estadística, además, tiene un componente cultural, pues diariamente se presenta la necesidad de tomar decisiones en diferentes facetas de la vida, tales como la política, la actividad social, la biología. Gal (2002) define "*statistics literacy*" como "la capacidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente la información, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos, que se pueden encontrar en diversos contextos; y su capacidad para discutir o comunicar sus reacciones ante tal información estadística, cuando son relevantes; su comprensión sobre el significado de la información; sus opiniones sobre las implicaciones de esta información; o sus preocupaciones respecto a la aceptación de una conclusión dada. Esta capacidad y comportamientos no se hallan en sí mismas, se componen de varios conocimientos básicos y disposiciones interrelacionados". De esta definición extraemos varias capacidades: interpretar, evaluar, discutir, comunicar, comprender. Estas capacidades no se dan por separado, sino que se relacionan unas con otras. Todo ello justifica el estudio de la estadística desde edades bien tempranas y hace necesario que se analice cuál es la vía más adecuada para una formación estadística que evite interpretaciones erróneas.

Tanto en la inferencia informal como en la formal se han realizado estudios de investigación en los que se analiza la comprensión de los términos estadísticos.

Wild & Pfannkuch (1999) analizaron la inferencia informal e indican que dicho tipo de inferencia está interconectada con razonamientos de distribuciones de medidas centrales y de muestreo con un ciclo de investigaciones empíricas. Así, la inferencia informal la entienden como la extracción de conclusiones basados principalmente en observar, comparar y razonar distintas distribuciones de datos. En este sentido sugieren los autores que parte de las dificultades del alumnado para comprender el razonamiento utilizado es que no se hace explícito ni por parte del alumnado ni del profesorado.

Vallecillos (1999) realiza un recorrido por las investigaciones desarrolladas hasta ese momento relativas a las dificultades que aparecen en el aprendizaje de la inferencia estadística. Por un lado existen dificultades debidas a la lógica del contraste, acerca del nivel de significación, dificultades con los estadísticos, parámetros y distribuciones muestrales y por último, dificultades en la comprensión del papel que tiene la hipótesis.

Así, con respecto a la lógica del contraste, Vallecillos (1999) describe cuatro concepciones que presentan el alumnado, dependiendo del tipo de prueba del contraste de hipótesis:

- Concepción del contraste como regla de decisión.
- Concepción del contraste como proceso para obtener soporte empírico para la hipótesis investigada.
- Concepción del contraste como prueba probabilística de la hipótesis.
- Concepción del contraste como prueba matemática de la veracidad de la hipótesis.

Con el nivel de confianza Vallecillos (1999) señala las siguientes concepciones erróneas:

- Nivel de significación como probabilidad condicional referida a una de las hipótesis.
- Nivel de significación como probabilidad simple de la hipótesis nula.
- Nivel de significación como probabilidad de error.

Batanero (2000) continúa en esta misma línea de investigación y describe algunas de las concepciones erróneas que presentan el alumnado universitario así como los investigadores que utilizan la inferencia estadística formal diariamente. Encuentra que aparecen errores en la comprensión de la lógica del contraste estadístico: errores filosóficos, pues los investigadores suelen utilizar los contrastes para medir las evidencia hacia una hipótesis dada; y factores psicológicos que prevalecen en la toma de decisiones, como la concepción errónea respecto al nivel de significación cuando se interpreta como la probabilidad de equivocarse cuando rechazamos la hipótesis nula como cierta. Otros errores que pueden aparecer, según Batanero (2000) son los relativos a la elección de la hipótesis nula y la alternativa.

Vallecillos & Batanero (1997) analizaron la interpretación del nivel de significación que dan estudiantes de medicina, seleccionados por su excelencia académica. Encontramos que, estos alumnos, a pesar de su buena preparación estadística, presentan errores de creencias, cuando interpretan el contraste de hipótesis como procedimiento estadístico que permite el cálculo inductivo de la probabilidad a posteriori de la hipótesis en función de los datos; además, en ocasiones no aprecian la característica de variable aleatoria del estadístico muestral. Algunos alumnos interpretan que el valor del nivel de significación no se calcula sino que se fija al comienzo del proceso.

Moreno & Vallecillos (2002), en cambio, realizaron un estudio en el aula con el objetivo de analizar el aprendizaje de algunos conceptos básicos de inferencia, como son población y muestra. Encontraron que los estudiantes presentan concepciones erróneas que les hacen inferir de manera incorrecta. Entre otras, señalan que la concepción que aparece en los estudiantes con más frecuencia es la descrita por Kahnemann et al. (1982), denominada *heurística de la representatividad*, que se caracteriza por la creencia de que las muestras pequeñas deben reproducir las características esenciales de la población de la cual han sido extraídas. Además, el alumnado presenta teorías previas a la instrucción en contra de la norma convencional y que estas son difíciles de alterar y corregir con la instrucción, y que, además, es capaz de mantener creencias múltiples y contradictorias de una misma situación, como puede ser la contraposición de las ideas de representatividad y de variabilidad muestral.

1.2 El problema general de investigación

Como hemos venido señalando, la estadística tiene un lugar destacado en la enseñanza Primaria y Secundaria en todos los países occidentales, y de forma especial en España. En Ben-Zvi (2006) se define la inferencia como la teoría, métodos y práctica de construcción de juicios sobre parámetros de una población, basados normalmente en muestras aleatorias. Pero cabe destacar, que entre estos temas se encuentra la Inferencia Estadística: intervalos de confianza y test de hipótesis basados en la distribución normal. Y dos tipos de preguntas sobre inferencia: generalización (muestras) y comparación y causas (emperimentos). En términos generales, la primera tiene que ver con la generalización desde una pequeña muestra a la población general, mientras que la segunda tiene que ver con determinar si un patrón en los datos se debe a alguna causa o efecto.

Ben-Zvi (2006) describe como inferencia informal la basada en lo que observamos en los datos y que se aplica sólo a individuos y circunstancias concretas para los datos que tenemos. Para este autor, este tipo de razonamiento puede llevar a conclusiones incoherentes y dar a los estudiantes un sentido determinístico erróneo de la estadística. Métodos rudimentarios de estadística, son la tabulación y la elaboración de gráficas, que pueden ayudar a los estudiantes a buscar patrones interesantes en un conjunto de datos sencillos, pero no son herramientas suficientes para realizar un análisis más allá de los datos. Añade el autor que la inferencia informal está íntimamente relacionada con actividades de tipo argumentativo. Extraer conclusiones lógicas de los datos (formales o informales) se acompaña de la necesidad de probar argumentos basados en los datos. Así pues, argumentar hace referencia al discurso de persuasión, de probar lógicamente, de exponer creencias basadas en la evidencia de los datos y más generalmente, generar discusión en la que surgen desacuerdos y se construyen razonamientos.

Ha habido algunas recomendaciones (NCTM, 2000) para comenzar el desarrollo de nociones de inferencia estadística a edades muy tempranas, grados elemental y medio, en las que se trabaja con la estadística de manera informal e intuitiva, sin tener nada que ver con la sofisticación y formalización requerida en los grados superiores.

Como hemos señalado anteriormente, han aparecido muchas investigaciones basadas en el análisis de las dificultades y obstáculos que los alumnos encuentran cuando se enfrentan con este tipo de conocimiento. Concretamente en España, en el ámbito universitario, hemos descrito los trabajos de Vallecillos y Batanero (1997) que reseñaban las dificultades en el aprendizaje de la inferencia estadística, especialmente respecto de los conceptos de nivel de significación, parámetro, y estadístico entre otros, así como sobre la lógica global del contraste de hipótesis. En el ámbito de la Educación Secundaria, hemos descrito el trabajo de Moreno y Vallecillos (2002), realizado con alumnos de 15 y 16 años, y donde mostraban que los estudiantes poseen concepciones erróneas que hacen que realicen inferencias incorrectas. Por otro lado, el Contraste de Hipótesis parece ser una herramienta de especial dificultad para los estudiantes. En Vallecillos (1999) se indica que los estudiantes muestran diferentes concepciones cuando tratan de explicar lo que demuestra el test de hipótesis. Recientemente Ramos Domínguez et al. (2009) se recogen los errores que cometen los alumnos de Bachillerato al resolver problemas de Contrastes de Hipótesis en los exámenes de la PAU.

García Alonso y García Cruz (2005), realizaron un estudio sobre una muestra (n=50) de estudiantes presentados a la Prueba de Acceso a la Universidad. Se analiza la pregunta relativa al contraste de hipótesis. El objetivo del estudio consiste en estudiar la respuesta al problema rutinario de contraste de hipótesis que daban los estudiantes que han aprobado la materia de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II. En dicho estudio concluyen que la mayoría del alumnado (86%) no es capaz de realizar completamente los problemas de Inferencia Estadística propuestos, a pesar de que tales problemas no se diferencian de los que están habituados a resolver en la práctica diaria de la clase.

Todas las investigaciones anteriores coinciden en que desde el punto de vista lógico-matemático existe una dificultad inherente a la Estadística Inferencial.

Existen otras dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en general, y de la estadística en particular, que tienen que ver con otros aspectos. Así, Orton (1990), indica que en ocasiones surgen en el alumnado obstáculos que poco tienen que ver con las matemáticas por estar relacionados con el lenguaje. Añade que muchos aspectos del lenguaje y las matemáticas pueden afectar al aprendizaje y hace que el alumnado interprete o cambie a veces su significado real por el que cree que el profesor pretende establecer.

Con respecto al lenguaje, Dickson et al. (1991) nos indica que, dado que el desarrollo del lenguaje es de naturaleza dinámica, resulta esencial que el alumnado y el profesorado analice los diversos significados e interpretaciones de las palabras y sentencias, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro entiende y quiere decir al utilizar determinadas formas lingüísticas.

Sabemos que, durante el proceso de construcción del conocimiento matemático, un vehículo importante es el lenguaje, y durante el Bachillerato las matemáticas presentan un nivel de abstracción mayor y una mayor tecnificación, razón por la cual se necesita cada vez más términos específicos. Es este el caso de la Inferencia Estadística.

Otro aspecto, que creemos que es relevante en estos niveles, es el libro de texto. Es por ello que analizando algunos autores hemos encontrado que según Christiansen et al (1986) podemos encontrar diferentes tipos de libros de texto:

- Libros de ejercicios, que contienen sólo problemas y ejercicios, donde las explicaciones las debe buscar el estudiante por otro medio, ya sea otro libro o el profesor.
- Libros que contienen dos partes bien separadas: Por un lado sólo reglas y generalizaciones y por otro, los problemas.
- Libros que consisten en una mezcla de los dos tipos anteriores: generalizaciones, reglas y teorías, se intercalan con problemas, ejercicios y ejemplos.

En nuestra investigación, nos centraremos en este último tipo de libro de texto, que está muy extendido entre el profesorado y el alumnado de los distintos niveles de enseñanza.

Cuando nos encontramos ante un libro de texto, ¿qué es lo que buscamos? Christiansen et al (1986) distinguen tres tipos de estudio sobre los libros de texto:

- “a priori”: consiste en analizar el texto como un medio de instrucción.
- “a posteriori”: se realiza cuando tratamos de ver en qué mejora el aprendizaje de los estudiantes con un determinado texto.

- "a tempo": consiste en estudiar cómo los estudiantes utilizan el libro de texto mientras tiene lugar el proceso de aprendizaje y cómo lo utilizan también los profesores durante el proceso de enseñanza.

Nuestra investigación se centra en un estudio a priori del libro de texto, pues tratamos de estudiar cuán útil es el libro dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Ante una investigación a priori de un libro de texto, Christiansen et al (1986) indican que el trabajo debería dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Es el contenido matemático el que debería ser? Con esto se pretende estudiar los posibles errores, claridad desde el punto de vista matemático, si es exhaustivo y no da lugar a actividades de creatividad mental por parte del alumnado.
- ¿Se ajusta al curso académico? Estudiar hasta qué punto se ajusta al conocimiento y habilidades que posee el alumnado, y si por otro lado, permite adquirir las habilidades y conocimientos que utilizarán en el futuro.
- ¿Se adapta a las habilidades de aprendizaje y a las diferentes formas en las que se puede aprender? Es decir, hay conceptos que se aprenden una vez, otros se deben repetir una y otra vez, otros los aprende el alumnado de forma aislada, y otros conceptos los aprende poniéndolos en relación con conceptos previos.

Además podemos preguntarnos si cualquier parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se pueden preparar y guiar utilizando el material escrito. O si por el contrario, hay limitaciones a la hora de guiar, mediante un texto, un aprendizaje.

Por otro lado, los mismos autores señalan que, cuando observamos la instrucción matemática que contiene un texto, se pueden determinar varios aspectos matemáticos:

- Teóricos: proporcionan teoremas, definiciones y axiomas.
- Algorítmicos: da las reglas del proceso o de la construcción de un elemento, consideradas como el núcleo de este aspecto.

- Lógicos: proporciona indicaciones de la manera en la que podemos o no manejar la teoría.
- Metodológicos: da las reglas del proceso, pero a diferencia del algorítmico, ahora con una naturaleza más heurística.
- Comunicativos: enfatiza las convenciones en la notación y escritura matemática.

Podemos analizar los distintos aspectos que trabaja el libro de texto, para así poder describir la instrucción matemática que sigue un libro frente a otro cuando expone un mismo tema. Aunque esta comparación entre los textos se sale del alcance de nuestra investigación y por tanto quedará emplazada para futuras investigaciones.

Pero hay un elemento fundamental en cualquier texto, que son aquellas expresiones que se deben aprender como conocimiento, y que Christiansen et al. (1986) denominan "núcleos" (*kernels*). Estos núcleos, contienen, de hecho, el conocimiento, y son escogidos por los docentes como pieza clave del tema que se esté estudiando; pero para todos los docentes el núcleo no es el mismo, por lo que para un mismo tema puede ocurrir que dos profesores tengan dos núcleos diferentes. Pero son tan fundamentales que ayudan al profesorado a discriminar el estudiante capaz de aprender matemáticas del que no lo es.

Como podemos observar, son muchos los aspectos susceptibles de ser estudiados en un libro de texto. Y es mucha la información que un libro de texto nos puede proporcionar. En nuestra investigación nos vamos a centrar en el lenguaje utilizado para introducir y desarrollar los conceptos que se presentan a lo largo del bloque temático de inferencia estadística. En este sentido, Shaughnessy (2007) nos invita a realizar estudios de investigación acerca del discurso estadístico que tiene lugar en el aula. El autor se pregunta si se está proponiendo al alumnado analizar datos a alto nivel, si se está discutiendo en el aula de manera que se promueva el pensamiento estadístico elaborado, el análisis crítico, la representación múltiple y la comunicación reflexiva de resultados y soluciones.

El análisis de procesos desarrollados en las aulas no se ha realizado en investigaciones desarrolladas para la enseñanza de la estadística, según esta misma autora. ¿Hay un equilibrio entre el análisis exploratorio de datos y la enseñanza de conceptos y procesos estadísticos? En ocasiones el trabajo de conceptos y procesos estadísticos está desmarcado de su uso para el análisis de datos. No podemos perder de vista que este es el objetivo que tiene la estadística: analizar una gran cantidad de datos y extraer conclusiones de ellos válidos para toda una población. En este sentido, una parte de nuestro trabajo ha tratado de lograr dicho equilibrio, y en él hemos tratado de construir los nuevos conceptos analizando datos reales y generando discusión en el aula de manera que se promueva el pensamiento estadístico.

Una manera de describir el aprendizaje que sigue el alumnado es mediante las denominadas Trayectorias de Enseñanza-Aprendizaje, descritas por Heuvel-Panhuizen (2001). Según los autores, estas trayectorias señalan cómo es el proceso de aprendizaje que sigue un estudiante. Estas trayectorias contienen tres elementos entrelazados:

- La trayectoria de aprendizaje que da una visión general del proceso de aprendizaje seguido por el alumno.
- La trayectoria de enseñanza, consistente en las indicaciones didácticas que describen cómo realizar una enseñanza más efectiva y que estimule el proceso de aprendizaje.
- El compendio de la materia, consistente en el conjunto de elementos del currículo matemático que se deben enseñar.

Heuvel-Panhuizen (2001) indican, además, que la trayectoria de enseñanza-aprendizaje no debe ser vista de manera estrictamente lineal. Se debe ver más como una senda que como una única vía, porque en ellas intervienen diferentes parámetros a tener en cuenta, tales como:

- El proceso de aprendizaje de cada uno de los estudiantes.
- Discontinuidades en el proceso de aprendizaje: no siempre aprenden los diferentes conceptos de la misma manera.
- El hecho de aprender diferentes habilidades de manera simultánea, y de que varios conceptos se pueden desarrollar a la vez.
- Las diferencias que pueden aparecer en el proceso de aprendizaje en la escuela, como consecuencia de diferentes situaciones de aprendizaje fuera de la escuela.

- Los diferentes niveles a los que los estudiantes pueden llegar a desarrollar algunas habilidades.

Por tanto, hay razones suficientes para hablar sobre las trayectorias de enseñanza-aprendizaje.

En nuestro trabajo, hemos ideado una trayectoria de enseñanza paralela a la trayectoria de aprendizaje que el alumno describe en el tema concreto de la estadística inferencial. Nos encontramos con un alumnado en el que, a pesar de haber tenido diferentes experiencias formativas, debemos desarrollar habilidades estadísticas similares. Somos conscientes de las dificultades que esto entraña y que los ritmos de aprendizaje de cada uno son diferentes.

1.3 Delimitación del problema

Los trabajos de investigación en Inferencia Estadística analizados estudian aspectos como son las concepciones que tiene el alumnado con respecto a las muestras y cómo las utilizan para realizar inferencias sobre la población; y en otras investigaciones profundizan en los problemas que surgen con el aprendizaje del contraste de hipótesis. Otros trabajos analizados investigan sobre la introducción a edades tempranas de algunos elementos relativos a la inferencia estadística como son las gráficas, muestras y la comparación de datos. Nosotros nos hemos enmarcado dentro del aula y pretendemos analizar el discurso estadístico que tiene lugar en el aula (Shaughnessy, 2007) así como organizar discusiones en el aula que promuevan la comunicación de los resultados tras un análisis crítico y la utilización de representaciones múltiples para un mismo concepto.

Nuestra investigación se enmarca en la Educación Estadística y dentro de ella, en la inferencia estadística. Queremos analizar cómo se produce la introducción a la inferencia donde el aparato lógico-matemático es más elaborado y será la herramienta fundamental para poder estimar y tomar conclusiones. Esta introducción se produce en Bachillerato, cuando los estudiantes tienen 17 años. Hasta ese momento, y durante la Enseñanza Secundaria Obligatoria, los estudiantes trabajan la estadística, generalmente al final de cada uno de los cursos de la etapa, pero desde un punto de vista descriptivo: tabulación de datos, cálculo de algunos parámetros de centralización y dispersión, elaboración de gráficas sencillas. Es por ello que nuestra preocupación se centra en analizar si se puede comenzar el estudio de la inferencia estadística formal sin haber podido desarrollar un razonamiento estadístico no formal. Nos hemos propuesto analizar de qué manera se consigue llegar a la estadística inferencial partiendo de la estadística descriptiva. Es por lo que partimos de la estadística descriptiva que requiere el conocimiento de ciertas herramientas de cálculo, fórmulas y análisis de determinados gráficos para profundizar en el estudio de una determinada variable estadística.

En los niveles que estamos interesados en realizar la investigación sobre estadística, nos remitiremos al Currículo de Bachillerato, tanto estatal como el de la Comunidad Autónoma de Canarias, para ver qué elementos se proponen al alumnado de segundo de Bachillerato de ciencias sociales, sobre la inferencia estadística.

Según el Currículo estatal (BOE núm. 147, de 18 de junio de 2008), la inferencia estadística se localiza en 2º de Bachillerato, en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. En él se establece que, los contenidos relacionados con la estadística, que se deben trabajar durante este curso se corresponden con:

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
- Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.
- Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población.
- Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
- Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.
- Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencia de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

A partir del currículo nacional cada Comunidad Autónoma con competencias en materia de educación, elaborará su propio currículo, teniendo en cuenta que el nacional representa un 60% de los conceptos básicos que se deben trabajar en todo el estado.

En el caso de la Comunidad Autónoma de Canarias (BOC núm 204, de 10 de octubre de 2008), concreta un poco más lo que se debe trabajar en este nivel educativo:

- Profundización en los conceptos de probabilidad a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
- Aplicación práctica de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.
- Uso y alcance de la inferencia estadística. El problema de la toma de datos, elección de la muestra, condiciones de representatividad, parámetros de una población y análisis de las conclusiones.
- Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Teorema Central del Límite.
- Estimación de la media y de la proporción de una población a partir de los parámetros de una muestra. Intervalo de confianza para la media de una distribución normal de desviación típica conocida y para el parámetro p de una distribución binomial. Nivel de confianza.
- Estudio del contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Como se puede observar, el currículo presenta una serie de indicaciones generales sobre los temas que se deben desarrollar en este nivel, relacionados con la estadística y la probabilidad. Debemos tener en cuenta que el Currículo de Bachillerato es la propuesta básica, tanto para el desarrollo de la actividad en el aula, como para la elaboración de los libros de texto. Los docentes, por su parte, deben desarrollar dicho currículo dentro del contexto sociocultural en el que se encuentre el centro educativo y para el grupo que tenga que trabajar durante ese curso. Es lo que se denomina Programación de la materia que va a desarrollar el docente.

El primer elemento que nos describe más explícitamente lo que debemos trabajar en el aula, además de cómo lo debemos trabajar, es el libro de texto. Esto explica que los libros de texto adquieran protagonismo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, el libro de texto puede desempeñar varias funciones y muy diferentes a la vez: herramienta de trabajo para el profesor, herramienta de aprendizaje para el alumno, clarificador de explicaciones del profesor, ilustrador de ejemplos y contraejemplos, … Y dada esta versatilidad, es muy importante analizar cómo se ha redactado, cómo desarrolla cada uno de las unidades didácticas y cómo desarrolla los conceptos que en él se tratan.

Por otro lado, encontramos que el lenguaje es el principal vehículo de comunicación en las aulas, y el elemento en el que se basa la construcción del conocimiento en general y del matemático en particular.

Nuestro estudio se ha centrado, en el uso del lenguaje y los posibles obstáculos que a partir de él se pudieran producir en los estudiantes. Entendemos que en la construcción del conocimiento matemático un vehículo importante es el lenguaje, y durante la Educación Secundaria Obligatoria, este lenguaje no se diferencia del utilizado en un contexto habitual, salvo por unos pocos términos específicos. Durante el Bachillerato las matemáticas presentan un nivel de abstracción mayor y una mayor tecnificación, y por lo tanto necesitan cada vez más de términos específicos. Este es el caso de la Inferencia Estadística, que se comienza a estudiar en el segundo curso de Bachillerato.

Nuestra investigación aborda los siguientes objetivos:

OBJETIVO 1. Analizar cómo se aborda la inferencia estadística en Bachillerato en los distintos libros de texto del Segundo Curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias Sociales.

HIPÓTESIS 1. En los libros de texto, cuando se comienza a estudiar la estadística inferencial, aparecen muchos términos técnicos, propios del lenguaje matemático. Algunas de las definiciones que se dan en los libros de texto presentan una definición propia del lenguaje habitual, y no del matemático. Esto puede producir en el alumnado dificultades en la comprensión de dichos conceptos.

Con este objetivo nos planteamos el estudio de los términos estadísticos que son necesarios para desarrollar la estadística inferencial y cómo son tratados en los libros de texto. Analizaremos el nivel de especificidad que tendrán los términos y si estos se alejan mucho del contexto habitual para el alumnado. Otro aspecto interesante de este objetivo será que analizaremos las diferencias que pueden aparecer en las definiciones entre diferentes editoriales, ver cómo se define el mismo término en los Manuales Universitarios y si existe diferencia entre ambas definiciones. Analizaremos si pudiera existir alguna dificultad en la comprensión de los términos debido al alto nivel técnico del concepto o que pudiera prestarse a confusión por dar una definición del concepto inadecuada al contexto de trabajo.

OBJETIVO 2. Analizar cómo entienden los alumnos los términos estudiados en los libros de texto.

HIPÓTESIS 2. Los estudiantes no conocen aquellos términos que hemos descrito como propios del contexto matemático. Además, presentan dificultades de comprensión y muestran errores conceptuales respecto de aquellos términos en los que difiere su significado en el contexto habitual del contexto matemático.

Tras haber analizado los términos utilizados en los libros de texto nos interesamos por la comprensión de los términos por los estudiantes. Teniendo en cuenta que el libro de texto es el referente para desarrollar la Inferencia Estadística en este nivel educativo, y partiendo del análisis de los términos que hemos realizado, estudiaremos qué dificultades presentan los estudiantes cuando se les presenta un término propio del lenguaje matemático, o cuando el término no ha sido definido de igual forma en los contextos matemático y cotidiano.

OBJETIVO 3. Desarrollar una propuesta de enseñanza de la inferencia estadística que facilite una mayor comprensión de los conceptos que cambian de significado según el contexto de trabajo.

HIPÓTESIS 3. Una enseñanza de la estadística en la que los estudiantes expongan en clase sus razonamientos hace que el alumnado participe en la construcción del conocimiento, que el profesorado conozca de qué manera se formalizan los conceptos estadísticos y detectar los errores conceptuales que puedan surgir. Todo esto ayudará a que el profesorado sea capaz de guiar a los estudiantes en su formación y en la construcción de los nuevos conceptos, facilitando una comprensión más profunda de los mismos.

Garfield (2003) parte del hecho de que la contextualización de las tareas es relevante y debe ser esta la naturaleza fundamental que caracterice los contenidos estadísticos. En este sentido, Swan (2008) nos indica que la discusión colaborativa es esencial para apropiar e interiorizar conceptos co-creados, como el lenguaje y los símbolos. Está claro que no somos conscientes de que conocemos un concepto hasta que no somos capaces de expresarlo y lo podemos utilizar en situaciones diversas. Este es nuestro objetivo, tratar de crear una propuesta en la que el estudiante haga explícitos sus razonamientos y que en colaboración con las del resto de participantes de la clase y orientados por el profesor pueda construir un conocimiento más profundo sobre sus conocimientos previos.

CAPÍTULO 2.

MARCO TEÓRICO

2.1 La comprensión en la educación matemática

La comprensión de los estudiantes de los conceptos matemáticos es una cuestión que siempre ha preocupado a los investigadores en Educación Matemática, y de ahí que se hayan centrado en el desarrollo de aprendizajes comprensivos, como así lo indican Hiebert y Carpenter (1992). Pero esta preocupación no es exclusiva del campo de la Educación Matemática, pues otros ámbitos como la psicología cognitiva, han desarrollado teorías generales sobre el aprendizaje y han debatido ampliamente la noción de comprensión.

Nuestro análisis se ha centrado en autores como Skemp (1976, 1979), Hiebert y Lefevre (1986), Sierpinska (1990), Sfard (1991), Godino (1996), entre otros, en los que hemos podido encontrar diferentes modelos explicativos sobre el término comprensión, cada uno de ellos utilizando diferentes puntos de vista, aunque algunos de estos análisis presentan elementos comunes.

Así, Skemp (1976) habla de comprensión instrumental como aquella que usa reglas sin razón que las justifique. Y por otro lado llama comprensión Relacional aquella que sabe qué hacer y por qué se debe hacer así en cada momento. Según este autor, cada una de ellas tiene sus ventajas, pues mientras la primera permite un recuerdo fácil y proporciona un acceso rápido y fácil a las respuestas en el otro caso se trata de una comprensión más adaptable a nuevas tareas y permite, por ello, transferir el método de resolución a nuevas tareas y nuevos problemas. Posteriormente, en 1979 este mismo autor revisa su teoría e introduce un nuevo modelo compuesto por tres tipos de comprensión: instrumental, Relacional y lógica (equivalente a la formal) y dos modos de actividad mental: intuitiva y reflexiva. De esta forma se puede establecer diferentes combinaciones, aunque puntualiza que los modos de actividad mental no integran diferentes tipos de comprensión.

Hiebert y Lefevre (1986) y Hiebert y Carpenter (1992) relacionan la comprensión con el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos. Así Hiebert y Lefevre (1986) introducen las nociones de conocimiento *conceptual* y conocimiento *procedimental*. El primero se caracteriza por ser un conocimiento rico en relaciones y que la construcción de relaciones entre piezas de información es lo que produce el desarrollo del conocimiento conceptual. El conocimiento procedimental presenta dos componentes bien diferenciadas. Una componente es el lenguaje formal o sistema representativo de símbolos matemáticos. Y la otra está formada por los algoritmos o reglas para completar las tareas matemáticas. Estos autores además describen las relaciones potenciales que se pueden establecer entre ambos tipos de conocimiento. Es necesario, según los autores, que los conceptos y los procedimientos sean relacionados por el sujeto para de esta forma ser capaces de resolver problemas y poder generar respuestas y comprender lo que hacen en matemáticas.

Si estudiamos a Sierpinska (1990), esta autora nos indica que el término comprensión en Educación Matemática es variado, pues en ocasiones asume la noción del ideal que debe lograr el estudiante, pero en otras ocasiones simplemente es indicativo de poder seguir con la explicación: "¿comprendes?" equivale a "¿puedo seguir?". La autora explica que la comprensión de un concepto matemático no se alcanza a través de la simple lectura de un texto. Requiere que los estudiantes estén involucrados en ciertas actividades, situaciones de problemas, diálogos y discusiones y la interpretación de muchos textos diferentes. La comprensión se logra con la acumulación de conocimientos sobre propiedades de los objetos, ejemplos, y desarrollo de conceptos relacionados entre clases de conceptos. La autora indica que la asimilación de los nuevos conceptos se puede realizar a través de analogías con conocimientos existentes. Si conocemos algo en un cierto momento y posteriormente descubrimos que hay algo erróneo en ese conocimiento (obstáculo epistemológico), en ese momento será cuando comprendemos y empezamos a conocer de otra forma. Afirma que en ocasiones se comprende por la superación de obstáculos epistemológicos y que en otras ocasiones se comprende cuando se adquieren nuevos obstáculos epistemológicos. Para la autora, comprender y superar un obstáculo epistemológico son dos imágenes complementarias de una realidad desconocida sobre los cambios cualitativos importantes en la mente humana.

Sfard (1991) indica que para expresar la construcción de las entidades matemáticas podemos utilizar dos palabras diferentes: “concepto” utilizada para relacionar una idea matemática con su forma oficial como constructo teórico dentro del conocimiento ideal; y “concepción” que se utiliza para denominar al grupo de representaciones y vínculos internos evocados por el concepto y que se encuentra en el conocimiento subjetivo del saber humano. La autora afirma que los conceptos pueden presentar dos concepciones: estática (estructural) o dinámica (operacional). La concepción estructural tiene que ver con la capacidad de ver las construcciones matemáticas avanzadas que no son entidades físicas, sino organizaciones mentales abstractas que pueden percibirse sólo en el ojo de la mente de cada individuo. Estas concepciones hacen uso de imágenes mentales compactas e integradoras, en vez de representaciones verbales que requieren un proceso serial. La concepción operacional, por su parte, observa el concepto como un proceso. Pero ambas concepciones son complementarias en el sentido de ser dos visiones del mismo concepto matemático y son inseparables, debido a que el concepto alberga elementos tanto operacionales como estructurales.

Otros autores abordan la comprensión desde la perspectiva de las imágenes y de las definiciones del concepto, como Vinner (1991), que indica que la imagen del concepto es algo no verbal asociado, en nuestra mente, con el nombre de concepto. En este sentido puede tratarse de una representación visual de concepto, de una colección de impresiones y experiencias, … Tall (1991), por su parte puntualiza que “…*utilizaremos* *el término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, la cual incluye todas las imágenes mentales y procesos y propiedades asociadas. Se construye a lo largo de los años, a través de experiencias de todo tipo, cambiando según el individuo encuentre nuevos estímulos y madure".*

Godino (1996) se centra en que los problemas, en general, no aparecen de forma aislada, así, las personas realizan diferentes tipos de prácticas o acciones, para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas y para validar o generalizar la solución a otros escenarios y problemas. Según el autor, surgen dos unidades primarias de análisis en el estudio cognitivo y en los procesos didácticos: prácticas significativas y significado de un objeto. Denomina *práctica significativa* aquella que le permite al individuo resolver el problema, comunicar, validar o difundir la solución. Y denomina al sistema *modelo de prácticas significativas* al sistema de prácticas eficientes para alcanzar los objetivos programados como significado (personal o institucional) del objeto. En este caso está vinculado con el campo del problema en el que surgen estos objetos en un momento dado y se compone de entidades. Su naturaleza es opuesta al carácter intencional de los objetos y permite abordar el tema de diseños de situaciones de enseñanza y la evaluación de los conocimientos de los estudiantes.

Según este autor, para que una teoría de comprensión matemática sea útil y efectiva en el proceso de enseñanza y aprendizaje, debe reconocer la dualidad dialéctica entre las facetas personal e institucional del conocimiento y su comprensión. Así, en una clase de matemáticas, durante el proceso de evaluación que realiza el profesor, considerará que un alumno "conoce" o "comprende" si hay un ajuste entre el significado institucional y el personal construido por el sujeto (Batanero, 2001).

2.2 Taxonomía SOLO

Para la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes se ha extendido el modelo correspondiente a la taxonomía SOLO descrita por Biggs & Collis (1982; 1991). Se trata de un sistema jerárquico, cuyo acrónimo SOLO se refiere a la estructura del resultado del aprendizaje observado (Structure of the Observed Learning Outcome), caracterizando de forma particular las respuestas de los alumnos.

Cuando analizamos el aprendizaje desarrollado por los estudiantes, lo autores afirman que es necesario medir la cualidad de dicho aprendizaje. Esta cualidad del aprendizaje depende de situaciones externas, de su motivación, de la etapa de desarrollo, de los conocimientos previos, …

La taxonomía SOLO de Biggs & Collis tiene sus raíces en la teoría del desarrollo evolutivo de Piaget, que consiste en caracterizar al alumno en una etapa del desarrollo determinada. Pero, a diferencia de la teoría de Piaget, en la que se caracteriza al alumno y no la respuesta, en esta nueva teoría se trata de caracterizar la respuesta a una tarea particular. Esto permite que un mismo alumno pueda presentar diferentes respuestas en etapas distintas. Además, esta caracterización de las respuestas permite analizar la cualidad del aprendizaje. Según los autores, nos permitirá conocer la estructura de la respuesta, que se relaciona con la cualidad del aprendizaje, y es mensurable, siendo los niveles de comprensión las formas equivalentes de expresar la cualidad del aprendizaje manifestado por los estudiantes en una tarea particular.

Esta teoría constituye un modelo jerárquico para el estudio del desarrollo del proceso de enseñanza de los estudiantes, basado en una serie de estadios limitados a un dominio dado. Consiste en cinco estadios básicos de comprensión: Preestructural, Uniestructural, multiestrucutral, Relacional y abstracción ampliada. Los aspectos cruciales que caracterizan cada uno de los estadios se expresan en términos de dimensiones de *capacidad, operación relacionada y consistencia y clausura* (Biggs & Collis, 1982).

La capacidad se refiere a la cantidad de memoria de trabajo, o la atención que requieren los diferentes niveles de la teoría SOLO. La operación relacionada se refiere a la forma en que se conectan la señal y la respuesta. La consistencia y clausura señalan los autores que se refiere a dos necesidades opuestas manifestadas por los estudiantes: una es la necesidad de llegar a una conclusión de cualquier tipo y la otra es la necesidad de hacer conclusiones consistentes para que no haya ninguna contradicción entre la conclusión y el dato o entre las diferentes conclusiones posibles. Introduciendo estos aspectos, los autores han descrito cada uno de los estadios de la siguiente manera:

El estadio *Preestructural* queda asociado con las respuestas que indican un nivel bajo de aprendizaje con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea, o que expresan fundamentos de carácter subjetivo, mostrando que el estudiante está despistado o atraído por aspectos irrelevantes. En algunas respuestas el estudiante da simplemente una afirmación y no argumenta, presenta ideas incompletas, o muestra no haber hecho ningún intento real de dar una respuesta apoyada en evidencias.

El estadio *Uniestructural* se asocia con las respuestas fundamentadas en ideas imaginarias y/o relacionadas con sus experiencias de lo cotidiano. En algunas de ellas, el estudiante se centra en un aspecto del dato y lo usa para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto dentro de sus propias experiencias, estimándolo suficiente para la situación.

El estadio *Multiestructural* se caracteriza por la respuesta del alumno dada en la dirección de la tarea, muestra algunas características adecuadas de la misma, pero no integra correctamente los diferentes elementos, fundamentalmente porque atribuye significados diferentes al requerido en la tarea. El estudiante en este estadio muestra un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos.

El estadio *Relacional* se caracteriza porque en él, el estudiante realiza conexiones precisas entre los diferentes elementos. Integra las diferentes partes, definiciones, propiedades, fórmulas, algoritmos, procedimientos, condiciones de aplicación, en el proceso de desarrollo de la misma y con ella completa una estructura coherente y significativa.

El estadio de *abstracción ampliada* se asocia con la respuesta que indica que el estudiante generaliza la estructura, y ésta conduce a nuevas y más abstractas características, que representan una nueva forma de operación más profunda.

Además, los autores reconocen que en ocasiones es posible encontrar respuestas que no se ajustan exactamente a ninguno de los cinco estadios descritos. En consecuencia, se caracterizan estas respuestas en un estadio de transición entre dos estadios dados.

En nuestra investigación hemos decidido utilizar el modelo original propuesto por Biggs & Collis (1982; 1991) estableciendo cinco estadios de comprensión: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, de Transición entre el Multiestructural y el Relacional, y finalmente el estadio Relacional. Esta clasificación adaptada está basada en el trabajo de García Cruz & Garrett (2008). En él se caracteriza el estadio de *Transición* como aquel que recoge las respuestas de aquellos alumnos cuyos pensamientos se manifiestan por el uso de razonamientos adecuados, llegando incluso a proporcionar vías correctas y coordinadas. Reconocen adecuadamente los aspectos requeridos por la tarea, y sus respuestas se acercan cada vez más a la estructura deseable, e incluso podrían considerarse correctas en algunos casos. Sin embargo, sus ideas necesitan un refinamiento (perfeccionamiento), pues, aún no muestran una estructura coherente y significativa en lo que exige la tarea.

2.3 Contextos cotidiano y matemático

Según McLean (2002) un obstáculo con el que se encuentran los estudiantes, entre otros, es el vocabulario. Este obstáculo es especialmente importante cuando se trata de analizar el aprendizaje de la estadística. El desarrollo de los conceptos está íntimamente ligado a la utilización del vocabulario pues uno necesita del otro. Los estudiantes tienen muchas dificultades en el aprendizaje de conceptos estadísticos. Por tanto, este autor admite que los estudiantes que no aprenden el vocabulario básico bien tendrán graves problemas para desarrollar conceptos más complejos.

Este mismo autor pone como ejemplo el término *población* que puede significar tanto conjunto de personas que vive en un país como el número de personas que vive en dicho país. En estadística su significado se restringe al conjunto. Incluso, su significado está ligado a la idea de grupo de interés. Insiste el autor en que este término conlleva un aspecto de abstracción que raramente se desarrolla. Cuando esto ocurre, y los estudiantes no trabajan el término en toda su extensión la comprensión de este término, por parte de los estudiantes, será incompleta. Y esta dificultad puede llevar a no estudiar muestras correctamente pues no han comprendido correctamente de qué poblaciones han sido extraídas.

Con lo cual encontramos que debemos analizar los términos estadísticos que se trabajan en Bachillerato con cierta profundidad para establecer criterios que nos puedan servir para mejorar el aprendizaje de la estadística.

Nuestro propósito no se ciñe exclusivamente al análisis del vocabulario, sino que nuestro análisis se orienta hacia el lenguaje. Entendemos por lenguaje no sólo al vocabulario, sino que analizaremos el vocabulario en su contexto. Será el contexto el elemento que llena de contenido el vocabulario. No podemos desligar el uno del otro y dependiendo del contexto en el que nos encontremos los términos pueden ver modificados sus significados.

Los autores Shuard & Rothery (1984) realizaron un estudio sobre los obstáculos que podían producirse en la comprensión de las matemáticas relacionados con el lenguaje. Uno de los elementos que analizaron fue el contexto de trabajo. Shuard & Rothery (1984), indican que en el aula de matemáticas trabajamos con dos tipos de contexto: contexto cotidiano y contexto matemático. Estos contextos se entremezclan continuamente en el aula, pues los profesores pueden hacer uso del lenguaje cotidiano para algunas explicaciones y en otras ocasiones pueden introducir términos técnicos o explicaciones en lenguaje matemático (algebraico, gráfico, numérico, estadístico, …). Los autores describen el contexto cotidiano como aquel en el que realizamos la comunicación habitual, mientras que el contexto matemático es aquel propio de las matemáticas. Según esto, los autores clasifican los términos que aparecen en una clase de la siguiente forma: (1) términos con el mismo significado en ambos contextos; (2) términos con distinto significado en ambos contextos, y (3) términos propios del contexto matemático. Los estudiantes no deberían tener dificultad con la categoría (1), mientras que la categoría (3) necesariamente debe ser definida pues son términos que los estudiantes no conocen ni tienen en su vocabulario. La categoría (2) puede dar lugar a más dificultades para los estudiantes.

Antes de continuar, debemos aclarar qué entendemos en esta investigación por contexto cotidiano y por contexto matemático, pues marcarán todo el estudio.

Contexto cotidiano: El español es una lengua que se encuentra normativizada por la Real Academia de la Lengua, la cual se encarga de recoger todos aquellos términos y nuevas acepciones de los mismos que la lengua va adquiriendo con el tiempo. Es su diccionario un recurso fundamental cuando queremos estudiar los términos tal y como los recoge el lenguaje cotidiano. Y además, con respecto a los tecnicismos el diccionario añade que *"incorpora aquellas voces procedentes de los distintos campos del saber y de las actividades profesionales cuyo empleo actual (...) ha desbordado su ámbito de origen y se ha extendido al uso, frecuente u ocasional, de la lengua común y culta"(Diccionario de la Real Academia Española).* Con lo cual nos da idea de cómo determinados tecnicismos han sido adoptados por el lenguaje habitual, y de si lo han hecho correctamente o por el contrario incorporan errores conceptuales desde el punto de vista matemático. Es por ello que utilizamos el Diccionario de la Real Academia Española como referente del lenguaje habitual, de los términos utilizado en un contexto cotidiano.

Contexto matemático: El contexto matemático lo determinan los Manuales Universitarios, entendiendo que son estos los encargados de transmitir las definiciones de los términos y conceptos técnicos. En nuestro caso hemos adoptado dos Manuales: Mendenhall (1982) y Moore (2005).

Nuestra investigación tratará de analizar qué ocurre con los términos que se trabajan en el aula, cómo los entienden los estudiantes y de qué forma influye el contexto en la comprensión de que de estos términos tendrán los estudiantes.

2.4 Diseños didácticos

El profesorado debe desarrollar el currículo que se le propone. En ese momento, el docente debe diseñar la forma en que organizará el conocimiento que va a desarrollar en el aula y deberá analizar las actividades en que se fundamentará para que se produzca el aprendizaje deseado. Según Swan (2008), cuando pensamos en la elaboración de una propuesta didáctica, debemos ser conscientes de que la discusión colaborativa es esencial, pues los conceptos son co-creados. Este autor indica que en los diseños didácticos no podemos perder de vista los siguientes principios:

- La importancia de centrarse directamente en los obstáculos conceptuales clave, basándose en los conocimientos que ya tienen los estudiantes;
- La creación de tensión y conflicto cognitivo que pueda ser resuelto a través de la discusión;
- Utilización de tareas que sean «accesibles, extensibles, que alienten la toma de decisiones, creativas y que cuestionen un orden superior;
- Uso de múltiples representaciones para crear conexiones;
- Uso de tareas que permitan a los estudiantes cambiar su papel, en el que se expliquen y se enseñen unos a otros.

El modelo que nos presenta Swan (2008) difiere del aprendizaje por “descubrimiento”, donde el profesor presenta simplemente tareas y espera que los estudiantes exploren y descubran las ideas por sí mismos. En este modelo se propone que el papel del docente incluya:

- guiar a los estudiantes y hacer un uso constructivo del conocimiento previo;
- que el propósito de la actividad sea claro;
- desafiar a los estudiantes a través de cuestiones efectivas y probadas;
- realizar debates en pequeños grupos y con toda la clase;
- alentar la discusión de puntos de vista alternativos;
- extraer las ideas importantes en cada lección;
- ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre sus ideas.

Los estudiantes deben seguir los siguientes pasos para llegar a comprender un concepto:

- un estudiante debe aislarlo y llevarlo a un punto de atención (identificación);
- encontrar similitudes y diferencias entre este concepto y otros similares (discriminación);
- identificar las propiedades generales del concepto, en particular sus casos (generalización)
- y comenzar a percibir un principio unificador (sintetización).

En nuestra investigación analizaremos todo el proceso del diseño de la propuesta didáctica y su desarrollo en el aula. Comprobaremos qué elementos de los propuestos por Swan (2008) son los que nos ayudarán en el aprendizaje de determinados conceptos estadísticos que generan dificultades de comprensión en el alumnado.

CAPÍTULO 3.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Fases del proceso de investigación

La investigación que se detalla en esta memoria se ha desarrollado entre los años 2004 y 2009. Para una mejor comprensión del trabajo desarrollado presentamos la investigación según tres fases que se corresponden con los pasos dados en la investigación para el cumplimiento de los objetivos planteados.

La primera fase está constituida por el trabajo realizado durante la denominada "Fase de Investigación" realizada con el objetivo de obtener el Diploma de Estudios Avanzados. Dicha fase se desarrolló durante el curso 2004/2005 y consistió en un estudio exploratorio del significado presente en algunos libros de texto muy utilizados en Bachillerato.

La segunda fase, tuvo lugar durante el curso 2007/2008, en ella se analizó y comparó la comprensión que los estudiantes de distintos niveles desarrollan sobre algunos de los términos señalados en la primera fase y que pudieran generar cierta dificultad para el alumnado.

La tercera fase, tuvo lugar durante el curso 2008/2009 y en ella se llevó a cabo una propuesta de enseñanza para un desarrollo de la inferencia en la clase de Bachillerato y analizar la viabilidad de dicha propuesta en la mejora de la comprensión de algunos términos estadísticos en el alumnado de Bachillerato.

3.2 FASE I. Términos estadísticos en algunos libros de texto de Bachillerato

Durante esta fase, como hemos indicado anteriormente, nuestro objetivo consistió en realizar un estudio exploratorio de algunos libros de texto de Bachillerato y analizar cómo estos presentan los diferentes términos estadísticos. Nuestra primera tarea consistió en elegir los libros de texto sobre los que desarrollar el estudio exploratorio. Para ello hemos considerado una muestra intencional de libros de texto, seleccionados atendiendo a la frecuencia de utilización por parte del profesorado que trabaja en este nivel educativo.

Así, en una de las reuniones trimestrales a las que acuden los profesores de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, en la que se hace un seguimiento de la programación que se está desarrollando en este nivel educativo, se les preguntó por el libro de texto que utilizan, ya sea directamente en el aula o bien para elaborar los apuntes que luego utilizan en clase. Cabe resaltar que, a estas reuniones, acuden todos los profesores de la provincia de Santa Cruz de Tenerife (Islas Canarias, España), tanto los profesores de la enseñanza pública como los de la enseñanza privada y privada-concertada que imparten las matemáticas en 2º de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. La mayor parte de los profesores son licenciados en matemáticas y a la citada reunión acudieron en total 37 profesores.

Debemos tener en cuenta que en la Educación Secundaria, las matemáticas abarcan siempre varias ramas a lo largo del curso académico. Así, el alumnado de este nivel (2º de Bachillerato) debe estudiar en esta asignatura: Estadística, Análisis Matemático (continuidad, límites, derivadas e integrales y su interpretación), Álgebra (sistemas de ecuaciones, matrices y programación lineal). Consecuentemente la Estadística que van a estudiar el alumnado en este nivel se desarrollará durante un trimestre del curso académico.

Para la recogida de datos se elaboró un pequeño cuestionario. Se les pidió que indicaran el libro de texto que utilizaban. Del cuestionario extrajimos los cuatro libros de texto más utilizadas por el profesorado y sobre los que hemos realizado nuestra investigación. Estos textos son los correspondientes a las editoriales:

Anaya (T1); SM (T2); Santillana (T3); Edelvives (T4)

Por otro lado, también se preguntó a los profesores sobre la utilidad que tenía el libro de texto para él, es decir, si se utilizaba directamente en el aula por el alumnado, o sólo para elaborar los apuntes. Nos parece muy significativo que, para una parte importante del profesorado encuestado (unos 30 profesores) el libro de texto se utiliza para refrescar, recordar los conceptos estadísticos que luego van a desarrollar con el alumnado. Se trata de un elemento fundamental en la formación del propio docente en cuanto a los conceptos estadísticos que luego va a impartir. Con esta información, podemos considerar que el libro de texto tiene una relevancia áun mayor, si cabe, pues de él va a depender, no sólo la formación en estadística de los estudiantes sino también parte de la del propio docente.

Una vez seleccionados los libros de texto, prestamos especial atención a las lecciones relacionadas con la inferencia estadística. En este sentido, realizamos una descripción de cómo trata el libro de texto la inferencia estadística, qué términos utiliza, en qué contexto se presenta un término, así como los ejemplos que ofrece para ilustrar las explicaciones. Seguidamente, seleccionamos todos los términos relacionados con Inferencia Estadística y aquellos términos estadísticos presentes en estos niveles y que se corresponden con conceptos previos a la inferencia estadística. La siguiente tabla recoge dichos términos según la editorial del libro de texto utilizado:

ANAYA	EDELVIVES	SANTILLANA	SM
Población Muestra Media Desviación Típica Distribución Probabilidad Tamaño de la muestra Inferir Grado de certeza Estimación Nivel de confianza = grado de certeza Margen de error Estadística inferencial Incertidumbre Estadística inductiva Estadística hipotético-deductiva Hipótesis Parámetro Muestra aleatoria Estimar Media muestral Proporción muestral Estimación puntual Estimación mediante intervalos Intervalo de confianza	Población Individuo Muestra Tamaño de la muestra Parámetros Nivel de confianza. Estadísticos Estimación paramétrica Estimación puntual Estimación por intervalos Estadístico Estimador puntual Estimador insesgado Estimador eficiente Límites de confianza superior e inferior Nivel de riesgo: α Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	Estimación puntual Estimación por intervalos Probabilidad Media muestral Media poblacional L(X) Ley normal Muestras representativas Parámetro poblacional Observaciones muestrales Nivel de confianza Límites de confianza Estadístico Precisión del intervalo	Muestras Azar Población Teoría del muestreo Inferir Parámetro Estadístico Estimador puntual Estimación puntual Teoría de la estimación Sesgo Estimador insesgado Estimador eficiente Intervalo de confianza Nivel de confianza Margen de error Amplitud Intervalo Estimador por intervalo Coeficiente de confianza Nivel de significación o de riesgo Valor crítico Margen de error Distribución binomial

Nivel de confianza Tamaño de la muestra Eficacia de la estimación α Nivel de confianza Error máximo admisible Cota de error			

Términos de estadística según las editoriales analizadas

Como era de esperar, muchos términos son comunes a las diferentes editoriales. Aunque cabe destacar que aparecen algunos términos en algunas editoriales que se pueden considerar de un nivel de abstracción muy elevado para ser tratados en un primer curso de inferencia estadística, tales como eficacia de la estimación, estimador eficiente o estimador insesgado.

Una vez seleccionados los términos estadísticos encontrados en los libros de texto, nuestro siguiente paso consistió en estudiar el contexto en que habitualmente se presenta al alumnado. Hemos visto que los estudiantes, habituados al contexto cotidiano, se encuentran con un nuevo contexto que es el contexto matemático. Nuestro propósito es analizar la influencia de uno y otro contexto en los significados de los términos. Así, analizamos el significado de cada término, tanto en el contexto cotidiano como en el matemático. Pero en nuestro caso, como ya indicamos antes, no entendemos por "cotidiano" al significado que se da del término en la calle, el mercado, los pasillos de las escuelas, … Pues nuestra intención es poder realizar un análisis riguroso del significado del contexto cotidiano y que pueda ser lo más universal posible. Es por lo que decidimos utilizar como referencia el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Entendemos que esta elección puede ser discutible, pero creímos desde un principio que se trataba del diccionario de referencia para todos los hipanohablantes y que recoge las acepciones de los términos del español que más se utilizan de forma habitual. Como referente del contexto matemático hemos tomado dos Manuales Universitarios: ME = Mendenhall (1982) y MO = Moore (2005). Con ellos tratamos de encontrar la definición formal que se da a los términos estadísticos. Encontramos que en algunos términos se daba un excesivo tecnicismo y requerían de un complicado aparato matemático para dar su definición. En estos casos tratamos de analizar si la simplificación llevada a cabo en los libros de texto de Bachillerato desvirtúa la definición correcta.

Una vez conocemos el significado de los términos en el contexto cotidiano y matemático, analizamos en qué categoría de las descritas por Shuard & Rothery (1984) se sitúa y realizamos la clasificación de cada término. Para ello, si ocurre que las definiciones del Diccionario y de los Manuales Universitarios son equivalentes o muy cercanas, situamos el término dentro de la categoría de "*términos con el mismo significado en ambos contextos*"(1). Si no está definido en el Diccionario y sólo aparece la definición en los Manuales Universitarios, diremos que dicho término tiene "*significado propio en el contexto matemático*"(3). Y cualquier término que no presente la misma definición en el Diccionario y en los Manuales Universitarios será catalogado como "*término con distinto significado en ambos contextos*"(2). El último paso de esta fase de la investigación consistirá en analizar qué ocurre con estos mismos términos en los textos de Bachillerato seleccionados, esto es, analizaremos cómo tratan los libros de texto cada uno de los términos estudiados para comprobar si se puede considerar la definición dada correcta o no.

Entendemos que el libro de texto de Bachillerato se sitúa a caballo entre los dos contextos (cotidiano y matemático) y está pensado para que el estudiante, con su lenguaje cotidiano, pueda acercarse a conceptos matemáticos más elaborados e incorpore términos propios del lenguaje matemático.

3.2.1 Definición de los términos estadísticos de Bachillerato

A continuación pasamos a dar la relación de términos estudiados. Por un lado, mostramos el significado de dicho término en el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE), y por otro, su significado en los Manuales Universitarios utilizados.

En ocasiones aparecerán dos definiciones del mismo término dadas por el Diccionario. En primer lugar mostramos la primera acepción que aporta el Diccionario y en segundo lugar la acepción del término que más se acerca al contexto matemático, dentro de las variantes que contempla el Diccionario.

Término: **ESTADÍSTICA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.	**No lo definen explícitamente**

Término: **POBLACIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de poblar 2. Conjunto de los individuos o cosas sometido a una evaluación estadística mediante muestreo.	**ME**.- Conjunto de todas las mediciones de interés para quien obtiene la muestra. **MO**.- Un grupo entero de individuos sobre el que queremos información se llama población.

Se trata de un término que presenta en su segunda acepción en el Diccionario una definición equivalente a la dada por los Manuales Universitarios, en cuanto hace referencia al conjunto total.

Término: **INDIVIDUO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Persona cuyo nombre y condición se ignoran o no se quieren decir. 2. Cada ser organizado, sea animal o vegetal, respecto de la especie a que pertenece.	**MO**.- Los individuos son los objetos descritos por un conjunto de datos. Los individuos pueden ser personas, pero también pueden ser animales o cosas

Término: **TAMAÑO DE LA MUESTRA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Mayor o menor volumen o dimensión de algo.	**MO**.- Una muestra aleatoria simple de tamaño n consta de n individuos de una población.

En todos los términos vistos hasta este momento podemos decir que hay un denominador común: todos están definidos por el Diccionario y por los Manuales Universitarios. Además, no se presenta una especial diferencia entre ambas definiciones. Por ello, todos estos términos los catalogamos dentro de la Categoría 1: Mismo significado en ambos contextos.

Seguimos con los términos analizados.

Término:	**MEDIA**
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Que está entre dos extremos, en el centro de algo o entre dos cosas. 2. Número que resulta al efectuar una serie determinada de operaciones con un conjunto de números y que, en determinadas condiciones, puede representar por sí solo a todo el conjunto.	**ME.-** La media aritmética de un conjunto de n observaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, es igual a la suma de las observaciones dividida entre n. **MO.-** Para hallar la media de un conjunto de observaciones, suma sus valores y divide por el número de observaciones.

Notamos que, el diccionario, da la definición de punto medio entre dos extremos. Esta definición no es correcta y puede confundir, pues no siempre la media estará en el centro de los dos extremos (sólo es cierta cuando se trata de la media de dos valores). ¿Qué ocurre cuando hay más de dos valores? A pesar de tener la media una fórmula fácil para el cálculo, el diccionario no la aporta.

La media polacional así como media muestral no aparece en el Diccionario, pero sí en los Manuales Universitarios.

Mendenhall (1982) indica que tanto la población como la muestra posee una media, que llamaremos media poblacional y media muestral respectivamente. Además, la ley de los grandes números nos asegura que a medida que aumenta el tamaño de la muestra, la media muestral se aproxima más a la media poblacional, con lo que la primera estima el valor de la segunda.

Moore (2005) define **distribución muestral** de un estadístico (la media lo es) como la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población. Esto es importante porque el Teorema del Límite Central nos asegurará que en cualquier muestra aleatoria simple (m.a.s.) la distribución de medias correspondientes a muestras aleatorias simples se aproxima a una distribución normal. Todos los libros de texto dedican, al menos un apartado a esta distribución y al Teorema del Límite Central.

Término: **ESTIMACIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo.	**ME.-** No lo define **MO.-** No lo define

El término estimación, en principio parece tener el mismo significado que en el lenguaje cotidiano, pero encontramos un matiz que no se tiene en consideración en el lenguaje cotidiano y que es importante dentro del contexto matemático. Cuando en el aula de matemáticas hablamos de una estimación entendemos que nos estamos aproximando a un valor, le estamos dando un valor (o serie de valores) a un parámetro que desconocemos que de alguna manera se acerca al verdadero valor. La estimación tiene una finalidad concreta que es la de acercarse al verdadero valor del parámetro. Este hecho no se recoge en los Manuales Universitarios estudiados, a pesar de ser clarificador desde el punto de vista didáctico.

Término: **MUESTRA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Porción de un producto o mercancía que sirve para conocer la calidad del género. 2. Parte o porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como representativa de él.	**ME**.- Una muestra es un subconjunto de mediciones seleccionadas de la población de interés. **MO**.- Una muestra es la parte de la población que realmente examinamos con el objetivo de obtener información.

Observamos que las definiciones dadas por los Manuales Universitarios son equivalentes entre sí, mientras que la dada por el diccionario agrega la idea de que el subconjunto debe ser representativo del total. Este requisito no aparece en los Manuales Universitarios, pero sí lo recogen los libros de texto de Bachillerato.

¿Qué se entiende por algo **representativo**? El Diccionario define este término como:

1. Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene. *2. Ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente.*

Según esta definición, cuando se dice que una muestra es representativa se está indicando que la muestra debe "imitar perfectamente" o "ser imagen" de la población. Encontramos que se está fomentando de esta manera la concepción errónea descrita por Kahneman et al. (1982) denominada *heurística de la representatividad*, donde el estudiante espera que pequeñas muestras hereden todas las propiedades de la población. Sabemos que no es el parecido con la población lo que valida una muestra, sino su método de selección.

Pero además, es un hecho destacable que el Diccionario recoja la definición de muestra indicando que sea representativa. Esto nos prueba que en el contexto cotidiano se ha adoptado una definición errónea de este término, lo cual pudiera generar un obstáculo en el aprendizaje. Constatamos que algunos libros de texto fomentan esta concepción errónea.

Término: **PROBABILIDAD**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Verosimilitud o fundada apariencia de verdad. 2. En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.	**MO.-** La probabilidad de cualquier resultado de un fenómeno aleatorio es la proporción de veces que el resultado se da después de una larga serie de repeticiones. **ME.-** A cada punto del espacio muestral le asignamos un número, llamado la probabilidad de Ei y denotado por el símbolo P(Ei).

La definición científica que da el DRAE es la visión laplaciana de la probabilidad, en la que suponemos que todos los sucesos tienen la misma probabilidad, y que no ocurre en todos los casos.

La primera definición que aparece en los Manuales Universitarios varía, según la concepción que tienen los autores. Así, Moore expone una definición frecuentista, mientras que la dada por Mendenhall es axiomática.

La definición axiomática de la probabilidad es importante, si queremos profundizar más en este concepto. Aunque en los textos la probabilidad se trabaja sólo utilizando la definición laplaciana. Esto hace que quede la definición como una “anécdota” más.

Término: **INFERIR**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.	**ME.-** El objetivo de la estadística es hacer inferencias (predicciones, decisiones) acerca de una población. **MO.-**La inferencia estadística proporciona métodos que permiten sacar conclusiones de una población a partir de los datos de una muestra.

Inferir es otro término de uso extendido en el contexto cotidiano. Pero, observamos que el Diccionario establece una equivalencia entre inferir y deducir. En matemáticas son términos opuestos y con significados distintos. Por tanto, observamos que hay diferencia entre el significado del término en el contexto cotidiano y en el contexto matemático, lo que puede llevar a generar obstáculos en el aprendizaje.

Término: **DISTRIBUCIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de distribuir. 2. Función que representa las probabilidades que definen una variable aleatoria o un fenómeno aleatorio.	**MO.-** La distribución de una variable nos dice qué valores toca y con qué frecuencia lo hace. La distribución muestral de un estadístico es la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población.

Este término, aunque tenga un significado recogido en el DRAE, es un término que hace referencia a una función, con lo cual no es un concepto fácil para el alumno.

Por otro lado, cuando hablamos de distribuciones de probabilidad la abstracción es aún mayor, pues generalmente no es una función que se pueda conocer. Es por ello que siempre se indicará, que en determinadas condiciones, entenderemos que la variable sigue una distribución normal o binomial, pero no se entra a estudiar bajo qué condiciones se trabaja con estas distribuciones conocidas.

Quisiéramos destacar aquí que la transición del "mundo discreto" al "mundo continuo" no se realiza de manera gradual, sino que se introduce brúscamente la distribución de los dos tipos de variables, con lo que el estudiante difícilmente puede entender cómo se debe trabajar con cada una de las distintas variables.

Término: **RIESGO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Contingencia o proximidad de un daño.	**MO.-** La distribución de una variable nos dice qué valores toca y con qué frecuencia lo hace. La distribución muestral de un estadístico es la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población.

Los Manuales Universitarios no utilizan este término.

Aunque se trata de un término que tiene un significado muy claro en un contexto cotidiano, en un contexto matemático debe ser definido correctamente, para que no cree confusiones. Pues esto nos hace formularnos la siguiente pregunta, ¿qué entendemos por daño en matemáticas?

Término: **SIGNIFICATIVO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. *Que da a entender o conocer con precisión algo.* 2. *Que tiene importancia por representar o significar algo.*	**MO.-** "Significativo" en estadística no quiere decir "importante". Quiere decir que "es muy poco probable que ocurra sólo por azar".

Este término se utiliza mucho en estadística y tiene una definición diferente según el contexto de trabajo. Mientras que en el contexto cotidiano se trata de algo importante, en el contexto matemático se halla ligado a la probabilidad y tiene un significado diferente. Es poco probable que ocurra y por tanto, si algo es significativo no suele ocurrir sólo por azar.

En este sentido tendríamos que hablar del *nivel de significación*, como un término ligado al término significativo. Pues el nivel de significación consiste en cuantificar y decidir cuándo consideramos que un resultado estadístico es significativo y por tanto no se ha producido por azar. Esa cuantificación es la que nos va a permitir decidir, posteriormente, que los resultados del muestreo realizado se escapan a los límites previstos para el azar y que son producto de otras circunstancias, por lo que podemos desechar la hipótesis nula a favor de la alternativa.

Todos los términos vistos hasta este momento presentan ciertos matices que deberíamos tener en cuenta cuando los trabajamos en el aula. Como se ha ido comentando con cada uno de ellos, las definiciones en cada uno de los contextos no son exactamente las mismas y en algunos casos se puede estar favoreciendo la aparición de errores conceptuales. Es por lo que ubicamos todos estos términos dentro de la Categoría 2: Distinto significado en ambos contextos.

En los siguientes términos existe una característica común: o bien no hay definición en el Diccionario o bien la definición dada nada tiene que ver con la que tiene en el contexto matemático.

Término:	**ESTADÍSTICO**
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Perteneciente o relativo a la estadística. 2. Persona que profesa la estadística.	**ME.** Valor calculado a partir de los datos de una muestra. **MO.** Un estadístico es un número que se puede calcular a partir de los datos de la muestra sin utilizar ningún parámetro desconocido. En la práctica, solemos utilizar un estadístico para estimar el parámetro desconocido.

Término:	PARÁMETRO
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Dato o factor que se toma como necesario para analizar o valorar una situación 2. Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico.	**ME**. Las poblaciones son caracterizadas por medidas descriptivas numéricas, llamadas parámetros. **MO.** Un parámetro es un número que describe la población. En la práctica estadística el valor del parámetro no es conocido ya que no podemos examinar toda la población.

Término:	MUESTREO ALEATORIO
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME**.- Supongamos que N y n representan los números de elementos en la población y en la muestra, respectivamente. Si el muestreo se conduce de manera que cada una de las C_n^N muestras tenga la misma probabilidad de ser seleccionada, entonces decimos que el muestreo es aleatorio y al resultado se le llama muestra aleatoria simple. **MO**.- Una muestra aleatoria simple de tamaño n consta de n individuos de una población escogidos de manera que cualquier conjunto de n individuos de la población tenga las mismas posibilidades de ser la muestra realmente seleccionada.

Término: **NIVEL DE CONFIANZA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**MO.-** Un nivel de confianza C, proporciona la probabilidad de que en un muestreo repetido, el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro.

Término: **ERROR MÁXIMO ADMISIBLE**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME**.- La diferencia entre una estimación particular y el parámetro que se está estimando se llama error de estimación. **MO**.- El error de estimación (…) indica la precisión que creemos que tiene nuestra suposición, basada en la variabilidad de la estimación.

Término: DESVIACIÓN TÍPICA	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de desviar 2. Diferencia entre la medida de una magnitud y el valor de referencia.	**MO.-** La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza s^2. La varianza s^2 de un conjunto de observaciones es la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto a su media dividido por n-1. **ME.-** La desviación estándar de un conjunto de n observaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza. (Previamente ha definido la varianza como sigue) La varianza de una muestra de n observaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, se define como el promedio del cuadrado de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media μ.

Término: NORMAL	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Dicho de una cosa: Que se halla en su estado natural 2. Que sirve de norma o regla. 3. Dicho de una cosa: Que, por su naturaleza, forma o magnitud, se ajusta a ciertas normas fijadas de antemano	**MO**.- Una clase particularmente importante de curvas de densidad (…) son simétricas, con un solo pico y tienen forma de campana. Se les llama curvas normales y describen las **distribuciones normales**. (…) La media se sitúa en el centro. Cualquier curva de densidad se puede utilizar para asignar probabilidades. Las curvas de densidad que nos resultan más familiares son las normales. Así, las distribuciones normales son modelos de probabilidad.

Término: **SESGADO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Oblicuidad o torcimiento de una cosa hacia un lado, o en el corte, o en la situación, o en el movimiento.	**MO.-** El diseño de un estudio es sesgado si favorece sistemáticamente ciertos resultados.

Término: **EFICIENCIA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Capacidad de disponer de alguien o de algo para conseguir un efecto determinado.	**(No lo definen)**

Término: **PROPORCIÓN MUESTRAL**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**MO.-** De una muestra aleatoria simple de tamaño n de una gran población que contenga una proporción p de éxitos, se llama $\hat{p}$ a la proporción muestral de éxitos, $$\hat{p} = \frac{\text{recuento de éxitos en la muestra}}{n}$$

Término:	**CONTRASTE DE HIPÓTESIS**
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** El objetivo de una prueba estadística es el de examinar una hipótesis relacionada con los valores de uno o más parámetros poblacionales. **MO.-** Los intervalos de confianza son uno de lo dos procedimientos de inferencia estadística más ampliamente utilizados. El segundo procedimiento de inferencia (...), llamado *pruebas de significación*, tiene otro objetivo valorar la evidencia proporcionada por los datos a favor de alguna hipótesis sobre la población.

Término:	**HIPÓTESIS NULA**
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** La hipótesis nula, indicada simbólicamente como Ho, establece la hipótesis que será sometida a prueba. Así, Ho especifica valores hipotéticos para uno o más parámetros de población. **MO.-** La afirmación que se contrasta en una prueba estadística se llama **hipótesis nula**. Las pruebas de significación se diseñan para valorar la fuerza de la evidencia en contra de la hipótesis nula. En general, la hipótesis nula es una afirmación de “ausencia de efecto” o de “no diferencia”.

Término: **NIVEL DE SIGNIFICACIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** La probabilidad α de cometer un error de tipo I se llama a menudo el nivel de significación de la prueba.

Término: **HIPÓTESIS ALTERNATIVA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** También denominada Hipótesis de Investigación. Se trata de la hipótesis que el científico desea "probar" (es decir, apoyar o demostrar). Para lograr esto, el científico somete a prueba a la opuesta de la hipótesis de investigación (la hipótesis nula) **MO.-** La afirmación en relación con la población sobre la cual queremos hallar evidencia a favor es la **hipótesis alternativa, Ha.**

Término: ERROR DE TIPO I	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** En una prueba estadística, decimos que se comete un Error de Tipo I cuando se rechaza la hipótesis nula siendo ésta cierta. A la probabilidad de cometer un error de tipo I se denota por el símbolo α. **MO.-** El nivel de significación α de cualquier prueba de significación con un nivel predeterminado es la probabilidad de un Error Tipo I. Es decir, α es la probabilidad de que la prueba rechace la hipótesis nula Ho cuando en realidad Ho es cierta.

Término: ERROR DE TIPO II	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** En una prueba estadística, decimos que se comete un error de tipo II cuando se acepta la hipótesis nula siendo ésta falsa. A la probabilidad de cometer un error de tipo II cuando alguna alternativa específica es cierta se denota con el símbolo β. **MO.-** La probabilidad de que una prueba con un nivel de significación predeterminado α rechace Ho cuando el parámetro toma un cierto valor alternativo se llama **potencia** de la prueba con esta alternativa. La potencia de una prueba con cualquier alternativa es 1 menos la probabilidad de error tipo II para esta alternativa.

Como se trata de términos totalmente nuevos y con un grado de tecnicismo suficientemente elevado como para que no los recoja el Diccionario, ubicamos estos términos en la Categoría 3: Significado propio del lenguaje matemático. Así que debemos tener en cuenta que sin una definición previa en el aula, el alumnado no conocerá el término y por tanto no sabrá a qué atenerse cuando estamos trabajando.

Por tanto, y a modo de resumen, hemos encontrado que, los términos que se utilizan para estudiar la Inferencia Estadística en Bachillerato, se pueden ubicar atendiendo a su significado en el contexto de trabajo en una de las tres siguientes categorías:

CATEGORÍA 1. Mismo significado en ambos contextos.

Estadística, Población, Individuo, Tamaño de la muestra.

CATEGORÍA 2. Distintos significado en ambos contextos.

Media, Estimación, Muestra, Probabilidad, Inferir, Distribución, Riesgo, Significativo.

CATEGORÍA 3. Significado propio del contexto matemático.

Estadístico, Parámetro, Muestreo aleatorio, Nivel de confianza, Error máximo admisible, Desviación Típica, Normal, Sesgado, Eficiencia, Proporción muestral, Contraste de hipótesis, Hipótesis nula, Nivel de significación, Hipótesis alternativa, Error de Tipo I, Error de Tipo II.

3.3 FASE II. Estudio de los términos estadísticos según los estudiantes

Una vez hemos clasificado los términos, nos interesa conocer cómo cada una de las características que hemos encontrado en la fase anterior afecta a la comprensión de los términos por parte de los estudiantes: concordancia o no entre el contexto, la tecnificación de los términos o la ausencia de definiciones.

Para ello realizamos un cuestionario en el que se le plantea al estudiante que elabore su definición o utilice conceptos estadísticos que aparecen en los libros de texto.

Para el análisis del cuestionario utilizaremos la taxonomía SOLO descrita en el marco teórico. Como indicamos en dicho apartado, con ella lograremos una categorización en términos de comprensión y un análisis de las respuestas de los estudiantes ante las preguntas planteadas en el cuestionario.

3.3.1 Participantes

El estudio se realizó con 26 estudiantes. De estos, 14 eran estudiantes del último curso de Bachillerato con edades comprendidas entre 17 y 20 años, mientras que los otros 12 estudiantes eran del último curso de la Facultad de Matemáticas con edades comprendidas entre 21 y 25 años.

Durante el último curso del Bachillerato los estudiantes se les introduce en la Inferencia Estadística durante un trimestre, a través de la estimación por medio de intervalos de confianza y del contraste de hipótesis. En ambos casos se estudia para la media y la proporción, en contextos en los que se puede resolver el problema a través del uso de la distribución normal. Sin embargo, el cuestionario se les administró antes de comenzar a trabajar la Inferencia Estadística. Así que, el alumnado no poseía una formación específica previa en estos conceptos.

El alumnado de Universidad estaba finalizando los estudios en Ciencias Matemáticas, y a lo largo de su formación habían estudiado Inferencia Estadística durante un cuatrimestre en el que trabajaban la estimación puntual, intervalos de confianza y contrastes de hipótesis paramétricos entre otros temas. Este curso de Inferencia Estadística no tiene lugar en el momento en el que se administra el cuestionario, así que, aunque han trabajado los términos que se les presentan, no lo han hecho recientemente.

3.3.2 Cuestionario

Nuestra intención es documentar la comprensión del alumnado relativa a los diferentes términos estadísticos que aparecen cuando se comienza su estudio en Bachillerato, y si las definiciones que aportan los estudiantes se ven modificadas por trabajar en un contexto matemático. Es por lo que el cuestionario se realizó basándonos en la categorización hecha utilizando los libros de texto y los términos estadísticos (García Alonso & García Cruz, 2007a). El cuestionario ha sido revisado por varios profesores y se ha modificado en varias ocasiones para adaptar el cuestionario al objetivo propuesto. Por otro lado, se trata de un cuestionario heterogéneo, pues determinados conceptos que presentan especial dificultad, aparecen en distintas cuestiones y se pregunta de manera diferente, lo que permite corroborar que el estudiante es coherente en su respuesta, y nos permitirá conocer el grado de transferibilidad que tiene el término a los diferentes contextos. Esto hace que la evaluación de la comprensión de un concepto matemático tenga más validez, según Batanero, Cobo y Díaz (2003).

El cuestionario que nos planteamos desarrollar debe tratar los términos según las categorías descritas en García Alonso & García Cruz (2007a).

El cuestionario elaborado está formado por dieciséis preguntas, una de las cuales contiene cuatro subapartados, con lo que el cuestionario tiene un total de diecinueve ítems. Con él pretendemos analizar el conocimiento que tienen los estudiantes sobre determinados términos estadísticos, así como si el contexto de la clase de matemáticas modifica las definiciones de ciertos términos y si subyacen errores conceptuales que provienen del contexto cotidiano y no han sido superados en la clase. Además, se incluyen algunos términos propios del contexto matemático para comprobar cómo los definen los estudiantes antes de ser abordados explícitamente en la clase. En cuanto a los contextos utilizados en el cuestionario se han seguido aquellos con los que el estudiante está más familiarizado como son: lanzamiento de dados, selección de muestra de alumnos de un centro con dos criterios diferentes y extracción de bolas de una urna.

En la siguiente tabla establecemos una relación entre la categoría, el término estudiado y, entre paréntesis, el número de la pregunta con la que pretendemos realizar el análisis de dicho término:

Categoría	Término estudiado (Número de pregunta)
Mismo significado en ambos contextos	Estadística (P1), Población (P2), Individuo(P3), Tamaño de la muestra (P8)
Distinto significado en ambos contextos	Muestra (P4, P5, P6, P7, P9), Media (P10, P11), Inferir (P12), Significativo (P15), Distribución (P13)
Significado propio en el contexto matemático	Estadístico (P14), Muestreo aleatorio (P16)

Un término sobre el que insistimos de manera especial es el de MUESTRA, como término en el que se profundizó en el análisis realizado por García Alonso & García Cruz (2007b). Este término es un claro ejemplo de cómo el contexto afecta a la definición, y, en consecuencia, a la comprensión del concepto. Este término lo encontramos definido en los textos universitarios como *subconjunto de mediciones seleccionadas de la población de interés* (Mendenhall, 1982) o *"la parte de la población que realmente examinamos con el objetivo de obtener información"* (Moore, 2005). Mientras que el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2001) lo define como *"parte o porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como **representativa** de él"*. Aquí vemos cómo se diferencian las definiciones dadas en ambos contextos (cotidiano y matemático) surgiendo un error conceptual en la definición dada en el contexto cotidiano, cuando indica que la muestra debe ser representativa de la población de la que proviene. Nuestra intención con este término es analizar qué ocurre con los estudiantes, estudiar si este error se manifiesta ya antes de comenzar el estudio de la Inferencia Estadística y si, por otro lado, entre los estudiantes de matemáticas de Universidad se llega a superar completamente, teniendo en cuenta que serán los principales encargados en el futuro de desarrollar estos conceptos en el alumnado de secundaria.

A continuación presentamos el cuestionario:

1. *¿De qué trata la estadística?*
2. *¿Qué entiendes por población?*
3. *¿Qué entiendes por individuo?*
4. *¿Qué es una muestra?*

Se pretende con estas cuatro cuestiones que se expliciten las definiciones que los estudiantes tienen sobre cada término.

En ocasiones, a pesar de que los estudiantes conocen la definición de los conceptos, las dificultades y concepciones erróneas surgen en su aplicación. Para estudiar este hecho hemos incluido la siguiente pregunta, en la que les planteamos directamente que elijan la característica que atribuyen al concepto "muestra".

5. *Di qué frase o frases crees que es correcta y cuál ó cuáles no. Justifica cada respuesta.*

a. *Una muestra es cualquier cantidad de elementos que escojamos de un conjunto mayor.*
b. *Una muestra tiene que representar siempre el conjunto del que proviene.*
c. *Sacar todas las bolas blancas de una urna compuesta por bolas blancas y negras no se puede admitir como muestra.*
d. *Una muestra se puede extraer de cualquier forma.*

Mientras que en las cuatro primeras cuestiones intentamos que los estudiantes definan directamente los términos que se les propone, en esta pregunta modificamos la manera de contestar pues planteamos un enunciado que deben decidir si es verdadero o falso, pero que además deben justificar. De esta forma intentamos analizar qué tipo de razonamiento les lleva a tomar cada decisión.

En el apartado (a), pretendemos analizar si para el estudiante hay elementos que no pueden estar en el conjunto de datos.

En el apartado (b) explicitamos el término *representar* para que de esta forma el estudiante manifieste su postura con respecto a él en la selección de muestras.

En el apartado (c), planteamos una situación común en el estudio de probabilidades, en la que se selecciona una muestra “extrema”, desde el punto de vista de que han salido solo las bolas de un color. Queremos ver si para los estudiantes, este tipo de muestras no son válidas y por qué razón las rechazaría.

En el apartado (d), nos planteamos el método de selección de la muestra. Cuando al estudiante le planteamos si se puede elegir de cualquier forma, queremos que se plantee si hay alguna manera de seleccionar la muestra que considere que no es válida, y pedimos que explique el por qué. La estadística se fundamenta en el muestreo aleatorio simple, pero esto en muchas ocasiones no se manifiesta explícitamente en el aula y el estudiante, incluso, desconoce cómo fabricar una muestra aleatoria simple.

6. *Para investigar el tiempo dedicado al estudio por parte de los alumnos de un centro, los profesores han seleccionado 100 alumnos intentando que haya alumnos “buenos”, “medianos” y “flojos”. ¿Es esta una buena forma de selección? ¿Por qué?*

En esta pregunta hemos propuesto un contexto cercano al estudiante: un centro educativo. Se va a realizar una selección de alumnos y para tal fin los profesores los clasifican previamente según su rendimiento. La intención de esta pregunta es analizar si los estudiantes son capaces de entender que este tipo de selección no proviene de un muestreo aleatorio simple, puesto que la categorización que hacen los profesores no es producto del azar, y por tanto, el muestreo no es aleatorio simple. Por otro lado, en los estudiantes subyace la idea de que este tipo de categorías representa a todos los estudiantes de un centro educativo y queremos analizar si la idea de representatividad de la muestra se pone de manifiesto a través de esta situación.

7. *En la misma situación anterior se ha decidido escoger los 100 primeros alumnos que lleguen al centro. ¿Esta opción es mejor o peor que la anterior? ¿Por qué?*

De igual forma que en la pregunta anterior, se les vuelve a plantear una situación cercana en la que deben analizar la forma de elegir la muestra, pues este debe ser el único análisis que permita validar la muestra. En este caso, a diferencia del anterior, no hay una intención tan clara en la selección. Deben darse cuenta que, ser el primero en llegar al centro, depende de muchos factores, y que si no se analizan previamente, puede ocurrir que la elección no sea válida (muestreo aleatorio simple).

8. *¿Qué entiendes por tamaño de una muestra?*
9. *Lanzamos una moneda 10 veces, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es más posible que ocurra?*
   a. *CCCCCCCCCC*
   b. *CXCXCXCXCX*
   c. *CCCCCXXXXX*

   Explica tu elección anterior y si no estuvieras de acuerdo con ninguno de las anteriores indica un resultado que creas más posible y por qué lo consideras así.

Con esta pregunta se plantea un contexto muy utilizado en el cálculo de probabilidades. Queremos analizar si estos contextos resultan cercanos al estudiante. Le planteamos una serie de resultados del lanzamiento de una moneda que podríamos considerar “extremos”. De esta forma el alumnado se situará rápidamente a favor o en contra de estos resultados y nos explicará su razonamiento, aportando, si así lo cree conveniente, algún resultado que considere más probable.

10. *De los siguientes datos queremos calcular la media: 7, 7.1, 7.5, 6.9, 6.5, 7.5, 6.9. ¿Cómo lo harías?*
11. *El resultado anterior, ¿qué indica?*

En las dos cuestiones anteriores se analiza la comprensión de la media aritmética, sólo algorítmicamente y su interpretación.

12. *De las siguientes frases indica cuál es correcta. Justifícalo.*
    a. *Con los datos de una muestra podemos deducir la media de la población.*
    b. *Con los datos de una muestra podemos inferir la media de la población.*

Los términos inferencia y deducción están incorrectamente definidos en el contexto cotidiano, con lo que pretendemos conocer si entienden su significado y saben diferenciarlos correctamente.

13. *¿Qué entiendes por una distribución? Pon un ejemplo.*
14. *¿Qué es un estadístico? Pon algún ejemplo.*

Estas dos preguntas tienen que ver con términos más específicos, se comprueba con ello que los estudiantes no los pueden conocer puesto que no se han definido aún y es necesario hacerlo. O en el caso de que los conozcan si recuerdan adecuadamente su significado (caso de los estudiantes universitarios).

15. *¿Qué entiendes por algo significativo estadísticamente hablando?*

Se trata de un término que cambia de significado en el contexto matemático. Además, se trata de un cambio sutil pero importante en la definición y por tanto a tener muy en cuenta cuando se trabaja con él.

16. *Vamos a realizar un "muestreo aleatorio", indica qué es lo que pretendemos y cómo lo podremos hacer en un caso concreto.*

Con esta pregunta pretendemos que el estudiante explique el procedimiento mediante el cual se pueden extraer muestras aleatorias simples y por qué puede considerarlas así. Se trata de profundizar en lo que el estudiante entiende por azar.

3.3.3 Respuestas dadas por los estudiantes

Pasamos a realizar un análisis de las respuestas que los alumnos han dado a cada una de las cuestiones que se les planteó a través del cuestionario.

Del cuestionario analizaremos todas las cuestiones que hacen referencia a distintos tipos de términos según la clasificación dada en García Alonso & García Cruz (2007b).

Se trata de evaluar, a través de las respuestas de los estudiantes la comprensión de los términos-conceptos utilizados. Para tal fin, clasificamos las respuestas de los mismos según el marco teórico proporcionado por la taxonomía SOLO descrita en el apartado 2.2. Debemos recordar que con ella categorizaremos las respuestas en cuatro estadios diferentes: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, de Transición y Relacional. Cada una tendrá que ver con el tipo de respuesta dada. En este sentido, Biggs & Collis (1982; 1991) nos señalan que se trata de categorizar la respuesta dada por los estudiantes ante una tarea concreta y que un mismo estudiante puede presentar diferentes respuestas en estadios distintos. Los estadios de comprensión se documentan mediante los ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes y que añadimos para cada tipo.

Pregunta 1. ¿De qué trata la estadística?

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

Este estadio se caracteriza por respuestas incoherentes, vagas o incomprensibles.

> *"Es un estudio sobre una serie de elementos"*.
>
> *"Estudio sobre "algo" para saber la probabilidad de ocurrir o viceversa"*.
>
> *"De averiguar varias cosas que interesen"*.
>
> *"estudiar qué porcentaje o número de personas o cosas"*. Frase incomprensible.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio hemos ubicado las respuestas que hacen referencia a un solo elementos: porcentajes, datos, medias, …

> *"Es el estudio que se realiza sobre una población bajo ciertas condiciones".* Este estudiante no especifica qué quiere decir con esas condiciones y la definición no queda bien argumentada.
>
> *"Estudia fenómenos aparentemente aleatorios en busca de propiedades generales o específicas".* Se ha centrado en la "aparente" aleatoriedad de los fenómenos.
>
> *"La ciencia que investiga los porcentajes de las diferentes situaciones*". Se centra en los porcentajes.
>
> *"Trata de sacar unos datos, estudiarlos y ver el porcentaje o el número de lo que se pide".*
>
> *"De estudiar unos datos mediante algunos procesos". Considera que hay que extraer datos.*
>
> *"Estudio de una población determinada para una cualidad o aspecto determinado".*
>
> *"Averiguar cosas haciendo muestras"*
>
> *"Serie de tablas y fórmulas con la que sabemos el porcentaje o cantidad de la población o cualquier otro objetivo"*
>
> *"Obtener datos de un conjunto de cosas o personas y estudiar dichos datos".*
>
> *"Estudio realizado para saber los resultados o porcentajes de la población".*

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

En este estadio hemos ubicado las respuestas que utilizan varios términos, no necesariamente relacionados entre sí:

> *"Estudia sucesos en una población grande a partir de una pequeña muestra".*
>
> *"Es una ciencia que realiza un estudio sobre alguna característica o fenómeno manejando para ello una serie de datos".*
>
> *"Trata de la recopilación de datos, analizarlo y estudiarlos para da un resumen de la población o preveer".*
>
> *"Hacer una serie de estudios, estimaciones sobre los elementos de la sociedad".*

"Es un proceso que se lleva a cabo para obtener datos sobre un determinado experimento que está siendo estudiado"

"Es una forma de sacar cuál es el número o la cantidad de media de una población para saber más o menos los datos de todos".

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Encontramos que las respuestas empiezan a relacionar diferentes conceptos, aunque no llegan a hacerlo de manera correcta completamente.

"De estudiar alguna característica de un conjunto basándose en el estudio de un subconjunto considerable del mismo y generalizando."

"Trata de tomar datos para poder hacer posteriormente algún tipo de predicción"

"Con una serie de datos trata de sacar una conclusión"

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

No encontramos ninguna respuesta dentro de este estadio.

Pregunta 2. ¿Qué entiendes por población?

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P).*

Los estudiantes que dan respuestas en este estadio son incoherentes o dan una definición en la que entienden población como habitantes de un lugar.

"Es un conjunto de individuos en donde se puede por clase o categoría según el ente a estudiar".

"Grupo de personas"

"Conjunto de personas que habitan en un lugar"

"Conjunto de personas de una población".

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U).*

Hemos ubicado dentro de este estadio aquellas respuestas que no determinan para qué se escoge este conjunto. Así aparecen definiciones como:

"Conjunto de elementos personales e impersonales".

"Un conjunto de elementos, objetos, personas…"

"Conjunto de individuos que comparten alguna característica común".

"Conjunto de personas, animales e incluso objetos"

"Grupo donde va hacer investigado" (error ortográfico).

"Conjunto de todas las muestras realizadas". En este caso hay un elemento que ha fijado su atención que son las muestras.

"Número total con el que se va a trabajar", haciendo la equivalencia entre población y su cantidad de elementos.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

Aquí hemos ubicado las respuestas que definen la población como el objetivo de estudio pero no la definen como conjunto.

"*Es lo que se va a estudiar*"

"Las personas a las que se les hace el estudio".

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

En este estadio se ubican las respuestas que dan una definición correcta y hablan de conjunto y lo relacionan con un estudio estadístico. Aunque no explicitan el objeto de estudio.

"Conjunto de elementos sobre el que se desarrolla el estudio estadístico".

Entendemos que la respuesta debe simplificarse para poder ser utilizada en el siguiente estadio.

"Conjunto total de individuos que se quieren estudiar"

"Conjunto de elementos sobre el que se desarrolla un estudio estadístico"

"Base de datos conformada por todos los individuos o mediciones en los que se va a realizar un análisis estadístico".

"Conjunto de personas o cosas en la cual puede cogerse una muestra para realizar estudios".

"Conjunto de todos los individuos que se van a estudiar".

La situamos en este estadio por la definición que posteriormente da de individuo *(“persona, objeto o animal que se coge para realizar un estudio concreto”).*

- *RESPUESTA RELACIONAL (R).*

Se trata de las respuestas correctas a la pregunta formulada.

“Conjunto de todos los individuos que se quieren estudiar”.

“Base de datos conformada por todos los individuos o mediciones en los que se va a realizar un análisis estadístico”.

“Conjunto de elementos sobre el cual se hace el estudio estadístico”

“Conjunto de personas o cosas que vamos a estudiar”.

“El conjunto de todos los individuos que se van a estudiar”.

Lo incluimos en este estadio por la definición que luego da de individuo *(“cada uno de dicha población”).*

Pregunta 3. ¿Qué entiendes por individuo?

- *RESPUESTA PREEESTRUCTURAL (P).*

Las respuestas clasificadas en este estadio, corresponden a estudiantes que no han podido o no han sabido dar una respuesta adecuada al contexto de trabajo. Encontramos respuestas del tipo:

“Una única persona”

“Pues una persona escogida”

“Cada una de las personas que no sabemos su identidad”

“Una persona en concreto”

“Persona ajena o desconocida”

“Una persona”

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U).*

Los estudiantes cuya respuesta se clasifica dentro de este estadio hablan de individuo dentro de una muestra o no dicen qué tipo de trabajo se va llevar a cabo con ellos.

“Personas u objetos que van a formar parte de una muestra”

“Una de las partes de la muestra”

“Personas, objetos o animales que se cogen para realizar un estudio concreto”

“Una persona o cosa con la que vamos a trabajar”

“Una sola persona a la que se le hace el estudio, es decir a quien le dan su porcentaje o su estadística”.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

Encontramos una respuesta de un estudiante en este estadio que es consciente de que los individuos forman parte de un conjunto mayor que es la población, aunque esté definiendo una muestra.

“Diferentes subgrupos de la población”.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

En este estadio hemos incluido las respuestas de los estudiantes que parecen conocer el término pero no lo expresan adecuadamente.

“Un elemento de los que forman la muestra o la población”

“Cada uno de dicha población”.

- *RESPUESTA RELACIONAL (R).*

Respuestas correctas a la pregunta planteada.

“Elemento más simple de la población”

“Un solo elemento de los que forman la muestra o la población”

“Elemento particular de la población”.

“Cada uno de dicha población”, como este estudiante ha definido en este mismo estadio el término población, por esta razón podemos considerar que es encuentra en este estadio.

Pregunta 4: ¿Qué es una muestra?

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P).*

Hemos clasificado en este estadio respuestas que presentan una mala definición al utilizar el propio término que se pide definir, o bien, dan una definición diferente del término:

"Una muestra es una muestra de uno de los elementos de un conjunto mayor"

"Es mostrar lo que podría pasar como resultado".

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio hemos incluido todas aquellas respuestas que de alguna forma, explícita o implícitamente, indican que una muestra debe representar al conjunto del que proviene.

"Conjunto pequeño de individuos de la población que la representan".

"Cantidad representativa de la población"

"Cantidad determinada que escogemos para referirnos a toda la población"

"Estudio concreto sobre una población que sirve de representación para los demás"

Otro tipo de respuestas dadas en este nivel en Bachillerato identifican la muestra con otros elementos estadísticos:

"Número de datos que pedimos de una cierta población".

Se dá como definición la correspondiente al tamaño de la muestra.

"Encuesta que se realiza a un número determinado".

Este estudiante define muestra como una encuesta.

"Lo que se escoge para hacer un experimento".

Este estudiante define muestra como un experimento.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

En este estadio hemos incluido aquellas respuestas que hablan de parte, conjunto o colección pero que no hacen referencia a la población.

"Parte de la población para estudiarla con el fin de obtener resultados que sean válidos".

"Selección de un número de individuos (aleatoriamente o no) que pueden o no representar a la población".

Utiliza distintos conceptos que no presenta de manera integrada y además incluye la idea de representatividad.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

En este estadio dan la definición correcta, aunque añaden elementos que pueden llegar a modificar su significado:

"Subconjunto de la población en el que tomamos mediciones para extrapolarlos a una población mayor".

"Pequeña parte de un conjunto (población) para realizar estudios".

- *RESPUESTA RELACIONAL (R).*

En este estadio incluimos las respuestas dadas que coinciden con la de los libros universitarios. Así entre los estudiantes universitarios aparecen respuestas como:

"Subconjunto de una población"

"Subconjunto de la población sobre la que se realiza el estudio estadístico"

"Colección de individuos tomados de una población"

No encontramos ninguna respuesta de estudiantes de Bachillerato en este estadio.

Pregunta 5A: Una muestra es cualquier cantidad de elementos que escojamos de un conjunto mayor. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

Para la mayoría de los estudiantes esta definición es falsa, aunque la justificación posterior sea poco consistente.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

En las siguientes respuestas no se comprende la justificación que dan los estudiantes.

"Es correcta porque si queremos saber el peso medio de una población elegimos sólo una parte de todas las personas".

“Una muestra puede ser cualquier cantidad de elementos ya sea de un conjunto mayor o menor”.

“La muestra se escoge de grandes datos”.

En ambos casos no queda claro a qué se está haciendo referencia cuando se habla de muestra de conjunto mayor o *“grandes datos”*.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

Incluimos en este estadio las respuestas que se justifican utilizando la idea de representatividad de la muestra que parte de una población.

“*Es correcta, porque en principio si la población fuese finita (N), en general el tamaño de la muestra* (n) es n<N.”

“Al escoger una muestra se puede hacer el estudio”.

“Una muestra puede extraer de cualquier forma, ya que puede representar tanto el conjunto mayor como sus subconjuntos o ambos a la vez”.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

La respuesta que encontramos dentro de este estadio requiere que la muestra sea homogénea, es decir, que tiene que tratarse del mismo tipo de datos.

“Una muestra tiene que ser homogénea, es decir, si se estudia la edad de la población pues siempre tiene que ser de un tipo como las personas o los animales porque si los mezclamos da valores erróneos”

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

En este estadio hemos incluido la respuesta que da la posibilidad a seleccionar una muestra sin poner ninguna condición extra.

“La muestra la puedo sacar de 1000 personas coger 10”

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

En este estadio hemos ubicado las respuestas que sólo requieren que la muestra sea un subconjunto de la población.

Pregunta 5B: Una muestra tiene que representar siempre el conjunto del que proviene. **¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.**

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

Consideramos en este estadio todas aquellas respuestas que se centran en la representatividad de la muestra.

> *"La representatividad da sentido a la muestra"*
>
> *"Sí porque así da validez a la muestra"*
>
> *"una muestra debe representar siempre al conjunto del que proviene."*
>
> *"Para ser admitida como muestra"*
>
> *"Por definición"*
>
> *"No, porque por ejemplo, si queremos medir el nivel económico medio no podemos coger la muestra de las familias más pobres"*. Para este estudiante es importante que la muestra tenga de todos los tipos, esto es, que sea representativa.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

En este estadio hemos incluido las respuestas de los estudiantes que hablan de representantividad para referirse a si el elemento pertenece o no al conjunto mayor; o las que responden en términos de homogeneidad.

> *"Debería, pero si la muestra es heterogénea y con una cantidad de individuos elevada lo más probable es que no represente al conjunto"*
>
> *"Correcta porque en una muestra no puede haber un elemento que no esté en la población"*
>
> *"Si hablo de personas representa a personas"*
>
> *"Sí porque es homogénea"*

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

En este estadio hemos incluido las respuestas que afirman que la pregunta es falsa, pero por su formulación no podemos determinar qué entienden por representatividad.

> *"Falso, no toda muestra es representativa"*.

"Puede representar al conjunto mayor o no"

- *RESPUESTA RELACIONAL (R).*

No encontramos ninguna respuesta.

Pregunta 5C: Sacar todas las bolas blancas de una urna compuesta por bolas blancas y negras no se puede admitir como muestra. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

Para muchos estudiantes no es una muestra este tipo de resultado.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

No encontramos ninguna respuesta dentro de este estadio.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio incluimos aquellas respuestas que de alguna manera nos hacen pensar que el estudiante exige que la muestra sea representativa de la población.

"Correcta porque se coge la muestra para estudiar el total, si no lo representa no tiene sentido."

"Es correcto porque sacar bolas blancas sería un suceso".

"Correcto pues no es una muestra de todo el conjunto."

"Una muestra no se puede extraer de cualquier forma, siempre tiene que representar al conjunto del que proviene."

"Es correcto también, aunque esté relacionado con sucesos probabilísticos".

"Verdadero porque si lo vuelves a hacer seguro que no sacas todas las blancas."

"Incorrecto porque la muestra no sería válida ya que no sería repartida".

"No es correcta porque la extracción de la muestra debe ser representativa del conjunto y no es representativo de la urna sacar solo las olas de un color".

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Encontramos una respuesta dentro de este estadio, pues nos da a entender que para este estudiante hay una idea de resultado o suceso de un experimento que lo distingue de muestra: conjunto de resultados. Hay varios conceptos en juego que no es capaz de relacionar suficientemente.

"No correcta porque eso sería un resultado".

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

En este estadio encontramos respuestas que no requieren que la muestra sea representativa.

"Falso, pues debería hacerse de forma aleatoria".

"Debería de hacerse de manera aleatoria".

"Correcta porque también es una posibilidad".

"Verdadero, se puede admitir".

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Aquí están las respuestas que admiten cualquier resultado como válido para ser una muestra.

"Sí se puede admitir como muestra, porque buscamos bolas blancas en una urna donde hay bolas blancas"

Pregunta 5D: Una muestra se puede extraer de cualquier forma. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

Que respondan de manera adecuada o no a esta pregunta puede tener mucho que ver con el grado de experiencia que los estudiantes tengan en la extracción de muestras de una población.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

No hay ninguna respuesta dentro de este estadio.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio están las respuestas que requieren la representatividad de la muestra.

"Da igual cómo lo hagas, el caso es tener algún dato para estudiar".

> *"Sí, que se puede admitir. Otra cosa es que los resultados se asemejen a la realidad."*

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Aquí no se requiere la representatividad, pero aparecen otros aspectos de la muestra que desvían la atención sobre los requisitos para ser extraída.

> *"Primero hay que fijar una población donde esté el fenómeno que se va a estudiar."*

> *"Incorrecto porque si no, no tendría validez y los datos nos serían correctos."*

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Hay libertad para extraer la muestra, según las respuestas de los estudiantes, aparece la idea de aleatoriedad.

> *"Verdadera, pues si lo que quieres es una muestra representativa tendrás que hacer un muestreo aleatorio"*.

> *"No correcta, se tiene que extraer de manera aleatoria"*.

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

> *"La respuesta puede ser correcta pero el análisis estadístico que obtendremos podrá ser mejor o peor."*

Pregunta 6: Para investigar el tiempo dedicado al estudio por parte de los alumnos de un centro, los profesores han seleccionado 100 alumnos intentando que haya alumnos "buenos", "medianos" y "flojos". ¿Es esta una buena forma de selección? ¿Por qué?

Las respuestas dadas por los estudiantes las vamos a clasificar de la siguiente manera:

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

No aparece ninguna respuesta dentro de este estadio.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio consideramos aquellos estudiantes que se han centrado en la representatividad de la muestra sin entrar a discutir ningún otro tipo de elemento para decidir si la selección de la muestra es adecuada.

"Si se ha hecho de forma aleatoria, sí".

"Sí porque al haber diversidad de alumnos el resultado del estudio dará aproximadamente la media de tiempo que dedican al estudio"

"Puede llegar a representar a la población, si es que realmente eso nos da lo que queremos, para saberlos necesitamos un procedimiento estadístico que nos diga si realmente esa selección representa a la población".

"Sí lo es porque hay todos los tipos de alumnos que se puede ser. Luego es una muestra en principio representativa".

"Sí, porque la muestra es representativa, es decir, representa la realidad de la población".

"Sí porque representa todos los casos posibles en la población"

"Sí porque trata de representar todas las clases de estudiantes que hay"

"Sí, porque así se podrá saber el tiempo dedicado al estudio según la capacidad de cada uno".

"Sí porque así se verán distintos niveles y resultados".

"Es una buena forma de selección porque así tienes variedad en el estudio que realices y los resultados pueden ser más fiables"

"Sí porque investigas todo tipo y no te centras en uno solo"

"Sí porque podrás hacer una buena muestra escogiendo los diferentes tipos de nivel de cada persona".

"No, porque tendrían que dar un dato más, para poder calcularlo".

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

Seleccionamos dentro de este estadio las respuestas de los estudiantes que admiten como válida la selección que se les propone, pero tienen en consideración otros aspectos aparte de la representatividad: proporcionalidad con el total y dedicación horaria al estudio. O bien, aquellas respuestas que consideran que el azar aparece en este tipo de selección y puede hacer que no nos favorezca la selección.

“Es buena si se toman alumnos de cada tipo en proporción al total, ya que si no puede que la muestra de 100 contenga más flojos cuando en la realidad hay muchos menos”.

“Sí siempre y cuando el número de alumnos de la muestra que representan a su grupo (buenos, medianos y flojos) sea proporcional al número de alumnos de ese grupo que hay en el centro. (Suponiendo que existe relación entre el número de horas de estudio y las notas)”.

“Sí, ya que si definimos para cada caso intervalos de tiempos, es decir, para los alumnos buenos consideramos que si dedica 3 horas o más diariamente, para los medianos 2 horas y para los flojos menos de dos horas estaríamos metiendo a los 100 alumnos en unos de esos grupos”.

“Pues no es muy buena, porque a lo mejor esos 100 son flojos y el resto que no han cogido son buenos”.

“Sí porque darán valores medios sin prácticamente errores si la elección ha sido buena”.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

Las respuestas de este estadio están dadas en el sentido correcto de la pregunta, pero no han sabido explicar qué es lo que puede hacer que la selección no esté bien hecha.

“No es una buena manera pues estás condicionando el tipo de personas que hay en la muestra, lo cual no dará un resultado del todo cierto con respecto a la población.”

Pregunta 7: En la misma situación anterior se ha decidido escoger los 100 primeros alumnos que lleguen al centro. ¿Esta opción es mejor o peor que la anterior? ¿Por qué?

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

“Yo creo que es mejor porque así observan los conocimientos que tienen y el tiempo que dedican”.

“Peor porque sigue faltando un dato.”

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

"Peor, pues si sabemos que existen diferencias entre los individuos a tratar que influyan en el resultado de la prueba deberíamos especificar."

"Depende del alumnado total. Si este no es mucho mayor que 100 la muestra puede ser igual de representativa por cuestiones de probabilidad. Si el tamaño de la población es mucho mayor que 100 entonces la opción es más que dudosa."

"Peor que la anterior, ya que en general no representa a la población".

"Mejor, ya que estaríamos escogiendo a unos alumnos predeterminados, en cambio en el otro caso sería un poco al azar".

"Seguiría siendo igual, pues no depende de si coges a un alumno o a otro sino que va a depender de las capacidades de cada persona".

"Peor porque es más difícil calcular los 100 primeros que lleguen en cambio la otra es mejor porque los datos los puedes sacar por sus calificaciones."

"Es igual porque es una parte, muestra, de todos los alumnos que hay en total."

"Peor, porque no dan oportunidad a otras personas que pueden ser más o menos estudiosas y así no se saría ien los resultados generales medios".

"Es peor porque no sabemos en lo que se basa el problema".

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

"Es mejor si en la anterior no se cogen en proporción a la realidad, ya que ne esos 100 primeros harán de todo tipo más o menos como en el total, ya que no hay condiciones que hagan a unos llegar antes que a otros."

"Igual si suponemos que llegan de forma aleatoria y no hay ningún factor que determine la hora de llegada."

“Opino que esta opción es igual que la anterior porque está basada en el azar.”

“Mejor […] escoger un número de personas al azar sin tener en cuenta ningún tipo de condición.”

“Peor porque sólo te centras en los primeros.”

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

“Es peor que la anterior porque puede darse la casualidad de que todos los alumnos que lleguen al centro sean excelentes estudiosos”.

“Yo creo que es peor porque están jugando con la gente debido a que en ese momento pueden llegar 100 alumnos buenos o malos exclusivamente.”

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

No se encontró ninguna respuesta dentro de este estadio.

Pregunta 8: ¿Qué entiendes por tamaño de una muestra?

Se trata de una pregunta directa y clara sobre un término estadístico muy utilizado. Pero en ocasiones no está tan claro su significado.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

“Que sea muy grande o no. O quizás de lo que estemos estudiando.”

“Si es grande o pequeña.”

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

“Pues las veces que preguntas, la cantidad de preguntas, …”.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

“El número de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto de elementos”.

“Cantidad de población que se utiliza, es decir, a mayor población y más subgrupos habrá mayor muestra.”

“Es el número de personas que se coge. Puede ser mayor o menor.”

"Cantidad de elementos que se escogieron de un conjunto más grande."

"El número de personas o cosas utilizados."

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

"Es la cantidad de elementos que se deben escoger para tener una muestra fiable. Porque no podemos tomar una muestra de tres personas para saber la estatura media cuando la población es de 3000 personas."

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Son muchas las respuestas encontradas dentro de este estadio. Algunos ejemplos son las siguientes:

"El número de individuos que lo componen".

"El número de individuos de una población al que se le hace el estudio estadístico".

Pregunta 9: Lanzamos una moneda 10 veces, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es más posible que ocurra?

a. CCCCCCCCCC

b. CXCXCXCXCX

c. CCCCCXXXXX

Explica tu elección anterior y si no estuvieras de acuerdo con ninguno de las anteriores indica un resultado que creas más posible y por qué lo consideras así.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P).*

Hay una respuesta de un estudiante universitario que marca el resultado (c) pero no lo justifica.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

Las respuestas seleccionadas en este estadio son aquellas que se basan en la idea de representatividad para elegir una u otra opción. Además, la justificación va en ese mismo sentido.

"Lo más probable es que salga una de cada en 10 lanzamientos, ya que salir muchas veces la misma no suele ocurrir. Aunque sería más probable algo del tipo CCXCXXCXCX"

"El caso (a) es el menos probable (sólo ocurre una vez). El caso (b) es más probable que (a)."

"El (b) y (c) porque la probabilidad de salir cara o cruz es ½, pero sacar 5 caras y 5 cruces es más probable que 10 caras"

"La (b) porque tenemos un 50% de que salga cara y un 50% de que salga cruz".

"Me parece la opción (c) más correcta porque tanto cara como cruz tienes la misma probabilidad"

Marca la (b): *"Porque en una moneda sola puedes sacar cara o cruz y luego ya miras la probabilidad".*

"Mi elección ha sido la (c) porque la probabilidad de que salga cara es la misma que la que salga cruz"

Marca la (b): *"Porque una moneda tiene 2 caras (c,x) y la probabilidad d que salga tanto una como otra es de ½"*

Marca la (b): *"Porque todo C es prácticamente imposible. Mitad de C y mitad de X mucha casualidad. Tampoco estoy tan de acuerdo con la B pero pienso que podría salir así por estar más desordenado".*

Marca la (c): *"Porque tiramos 10 veces"*

Marca la (c): *"La probabilidad si lanzamos un dado diez veces es de 5/10".*

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

Las respuestas de este estadio son aquellas que consideran otros aspectos como relevantes, aparte de la representatividad. Lo que conlleva a que no expresen correctamente su decisión.

"Creo que ninguno de los resultados anteriores saliesen. Puede que sí pero no lo podemos saber hasta realizar el problema".

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T).*

En este estadio incluimos las respuestas de los estudiantes que consideran cualquier resultado posible, pero no son capaces de justificarlo correctamente o fundamentándose en el azar.

> *"Creo que lanzando la moneda puede salir cualquier resultado. Si se calculan las probabilidades te saldrá cuál más o menos es el resultado que podría salir".*
>
> *"Yo creo que las 3 posibilidades pueden suceder porque tú al tirar el dado no sabes si va a salir C o X"*
>
> *"Podría salir cualquier resultado porque nunca sabes cuáles serían exactamente los resultados"*

- *RESPUESTA RELACIONAL (R).*

Las respuestas de este estadio son correctas y las justificaciones adecuadas.

> *"Las tres tienen la misma probabilidad de ocurrir pues cada lanzamiento es independiente y la probabilidad de los tres es* $(1/2)^{10}$*"*
>
> *"Yo creo que los tres, pues al fin y al cabo cada uno (cara o cruz) tiene la misma probabilidad de salir (1/2)".*
>
> *"Todos tendrán la misma probabilidad* $(1/2)^{10}$ *y cualquier combinación es igual de probable. Esto se explica con la propiedad del producto de sucesos independientes y que la probabilidad de que salga cara o cruz es ½".*
>
> *"Los tres resultados anteriores (al igual que cualquier otro) tienen la misma probabilidad de ocurrir pues cada lanzamiento es un suceso aislado, esto es, no guarda relación (ni dependencia) con los demás".*
>
> *"Ninguna es más probable que otra porque son sucesos independientes".*

“Lo más probable es que tenemos un 50% de probabilidad de que al lanzar obtengamos cara y otro 50% de obtener cruz, por tanto, cualquiera de la opciones pueden ser válidas”.

“Todos son posibles porque la probabilidad de una moneda es ½ y es invariable por lo que podría pasar de todo”

Pregunta 10: De los siguientes datos queremos calcular la media: 7, 7.1, 7.5, 6.9, 6.5, 7.5, 6.9. ¿Cómo lo harías?

El algoritmo de cálculo de la media aritmética es un algoritmo muy conocido por los estudiantes y que muchos de ellos saben calcular. Algunos se confunden con los nuevos cálculos de la media que se les pide cuando deben calcular la media en una distribución binomial (n·p).

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

En este estadio no encontramos ninguna respuesta.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio hemos situado un estudiante que da una respuesta errónea en la que se ha fijado en un aspecto (operación) para el cálculo de la media aritmética.

“Sumando los datos.”

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Aquí situamos los estudiantes que han estudiado la media en distintas distribuciones de probabilidad y confunden dicha media con la que se pide en este problema.

“Multiplicando por algo”.

“$\mu = n \cdot p = 7 * 7.1 * 7.5 * \ldots$

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

En este estadio se encuentran los estudiantes que necesitan contextualizar los datos.

“Sumando todos los datos de los resultados si fueran exámenes y dividiéndolo por el número de exámenes.”

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Salvo las respuestas dadas anteriormente, todos los demás estudiantes han dado una respuesta para esta cuestión en el estadio Relacional.

Pregunta 11: El resultado anterior, ¿qué indica?

Así como el cálculo no presenta grandes dificultades para los estudiantes, entender y explicar el significado de dicho cálculo ha dado a un amplio abanico de respuestas.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

En este estadio hemos incluido las respuestas de los estudiantes que no dan una explicación o que utilizan el mismo término para explicarlo.

> *"La media de las notas sacadas en un examen".*
>
> *"La media de la población."*
>
> *"La media es el resultado medio de la probabilidad multiplicada por n = número de veces".*
>
> *"El resultado medio de algo."*

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio encontramos los estudiantes que hablan del margen de error que se comete, o del valor sobre el que se encuentran todos los datos, o bien, lo confunden con la moda o con la mediana.

> *"El valor de la media es 7.06 y los datos tienen un margen de error".*
>
> *"La media de las notas obtenidas."*
>
> *"El valor que está a la mitad del resto, es decir, a igual distancia del menor y del mayor".*
>
> *"Es el valor sobre el que se encuentran todos los datos."*
>
> *"Es el número que más se repite o se acerca al resultado con mayor frecuencia."*

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Aquí encontraremos las respuestas para las que la media es el valor representativo de un conjunto de datos o que es aproximación de ellos.

“Todos los datos representados en uno solo.”

“Valor al cual más se aproximan las cantidades dadas.”

“Es el valor que aproxima a los números anteriores de forma equitativa.”

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Interpretación de media como punto medio.

“La media aritmética donde será más o menos la mitad. Como en este caso hay poca diferencia de un número a otro, no habrá alteración.”

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Interpretan la media como valor intermedio de todos los datos o que representa al conjunto de datos.

“Un valor representativo de la muestra.”

“Es el centro de gravedad de los números que tenemos con los pesos que tenemos.”

“El valor medio de todos esos datos, el punto medio.”

“La mitad de los datos, es decir, el punto medio”.

Pregunta 12: De las siguientes frases indica cuál es correcta. Justifícalo.

a. Con los datos de una muestra podemos deducir la media de la población.

b. Con los datos de una muestra podemos inferir la media de la población.

Interpretamos que muchas respuestas no tienen clara la diferencia entre inferir y deducir porque no explican su elección.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

No encontramos respuestas dentro de este estadio.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio ubicamos las respuestas que por desconocimiento de los términos y su definición han dado como válida la respuesta del apartado (a).

- *RESPUESTAS MULTIESTRUCTURAL (M)*

No encontramos respuestas dentro de este estadio.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Todos los estudiantes que han indicado correctamente como solución el apartado (b) están en este estadio, aunque su justificación no sea del todo apropiada:

> *"Estamos suponiendo con algún grado de confianza"*.
>
> *"Con los datos de una muestra lo que podemos hacer es estimar dicho valor"*. Este estudiante no marca ninguna respuesta como correcta.

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Dan como correcto el apartado (b) y además dan una justificación coherente:

> *"Porque es una cantidad aproximada y representativa, no podemos llegar a conocer la media exactamente de la población."*
>
> *"Con los datos de la muestra podemos dar una idea aproximada de cuál es la media poblacional, no deducir la media"*.
>
> *"Al tomar una muestra no tomas todos los elementos y solo puedes realizar una aproximación"*

Pregunta 13: ¿Qué entiendes por una distribución? Pon un ejemplo.

Dada la gran diversidad de significados que presenta este término, según el contexto de trabajo, el abanico de respuestas dadas por los estudiantes es muy diverso.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

> *"Es un estudio que se realiza entre 0 y 1"*. No explica nada más con lo que no podemos entender a qué está haciendo referencia.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

Entienden el término como probabilidad y han dado las siguientes respuestas:

> *"Es una aproximación de probabilidad"*

“Cálculo de probabilidad”

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Las respuestas que encontramos en este estadio conllevan más conceptos y se dirigen hacia la respuesta correcta. Hablan de reparto de datos, probabilidades, variable aleatoria, …

“Manera de evolucionar de una cierta característica”.

“Son estudios estadísticos de datos invariables en el que el resultado está dado en una tabla de dicha población. La probabilidad no varía”

“Es repartir los datos que obtienen”.

“Pues algo que se reparte”.

“Es un reparto”.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Salen a relucir elementos relativos al término distribución, pero que no se encuentran totalmente integrados.

“Distribución vendría a ser cómo está repartida una población”. Entendemos que la respuesta es correcta, salvo porque habla de población en vez de los valores que se extraen de la población.

“Es una variable aleatoria”. En este caso el estudiante tampoco indica que se trata de los valores que toma la variable aleatoria.

“Forma de agrupar los datos estadísticos que tenemos”.

“Es el comportamiento de una variable”.

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

“Se recogen las probabilidades en los que ocurre un experimento”.

Pregunta 14: ¿Qué es un estadístico? Pon algún ejemplo.

Son pocos los estudiantes que responden algo a esta cuestión, pero los que lo hacen coinciden, en un alto porcentaje, en indicar que hace referencia a la persona que realiza estudios estadísticos.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

Encontramos respuestas que parecen no haber entendido la pregunta o no responden.

"El resultado de la población". No se puede saber a qué hace referencia esta afirmación.

"Resultado de algún tipo de estudio estadístico".

"Resultado necesario a la hora de la estadística".

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio hemos incluido las respuestas que hacen referencia a la persona que realiza las investigaciones estadísticas como estadístico.

"La persona encargada de realizar un estudio estadístico".

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Catalogamos dentro de este estadio la respuesta siguiente:

"Una propiedad que podemos analizar en una muestra para extenderlo a la población"

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

No encontramos ninguna respuesta dentro de este estadio.

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

Encontramos una respuesta que podemos clasificar dentro de este estadio:

"Es un dato sacado de la muestra que infiere a la población".

Pregunta 15: ¿Qué entiendes por algo significativo estadísticamente hablando?

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P)*

En este estadio encontramos los estudiantes que no dan respuesta a lo que se pregunta o no se han sabido explicar bien:

"Que se han realizado estudios sobre ese tema".

"Que es una representación aproximada".

"Algo pequeño".

"Sin probar si es verdadero o falso"

"Muestras repetidas"

"Algo que concuerda con lo dicho y tenga sentido"

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio hemos incluido las respuestas de los estudiantes que entienden que significativo quiere decir importante. En este caso se produce una dificultad de cambio de definición del término de un contexto a otro que no se ha producido en el estudiante.

“Algún dato que dice algo importante en el estudio”

“Algo importante, es decir una cantidad o porcentaje de algún estudio que destaca”.

“Es algo que nos da un dato relevante de la población que estamos estudiando”

“Una estadística relevante”.

También incluimos aquellos significados que tienen que ver con otros términos:

“Se obtienen resultados fiables”

“Que represente el objetivo que estamos estudiando”

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M)*

Dentro de este estadio incluimos una respuesta dada por un estudiante universitario donde indica que se trata de “algún dato que permita hacer una buena inferencia”.

- *RESPUESTA DE TRANSICIÓN (T)*

Encontramos un estudiante universitario que da una definición correcta pero formal del término sin que quede clara su comprensión, aunque sí su utilización procedimental:

“α = probabilidad, si rechazamos Ho entonces es significativo”

- *RESPUESTA RELACIONAL (R)*

En este estadio encontramos un estudiante universitario que ha dado la respuesta correcta y uno de bachillerato:

“Si la probabilidad de que ocurra es más alto que lo que yo fije como alto”.

“Es un dato poco común”.

Pregunta 16: Vamos a realizar un “muestreo aleatorio”, indica qué es lo que pretendemos y cómo lo podremos hacer en un caso concreto.

- *RESPUESTA PREESTRUCTURAL (P).*

En este estadio hemos incluido aquellas respuestas que no se entienden o que no contestan a lo que se pregunta:

> *"Es un estudio sobre algo concreto".*
>
> *"Con el muestreo logramos adivinar muchas de las probabilidades que pueden surgir"*
>
> *"Calcular un tanto por ciento"*
>
> *"Se escoge una persona al azar y se le hacen unas preguntas".*
>
> *"Lo pueden hacer escogiendo a 100 personas".* No habla de azar ni cómo escoger las personas.

- *RESPUESTA UNIESTRUCTURAL (U)*

En este estadio encontramos estudiantes que utilizan los ejemplos de las preguntas anteriores (6 y 7) como ejemplo de muestreo aleatorio, pero no lo justifican suficientemente.

> *"Se pretende analizar una población sin tener en cuenta ningún criterio determinado, para ello se selecciona un número determinado de individuos al azar como en la pregunta 7".*
>
> *"Obtener una muestra al azar, por ejemplo el de la pregunta 6".*
>
> *"Tomar una cierta cantidad de individuos al azar de una población".*
>
> *"Pretendemos hallar el resultado estadístico de alguna muestra que puede ser una urna con bola de diferentes colores por lo que la probabilidad varía según el transcurso del estudio".* Este ejemplo no es adecuado pues los resultados no tienen la misma probabilidad de ocurrir, con lo que no está calculando una muestra aleatoria simple.

- *RESPUESTA MULTIESTRUCTURAL (M).*

Las respuestas de los estudiantes ubicadas en este estadio son aquellas que utilizan varios términos estadísticos tales como: muestreo aleatorio simple, representativo, tomar al azar y tomar de una población entre otros. Estos términos en ocasiones los utilizan bien, pero en ninguno de los casos responden a lo que se les pregunta, que es dar los pasos a seguir para realizar un muestreo aleatorio.

"Realizando un muestreo aleatorio sobre una población se pretende extraer una muestra representativa que nos sirva como referencia para realizar un estudio se realiza de forma aleatoria para garantizar que sea representativa de la población total".

"Un muestreo aleatorio es el estudio que se realiza a un conjunto, por ejemplo el caso de arriba de una moneda que lanzamos 10 veces nos puede salir varias opciones que llamaremos variables aleatorias y el estudio de esas opciones es el muestreo aleatorio"

"Un muestreo aleatorio es una muestra que infiere a la población total. Podemos hacer dicho muestreo aleatorio simple, es decir, que sea representativo."

"tomar una muestra totalmente al azar, por ejemplo para hacer un muestreo aleatorio en España, en vez de coger la misma cantidad de gente por comunidad autónoma, hacerlo tomando la gente totalmente al azar"

"Queremos que la muestra represente la población lo mejor posible, siendo las mediciones a individuos tomados de forma aleatoria. Por ejemplo si queremos medir la falta de vista en una población, no es aleatorio que sólo tomemos los datos en las personas que tengan gafas pues no representará al total de la población"

"Un muestreo aleatorio es tomar de manera aleatoria una muestra de la población y estudiarla. De un pueblo tomamos 500 personas al azar y estudiamos la altura de estas para ver si en el pueblo hay más gente baja que alta".

"Un muestreo aleatorio es escoger una muestra poblacional al azar. Lo que se pretende es que el estudio estadístico tenga una mayor diversidad. Por ejemplo, si hacemos un estudio de estatura media en niños entre 14 y 16 años en Canarias, hacemos una selección aleatoria".

En los estadios de transición y Relacional no ubicamos ninguna respuesta, pues los estudiantes no dieron en ningún caso la descripción adecuada que se les pedía.

3.4 FASE III. Propuesta de enseñanza

Durante esta tercera fase de la investigación hemos elaborado y desarrollado una propuesta de enseñanza con la que pretendemos ofrecer un modelo de enseñanza que permita al alumnado elaborar los conceptos de manera que el profesor pueda conocer las dificultades que les puedan surgir durante el desarrollo de la misma.

Como indicamos anteriormente, hay razones suficientes para hablar de las trayectorias de enseñanza y aprendizaje de Heuvel-Panhuizen (2001). En nuestro trabajo, hemos ideado una trayectoria de enseñanza y aprendizaje que hemos desarrollado, tratando de seguir la trayectoria de aprendizaje que el alumno puede desarrollar en el tema concreto de la estadística inferencial. Nos encontramos con alumnos que han tenido diferentes experiencias formativas y deseamos desarrollar unas habilidades estadísticas similares para todos. Somos conscientes de las dificultades que esto entraña y que, además, los ritmos de aprendizaje de cada uno son diferentes.

Según Swan (2008), cuando pensamos en la elaboración de una propuesta didáctica, debemos ser conscientes de que la discusión colaborativa es esencial, pues los conceptos son co-creados.

En nuestro caso, hemos seguido el modelo propuesto por Swan (2008), en el que el alumno expresa el conocimiento que va desarrollando. Debemos tener en cuenta que el modelo, por lo novedoso que resultará para los estudiantes, requerirá un tiempo de adaptación, esto es, que los estudiantes no están acostumbrados a participar de manera activa en las discusiones en clase, con lo que en un principio, desarrollar la propuesta como la hemos concebido podría presentar dificultades de puesta en práctica.

A través del desarrollo en el aula podremos ver cómo van surgiendo los diferentes términos estadísticos y cómo los asimilan los estudiantes. Entre nuestros objetivos está poder analizar si esta propuesta permite que los estudiantes interioricen de manera más natural los términos estadísticos. Y por otro lado estudiaremos si la contextualización les ayudará a conocer mejor los conceptos estadísticos que son necesarios desarrollar para poder comprender conceptos más complejos o que requieren de los anteriores para su adecuada comprensión.

A lo largo de la propuesta didáctica se utiliza como distribución teórica para el contraste la distribución normal. El investigador es consciente de que esto no es riguroso, pero ha sacrificado este aspecto en aras del hecho didáctico.

3.4.1 Participantes

Durante el curso 2008/2009 se realizó una experiencia con estudiantes de 2º de Bachillerato, en la Modalidad de Ciencias Sociales, un Instituto de Educación Secundaria de Santa Cruz de Tenerife. El centro educativo se encuentra situado en una zona periférica de la ciudad y los estudiantes tienen poca motivación hacia el estudio, tanto interna como externa. El entorno socioeconómico en el que se sitúa el centro es medio-bajo, con un alto índice de paro y con familias con escasa cualificación profesional.

La clase estaba compuesta por 14 alumnos, 9 chicas y 5 chicos. Son los mismos estudiantes a los que se les administró la encuesta sobre los términos estadísticos, presentada en el apartado 3.3. Todos ellos son muy regulares en la asistencia a clase, por lo que no faltaron durante el desarrollo de las sesiones.

En este caso, el investigador coincide con el profesor que les da clase durante el citado curso. Además, fue su profesor de matemáticas durante el curso anterior. Por tanto es conocedor de la formación estadística que poseen y cuál puede ser el punto de partida adecuado para comenzar a desarrollar la inferencia.

3.4.2 Diseño de la propuesta de enseñanza

La propuesta se centra en la estimación de un parámetro mediante un intervalo. En este caso, el parámetro que se quiere estimar será la media poblacional. Es el punto de partida de la Inferencia Estadística en este nivel.

El profesor realiza una organización previa de lo que va a desarrollar con el alumnado, así como las cuestiones que pretende responder con los estudiantes para desarrollar el tema.

A continuación presentaremos el trabajo previo que desarrolla el profesor en la elaboración de la propuesta. Veremos qué elementos debe tener en cuenta y de qué forma piensa presentar los conceptos a los estudiantes.

En primer lugar, nos proponemos presentar a los estudiantes una situación o problema que queremos resolver, dentro de un contexto claro y cercano para el alumno, como son las estaturas de 180 estudiantes de un centro. Estos datos son la población sobre la que vamos a trabajar. Los presentamos en una tabla como aparece a continuación:

174	180	162	161	165	171	162	163	175	169
162	167	172	178	174	162	160	172	183	168
184	180	169	160	155	169	163	164	169	165
168	177	170	160	165	176	168	162	165	170
156	168	174	150	170	187	152	170	169	173
174	163	176	155	173	178	199	174	179	161
164	168	175	162	170	180	181	170	174	170
164	175	167	178	170	176	168	178	167	175
160	173	164	168	160	171	171	163	166	177
183	174	175	176	160	182	171	168	170	173
165	169	181	175	165	172	158	168	167	167
175	165	184	182	175	172	171	167	168	171
181	165	181	163	173	176	175	187	163	172
178	154	186	163	189	178	182	168	162	171
175	178	175	170	178	172	162	162	156	175
188	181	160	165	174	180	161	180	184	168
179	160	165	172	175	175	181	168	186	159
159	182	173	174	171	179	177	162	173	162

Tabla de estaturas de 180 estudiantes

El primer planteamiento que se les hará al alumnado es el siguiente:

1. **Queremos resumir la información contenida en esta tabla. ¿Qué se te ocurre que podría resumir los datos? ¿Por qué?**

Con esta primera cuestión, tratamos de que los estudiantes se enfrenten a una situación estadística real, en la que tienen que trabajar con muchos datos y sacar conclusiones. Al principio tendrán que utilizar las herramientas que poseen y que en este caso estarán relacionadas con la estadística descriptiva.

Hacemos hincapié en el contexto, pues creemos que es importante que se utilicen situaciones cercanas a los estudiantes y que, de esta manera, las interpretaciones que hagan tendrán mayor sentido para ellos.

En este momento, el profesor ha lanzado la pregunta y el planteamiento debe ser que los estudiantes la comenten entre ellos y al grupo las ideas que van surgiendo. En un primer momento el profesor no debe intervenir salvo para animar la discusión.

El desarrollo de esta primera parte será oral, aunque en ocasiones se le propondrá al alumnado que realicen operaciones en su libreta para justificar las exposiciones que realicen de manera oral.

Una vez, hayan aceptado que la media es el parámetro, conocido, que mejor resume los datos anteriores, pasaremos a la siguiente cuestión:

2. **Ahora que sabemos que buscamos la media, ¿cómo la podemos calcular para todos los datos?**

El profesor deja caer la pregunta para que reflexionen sobre el método de cálculo. Al principio tratarán de hacerlo con todos los datos, pues están habituados a calcular la media de los datos que se les presenta, sin reflexionar sobre el esfuerzo que esto puede acarrear. En este caso, y dado que hemos presentado una cantidad importante de datos, esperamos que algunos estudiantes se planteen la dificultad que surge por la enorme cantidad de operaciones a realizar. Si no es así, el profesor les planteará que busquen la manera de calcularla pero sin tener que hacerlo con todos los datos.

Una vez que los estudiantes lleguen a que se podría extraer una muestra para realizar el cálculo de la media se les propone lo siguiente:

a. **MUESTRA. ¿Por qué una muestra? ¿cómo la escogemos?**

Con esto queremos explicitar la necesidad que surge en ocasiones de trabajar con muestras y señalarles qué cosas tenemos que decidir a la hora de seleccionarlas. También veremos si se explicitan aquellos errores conceptuales que hemos descrito previamente y que tienen que ver con este concepto. Tendremos que decidir varias cuestiones de la muestra:

b. **AZAR. ¿De qué forma sabes que los estás escogiendo al azar?**

   i) **Sorteo. ¿Cómo lo realizamos?**

   ii) **Escoger los 20 primeros, ¿estaría bien?**

Se trata de mostrar a los estudiantes que decidir que algo es debido al azar no es siempre tan sencillo como “escoger como uno quiera”. Queremos que analicen modos de seleccionar los datos y que indiquen si son o no al azar, es decir, si creen que pueden darse circunstancias para pensar que la selección hecha ha sido intencionada (sesgo de la muestra).

c. **CANTIDAD. ¿Cuántos datos escogemos? ¿Muchos? ¿cuántos son muchos? ¿la mitad son muchos? ¿cuántos son pocos? ¿Cinco datos son pocos, y diez?**

Otro elemento que tenemos que decidir cuando realizamos una muestra. ¿Qué ventajas e inconvenientes tienen unas cantidades frente a otras? Deben darse cuenta que a mayor cantidad de datos más trabajo aunque, por otro lado mejoramos la estimación que estamos realizando.

d. **ALGORITMO**

   i) **Media. ¿Cuál escogemos de todas? ¿Son todas buenas?**

   ii) **CASO. Mi sorteo me dio los resultados: 189, 199, 187, 186, 187, 186, 184, 184, 188, 184. La media es: 187’4. ¿Es buena esta estimación?**

   iii) **Media de medias. ¿Sería mejor estimación? ¿qué le pasa a la media de medias?**

Ya hemos llegado a la conclusión de que debemos extraer una muestra de la población, que esta debe ser al azar y que con los datos que escojamos calcularemos una media. Nuestro siguiente problema es que la media, que va a obtener cada uno, será diferente, en la mayoría de los casos. Enfrentaremos así a los estudiantes por primera vez a la no-unicidad de las soluciones en estadística. Aparece el concepto de error por primera vez. Está claro que en estadística se cometen errores, pues no obtenemos la solución exacta, sino una aproximación y por esto se dice que estamos *estimando* un valor. Este hecho puede causar en los estudiantes cierta inseguridad, pues están acostumbrados a que en clase de matemáticas los resultados tienen que darles a todos igual. En ocasiones, y por comodidad del docente, cuando se trabaja inferencia estadística también se plantean los problemas para que a todos los estudiantes les dé el mismo resultado; todo esto va generando cierta confusión conceptual, pues transmitimos que la estadística es inmutable, como el resto de las matemáticas, algo que no es cierto.

3. **ESTIMACIÓN. Define este término.**

En este punto queremos fijar algunos conceptos. Queremos ver qué entienden los estudiantes por este término y, partiendo de sus concepciones, tratar de dar la definición matemática de este término. A tal fin, les planteamos las siguientes cuestiones, con las que podremos extraer su idea de estimación:

a. **¿qué significa obtener una estimación? ¿qué estamos estimando?**

No sólo nos interesa que conozcan el significado sino que sepan cómo se utiliza y cómo se obtienen estimaciones. Estamos siguiendo el modelo propuesto por Swan (2008), pues guiamos a los estudiantes y hacemos un uso constructivo del conocimiento previo.

b. **La media obtenida, ¿es una estimación? ¿de qué?**

Con esta cuestión les estamos desafiando a que prueben que es una estimación, es decir, cumple los requisitos que ellos creen que debe tener un valor estimativo. Alentamos la discusión y ayudamos a los estudiantes a realizar conexiones.

4. **Define "ESTIMACIÓN PUNTUAL"**

Seguimos sentando las bases de los términos específicos matemáticos. Ahora nos interesa el término Estimación Puntual. Este término y el siguiente son muy recurridos en estadística. Es por ello que debemos dejarlos bien definidos para evitar dificultades posteriores de comprensión o con otros términos en los que estos se vean implicados.

5. **Define "ESTIMACIÓN POR INTERVALOS"**

Aunque no añade el profesor más cuestiones sobre estos términos, está claro que durante el desarrollo de la sesión de clase éste podrá incorporar cuestiones relativas a estos términos y los podrá ilustrar dentro del trabajo que está desarrollando con las estaturas de los alumnos.

6. **ERROR de la estimación. ¿Cómo lo definirías?¿qué puede hacer que este error de estimación sea mayor o menor? ¿De qué depende?**

No podemos hablar de estimación sin mencionar el error. Como se indicó anteriormente, para los estudiantes es una novedad que los resultados en matemáticas no sean exactos y que tengamos que llegar a conclusiones sobre resultados aproximados.

Con todos estos términos estamos tratando de que el estudiante siga los pasos para comprender los conceptos tal y como lo describe Swan (2008), identificando los términos, discriminándolos de otros similares, generalizando, extrayendo sus propiedades y sintetizándolo.

7. **FORMALIZACIÓN. Variable X = estatura de los estudiantes. Sigue una distribución normal. Pero desconocemos la media de la distribución. Sí conocemos la desviación típica: 8'07.**

Llegados a este punto, el profesor tendrá que matematizar el proceso seguido. Se trata de redactar en lenguaje matemático formal la situación en la que se encuentra nuestro problema. Este es un salto importante en el discurso de la clase, pues es necesario para poder lograr el objetivo propuesto: encontrar un intervalo que nos permita controlar la media de la población con un error determinado. Hay un valor que será conocido en todo el proceso: la desviación típica de la población. De esta manera tratamos de centrarnos en la media de la distribución y de la población; aislamos el problema que tenemos desde un principio para que los estudiantes no se pierdan ante muchos datos desconocidos. Los estudiantes conocen la distribución normal teórica, reconocen los parámetros que la identifican y son capaces de realizar cálculos utilizando la tabla de valores de dicha distribución.

8. **¿Qué distribución siguen las medias muestrales?**

Esta pregunta se realiza aquí en una situación concreta. Los estudiantes han estudiado de manera teórica y con problemas ficticios la distribución de medias muestrales. Tratamos de ver si son capaces de trasladar la formación recibida a esta situación nueva que da sentido a lo estudiado previamente.

9. **Buscamos un intervalo de la distribución normal que encierre el 95% de todas las medias que podamos calcular.**

    a. **Se trata de un intervalo característico.**

    b. **Busca el valor superior del intervalo para el caso concreto de los datos que tenemos de nuestra distribución.**

    c. **¿Qué harías con la media que desconoces?**

    Si la sustituimos por la media muestral, lo que hacemos es CONFIAR en que la media de la población esté dentro del intervalo que encontremos. 95% es la CONFIANZA que fijamos de tener la media de la población dentro.

    d. **¿A todos les dio el mismo número? ¿Por qué? ¿Está mal?**

e. La media de la población es 170'76. Indica cuántos la tienen en su intervalo. Comprobar que se trata de un 95% de los casos.

En este momento aparece el intervalo de confianza. El profesor tiene aquí una labor muy complicada, pues tratará de hacer ver a los estudiantes cómo un intervalo característico pasa a denominarse intervalo de confianza. Muchos de los libros de texto analizados no profundizan en esta explicación y van directamente a mostrar una fórmula con la que calcular el intervalo de confianza. La explicación que va a seguir el profesor será la siguiente:

Tratamos de buscar "d" que cumpla:

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq d) = 0{,}95$$

Con esto aseguramos que el 95% de las medias de las muestras se encuentren a una distancia desconocida d , que pretendemos aproximar y que esté suficientemente cerca de la media poblacional.

$$P(-d \leq \bar{x} - \mu \leq d) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{-d}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0{,}1)$ *Sea cual sea la media poblacional, pues no depende de su valor.*

Recordemos que la desviación típica y n son conocidos.

Buscamos los valores, en la N(0,1) que encierran esa probabilidad y que coinciden con los valores críticos para dicha probabilidad.

Lo que obtenemos es la distancia que habrá entre las medias con probabilidad 0,95

Deshaciendo totalmente la desigualdad obtenemos la fórmula del intervalo de confianza comúnmente utilizada.

10. **Ahora se trata de encontrar una fórmula que nos dé el valor superior de dicho intervalo. ¿Qué se te ocurre hacer?**

11. **Busca también la fórmula para el valor inferior del intervalo.**

Estas cuestiones tratan de extraer las fórmulas que conocemos para el cálculo de los intervalos de confianza, aplicando lo anteriormente explicado.

12. **¿Qué amplitud tiene nuestro intervalo? O lo que es lo mismo, ¿qué distancia hay entre los extremos de los intervalos?**

Anteriormente hablamos de que en toda estimación se comete un error. Tratamos ahora de ver que, independientemente de la media que hemos elegido de la muestra, todos tenemos un intervalo con la misma amplitud. Todos tienen la misma distancia entre los extremos. Les trataremos de pedir que analicen por qué ocurre esto, qué estamos haciendo todos por igual para que nos dé el mismo valor.

13. **La amplitud ¿varía entre nosotros? Ese dato es el ERROR.**

Daremos nombre a ese valor común a todos los resultados, la amplitud del intervalo es el error que estamos cometiendo en nuestra aproximación.

14. **¿Qué datos influyen en este error? ¿Qué hemos necesitado para construir el intervalo? ¿Puedes dar la fórmula de cálculo del error cometido?**

Volveremos a analizar los datos que intervienen en el cálculo de dicho error para aislarlos y poder comprender cómo funciona.

15. **¿Qué datos necesitamos conocer para calcular el intervalo de confianza?.**

Definimos como Intervalo de Confianza, de confianza α%, aquel que en una muestra repetida contiene el valor real de la media poblacional con una probabilidad igual a la confianza que prefijamos para construirlo.

Veamos cómo afecta al intervalo de confianza los datos que entran en juego.

16. **Ahora supongamos que cambiamos el nivel de confianza al 99%. ¿Qué le pasará al nuevo intervalo de confianza?**

Ahora que ya conocemos cómo calcular un intervalo de confianza trataremos de ver cómo varía éste cuando cambiamos la confianza. Los estudiantes tienen que llegar a la conclusión que cuanta más confianza consideramos mayor es el intervalo y mayor es, por tanto, el error que estamos cometiendo.

17. **Si cambiamos el tamaño de la muestra, ¿cómo varía el error cometido? ¿Y en consecuencia, qué ocurrirá con el intervalo de confianza?**

En cambio, con el tamaño de la muestra las cosas cambian, cuantos más datos tengamos más podremos afinar en nuestro intervalo, más pequeño será y con más confianza podemos decir en qué intervalo se encuentra la media poblacional.

18. **Y si en vez del error modificamos el nivel de confianza, ¿qué ocurriría con el intervalo? ¿Y con el error?**

19. **Sobre los intervalos de confianza:**

    a. **Si aumentamos el nivel de confianza, ¿aumentará la cantidad de datos que tenemos en el intervalo? ¿o lo que aumenta será el número de decimales?**

    b. **¿Qué significa este intervalo?**

    c. **¿Qué significa el nivel de confianza?**

Estas dos últimas cuestiones tratan de sistematizar todo lo que hemos ido viendo a lo largo de esta sesión para que los estudiantes tengan claro el trabajo que se ha realizado.

Hasta aquí hemos descrito el trabajo previo de preparación de las sesiones encaminadas hacia la construcción del intervalo de confianza. En esta preparación se puede observar que el profesor tratará de hacer partícipe a los estudiantes en la construcción de los objetos matemáticos que se pretende conocer y, partiendo de sus conocimientos previos, llegar a construir de manera guiada los nuevos conceptos.

3.4.3 Descripción de las sesiones

La propuesta de enseñanza se llevó a cabo durante cuatro sesiones lectivas. Las sesiones fueron grabadas por el profesor, y los estudiantes desconocían este hecho. Esto se hizo así para que los estudiantes no se avergonzaran y que de esta forma se viera limitada su intervención durante la clase. Al acabar las sesiones, se les explicó lo que había sucedido y dieron su consentimiento para seguir adelante con este trabajo.

A las sesiones acudieron todos los estudiantes matriculados y lo hicieron de manera constante durante los días que tuvo lugar el experimento.

Analizaremos diferentes episodios singulares que tuvieron lugar durante el desarrollo de las sesiones. Entendemos por episodio singular aquel que supone un punto de interés para la investigación que estamos llevando a cabo.

SESIÓN 1.

El profesor empieza explicando cómo va a ser el trabajo durante las próximas sesiones pues, a partir de ahora, los estudiantes tendrán que exponer qué van realizando y resumir sus reflexiones. De esta manera pretendemos que el propio estudiante utilice su vocabulario matemático, trate de incorporar nuevos términos y, además, pueda comprobar sus avances leyendo sus informes.

La primera sesión trató sobre la media y la muestra. El profesor tratará que los estudiantes interpreten la media como valor que resume la información de una tabla, y lo adecuado del azar para seleccionar datos de un conjunto muy grande.

A) LA MEDIA

Vamos a comenzar otro tema y lo que voy a hacer es repartir una hoja donde se muestra una serie de estaturas. Las estaturas de 180 estudiantes. Les dejo la hoja esta y les voy a explicar lo que vamos a ir haciendo ahora.

A ver, en esta hoja tienen 180 estaturas. Imagínense que alguien ha llegado y ha empezado a medir a alumnos de 2º de Bachillerato y 180 alumnos les ha dado la altura, la estatura que tienen en esta hoja. El problema que yo les planteo ahora es que quiero resumir estos datos, quiero resumir la información que me dan estos datos.

Quiero que en la libreta, por parejas vayan discutiendo de qué manera podemos resumir esta información. Con todo lo que ustedes saben de estadística, con todos los conocimientos que ustedes tienen qué se les ocurre que podríamos hacer para resumir la información contenida en estos datos. Que podrían ser 180, podrían ser 2000, podrían ser 4000. Tenemos que intentar buscar cómo sacar información de aquí. ¿Entienden la pregunta? Entonces traten de ver qué se les ocurre hacer. Intente discutirlo ustedes por parejas, *intenten explicarlos en la libreta primero escribimos y luego expondremos qué se les ha ido ocurriendo.*

Después de esta introducción, los estudiantes se ponen a discutir sobre cómo extraer la información que se les pide.

En adelante denominaremos A1, A2, A3, A4, A5 a los alumnos que intervienen durante el desarrollo de la clase y P a la intervención del profesor.

La Alumna 1 es una alumna bastante participativa, con mucho interés por la materia, y a la que dedica mucho esfuerzo. Analizando las respuestas que va dando a lo largo de toda la sesión encontramos lo siguiente:

Tras la explicación de lo que queremos buscar, dada por el profesor, la alumna A1 se plantea lo siguiente:

> Alumna 1 (A1). *¿Cómo se llamaba aquello que hacíamos? ¿Qué es lo que te dije que hacía antes? Que hay 35, 175 y lo multiplicábamos. No me acuerdo. Que poníamos unos datos a la derecha.* (Tabla de frecuencias) … *Hacer una tabla de frecuencias. Agrupar los datos que se repitan y así no tenemos esto todo largo.*

En un primer momento, la alumna A1 piensa que cuando se le pide un resumen de la información, se está haciendo referencia a ordenar la información mediante una tabla.

La alumna A3 interviene bastante a lo largo de esta sesión, pero lo hace de manera diferente. Al principio la estudiante indica que se debe añadir la edad que tienen las personas a las que se les ha medido la estatura:

> *A3: La edad… para no fijarme en todas las estaturas sino el que tiene la edad y dentro de la edad , sabes los que?, dentro de una edad está el que tiene…*
>
> …
>
> *A3: Pero a todos no les asignas lo mismo a todos… porque la probabilidad de que todos tengan … aquí hay hasta 22*

Ella interpreta que si los separamos por edades podremos abordar mejor los datos. De la misma manera que la alumna A1, está pensando en organizar los datos en una tabla de frecuencias, en donde aparecieran por edades y así poder agruparlos mejor.

El alumno A5 presenta otro tipo de razonamiento sobre cómo resumir los datos:

> *A5: Yo pienso más o menos lo que han dicho. Pero los agrupamos en un intervalo de un valor medio. A ver, lo leo textualmente: [texto] agrupamos los valores en un intervalo desde el valor más pequeño y miramos la cantidad de números que hay en el intervalo en este caso de 5 cm y los situamos en una tabla de frecuencias. Ventaja es que a la hora de calcularlo tendremos*
>
> Profesor (P)*: O sea, que el problema sería tener que agrupar todo eso en ese intervalo y eso no es sencillo.*
>
> *A5: Y encima cuando agrupas… cuando agrupas más los números para calcular desviación típica, media y todo eso da mal. La media sí, lo demás no. Cuando agrupas los números en torno a diez o en torno a quince o en torno hasta cinco va a dar mal.*
>
> *P: Pero un problema que está surgiendo aquí, el de la exactitud. Este problema nos preocuparía, te preocuparía mucho que el valor no fuera muy exacto.*
>
> *A5: Bueno. Depende del estudio también.*
>
> *P: Vamos a ver. Si estamos calculando estaturas medias de Bachillerato, ¿es muy preocupante que la estatura media no sea exacta?*
>
> *A5: No.*
>
> *P: Habría una cantidad que a lo mejor estaríamos dispuestos a aceptar como media y otra que no. Entonces, yo creo que los tiros, los tiros tienen que ir por ahí, por la media. ¿Vale? Porque la media hemos hablado, el año pasado halamos que la media es un valor que resume perfectamente toda la información, ¿vale? Bien. La desviación típica no resume. La desviación típica , ¿qué hacía?. ¿Recuerdan? Si los datos están muy separados o juntos a la media. No nos están resumiendo. Nos están diciendo cómo están los datos que es lo que a mí me interesa.*

A5: Cogemos la estatura más pequeña y la más alta y las dividimos entre dos. Y hacemos la estatura media entre los dos y nos va a dar un número no muy … a lo mejor no muy exacto pero a lo mejor más o menos lo que te va a dar la media exacta.

Se está planteando hacer el cálculo a través de una tabla de frecuencias agrupada en intervalos. Surge aquí la idea de exactitud, que hasta ese momento nadie había planteado. Lo que da pie al profesor a introducir dicho concepto que en estadística es muy importante. Para él no es muy preocupante la exactitud, pero por otro lado cree que haciendo la media entre los valores extremos podremos conseguir un resultado aproximado del valor que buscamos. Por tanto ha propuesto un medio de calcular una aproximación que nos resuma los datos.

Observamos que para los estudiantes resulta difícil lo que se les está pidiendo, entre otras cosas, porque el análisis de datos de esta forma no se ha realizado previamente. Están habituados a organizar datos en una tabla de frecuencias para el cálculo de parámetros, pero no en el estudio de información a través de muestras. Esto dificulta más que los estudiantes piensen en los datos en su conjunto y en que cada uno contiene información del total.

Más tarde, cuando el profesor les revela que el valor que buscamos es la estatura media, la estudiante responde:

A1: El que más se repite

La alumna A3 interviene de la siguiente forma:

A3: Yo tengo otra teoría.

…

A3: Hacer la media de todos los números, para tener la media. Luego hacer lo de… es que no sé cómo se llama… lo de la sigma. Lo de la beta sigma que era sumando xi

…

A3: Sí. Menos fi partido por n.

…

A3: Uno hace la media de todos los datos y el otro halla la distribución…¿cómo se llama?...la desviación típica. Que es sumar lo de xi menos fi partido entre n.

En este caso, la estudiante, a pesar de haberle indicado que debemos buscar la estatura media, se centra en el cálculo de la desviación típica. Y expresa este parámetro a través de la lectura parcial de la fórmula. Se trata de aferrar a aquello que conoce, y además busca aquello que, para ella, es difícil, pues no termina de entender qué es lo que estamos buscando.

B) LA MUESTRA

El profesor, en su sesión inicial, tratará de analizar de qué forma podemos seleccionar ahora la muestra y qué entienden los alumnos por azar. Para los estudiantes se trata de algo novedoso, pues en ningún momento han tenido que realizar la selección de una muestra al azar.

El alumno A2 será quien dé con lo que el profesor buscaba:

P. Vamos a ver. Si nosotros tenemos una gran cantidad de elementos, ¿qué se suele hacer para estudiarlos?

A2. Coger una muestra.

Sobre la idea de representatividad que debe tener le muestra también se manifiesta el alumno A2:

A2. Pero si coges 20 a lo mejor escoges los 20 más altos y entonces la media es muy irreal.

Entiende que el cálculo se puede alejar del valor real y que hay que controlar la forma de selección de la muestra.

A partir de este momento se les proponen que decidan cómo realizar la muestra del conjunto de datos.

La alumna A1 propone:

A1. Pues coges el más pequeño y el más grande y el del medio.

Esta estudiante nombra los valores extremos y el central para el cálculo de la media.

El alumno A5 propone lo siguiente:

A5. Escogemos 20 alumnos al azar. 20 como mucho.

P. ¿Por qué 20?

A5. Entonces 10 o coges los más altos.

P. ¿Por qué los más altos, por qué no los más pequeños? Explica por qué. ¿Qué significa al azar? ¿cómo podemos escogerlos al azar? ¿De qué manera? ¿Me tengo que fijar en la estatura?

A5. Sí. Pues … si ves que en la gente de una clase hay 3 altos y 20 pequeños y de los pequeños te salen solo unos cuantos pues tienes que coger más pequeños

P. O sea que coges los pequeños

A5. Coges un poco de todo.

P. O sea que te tienes que fijar.

En la explicación podemos leer entre líneas que trata de hacer una selección que se parezca a la población que tenemos: si hay altos tienen que aparecer altos, y lo contrario si lo que prevalece son estaturas bajas.

Esto se confirma en lo que sigue diciendo más tarde:

A5. Yo creo que con una tabla tan grande se tiene que coger en intervalos de diferentes números. Intervalos de 160 a 165. A lo mejor otro número de ahí. Que a lo mejor es 500 escoges en 4 ó 5. Luego 5 a 170 y después otros 5, al azar.

P. Al azar.

A5. Al azar, pero que sea un intervalo que a lo mejor que se sepa que no vaya coger al azar un 180 y luego un 5.

Y también añade el problema de la exactitud que a él en particular le preocupa:

P. Pero ¿es importante lo de los intervalos?

A5. Porque la media te va a dar más o menos exacta.

P. Pero tú sabes ¿de qué hay más y de qué hay menos? Porque para eso tendrías que saberlo, ¿no? Para saber que te va a dar más exacto o menos exacto.

A5. La media te va a dar más o menos… exacta.

Entiende que para que obtener un resultado más cierto debemos controlar de alguna manera que la muestra se parezca a la población de partida. Este estudiante trata de compensar los resultados de la muestra para que presente cierto parecido con la población de partida. Esta situación refleja que el estudiante necesita que la muestra sea representativa de la población, es decir, que debe imitarla en sus características principales. Se trata de una respuesta enmarcada dentro de la *heurística de la representatividad* descrita por Kahnemann et al. (1982).

Más adelante aparece el término azar, que ella describe diciendo “a ojo”:

P. A ojo qué significa.

A3. Al azar.

En el momento que se plantea hacer una selección de varias estaturas vuelve sobre la idea de conocer las edades para poderlos agrupar y escoger a través de la edad. No termina de imaginar que todos pueden ser de la misma edad.

A3. Yo le asignaría una edad a cada uno.

P. ¿Para qué?

A3. Para agrupar en mi edad. Haría grupitos. Y de esos grupos escoger una estatura media de cada uno. El más pequeño y el mayor.

P. Por edades.

A3. Por edades. No de estatura pero en el intervalo de la edad. Es que no sé explicarlo.

P. Pero vamos a ver, ¿qué interés tiene la edad? ¿Qué información te da a ti la edad?

A3. La edad no…La edad por agruparlos nada más. No porque … al escoger uno de esos es cuando hago eso.

P. Imagínate que la primera,…, a ver imagínate que las primeras dos columnas son de 17 años, después las otras dos de 18 y la otra de 19.

A3. Pues escogería de los de 17 el más pequeño y el mayor…

P. ¿No tendrías la misma dificultad, por muy agrupados que los tengas? O que te diga yo todos estos son de 17 años. Ya los tienes por edad. ¿Qué haces ahora? ¿Qué hacemos si todos estos son de 17 años?

[comienzan a discutirlo, siguen pensando en coger el mayor y el menor]

P. Por edad. Pero bueno. Yo te vuelvo a decir lo mismo. Imagínate que todos son de 17 años. Ya sabes el dato de que todos tienen la misma edad.

A3. Escogería el intervalo con el menor y el mayor. Y haría el intervalo ese.

P. El menor y el mayor.

A3. Haría un intervalo de 17 años con el menor y el mayor.

P. O sea que sólo escogerías el más pequeño, el más bajito y el más alto harías la media y ya está. Bien. Ella coge dos datos para hacer la media. Y tiene una media.

La idea que transmite esta alumna es que la forma de seleccionar la muestra debe ser a través de agrupar los datos por edad y de ellas escoger el más alto y el más bajo, con los que sacaría la media. Ha limitado el cálculo de la media al cálculo con dos datos, no lo extiende más allá. Por otro lado, no termina de entender que la edad no es un dato relevante. Necesita añadir un elemento diferenciador para poder seleccionar la muestra.

Un elemento nuevo que aparece es que la alumna A3 tiene claro que cuantos más datos seleccionemos más exacta será la media:

P. ¿Podríamos mejorar la media de ella?

A3. Cogiendo todos los datos ¿no?

…

P. Tú pondrías más. ¿Cuántos más pongamos qué pasa?

A3. Más aproximado está.

> *P. Más aproximada está la media pero también más cuentas tendremos que hacer. Entonces tenemos que pensar en una cantidad …*
>
> *A3. Lo que saldría más o menos exacto, exacto sería escoger 180 son 90. Así 90 sería … la mitad, pero sigue siendo…*

Como hemos dicho, la estudiante reconoce que cuantos más datos incluyan, más aproximada será la media a la real. Aunque, podemos observar las dificultades que tiene cuando hace uso de vocabulario matemático. No tiene facilidad para expresar los términos matemáticos, no está habituada, en general, a tener que hacer explícitas sus ideas en voz alta, en la clase de matemáticas.

Los estudiantes reconocen que hay que hacer una selección pero no son capaces de describir la manera de hacerlo. Finalmente, es el profesor quien les da la idea de cómo realizar la selección: hay que hacer un sorteo. Aquí termina la sesión y se les plantea que piensen la forma de realizar dicho sorteo.

SESIÓN 2.

Durante esta sesión se trabajará el uso de la calculadora para extraer la muestra aleatoria simple. Analizarán qué tenemos que hacer y cómo se obtienen los datos con la calculadora.

SORTEO AL AZAR CON CALCULADORA

La sesión comienza con un resumen de lo ocurrido el día anterior y se pide que expliquen cómo realizar el sorteo. El alumno 5 será quien nos lo describa:

> *A5. Metes las papeletas en una urna o lo que quieras y sacas un número 14 ó 25 y le das la altura que tenga.*

El profesor les plantea que lo hagan utilizando la calculadora. El problema que surge ahora es cómo numerar, si de 1 a 180 o de 0 a 179. Les hace ver si el cero sale en la calculadora o no y a través de este experimento los estudiantes se dan cuenta que tienen que hacer la numeración desde el 0 al 179.

Una vez todos los alumnos saben cómo seleccionar los datos al azar utilizando la calculadora se ponen en ello, para luego calcular la media de los datos que han seleccionado. Pero vuelven a tener la duda sobre la exactitud del resultado. Todos los cálculos matemáticos que han hecho siempre son exactos, con lo que dudan de lo que están haciendo.

A2. Profe. Entonces muy real no va a dar. Porque puede ser que te toquen los más altos. Eh profe? Puede ser que te toquen los más altos. Entonces la media no va ser real.

P. ¿Qué dijimos el otro día? ¿La media va ser real? ¿Qué tenemos que hacer para que nos dé exacto?

A2. Hacerlo con todos.

P. Desde que no lo hagamos con todos no lo estamos haciendo exacto.

A2. Sí, pero a lo mejor pueden salir más chicos y si te salen dos o tres más altos te comes a todos los bajos y no…

El problema de la exactitud tiene que ver con la representatividad de la muestra que escogemos. Para esta alumna A2, el hecho de que la muestra no se parezca a la población hace que no se fie de los cálculos que está realizando para calcular la media.

En esta sesión el profesor también introduce los términos:

P. Van a obtener medias distintas. Entonces, ¿qué ocurre? ¿qué estamos haciendo? No estamos acercando a lo que es real o no. Si nos estamos aproximando, eso ¿cómo se llama? ¿Qué estamos haciendo realmente?

A3. Una aproximación.

P. Una ESTIMACIÓN. Se llama realizar una estimación. ¿Sobre qué valor? Estamos haciendo una estimación de la media. La media real de toda esta población ¿la conocemos?. Una estimación es una aproximación de la media real. La media real no sabemos cuál es.

De esta forma el profesor ha introducido este término, que como sabemos, modifica su significado en el contexto matemático. Por ello, es importante que el profesor lo aclare suficientemente en el aula. En otro momento de la sesión lo vuelve a explicar:

P. Nosotros no sabemos cuánto nos estamos aproximando. Esto ocurre cuando hacemos una estimación … una estimación que se *llama estimación puntual. Estamos buscando una media concreta. Y hemos calculado todos una media distinta pero con la que estamos buscando un número. Eso es la estimación puntual.*

El siguiente paso consistirá en tratar de realizar la estimación mediante el cálculo de un intervalo en el que tengamos cierta certeza de que en él se encuentra la media de la población. Aquí se requiere el uso de una herramienta matemática más potente, como son las distribuciones de probabilidad, y en concreto, el cálculo de intervalos característicos para una probabilidad, en distribuciones normales de media y desviación típica conocida. El profesor dedica el final de la sesión a repasar estos conceptos, para utilizarlos en las sesiones siguientes.

SESIONES 3 Y 4

Se parte del resumen de la sesión anterior. Durante esta sesión se analizará cómo, a partir del intervalo característico, aparece el intervalo de confianza. Analizarán las similitudes y diferencias. Para ello tendrán que realizar los cálculos de varios intervalos de confianza. Para llevar a cabo esto se requerirá de dos sesiones.

INTERVALO DE CONFIANZA A PARTIR DEL INTERVALO CARACTERÍSTICO

Ahora se les plantea que busquen un intervalo característico que deje el 90% de los datos dentro y que esté centrado en la media que ellos han calculado con sus 20 datos. De aquí sale la manera de calcular un intervalo de confianza. Como no conocemos el valor de μ sustituimos el valor por la media de la muestra que hemos extraído, de esta forma pasamos de un intervalo centrado en la media poblacional a uno centrado en la media muestral, construido con la CONFIANZA de que la media poblacional esté dentro en el 90% de los casos.

$$a = \mu + z_{\alpha/2}. \sigma/\sqrt{n}$$

$$b = \mu - z_{\alpha/2}. \sigma/\sqrt{n}$$

Los estudiantes hacen los cálculos y se exponen en la pizarra todos los resultados obtenidos. Ahora tratan de analizarlos para ver las semejanzas y diferencias: observan que todos tienen 6 unidades de amplitud y hay dos intervalos que dan resultados alejados del resto.

La sesión 3 los estudiantes desarrollan los cálculos para extraer dos muestras de 20 datos y calculan intervalos característicos para dichas muestras para 90% y 99% de probabilidad. Como se trata de un procedimiento nuevo, los estudiantes van muy lentamente en sus cálculos, agotando los 55’ de la sesión.

El día siguiente, ya con los cálculos hechos, nos dedicamos a analizar lo que hemos hecho y ver qué ocurre con los intervalos que hemos ido obteniendo. Analizamos las similitudes y diferencias que existen entre ellos. El profesor les indica cuál es la media real y les pide que comprueben cuántos de los intervalos calculados contienen dicho valor. El resultado es que la contienen todos salvo dos, que tienen valores extremos, con lo que hemos acertado en un 86%. El profesor les explica que cuantos más intervalos extraigamos más nos acercaremos al 90% que nos hemos fijado.

El profesor les pide que hagan lo mismo pero ahora para el 99% y que analicen qué cambios se produce en los intervalos y qué elementos permanecen invariables.

> *P. De este intervalo que nosotros hemos encontrado antes, ¿qué es lo que va a cambiar ahora? De este intervalo que encontramos con el 0’90 ¿qué datos cambian?*
>
> *A7. El 2’58.*
>
> *P. Este número. Este número hay que cambiarlo. Si yo les pido una confianza mayor entonces ahora tendremos que cambiar este valor.*
>
> *A10. Y tiene que ser más grande.*
>
> *P. Es mayor este número.*

Los estudiantes reconocen que este dato varía con la confianza y que cuanto mayor es la confianza mayor será el valor crítico. Pero también se dan cuenta de los cambios que se están produciendo con otros elementos de los intervalos, así el alumno A5 dice lo siguiente:

> *P. Al aumentar la confianza ¿qué les pasa a los intervalos?*
>
> *A5. Que en el paso que estaba antes va a estar la estatura media.*
>
> *P. Se amplía. O sea que se hace más grande. Lo que está pasando es que, ¿se acuerdan que ayer estuvieron viendo que la diferencia era de 6? ¿Hoy de cuánto es?*

A5. De 9´4.

P. De casi 10. Entonces para nosotros para aumentar la confianza qué tenemos que hacer: pues coger un intervalo más grande.

A5. Es lo mismo. Lo que pasa el intervalo es mucho más grande. Pasa lo mismo, en realidad estamos consiguiendo un intervalo más grande…

P: Para conseguir la misma confianza con menos datos el intervalo de confianza tiene que ser mayor. Con lo que afinamos peor en la estimación de la media.

El estudiante A5 ha encontrado la relación entre la confianza y la amplitud del intervalo.

También el profesor les hace caer en la cuenta de que al aumentar la confianza, son más los intervalos que contienen la media, con lo que hemos mejorado nuestra proporción de intervalos con la media contenida en ellos:

P. A ver este es uno de los que no cogía ayer la media. La media de la población se las dije 170,76. Fíjense que este intervalo, todavía, al aumentar la confianza sigue sin contener la media de la población. Pero el otro, sí lo contendrá y pasamos de tener 2 a tener 1 que no contiene la media de la población al aumentar la confianza.

Ahora pasan a estudiar lo que ocurre al variar el tamaño de la muestra. Analizarán intervalos de confianza para una muestra de 5 datos:

P. Ahora vamos a hacer el otro ejercicio que les había propuesto. ¿Qué pasa cuando hacemos muestras más pequeñas? ¿Qué hemos descubierto? Al aumentar la confianza…

A2. Se amplía la separación de las, de los números extremos…

P. Se amplía el intervalo, ¿no?. Al aumentar la confianza se amplía el intervalo. Bien. Vamos ahora a ver qué pasa si nosotros, el tamaño que cogemos de la muestra es más pequeño. Vamos a hacerlo una vez cada uno nada más. … Vamos ahora a hacer un *muestreo de cinco datos nada más. Busquen la media y calculen un intervalo de confianza. Antes lo hicimos de 20, ¿verdad? Ahora con 5 nada más. Vamos a ver qué ventajas tiene.*

P. La amplitud es mayor. Vale. Para el 90%.La confianza es la misma que la que estuvimos haciendo ayer, la confianza es la misma. Hemos hecho menos datos, hemos hecho 5 en vez de 20. Qué pasa, que para conseguir el 90% el intervalo tiene que ser más grande, más grande que el otro. Para conseguir la misma confianza tenemos que hacer el intervalo más grande. Esto quiere decir ¿Qué nos estamos acercando más o nos estamos acercando menos?

A5. Es lo mismo. Lo que pasa el intervalo es mucho más grande. Pasa lo mismo, en realidad estamos consiguiendo un intervalo más grande…

El alumno A5 es el primero en darse cuenta que los intervalos que estamos calculando con menos cantidad de datos tienen una amplitud mayor que los que calculamos con la misma confianza.

A1. Pero cuanto menos intervalo es mejor…

P. Cuanto menos datos (corrige el profesor)

A1. Sí cuanto menos dividamos mejor.

La alumna A1 es la que se ha dado cuenta de que en la división está el elemento que nos indica la amplitud del intervalo.

P. ¿Cuál es la ventaja entonces?

A1. Es mejor dividirlo entre 4 que dividirlo entre 10 o entre 20.

P. Vamos afinando más. Cuando estamos aproximando con más datos aproximamos más la media que cuando lo hacemos con una muestra muy pequeñita. ¿Cuál es el coste para conseguir ese 90% de confianza? Tenemos que hacerlo mayor. Para conseguir ese 90% tenemos que dar un intervalo más grande. Con lo cual, si a mi lo que me interesa es aproximarme mejor a la media tendré que coger más datos.

A2. El inconveniente es que si lo haces con más datos te arriesgas más a que falles.

P. Te arriesgas más.

A2. A que falles donde esté la media.

P. Por qué? Qué significa que falles donde está la media?

A2. Como coges a cinco personas el intervalo es más grande y si coges 20 es más chiquitito y entonces te equivocas. Porque como los coges a la azar…

P. Pero si cojo 5 datos puedo haber cogido 3 datos de personas bajitas y 2 de los altos. Entonces me queda la media por aquí [lo marco en la pizarra]. En cambio si yo cojo 20 datos puede pasarme lo mismo que con los 5 primeros pero con los otros quince me quedan por donde realmente va a estar, con lo cual la media quedaría por ahí [lo marca en la pizarra]. ¿Cuál está aproximando más? El que me está aproximando más es este. ¿Qué pasa con pocos datos? Que desde que tengo pocos datos en seguida hay variación desde que consiga un dato pequeñito se me dispara la media se mueve muchos, se puede ir para arriba o para abajo.

A2. Pero imagínate que la media no esté ahí sino fuera…

P. Pero vamos a ver, eso puede pasar, eso nos pasó ayer con dos intervalos. No logramos coger la media. Es una posibilidad que tenemos. Pero ¿con qué método nos estamos acercando más, estamos afinando más a la media? Cuando tenemos más datos. Es lo que tenemos que poner. Cuando tenemos un muestreo pequeño para conseguir un nivel de confianza necesitamos un intervalo mayor con lo que afinamos menos la media. Y es verdad que está entre este y este, pero estamos afinando peor. Anoten esto, que se nos olvida de aquí al lunes.

A1. Que cuanto más números más apretados…

P. Anoten esto. Para conseguir la misma confianza con menos datos el intervalo de confianza tiene que ser mayor, ¿vale?. Con lo que *afinamos peor la estimación de la media. [Lo repite] La media no la podemos afinar bien. Por eso nos interesa coger una cantidad mayor de datos.*

Aquí los alumnos caen en la cuenta de cómo se relaciona la cantidad de datos y la confianza con el tamaño del intervalo. El profesor quiere dejar claro que, para un confianza dada, cuantos más datos cojamos el intervalo de estimación de la media será más pequeño, con lo que afinamos más en la predicción de dónde está la media poblacional. Por otro lado, si la cantidad de datos es pequeña, para mantener esa confianza el intervalo tiene que tener una amplitud mayor, con lo que la estimación es peor.

Con estas sesiones hemos tratado de mostrar cómo la enseñanza de los términos estadísticos, a través del uso de datos reales, puede ser mucho más constructiva para los estudiantes. Además de ayudar a contextualizar el trabajo que se realiza desde la estadística. Los términos estadísticos aparecen a lo largo de las sesiones pero lo hacen de manera natural, de forma que se afianzan determinados procedimientos matemáticos que cobran sentido cuando trabajamos con datos reales.

CAPÍTULO 4.

RESULTADOS

Hasta ahora hemos hecho una descripción de cada una de las fases que han formado la investigación.

En este capítulo presentamos los resultados que se han obtenido en cada una de las fases de investigación. Comenzamos analizando cómo tratan los diferentes términos relativos a la inferencia los libros de texto seleccionados. Veremos si el tratamiento que éstos hacen está en consonancia con lo descrito por el Diccionario de la Real Academia o con los Manuales Universitarios.

Seguidamente analizamos las respuestas que los estudiantes han dado al cuestionario de comprensión de los términos estadísticos. Tratamos de clasificar las respuestas dadas por los distintos estudiantes según la taxonomía SOLO.

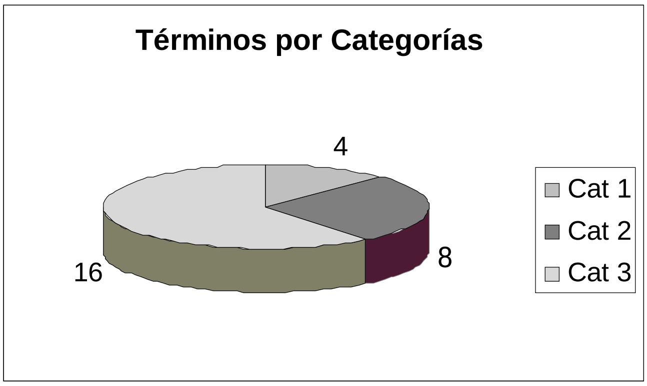
Por último, analizamos las respuestas del alumnado durante el desarrollo de la propuesta de enseñanza.

4.1 Términos estadísticos analizados en los libros de texto

En total hemos analizado 28 términos relativos a la Estadística y la Inferencia Estadística. Como indicamos en el apartado 3.2, los términos estadísticos que aparecen en Bachillerato se pueden clasificar de la siguiente manera:

Categoría 1 **Mismo significado en ambos contextos**	**Categoría 2** **Distinto significado en ambos contextos**	**Categoría 3** **Significado propio en el contexto matemático**
Estadística Población Individuo Tamaño de la muestra	Media Estimación Muestra Probabilidad Inferir Distribución Riesgo Significativo	Estadístico Parámetro Muestreo aleatorio Nivel de confianza Error máximo admisible Desviación típica Normal Sesgado Eficiencia Proporción muestral Contraste de Hipótesis Hipótesis Nula Nivel de Significación Hipótesis Alternativa Error de Tipo I Error de Tipo II

Gráficamente, la distribución de los términos es la que aparece en la siguiente figura.



Cantidad de términos por cada categoría

A continuación pasamos a analizar cómo aparecen estos términos en los diferentes libros de texto analizados. Nos interesa conocer si las definiciones que aportan se acercan a las dadas por los Manuales Universitarios, si los posibles errores conceptuales que surgieron en algunas definiciones del contexto cotidiano se evitan, o si, por el contrario, los libros de texto no han tenido en cuenta los contextos de trabajo y no ha cuidado las definiciones que se dan de los términos.

Para llevar a cabo este análisis hemos rescatado las definiciones aportadas en apartado anterior agregando cómo aparecen dichos términos en cada uno de los libros de texto. Recordemos que los libros de texto seleccionados son: Anaya (T1), SM (T2), Santillana (T3) y Edelvives (T4).

Categoría 1: Mismo significado en ambos contextos

Término:	**ESTADÍSTICA**
Diccionario	Manuales Universitarios
Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.	**No lo definen explícitamente**
TEXTOS	
T4.- “*la ciencia que trata de obtener, organizar e interpretar hechos numéricos; dentro de ella podemos distinguir dos ramas: la estadísticas descriptiva y la estadística inferencial*”.	

<table>
<tr><td colspan="2">Término: POBLACIÓN</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>1. Acción y efecto de poblar
2. Conjunto de los individuos o cosas sometido a una evaluación estadística mediante muestreo.</td><td>ME.- Conjunto de todas las mediciones de interés para quien obtiene la muestra.
MO.- Un grupo entero de individuos sobre el que queremos información se llama población.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- “Población o universo es el conjunto de todos los individuos objeto de nuestro estudio”.
T2.- “es el conjunto de todos los elementos que poseen una determinada característica. En general supondremos que la población es muy grande.”
T3.- “cuando una investigación estadística va referida a un conjunto, colección o colectivo de elementos, este colectivo se llama población.”
T4.- “el conjunto homogéneo de personas, animales o cosas sobre el que se va a realizar un estudio”.</td></tr>
</table>

Si comparamos estas definiciones con las dadas en los diferentes textos, cabe destacar la definición dada en T4, donde se señala que el conjunto sea homogéneo. Se trata de un requisito que no es necesario, y podría inducir a errores conceptuales posteriores. Debemos tener en cuenta que pudiera ser que la finalidad del estudio estadístico fuera determinar cierta característica homogénea en la población.

Término: **INDIVIDUO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Persona cuyo nombre y condición se ignoran o no se quieren decir. 2. Cada ser organizado, sea animal o vegetal, respecto de la especie a que pertenece.	**MO**.- Los individuos son los objetos descritos por un conjunto de datos. Los individuos pueden ser personas, pero también pueden se animales o cosas
TEXTOS	
T4.- Lo define como "*cada uno de los elementos de la población*". Aunque en ningún momento se utilice este término.	

Los demás libros de texto no utilizan este término.

Término: **TAMAÑO DE LA MUESTRA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Mayor o menor volumen o dimensión de algo.	**MO**.- *Una muestra aleatoria simple de tamaño n consta de n individuos de una población.*
TEXTOS	
T1.- No define directamente este término, aunque lo utiliza por primera vez en este libro diciendo: "*Hay dos aspectos de las muestras a los que deberemos prestar mucha atención: su **tamaño** y **cómo se realiza la selección** de los individuos que la forman*". **T2**.- Introduce por primera vez este término en los ejercicios. Aparece en la exposición teórica más adelante, pero siempre dando por entendido su significado. No lo define previamente. **T3**.- El "*tamaño de la población*" es "*el número de elementos o unidades estadísticas que la componen*". **T4**.- "*número de individuos que la forman.*"	

Categoría 2: Distintos significados en ambos contextos:

Término: **MEDIA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Que está entre dos extremos, en el centro de algo o entre dos cosas. *2.* Número que resulta al efectuar una serie determinada de operaciones con un conjunto de números y que, en determinadas condiciones, puede representar por sí solo a todo el conjunto.	**ME.-** La media aritmética de un conjunto de n observaciones y_1, y_2, y_3, …, y_n , es igual a la suma de las observaciones dividida entre n. **MO.-** Para hallar la media de un conjunto de observaciones, suma sus valores y divide por el número de observaciones.

TEXTOS

T1.- "*Si en lugar de la suma de los resultados hallamos sus **medias** (es decir, la suma de resultados la dividimos por el número de dados)…*".

T2.- "*Media muestral:* $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ "

T3.- "*Si X es una variable aleatoria continua que toma valores en [a, b] y f(x) es su función de densidad: E[X]=* $\int_a^b xf(x)dx$ ".

T4.- "L*a media o esperanza matemática de la variable aleatoria discreta X,* □*, viene dada por la expresión:*

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ "}$$

Y si "*X es una variable aleatoria continua que toma valores en el intervalo [a,b] y f(x) es su función de densidad: La media o esperanza matemática, μ, de la variable X se calcula como:*

$$\mu = \int_a^b xf(x)dx \text{ "}$$

Añade que "*la media representa el promedio de todas las posibles observaciones; por tanto, es una medida de centralización que trata de describir con un único número la localización general de un conjunto de valores*".

Hay libros de texto que suponen que este término ha sido trabajado en cursos anteriores, y no lo definen. Además aparecen muchos tipos diferentes de medias en los libros de texto: muestral, poblacional, distribución.

La media de una serie de datos es la que aparece con más frecuencia y que es la que aporta el DRAE, mientras que los otros tipos de medias son las que difieren del contexto cotidiano.

Término:	**ESTIMACIÓN**
Diccionario	Manuales Universitarios
Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo.	**ME.-** No lo define **MO.-** No lo define
TEXTOS	
T1.- "*Cuando valoramos un parámetro de la población a partir de la muestra realizamos una estimación.*"	

Sólo uno de los libros de texto trata este término y lo define. Como hay diferencia entre el diccionario y la definición dada en el Manual universitario lo catalogamos en esta categoría. Debemos fijarnos que el diccionario habla de valorar, pero también de considerar, con lo cual puede generar en el alumnado un error de concepción del término y es necesario que se aclare, como ha hecho el libro de texto, aportando su definición correcta.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: MUESTRA</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>1. Porción de un producto o mercancía que sirve para conocer la calidad del género.

2. Parte o porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como representativa de él.</td><td>ME.- Una muestra es un subconjunto de mediciones seleccionadas de la población de interés.

MO.- Una muestra es la parte de la población que realmente examinamos con el objetivo de obtener información.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- “un subconjunto extraído de la población. Su estudio sirve para inferir características de toda la población”. “Sin embargo, si la muestra está mal elegida (no es representativa)…”

T2.- “un subconjunto de la población”. Para que “un estudio sea fiable habrá que cuidar mucho la elección de la muestra, con el fin de que sea realmente representativa de la población”.

T3.- “parte de la población, debidamente elegida, que se somete a la observación científica en representación de la misma, con el propósito de obtener resultados válidos para toda la población”. Y que para que “una muestra se considere válida debe cumplir que (…) sea representativa”

T4.- “Subconjunto de la población”. Se debe “hacer una buena selección”.</td></tr>
</table>

Ya observamos que había diferencia entre las definiciones dadas de este término en cada uno de los contextos de trabajo. Estudiando lo que aparece en los libros textos observamos que comienzan dando la definición del término, pero añaden complementos a cada una de las definiciones que enturbian y confunden, conduciendo a concepciones erróneas sobre el mismo. Cuando los libros de texto hablan de *fiabilidad, representatividad, validez, buena selección*, se está transmitiendo que buscamos una característica que permita aceptar la muestra como tal. Estos términos funcionan como distractores de la definición original.

Término: **PROBABILIDAD**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Verosimilitud o fundada apariencia de verdad. 2. En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.	**MO.-** La probabilidad de cualquier resultado de un fenómeno aleatorio es la proporción de veces que el resultado se da después de una larga serie de repeticiones. **ME.-** A cada punto del espacio muestral le asignamos un número, llamado la probabilidad de Ei y denotado por el símbolo P(Ei).
TEXTOS	
T1.- "*Al realizar reiteradamente una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un cierto suceso, fr(S), va tomando distintos valores. Estos valores al principio sufren grandes oscilaciones pero, poco a poco, se van estabilizando (oscilan cada vez menos). Cuando N crece mucho, se aproximan a un cierto valor que es la probabilidad de S, P[S].*" **T2**.- SM da las definiciones frecuentista, clásica y axiomática de la probabilidad: "*la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente (…) probabilidad del suceso*". Añade: "*el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles*". Y también escribe: "*Una ley que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de A*". **T3**.- "*Cuando repetimos un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo. Este valor fijo se define como probabilidad del suceso A.*" **T4**.- probabilidad es" *toda aplicación P definida entre el espacio de sucesos S y el conjunto de a los números reales R, tal que a todo suceso $A \in S$ le asocia un número real P(A), al que llamamos probabilidad del suceso A.*"	

En este término observamos que la definición dada en el contexto cotidiano y el matemático no eran exactamente la misma, por entender en el contexto cotidiano el caso de sucesos equiprobables exclusivamente.

Por otro lado, sin justificación aparente, los libros de texto indican que la $\bar{x}$ se aproxima a la media poblacional. No establecen una relación entre esa aproximación y el Teorema del Límite Central, que es quien justifica dicha aproximación y además indica que será mejor aproximación cuanto mayor sea n. (Ley de los Grandes Números).

Debemos tener en cuenta que en Bachillerato la probabilidad se presenta como una función de distribución o de densidad (según sea discreta o continua, respectivamente). Si el estudiante sigue anclado en la ley de Laplace, difícilmente entenderá que la probabilidad pueda venir dada por un área y que se calcule mediante una integral. Se puede generar así un obstáculo para poder avanzar en el conocimiento de este objeto, por promover una concepción equivalente a la que se da en el contexto cotidiano.

En los libros de textos encontramos que se introducen las diferentes definiciones del término según la concepción probabilística del autor. Estas concepciones son importantes, pero más importante es que el alumno las conozca y las interprete como equivalentes.

Término:	**INFERIR**
Diccionario	Manuales Universitarios
Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.	**ME.-** El objetivo de la estadística es hacer inferencias (predicciones, decisiones) acerca de una población. **MO.-**La inferencia estadística proporciona métodos que permiten sacar conclusiones de una población a partir de los datos de una muestra.

En los textos no se da una definición explícita del término.

Creemos que es algo muy relevante que ninguno de los libros de texto más utilizados realice una definición o introducción al concepto de inferir, teniendo en cuenta que es un concepto central y que además es, obviamente, el objetivo fundamental de la Inferencia Estadística. Destaca que se define de manera contradictoria, pues se habla de inferir como deducir a partir de algo. Debemos destacar que los libros de texto no definen este término, con lo que si el alumnado posee la definición según el contexto cotidiano y el libro de texto no aporta una definición correcta los errores conceptuales que puedan tener en torno este término se propagan y no se reparan adecuadamente.

Término: **DISTRIBUCIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de distribuir. 2. Función que representa las probabilidades que definen una variable aleatoria o un fenómeno aleatorio.	**MO.-** La distribución de una variable nos dice qué valores toca y con qué frecuencia lo hace. La distribución muestral de un estadístico es la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población.
TEXTOS	
T1.- No hace una definición de este término aunque lo utiliza habitualmente. **T2**.-*"Los distintos valores de $\overline{x}_i$ dan lugar a una variable aleatoria que representamos por $\overline{X}$. La distribución de los valores de $\overline{X}$ se llama distribución de las medias muestrales por depender de las muestras o distribución en el muestreo de la media."* **T3**.- L*a función $f(x_i)$ que a cada valor de la variable discreta x_i le asigna su probabilidad, recibe el nombre de función de probabilidad o distribución de probabilidad.* **T4**.- F**unción de distribución** para una variable aleatoria discreta como *"la aplicación que a cada valor x_i de la variable le asigna la probabilidad de que ésta tome valores menores o iguales a x_i"*. Y la define de igual forma para una variable aleatoria continua.	

En este término observamos que los libros de texto o no dan la definición del término o bien dan una definición formal del mismo. Son dos situaciones extremas pero que pueden llegar a tener el mismo efecto en los alumnos. En el segundo caso, el libro de texto requerirá articular ejemplos ilustrativos para que la definición pueda quedar clara a los estudiantes, pues la excesiva formalidad en estos niveles tiene el peligro de que pueda ignorarla y por tanto la aportación que la definición está haciendo al concepto es la misma que si no se hubiera definido.

Término: RIESGO	
Diccionario	Manuales Universitarios
Contingencia o proximidad de un daño.	**MO.-** La distribución de una variable nos dice qué valores toca y con qué frecuencia lo hace. La distribución muestral de un estadístico es la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población.

TEXTOS
T2.- Define el riesgo o nivel de significación como *"la diferencia entre la certeza y el nivel de confianza deseado; es decir, 1-(1-α $)=\alpha$ "*.
T3.- No da una definición del mismo aunque lo nombra en algún párrafo.
T4.- El método de estimación por intervalo de confianza permite *"calcular dos valores entre los que esperamos que esté el parámetro buscado con un cierto nivel de confianza, que llamaremos1-α , donde α es el nivel de riesgo fijado de antemano"*.

Anaya no habla de riesgo. Y Santillana lo nombra sin definirlo.

Respecto de este término encontramos que los libros de texto hablan de riesgo o nivel de significación. En este sentido, los libros de texto lo definen para poder aclarar bien el término, pues si no, pudiera generarse confusión con el significado del término en el contexto cotidiano.

Término: **SIGNIFICATIVO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. *Que da a entender o conocer con precisión algo.* 2. *Que tiene importancia por representar o significar algo.*	**MO.-** "Significativo" en estadística no quiere decir "importante". Quiere decir que "es muy poco probable que ocurra sólo por azar".
TEXTOS	
No lo define ninguna de los libros de texto	

Aquí encontramos un término muy importante en la estadística inferencial y por otro lado puede generar confusión constantemente al entenderse de manera diferente en un contexto cotidiano.

Los libros de texto no definen este término. Como hemos indicado con otros términos, esto tiene el peligro de no aclarar el concepto y que este error conceptual impida comprender correctamente los nuevos términos que se estudien y que estén relacionados con él.

Hay que definir este término para que los estudiantes comprendan su significado como "poco probable". Un resultados estadísticamente significativo es aquel que tiene poca probabilidad de ocurrir. Este hecho contrasta con su significado en el contexto cotidiano. Tan importante como dar la definición es ilustrar la definición con ejemplos para su mejor comprensión.

Categoría 3: Significado propio en el contexto matemático

Como es de esperar, esta es la categoría en la que más términos se han clasificado. Entre otros aparecen:

<table>
<tr><td colspan="2">Término: ESTADÍSTICO</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>1. Perteneciente o relativo a la estadística.
2. Persona que profesa la estadística.</td><td>ME. Valor calculado a partir de los datos de una muestra.
MO. Un estadístico es un número que se puede calcular a partir de los datos de la muestra sin utilizar ningún parámetro desconocido. En la práctica, solemos utilizar un estadístico para estimar el parámetro desconocido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- No lo define.
T2.- “un valor numérico que describe una característica de la muestra”.
T3.- “[valores o medidas] que caracterizan a una muestra”.
T4.- No lo define.</td></tr>
</table>

Es significativo que, no todos los libros de texto lo definan, y, aunque lo hagan, no lo utilizan posteriormente y hablan de parámetros poblacionales en vez de estadísticos. Se trata de un concepto importante, pues es el valor a partir del cual realizamos la inferencia estadística.

Término:	**PARÁMETRO**
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Dato o factor que se toma como necesario para analizar o valorar una situación 2. Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico.	**ME**. Las poblaciones son caracterizadas por medidas descriptivas numéricas, llamadas parámetros. **MO.** Un parámetro es un número que describe la población. En la práctica estadística el valor del parámetro no es conocido ya que no podemos examinar toda la población.
TEXTOS	
T2.- “*valor numérico que describe una característica de la población*”. **T3**.-“*los valores o medidas que caracterizan a la población*”. **T4**.- “*a partir de una distribución podemos definir una serie de medidas características de la variable aleatoria denominadas parámetros.”*	

Entendemos que este término tiene que ver con el lenguaje específico de la matemática, y en concreto de la estadística, pues se denomina así al valor de una característica de la población. Pero a su vez, en el contexto matemático puede tener distintas acepciones. Es por ello muy importante definirlo previamente para fijar los conceptos y el significado que va a tener a lo largo del estudio.

Término: **MUESTREO ALEATORIO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** Supongamos que N y n representan los números de elementos en la población y en la muestra, respectivamente. Si el muestreo se conduce de manera que cada una de las C_n^N muestras tenga la misma probabilidad de ser seleccionada, entonces decimos que el muestreo es aleatorio y al resultado se le llama muestra aleatoria simple. **MO.-** Una muestra aleatoria simple de tamaño n consta de n individuos de una población escogidos de manera que cualquier conjunto de n individuos de la población tenga las mismas posibilidades de ser la muestra realmente seleccionada.

TEXTOS

T1.- Muestreo es *"la elección de la muestra" y* que "*una condición casi indispensable para que una muestra sea **representativa** es que sus elementos se hayan elegido aleatoriamente, al azar"*. En este sentido dice que un **muestreo es aleatorio** "*cuando todos los individuos de la muestra se eligen al azar, de modo que todos los individuos de la población tienen, a priori, la misma probabilidad de ser elegidos"*.

T2.- Un muestreo aleatorio simple consiste en que "*todos los elementos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos para formar parte de la muestra"*.

T3.- Muestreo aleatorio simple "*consiste en seleccionar n elementos sin reemplazamiento de entre los N que componen la población, de tal modo que todas las muestras de tamaño n que se pueden formar $C_{N,n}$ tengan la misma probabilidad de salir elegidas"*.

T4.- Muestreo "*aleatorio o probabilístico*" como aquel en el que "*cada individuo tiene las mismas probabilidades de ser elegido para la muestra"*.

Las definiciones de los Manuales Universitarios sobre muestreo aleatorio simple resaltan el hecho de asegurar que los elementos tienen las mismas probabilidades de formar parte de la muestra, y que esa muestra se llama *aleatoria simple*. Pero luego, en los libros de texto comprobamos que tratan de definir y diferenciar el muestreo aleatorio del muestreo aleatorio simple (m.a.s.). Y además, introducen que el m.a.s lo podemos realizar con reemplazamiento o sin reemplazamiento. Todo esto no hace más que confundir, pues entran en juego muchos términos que, no aclaran la definición que, en un principio, se quiere aportar, que no es otra que la de muestreo aleatorio simple.

El término muestreo aleatorio es básico en la inferencia y por tanto es muy importante definirlo y ver los distintos tipos de muestreo aleatorio que se pueden realizar, haciendo hincapié en que todos los resultados de la inferencia se basan en el m.a.s.

Hay una idea inmersa en la definición de m.a.s. dada en los Manuales, que sólo Santillana lo recoge, y es que no se trata sólo de que cada elemento tenga la misma probabilidad de ser escogido, sino que además, todas las muestras del mismo tamaño, también tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas. Esto es importante, pues los otros tipos de muestreos (sistemáticos, estratificado, por conglomerado) no van a tener esta propiedad fundamental, en la que se basarán los resultados posteriores.

Creemos que es importante trabajar otros tipos de muestreos para comprender el mecanismo de construcción de las muestras. Pero más importante es explicar que sólo las m.a.s. son las válidas a partir de ahora. Y que todos los resultados con los que se construye la estadística inferencial, como puede ser el Teorema del Límite Central, son ciertos cuando la muestra obtenida se ha seleccionado utilizando un m.a.s., exclusivamente. En otro caso los resultados no son válidos y no pueden ser utilizados.

En este sentido, sólo Edelvives, dice que *"a partir de ahora consideraremos siempre muestreos aleatorios simples"*. El resto de los libros de texto no dan ningún tipo de explicación sobre las muestras que se van a utilizar.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: NIVEL DE CONFIANZA</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>MO.- Un nivel de confianza C, proporciona la probabilidad de que en un muestreo repetido, el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- “a partir de una muestra de tamaño n podemos estimar el valor de un parámetro de la población (…) Dando un intervalo dentro del cual confiamos que esté el parámetro. (…) Hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra. A dicha probabilidad se la llama nivel de confianza”.

T2.- Lo denomina coeficiente de confianza y es “la probabilidad de que un estimador por intervalo cubra el verdadero valor del parámetro que se pretende estimar. Generalmente se representa por $1-\alpha$ ”.

T3.- “el nivel de confianza que tenemos de que la media de la población pertenezca al intervalo es $1-\alpha$ ”.

T4.- El método de estimación por intervalo de confianza permite “calcular dos valores entre los que esperamos que esté el parámetro buscado con un cierto nivel de confianza, que llamaremos $1-\alpha$, donde α es el nivel de riesgo fijado de antemano”.</td></tr>
</table>

Las definiciones vienen dadas en función de otro término desconocido o no definido, por lo que podemos decir que está mal definido el término.

Los libros de texto denominan al valor $1-\alpha$ como **nivel de confianza**, e indica la probabilidad de que el parámetro poblacional se encuentre en dicho intervalo. Esto quiere decir que en el $(1-\alpha)$% de los intervalos que extraemos de distintas muestras contendrán el parámetro que deseamos estimar. Lo que ocurre es que en lo resúmenes de los distintos libros de texto se da la fórmula de cálculo del intervalo de confianza, para una confianza dada. Dichos intervalos están completamente desligados de la probabilidad. Además las actividades que se presentan en los libros de texto van encaminadas hacia el cálculo de dicho intervalo aplicando la fórmula encontrada, sin más. No hay actividades en las que se requiera que se de una explicación sobre el significado de "confianza de 1-α", por ejemplo.

Término: **ERROR MÁXIMO ADMISIBLE**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME**.- La diferencia entre una estimación particular y el parámetro que se está estimando se llama error de estimación. **MO**.- El error de estimación (…) indica la precisión que creemos que tiene nuestra suposición, basada en la variabilidad de la estimación.
TEXTOS	
T1.- Indica que el valor $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se llama error máximo admisible. También lo llama **cota de error**. **T2**.- Indica la fórmula y dice que se denomina **error máximo**. **T3**.- El valor antes indicado (que llama d) también se denomina **precisión del intervalo**. **T4**.- Indica la fórmula para el error máximo que cometemos en una estimación.	

Mientras que en los textos se habla de error máximo admisible, los Manuales Universitarios lo denotan como error de estimación. Esto es importante, pues estamos denominando un mismo concepto con términos distintos, lo que puede dificultar su comprensión en cursos posteriores.

En todos los casos se trabaja con la fórmula para calcular el tamaño de la muestra; pues si conocemos el error máximo que estaríamos dispuestos a admitir y el nivel de confianza, se puede calcular el tamaño de la muestra que debemos tomar.

No se dice que se trata de la amplitud del intervalo de confianza, la distancia que nos alejamos de la media muestral.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: DESVIACIÓN TÍPICA</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>1. Acción y efecto de desviar
2. Diferencia entre la medida de una magnitud y el valor de referencia.</td><td>MO.- La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza s^2.
La varianza s^2 de un conjunto de observaciones es la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto a su media dividido por n-1.
ME.- La desviación estándar de un conjunto de n observaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza.
(Previamente ha definido la varianza como sigue)
La varianza de una muestra de n observaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, se define como el promedio del cuadrado de las desviaciones de las observaciones con respecto a su media μ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T3.- Define la varianza para una variable aleatoria continua como V[X]= $\int_a^b x^2 f(x)dx$. No da otro tipo de explicación.</td></tr>
</table>

Los Manuales Universitarios hablan de desviación típica o estándar, y en ambos casos vienen definidos en función de la varianza. La varianza se define de forma distinta para la población y para una muestra, pues en el segundo caso va dividida por n-1, en vez de por n. Esto es así, porque esta varianza presenta mejores propiedades para la estimación que cuando dividimos por n. Y estas propiedades se trasladan a la desviación típica.

Los libros de texto no tratan estas medidas de dispersión, pues suponen que han sido trabajadas en el curso anterior, donde se hace un estudio más en profundidad de la estadística descriptiva. Habría que tener en cuenta que las distribuciones de probabilidad también presentan dispersión, por lo que es muy importante que se retome la desviación típica y lo que significa.

Término: **NORMAL**	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Dicho de una cosa: Que se halla en su estado natural 2. Que sirve de norma o regla. 3. Dicho de una cosa: Que, por su naturaleza, forma o magnitud, se ajusta a ciertas normas fijadas de antemano	**MO**.- Una clase particularmente importante de curvas de densidad (…) son simétricas, con un solo pico y tienen forma de campana. Se les llama curvas normales y describen las **distribuciones normales**. (…) La media se sitúa en el centro. Cualquier curva de densidad se puede utilizar para asignar probabilidades. Las curvas de densidad que nos resultan más familiares son las normales. Así, las distribuciones normales son modelos de probabilidad.
TEXTOS	
T1.- No define esta distribución. **T2**.-*“la distribución normal se llamó así porque durante mucho tiempo se pensó que ese era el comportamiento normal de todos los fenómenos”.* **T3**.- “*Una distribución normal está determinada cuando se conoce su media, μ, y su desviación típica σ.*”	

Realmente, cuando conocemos la distribución normal, sabemos que sirve para describir gran cantidad de situaciones en las que los datos se distribuyen de manera casi homogénea alrededor de la media. Y es por eso que se llama NORMAL, pues lo normal es que las estaturas, ciertas dimensiones corporales, etc. estén alrededor de un valor medio. Claro que, esto se conoce a posteriori. Previamente, cuando se introduce esta distribución en los textos, no se hace mención de esta circunstancia, sino que se describe la función de densidad, la gráfica y se explica cómo utilizar la tabla de la distribución N (0,1).

El diccionario no aporta una definición que se acerque a lo que se entiende por Normal (o distribución normal) en inferencia. Es por ello que se debe dar una definición explícita de esta distribución.

Por otro lado, la distribución normal resulta difícil para los estudiantes y en este nivel se supone que ya la conocen del curso anterior, por lo que le dedican muy poco espacio en el texto.

Término: **SESGADO**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Oblicuidad o torcimiento de una cosa hacia un lado, o en el corte, o en la situación, o en el movimiento.	**MO.-** El diseño de un estudio es sesgado si favorece sistemáticamente ciertos resultados.
TEXTOS	
T2.- "*Cuando un estimador tenga ausencia de sesgo lo llamamos insesgado*". Y luego define estimador insesgado: "*Cuando su media coincide con el valor del parámetro que se va a estimar*"	

Cuando estamos realizando un estudio estadístico, es importante que conozcamos los sesgos que se producen. Pero para comprender este concepto hay que trabajar varias situaciones y poner distintos ejemplos de estudios sesgados. Creemos que un término como este no se puede citar sin ilustrar su significado. Además, SM no lo vuelve a utilizar más.

El resto de los libros de texto no hablan de esta propiedad de los estimadores.

Término: **EFICIENCIA**	
Diccionario	Manuales Universitarios
Capacidad de disponer de alguien o de algo para conseguir un efecto determinado.	**(No lo definen)**
TEXTOS	
T2.- "*Cuando su varianza es mínima*". No da más explicaciones.	

Los Manuales Universitarios no describen ninguna de las propiedades de los estimadores, salvo el sesgo. Esto es muy significativo, pues realmente, nos transmite que debemos conocer otras herramientas y conceptos antes que estas propiedades de los estimadores.

El resto de los libros de texto no hablan de esta propiedad.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: PROPORCIÓN MUESTRAL</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>MO.- De una muestra aleatoria simple de tamaño n de una gran población que contenga una proporción p de éxitos, se llama $\hat{p}$ a la proporción muestral de éxitos,

$\hat{p} = \frac{recuento\ de\ éxitos\ en\ la\ muestra}{n}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- “Decir que la probabilidad de un suceso es p es lo mismo que decir que en la población que resulta de repetir esa experiencia aleatoria una infinidad de veces, la proporción de ocasiones en la que se da el suceso es p. Por tanto, una probabilidad puede ser considerada como una proporción en una población infinita.”</td></tr>
</table>

Establece la equivalencia entre proporción, frecuencia relativa y probabilidad, cuando repetimos un suceso una infinidad de veces.

El resto utiliza este concepto, pero no hacen una definición explícita del mismo, sino que trabajan con él como si fuera la proporción muestral equivalente a la probabilidad de la muestra y de la población.

Término: **CONTRASTE DE HIPÓTESIS**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** El objetivo de una prueba estadística es el de examinar una hipótesis relacionada con los valores de uno o más parámetros poblacionales. **MO.-** Los intervalos de confianza son uno de lo dos procedimientos de inferencia estadística más ampliamente utilizados. El segundo procedimiento de inferencia (...), llamado *pruebas de significación*, tiene otro objetivo valorar la evidencia proporcionada por los datos a favor de alguna hipótesis sobre la población.
EDITORIALES	
T1.- Un **test estadístico** es un procedimiento para, a partir de una muestra *aleatoria y significativa*, extraer conclusiones que permitan aceptar o rechazar una hipótesis previamente emitida sobre el valor de un parámetro desconocido de esa población. Aquí se define el término contraste de hipótesis, pero al hacerlo habla de una muestra *significativa*. En ningún momento ha definido este término. Como veremos más adelante, este término varía su significado según el contexto. **T2.- Contraste de hipótesis**: Procedimiento estadístico mediante el cual se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una población o poblaciones. **T3.-.** Está muy relacionado con la estimación por intervalos, y se basa en los conceptos de probabilidad y de distribución. Mientras que los intervalos de confianza se utilizan para estimar parámetros, los **contrastes de hipótesis** se van a usar para tomar decisiones acerca de características de la población. Una hipótesis estadística es cualquier afirmación, verdadera o falsa sobre una característica desconocida de la población. Cuando va referida al valor de un parámetro desconocido se denomina contraste paramétrico y es el caso que estudiamos. Cuando define contraste de hipótesis comienza indicando que está relacionado con el cálculo de intervalo de confianza, pero da una diferencia: el contraste se va a *usar para tomar decisiones acerca de las características de la población* y no para estimar parámetros. A lo largo de todo el capítulo utilizaremos el contraste de hipótesis para tomar	

una decisión sobre la *estimación del parámetro.*

Por otro lado, esta editorial indica que *"el contraste de hipótesis no establece la verdad de la hipótesis sino un criterio de aceptación de la misma"*, esto pone de manifiesto que la decisión puede variar si la muestra es otra. En este caso dice que se comete un error pero no profundiza en esta idea y no se pone de manifiesto en ninguno de los ejercicios que propone posteriormente.

T4.- Contraste de hipótesis es un procedimiento estadístico mediante el cual tratamos de cuantificar las diferencias o discrepancias entre una hipótesis estadística y una realidad de la que poseemos una información muestral, estableciendo una regla de decisión para juzgar si las discrepancias son excesivamente grandes y, por tanto, rechazamos la hipótesis. La definición que aporta este libro sobre contraste de hipótesis se diferencia de las demás por indicar que se trata de comparar y tener una regla de decisión. En ninguna de las definiciones anteriores se nombra la necesidad de fijar una regla de decisión.

Es importante tener en cuenta que, como indica Moore (2005), *los razonamientos utilizados con las pruebas de significación, al igual que los utilizados con los intervalos de confianza, se basan en preguntar lo que ocurriría si repitiéramos el muestreo o el experimento muchas veces.*

Este hecho no se pone de manifiesto en ninguna de las editoriales estudiadas, salvo por Santillana.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: HIPÓTESIS NULA</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>ME.- La hipótesis nula, indicada simbólicamente como Ho, establece la hipótesis que será sometida a prueba. Así, Ho especifica valores hipotéticos para uno o más parámetros de población.

MO.- La afirmación que se contrasta en una prueba estadística se llama hipótesis nula. Las pruebas de significación se diseñan para valorar la fuerza de la evidencia en contra de la hipótesis nula. En general, la hipótesis nula es una afirmación de “ausencia de efecto” o de “no diferencia”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">EDITORIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- La hipótesis emitida se designa por Ho y se llama hipótesis nula. Esta editorial indica que siempre aparecerá una hipótesis de partida o emitida y que será la que se va a denominar Hipótesis nula. Para aclarar esto realiza una tabla que utiliza para diferenciar: Hipótesis / Resultado a partir de la muestra / Interrogante. Aunque sólo lo utiliza una vez.

T2.- Es la hipótesis que se formula y que se quiere contrastar; es, por tanto, la hipótesis que se acepta o se rechaza como consecuencia del contraste.

T3.- Establecemos una hipótesis que se considera provisionalmente como verdadera denominada hipótesis nula Ho, porque parte del supuesto de que la diferencia entre el valor verdadero de la media y su valor hipotético es nula. No nos indica esta definición cómo debemos escoger la hipótesis, sino que no debe haber diferencia entre la hipótesis y el valor de la media. ¿Cómo cuantificamos esta diferencia?

T4.- Es la hipótesis que deseamos contrastar, considerada en principio como verdadera y que aceptaremos o rechazaremos como consecuencia de este contraste.</td></tr>
</table>

Este término se enmarca dentro de la Fase de Planteamiento, definida en García Alonso y García Cruz (2005). Es fundamental para la realización del contraste y como se pudo comprobar en dicho artículo los estudiantes, en ocasiones, confunden la hipótesis nula de un problema de contraste unilateral con uno bilateral, con lo que el problema se resuelve incorrectamente.

Como hemos podido observar, en la definición de este término no se evidencia cómo escoger la hipótesis nula pero sí lo hace y de manera muy clarificadora Moore: *la hipótesis nula es una afirmación de "ausencia de efecto" o de "no diferencia"*, esto es, la hipótesis nula no modifica lo que ya conocemos de la población. Ese es el criterio para decidir cuál es la hipótesis nula, y que los libros de texto no recogen.

Término: **NIVEL DE SIGNIFICACIÓN**	
Diccionario	Manuales Universitarios
(No lo define)	**ME.-** La probabilidad α de cometer un error de tipo I se llama a menudo el nivel de significación de la prueba.
TEXTOS	
T1.- Lo define como: *"El nivel de significación de una hipótesis, α, es el valor complementario del nivel de confianza de una estimación 1-α."*. **T2**.- Lo define como *"la diferencia entre la certeza y el nivel de confianza deseado"*.	

El nivel de significación es muy importante cuando trabajamos contraste de hipótesis, pues se trata de acotar un error que vamos a cometer. Esto no se cita adecuadamente en los textos, con lo cual el estudiante no puede comprender su significado.

En cambio, los textos actúan de la misma forma que con nivel de confianza, éste término se define en función del nivel de confianza y viceversa.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: HIPÓTESIS ALTERNATIVA</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>ME.- También denominada Hipótesis de Investigación. Se trata de la hipótesis que el científico desea “probar” (es decir, apoyar o demostrar). Para lograr esto, el científico somete a prueba a la opuesta de la hipótesis de investigación (la hipótesis nula)

MO.- La afirmación en relación con la población sobre la cual queremos hallar evidencia a favor es la hipótesis alternativa, Ha.</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEXTOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1.- La hipótesis contraria se designa por H_1 y se llama hipótesis alternativa.

T2.- Cualquier otra hipótesis que difiera de la formulada y que nos sitúe frente a Ho, de forma que si se rechaza Ho se acepta H_1, y si se acepta Ho se rechaza H_1.

T3.- La complementaria de la hipótesis nula es la hipótesis alternativa H_1, debiendo ser las dos hipótesis mutuamente excluyentes y complementarias, de modo que el verdadero valor del parámetro esté incluido en la hipótesis nula o en la hipótesis alternativa.

T4.- Es cualquier otra hipótesis que nos sitúe frente a Ho y que aceptaremos si, como consecuencia del contraste, rechazamos Ho.</td></tr>
</table>

Tenemos que destacar un hecho fundamental que se recoge en los Manuales Universitarios y no así en los libros de texto: la hipótesis alternativa es la hipótesis que tratamos de probar que es cierta. Es la hipótesis que nos ha hecho sospechar que las cosas no son como pensábamos y por tanto, es la que justifica que nos planteemos el contraste de hipótesis. Esto no se recoge en los libros de texto, sino que se da como única característica apreciable que sea complementaria a la hipótesis nula.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: ERROR DE TIPO I</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>ME.- En una prueba estadística, decimos que se comete un Error de Tipo I cuando se rechaza la hipótesis nula siendo ésta cierta. A la probabilidad de cometer un error de tipo I se denota por el símbolo α.

MO.- El nivel de significación α de cualquier prueba de significación con un nivel predeterminado es la probabilidad de un Error Tipo I. Es decir, α es la probabilidad de que la prueba rechace la hipótesis nula Ho cuando en realidad Ho es cierta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">EDITORIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1. Se comete cuando la hipótesis nula es verdadera, y como consecuencia del contraste, se rechaza.

T2. El que cometemos al rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.

T3. (...) Estamos rechazando una hipótesis que es verdadera. El error que cometemos es de tipo I.

T4. Error de tipo I es el que se produce cuando rechazamos la hipótesis nula siendo cierta.</td></tr>
</table>

Llama la atención que no se hacen suficientes ejercicios donde se planteen los problemas en términos del Error de Tipo I y las consecuencias que ésta decisión puede llegar a tener. No se explota suficientemente este concepto y trabajar con ejercicios rutinarios.

<table>
<tr><td colspan="2">Término: ERROR DE TIPO II</td></tr>
<tr><td>Diccionario</td><td>Manuales Universitarios</td></tr>
<tr><td>(No lo define)</td><td>ME.- En una prueba estadística, decimos que se comete un error de tipo II cuando se acepta la hipótesis nula siendo ésta falsa. A la probabilidad de cometer un error de tipo II cuando alguna alternativa específica es cierta se denota con el símbolo β.

MO.- La probabilidad de que una prueba con un nivel de significación predeterminado α rechace Ho cuando el parámetro toma un cierto valor alternativo se llama potencia de la prueba con esta alternativa. La potencia de una prueba con cualquier alternativa es 1 menos la probabilidad de error tipo II para esta alternativa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">EDITORIALES</td></tr>
<tr><td colspan="2">T1. Se comete cuando la hipótesis nula es falsa y, como consecuencia del contraste, se acepta.

T2. El que cometemos al aceptar la hipótesis nula siendo falsa.

T3. Si aceptamos como verdadera una hipótesis falsa cometemos un error de tipo II.

T4. Error de tipo II es el que se produce cuando aceptamos la hipótesis nula siendo falsa.</td></tr>
</table>

La potencia de un contraste queda fuera del alcance del objetivo del curso, y por tanto se da la definición pero no se realiza ningún ejercicio en el que se trabaje la potencia del contraste.

4.2 Influencia de los contextos cotidiano y matemático en las respuestas de los estudiantes

Pasamos ahora a analizar las respuestas dadas por los estudiantes de Bachillerato y Universidad al cuestionario que hemos elaborado.

Los resultados los presentamos analizando las preguntas según el estadio en el que hemos situado cada término. Presentaremos las frecuencias absolutas y los porcentajes de acuerdo con el estadio de comprensión y distinguiendo el nivel educativo correspondiente (Bachillerato o Universidad). De los datos recogidos extraeremos las conclusiones basadas en las acciones de los estudiantes.

4.2.1 Categoría 1. Mismo significado en ambos contextos

Recordemos que en esta categoría se ubican aquellos términos que no varía su significado al cambiar de contexto. Veamos qué ocurrió cuando presentamos el cuestionario a los estudiantes con este tipo de términos.

Pregunta 1. ¿De qué trata la estadística?

La definición correcta de este término es la que dice: *Rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades.* (DRAE, 2001)

La respuesta mayoritaria aquí hace referencia al estudio de datos seleccionados previamente. Aunque en Bachillerato también se asocia este término exclusivamente al cálculo de parámetros, a la búsqueda de muestras, al cálculo de probabilidades. La definición queda incompleta en la mayoría de las respuestas dadas. Entre las respuestas de los estudiantes universitarios no hay una proporción mayor de respuestas correctas, pues no expresan claramente el significado de este término sino que se fijan en determinados aspectos: cálculo de porcentajes o estudio de probabilidades. Atendiendo a la clasificación dada por la taxonomía SOLO, encontramos que las respuestas de los estudiantes de bachillerato sólo llegan al estadio Multiestructural, con lo que llegan a conocer aspectos relativos a este término pero no son capaces de relacionarlos correctamente. Entre los estudiantes universitarios no hay respuestas dentro del estadio Relacional, y la mayoría está entre el Uniestructural y el Multiestructural (75%).

P1		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	4	28.5%
	U	4	33.3%	7	50%
	M	5	41.7%	2	14.2%
	T	3	25%	0	0
	R	0	0	0	0

Pregunta 2. ¿Qué entiendes por población?

Los Manuales Universitarios, utilizados como referencia, definen población como: *Un grupo entero de individuos sobre el que queremos información.* (Moore, 2005). Este término está clasificado en la categoría de los que tienen el mismo significado en ambos contextos. Son muy significativas las respuestas dadas por los estudiantes de Bachillerato pues, a pesar de ser su segundo año consecutivo estudiando estadística y pasarles la encuesta el profesor de matemáticas y habiéndoles preguntado previamente por lo que entienden por estadística, responden en su mayoría (42%) que se trata de los habitantes de un lugar. En los universitarios destacan las respuestas (38%) que indican que son un conjunto de personas, animales o cosas, pero no indican la finalidad de dicho conjunto. Si realizamos la clasificación atendiendo a estadios de comprensión podemos construir la tabla siguiente. Todos los estudiantes responden, pero se reparten por todas las categorías de respuestas. Hemos clasificado en el estadio Preestructural aquellos que no dan la definición correcta o que se han despistado con aspectos irrelevantes de la definición. En este estadio es donde se sitúan muchas de las respuestas de los estudiantes de Bachillerato (42.8%). El estadio Uniestructural es mayoritario entre el grupo de universitarios (50%), en él hemos incluido las respuestas que no indican la finalidad del conjunto o que simplemente hablan de un conjunto variado pero no centran que la finalidad es la realización del estudio o la búsqueda de información.

¿Qué entiendes por población?

P2		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	2	16.7%	6	42.8%
	U	6	50%	2	14.2%
	M	0	0	2	14.2%
	T	1	8.3%	2	14.2%
	R	3	25%	2	14.2

Pregunta 3: ¿Qué entiendes por individuo?

Cuando se les pregunta por lo que entiende por individuo debemos tener en cuenta que en el Manual universitario utilizado como referencia (Moore, 2005), se define este término como *los objetos descritos por un conjunto de datos. Los individuos pueden ser personas, pero también pueden ser animales o cosas.*

En la clasificación que realizamos de las respuestas dadas, y que podemos observar en la tabla siguiente, observamos que los estudiantes de Bachillerato no son capaces, en su mayoría (50%), de dar una definición adecuada.

¿Qué entiendes por individuo?

P3		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	1	8.3%	7	50%
	U	1	8.3%	4	28.6%
	M	1	8.3%	1	7.1%
	T	3	25%	0	0
	R	6	50%	1	7.1%
NC		0	0	1	7.1%

Pregunta 8. ¿Qué entiendes por tamaño de una muestra?

En Moore (2005) se dice que *"una muestra aleatoria simple de tamaño n consta de n individuos de una población"*.

De las respuestas dadas por los estudiantes podemos observar que los estudiantes de bachillerato han sido capaces de dar respuestas en los estadios más elaborados, mientras que para los estudiantes de bachillerato hemos encontrado un porcentaje de respuestas por encima del 50% entre los estadios Preestructural y Multiestructural, con lo que no son capaces de dar una respuesta adecuada.

¿Qué entiendes por tamaño de una muestra?

<table>
<tr><td colspan="2">P8</td><td colspan="2">UNIVERSIDAD</td><td colspan="2">BACHILLERATO</td></tr>
<tr><td rowspan="5">ESTADIO</td><td>P</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>21.3%</td></tr>
<tr><td>U</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>7.1%</td></tr>
<tr><td>M</td><td>2</td><td>16.7%</td><td>4</td><td>28.6%</td></tr>
<tr><td>T</td><td>1</td><td>8.3%</td><td>1</td><td>7.1%</td></tr>
<tr><td>R</td><td>10</td><td>83.3%</td><td>2</td><td>14.3%</td></tr>
<tr><td colspan="2">NC</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>21.4%</td></tr>
</table>

4.2.2 Categoría 2. Distinto significado en ambos contextos

Recordemos que en esta categoría se ubican aquellos términos que no permanecen inalterados al variar el contexto. Analizaremos ahora las respuestas dadas por los estudiantes cuando se les plantearon estos términos.

Pregunta 4. ¿Qué es una muestra?

En la tabla siguiente presentamos los resultados de las respuestas dadas a la pregunta 4. La definición de este término puede cambiar dependiendo del contexto en el que estemos trabajando.

Entre los estudiantes de Bachillerato encontramos que, en la definición que aportan aparecen sinónimos asociados a este término que utilizan en la clase de estadística y que no son correctos. Por ejemplo, encuestas, respuestas, resultados, aproximaciones a la media, datos válidos para la población y datos representativos de la población. Entre los estudiantes universitarios, la definición se concreta mejor dándose la respuesta correcta por parte del 76% de los encuestados.

No contabilizamos entre los estudiantes de Bachillerato respuestas en el estadio Relacional, lo que indica que la definición, en este estadio, aún no integra todos sus elementos correctamente.

Hemos clasificado dentro del estadio Uniestructural las respuesta que han utilizado la idea de que la muestra debe representar al conjunto de partida. Podemos observar que el porcentaje de estudiantes de Bachillerato que justifica la definición de muestra en la representatividad es bastante elevado y que, posteriormente, en la Universidad este número decrece. Aunque no deja de ser significativo que un 25% de las respuestas de los estudiantes de Universidad, con la formación matemática y estadística que poseen, siga pensando que la muestra debe ser representativa.

Las definiciones dadas en el estadio Multiestructural las podemos considerar incompletas puesto que no hacen referencia a la población. Esto es, las definiciones hablan de parte, conjunto, colección, pero no sitúan estos elementos dentro del conjunto que nos interesa que es la población en estudio. En esta situación se encuentra el 25% de los estudiantes universitarios y el 14.2% de los de Bachillerato.

Es importante que destaquemos que un 50% de los estudiantes universitarios dan una respuesta correcta y la hemos situado en los estadios de transición y Relacional, frente a un 7.1% de los estudiantes de Bachillerato.

Todos los estudiantes trataron de dar una definición y no hubo ninguno que dejara sin contestar esta pregunta. Esto indica que se trata de un término que aparece con facilidad en el contexto cotidiano, lo que permite que cualquiera pueda sentirse animado a dar una definición de lo que entiende por él.

¿Qué es una muestra?

P4		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	2	14.2%
	U	3	25%	9	64.2%
	M	3	25%	2	14.2%
	T	1	8.3%	1	7.1%
	R	5	41.7%	0	0

La pregunta 5 consiste en decidir si el enunciado que se apunta es verdadero o falso, pero además debían justifica su decisión. Llegados a este punto, nos encontramos con una dificultad: los estudiantes de Bachillerato no están habituados a justificar o explicar las decisiones que toman y afirman sentirse incapaces de poder dar una justificación o no saben cómo hacerlo. Esto se pone de manifiesto en la cantidad de apartados donde el porcentaje de alumnos que no responde es alto. Analizaremos las justificaciones que dan en cada elección.

Pregunta 5A: Una muestra es cualquier cantidad de elementos que escojamos de un conjunto mayor. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

Entre las respuestas dadas por los estudiantes de bachillerato obtenemos que la mayoría de los estudiantes señalan este apartado como falso (35%), destacando dos respuestas que justifican haber dicho falso porque también las muestras podrían ser extraídas de un conjunto menor. Ninguno de los estudiantes habla de que deba ser representativa la muestra. Al contrario de lo que ocurre entre los universitarios, pues aunque la mayoría dice que sí es verdadera, encontramos que tres estudiantes (23%) requieren que la muestra sea representativa de la población.

Observamos que las respuestas dadas por los estudiantes universitarios pueden estar dentro del estadio Relacional (33%), no así entre las respuestas de los estudiantes de bachillerato. Pero aún así encontramos un porcentaje alto de estudiantes universitarios con respuestas dadas en los estadios Preestructural y Uniestructural (58%), lo que es indicativo del tipo de respuesta dada.

Una muestra es cualquier cantidad de elementos que escojamos de un conjunto mayor.

P5.A		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	1	8.3%	3	21.4%
	U	6	50%	2	14.3%
	M	1	8.3%	1	7.1%
	T	0	0	1	7.1%
	R	4	33.3%	0	0
NC		0	0	7	50%

Pregunta 5B: Una muestra tiene que representar siempre el conjunto del que proviene. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

En la tabla siguiente se contabilizan las respuestas dadas a esta pregunta. Encontramos que, tanto en Bachillerato como entre los estudiantes universitarios, la respuesta mayoritaria es la que da como verdadera esta afirmación (85% y 46% en Bachillerato y Universidad, respectivamente) y reconocen que es una característica que deben cumplir las muestras.

Cuando estudiamos la categorización de las respuestas dadas como justificación de su elección, hemos incluido dentro del estadio uniestructural las respuestas que centran su justificación en la representatividad de la muestra. Podemos observar que la mayoría de los estudiantes universitarios y de Bachillerato se encuentran en este estadio. Sólo tres estudiantes universitarios (25%) contradicen la afirmación indicando que no todas las muestras son representativas, o bien que la representatividad de la muestra la da el método de selección, esto es, se obtiene cuando la muestra se extrae de manera aleatoria. No aparece ninguna respuesta en el estadio Relacional, pues entendemos que las respuestas dadas en este estadio deberían negar que la representatividad sea necesaria en la muestra y que además indique que, debido al azar, puede ocurrir que la muestra no contenga algunos de los elementos que sabemos que tiene la población de partida.

Una muestra tiene que representar siempre el conjunto del que proviene.

P5.B		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	5	41.7%	8	57.2%
	M	3	25%	4	28.6%
	T	3	25%	0	0
	R	0	0	0	0
NC		1	8.3%	2	14.2%

Pregunta 5C: Sacar todas las bolas blancas de una urna compuesta por bolas blancas y negras no se puede admitir como muestra. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

En la misma línea que el apartado anterior, queremos dar un ejemplo concreto de muestra para ver si el estudiante lo rechaza y por qué motivos no está de acuerdo con este resultado como muestra.

La respuesta mayoritaria de los estudiantes de bachillerato y de universidad coincide y es decir que es cierto que no sea una muestra sacar todas las bolas blancas. Hecho llamativo pues subyace la idea de que las muestras deben ser representativas de la población.

Encontramos la misma cantidad de respuestas en los estadios de Transición y Relacional en ambos tipos de estudiantes. No observamos que sean mejores las respuestas dadas por los estudiantes de universidad frente a las respuestas de los estudiantes de bachillerato.

Sacar todas las bolas blancas de una urna compuesta por bolas blancas y negras no se puede admitir como muestra.

P5.C		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	6	50%	3	21.4%
	M	0	0	1	7.2%
	T	2	16.7%	2	14.3%
	R	1	8.3%	1	7.1
NC		3	25%	7	50%

Pregunta 5D: Una muestra se puede extraer de cualquier forma. ¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta.

Entre los estudiantes de bachillerato se puede interpretar a partir de las respuestas dadas que sí se puede sacar la muestra de cualquier forma (37%). Pero entre las respuestas dadas por los estudiantes universitarios la mayoría dice que no (53%), muchos de ellos (30%) porque debe ser representativa. Aquí se pone de manifiesto que en muy pocas ocasiones han tenido que extraer una muestra. No han tenido que analizar si el muestreo realizado es aleatorio o no. No han tenido distintas muestras con las que trabajar y ver cuán diferentes pueden ser.

Vemos que los estudiantes de bachillerato dan respuestas a lo sumo en el estadio Uniestructural o bien no responden. Entre los estudiantes universitarios las respuestas se reparten por los diferentes estadios, pero destaca que entre los estadios de Transición y Relacional se encuentra el 41% de las respuestas.

Una muestra se puede extraer de cualquier forma

P5.D		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	4	33.3%	6	42.8%
	M	1	8.3%	0	0
	T	4	33.3%	0	0
	R	1	8.3%	0	0
NC		2	16.7%	8	57.1%

Pregunta 6: Para investigar el tiempo dedicado al estudio por parte de los alumnos de un centro, los profesores han seleccionado 100 alumnos intentando que haya alumnos "buenos", "medianos" y "flojos". ¿Es esta una buena forma de selección? ¿Por qué?

En la tabla siguiente contabilizamos las respuestas dadas a la pregunta 6. Los estudiantes de Bachillerato indican, en su mayoría, que se trata de una buena selección (71%), dando distintas justificaciones: la variedad de datos que vamos a recoger, que dicha variedad hace que sea más fiable, que habrá más probabilidades. Hay un estudiante que indica que le falta un dato, pero no dice nada más. Y entre los que dicen que no es buena, afirman simplemente que es mejor otra opción pero dan una justificación muy vaga. Entre los estudiantes universitarios la mayoría acepta este método de selección porque el reparto que se hace de la población hace que la muestra sea representativa (46%).

Realizando el análisis según los estadios de comprensión encontramos que la mayoría de los estudiantes siguen anclados en la idea de representatividad que atribuyen a la muestra. Los estudiantes que se encuentran en el estadio Multiestructural o de Transición no se centran en este aspecto y en algunos casos consideran la selección no adecuada.

Se seleccionan 100 alumnos buenos, medianos y flojos. ¿Es una buena selección?

P6		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	7	58.3%	11	78.6%
	M	4	33.3%	2	14.3%
	T	1	8.3%	0	0
	R	0	0	0	0
NC		0	0	1	7.1%

Pregunta 7: En la misma situación anterior se ha decidido escoger los 100 primeros alumnos que lleguen al centro. ¿Esta opción es mejor o peor que la anterior?¿Por qué?

Encontramos que las respuestas de los alumnos de bachillerato consideran esta opción peor (46%). Entre las respuestas dadas por los estudiantes universitarios sigue existiendo un 30% para los que sería peor porque no representa a la población y no incluyen todos los casos que se pueden dar (buenos, malos y regulares). Esto hace que las respuestas dadas por ellos se encuentren, a lo sumo, en el estadio Multiestructural. Destacan las respuestas de dos estudiantes de bachillerato localizadas en el estadio de Transición, pues están considerando la aleatoriedad y la variabilidad de la muestra como factor importante a tener en cuenta.

Escogemos los 100 primeros alumnos que llegan al centro. ¿Es buena selección?

P7		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	2	14.3%
	U	5	41.7%	6	42.6%
	M	7	58.3%	3	21.3%
	T	0	0	2	14.2%
	R	0	0	0	0
NC		0	0	1	7.1%

Pregunta 9: Lanzamos una moneda 10 veces, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es más posible que ocurra?

a. CCCCCCCCCC

b. CXCXCXCXCX

c. CCCCCXXXXX

Explica tu elección anterior y si no estuvieras de acuerdo con ninguno de las anteriores indica un resultado que creas más posible y por qué lo consideras así.

En la pregunta 9 cambiamos el contexto. En este caso presentamos un contexto más utilizado para el trabajo en el cálculo de probabilidades: el lanzamiento de una moneda. Tratamos de estudiar si el contexto puede condicionar la respuesta de los estudiantes, a pesar de estar preguntando sobre el mismo término.

En esta pregunta encontramos que, en Bachillerato, un 28% de los estudiantes indican que da igual la opción que escojamos, mientras que un 53% de los universitarios dicen lo mismo. También es significativa la cantidad de estudiantes que han escogido la segunda o tercera opción como más probable, incluso entre los estudiantes universitarios.

Con respecto a las categorización de las justificaciones dadas a la selección hecha, encontramos un porcentaje alto (57.1% Bachillerato, 33.3% universitarios) de estudiantes que basan su justificación en que hay resultados que son más representativos y otros no de los que pueden salir al lanzar una moneda. Esta idea entendemos que es la que les hace escoger alguna opción frente a otra al analizar cuál es el resultado que esperan que salga con mayor probabilidad. Las respuestas clasificadas en el estadio de transición son aquellas que saben que, por los conocimientos que tienen, todos los sucesos son equiprobables, pero su intuición o experiencia, les hace aún dudar sobre este hecho y en la respuesta se observan dudas.

Lanzamos una moneda 10 veces,

¿cuál de los siguientes resultados crees que es más posible que ocurra?

P9		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	1	8.3%	0	0
	U	4	33.3%	8	57.1%
	M	0	0	1	7.1%
	T	0	0	3	21.4%
	R	6	50%	1	7.1%
NC		1	8.3%	1	7.1%

Pregunta 10: De los siguientes datos queremos calcular la media: 7, 7.1, 7.5, 6.9, 6.5, 7.5, 6.9. ¿Cómo lo harías?

Entre los estudiantes universitarios vemos que las respuestas dadas son todas correctas. Pero las respuestas dadas por los estudiantes de bachillerato se reparten entre los distintos estadios, pues aún no tienen bien clasificadas las diferentes medias que conocen. Aunque sigue siendo bastante mayoritaria la respuesta en el estadio Relacional.

Cálculo de la media

P10		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	0	0	1	7.1%
	M	0	0	2	14.2%
	T	0	0	1	7.1%
	R	12	100%	10	71.4%
NC		0	0	0	0

Pregunta 11: El resultado anterior, ¿qué indica?

Vemos que en la interpretación del concepto de media aritmética hay diferentes tipos de respuesta. Destaca que entre las respuestas de los estudiantes universitarios sólo hay un 33% que sigue estando en el estadio Relacional. Entre los estudiantes de bachillerato sólo encontramos un 14% de respuestas en el estadio Relacional. Hay un porcentaje muy alto (78%) con respuestas en el estadio Preestructural. Ya hemos indicado que estos estudiantes no están acostumbrado a justificar su conocimiento, lo que podemos comprobar en estas preguntas.

¿Qué indica la media?

P11		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	11	78.5%
	U	4	33.3%	1	7.1%
	M	3	25%	0	0
	T	1	8.3%	0	0
	R	4	33.3%	2	14.3%
NC		0	0	0	0

Pregunta 12: De las siguientes frases indica cuál es correcta. Justifícalo.

a. *Con los datos de una muestra podemos deducir la media de la población.*
b. *Con los datos de una muestra podemos inferir la media de la población.*

Moore (2005) define el término inferir como *"métodos que permiten sacar conclusiones de una población a partir de los datos de una muestra"*. Con esta pregunta tratamos de averiguar si los estudiantes distinguen correctamente entre los términos inferir y deducir.

Acerca de estos términos han sido muchas las encuestas, sobre todo de Bachillerato, en las que aparece la opción escogida pero no se explica por qué seleccionan dicha opción. Entendemos que no tienen clara la diferencia entre inferir y deducir y que no les supone nada marcar una de las dos. Todos seleccionan la opción A como válida. Una posible interpretación puede ser que la palabra inferir no ha aparecido aún en el aula.

Los estudiantes universitarios escogen en su mayoría la opción B (53%). Destaca un 23% de las respuestas que indican que mediante los datos de la muestra sólo podemos aproximar el valor real de la media, por ser la muestra representativa. En estos casos se ha marcado la opción B.

Diferencia entre inferir y deducir

P12		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	0	0
	U	3	25%	12	85.7%
	M	0	0	0	0
	T	5	41.7%	0	0
	R	3	25%	0	0
NC		0	0	2	14.2%

Pregunta 13. ¿Qué entiendes por una distribución? Pon un ejemplo.

El manual universitario Moore (2005) define el la distribución de una variable como aquello que *"nos dice qué valores toca y con qué frecuencia lo hace"*. Y entiende por distribución muestral de un estadístico *"la distribución de los valores tomados por él en todas las muestras posibles de igual tamaño de la misma población"*. Tratamos de ver qué entienden los estudiantes de este término.

Este término tiene distintos significados dentro del contexto en el que trabajemos, por esto resulta que los estudiantes han dado una cantidad muy grande de respuestas diferentes. Entre los estudiantes de bachillerato encontramos definiciones que hablan de: aproximación a la probabilidad, estudio entre 0 y 1, cálculo de probabilidades, estudio de la media, estudio estadístico de datos invariables. Pero la respuesta que más veces aparece es la que contiene la idea de reparto (21%).

Los estudiantes universitarios, por su parte, la definen como el "comportamiento" o característica de una variable (30%), la forma de agrupar los datos, variable aleatoria, cómo se reparte una población.

Esto se refleja en la clasificación que hacemos de las respuestas dadas por los estudiantes. Entre los estudiantes universitarios observamos que entre los estadios de Transición y Relacional encontramos más de un 41% de las respuestas, mientras que entre las dadas por los estudiantes de bachillerato no hemos encontrado respuestas más allá del estadio Multiestructural. Este término presenta una dificultad que se llega a salvar con mayor formación, pero no sin dificultad.

¿Qué entiendes por una distribución?

P13		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	1	7.1%
	U	1	8.3%	4	28.6%
	M	2	16.7%	4	28.6%
	T	4	33.3%	0	0
	R	1	8.3%	0	0
NC		4	33.3%	5	35.7%

Pregunta 15: ¿Qué entiendes por algo significativo estadísticamente hablando?

El manual universitario de Moore (2005) define de manera muy concreta el término significativo: "*Significativo en estadística no quiere decir importante. Quiere decir que es muy poco probable que ocurra sólo por azar*". Este término es especialmente importante en estadística y su significado varía del contexto cotidiano al contexto matemático, como hemos podido comprobar. Es por ello que debemos tener muy claro cuál es el significado que los estudiantes tienen de él.

El 35% de los estudiantes de bachillerato no responde a esta pregunta. Tanto los de bachillerato como los universitarios que contesta indican en su mayoría que se trata de un dato importante en estadística (28% y 53% respectivamente).

Si categorizamos las respuestas obtenidas encontramos que, mientras las dadas por los estudiantes universitarios se reparten por todos los estadios, las respuestas de los estudiantes de bachillerato están ubicadas en su mayoría en el estadio Preestructural o Uniestructural. Destaca sólo un alumno de bachillerato que ha dado una respuesta en el estadio Relacional al indicar que se trata de un dato poco común.

¿Qué entiendes por significativo estadísticamente?

P15		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	2	16.7%	5	35.7%
	U	5	41.7%	3	21.4%
	M	1	8.3%	0	0
	T	1	8.3%	0	0
	R	1	8.3%	1	7.1%
NC		2	16.7%	5	35.7%

4.2.3 Categoría 3. Significado propio del contexto matemático

Ahora pasamos a estudiar las cuestiones relativas a la inferencia estadística y que hemos clasificado dentro de la categoría de propias del contexto matemático, y que, por tanto, deben ser definidos previamente para que los estudiantes las puedan definir y conocer.

PREGUNTA 14: ¿Qué es un estadístico? Pon algún ejemplo.

Los Manuales Universitarios definen este término como "*número que se puede calcular a partir de los datos de la muestra sin utilizar ningún parámetro desconocido.*"

A esta pregunta los estudiantes que responden (sólo la mitad de los encuestados lo hacen) coinciden en indicar que un estadístico es la persona que se dedica a la estadística (42% de Bachillerato).

En el análisis de las respuestas dadas hemos clasificado, en el estadio Preestructural a las respuestas que dan una definición incoherente o que no es concluyente en ningún sentido. En el estadio Uniestructural encontramos las respuestas que de alguna manera lo definen relacionándolo con la estadística, pero que en nada tiene que ver con el significado estadístico del término. Vemos que la mayoría de las respuestas de Bachillerato están en este estadio y ninguno se pudo ubicar a un estadio superior. En cambio, sí hubo dos estudiantes de Universidad que dieron una definición que se acerca a la definición correcta.

¿Qué es un estadístico?

P14		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	4	28.6%
	U	0	0	5	35.7%
	M	1	8.3%	0	0
	T	0	0	0	0
	R	1	8.3%	0	0
NC		9	75%	4	28.6%

Pregunta 16: Vamos a realizar un "muestreo aleatorio", indica qué es lo que pretendemos y cómo lo podremos hacer en un caso concreto.

Esta pregunta permite que los estudiantes demuestren su conocimiento sobre la construcción de muestreos aleatorios y los pasos que deben seguir para conseguirlo. Observamos que en Bachillerato no encontramos ningún estudiante que respondiera a esta pregunta. Pero llama la atención que, entre los estudiantes universitarios, como mucho llegan a indicar que se trata de seleccionar unos datos de manera aleatoria. Ninguno de los estudiantes encuestados es capaz de explicitar un procedimiento para la obtención de muestras aleatorias.

En la clasificación en estadios de las respuestas encontradas, observamos en la tabla 9 que, entre los estudiantes de Bachillerato las respuestas no pasan del estadio Uniestructural, que recoge todas aquellas respuestas que no llegan ni siquiera a nombrar el término azar u otro sinónimo. Los estudiantes universitarios que están en el estadio Multiestructural son aquellos que sólo describen el muestreo aleatorio como la selección al azar de datos. No aparece ninguna respuesta en un estadio superior porque no responden a lo que se les pide, esto es, no hay ninguna respuesta que detalle la forma en que se debe realizar el muestreo y por qué razón lo podemos considerar aleatorio, frente a otros tipos de muestreo.

Realización de un muestreo aleatorio.

P16		UNIVERSIDAD		BACHILLERATO	
ESTADIO	P	0	0	5	35.7%
	U	3	25%	2	14.3%
	M	9	75%	0	0
	T	0	0	0	0
	R	0	0	0	0
NC		0	0	7	50%

4.3 Análisis de la propuesta de enseñanza

El análisis de la propuesta de enseñanza lo realizaremos refiriéndonos a la comprensión de los términos estadísticos y la clasificación que hemos realizado. A lo largo de las sesiones desarrolladas han ido surgiendo diferentes términos estadísticos que han tenido que ser interpretados por los alumnos en algunos casos, y explicados por el profesor en otros.

Podemos observar que entre la propuesta que se realiza y la que realmente se lleva a cabo hay cierta diferencia. Debemos tener en cuenta que, en el aula, siempre surgen elementos que impiden que la propuesta se desarrolle tal y como se ha pensado. La novedad de tener que decidir los pasos que tienen que seguir para conseguir lo que el profesor les propone, hace que las sesiones se desarrollen muy lentamente. Por otro lado, los estudiantes deben realizar una serie de operaciones que debe supervisar el profesor para, de esta forma, asegurar su correcta realización.

En este apartado trataremos de caracterizar las respuestas dadas por los estudiantes según la taxonomía SOLO que estamos utilizando para categorizar las respuestas. Debemos tener presente que, como ya hemos indicado, esta categorización nos indica cómo son las respuestas de los estudiantes ante una tarea concreta. Sin embargo, un mismo estudiante puede mostrar diferentes categorías de respuesta si variamos la tarea. Y por otro lado, nos va a servir, como ya indicamos, para conocer la estructura de la respuesta, que se relaciona con la cualidad del aprendizaje, y que medimos según los niveles de comprensión ante una tarea concreta. Debemos recordar que se trata de caracterizar la respuesta a una tarea concreta por lo que un mismo alumno puede presentar diferentes respuestas en estadios distintos.

El primer término al que se refiere el profesor durante la explicación del trabajo que se va a realizar es el de POBLACIÓN. Sobre este término no hay ningún tipo de explicación ni de problema entre los estudiantes. Todos entienden a qué se hace referencia con este término y pueden seguir el estudio sin problemas.

El segundo término que aparece de manera natural en la construcción de los intervalos de confianza es el de MEDIA. Aquí tenemos varias dificultades manifestadas por los estudiantes. Nos interesa que los estudiantes conozcan el uso de la media como resumen de una cantidad de datos. En esta primera sesión el profesor les plantea que indiquen una forma de resumir los datos que están en una tabla de 180 estaturas de estudiantes de Bachillerato.

La primera respuesta cuando se les pide resumir los datos es, en general para todos los estudiantes, tratar de organizarlos en una tabla de frecuencias. Todos los estudiantes, relacionan lo que se les pide con la experiencia previa que poseen sobre la estadística descriptiva. Hay estudiantes que tratan de dar los datos agrupados en intervalos, con lo cual interpretan que están resumiendo mejor los datos.

Cuando el profesor les indica que tienen que calcular la media para acercarnos a resumir la información encontramos varias interpretaciones de la misma.

La alumna A1 interpreta que resumir los datos es agruparlos en tablas de frecuencias, y posteriormente, cuando se indica que hay que calcular la media, está entendiendo que hay que buscar el valor que más se repite (moda). En este caso podemos ubicar la respuesta dentro del estadio UNIESTRUCTURAL. Pues la estudiante se está fijando únicamente en la repetición para poder resumir los datos.

La alumna A3 tampoco interpreta correctamente la media, pues la explica a través del cálculo de la desviación típica. En este caso entendemos que la alumna está utilizando un cálculo en el que se hace uso de la media. No entiende que se le pide que la calcule sino que busca un cálculo conocido en el que se utiliza. Ubicaremos esta respuesta en el estadio PREESTRUCTURAL, porque se está centrando en un dato único con el que pretende dar respuesta a lo que se pide, pero que es del todo erróneo.

El alumno A5 comienza tratando de resumir los datos agrupándolos en intervalos. Pero es el único de los estudiantes que habla de calcular la media desde un principio. Además trata de explicar, a su manera, que el cálculo de la media puede no resultar el valor que buscamos, sino que puede dar uno aproximado. La respuesta dada por este estudiante la podemos ubicar dentro del estadio MULTIESTRUCTURAL, pues aunque está algo encaminada en el sentido de la tarea propuesta no llega a integrar todos los elementos que la componen.

Aquí señalamos una dificultad importante. Los estudiantes no entienden que la media sirva para resumir información de una serie de datos, a pesar de conocer la media. No encontramos que los estudiantes interpreten que la media es exclusivamente la suma de dos extremos y dividirlo entre dos, sino que conocen el algoritmo y por tanto, sí saben que al tener más datos deben dividir por el número total de datos que intervienen. La dificultad en este concepto viene por su desconocimiento de la media como aglutinador de información. En este sentido, la propuesta de enseñanza les ha mostrado esta nueva faceta de la media y les ha ayudado a crecer en el conocimiento de la misma. Además esto es fundamental en estadística inferencial, pues explica por qué se trabaja con este parámetro y no con otro.

El siguiente término con el que nos encontramos es el de MUESTRA. En este caso, el profesor lleva a los estudiantes hasta este término, en la búsqueda de la media de la población que le ha ofrecido a los estudiantes. Aquí surgen distintos tipos de respuestas. En la forma en que quieren construir la muestra podemos explicitar las concepciones que poseen sobre la misma.

La Alumna A1 indica que debemos coger el pequeño, el mediano y el más grande. De esta forma trata de encontrar valores que no se alejen mucho de los que tenemos. Subyace la idea de representatividad de la muestra.

El alumno A2 también entiende que la selección debe parecerse a la que tenemos, no admitiría como muestra válida aquella cuyos resultados fueran de alumnos altos exclusivamente. Incluso en la segunda sesión, después de haber explicado el método de selección de los datos a través de un sorteo, este alumno se vuelve a plantear el problema de la exactitud desde el punto de vista de la representatividad de la muestra.

Analizando la respuesta dada por la alumna A3 encontramos que, en primer lugar, necesita un elemento que le permita agrupar los datos, no los puede ver en conjunto. Ese elemento es la edad, que en este caso es irrelevante al tratarse de estaturas de alumnos del mismo curso. Pero una vez los tiene por edades, escogería el dato mayor y el menor con los que calcularía la media. Hallará la media de dos valores extremos. En este caso entiende que el significado de la media es el valor que está en el centro..

La respuesta del alumno A5 también expresa que se debe controlar, de alguna manera, la muestra se obtiene. En este caso, el alumno A5 pone un ejemplo muy claro de lo que quiere decir. Así, si la distribución está formada por 3 altos y 20 bajos, no admite como válida una muestra con pocos datos de los considerados bajos, de los que hay más en la población.

Este alumno entiende, igual que los demás, que la muestra es más válida cuanto más se parezca a la población de la que proviene.

Esto nos permite situar todas las respuestas dentro del mismo estadio: UNIESTRUCTURAL. Como hemos indicado, se basan en experiencias que poseen para justificar su razonamiento y se centran en un único atributo: la muestra debe ser representativa del conjunto de datos. Por esta razón los estudiantes buscan métodos de selección que consideran aleatorios pero, que en el fondo tratan de que reproduzcan los esquemas de la población de partida que ellos intuyen que posee, lo que lleva a situaciones erróneas. Por esta razón hablan los estudiantes de que la muestra sea “más exacta o no”.

El profesor en la segunda sesión introduce el término ESTIMACIÓN, a lo largo de dicha sesión se dedican al cálculo de estimaciones de la media a través de la extracción de muestras de la población. El profesor da la definición que van a utilizar de este término en el aula de matemáticas, para que de esta forma no haya confusión con otros posibles significados.

Debemos tener en cuenta que a lo largo de todas las sesiones de trabajo, a los estudiantes se les hace reflexionar en voz alta. Así, intentamos, por un lado que el alumno trate de expresarse en lenguaje matemático en el aula y por otro lado, el profesor, en muchas de las conversaciones del aula lo que hace es repetir en voz alta lo que el estudiante ha dicho, para de esta forma enfrentarlo a la respuesta que da y a la vez que los demás compañeros puedan seguir el razonamiento que se está desarrollando en la clase. Todo esto en el ánimo de realizar aportaciones.

El MUESTREO ALEATORIO debe ser explicado por el profesor pues los alumnos en ningún caso han realizado antes un muestreo aleatorio. A tal fin, dedica el profesor una sesión. El procedimiento que tienen que realizar, lo entienden en seguida, pero siempre surge la duda de que el muestreo que realicemos el resultado no sea representativo de la población. Es por ello que, el profesor, tiene que insistir en que la validez del muestreo lo da el método de selección, y no los resultados que obtengamos.

En las sesiones siguientes se introducen términos como NIVEL DE CONFIANZA, INTERVALO DE CONFIANZA, que son definidos por el profesor para que no haya duda de su significado, pues se trata de conceptos que tienen significado propio dentro del contexto matemático. Otros términos como TAMAÑO DE LA MUESTRA no son definidos por tener el mismo significado en ambos contextos.

Cuando contrastan cómo intervienen los diferentes conceptos en el intervalo de confianza encontramos las siguientes situaciones:

A) Nivel de confianza – Amplitud del intervalo

En este caso interviene el alumno A5 quien demuestra entender que cuanta más confianza exigimos mayor tiene que ser la amplitud del intervalo.

B) Nivel de confianza – Tamaño de la muestra menor

Cuando el profesor pregunta sobre estos dos elementos, intervienen los alumnos A2 y A5 quienes afirman comprenden que cuanto menor es el tamaño de la muestra para conseguir una confianza determinada tenemos que construir un intervalo de confianza mayor.

C) Nivel de confianza – Tamaño de la muestra – Amplitud del intervalo

Cuando se han introducido los tres elementos del intervalo de confianza es cuando podemos tener más dificultades y cuando realmente vemos si han comprendido la finalidad y utilidad de los intervalos de confianza. En este momento aparece un diálogo interesante entre el profesor y el alumno A2. En dicha conversación se da la circunstancia de que el alumno no entiende que la cantidad de datos que utilicemos en la muestra hace que se mejore el resultado, sino que lo que observa es que el intervalo de confianza es más pequeño. Este hecho puede hacer que, por tanto, la media real esté fuera del intervalo. No está teniendo en cuenta el tercer elemento que es la confianza del intervalo. Este alumno es un claro ejemplo de estudiante que entiende los elementos por separado pero no ha sido capaz aún de integrarlos y comprenderlos en todo su conjunto. Podríamos clasificarlo dentro del estadio MULTIESTRUCTURAL, por no integrar correctamente los elementos. Conoce los cálculos que hay que hacer pero tiene dificultades a la hora de interpretarlos en conjunto.

CAPÍTULO 5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez hemos descrito y analizado los diferentes elementos que forman esta memoria haremos, en este capítulo, un resumen global de la investigación señalando las principales aportaciones derivadas de la misma y haremos una breve exposición sobre las implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje y sobre nuestra perspectiva futura de investigación.

A lo largo de todo el trabajo se puede observar que nuestra investigación es de carácter educativo, profundizando en el conocimiento de los términos estadísticos relacionados con la inferencia estadística y en la forma en que se inicia el estudio de la estadística formal en la enseñanza secundaria. Pensamos que puede servir de agenda a los educadores para determinar el tipo de enseñanza y las condiciones de aprendizaje a proporcionar al alumnado, para de este modo contribuir a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje y de las condiciones en las cuales se realiza.

No podemos perder de vista los objetivos que nos hemos planteado al principio de nuestra investigación así como las hipótesis de investigación, que pasamos a recordar a continuación:

OBJETIVO 1. Conocer cómo se aborda la inferencia estadística en Bachillerato en los distintos libros de texto del Segundo Curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias Sociales.

HIPÓTESIS 1. En los libros de texto, cuando se comienza a estudiar la estadística inferencial, aparecen muchos términos técnicos, propios del lenguaje matemático. Algunas de las definiciones que se dan en los libros de texto presentan una definición propia del lenguaje habitual, y no del matemático. Esto puede producir en el alumnado dificultades en la comprensión de dichos conceptos.

OBJETIVO 2. Analizar cómo entienden los alumnos los términos estudiados en los libros de texto.

HIPÓTESIS 2. Los estudiantes no conocen aquellos términos que hemos descrito como propios del contexto matemático. Además, presentan dificultades de comprensión y muestran errores conceptuales respecto de aquellos términos en los que difiere su significado en el contexto habitual del contexto matemático.

OBJETIVO 3. Desarrollar una propuesta de enseñanza de la inferencia estadística que facilite la comprensión de los conceptos que cambian de significado según el contexto de trabajo.

HIPÓTESIS 3. Una enseñanza de la estadística en la que los estudiantes expongan en clase sus razonamientos hace que el alumnado participe en la construcción del conocimiento, que el profesorado conozca de qué manera se formalizan los conceptos estadísticos y detectar los errores conceptuales que puedan surgir. Todo esto ayudará a que el profesorado sea capaz de guiar a los estudiantes en su formación y en la construcción de los nuevos conceptos, facilitando una comprensión más profunda de los mismos.

Nuestro trabajo de investigación se ha desarrollado en tres fases relacionadas con estos objetivos e hipótesis de investigación.

A continuación expondremos las conclusiones alcanzadas sobre cada uno de los objetivos e hipótesis, planteados en nuestra investigación.

5.1 Conclusiones del estudio de los términos estadísticos estudiados en los libros de texto

Durante esta primera fase, nos hemos propuesto conocer cómo se aborda la inferencia estadística en los distintos libros de texto del Segundo Curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias Sociales. La hipótesis de partida es:

HIPÓTESIS 1. En los libros de texto, cuando se comienza a estudiar la estadística inferencial, aparecen muchos términos técnicos, propios del lenguaje matemático. Algunas de las definiciones que se dan en los libros de texto presentan una definición propia del lenguaje cotidiano, y no del matemático. Esto puede producir en los estudiantes dificultades en la comprensión de dichos conceptos.

Para comprobar este hecho hemos seleccionado los términos específicos relacionados con la Inferencia Estadística y aquellos otros que necesitamos para desarrollarla, y los hemos clasificado según las tres categorías descritas por Shuard & Rothery (1984), esto es, atendiendo a su significado en dos tipos de contexto (el cotidiano y el matemático).

En el primer análisis realizado hemos estudiado el significado que tienen los términos según la RAE. Hemos encontrado hechos muy significativos que nos han permitido la catalogación de los términos que se utilizan para estudiar la Inferencia Estadística en Bachillerato:

CATEGORÍA 1. Mismo significado en ambos contextos.

Términos bajo esta categoría: Estadística, Población, Individuo, Tamaño de la muestra.

Todos estos términos tienen varias características comunes como son:

- Los términos se encuentran todos definidos en el diccionario de la RAE. Esto es importante, porque tiene que ver con el trasvase que se produce en los términos específicos cuando llegan al contexto cotidiano. El paso al nuevo contexto para estos términos se ha hecho con coherencia, frente al contexto matemático, esto es decir, en ambos contextos tienen el mismo significado.
- Carecer de diferencias cuando pasamos de un contexto a otro significa que el término es equivalente en cualquiera de los contextos en el que se utilice. Esto es

una gran ventaja puesto que no es necesario remarcar su significado pues es conocido por todo el alumnado.

- Algunos libros de texto no definen los términos por entender que son conocidos pues se han trabajado en cursos anteriores.
- Encontramos algún libro de texto que modifica el significado del término cuando le incorpora alguna característica que no necesariamente conlleva, como es el caso de pedir que la población sea un conjunto homogéneo. Introducen matices que modifican el concepto y generan errores que inicialmente no se presentan.

CATEGORÍA 2. Distintos significado en ambos contextos.

Términos bajo esta categoría: Media, Estimación, Muestra, Probabilidad, Inferir, Distribución, Riesgo, Significativo.

Estos términos tienen el siguiente denominador común:

- Se trata de una selección de términos que están definidos en el diccionario de la RAE, pero con algún pequeño matiz que hace que el sentido que se le da al término no sea el mismo que tiene en el contexto matemático. Es más, el sentido que adquiere es conceptualmente erróneo.
- La media definida por el diccionario sólo habla del valor que está en el centro de dos extremos. Esta definición puede generar errores conceptuales cuando estamos trabajando con muchos datos y existe asimetría hacia un lado. En este caso la media no va a localizarse en el centro de los extremos, sino que se moverá hacia un lado.
- Muestra. Es un término al que dedicamos especial atención. Es muy llamativo el significado que tiene en el contexto cotidiano y comprobamos que se propaga en los libros de texto. Además, se trata de un término fundamental en la estadística inferencial, pero desde su definición se le ha dotado de un error conceptual importante: “la muestra debe representar a la población de la que proviene”. Este error no es fácilmente evitable, pues los estudiantes, incluso universitarios, continúan pensando de la misma forma sobre la muestra.
- Probabilidad. Se encuentra definida en el contexto cotidiano exclusivamente para los casos de equiprobabilidad. Esto puede llevar al error conceptual de que

en todas las situaciones sea susceptible del cálculo de la probabilidad según la ley de Laplace, por suponerla, por extensión, que todos los casos son equiprobables. Los libros de texto suelen dar la definición laplaciana, pero no plantean situaciones en las que no se pueda aplicar la ley de Laplace y por tanto los sucesos no sean equiprobables. Como hemos visto, los libros de texto no ilustran suficientemente los términos que presentan. El sesgo que se da en la presentación de términos puede hacer que los estudiantes no desarrollen una visión amplia de los mismos y que, por tanto, arrastren errores conceptuales que más adelante será muy difícil de corregir.

- Inferir. Curiosamente, en el diccionario de la RAE se define con el sentido de deducir. Son términos contrapuestos en el contexto matemático. Partimos de un error conceptual que los libros de texto ni siquiera consideran, pues no dan la definición del término, aunque sí lo utilizan.
- Distribución. Es un término al que los libros de texto dan un tratamiento muy formal en su definición. Esto puede producir que los estudiantes ignoren la definición porque para ellos pueda no tener sentido. Es importante que las definiciones que utilicemos sean útiles, es decir, que los alumnos las comprendan y las puedan utilizar en diferentes contextos.
- Riesgo. En el contexto cotidiano tiene un significado muy evidente para los alumnos, además de tener un sentido de peligrosidad. En el contexto matemático hay que orientar correctamente esta definición y el sentido de daño que conlleva. Los libros de texto de nuevo dan una definición extremadamente formal que puede no ser útil para los estudiantes y simplemente la ignoran porque no la entienden.
- Significativo. Es un término importante en Estadística Inferencial. Es un término al que se le debe dedicar tiempo para que el estudiante pueda comprender correctamente su significado. Además, será un término muy recurrente a lo largo de todos los estudios estadísticos.

Hemos podido observar que los libros de texto no presentan de manera adecuada estos términos y en ocasiones repiten los errores que existen en el contexto cotidiano.

Además, queremos destacar que las definiciones de los términos no son útiles en sí mismas, es importante que se ilustren suficientemente, para que el alumnado puedan comprobar las características que presenta la definición en diferentes situaciones.

CATEGORÍA 3. Significado propio del contexto matemático.

Términos bajo esta categoría: Estadístico, Parámetro, Muestreo aleatorio, Nivel de confianza, Error máximo admisible, Desviación Típica, Normal, Sesgado, Eficiencia, Proporción muestral, Contraste de hipótesis, Hipótesis nula, Nivel de significación, Hipótesis alternativa, Error de Tipo I, Error de Tipo II.

- Todos los términos anteriores tienen como característica principal que no están definidos en el diccionario de la RAE. Esto es lo que nos ha permitido clasificarlos como términos que son propios del contexto matemático.
- El término muestreo aleatorio genera confusión con las definiciones que dan los libros de texto. Debemos recordar que el término muestra no se definía correctamente, y como este está íntimamente relacionado con aquel, es por lo que podemos suponer que en su definición se trasladan los mismos errores conceptuales.
- Anteriormente indicamos que los errores conceptuales que se producen con términos estadísticos, que posteriormente se requieren para definir otros, se propagan por los nuevos términos definidos. Es el caso del término *muestra aleatoria simple,* pues al basarse en la obtención de una muestra y ésta haber sido mal definida, los libros de texto no dan la definición correcta. Se produce así una propagación del error conceptual.
- Encontramos que estos términos son muchos más que los analizados en las dos categorías anteriores. Esto nos señala que estamos ante una tecnificación del lenguaje y es indicativo de que al tratarse de la estadística inferencial formal, se requiere un lenguaje propio del contexto matemático.

En conclusión, la primera categoría la constituyen los *términos con el mismo significado en ambos contextos,* y que por tanto no deberían presentar dificultad a los estudiantes, por aparecer de manera habitual en el lenguaje cotidiano. En este caso, la mayoría de los textos analizados han dado la definición correcta de los términos. Aunque hay algunos que en ocasiones añaden aspectos en la definición que modifican sensiblemente su significado.

La segunda categoría está formada por los *términos con distinto significado en ambos contextos,* que aparecen tanto en un contexto cotidiano como en el contexto matemático, pero, en este último contexto modifican su significado, y en ocasiones, este hecho pasa desapercibido para estudiantes y profesores. Esto puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Apreciamos que la mayoría de los textos analizados utilizan las definiciones dadas en el contexto cotidiano, en vez de usar la definición del contexto matemático. Esto es algo que consideramos grave, puesto que el libro de texto como herramienta de trabajo en el aula, tiene que ayudar a salvar los posibles obstáculos que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se producen y presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta.

La tercera categoría la constituyen los *términos propios del contexto matemático* que por tanto el estudiante desconoce y se introducen por primera vez a través del libro de texto. Encontramos que muchos de los textos no los definen, ya sea porque entienden que los conocen los estudiantes o por creer que de esta forma puedan simplificar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En otros casos, hemos observado que algunos textos introducen términos propios de la Inferencia Estadística que luego no vuelven a utilizar, o que utilizan denominándolo de otra forma. Ejemplo de ello es el término *estadístico*, al que se refieren los libros de texto como *parámetros poblacionales*. Esto, entendemos que puede provocar confusión o al menos nos indica que el libro de texto es inconsistente, por no utilizar aquellos términos que define.

Hemos constatado que las dificultades y posibles obstáculos debidos al lenguaje, descritos por Orton (1990), no son exclusivos del profesor, sino que los libros de texto también pueden provocar confusiones en las definiciones y tratamiento que se le da a los términos por no estar definidos correctamente. Cuando se escribe un libro de texto se debe pensar que sea legible, tal y como lo define Orton (1990), esto es, que no interrumpa el lenguaje la comprensión de los conceptos que estamos estudiando. Existen libros de texto que no hacen un esfuerzo en este sentido y no dan la definición de los términos que corresponde en el contexto matemático. En otras ocasiones, el libro de texto adorna la definición, o simplemente da una definición errónea. Estas diferencias en las definiciones no son fácilmente localizables, y los estudiantes no posee el conocimiento necesario para identificar el error. Además, el profesorado admite que utiliza el libro de texto como instrumento de formación sobre estos conceptos relativos a la Inferencia Estadística, con lo que la única definición que conoce de los términos es la que aparece en estos libros de texto. Esto hace que el docente no tenga criterio para decidir qué términos están bien definidos y cuáles no, dejando toda la responsabilidad sobre los términos relativos a la Inferencia Estadística a los libros de texto. Con este estudio también hemos podido constatar que, efectivamente, el lenguaje que se utiliza en este nivel educativo está compuesto, en gran medida, por términos específicos matemáticos. Debemos ser conscientes de que estos estudiantes se están preparando para comenzar el estudio de una matemática superior, por lo que los conceptos, y por tanto, los términos son fundamentales y deben estar bien definidos. En particular, el Contraste de Hipótesis necesita muchos términos propios del lenguaje matemático para su desarrollo. Son muchos conceptos nuevos que el estudiante debe asimilar correctamente para así entender el razonamiento y el procedimiento necesario para resolver correctamente un Contraste de Hipótesis.

Concluyendo: en el análisis de los libros de textos, sobre aquellos términos relativos a la Inferencia Estadística, hemos encontrado que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos, y que en ocasiones, la definición que de estos términos aparece en los libros de texto no se corresponde con la propia del contexto matemático, sino más bien con la del contexto cotidiano.

El objetivo 1 que nos hemos propuesto, con el que pretendemos conocer cómo tratan los libros de texto los diferentes términos relativos a la inferencia estadística se completa aquí. Con la información aportada por la investigación desarrollada, existen evidencias suficientes para poder asegurar que la hipótesis 1 es bastante verosímil.

5.2 Conclusiones del estudio de la comprensión de los términos estadísticos por los estudiantes

Nuestro siguiente paso en la investigación fue documentar la comprensión de los estudiantes sobre los términos estadísticos que habíamos analizado en los libros de texto. En este sentido formulamos la siguiente hipótesis:

HIPÓTESIS 2. Los estudiantes no conocen aquellos términos que hemos descrito como propios del contexto matemático. Además, presentan dificultades de comprensión y muestran errores conceptuales respecto de aquellos términos en los que difiere su significado en el contexto habitual del contexto matemático.

En esta fase de la investigación desarrollamos un cuestionario que administramos a los estudiantes de Bachillerato y Universidad para conocer cómo comprenden algunos de los términos que habíamos encontrado que podían presentar dificultad en su comprensión. Entre los términos clasificados en la categoría 1 encontramos que:

- Los estudiantes de Bachillerato presentan muchas dificultades para dar respuestas en los estadios más avanzados, la mayoría se encuentran en los estadios Preestructural o uniestructural (taxonomía SOLO).
- Las respuestas de los estudiantes son muy pobres, pues entendemos que no están habituados a expresarse y lo hacen de forma incorrecta o incoherente.
- Los estudiantes universitarios sí ofrecen respuestas más elaboradas, pues se sitúan en su mayoría en el estadio Multiestructural y de Transición. Algunas respuestas están clasificadas incluso en el estadio Relacional.
- Es destacable que a pesar de tratarse de términos conocidos por los estudiantes, éstos tienen dificultades para definirlos correctamente. Esto nos sugiere la existencia de otro tipo de dificultades que se manifiesta en esta situación y que, en principio, no tienen su origen en la definición del término.

Sobre los términos clasificados en la categoría 2 concluimos lo siguiente:

- Entre el alumnado de Bachillerato encontramos un porcentaje elevado que no son capaces de dar un enunciado coherente. Creemos que entre los estudiantes existe una dificultad añadida cuando se trata de expresar conceptos matemáticos.
- Con respecto al término muestra, encontramos que el alumnado de Bachillerato considera que la muestra debe ser representativa del conjunto de datos. Y esto se extiende a todas las preguntas relativas a la muestra. Este hecho nos ha llevado a clasificar en el estadio uniestructural la mayoría de las respuestas del alumnado de esta etapa.
- Entre los estudiantes universitarios disminuye el porcentaje de respuestas que consideran que la muestra debe ser representativa de la población.

- Es significativo que entre los estudiantes universitarios, cuando se les pregunta directamente si la muestra debe ser representativa de la población, exista un porcentaje alto que responda afirmativamente. Con lo cual, esta concepción errónea de la muestra sigue prevaleciendo, aunque conozcan la definición correcta.
- Los contextos de las cuestiones pueden dificultar la aplicación de la definición que posean. No son capaces de transferir el concepto a diferentes situaciones.
- Los estudiantes universitarios no valoran correctamente si una muestra dada en un contexto determinado es válida o no. Esto demuestra la poca práctica que tienen en la extracción de muestras, no poseen esta formación.
- Las respuestas del alumnado a la pregunta contextualizada en una situación en la que usan monedas y dados obtiene resultados en los estadios de transición y Relacional entre los estudiantes universitarios. Esto pone de relieve que se trata de un contexto que de alguna manera es más cercano para el estudiante y conoce mejor. Entre los estudiantes de Bachillerato encontramos cierta inmadurez probabilística, pues las respuestas aquí también se alejan de los estadios más elaborados.
- Observamos que la idea de representatividad para la muestra no desaparece con la formación, sino que sigue, en muchos casos, latente y que, dependiendo de la situación o contexto que se proponga, puede requerirse.
- La pregunta relativa a los términos inferir y deducir nos indica que los estudiantes de Bachillerato, sobre todo contestan con respuestas clasificadas en el estadio uniestructural, es decir, dan respuestas sesgadas al fijarse únicamente en un aspecto del término. Entre los universitarios si está más clara la definición de cada término y responden en su mayoría en los estadios de transición o Relacional.

Sobre las preguntas del cuestionario relacionadas con los términos clasificados en la tercera categoría encontramos lo siguiente:

- Los estudiantes de Bachillerato son incapaces de dar una respuesta más allá del estadio uniestructural. Se trata de términos totalmente desconocidos para ellos.
- Los estudiantes universitarios los conocen, pero aún no los tienen bien asimilados, con lo que presentan dificultades al trabajar con ellos.

- El cálculo de una muestra es algo que no se practica en el aula y los estudiantes de Bachillerato o universitarios desconocen y por tanto no pueden explicar.

En esta fase de la investigación nos centramos en analizar si realmente los términos estadísticos descritos presentan las dificultades que habíamos detectado previamente en los libros de texto. En este sentido hemos podido documentar algunas dificultades que muestran los estudiantes sobre la comprensión de algunos términos estadísticos importantes, relacionados principalmente con la inferencia estadística. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes presentan errores conceptuales en los términos analizados y estos errores persisten incluso después de varios años de formación matemática superior. Nuestra investigación nos ha permitido además documentar la comprensión de los estudiantes a través de las respuestas dadas al cuestionario elaborado. Al respecto, hemos constatado que no hay respuestas en los estadios de *transición y Relacional* de los términos pertenecientes a la Categoría 3, lo que pone de manifiesto que se trata de términos específicos del lenguaje estadístico y si no se definen apropiadamente por parte del profesorado, su significado queda desconocido para el alumnado.

Debemos también resaltar las dificultades que aparecen en las respuestas relativas a términos de la Categoría 1. Tales términos se definen de la misma manera en el contexto cotidiano y en el matemático, y muy pocos estudiantes han dado una respuesta que podamos clasificar en el estadio *Relacional*. Los estudiantes no han aportado la acepción correcta de los términos para el contexto de trabajo, con lo que difícilmente pueden comprender correctamente las explicaciones o situaciones en las que se utilizan estos términos, surgiendo aquí un obstáculo motivado por el lenguaje (Orton, 1990). Este tipo de obstáculo, puede pasar totalmente desapercibido para el profesorado.

De los términos de la Categoría 2 (términos con distinto significado en el contexto cotidiano y matemático) hemos seleccionado el término *muestra* para realizar un análisis más detallado acerca de su comprensión. Así, hemos comprobado que la mayoría de los estudiantes universitarios son capaces de definir el término de forma adecuada, quedando sus respuestas clasificadas en los estadios *Relacional o de transición*, lo que podría sugerir que con una mayor formación los estudiantes son más precisos en la definición de los términos. Pero, en el momento en que los estudiantes deben utilizar la definición para responder preguntas relativas a las muestras, las respuestas se sitúan en su mayoría a los estadios *uniestructural o Multiestructural*. Esto pone de manifiesto que, para los estudiantes, las muestras deben parecerse al conjunto de partida (*heurística de la representatividad*, Kahneman et al (1982)) y en este tipo de respuesta, no hay diferencias significativas entre las aportadas por los estudiantes universitarios y las proporcionadas por los estudiantes de Bachillerato. Obviamente, esperábamos un mayor nivel de desarrollo en los estudiantes universitarios pues suponíamos que a mayor formación, madurez y experiencia, mostrarían una mejor comprensión del término *muestra* en las diferentes situaciones propuestas. Debe señalarse la importancia de este hecho, pues dará lugar a consecuencias futuras no deseables, dado que algunos de estos estudiantes universitarios serán los que enseñen estos términos en los institutos de secundaria.

En nuestra opinión, las dificultades de los términos surgen porque los estudiantes no están familiarizados con el uso de los mismos en distintas situaciones y contextos, que permiten situar adecuadamente sus diferentes aspectos conceptuales.

En conclusión, para los estudiantes el contexto de trabajo no determina el tipo de significado que tienen los términos, y, en consecuencia, los estudiantes no adaptan el significado al contexto de trabajo. Por otro lado, los errores de comprensión de los términos no desaparecen con una mayor formación y por ello los estudiantes no aplican correctamente los conceptos estadísticos, y los errores conceptuales pueden permanecer a lo largo de toda su formación.

5.3 Conclusiones de la propuesta de enseñanza

En este apartado exponemos las conclusiones sobre la propuesta de enseñanza elaborada a partir de las dos primeras fases de la investigación. Nuestro objetivo fue:

OBJETIVO 3. Desarrollar una propuesta de enseñanza de la inferencia estadística que facilite la comprensión de los conceptos que cambian de significado según el contexto de trabajo.

La hipótesis derivada de dicho objetivo fue:

HIPÓTESIS 3. Una enseñanza de la estadística en la que los estudiantes expongan en clase sus razonamientos hace que el alumno participe en la construcción del conocimiento, que el profesor conozca de qué manera va formalizando los conceptos estadísticos y detectar los errores conceptuales que puedan surgir. Todo esto ayuda a que el profesor sea capaz de guiar a los estudiantes en su formación y en la construcción de los nuevos conceptos, facilitando una comprensión más profunda de los mismos.

En origen la propuesta de enseñanza constituye una guía didáctica de instrucción, reflejando un conjunto de tareas contextualizadas que van desarrollando diferentes conceptos relacionados con la inferencia estadística. Su diseño se sostiene en el modelo propuesto por Swan (2008) que tiene por finalidad guiar, desafiar, debatir, extraer ideas y hacer conexiones entre las ideas. Los estudiantes no fueron seleccionados por su disposición hacia el experimento, sino todo lo contrario, desconocieron que participaban en él hasta el final. La propuesta ha tenido como objetivo de la instrucción la construcción de los intervalos de confianza y el análisis de todos los términos y conceptos que van surgiendo por necesidad hasta llegar a los intervalos de confianza.

METODOLOGÍA

El modelo exige que los estudiantes participen de manera activa y que lo hagan comunicando su razonamiento, primero por escrito y luego en voz alta, a toda la clase. Esto es un cambio significativo tanto para ellos como para el profesor, pues este tiene que perder protagonismo y deben cederlo a los alumnos. Este elemento dentro de las sesiones ha hecho, en principio, que las clases fueran más lentas, que los alumnos se atascaran ante las cuestiones que plantea el profesor y que éste tuviera que decidir el avance para evitar la sensación de "pérdida de tiempo". Todo esto hace que en ocasiones el profesor dé la respuesta de lo que pregunta sin esperar que los estudiantes intervengan o expresen sus razonamientos. Por otro lado, hubo estudiantes que no participaron o lo hicieron de manera muy limitada. La metodología propuesta requiere que los estudiantes sean capaces de seguir el trabajo desarrollado. Esto obliga a que los estudiantes lleven el trabajo al día y hay estudiantes que presentan rechazo hacia la asignatura por las dificultades que la materia les supone. Es por ello que los estudiantes que más participan son aquellos que llevan las tareas al día y se sienten capaces de responder al profesor de manera más o menos coherente, y son los que participan en el estudio.

TÉRMINOS

Los términos estadísticos surgen de manera natural en el aula. Hemos visto que los términos aparecen de las distintas categorías que hemos descrito a lo largo de este trabajo. Pero lo que sí cabe destacar es que los estudiantes no son capaces de permanecer en los estadios más avanzados durante las sesiones. Los alumnos llegan, en el mejor de los casos, al estadio Multiestructural, esto significa que reconocen los diferentes aspectos de la tarea pero que no los integran correctamente. Creemos que esto se debe a varias razones. En primer lugar, estamos trabajando con términos propios del lenguaje matemático en muchos casos y son abordados por los estudiantes por primera vez. Estos términos, aparte de ser definidos, requieren que se trabaje con ellos para poder llegar a asimilarlos correctamente y en toda su extensión. Para ello es necesario trabajarlos en diferentes situaciones y contextos. Por otro lado, el factor tiempo es muy importante. Les hemos dedicado cuatro sesiones y han aparecido los términos: *muestreo aleatorio, nivel de confianza, media poblacional, media muestral*. Son todos términos nuevos y se dispone de poco tiempo para asimilarlos y comprender cómo interactúan entre sí todos ellos y con los que ya se conocían: *tamaño de la muestra, media, muestra, probabilidad*, entre otros. Todo esto justifica que los estudiantes no produzcan respuestas más ricas en cada uno de los términos estudiados.

EL CONTEXTO

Para los estudiantes el contexto propuesto ha resultado bastante cómodo y sencillo de entender. Este elemento es básico pues no estamos añadiendo dificultad en el planteamiento de la actividad, sólo aquellas que son propias de los conceptos que vamos a desarrollar. Por otro lado, los conceptos estadísticos surgen de forma natural y, además, situados en una situación concreta sobre la que se está realizando el estudio. La naturalidad con la que aparecen los conceptos ayuda a que los estudiantes puedan entenderlos mejor y, que por otro lado, puedan reconocer situaciones semejantes en las que puedan aplicar los mismos procedimientos utilizados en esta situación. Así, por ejemplo, los estudiantes reconocen la media como valor intermedio para un conjunto de datos, pero, a través de este trabajo han visto que la media además sirve para resumir la información contenida en una tabla. Ese aspecto de la media lo han asimilado con naturalidad debido al contexto en el que se le presenta la tarea. Los estudiantes, fácilmente comprendieron lo que se les pedía y aceptaron que la media era un buen estimador de las estaturas. Por otro lado, mostrar muchos contextos de trabajo diferentes en los que surgieran los términos nos hacía reflexionar sobre el temor a que dichos contextos se convirtieran en un obstáculo para el aprendizaje. Esto ha provocado que finalmente no se muestre un mismo término en varios contextos desde que se define.

EL PROFESOR

Ya hemos indicado que se han desarrollado cuatro sesiones y que son pocas para ver el desarrollo del modelo en toda su extensión. No se pudieron añadir más sesiones debido a la falta de disponibilidad de tiempo por parte de los participantes y del profesor. En este sentido, el nivel en que se desarrolla esta propuesta hace que no se pueda dedicar más de una semana (cuatro sesiones) a construir el intervalo de confianza, para luego abordar problemas rutinarios típicos de la Prueba de Acceso a la Universidad. Además, los tiempos están tan cerrados que en todo momento generan en el profesor cierta sensación de agobio por temor a no cumplir con los plazos previstos. Esto repercute de igual forma en el aprendizaje, pues en ocasiones, se limita el tiempo para la enseñanza pensando que de igual manera se limita el tiempo para el aprendizaje, lo cual es un error, pues el aprendizaje de cada alumno tiene su propio tiempo que es diferente y depende de muchos factores. Todo esto está en consonancia con la denominada Trayectoria de Enseñanza-Aprendizaje descrita por Heuvel-Panhuizen (2001), y, efectivamente, los alumnos describen diferentes trayectorias de aprendizaje para una misma trayectoria de enseñanza. Pero por otro lado, el aprendizaje no se puede considerar de manera lineal, y los estudiantes pueden llegar a conseguir las habilidades que se les requiere cuando menos lo espere el profesor, como también nos advierte Heuvel-Panhuizen (2001).

En conclusión, aunque no se han podido trabajar todas las actividades que configuran el programa establecido para nuestro experimento de enseñanza, dado que no se pudo extender la fase de trabajo en el aula, pensamos que nuestro proyecto de enseñanza-aprendizaje ha ayudado a comprender de qué manera aparecen los términos estadísticos en el aula, y las dificultades con las que se pueden encontrar los profesores y los alumnos cuando se enfrentan con estos términos. No es nada sencillo tener que construir un concepto estadístico en el que intervienen tantos elementos diferentes, y tener en cuenta además los errores conceptuales previos para poderlos tratar de superar. Hemos visto cómo la heurística de la representatividad descrita por Kahnemann et al. (1982) está continuamente presente. Además, es tan recurrente que interfiere en la construcción de todos los conceptos relacionados con las muestras extraídas. Creemos que la propuesta ayuda a que, los estudiantes sean conscientes del error que cometen cuando generan muestras que exigen que sean representativas de la población. Por otro lado, los términos que manejan los estudiantes se encuentran en un estadio poco avanzado, entre otros motivos, porque entendemos que cuando se introducen nuevos términos, estos hacen que entren en conflicto con los términos previos y por tanto desarrollen tareas con dichos términos dentro de los estadios poco elaborados. Aún así, creemos que es el camino para poder avanzar y comprender mejor los términos, pues los estudiantes han tenido que aislar los términos y contrastarlos entre sí. Creemos que el hecho de exponer los razonamientos en voz alta también es muy importante, pues permite que utilicen el lenguaje matemático y que adquieran los términos nuevos con más facilidad, pues no es sólo el profesor el que los utiliza, sino que el alumnado, desde un primer momento debe hacer uso de ellos y facilita al profesor la oportuna corrección. Esto permite, a su vez, que el profesor pueda ir comprobando que los estudiantes los vayan asimilando correctamente y si no fuera así ayudarles a corregir el error conceptual que muestran.

5.4 Aportaciones del estudio

Como indicamos en el primer capítulo de esta memoria, en la actualidad la investigación en Educación Estadística se ha convertido en una de los campos de investigación más importantes dentro de la educación. Son diversos los aspectos que quedan por analizar y profundizar, por lo que pensamos que algunos elementos de nuestra investigación son útiles tanto para analizar y contribuir al conocimiento de los investigadores, como para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

En primer lugar hemos realizado un estudio de definiciones matemáticas que aparecen en el Diccionario de la Real Academia Española de la lengua. Este tipo de investigaciones podría ser trasladada a otros idiomas y realizar comparaciones entre las diferentes lenguas. Posiblemente, los tecnicismos no pasen al contexto cotidiano de la misma manera en todos los idiomas. Creemos que es muy interesante este tipo de investigaciones.

La categorización de los términos estadísticos según los contextos descritos se debe tener en cuenta para el desarrollo de los libros de textos y de las unidades didácticas. Hemos visto las dificultades que aparecen y cómo perduran en el tiempo, esto nos puede ayudar a focalizar la enseñanza en erradicar los errores conceptuales que puedan existir. Sería interesante realizar un estudio longitudinal en el que con posterioridad se analizara qué ocurre con los estudiantes que han sido formados con esta perspectiva, si realmente han mejorado los conceptos adquiridos..

Hemos desarrollado un estudio concienzudo de los libros de texto de Bachillerato. Nos hemos parado en los términos estadísticos. A partir de ellos podríamos analizar otros aspectos, como los enunciados de los problemas, clasificar los contextos de las actividades que se proponen o analizar cómo utilizan los términos en las actividades propuestas.

El cuestionario elaborado para analizar la comprensión de los alumnos sobre los distintos términos se ha desarrollado en esta investigación. El instrumento presentado, aunque necesita de cierto perfeccionamiento, resulta, bajo nuestro punto de vista, útil para examinar varios componentes de los términos que estamos analizando, porque combina diferentes tipos de preguntas y diferentes contextos en los que se utiliza el mismo concepto.

La propuesta didáctica ofrece indicaciones, que pensamos pueden ser importantes, fundamentalmente para el profesorado, sobre todo a los que tienen poca experiencia en la enseñanza, a la hora de empezar a trabajar la inferencia estadística en el Bachillerato, ya que dispondrán de antemano, de un conocimiento útil sobre las dificultades esperadas cuando se comienza con la inferencia estadística.

En resumen, nuestro trabajo aporta datos que pueden servir de referencia en otras investigaciones, además de permitir una mejor comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística en el Bachillerato, así como de las condiciones en las que se debería realizar la enseñanza para intentar mejorar el aprendizaje y comprensión de los términos estadísticos involucrados.

5.5 Limitaciones e implicaciones para investigaciones futuras

Hemos abordado la investigación de los términos estadísticos que se estudian en el Bachillerato, atendiendo a su tratamiento en los libros de texto. Hemos hecho el análisis a priori, según la categorización descrita por Christansen et al (1986), pero nuestro análisis se podría completar con un estudio a posteriori, descubriendo en qué medida el libro de texto ayuda en la comprensión de los términos que se están estudiando. Un aspecto que no hemos analizado en los libros de texto, además, es la idoneidad del libro de texto para lo que se debe trabajar según la edad de los estudiantes y el currículo establecido.

Los cambios en la normativa educativa, centran la formación en Bachillerato en el desarrollo de las competencias generales que el alumno le permitan profundizar en otros saberes y capacidades que a su vez debe movilizar en el momento oportuno para actuar de modo autónomo, racional y responsable al objeto de desenvolverse en diversas situaciones y contextos (personal, social, académico, profesional), participar en la vida democrática y proseguir su aprendizaje. Todo esto hace que los libros de texto cambien y se adapten a las nuevas exigencias, lo que provoca que sea necesaria una actualización en la investigación llevada a cabo con los libros de texto, para de esta forma comprobar si el tratamiento que se sigue dando a los términos estadísticos es el mismo.

Otro elemento importante cuando hablamos de Educación Estadística es el docente. Un profesor señala de un libro de texto los “kernels” (núcleos) que considera adecuados, y que, según Christiansen et al (1986) no tienen que ser los mismos para todos los docentes. Un análisis de cómo en estadística varían estos núcleos de unos docentes a otros nos podría ayudar a comprender ciertos aspectos relativos al aprendizaje de los alumnos, concepciones de los alumnos y profesores sobre determinados términos y cómo se seleccionan y conciben las unidades didácticas que luego desarrollan los profesores en el aula.

Creemos que si se analizan las actitudes y creencias de los alumnos respecto de los contenidos estadísticos, dispondríamos de más elementos sobre el origen de las dificultades, errores y obstáculos del alumnado con respecto a los términos estadísticos.

En un futuro nos planteamos analizar estas creencias y actitudes para poder llegar a conocer los errores y obstáculos que se producen en el desarrollo del conocimiento en los alumnos relativos a la inferencia estadística.

Han aparecido muchas concepciones erróneas que perduran en el tiempo e incluso con la formación estadística. Es necesario establecer una línea de formación para el alumnado que oriente al profesorado en el desarrollo de conceptos estadísticos de forma significativa, que mitigue las posibles concepciones erróneas y que permita crear ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

Por otro lado, consideramos que la propuesta didáctica se debería repetir con otros grupos de alumnos y con otros profesores para de esta manera poder tener datos más representativos del funcionamiento de la misma. Los contextos socioculturales de los alumnos, las motivaciones, los conocimientos previos, son fundamentales en el desarrollo del conocimiento, por lo que sería interesante ampliar la muestra con otros grupos diferentes.

Ampliar el estudio a otros contenidos estadísticos e incluso a otros contenidos matemáticos del bachillerato, sería interesante, tras los datos recogidos en este trabajo.

Finalmente, tenemos pensado continuar profundizando en el conocimiento de la comprensión de la estadística inferencial y el lenguaje que se utiliza para desarrollarla.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical thinking and learning*, 2 (1-2), pp 75-98.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Grupo de Investigación en Educación Estadística. Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C. & Cobo, B. (2003). *Fiabilidad y generalizabilidad. Aplicaciones en evaluación educativa.* Números. 54 (pp. 3-21).

Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G. y Truran, J. (2000). Investigación en Educación Estadística: Algunas Cuestiones Prioritarias. *Statistical Education Research Newsletter 1(2).* Reacciones de H. Bacelar, G.W. Bright, T. Chadjipadelis, L. K. Cordani, M. Glencross, P.K. Ito, F. Jolliffe, C. Konold, S. Lajoie, M. P. y B. Lecoutre, M. Pfannkuch y D. Pratt, *SERN 1(2)*. Respuesta de los autores, *SERN 2(2).*

Ben-Zvi, D. (2006). Scaffolding Students' Informal Inference and Argumentation. *Proeceedings of the sixth International Conference on Teaching of Statistics.* South Africa: IASE. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York, NY: Acadmic Press.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. In: H. A. H. Rowe (Ed.), Intelligence: Reconceptualization and measurement (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carrera, E. (2002). Teaching statistics in secondary school. An overview: From the curriculum to reality. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Cape City: IASE.

Christiansen, B., Houson, A. G., Otte, M. (eds.). “Chapter 4: Textual Analysis”. En: *Perspectives on mathematics education* (pp. 141-171). Kluwer Academic Plublishers. 1986

Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. (2008): Decreto 202/2008 de 30 de septiembre, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. *BOC*, 204, 19544-19962. Disponible en: http://www.gobiernodecanarias.org/boc/2008/204/001.html

R.A.E. (2001): *Diccionario de la lengua española* (DRAE). Author: Madrid.

Dickson, L., M.Brown y O.Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor, Madrid.

Friel, S. N., Curcio, F. R. & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathmatics Education,* 32 (pp. 12-158)

Gal, I. (2002). Adults’ Statistical Literacy: Meaning, Components, Responsibility. *International Statistical Review,* 70(1), 1-25.

García Alonso, I. & García Cruz, J.A. (2005): “Algunos resultados sobre la actuación de los alumnos en las cuestiones de estadística en la P.A.U.”. *Actas de las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM), 733-738.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2006): El lenguaje sobre la inferencia estadística en los libros de texto. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, vol. 8, 135-157.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2007a). Statistical Inference in textbooks: Mathematical and everyday contexts. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v. 2, 257-264. The Korean Society of Educational Studies in Mathematics. Seoul, Korea.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2007b). Inferencia estadística y lenguaje: un estudio en Bachillerato. *Investigación en Educación Matemática,* XI, 219-228. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: Un estudio en Bachillerato. *Educación Matemática*, 21(3), pp. 95-126. México.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2010). Lenguaje estadístico: una propuesta didáctica. Comunicación presentada a la XII Reunión Interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, celebrada en la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en enero de 2010.

García Alonso, I. & García Cruz, J. A. (2010b). Understanding statistical terms: A study with secondary school and university students. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education.* Vol.14, nº 2, 143-172.

García Cruz, J.A. & Garrett, A.J. (2008): Understanding the arithmetic mean: A study with secondary and university students'. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education.* Vol. 12, nº 1, 49-66.

Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Educational Research Journal* 2(1), 22-38.

Garfield, J.; Ahlgren, A. (1988). “Difficulties in learning basic concepts in Probability and Statistics: implications for research”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 44-63.

Godino, J.D. (1996). Mathematical concepts, their meaning and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds), *Proceedings of the twentieth PME Conference,* V.2, 417-424. Universidad de Valencia.

Heuvel-Panguizen, M. (2001). *Children learn mathematics: A learning teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers n primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. W. Grows (Ed). *Handbook of research in teaching and learning of mathematics,* 65-97. MacMillan. New York.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductoriy analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics,* 1-27. Erlbaum. Hillsdale, NJ.

Holmes, P. (2002). Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (ED.) *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI.* Vol. 2, pp 165-167. Cape City: IASE.

Jolliffe, F. (1998). What is research in statistics education? *Proceedings of the fifth International Conference on Teaching of Statistics.* Singapore: IASE. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Kahnemann, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982): *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge University Press.

Konold, C. & Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Educations,* 33 (pp. 259-289)

McLean, A. (2002). Statistacy: Vocabulary and Hypothesis testing. *Proeceedings of the sixth International Conference on Teaching of Statistics.* South Africa: IASE. Disponible en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Mendenhall, W. (1982): *Introducción a la probabilidad y la estadística*. Wadsworth Int.

Ministerio de Educación, Política Social y Deportes (MEPSYD) (2008): Orden ESD/1729/2008 de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato. *BOE*, 147, 27492-27608. Disponible en http://www.boe.es/boe/dias/2008/06/18/pdfs/A27492-27608.pdf#

Mokros, J. & Russell, S.J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26 (1) (pp. 20-39).

Moreno, A. J. & Vallecillos, A. (2001): "La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria". *Jornades europees d'estadística: l'ensenyament i la difusió de l'estadística.* (pp. 305-360). Palma de Mallorca: Govern de les Illes Balears, Institut Balear d'Estadística. Disponible en http://www.doredin.mec.es/documentos/12040070REC.pdf

Moreno, A. J. & Vallecillos, A. (2002): "Exploración heurística y concepciones iniciales sobre el razonamiento inferencial en estudiantes de secundaria". *Educación Matemática.* 14(1), 62-84.

Moore, D. (2005): *Estadística aplicada básica.* Barcelona: Antoni Bosch Editor.

N.C.T.M. (2000): *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (1999): *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.*

Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. MEC y Morata, Madrid.

Pepin, B; B. Grevholm & Straesser. (2006). DG07: The mathematics textbook- A Critical Artefact? In Novotná et al. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Charles University in Prague, Faculty of Education, Vol 1, p. 193.

Pepin, B. & Haggarty L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentrablatt für Didaktik der Mathematik* 33(5): 158-175

R.A.E (2001): *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Real Academia Española.

Ramos Domínguez, C.E.; Espinel Febles, M.C. & Ramos Domínguez, R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 61, 35-44.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objetcts as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shaughnessy, J. M. (1992) Research in probability and statistics: Reflections and Directions. En D. A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 465-494. MacMillan. New York.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 957-1008). NCTM. Greenwich, CT.

Shuard, H. & Rothery, A (Eds) (1984): *Children reading mathematics*. London: Murray.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24-41.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching.* 77, 20-26.

Skemp, R. R. (1979). Intelligence, Learning and Action. A foundation for theory and practice in education. John Wiley & sons. Chichester.

Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1) (pp. 64-80).

Swan, M (2008). Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Journal of the International Society for Design and Development in Education.* Disponible en *http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1article3/index.htm*

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 3-21. Kluwer. Dordrecht.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146). McMillan. New York.

Vallecillos, A. & Batanero, C. (1997): "Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios". *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 17(1), 29-48.

Vallecillos, A. (1999): "Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses". *Proceedings of the 52nd Session of the International Statistical Institute.* Vol. 2 Tome LVIII, 201-204. The Netherlands: ISI.

Vineer, S. (1991). The role of definitions in th teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-81. Kluwer. Dordrecht.

Vygotsky, L. (1996). *Thought and Language,* (A. Kouzlin, Trans. 9th ed.), Cambridge, Massachusetts Institute of Technology Press.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review,* 67(3), 223-265.

Libros de texto analizados en esta investigación:

Colera, J., Oliveira, M.J. & García, R. (2001). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Editorial Anaya.

Nortes, A., Jiménez, P., Lozano, F., Miñano, A. & Ródenas, J. (2003). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Madrid: Editorial Santillana.

Paz Fernández, J., Cámara Meseguer, M. T. & Monteagudo Martínez, M. F. (1998). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Editorial Edelvives.

Vizmanos, J.R., Anzola, M. (2003). *Algoritmo: matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 2*. Editorial SM.

ANEXO

TRANSCRIPCIÓN DE LAS CLASES PERTENECIENTES A LA PROPUESTA DIDÁCTICA DESARROLLADA EN ESTA INVESTIGACIÓN

CLASE 1. 03.11.2008

Profesor: Vamos a comenzar otro tema y lo que voy a hacer es repartir una hoja donde aparecen una serie de estaturas. Las estaturas de 180 estudiantes. Les dejo la hoja esta y les voy a explicar lo que vamos a ir haciendo ahora. A ver, en esta hoja tienen 180 estaturas. Imagínense que alguien ha llegado y a empezado a medir a alumnos de 2º de Bachillerato y 180 alumnos les ha medido la altura, la estatura que tienen y esta es la hoja que tienen ustedes. El problema que yo les planteo ahora es que yo quiero saber, quiero resumir estos datos, quiero resumir la información que me dan estos datos. Quiero que en la libreta, por parejas vayan discutiendo de qué manera podemos resumir esta información. Con todo lo que ustedes saben de estadística, con todos los conocimientos que ustedes tienen qué se les ocurre que podríamos hacer para resumir la información contenida en estos datos. Que podrían ser 180, podrían ser 2000, podrían ser 4000. Tenemos que intentar buscar cómo sacar información de aquí. ¿Entienden la pregunta? Entonces miren a ver qué se les ocurriría hacer. Intente discutirlo ustedes por parejas, intenten explicarlos en la libreta primero ir escribiendo y luego vamos a ir preguntando a ver qué se les ha ido ocurriendo. Así que vayan discutiéndolo un poco primero … Y redactar. Es importante que redacten para ver qué ideas tienen. Para ir también…organizando los datos.

Alumna 1: Cómo podemos verlos…

P: Quiero resumir esa información. Esto me tiene que servir para algo. Qué podemos utilizar para resumir la información que nos dan los datos

A1: Podemos usar lo que utilizamos al principio de curso?...

P: Tú pon lo que tú quieras pero vete escribiendo y pensando.

A1: Pero es que no me acuerdo cómo se llamaba.

[Hablan y discuten]

P: Vete pensando. Después lo que tienes que hacer es justificar. Pero escriban en la libreta, no en la mesa que no se la pueden llevar. ¿Qué se les ocurriría hacer?

A1: ¿Cómo se llamaba?

P: La marca de clase. La marca de clase no era un intervalo. Era un valor. Antes de ponerse a hacer cálculos sería bueno que escribieran qué piensan hacer. De qué manera lo van a hacer, por qué creen que sería bueno esta manera de hacerlo. Qué ventajas y desventajas. Antes de hacer nada.

A2: Resumir lo que…Quieres resumir todo esto para no tener tantos datos

P: Claro. Resumir.

A2: Ah, pues ya sé cómo hacerlo.

A1: ¿No es como yo te decía?

P: Ahora lo discutimos, pero venga. Pero lo que es importante es que lo escriban. Venga. Escribir antes de hacer, porque si se ponen directamente a hacer sin analizar las ventajas

[Siguen discutiendo entre ellos y empiezan a escribir]

A1: ¿Cómo se llamaba aquello que hacíamos? Qué es lo que te dije que hacía antes? Que hay 35 175 y lo multiplicábamos. No me acuerdo.

P: La tabla de frecuencias.

A1: No. Que poníamos unos datos a la derecha.

P: La tabla de frecuencias. Pero no vayas a hallar la tabla sino explícame qué quieres hacer, por qué ese método va a ser bueno, y qué inconvenientes puede tener. Dónde puede presentar dificultades. Y piensen que yo les he dado 180 por darles una cantidad. Imagínense que les hubiera dado 2350 ¿vale? … datos. Entonces, piensen ustedes en las ventajas y los inconvenientes del método que ustedes están intentando buscar. Y de todo lo que ustedes han estudiado, qué cosas resumen la información, qué cosas resumen información. ¿Qué información me gusta a mí tener de las estaturas? Pero escriban, escriban para que después me cuenten.

[Siguen discutiendo entre ellos y el profesor animando a que discutan]

P: Vamos a ir comentando alguna idea, porque veo que hay gente muy atascada. ¿Alguien quiere comentar alguna idea de lo que cree que podríamos hacer?

A1: Yo, lo que estaba diciendo antes.

P: ¿Tú qué me estabas diciendo?

A1: Hacer una tabla de frecuencias. Agrupar los datos que se repitan y así no tenemos esto todo largo.

P: Bien. Qué opinan los demás?

A1: La ventaja que tiene es que te lo resumen. El inconveniente es que si son muchos tardas un montón en mirar todos los que son y en comprobar los repetidos …

P: ¿Tú crees que eso es un inconveniente como para desechar el …?

A1: Yo pasaría y no lo haría, la verdad…

P: ¿Y los demás qué harían?

A2: Yo también pasaría. Sería demasiado largo.

P: ¿Qué piensan sobre el resumen ese? ¿Qué significaría? ¿Sería un buen resumen? ¿Sería un mal resumen?

A2: Regular.

P: Eh?... Porque claro, habría que estar pensando cada cuánto ponemos el intervalo

A3:

P: Asignas una edad… al azar. Pero si son todos de 2º de Bachillerato más o menos todos tienen la misma edad. Son todos de 2º de Bachillerato. Qué idea… qué interés tiene que tenga … la edad…

A3: La edad… para no fijarme en todas las estaturas sino el que tiene la edad y dentro de la edad , sabes los que?, dentro de una edad está el que tiene…

P: Pero todos tienen a lo mejor estaturas distintas como 186, 183, 183, 181, 184, 184 y todos con 16 años

A3: Pero a todos no les asignas lo mismo a todos… porque la probabilidad de que todos tengan … aquí hay hasta 22

P: Bueno. A ver.

A2: Estamos pensando

P: ¿Y qué estás pensando?

A2: En la marca de clase y otra cosa también

P: Pues dime, la marca de clase qué significa.

A2: Que se unen las estaturas, por ejemplo entre 165 y 170 y le sacas la media. Hacemos 165-170. 165 menos 170 entre 1.

P. Más, más bien.

A2: Eso más, perdón

P: Pero eso qué información les da.

A4: Lo multiplicamos por las veces que se repite.

P: Y qué estábamos buscando

A4: La media… La Y

A2: Estamos buscando un valor concreto.

P. Sí pero qué valor es ese?

A1: La estatura media

P. La estatura media

A1: El que más se repite

P: No sé. Un buen resumen. Un buen resumen de esto. Todavía no me han dicho. Todos están intentando organizar los datos pero organizar los datos no es un resumen.

A3: Yo tengo otra teoría.

P: Sí dime qué teoría tienes. A ver

A3: Hacer la media de todos los números, para tener la media. Luego hacer lo de … es que no sé cómo se llama…lo de la sigma. Lo de la beta sigma que era sumando xi

P: La desviación típica

A3: Sí. Menos fi partido por n.

P: ¿Qué ventajas tiene?

P: Pero, ¿qué dices tú Raúl?

A5: Raúl te está diciendo otra cosa.

P: Él entendió que lo que coges es el primero y el último. Para hallar la media.

A3: Uno hace la media de todos los datos y el otro halla la distribución…¿cómo se llama?...la desviación típica. Que es sumar lo de xi menos fi partido entre n.

P: Pero realmente quién resume los datos

A3: La media no?

P: La media

A4: Profe podemos hacer el recorrido. En el recorrido qué había que hacer

P: El recorrido es

A3: El mayor quitarle el menor

P: Y eso qué era, para ver… por qué cantidades pasábamos. Por qué cantidades pasábamos. Pero el recorrido aquí resumiría, resumiría la información?

A4: No

P: A lo mejor te da 12 el recorrido. Y qué significa ese 12?

A4: Que los datos han recorrido doce.

P: Sí pero esto te está resumiendo los datos? Los 12 podría ser de 1 a 1'12 ó desde 1'50 a 1'62, no? Pero, …bien. Imagínense … la media. ¿Qué ventajas y desventajas tendríamos con la media?

A2: La ventaja es que lo tienes todo resumidito ahí.

P: En qué?

A2: En un dato solo.

P: Sólo tienes un dato. Tú qué has escrito ahí

A5: Un pastelazo de miedo.

P: Pero ¿qué piensas?

A5: Yo pienso más o menos lo que han dicho. Pero los agrupamos en un intervalo de un valor medio. A ver, lo leo textualmente: [texto] agrupamos los valores en un intervalo desde el valor más pequeño y miramos la cantidad de números que hay en el intervalo en este caso de 5 cm y los situamos en una tabla de frecuencias. Ventaja es que a la hora de calcularlo tendremos

P: O sea, que el problema sería tener que agrupar todo eso en ese intervalo y eso no es sencillo.

A5: Y encima cuando agrupas.. cuando agrupas más los números para calcular desviación típica, media y todo eso da mal. La media sí, lo demás no. Cuando agrupas los números en torno a diez o en torno a quince o en torno hasta cinco va a dar mal.

P: Pero un problema que está surgiendo aquí, el de la exactitud. Este problema nos preocuparía, te preocuparía mucho que el valor no fuera muy exacto.

A5: Bueno. Depende del estudio también.

P: Vamos a ver. Si estamos calculando estaturas medias de Bachillerato, ¿es muy preocupante que la estatura media no sea exacta?

A: No.

P: Habría una cantidad que a lo mejor estaríamos dispuestos a aceptar como media y otra que no. Entonces, yo creo que los tiros, los tiros tienen que ir por ahí, por la media. ¿Vale? Porque la media hemos hablado, el año pasado halamos que la media es un valor que resume perfectamente toda la información, ¿vale? Bien. La desviación típica no resume. La desviación típica , ¿qué hacía?. ¿Recuerdan? Si los datos están muy separados o juntos a la media. No nos están resumiendo. Nos están diciendo cómo están los datos que es lo que a mí me interesa.

A5: cogemos la estatura más pequeña y la más alta y las dividimos entre dos. Y hacemos la estatura media entre los dos y nos va a dar un número no muy a lo mejor no muy exacto pero a lo mejor más o menos lo que te va a dar la media exacta.

[Discusión]

P: Javier. A ver. Javi está proponiendo coger el más alto y el más pequeño para calcular la media y entonces nos encontraremos con un dato más o menos. Pues él propone eso. ¿Ustees qué creen?

A. Cogemos el número de personas y hacemos un diagrama de dispersión

P. Un diagrama de dispersión. Pero estamos en lo mismo. Representar 180 datos en un diagrama no es un trabajo fácil.

[Discuten]

La idea a la que llegamos o la que quería que llegásemos es que el dato que está resumiendo todos los datos es la media. La segunda idea. Son muchísimos datos para estar calculando la media, ¿no? ¿Podría yo, eh, hacerlo de alguna manera que no llevara mucho trabajo?

A. Agrupo.

P. Agrupo, ¿qué agrupo?

A. Por la marca de clase.

P. Vuelvo a tener mucho trabajo, porque agrupar me lleva a mí muchísimo trabajo. ¿Qué método?

A. Yo qué sé. Uno que está aquí en el tema.

P. Ustedes sí lo saben.

A. De la binomial.

A. Lo que pasa es que no lo recordamos.

P. No. Nunca lo han hecho.

A. No. Ah pues no lo sé.

P. Vamos a ver. Si nosotros tenemos una gran cantidad de elementos, ¿qué se suele hacer para estudiarlos?

A. Coger una muestra.

P. Ven que sí lo saben. O sea, que lo que no hacemos, a lo mejor es estudiarlos todos, pero sí podría yo escoger unos cuantos que me sirvieran de ejemplo para yo poder calcularlo. Eso se llama: muestra. Bien. Pues ahora, ¿cómo escogemos la muestra?. Ahora empiecen a escribir de qué manera creen ustedes que podríamos escoger la muestra. Escriban. Escríbanlo primero y discútanlo en parejas y luego lo comentamos.

[Discuten entre ellos]

P. Escriban. ¿Qué harían? Pero escríbanlo. Escriban. Escriban. ¿Cómo podemos seleccionar esa muestra? ¿Cómo se les ocurre?

A1. Pues el más pequeño y el más grande y el del medio.

A2. Y algunos medianos

P. ¿Por qué algunas muestras…? ¿Todas pueden ser buenas? Pregunto. ¿Por qué la que ustedes van a presentar pueden ser mejor?

[Discuten entre ellos y con el profesor. El profesor lleva el micrófono ahora por las mesas]

P. Y eso? ¿Eso qué era?

A6. La fórmula para hallar la muestra.

P. De la media.

[Siguen discutiendo]

P. Venga. ¿cómo escoger la muestra? ¿Cómo? ¿ De qué manera? ¿Cómo se escoge una muestra? ¿Por qué la muestra que me vas a decir es buena? O si todas las muestras son buenas, dame una manera y ya está. Pero escriban, porque es importante que ustedes escriban porque eso significa que están pensando. Lo que hayan escrito puede cambiar de opinión, entonces pues bueno, es el proceso que ustedes están llevando. Lo dejan ahí escrito en la libreta… la hoja o lo que quieran.

A5. Escogemos 20 alumnos al azar. 20 como mucho.

P. ¿Por qué 20?

A5. 10 o coges los más altos.

P. ¿Por qué los más altos, por qué no los más pequeños? Explica por qué. ¿Qué significa al azar? ¿cómo podemos escogerlos al azar? ¿De qué manera? ¿Me tengo que fijar en la estatura?

A5. Sí. Pues … si ves que en la gente de una clase hay 3 altos y 20 pequeños y de los pequeños te salen solo unos cuantos pues tienes que coger más pequeños

P. O sea que coges los pequeños

A5. Coges un poco de todo.

P. O sea que te tienes que fijar.

[Siguen discutiendo]

P. Venga. Venga, cuando tengan algo que quieran decir y que hayan pensado me lo dicen y que lo hayan escrito.

[Siguen escribiendo y reflexionando sobre lo que se les pide]

P. Están mirando el tema para ver si tiene que ver.

A7. ¿No?

P. ¿Quién quiere comentar algo?

A. Yo.

P. Venga Raúl. Vamos a escuchar lo que dice Raúl a ver qué opinamos, a ver cómo podemos hacer el muestreo.

A2. Escogemos una muestra, e intentamos escoger, … a ojo intentamos escoger … una cantidad determinada de los más pequeños, una cantidad determinada de los más grandes y de los de estatura media.

P. A ojo qué significa.

A3. Al azar.

A2. Tenemos los 180 alumnos.

P. Tú los tienes aquí.

A2. Sí.

P. Dime cómo cojo yo de aquí "a ojo". [Risas]. Oh. Es que claro tú me tienes que explicar. Es importante que expliquen cómo. Tiene que haber un método que yo diga a ver "a ojo". ¿Qué significa "a ojo" porque a lo mejor para ti significa una cosa y para mí otra. Y entonces a lo mejor yo cojo el primero y tú no lo coges, ¿lo estamos haciendo "a ojo"? O no.

A5. Profe, en realidad es como si fuese en intervalos…

P. Bueno, vamos a suponer que ya sabemos lo que es y que hemos escogido, ¿qué harías tú después dices? Después de escoger, ¿qué haces?

A2. Haría la media de la muestra.

P. Vale. ¿Cuántos coges?

A2. Una cantidad menor de 180.

P. Vale. No si de 200, más de 180 es …

[se ponen a discutir entre todos]

P. ¿Tú qué harías?

A3. Yo le asignaría una edad a cada uno.

P. ¿Para qué?

A3. Para agrupar en mi edad. Haría grupitos. Y de esos grupos escoger una estatura media de cada uno. El más pequeño y el mayor.

P. Por edades.

A3. Por edades. No de estatura pero en el intervalo de la edad. Es que no sé explicarlo.

P. Pero vamos a ver, ¿qué interés tiene la edad? ¿Qué información te da a ti la edad?

A3. La edad no…La edad por agruparlos nada más. No porque … al escoger uno de esos es cuando hago eso.

A2. ¿qué edad tienes? Y lo vas anotando.

P. Imagínate que la primera,…, a ver imagínate que las primeras dos columnas son de 17 años, después las otras dos de 18 y la otra de 19.

A3. Pues escogería de los de 17 el más pequeño y el mayor…

P. ¿No tendrías la misma dificultad, por muy agrupados que los tengas? O que te diga yo todos estos son de 17 años. Ya los tienes por edad. ¿Qué haces ahora? ¿Qué hacemos si todos estos son de 17 años?

[comienzas a discutirlo, siguen pensando en coger el mayor y el menor]

P. Vamos ir centrando. Él dice que lo escojamos a ojo. Ella dice que los agrupemos por edades.

A7. No. Por ejemplo de 165 contándolo no? Por ejemplo de 165 hay 4.

P. Vale.

A7. Y ponerlo así 4. De 164 no sé qué. Y ponerlo así.

P. Pero, ¿con todos?

A7. Cómo con todos.

P. Me refiero con todas las estaturas las vas agrupando. Porque entonces lo que estamos haciendo es la tabla de frecuencias que dijimos al principio que era lo mismo, que era mucho trabajo y que no. ¿No? ¿Lo entiendes? A no ser que tú digas, pues sólo cojo el 184 y entonces yo te voy a preguntar ¿por qué? ¿Y por qué no coges el 186?

A5. Yo creo que con una tabla tan grande se tiene que coger en intervalos de diferentes números. Intervalos de 160 a 165. A lo mejor otro número de ahí. Que a lo mejor es 500 escoges en 4 ó 5. Luego 5 a 170 y después otros 5, al azar

P. Al azar.

A5. Al azar, pero que sea un intervalos que a lo mejor que se sepa que no vaya coger al azar un 180 y luego un 5

P. Pero ¿es importante lo de los intervalos?

A5. Porque la media te va a dar más o menos exacta.

P. Pero tú sabes ¿de qué hay más y de qué hay menos? Porque para eso tendrías que saberlo, ¿no? Para saber que te va a dar más exacto o menos exacto.

A5. La media te va a dar más o menos…

A4. De proporción.

P. ¿Qué proporción? A ver, ¿cuál de las ideas creen que va más encaminada?

A2. La mía.

[todos vuelven a insistir en su idea]

P. Por edad. Pero bueno. Yo te vuelvo a decir lo mismo. Imagínate que todos son de 17 años. Ya sabes el dato de que todos tienen la misma edad.

A3. Escogería el intervalo con menor y el mayor. Y haría el intervalo ese.

P. El menor y el mayor.

A3. Haría un intervalo de 17 años con el menor y el mayor.

P. O sea que sólo escogerías el más pequeño, el más bajito y el más alto harías la media y ya está. Bien. Ella coge dos datos para hacer la media. Y tiene una media. Esa media es buena o mala.

A5. Horrible.

A2. Regular.

P. ¿Podríamos mejorar la media de ella?

A3. Cogiendo todos los datos ¿no?

P. Todos, pero es que todos es mucho. ¿Tú qué decías que habías escrito ahí?

A5. El qué? Cogías 20 cifras al azar…

P. Cogías 20 cifras al azar. ¿Qué significa al azar?

A5. Esto. [señala una columna en la hoja de datos]

P. Una fila. Una columna. ¿Seguro que una columna está … o están ordenados? A lo mejor están ordenados.

[Siguen discutiendo todos sobre la forma]

P. Ella los escogería salteados. Pero 20 datos ¿sería mejor que uno ó que dos?

A3. Sí.

P. Coger 20 datos.

A3. No sería mejor, sería la media más…

P. Más aproximada. Nos estaríamos acercando más a la media real.

A2. Pero si coges 20 a lo mejor escoges los 20 más altos y entonces la media muy irreal.

A3. No, porque te da a los más altos. La media te da a los más altos.

A2. Entonces coges 20 pero sabiendo lo que escoges. Coges por ejemplo a 10 bajitos y a 10 altos y haces la media.

P. Porque como la tabla te parece a ti que están más o menos mezclados lo que no te interesa a ti es que te salgan los 20 altos.

[Sigue la discusión y se hace referencia a la expresión "a ojo" de nuevo]

P. Bueno. Bien. La idea que está saliendo es hay que hacerlo al azar. Hay que escogerlo al azar. Javi dice que cogemos la primera columna porque él interpreta que la primera columna, los 20 primeros no están hechos por orden de estatura. Podría ser. Y Xiomara dice que los escojamos salteados. También podemos escogerlos salteados, ¿no?. ¿Qué podría ocurrir? Que nos salen los 20 más altos.

A3. Pero profes es que tú también tienes que…

P. Pero podría pasar. Es una posibilidad. Luego lo que tendríamos que analizar es si esa posibilidad es muy probable o no es muy probable que ocurra. ¿Vale?

A2. También podríamos estudiar la media de cada fila.

P. La media de cada fila. Pero entonces estamos haciendo media de cuántos datos? De 30. Bueno al final estamos haciendo…bien. Podría ser, pero como estamos pensando en no hacer muchas cuentas porque están un poco vagos y no van a hacer 180 medias ni nada, sino que vamos a hacer una media con una serie de datos pues vamos a escoger. Por ahí sale el número 20, coger 20 datos. Ustedes creen que más o menos es una cantidad que podría…

A4. Yo pondría más.

P. Tú pondrías más. ¿Cuántos más pongamos qué pasa?

A3. Más aproximado está.

P. Más aproximada está la media pero también más cuentas tendremos que hacer. Entonces tenemos que pensar en una cantidad …

A3. Lo que saldría más o menos exacto, exacto sería escoger 180 son 90. Así 90 sería … la mitad, pero sigue siendo…

P. La mitad. Pero siguen siendo bastantes datos. Bueno. Vamos a escogerlo entonces al azar. Vamos entonces a seleccionar. ¿Vale? Vamos a seleccionar 20. Pues tú dices que las primeras 20 que aparezcan, pues tú hazlo así.

A5. No pero yo dije esto así. Pero si están ordenados pues cojo uno de cada columna, ¿sabes?.

P. ¿Y cómo podríamos seleccionar al azar?

A2. Miras y escoges una cantidad pequeña y otra más alta.

P. Una pequeña y una alta. Si me dan 180 luego busco uno más bajo:179.

A2. No. Los más bajos son los que tienen 155, 160. De esos coges 5 por ejemplo. Los más altos son 186, 184, por ejemplo, de esos coges otros 5 por ejemplo.

P. Pero eso no sería escoger al azar. Ya no es al azar, porque ¿qué significa que sea al azar? Que yo con los ojos vendados escoja, ¿no? Eso es al azar.

A3. Escojo. Y da igual lo que salga. Si me salen dos iguales pues me salen dos iguales, ¿no?

P. ¿Qué se suele hacer? Vamos a terminar esto. Vamos a intentar hacer algo ya.

A1. A acabar con este sufrimiento.

P. Sufrimiento sí. De pensar. Vamos a escoger 20 al azar. ¿Cómo se pueden escoger 20 al azar? ¿Qué se suele hacer para escoger 20 personas al azar?

A2. Pito, pito… [risas]

P. Y eso en otro, … en otras palabras cómo se llama eso. Venga escojan 20.

[Discuten]

P. Escojan ustedes. Escojan 20.

A7. ¿Los que queramos?

[Comienzan a escoger 20 según les parece]

A2. Ya escogí 20 al azar.

P. Y eso para ti es al azar. Voy a escoger de aquí un alumno para ir de viaje. Y entonces yo digo pues un alumno que … tenga mala nota. ¿eso es al azar? Si yo estoy haciendo un sorteo al azar. ¿Qué significa al azar entonces? [Discuten] ¿Cómo aseguramos eso? Porque la cuestión es que ustedes no me están diciendo cómo asegurar que ustedes no se están fijando en el número de su estatura. [Siguen discutiendo] A ver ustedes han oído la palabra sorteo. Vamos a intentar hacer un sorteo que ya que no han hecho nunca ningún sorteo vamos a hacer un sorteo de estos números para escoger 20. Porque yo no me fío de cómo los has escogido tú porque seguramente te habrás fijado en el número de teléfono móvil tuyo y habrás buscado uno que tenga el final del teléfono móvil tuyo con lo que eso ya no es al azar. O que buscas el número de la puerta de tu casa y entonces lo pones. Bien. Eso no es al azar. ¿o sí? No. Entonces vamos a hacer un sorteo. ¿Qué necesitamos para hacer un sorteo?

A4. Una urna.

P. ¿Qué metemos en una urna?

A4. Papeles.

P. ¿Qué números?

A3. Todos.

P. Numérenlos.

[el profesor trata de explicarles que deben numerarlos y no poner los valores de las estaturas en la urna]

A2. Profe. Salteado es lo mismo que el sorteo porque tiene la misma probabilidad que te toque el dos que marcar el cuarto.

P. Salteado qué significa.

A2. Ir marcando a este, este, este, este, …

P. Pero a lo mejor te estás fijando: voy a coger el de arriba, ah, ya cogí de arriba ahora voy a coger de abajo, o voy a coger del centro, o cogí de la primera,

A2. Ah vale.

P. Vamos a hacer un sorteo. ¿Qué necesitamos? Es lo mismo meter en la urna todas las cantidades, las alturas, que por ejemplo, numerarlo que va a ser más fácil y para eso tienen el cuadrito que tiene ahí. Numeren.

CLASE 2. 05.11.2008

P. Vamos a empezar. A ver. Tienen que sacar esto. La hoja que estábamos estudiando de las alturas. Y quiero que alguien me diga qué es lo que hicimos.

[Están hablando y empieza el profesor organizando la clase]

P. A ver Raúl, tú que estuviste fuera pensando [esto porque había estado expulsado de la clase anterior] ¿Qué había que hacer y qué les dije que fueran pensando? ¿Qué hablamos? ¿Qué intentábamos hacer y a qué conclusiones llegamos? A ver. Vamos a escucharlo.

A2. Teníamos que resumir la información de la tabla.

P. Vamos a escuchar. Bien.

A2. Cojo una muestra.

P. Teníamos que resumir la información…

A2. Y teníamos que hacer una muestra.

P. Y vamos a hacer una muestra. ¿Por qué?

A2. Porque no queríamos trabajar con todos los datos sino con una parte.

P. Pero, ¿para qué había que hacer una muestra? ¿Qué buscábamos?

A2. La media.

P. La media. Es que no lo habías dicho. ¿Vale?. Buscamos la media a través de… [llama la atención a una alumna]. Buscamos la media y entonces íbamos a hacer … a escoger una muestra. Bien. ¿Cómo íbamos a hacer la muestra?

A1. Sorteando…

A2. A sorteo.

P. Un sorteo. Y ustedes hicieron…

A3. La numeración.

P. La numeración. Bien. Y tenían que pensar cómo hacer ese sorteo.

A5. Metes las papeletas en una urna o lo que quieras y buscas un número 14 ó 25 y le das la altura que tenga.

P. No tenemos papeletas. No tenemos urna. Tenemos una calculadora. Además, la calculadora … la calculadora saben que les puede dar una serie de números eh…les puede dar unos números aleatorios, ¿vale? [Se dicen bromas entre ellos] En la calculadora hay una tecla que se llama Random [el profesor escribe en la pizarra la palabra Random# que se utiliza para extraer número aleatorios de la calculadora]. Búsquenla que está debajo del igual o debajo del exponencial …

A2. Ah, ya la encontré, ya.

P. Intente darle a ver qué número les sale.

A2. Y qué le doy, igual

A1. 0,426

A3. Pero qué ponemos un número y le damos a la exponencial?

A2. Dale a shift y después a exp.

A3. Ya, ya, ya,…

[Siguen discutiendo e intentando extraer un número aleatorio]

P. ¿qué ocurre? Cuando le dan ahí, cuando le dan ahí, le salen los mismos números. Cuando le dan dos veces. Bien ahora piensen cómo pueden hacer un sorteo porque se suponen que los números que salen ahí son aleatorios. Son al azar. Los números que salen al azar. Antes se cogía una tabla de números aleatorios … Pero bueno, ahora tenemos la calculadora y siempre le van dando, le van dando, le van dando y nos van saliendo números siempre distintos o bueno que se pueden repetir porque los números se pueden repetir y salir distintos. Entonces traten de explicar por escrito cómo podemos hacer un sorteo con esto.

[Se ponen a discutir entre ellos]

A2. Nunca sube de uno ¿no?

P. Nunca sube de uno. Bien ya sabemos que nunca sube de uno. ¿Cuál es el más bajo?

A1. El 0,000

A2. 0,001

P. 0,001. No sé. Mira a ver.

A3. El más bajo es el 0.

P. Es el 0. Y el más alto es el 1. Venga. ¿Cómo harían el sorteo?

A2. Profe, pero es que hay más números en la calculadora que número en la tabla.

P. ustedes tienen que pensar cómo hacemos el sorteo con esos números.

A5. Tiene que haber algún tipo de tecla que te dé de 1 a 180.

P. A ver si a alguien se le ocurre.

A7. ¿Es así profe?

[Pregunta esta alumna cómo se extrae un número aleatorio, aún no lo había logrado]

A5. Profe, ya sé cómo es. Es una burrada.

P. ¿Cómo es?

A5. Si multiplicas este número por 180 ¿qué pasa?

P. ¿Qué pasa?

A5. Que te da un número de 1 a 180

A2. A…migo.

P. Si yo lo multiplico me da?

A5. 60

P. Bien. El más bajo dijimos que era

A3. 0

P. 0 Así que me va a dar desde 0 hasta el más alto que era…

A5. 1. Y 180 por 1 son 180

P. ¿sale el 1? Pregunto. ¿tú sabes si sale el 1? Pruébalo a ver.

A3. El uno no sale.

A2. El uno no sale.

[Todos se dan cuenta de que el uno no sale]

P. El uno no sale. Entonces no te sale el 180. Pero entonces cómo lo hacemos.

A2. No y entonces quien tenga el 180 no se hace.

P. Entonces no sale nunca el 180?

A5. Por lo visto no.

P. Pues venga a ver. Van bien encaminados. Entonces qué harían. ¿Entienden lo que ha dicho Javi? Él ha dicho que si multiplicamos 180 por el número aleatorio, si lo multiplicamos nos van dando números que están en torno del 0, desde un número menos que 180. Lo que les planteo es que el más pequeño es el 0, si yo lo multiplico por 180 sale 0, ¿ustedes tienen el 0?

A. No [Responden varios alumnos]

A2. Pero yo lo haría del 0 al 179 porque no hay 180.

P. No le das sino desde 0 a 179. Eso podría una opción.

A3.Yo le daría de 1 a 179.

P. De 1 a 179. Pero te sobra uno, ¿qué haces con ese que te queda suelto? Ahí alguien que no… no lo has numerado. ¿Y ustedes qué harían?

A7. Yo nada.

P. Nada. Que te digan ya

A5. Profe, pues yo qué sé…se redondea. Si te da más de 179,5 pues coges 180.

P. Pues entonces cómo coges el 179?

A5. Si te da menos 179.4

P. O sea, que si te sale por debajo de 179,5 coges el 179 y si no el 180.

A5. Claro.

P. Después tendrías que hacer lo mismo con todos.

A5. Claro. No te vas a dejar nunca con algo

P. lo que estamos haciendo es truncar. Le estamos quitando los decimales. ¿vale?

A5. Ah, vale.

A3. Ah, pues, a ver.

A2. Ah, pero nunca sale el cero.

P. Sigue. [Está probando con los números aleatorios para comprobar que el cero sí sale] Venga. ¿qué harían?

A3. Es que si tú multiplicas el número por 180 …

A2. Ah, ya me salió.

P. Te salió. Sale el cero. Lo que no sale nunca es el uno. Por tanto no puedo marcar 180, no va a salir nunca el 180. Vamos a hacer lo que dice Raúl. Al 180 lo ponemos como cero. Porque ustedes no tienen el cero ahí contemplado, ¿y si sale el cero qué?

A3. Pero el cero cómo va a salir si aquí no sale lo que tú quieras. A sí sale cero.

A7. Lo que no sale es el uno.

P. Lo que no sale es el uno. Pues el que han puesto como 180 pónganlo como 0 y hagan el sorteo de 20 datos. Hagan el sorteo de 20 datos, cojan la calculadora …

[Ahora se preocupan por el examen y el problema para corregirlo. Se ponen a calcular 20 números aleatorios. Algunos todavía no saben cómo se hace y el profesor le llama la atención por no estar atendiendo. Le repite lo que tiene que hacer.]

P. Miren. Tienen una cosa muy clara que hacer. Que es un sorteo con los datos que tienen. Empiecen a hacerlo. Y hemos quedado en escoger 20. Todavía no sabemos muy bien por qué, … y teníamos que calcular la media. Entonces, ese el trabajo que tienen ahora.

[siguen trabajando, discutiendo, hablando, etc. Las cosas normales de una clase. El profesor mientras, se da vueltas por la clase, aclara dudas, anima a que sigan trabajando. Pero ya tienen claro casi todos lo que deben hacer para calcular el sorteo. Hasta el minuto: 16 y 40’’]

A1. Profe. ¿Qué tengo que hacer? Ya los tengo numerados.

P. Ya los tienes numerados.

A1. Sí.

P. ¿Cómo se hacía la selección? ¿Qué dijimos? Le das igual y te salen números aleatorios.

A1. Sí. Pero cuando lo multiplico por eso no me da un número de los que está aquí.

P. Cómo que no? ¿Por quén lo multiplicaste?

A1. Yo hice 0’470 por 7 y …

P. Por 7. Si lo multiplicas por 7 te da números entre 0 y 7. Si tú lo multiplicas por 180, que es lo que me entendiste y te dará un número entre 0 y 179, en este caso.

A1. Vale. Y cuando me dé un número qué hago con ese número.

P. coges la estatura que se corresponde con él

A1. Y lo pongo aquí.

A2. Profe salió dos veces los números repetidos.

[En ese momento se dio un caso que el profesor no había pensado, que es que salieran dos veces el mismo número. La decisión que tomará es la de rechazar el valor repetido. Una vez que se selecciona una persona, si vuelve a salir no lo repiten. Mientras todos los demás siguen discutiendo cómo hacer la selección de los datos.]

P. Bien. Ya han seleccionado. Tienen que seleccionar y calcular la media. Vamos a ver qué les pasa con las medias que les da.

A2. Profe. Entonces muy real no va a dar. Porque puede ser que te toquen los más altos. Eh profe? Puede ser que te toquen los más altos. Entonces la media no va ser real.

P. ¿Qué dijimos el otro día? La media va ser real? ¿Qué tenemos que hacer para que nos dé exacto?

A2. Hacerlo con todos.

P. Desde que no lo hagamos con todos no estamos haciendo exacto.

A2. Sí, pero a lo mejor pueden salir más chicos y si te salen dos o tres más altos te comes a todos los bajos y no…

P. [No sé qué dijo aquí] Para no hacer la media con todos.

[Algunos ya tienen hecho el sorteo y calculada la media para su muestra]

A7. Ya 34’34.

P. Treinta y cuatro … ¿De estatura media 34?

A7. No ahora tengo que dividirlo.

P. Dividirlo.

A1. 1’786

P. Pero tú los cogiste con coma todos. O sea 171 pusiste 1’71. Es que aquí no está con coma

[Una alumna cogió todos los datos divididos por cien, en metros]

P. No. Está mal porque realmente tendrías que haber puesto 171 y realmente te ha dado 171

[Siguen discutiendo. El profesor escribe los nombres de los alumnos en la pizarra para ir escribiendo las medias obtenidas]

Minuto 25.

P. A ver. Raúl.

A2. 171’6.

P. 171´6. Esta es la media que le dio a Raúl. La media de Franco está en proceso. Carla está en proceso, Andrea está en proceso. Xiomara…

A3. 172’6

P. Estéfany

A1. 171,7

P. Xiomara, digo Sarai

A9. 171’5.

P. Jandir. Venga, venga. Sin levantar la cabeza de ahí.

A8. Profe me tengo que ir ya.

P. Pero hiciste la media? ¿Cuánto te dio?

A8. 171 con…

P. Venga. Tus datos son irrelevantes [No lo hizo y se lo estaba inventando]

A7. Es que yo no lo entiendo. A ver cojo los números. Pero ¿cojo el que sea?

A9. Tú coges la tecla esa de la calculadora.

A7. Ya, ya. Pero el número que salga y ya está?

A3. Si sale el 84 coma tal, pues tú coges el 84. Y el número que esté junto al 84 coges lo que pone.

A9. Después lo sumas y lo divides entre 20.

P. Vamos a ver. Estamos haciendo un sorteo. Entonces ¿cómo tienen que hacer el sorteo? Si yo saco el número 4, ¿qué significa ese 4? Escuchen. ¿Qué significa ese 4?

A7. Vas aquí [señala la tabla] y coges la altura.

P. Pues esto es lo mismo pero con la calculadora.

A7. Sí pero yo cojo el que yo quiera?

P. Pero qué significa el que tú quieras?

A7. El primero que me salga es el primero que tal.

[Salta una alumna para explicárselo]

A3. Que no, que el número que sale en la calculadora tiene un número aquí en la tabla y tú buscas el número aquí con lo que has numerado y ese el número es el resultado del sorteo.

A7. Peor el primero que me salga.

P. El primero que te salga. El primero que hagas.

[La alumna A2 va a explicárselo al sitio donde está A7]

P. A ver. Hay gente que me falta que me dé la media.

A2. Ah, pero todos los numeramos iguales. Si lo hubiéramos numerado distinto me da otro.

P. Si lo hubieras numerado distinto, ¿qué? De hecho, tú has hecho un sorteo y te han salido unos números y te ha dado esta media. Xiomara es otro … son otros datos y le ha dado otra media. A cada uno le ha dado una media distinta.

A10. Profe, pero esta cansado. Estar haciendo siempre lo mismo.

P. Pues hazlo con los 180 para que te diviertas. Vamos a seguir. La idea es que cada uno tiene que hacer la media con los 20 datos. No todos lo están haciendo. Les van a dar medias distintas. Entonces, ¿qué ocurre? ¿qué estamos haciendo? No estamos acercando a lo que es real o no. Si nos estamos aproximando, eso ¿cómo se llama? ¿Qué estamos haciendo realmente?

A3. Una aproximación.

P. Eso en matemáticas. En estadística se llama una ESTIMACIÓN. Se llama hacer una estimación. ¿Sobre qué valor?

[Los más rezagados siguen calculando la media]

P. Estamos haciendo una estimación de la media. La media real de toda esta población ¿la conocemos?

A7. 171’5

P. Dime.

A7. Que me dio 171’5.

[Lo anota el profesor en la pizarra, pues había a calcular la media de su muestra]

P. Estamos haciendo una estimación. Una estimación es una aproximación a la media real. Que la media real no sabemos cuál es. Todavía no sabemos cuál es. ¿Hay alguna media que ustedes crean que es mejor que otra?

A. La mía.

P. Cada uno piensa que de él es la mejor. Eso significa que tiene la autoestima bien.

A2. Habrá que mirar la media real.

P. ¿Ustedes podrían saber en cuánto nos estamos equivocando?

A2. Si coges la media real, la haces y luego miras el número aproximado luego puedes saber cuánto te estás equivocando.

P. Vale. Desechando esa opción porque no la vamos a hacer. ¿Ustedes saben cuánto nos estamos acercando?

A. No.

P. Nosotros cuando estamos haciendo una estimación en este sentido no podemos saber cuánto nos estamos acercando o alejando. Fíjense que aquí le ha dado 171 a muchos y luego a algunos les ha dado 172. Entonces no sabemos muy bien. ¿Podríamos hacer algo con todas estas medias? ¿Qué podríamos hacer?

A1. Las sumamos todas y la dividimos por el número que son.

P. Y eso qué es? ¿Qué estamos haciendo?

A1. Una media.

P. Otra media de las medias. ¿Y va a ser mejor?

A1. No porque no sabremos por donde estará

P. No se va a saber si va ser mejor o va a ser peor.

A2. Como no sabes la media real no sabes lo que te estás equivocando.

P. Entonces qué es lo que vamos a hacer. Nosotros no sabemos cuánto nos estamos aproximando. Esto ocurre cuando hacemos una estimación … una estimación que se llama estimación puntual. [Lo escribe en la pizarra] Vayan anotando esta palabra.

A1. La puntual ¿cuál es?

P. Estamos buscando una media concreta. Y hemos hecho todos una media distinta pero con la que estamos buscando un número. Eso es la estimación puntual. A nosotros lo que nos interesa no es una estimación puntual. Vamos a buscar un intervalo en donde se va a encontrar lo que nosotros buscamos, en este caso es la media real.¿vale? El objetivo nuestro ahora es buscar un intervalo, un intervalo, por donde, no sabemos exactamente, va a estar la media de la población. Vamos a buscar un intervalo. ¿Cómo lo buscamos?. Todas estas medias, si nosotros la altura, …, las estaturas siguen una distribución normal…

A. Muchacho ahora hay que hacer lo mismo de siempre

P. Si las estaturas siguen una distribución normal, la media ¿la conoces? ¿tienes la media?

A5. La de nosotros.

P. ¿Esta es la de ustedes?

A. No.

P. Esta es la de la población. Esta es la que no conocemos porque es la de la población. La de todos los 180 datos.

A1. La verdadera, vamos.

P. ¿La desviación típica la conocemos?

A. No.

P. No. Pero ahora se las voy a dar yo. Esta se va a conocer. Dentro de poco se las presento. Y nosotros ¿qué hemos estado haciendo?. Medias. ¿Cómo se distribuyen las medias?

A3. Pero si no conocemos la primera, ¿no?

P. Pero si la distribución de la variable es una normal, …

A1. La desviación típica se dividía por la raíz cuadrada de algo. De 180.

P. ¿De 180? De qué tamaño son las medias estas?

A2. Son 180 datos…

P. Pero las medias de qué las estamos calculando, ¿de qué tamaño?

A1. Como de qué tamaño?

P. ¿Cuántos datos hemos necesitado?

A2. 20

P. 20. Entonces no son 180. ¿Vale? Desviación típica partido raíz de los 20 datos. Bien. Es que lo que estamos haciendo es formalizar todo esto. Hemos llegado a que si las estaturas son distribuciones de media, siguen una normal de media desconocida y desviación típica que la vamos a conocer. Vamos a buscar ahora las medias tendrán esa distribución. Bien. Pues, ¿cuál es el objetivo? Yo quiero un intervalo. Quiero que busquemos un intervalo….Esta es la distribución normal. Quiero que busquemos un intervalo que contenga el 90% de los datos. ¿Cuánto tiene que valor a y b para que las medias que yo esté calculando en un 90% esté por aquí dentro. Yo voy a ir calculando muchas medias, ustedes han calculado, cada uno de ustedes ha calculado una media. Entonces yo quiero saber el intervalo, cuánto tiene que valer, entre qué valores se encuentran esas medias para que asegure que dentro habrá un 90%. Eso lo hemos hecho, ¿cómo se llama?

A1. Intervalo característico.

P. Intervalo característico. El 90% se los digo yo, ¿vale? Podríamos haber decidido buscar un intervalo que me encierre el 95 ó el 99.

A1. Profe, y de dónde salió el 90?

P. El 90% te lo doy yo.

A1. Ah vale.

P. ¿Cómo se hacía? Búsquenlo. ¿Cuál es la distribución esta? Esta de aquí abajo. Porque estamos buscando la media, que la media está aquí dentro. Entonces la distribución esta, que es normal es … esta. Y ahora les digo cuánto vale sigma… 8'07. Y dentro de poco les daré la media también.

A1. Profe, pero eso ya está dividido y todo?

P. No eso es sigma. Busquen el valor que deja por debajo … Bueno, pues repasen a ver hasta dónde podemos llegar, pues hay un dato que no conocemos todavía que es la media de la población. Hay un dato que no conocemos.

A3. Y entonces cómo vamos a … Profe entonces si no conocemos la media cómo lo hacemos.

P. La desviación típica de todos los 180 datos…

A1. Ahora tengo que poner p menor que a es igual a 90.

P. A la probabilidad. 0,95.

A1.Ah porque el trozo también...

P. Vayan haciéndolo hasta donde puedas llegar. Vayan construyendo lo que hay que hacer para calcular el valor de a hasta donde puedan llegar. Porque todavía nos falta, y ya les diré cómo lo vamos a hacer.

[Ahora la alumna A1 confunde los distintos tipos de intervalos característicos y no entiende por qué ahora lo calculamos sumando el trocito que está por debajo del intervalo. Anteriormente se ha estudiado el cálculo de los intervalos característicos para cualquier distribución normal y en distintas situaciones: $p<0,5$. El profesor le aclara que ahora estamos con una situación concreta de intervalo que encierra una probabilidad]

P. Es que depende. Si yo te pido un intervalo, de aquí para abajo hay que coger este trocito de aquí. Si yo te digo que por debajo de este valor hay 0’90 ya no hay ningún trocito.

[Se lo explica con gráficas de la normal. De fondo se oye que el alumno A2 dice lo siguiente:]

A2. Ya no puedo seguir más. Ahí te quedas porque no sabes el valor de mu.

[Lo vuelve a explicar]

P. Voy a irlo explicando poquito a poco. Vamos a buscar un intervalo que contenga el 90% de las medias que ustedes están calculando. O sea, que dentro de este intervalo esté el 90% de todas las medias. Entonces la distribución de las medias es esta, porque las medias las estamos calculando de tamaño 20, menos Franco. [Risas] Entonces todas son de tamaño 20. La desviación típica se las tengo que dar. Y yo les he pedido que encerraran el 90% como les pedí esto les pude haber pedido que encerrara el 99%, el 95 ó el 50%, el 20, lo que fuera. Es el 90%. ¿Cómo se hacía esto? Era un intervalo característico. Lo que estoy buscando es este valor que encierra por debajo 0’90 más un cachito. Los cachitos que quedan por fuera es 0’1. Por tanto, cada cachito, como son iguales, es 0’05. Entonces, lo que queda por debajo de esa variable es 0’95. ¿Qué se hacía? Porque esta distribución no es normal 0, 1.

A. Se tipifica.

P. Hay que tipificar.

A3. Pero si no tenemos la media.

P. Entonces Z, a menos la media dividido sigma partido raíz de n. Bien. "A" menos media partido 1'80 es igual a qué.

A3. A 0'95 por media …

P. ¿Esto se pone así? No. Había que buscarlo en la tabla.

A1. 1,65.

P. El valor que encierra el 95% en la normal 0,1 es el 1,65. Y ahora hay que buscar la "a". Y qué se hacía para buscar la "b". Lo mismo pero colocando -1'65. Bien. Despejo… por 1'80. ¿Y cuánto da?

A2. 2'97.

P. Bien. Y vamos a ver la "b". ¿Qué daría la "b"?

A2. Lo mismo.

P. ¿qué es lo mismo?

A2. En negativo.

P. La "b" sería lo mismo pero poniendo aquí -1'65 porque la "b" está por debajo. Entonces me quedaría la media menos … 2'97. Es que cuando tipificas la probabilidad no cambia.

[El alumno A5 no entiende el cálculo de los intervalos característicos porque había faltado el día de la explicación]

A1. Profe, por qué aquí está menos 2,97 y allí está más.

P. El "a" era este y cuando yo pongo aquí un menos, este es negativo y sale -2'97. Lo que sí me gustaría es que intentaran redactar lo que hemos hecho hoy. Hasta donde hemos llegado. A ver qué han entendido. Redacten desde el sorteo hasta esto. Qué es lo que han entendido. Así que a escribir.

CLASE 3. 06.11.2008

Debido a un fallo técnico no se grabó la clase. Paso a describir lo ocurrido en ella.

El profesor retomó la formalización para buscar el intervalo de confianza que había empezado en la clase anterior. Volvió a explicar que si las estaturas siguen una distribución normal de media desconocida y desviación típica conocida (8’06), las medias de las muestras que se extraen de dicha población de estaturas seguirá una distribución también normal con media la misma que para la población aunque con desviación típica la anterior dividida por la raíz cuadrada del tamaño de las muestras.

Buscamos el intervalo que contienen al 90% de los datos, en concreto buscamos el valor del extremo superior del intervalo que deja por debajo 0’90+0’05 = 0’95. De ahí se llega a que:

$a = \mu + z_{\alpha/2}. \sigma/\sqrt{n}$ y el valor de b es equivalentemente: $b = \mu - z_{\alpha/2}. \sigma/\sqrt{n}$

Como no conocemos el valor de μ sustituimos el valor por la media de la muestra que hemos extraído, de esta forma pasamos de un intervalo centrado en la media poblacional a uno centrado en la media muestral, construido con la CONFIANZA de que la media poblacional esté dentro el 90% de los casos.

Se les pide que hagan otro sorteo y calculen otros intervalos de confianza. Los escribimos en la pizarra.

Se dan cuenta que todos los valores de los intervalos calculados están separados la misma distancia: unas 6 unidades.

Se aprovecha que se han dado cuenta de esto para preguntarles por qué ocurre que todos tienen la misma distancia entre ellos.

- Por la media
- No pues todas son diferentes.
- Se retomará esto más adelante.

¿Notan algo en los intervalos calculados? ¿Hay alguno que les parezca raro?

Responden que hay 2, que parecen que dan valores alejados del resto.

El profesor le da la media poblacional para que comprueben en cuántos de los intervalos la incluyen. Y efectivamente, en todos salvo en 2 intervalos está la media de la población (2/16=0’14). Con lo que hemos acertado en el 86% de los casos estudiados.

Les explica el profesor que cuantos más intervalos hagamos más nos acercaremos al 90% de confianza que hemos fijado.

Se les pide que para el día siguiente:

- Con las medias que tienen, calcule cada uno un intervalo de confianza para un 99% de confianza, para ver qué cosas cambian y cuáles permanecen constantes en los cálculos.
- Se les pide que traten de extraer una fórmula que permita el cálculo fácil de estos intervalos.
- Y también se les pide que extraigan dos muestras de tamaño 5 y calculen dos intervalos de confianza al 90%. Así comprobaremos de qué manera afecta el tamaño de la muestra en los intervalos.

CLASE 4. 07.11.2008

P. Nosotros hemos llegado con la explicación que les di ayer, a conseguir un intervalo. Un intervalo que nos sirve para estimar con una confianza. Que no es una probabilidad sino que es algo distinto. La confianza es, si nosotros esperamos, después de haber hecho muchas veces el intervalo, esperamos que la media caiga allí, pues según el 90%, el 99% de los casos o lo que nosotros hayamos fijado. ¿vale? Esa es la confianza. Habíamos llegado a que nosotros fijábamos una confianza. Con una confianza nosotros éramos capaces de encontrar un intervalo…un intervalo que encerrara el 90% de las medias y luego lo que hicimos es que encontramos el valor de "a" y de "b" que era, sustituyendo la media, en vez de centrar el intervalo en la media de la población lo centramos en la media de la muestra y luego le sumamos el valor que nos salió en la tabla por la desviación típica [lo escribe en la pizarra]. ¿Qué les propuse ayer? Ustedes tienen dos medias calculadas. Tienen dos muestreos de todos los datos que tenemos. Y les había propuesto que con las dos medias que tienen que cambiáramos la confianza. Que pasáramos ahora a pedir un 99% de confianza. Con este 99% de confianza y con estas dos medias busquen ustedes cuál es el intervalo de confianza, que se llama, a este nivel. Cuál es el intervalo de confianza que le corresponde. ¿Quién lo hizo?

A1. Yo.

P. Tú lo hiciste. ¿Quién más? Bueno. Pues vamos a hacerlo ahora. Ustedes tienen dos medias que hemos calculado. Pónganse se ahora calcular un intervalo, como lo hicimos ayer pero al 99%. Ahora al 99%. Fíjense en lo que cambia, qué hay que cambiar. La confianza se las doy yo.

[Se ponen a discutir entre ellos y el profesor repite las explicaciones y cálculos que hay que hacer. Tienen dudas para el cálculo del valor crítico y se tiene que poner a explicarlo de nuevo, pues lo alumnos no entienden por qué hay que coger un trocito por debajo del intervalo.]

P. De este intervalo que nosotros hemos encontrado antes, ¿qué es lo que va a cambiar ahora? ¿Están entendiendo esto? De este intervalo que encontramos con el 0’90 ¿qué datos cambian?

A. La media.

P. Bueno, la media porque dependiendo de la media que tengamos… Pero qué más cambios cuando yo les pido el 99%.

A7. El 2’58.

P. Este número. Este número hay que cambiarlo. Si yo les pido una confianza mayor entonces ahora tendremos que cambiar el valor este.

A10. Y tiene que ser más grande.

P. Es mayor este número. Pues venga.

[Tienen problemas hasta con los decimales, pues están todavía calculando el valor crítico que encierra el 99% de los datos. El profesor les pide que copien los intervalos que han calculado al 90% para tenerlos.]

Minuto: 16. [Vamos escribiendo en la pizarra varios intervalos encontrados hoy junto a la media que teníamos y el intervalo que teníamos al 90%]

Minuto 18.

P. Estamos construyendo unos intervalos nuevos. Con una confianza mayor. Si aumenta la confianza ¿qué significa que la confianza va a ser al 99%? ¿Qué significaba la confianza?

A2. Que va a dar valores más pequeños y más grandes…

P. Pero, la confianza qué significaba, qué pasaba ayer. Cuando les pedí el 90% qué pasó con la media real…

A2. Todas estaban dentro menos dos.

P. Había dos, ¿vale? Y que representaban casi el 90%. ¿Qué va a pasar hoy con el 99%?

A. Lo mismo.

P. Lo mismo o mejorará? Con el 99%. Ayer se nos quedaban dos intervalos que dejaban la media por fuera. Ahora con el 99% tenemos más seguridad de que la media esté. Al aumentar el porcentaje al 99% se supone que estamos aumentando la seguridad de que la media esté dentro hasta el 99%. Y ¿cómo es que lo estamos asegurando? ¿Qué le pasa a los intervalos?

[La pregunta no tiene respuesta de momento. Siguen algunos alumnos sin entender lo que estamos haciendo. Está claro que en esta situación están los alumnos que desde un principio se han quedado descolgados. Van siempre por detrás. Se siguen apuntando más intervalos que están calculando.]

Minuto: 22.

P. Bueno. ¿qué está pasando con los intervalos? Al aumentar la confianza ¿qué les pasa a los intervalos?

A1. Que bajan, ¿no?.

P. Que bajan qué significa.

A1. Que se aproximan más al resultado.

A5. Que en el paso que estaba antes va a estar la estatura media.

P. Se amplía. O sea que se hace más grande. Lo que está pasando es que, ¿se acuerdan que ayer estuvieron viendo que la diferencia era de 6? ¿Hoy de cuánto es?

A5. De 9´4.

P. De casi 10. Entonces para nosotros para aumentar la confianza qué tenemos que hacer: pues coger un intervalo más grande.

[Una alumna da los resultados a los que ha llegado, dando los intervalos que ha obtenido al 90 y 99%].

Minuto 24

P. ¿A quién le habían dado los intervalos por fuera?

A2. A mí me habían dado…

[Siguen discutiendo mientras el profesor se acerca al alumno que le habían dado intervalos que no recogían la media. Los vuelve a anotar en la pizarra añadiendo los nuevos, con la nueva confianza.]

Minuto 25

P. A ver este es uno de los que no cogía ayer la media. La media de la población se las dije 170,76. Fíjense que este intervalo, todavía, al aumentar la confianza sigue sin contener la media de la población. Pero seguro que el otro, sí lo contendrá y pasas de tener 2 a tener 1 que no contiene la media de la población al aumentar la confianza. Entonces ahora vamos a hacer el otro ejercicio que les había propuesto. ¿Qué pasa cuando hacemos muestras más pequeñas? ¿Qué hemos descubierto? Al aumentar la confianza…

A2. Se amplía la separación de las, de los números extremos…

P. Se amplía el intervalo, ¿no?. Al aumentar la confianza se amplía el intervalo. Bien. Vamos ahora a ver qué pasa si nosotros, el tamaño que cogemos de la muestra es más pequeño. Vamos a hacerlo una vez cada uno nada más. [Se ponen a discutir sobre las operaciones hechas en el ejercicio anterior. No toda la clase va al ritmo que marca el profesor.] Vamos ahora a hacer un muestreo de cinco datos nada más. Busquen la media y calculen un intervalo de confianza. Antes lo hicimos de 20, ¿verdad? Ahora con 5 nada más. Vamos a ver qué ventajas tiene.

[Raúl hace las operaciones rápidamente y le sale que uno de los valores calculado del intervalo le sale negativo. El profesor le dice que explique la situación e intente interpretar lo que tiene. Pero resulta que al final se había equivocado en las operaciones y estaba mal calculado. No le daba algo tan raro. A él le suena mal. Se pone de manifiesto que tienen dificultades con los cálculos utilizando calculadora y se equivocan en la jerarquía de las operaciones.]

Minuto: 33

A1. ¿La desviación típica es 8?

P. La desviación típica es 8,07 la de toda la población. La de todas las estaturas. Eso no cambia.

Minuto 37

P. Cuando lo calculen miren esta media, miren el intervalo y miren a ver si es más ventajoso o si me da más información que el otro el de 90.

A7. ¿Con los mismos datos?

P. La desviación típica es la misma. 8’07 es la misma porque esa es la de todas las alturas. Pero hay algo que cambia.

A7. Ah claro, la raíz.

P. la raíz por qué.

A7. Porque son 5 en vez de 20.

P. Porque ahora estamos haciendo el estudio a 5 en vez de 20.

[Se queda muy contenta por haber acertado en lo que cambia.]

[Raúl se da cuenta de su error, en vez de poner 3’36 puso 36, con lo que el intervalo le daba unos valores muy extremos. Indica que ahora sí le da bien. Se anotan en la pizarra los intervalos encontrados.]

A5. Profe la longitud debe ser de 11’94 y ahí hay otro de 6.

P. No. Aquí hay diez no?

A5. No tiene 11 tiene 5, digo 6.

P. Abraham.

A8. Qué?

P. Seguro que esto está bien?

A1. Pero profe, no puedes saber la amplitud sin hacerla no?

P. Son cinco datos no 20 y como son 5 datos la desviación típica no se divide por 20. ¿Qué está pasando?

A1. La amplitud es mayor.

P. La amplitud es mayor. Vale. Para el 90%.La confianza es la misma que la que estuvimos haciendo ayer, la confianza es la misma. Hemos hecho menos datos, hemos hecho 5 en vez de 20. Qué pasa, que para conseguir el 90% el intervalo tiene que ser más grande, más grande que el otro. Para conseguir la misma confianza tenemos que hacer el intervalo más grande. Esto quiere decir ¿Qué nos estamos acercando más o nos estamos acercando menos?

A5. Es lo mismo. Lo que pasa el intervalo es mucho más grande. Pasa lo mismo, en realidad estamos consiguiendo un intervalo más grande…

A1. Pero cuanto menos intervalo es mejor..

P. Cuanto menos datos

A1. Sí cuanto menos dividamos mejor

P. ¿Cuál es la ventaja entonces?

A1. Es mejor dividirlo entre 4 que dividirlo entre 10 o entre 20.

P. Vamos afinando más. Cuando estamos aproximando con más datos aproximamos más la media que cuando lo hacemos con una muestra muy pequeñita. ¿Cuál es el coste para conseguir ese 90% de confianza? Tenemos que hacerlo mayor. Para conseguir ese 90% tenemos que dar un intervalo más grande. Con lo cual, si a mi lo que me interesa es aproximarme mejor a la media tendré que coger más datos.

A2. El inconveniente es que si lo haces con más datos te arriesgas más a que falles.

P. Te arriesgas más.

A2. A que falles donde esté la media.

P. Por qué? Qué significa que falles donde está la media?

A2. Como coges a cinco personas el intervalo es más grande y si coges 20 es más chiquitito y entonces te equivocas. Porque como los coges a la azar…

P. Pero si cojo 5 datos puedo haber cogido 3 datos de personas bajitas y 2 de los altos. Entonces me queda la media por aquí [lo marco en la pizarra]. En cambio si yo cojo 20 datos puede pasarme lo mismo que con los 5 primeros pero con los otros quince me quedan por donde realmente va a estar, con lo cual la media quedaría por ahí [lo marca en la pizarra]. ¿Cuál está aproximando más? El que me está aproximando más es este. ¿Qué pasa con pocos datos? Que desde que tengo pocos datos en seguida hay variación desde que consiga un dato pequeñito se me dispara la media se mueve muchos, se puede ir para arriba o para abajo.

A2. Pero imagínate que la media no esté ahí sino fuera…

P. Pero vamos a ver, eso puede pasar, eso nos pasó ayer con dos intervalos. No logramos coger la media. Es una posibilidad que tenemos. Pero ¿con qué método nos estamos acercando más, estamos afinando más a la media? Cuando tenemos más datos. Es lo que tenemos que poner. Cuando tenemos un muestreo pequeño para conseguir un nivel de confianza necesitamos un intervalo mayor con lo que afinamos menos la media. Y es verdad que está entre este y este, pero estamos afinando peor. Anoten esto, que se nos olvida de aquí al lunes.

A1. Que cuanto más números más apretados…

P. Anoten esto. Para conseguir la misma confianza con menos datos el intervalo de confianza tiene que ser mayor, ¿vale?. Con lo que afinamos peor la estimación de la media. [Lo repite] La media no la podemos afinar bien. Por eso nos interesa coger una cantidad mayor de datos. ¿Qué es lo que me queda? Nos interesa que a partir de las cuentas que hemos hecho estos días extraigan una fórmula, una fórmula que me faciliten a mí los cálculos. Ustedes han estado haciendo siempre las mismas cuentas, ¿qué datos tengo que conocer?

A1. La media y la desviación típica.

A1. Y lo que te da la tabla

P. ¿Qué datos tengo que conocer y qué tengo que calcular? Unos los tengo que calcular y otros los tengo que calcular. Díganme cuál es la fórmula para el valor de a y cuál para el valor de b. Lo vamos a escribir en una fórmula para poderlo hacer rápidamente.

A2. La media.

P. Cuántos datos has tenido que estudiar. Te lo tienen que decir. Y la media, que no les van a pedir que la calculen ustedes sino que se las daré.

La idea es que vean que la estadística es una ciencia de los datos, que a cada uno le va a dar resultados diferentes.