Universidad de La Laguna
Departamento de Análisis Matemático

EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DESARROLLADO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA EN PROBLEMAS DE GENERALIZACIÓN LINEAL

Memoria para la obtención del grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Juan Antonio García Cruz

Abril 1998

INDICE

Antonio Martinón Cejas, Profesor Titular de Universidad de Análisis Matemático,

CERTIFICA:

Que la presente Memoria, titulada “El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal”, ha sido realizada bajo mi dirección por el Licenciado en Ciencias Matemáticas don Juan Antonio García Cruz, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firmo la presente en La Laguna, a 27 de abril de 1998.

A Susy, Carlos y Alberto
A Eugenia y Juan Antonio, *in memoriam*

Agradecimientos

Al Dr. Antonio Martinón Cejas, Profesor Titular de Universidad y Director de esta Memoria, por su magnífica dirección, valiosa ayuda y permanentes estímulos que han sido decisivos para la finalización de este trabajo.

A todos los alumnos que han participado en el estudio experimental, en especial a los del Instituto Domingo Pérez Minik, por la colaboración e interés mostrado a lo largo de todo el proceso de recogida de datos.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático, y en especial a los del área Didáctica de las Matemáticas, por el apoyo y ánimo recibido.

Introducción

Esta Memoria esta dedicada a la *generalización*, uno de los procesos con presencia más amplia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La amplitud del tema ha hecho que centremos nuestro trabajo en la generalización que realizan alumnos de educación secundaria ante una clase precisa de tareas escolares, los denominados *problemas de generalización lineal.* Por tanto, en este trabajo investigamos el proceso de generalización desarrollado por los alumnos al enfrentarse a problemas de generalización lineal.

La producción de los alumnos en este tipo de tareas ha sido estudiada por diversos autores, entre los que destacan Stacey (1989), Orton y Orton (1994 y 1996), Redden (1994), Castro (1994) y Taplin (1995).

El objeto de investigación posee también interés, desde el punto de vista curricular, como se señala expresamente en diversas publicaciones, entre las cuales citaremos al Diseño Curricular Base (1989), Real Decreto 1345 (1991) y Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics (NCTM, 1989).

Como marco teórico para interpretar la generalización que los alumnos desarrollan en los problemas de generalización lineal, hemos acudido a la psicología genética de Piaget, y a los trabajos recientes de Dörfler y Dubinsky. Los elementos teóricos utilizados se exponen en el capítulo 2.

La investigación que presentamos en esta Memoria tiene, de forma resumida, dos objetivos principales.

El primer objetivo se refiere al proceso de generalización, a la determinación de las acciones que los alumnos realizan y a los invariantes que establecen al abordar las tareas denominadas problemas de generalización lineal.

El segundo objetivo de esta investigación consiste en derivar orientaciones para la práctica educativa en el nivel de enseñanza secundaria.

A tal fin, hemos llevado a cabo tres estudios. El contenido de los mismos, así como sus conclusiones se exponen en los capítulos 4, 5 y 6 de esta memoria.

El capítulo 7 se dedica a una síntesis y discusión del proceso de generalización desarrollado por los alumnos y derivado de los datos expuestos y discutidos en los capítulos dedicados a cada estudio particular.

Por último el capítulo 8 expone los hallazgos y conclusiones más generales de nuestro trabajo.

Algunos de los resultados de esta Memoria han sido publicados o han sido aceptados para publicar. Concretamente, algunos de los resultados del primer estudio se recogen en García Cruz y Martinón (1996a, 1996b, 1998d). Partes del segundo estudio figuran en García Cruz y Martinón (1997a, 1998b). Los trabajos García Cruz y Martinón (1998a, 1998c) se refieren al tercer estudio.

Por último, en García Cruz y Martinón (1997b) se introducen los grafos para la visualización de las transiciones y en García Cruz y Martinón (1998e) se trata de los números poligonales, especialmente a las pautas numéricas que siguen, aunque no son lineales.

Capítulo 1

El objeto de investigación y sus antecedentes

1.1. Sobre la percepción de pautas y la generalización

La habilidad para generalizar es un tema tradicional y central de la psicología experimental (Davydov, 1990), así como de la didáctica de las matemáticas (Dienes, 1960; Mason, 1991). En ambas disciplinas interesa el estudio de los procesos mentales mediante los cuales se realiza y queda determinada la generalización, así como los medios para desarrollar tal habilidad en los alumnos.

Una de las investigaciones sobre tal habilidad es la clásica de Krutestskii, realizada bajo el paradigma o marco teórico del procesamiento de la información.

Krutestskii (1976) habla de la habilidad para generalizar algún contenido matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver algo general y conocido en lo que es particular y concreto (someter un caso particular a un concepto general conocido) y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado (deducir lo general a partir de casos concretos para formar un concepto). Para un alumno, una cosa es ver la posibilidad de aplicar una fórmula conocida a un caso particular y otra cosa es deducir una fórmula desconocida a partir de casos particulares.

En su investigación, Krutestskii diseñó materiales para estudiar la habilidad mostrada por los alumnos en el segundo de los niveles de generalización del contenido matemático a partir del proceso de inducción finita. Como resultado de la investigación se distinguieron cuatro niveles de habilidad para generalizar entre alumnos que poseen diferentes capacidades para las matemáticas.

Nivel 1. No generaliza material respecto de atributos esenciales, ni siquiera con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos intermedios del mismo tipo.

Nivel 2. Generaliza material respecto de atributos esenciales con la ayuda del experimentador y después de realizar un número de ejercicios prácticos del mismo tipo, mostrando errores e imprecisiones.

Nivel 3. Generaliza material respecto de atributos esenciales por sí mismo, pero después de varios ejercicios del mismo tipo con errores insignificantes. Es capaz de realizar generalizaciones libres de error por medio de indicaciones y preguntas insignificantes hechas por el investigador.

Nivel 4. Generaliza material correctamente e inmediatamente, sin experimentar dificultades, sin ayuda por parte del experimentador y sin una práctica especial en resolver problemas del mismo tipo.

De la propia formulación de los niveles se deduce que tal estudio consistió en una práctica de enseñanza, donde los materiales fueron preparados para conseguir tal habilidad de generalizar mediante la abstracción de atributos esenciales, donde juega un papel importante el proceso de inducción empírica (Polya, 1966). Además, se señala un tipo único de tarea, que sirve como medio hacia el desarrollo de la habilidad, medida esta por la velocidad y extensión de la generalización. La velocidad se refiere al número de casos concretos necesarios para realizar una generalización.

Los niveles establecidos mediante la investigación de Krutestskii señalan la relación estrecha que existe entre diferentes procesos como son la abstracción, la inducción y la generalización en la formación de los conceptos matemáticos.

En lo que sigue expondremos nuestra revisión de investigaciones recientes sobre la generalización de pautas y en las que se utilizan tareas similares o idénticas a los *problemas de* *generalización lineal*, cuyo formato describimos ahora brevemente y más adelante con cierto detenimiento. Se trata de problemas con las siguientes características: mediante dibujos que figuran en el enunciado, se dan varios objetos de diferentes tamaños ($n = 1, 2, ...$), los cuales tienen un número $f(n)$ de elementos; de esta forma se dan los primeros términos $f(1), f(2), f(3), ...$ de una progresión aritmética $f(n) = an + b$, $b \neq 0$, y se piden algunos términos $f(n)$. Cuando n es "pequeño" se hablará de *generalización próxima* y cuando n es "grande" de *generalización lejana*. En esta clase de problemas aparece la *pauta lineal*.

En Stacey (1989) se informa de los métodos y de la consistencia en el uso del método, utilizados por alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 13 años, en problemas de generalización lineal. Resaltamos los siguientes hallazgos del trabajo de Stacey:

Clasifica los métodos empleadas por los alumnos en cuatro categorías:

Recuento: Contar directamente sobre un dibujo o construir la sucesión correspondiente hasta el término requerido.

Diferencia: Se asume de forma implícita que la adición repetida implica que $f(n) = an$.

Whole-object : Se asume implícitamente que $f(mn) = mf(n)$.

Lineal: Utilización de una pauta lineal, es decir, se reconoce que tanto las operaciones de suma y multiplicación están involucradas y que, además importa el orden en que se realizan las operaciones. Se asume implícitamente que $f(n) = an + b$, $b \neq 0$.

Los alumnos más experimentados muestran, en su explicación escrita, cierta relación entre la pauta numérica y la pauta espacial, es decir, se nota una cierta influencia del dibujo en el desarrollo de la estrategia por los alumnos (p. 157).

Estudió la *consistencia*, definiéndola como la persistencia del método utilizado en una cuestión al pasar a otra, tanto en un mismo problema como entre problemas. Así, en primer lugar, estudió los cambios de método que se producen al pasar de la generalización próxima a la lejana, sin distinguir entre los problemas, y en segundo lugar, estudió cuántos alumnos utilizan uno, dos, etc., métodos a lo largo de la prueba. Su conclusión es que los alumnos son inconsistentes en el uso de los métodos, al encontrar un alto porcentaje de alumnos que utilizan más de un método tanto en un mismo problema como en dos problemas. Como dato más relevante hace notar que los alumnos que comienzan un problema contestando correctamente las cuestiones más simples adoptan frecuentemente un método incorrecto, pero más simple, al pasar a las cuestiones más complejas (generalizaciones lejanas). Los alumnos reconocen suficientemente el carácter obvio de la pauta lineal, sumar la diferencia constante. La fuerte asociación entre adición repetida (carácter iterativo) y la multiplicación conduce a los alumnos a desarrollar métodos de solución erróneos.

Pensamos que los métodos *diferencia* y *whole-object* tienen en común que en ambos se asume implícitamente que la relación que guarda una parte del objeto con el total es directamente proporcional. Por otro lado, al englobar todas los métodos lineales bajo la misma categoría se oculta la diferente cualidad de respuestas dadas por los alumnos. A pesar de dar cierta importancia al dibujo, como medio para el desarrollo del método de solución, sin embargo, no profundiza en el análisis de tal influencia. La consistencia del empleo de los diferentes métodos no fue suficientemente estudiado por Stacey. Creemos que tal consistencia es una muestra de la comprensión de la pauta, que se muestra a través de un comportamiento igual en cuestiones similares. Es posible, que no abordara tal estudio, debido a que la mayoría de los alumnos abandonaban un método correcto por otro incorrecto, al pasar a cuestiones más complejas (generalización lejana) dentro de un mismo problema. Stacey no informa de sí se interesó por definir o estudiar niveles de generalización en su investigación.

En los trabajos de Orton y Orton (1994 y 1996) se utilizan mayoritariamente problemas con pautas lineales y cuadráticas, acompañados también de diagramas ilustrativos en el caso del primero de los trabajos aquí citados.

El primero de tales trabajos (Orton y Orton, 1994) consta, a su vez, de cuatro estudios cuyos objetivos eran proporcionar evidencia sobre habilidades y competencias mostradas por los sujetos en situaciones con pautas, además de señalar algunos obstáculos para tales habilidades y competencias.

Uno de los cuatro estudios fue llevado a cabo con alumnos de edades comprendidas entre los 9 y 13 años. En él se utilizó material concreto, "palillos", y se esperaba que el manejo de tal material en la experiencia, serviría de ayuda a los alumnos. Sin embargo, se informa que una vez que los números asociados a los diagramas se hicieron explícitos, los alumnos abandonaron el trabajo con el material concreto y se concentraron en las pautas puramente numéricas.

Como conclusiones se observa que "la generalización tiene lugar a más de un nivel: algunos sujetos son capaces de utilizar métodos generalizables para calcular los términos de una sucesión particular, pero sus habilidades no les permiten extender tales métodos a las siguientes sucesiones. Sin embargo, otros sujetos sí muestran tal habilidad. Con respecto a la relación entre n y f(n), algunos sujetos han mostrado un nivel de generalización que sólo les permite aportar soluciones numéricas, otros son capaces de resumir relaciones utilizando palabras y pocos fueron capaces de convertirlas en formas algebraicas reconocibles" (p. 413).

Del resumen se desprende un intento de definir diferentes habilidades de generalizar. Por un lado, la *extensión de la generalidad,* como el empleo de un método correcto de generalización dentro de una tarea y en diferentes tareas. Por otro lado, la *expresión de la generalidad* de tres formas distintas, desde las simples estructuras de los cálculos hasta las expresiones algebraicas, pasando por la formulación con palabras de las relaciones encontradas.

Respecto de los obstáculos encontrados en este primer trabajo, se señala entre otros, "la fijación en enfoques recursivos puede obstaculizar seriamente el progreso hacia una regla universal" así como el uso amplio, por los sujetos, de métodos inapropiados (proporcionalidad directa). Tales obstáculos fueron señalados ya en el trabajo de Stacey.

En el otro trabajo (Orton y Orton, 1996) se abandonan los formatos pictóricos y mediante tareas contextualizadas, que conllevan pautas lineales y cuadráticas, se definen unos estadios y niveles en el desarrollo de las habilidades de generalización en alumnos de edades entre 10 y 13 años. Cada estadio corresponde con un término de la sucesión, asumiéndose que si un alumno ha dado respuesta correcta para el término veinte de la sucesión, entonces, es capaz de dar respuesta correcta para los anteriores. Tal clasificación en estadios es insatisfactoria, pues los propios autores reconocen que se dieron casos en que los alumnos proporcionaban una respuesta correcta para el término cincuenta y no para el término veinte. Debido a tal inconsistencia, se optó por una clasificación en niveles, atendiendo a consideraciones cualitativas de las respuestas, como es una expresión verbal correcta, una expresión algebraica aproximada y una expresión algebraica correcta aunque no simplificada. Tales niveles fueron luego sometidos a una comparación con otros establecidos utilizando la taxonomía SOLO (Bigg y Collis, 1982, 1991), detectándose ciertos problemas de correspondencia entre unos y otros.

En Redden (1994) se utiliza la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982, 1991) en la clasificación de las respuestas, por escrito, dadas por los alumnos (10 a 13 años) a problemas con pautas lineales, para establecer dos jerarquías de desarrollo de la habilidad de generalizar. La primera se refiere al uso que hacen los alumnos de los datos aportados (dimensión de procesamiento de los datos), y la segunda se refiere a una visión de los datos que puede aportar una expresión de la generalidad en la descripción de la pauta por los estudiantes (dimensión de expresión de la generalidad).

El modelo predictivo, según las dos jerarquías de desarrollo de la habilidad de generalizar, fue establecido analizando únicamente una cuestión, de cuatro propuestas, en tres tareas con pautas lineales, administradas a una amplia muestra de alumnos (1435). Tal cuestión solicitaba de los alumnos que describieran, en lenguaje natural, una regla general para la pauta. Se señala, además, ciertas expresiones utilizadas por los alumnos, las cuales están claramente influenciadas por el diagrama que acompaña al ítem (p. 92). Dado que el propósito del investigador era clasificar las respuestas en el modo simbólico concreto y no el modo icónico, no se consideró necesario prestar atención a la posibilidad de que las pautas que desarrollaban los alumnos estuviesen influenciadas de alguna forma por tal diagrama, aunque se reconocía explícitamente que el diagrama podría estar influyendo de alguna forma (p.90).

En Castro y Rico (1994), Castro (1995) y Rico, Castro y Romero (1996) se plantea la viabilidad de las configuraciones puntuales como sistema de representación de los números naturales y como medio adecuado para visualizar y analizar secuencias. A través de una secuencia de tareas estructuradas, que contienen pautas lineales y cuadráticas, y combinando otros dos sistemas de representación, se estudia la potencia de tales configuraciones para expresar relaciones y propiedades numéricas descubiertas por los alumnos (13 a 14 años).

Se concluye que tal sistema gráfico-intuitivo es ampliamente utilizado por los alumnos, aunque se detectan ciertos problemas en su uso. Por ejemplo, "al representar varios términos de una secuencia mediante configuración puntual se pueden analizar sus términos mediante diferentes desarrollos aritméticos y, por tanto, obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes del término general de la sucesión. La representación puntual del término general de una sucesión necesita de la ayuda del profesor; se trata de un conocimiento de los que Piaget denomina social, que necesita ser transmitido" (Castro, 1995, p. 308).

Taplin (1995) también utilizó la taxonomía SOLO como marco para la clasificación de las respuestas de alumnos de edades comprendidas entre los 12 y 13 años. Los ítems empleados se acompañaban también de diagramas ilustrativos y además se utilizó material concreto para facilitar la tarea a los alumnos y estudiar el comportamiento de los mismos en varios formatos: modelización con material concreto, diagramas y texto. En particular, los diagramas se utilizaron para proveer de material adecuado a los estudiantes con tendencias visuales o pictóricas (p. 44). Sin embargo, no se señala explícitamente el uso que del diagrama hacen los alumnos en la construcción de la generalidad.

1.2. Interés curricular

Las nuevas orientaciones curriculares sobre enseñanza de las matemáticas en diferentes países han introducido en el curriculum temas que anteriormente no figuraban de forma explícita. Uno de estos temas es la percepción de pautas, su utilización para resolver problemas no triviales y su ulterior generalización.

Así, en Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics (NCTM, 1989) encontramos "... el curriculum debe incluir la exploración de pautas y funciones para que los estudiantes sean capaces de describir, extender analizar y crear una amplia gama de pautas" y también "usar pautas y funciones para representar y resolver problemas"(p. 98).

Variedad de fenómenos tienen que ver con el estudio de pautas, en particular con pautas lineales y cuadráticas, y este aspecto ha sido recogido, en nuestro país, en el Diseño Curricular Base (1989), donde encontramos que "Fenómenos y gráficos lineales, cuadráticos..." (p. 512) es tema de estudio para los alumnos de secundaria. Por otro lado, "identificar y describir regularidades, pautas y relaciones conocidas en conjuntos de números y formas geométricas similares" es uno de los criterios de evaluación para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Real Decreto 1345, 1991).

Las pautas y su relación con determinadas habilidades propias de la resolución de problemas, como es examinar casos especiales, organizar la información de forma sistemática, particularizar, establecer conjeturas y generalizar, entre otras, ha sido objeto de algunas publicaciones (Mason et al, 1982; Lewis, 1983; Swan, 1984; Andrews, 1990).

La investigación de pautas permite a los estudiantes desarrollar la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas importantes, entre ellas las funciones, pues cuando se estudian las relaciones entre las cantidades, en problemas con pautas, surge el conocimiento entre importantes relaciones matemáticas y las funciones (Phillips, 1991).

El National Council of Teachers of Mathematics publica anualmente un monográfico sobre un tema de interés curricular. Por lo general, se presentan nuevos enfoques sobre la enseñanza de las matemáticas, nuevos contenidos de la matemática o ambas cosas. El libro del año 1991 (NCTM, 1991) se dedica por entero a presentar el interés curricular que ofrece el enfoque discreto de las matemáticas. El capítulo 7 se dedica a presentar los tópicos recursión, iteración e inducción, mostrando ejemplos de situaciones en las que contenidos tradicionales pueden adquirir una nueva dimensión en su tratamiento, para la introducción de conceptos y técnicas de trabajo propias del empleo de las nuevas tecnologías de la información. En concreto, se presenta un ejemplo de sucesiones aritméticas en el que la respuesta de tipo recursivo, se señala como una forma simple de introducir a los alumnos en las expresiones recursivas, tan importante para modelar situaciones mediante lenguajes de programación u hojas de cálculo (Cornell y Siegfried, 1991, p. 149).

En todas estas publicaciones citadas, se enfatiza la relación importante que existe entre la percepción y extensión de pautas, ya sean numéricas o espaciales, su relación con el concepto de función y los procesos de particularización, inducción, recursión, iteración, abstracción y generalización.

Por otro lado, en el último estudio internacional sobre matemáticas y ciencias, TIMSS (Robitaille,1993), se ha utilizado un ítem que obedece al formato de problemas de generalización (Algebra ítem-14, cuestiones a y b) dentro de la categoría de actuación *resolución de problemas*. En la cuestión b, que nosotros tipificaríamos como de generalización próxima, se ha obtenido un éxito muy bajo, 18% para el grado 7º y 26% para el grado 8º, en la muestra internacional (Beaton et all, 1996, p. 76). Para los resultados de los alumnos españoles de 8º EGB, la media de éxito es aún más baja un 22% (López y Moreno, 1997, p. 32).

1.3. Los problemas de generalización lineal

En este trabajo investigamos el proceso de generalización desarrollado por los alumnos al enfrentarse a *problemas de generalización lineal*. Tal término fue acuñado por Lee y Wheeler (ver Stacey, 1989) y es muy común en la literatura didáctica de origen anglosajón. Conviene hacer aquí esta precisión, pues lo que denominamos en este trabajo con el término *lineal*, correspode con una función *afín*, mientras que lo que denominamos de *proporcionalidad directa* corresponde con una función *lineal* en la terminología matemática habitual. En lo que sigue utilizaremos la terminología didáctica señalada.

En los problemas de generalización lineal está presente una *sucesión lineal* o progresión aritmética de números naturales $f(n) = an + b$ (n = 1, 2, 3,...), con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Necesariamente han de ser a y b números enteros tales que $a > 0$ y $a + b > 0$. El número a es la diferencia de la sucesión, es decir la diferencia entre términos consecutivos: $a = f(n+1) - f(n)$. Las sucesiones lineales comparten con las sucesiones de proporcionalidad directa $f(n) = an$ el ser progresiones aritméticas.

Aunque puede variar la forma de presentación de este tipo de tareas, generalmente tienen dos partes y poseen un formato del siguiente tipo:

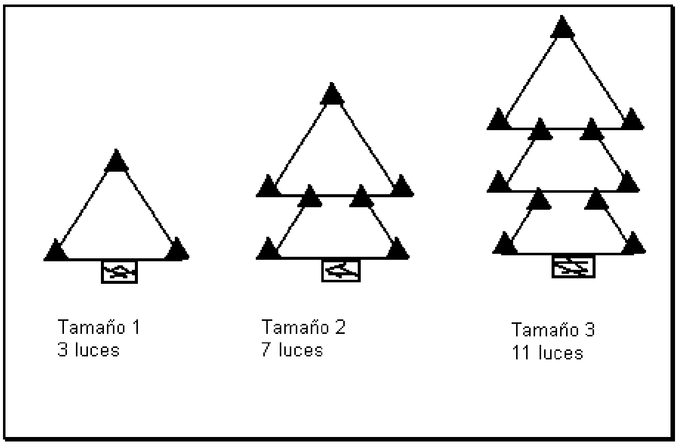
Primera parte: Mediante dibujos ilustrativos se describen los primeros términos (n = 1, 2, 3,,...) de una sucesión de objetos que están compuestos de $f(n)$ elementos bien diferenciados. De esta forma se conocen los primeros términos $f(1), f(2), f(3)$... de la sucesión numérica.

Segunda parte: Se propone una tarea que consta de tres tipos de cuestiones:

a) *Cuestiones introductorias:* Se pide el número de elementos que corresponden a objetos de tamaño cuatro o cinco: $f(4)$ ó $f(5)$.

b) *Cuestión de generalización próxima:* Se solicita el número de elementos que corresponden a un objeto de tamaño tal que el alumno pueda calcularlo mediante un procedimiento de recuento directo, como $f(10)$.

c) *Cuestión de generalización lejana:* Se solicita el número de elementos que corresponden a un objeto de un tamaño tal que el cálculo es difícil o resulta complejo por un procedimiento de recuento directo, como $f(20)$ ó $f(100)$.



En el contexto de los problemas de generalización lineal, el término *generalización próxima* hace referencia a una cuestión que puede ser resuelta mediante un recuento directo sobre un dibujo construido al efecto o mediante la extensión de la sucesión numérica correspondiente; el término *generalización lejana*, hace referencia a una cuestión que no se puede abordar o es difícil hacerlo por los procedimientos paso a paso descritos para la *generalización próxima* (Stacey, 1989).

1.4. Delimitación del problema de investigación: hipótesis y objetivos

En la sección 1.1. hemos presentado un resumen de investigaciones recientes sobre la generalización desarrollada por alumnos, al abordar tareas que conllevan una pauta lineal y que, la mayoría de las veces, presentan un formato similar al descrito en la sección 1.3.

El objeto de estudio de las anteriores investigaciones, bajo marcos teóricos diferentes, ha sido clasificar las respuestas dadas por los alumnos según diferentes formatos, y establecer una categoría de niveles de generalización que, de alguna forma, expresarían la comprensión que de las pautas lineales adquieren los alumnos al realizar tales tareas. Algunas investigaciones han identificado obstáculos a los que se enfrentan los alumnos en la generalización y se ha señalado parcialmente el papel que juegan los dos ámbitos, numérico y visual-geométrico, en el desarrollo de la generalización. Creemos que se ha prestado poca atención al análisis del proceso mediante el cual los alumnos elaboran la generalización, habiéndose centrado los esfuerzos en la clasificación del resultado de ese proceso.

Como ya hemos expuesto, pretendemos contribuir al conocimiento sobre el proceso de generalización desarrollado por los alumnos de secundaria al enfrentarse a problemas de generalización lineal. A tal fin avanzamos la *primera hipótesis de nuestra investigación.*

1. *Los problemas de generalización lineal, según el formato adoptado en nuestra investigación, aportan un ámbito visual-geométrico, que facilita en los alumnos el proceso de abstracción y generalización.*

Como hemos señalado en el apartado 1.2. existe, sobre este campo, un amplio interés curricular. Por otro lado, hoy más que nunca, se exige una relación más estrecha entre los resultados de la investigación y la práctica docente como se puso de manifiesto en el Seminario sobre Investigación y Didáctica de las Matemáticas (Puig y Calderón, 1996) celebrado hace unos años en nuestro país. Lo dicho y nuestra doble condición de profesor e investigador, nuestra experiencia amplia en educación secundaria (desde 1975), así como las ventajas que se obtienen de una enseñanza que construye desde el conocimiento de los alumnos, incluso del conocimiento no adecuado, como han puesto de manifiesto varios autores, y en especial los componentes del Shell Centre de la Universidad de Nottingham recogidas en diversas publicaciones (Bell, 1979; Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., y Purdy, D., 1985) nos lleva pues a avanzar la *segunda hipótesis de nuestra investigación*.

2. *Los alumnos enfrentados a problemas de generalización lineal, desarrollan de forma espontánea, sin instrucción específica previa, estrategias de solución, que son útiles como base y guía de la instrucción específica de este tema. Además, un análisis y discusión de las estrategias correctas e incorrectas, entre los alumnos, produce una mayor y más profunda compresión de las relaciones matemáticas, tanto numéricas como simbólicas, establecidas al resolver tales problemas.*

Estas hipótesis no deben ser entendidas como tales en el sentido estadístico del término. En ellas se reflejan algunas de las conclusiones esperadas de este estudio. Por lo tanto, se trata de expectativas sobre el formato de la tarea y sobre la influencia del mismo en la actuación de los alumnos respecto del proceso de generalización, y que esperamos sostener con evidencia empírica obtenida del trabajo de campo desarrollado.

Tales hipótesis, de carácter general, se enmarcan en los dos siguientes *objetivos generales* de nuestra investigación:

1. *Estudiar el proceso de generalización desarrollado de forma espontánea por los alumnos al resolver problemas de generalización lineal.*
2. *Derivar indicaciones y sugerencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las sucesiones lineales.*

Estos objetivos generales, se concretaran y particularizaran en cada uno de los tres estudios llevados a cabo.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Introducción

La generalización ha sido siempre un problema central tanto en Psicología como en Didáctica (Davydov, 1990, pp 9-10). Por otro lado, existe un amplio acuerdo en que abstracción y generalidad son características esenciales del conocimiento matemático. Una dicotomía que ambos términos presentan es que se refieren tanto a un proceso mental como al producto derivado de tal proceso (Dienes, 1961; Davydov 1990). Desde el punto de vista educativo ambos son importantes, tanto si consideramos los procesos como si consideramos los resultados. Para un educador interesa, de forma principal, el papel que juegan dichos procesos en la construcción de los conceptos matemáticos.

La relación entre acciones dinámicas y entidades conceptuales ha sido el centro de interés en la investigación cognitiva sobre el aprendizaje de las matemáticas. La forma en que las acciones dinámicas llegan a convertirse en entidades conceptuales ha recibido diferentes denominaciones. Así, encontramos *interiorización* (Piaget & Beth, 1980), *reificación* (Sfard, 1990), *encapsulación* (Dubinsky, 1991), y *objetivación* (Dörfler, 1991).

El paso de acciones dinámicas a entidades conceptuales abstractas ha sido el centro de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento. Los constructos *equilibración, asimilación, acomodación y abstracción reflexiva* son elementos básicos desarrollados por Piaget para describir y explicar la construcción de los entes abstractos a partir de las acciones. Recientemente tales elementos teóricos han sido el punto de partida para la elaboración de teorías que, en esencia, derivan de la teoría general de Piaget, pero que han sido adaptadas para estudiar y detallar el proceso de construcción de determinados conceptos matemáticos.

Para Dubinsky (1991a, 1991b), el cambio cognitivo se produce desde acciones que llegan a ser procesos y luego tales procesos se encapsulan en objetos.

Sfard (1991), señala tres fases en tal proceso cognitivo: interiorización del proceso, condensación (transformación de la secuencia de operaciones en un todo), y luego la reificación, que marca el cambio cualitativo manifestado por la transformación del pensamiento operativo (centrado en los procesos matemáticos) al pensamiento estructural (centrado en las propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos).

Estas elaboraciones teóricas, cuyo origen, indudablemente, se encuentra en los trabajos de Piaget y colaboradores, han aportado diferentes descripciones del proceso de construcción de entes abstractos y de modelización de la conducta de los sujetos a lo largo y en las diferentes fases del proceso. Tal conducta cognitiva es una manifestación de la comprensión mostrada por los sujetos frente a los estímulos o tareas propuestas.

Nuestro marco teórico parte de las ideas de Piaget (Piaget, 1987 y 1990; Piaget y García, 1982; Beth y Piaget, 1980) sobre el papel que juega la abstracción reflexiva en la construcción de los conceptos, así como del desarrollo de tales ideas llevado a cabo por Dörfler (1986, 1987 y 1991), Dubinsky y Lewin (1986) y Dubinsky (1991a, 1991b), quienes han elaborado sendos marcos teóricos que consideramos complementarios y de cuya síntesis, que presentamos en este capítulo, surge la teoría que hemos utilizado en nuestra investigación.

2.2. Elementos de la teoría de Piaget

Piaget denominó *epistemología genética* a su teoría sobre el conocimiento (Piaget, 1987; García, 1997). Su centro de interés es la descripción del desarrollo de los esquemas cognitivos de los individuos a lo largo del tiempo y de acuerdo con ciertas reglas generales.

2.2.1. La equilibración

El principio central y organizativo de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento es la *equilibración* (Piaget, 1990; García, 1997). Tal equilibración se lleva a cabo mediante dos procesos, íntimamente relacionados y dependientes, que son la *asimilación* y la *acomodación*.

La equilibración se produce por medio de la *asimilación* de la situación a esquemas cognitivos existentes o, si es necesario, mediante la reconstrucción o expansión de esquemas cognitivos particulares para *acomodar* la situación. La asimilación es pues, el proceso mediante el cuál el individuo aplica a la situación problemática, o estímulo, el conjunto de operaciones o esquemas cognitivos que ha construido anteriormente.

La *asimilación* y la *acomodación* se muestran en la teoría piagetiana como las herramientas cognitivas útiles y fundamentales en el restablecimiento del equilibrio cognitivo en el individuo. El binomio asimilación-acomodación produce en los individuos una reestructuración y reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes. Si los individuos construyen su propio conocimiento, la equilibración expresa el proceso mediante el cual se produce tal construcción. Con esto se señala el carácter dinámico de la construcción del conocimiento, como hipótesis de partida para una teoría dialéctica, en su metodología de análisis de los procesos cognitivos (García, 1997, p 41).

2.2.2. Proceso de generalización: Abstracción reflexiva

La *abstracción reflexiva* o reflectora es un término definido por Piaget y central en su teoría de la construcción del conocimiento. Piaget llama así a la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos (Beth y Piaget, 1980, p. 212). La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisolubles (Piaget, 1990, p. 40): un *proceso de reflexión*, 'reflejamiento' o proyección que hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a otro superior (por ejemplo de la acción física a la representación mental) y un *producto de la reflexión*, una 'reflexión' en el sentido mental, que permite una reorganización o reconstrucción cognitiva, sobre el nuevo plano de la que ha sido extraído del plano precedente. En el plano inferior las acciones y operaciones se realizan sobre objetos concretos, físicos o imaginados, mientras que en el plano superior las acciones y operaciones interiorizadas actúan sobre objetos abstractos y las coordina para formar nuevas acciones que dan lugar a nuevos objetos. Siendo así que el sujeto reconstruye lo así abstraído en un plano superior nuevo, cuyo funcionamiento es distinto, y que tal reconstrucción conduce a un esquema cognitivo más general (Beth y Piaget, 1980, p. 229).

Piaget señaló su carácter constructivo, por lo tanto no de descubrimiento, pues la abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de actos materiales en un sistema de operaciones interiorizadas cuyas leyes o estructura se comprenden en un *acto simultáneo*. La abstracción reflexiva se refiere, por tanto, a las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conduce a construir (Piaget y García, 1982 p. 247) y es, por lo tanto, puramente interna al sujeto. Destaquemos aquí que lo que constituye la génesis del conocimiento y que aporta su cualidad constructiva son las acciones y no la mera observación. Pues por medio de las acciones se desencadena el proceso de abstracción reflexiva en el individuo y su conclusión será la construcción mental de un nuevo ente abstracto, objeto o concepto más general.

La importancia del papel jugado por la abstracción reflexiva en la construcción de los conceptos matemáticos ha dado lugar, recientemente, a dos marcos teóricos, extensiones de la teoría desarrollada por Jean Piaget: La *generalización operativa* (Dörfler, 1991) y el marco teórico *acción-proceso-objeto* (Dubinsky, 1991a y 1991b).

En los siguientes apartados presentamos una síntesis breve de ambos marcos teóricos.

2.3. Generalización operativa

El marco teórico desarrollado por Dörfler (Dörfler, 1991), tiene en común con la teoría de Piaget las acciones como punto de partida y como fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas. En él, una acción se debe entender en sentido tan amplio como sea necesario, incluso las más puras operaciones matemáticas deben considerarse como acciones, debido al carácter cíclico del proceso de generalización. Pues en la formación de un concepto matemático, en un nivel elemental, una acción puede consistir en agrupar objetos materiales determinados y en otro nivel superior, del mismo concepto, la acción puede tomar el sentido de operación matemática de orden o suma, actuando sobre elementos abstractos.

Dörfler contempla tres procesos generales dependiendo cada uno del centro de interés:

(i) El centro de interés es el esquema de la acción, forma general del proceso.

(ii) Las condiciones para la plausibilidad de las acciones, formuladas como relaciones entre objetos o como propiedades de los objetos.

(iii) El producto o resultado de las acciones.

Detallamos a continuación la forma general del proceso (figura 2.1.), donde el centro de interés es el esquema de la acción.

El punto de partida, génesis del proceso, es una acción introducida por el sujeto en la situación o estímulo que produce el desequilibrio. La *acción* o *sistema de acciones*, pueden ser imaginarias, materiales o simbólicas, pero siempre acciones concretas, y centra la atención del sujeto sobre los elementos de esas acciones que, en particular, son ciertos objetos materiales o ideales.

Los objetivos planteados, los medios empleados y el curso de tales acciones dirigen la atención del sujeto hacia algunas relaciones y conexiones entre los elementos de las acciones. Estas relaciones se muestran *invariantes* cuando las acciones se repiten y se denominan *invariantes de las acciones*. El establecimiento de estos *invariantes* requiere, no obstante, de cierta *descripción simbólica*, ya que se han de introducir símbolos para los elementos de las acciones o para las cantidades que son relevantes, y para las transformaciones o combinaciones de tales cantidades inducidas por las acciones. Estos símbolos pueden ser de naturaleza verbal, icónica, geométrica, aritmética o algebraica. En cualquier caso los invariantes se describen por medio de los símbolos y son por lo tanto fijados de esa forma.

Este establecimiento de los invariantes y su descripción simbólica tiene el carácter de un *proceso de abstracción* ya que se señalan determinadas propiedades y relaciones y se centra la atención sobre ellas. Por medio de esto cobran independencia de los elementos u objetos a los que originariamente están asociados hasta un cierto grado, produciéndose de esta forma una *objetivización de los símbolos*. Importante es señalar aquí que este proceso corresponde claramente con una *abstracción constructiva*, en la que lo que se abstrae queda constituido por las acciones y gana significado y existencia vía las propias acciones.

En principio, los símbolos concretos tienen un rango de referencia descrito por el contexto de la acción, es decir, son variables referenciales. El paso decisivo en el proceso de generalización es contemplar estos símbolos como *variables objetivadas*, cuyas características vienen dadas solamente por las *cualidades y relaciones abstraídas* y que permanecen justo por sí mismas y no por algún referente. De este modo, el sistema completo de esas cualidades y relaciones se transforma en una "variable" (*generalización intensional*). Como un todo, esta variable adquiere el carácter de un objeto para el sujeto, tanto como la propiedad de sustitución (*generalización extensional*).

De esta forma se desarrolla un nuevo objeto de pensamiento, un objeto matemático cuyo significante y significado intensional reside en los invariantes. Este objeto mental es una generalidad, pues posee un rango de referencia más amplio. En este objeto, ahora los símbolos tienen la cualidad primaria de *variables con el carácter de objetos*. Esta *reificación*, *objetivación* de las variables y de los símbolos completa el proceso de abstracción que comenzó fijando los invariantes. De esta forma los invariantes son separados de sus “portadores” originales, adquieren independencia y forman la generalidad abstraída. Aquí la abstracción es el medio para desarrollar una *generalización intensional*.

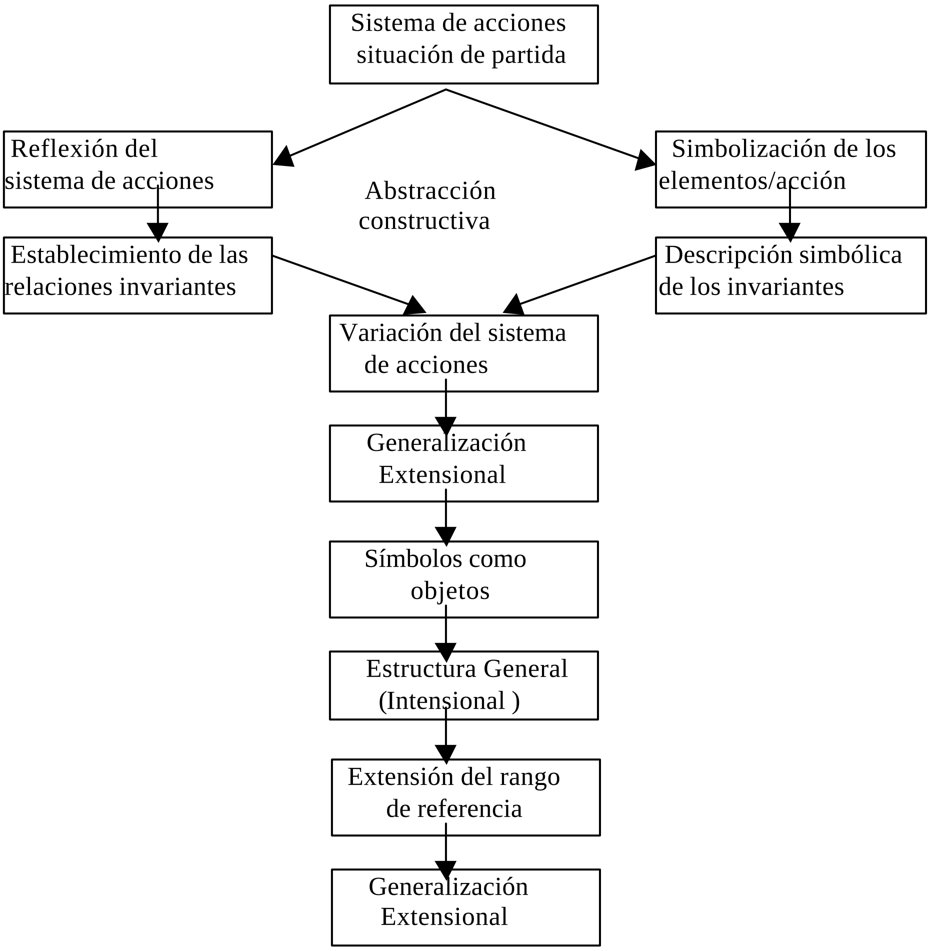


Figura 2.1. Esquema de Dörfler (1991)del proceso de generalización

Sin embargo, y dependiendo de casos particulares concretos, de en qué elementos particulares o aspectos de una acción (sistema de acciones) se centra el interés o la atención, se pueden establecer otros dos procesos generales. Estos dos procesos, que describimos brevemente a continuación, serán de utilidad posterior en la discusión de los resultados de los estudios experimentales primero y segundo, así como para la planificación del estudio tercero de nuestro trabajo de investigación.

Generalización de las condiciones para la plausibilidad de las acciones o de la acción.
En orden a llevar a cabo acciones han de existir elementos adecuados y estos deben cumplir ciertas condiciones. Tales condiciones deben ser tratadas como cualidades de los elementos de las acciones y como relaciones entre tales elementos. De igual forma se aplica un proceso de generalización a esas cualidades y relaciones y debe contener lo siguiente:

- relación de las condiciones para la acción.
- simbolización de las relaciones establecidas (vía símbolos de los elementos la mayoría de las veces).
- variación de los elementos de la acción (posibilidad de reemplazamiento respecto al cumplimiento de las condiciones para la acción).
- símbolos como variables (objetos) concretas cuyas cualidades determinantes cumplen las condiciones para la acción.
- condiciones para que la acción sea la generalidad, es decir, el objeto matemático abstracto.
- extensión del rango de referencia de las variables y por lo tanto de la generalidad mediante la construcción y hallazgo de campos de elementos donde se cumplen las condiciones para la acción.

Generalización de los resultados de las acciones
Una acción o sistema de acciones tiene siempre un resultado, que puede ser un objeto material con ciertas cualidades o una relación inmaterial. Los objetos, debido a sus cualidades, son productos de acciones, y en aquellos casos importantes para las matemáticas esas cualidades son realizaciones de sistemas de relaciones.

Por lo tanto, supongamos que el producto de una acción es visto como un sistema de relaciones, que existe entonces entre objetos materiales, entre cantidades asociadas a ellos o entre objetos matemáticos, dependiendo de qué es lo que se considere como elementos de las acciones. El mismo proceso de generalización puede partir de este sistema de relaciones que es abstraído a través del reflejo de la acción y sus resultados. De nuevo en este contexto, los prototipos para los elementos de la acción jugarán un papel especial, ya que dirigen la atención a un sistema particular de relaciones. El resultado es una generalidad que puede ser entendida como un modelo para el resultado o producto de la acción.

En cualquiera de los tres procesos descritos el resultado del proceso es un objeto variable, tanto en la cognición del sujeto como respecto de su cualidad como objeto matemático.

Debido al carácter operativo de la generalidad así construida, uno puede concebir tareas que permitan la adquisición de alguna evidencia sobre el grado de éxito que han tenido los estudiantes en la construcción de un concepto general. Tal evidencia se mostrará, en primer lugar mediante la producción propia de los alumnos, materializada en expresiones para los cálculos y explicaciones de los mismos, tanto por escrito como de forma verbal y que serán el medio por el cuál se podrá determinar hasta cierto grado elementos claves del proceso. Tales elementos, que interesan particularmente en este estudio, son las acciones y los esquemas de la acción, los invariantes establecidos y los resultados del proceso, es decir las generalizaciones construidas.

Resaltemos el carácter cíclico del proceso de generalización. Toda generalización construida puede ser objeto de una nueva acción por parte del sujeto y ser el punto de partida, mediante el proceso general descrito, de una nueva generalización. En este sentido, cobran importancia los dos últimos procesos del marco teórico, donde el centro de interés puede variar desde las condiciones de la acción hasta el resultado de las mismas. Durante tales procesos, los alumnos utilizan esquemas conceptuales, a partir de los cuales, construyen los nuevos esquemas y establecen relaciones entre los esquemas nuevos y ya poseídos, fijando además la consistencia de estos últimos. Debido a esta concepción constructiva del conocimiento matemático, hemos introducido en nuestra investigación elementos del marco teórico de Dubinsky (1991) que pasamos a exponer.

2.4. El marco acción-proceso-objeto

Los trabajos de Dubinsky (1991a y 1991b) son una síntesis, según sus propias palabras, de cómo el autor ha entendido la teoría de Piaget sobre la equilibración de las estructuras cognitivas. Tal síntesis parte de las acciones que el sujeto realiza sobre determinados objetos, se interiorizan en procesos y mediante la coordinación de tales procesos se construyen los objetos o entes abstractos.

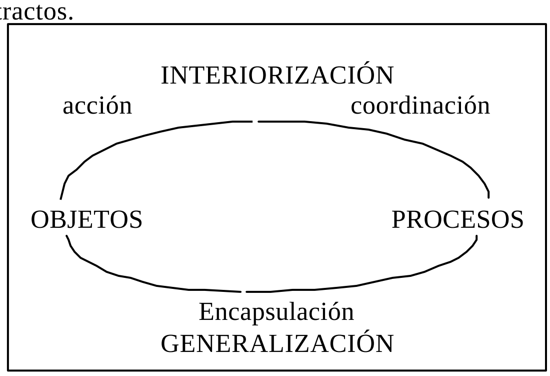


Figura 2.2. Esquema correspondiente al marco teórico de Dubinsky (1991a)

El esquema que se recoge en la Figura 2.2, resume el proceso de construcción de los objetos abstractos dentro del marco teórico de Dubinsky (Dubinsky 1990, p.170) manifestándo su carácter cíclico.

Para Dubinsky una *acción* es cualquier manipulación, repetible, mental o física que transforma objetos de cierta manera. Cuando la acción total puede tener lugar enteramente en la mente de un individuo o ser imaginada como haber ocurrido, sin que necesariamente el individuo recorra todos y cada uno de los pasos, diremos que la acción ha sido *interiorizada* y se ha convertido en un *proceso*. Nuevos procesos pueden ser creados mediante la *coordinación* o *inversión* de procesos existentes. Cuando es posible, para un proceso, que él mismo sea transformado por una acción, se dice que ha sido *encapsulado* en un *objeto*.

Aunque bastante descriptivo del proceso de generalización, el marco teórico de Dubinsky no detalla los procesos de interiorización ni de encapsulación. Por ejemplo, el papel que juegan las acciones o la simbolización en todo el proceso no queda especificado en detalle y en ese sentido, creemos que el modelo de Dörfler va más allá del de Dubinsky.

Sin embargo, de los trabajos de Dubinsky y Lewin, hemos considerado el *esquema de descomposición genética de una estructura conceptual* (Dubinsky y Lewin, 1986), como elemento estructurador y descriptivo de las construcciones y coordinaciones que el sujeto realiza durante el aprendizaje de un concepto. Tal esquema de descomposición genética lo relacionaremos en nuestro trabajo con la cualidad de la comprensión que muestra el sujeto en la resolución de las tareas propuestas y con la generalización que desarrolla. A tal fin dedicaremos el próximo apartado al esquema de descomposición genética y el siguiente al comportamiento cognitivo y la comprensión.

2.5. Descomposición genética de un esquema conceptual

La noción de *descomposición genética* de un esquema conceptual entendida como “la disposición particular de los esquemas conceptuales que son prerequisitos para la formación del concepto y de las posibles conexiones que se establecen entre ellos” (Dubinsky y Lewin, 1986) ha sido elemento central de varios trabajos recientes dentro del marco teórico acción-proceso-objeto. Así tal marco teórico ha sido aplicado y se han especificado los correspondientes esquemas de descomposición genética de los conceptos de compacidad (Dubinsky y Lewin, 1986), inducción matemática (Dubinsky y Lewin, 1986; Dubinsky 1986 y 1990). En fase de investigación se encuentran los esquemas de descomposición genética de los conceptos de función (Ayers *et al*, 1988; Dubinsky y Harel, 1992) y de divisibilidad entera (Zazkis y Campbell, 1996).

Sin embargo creemos que, tal noción, debería ser ampliada hasta incluir aquellos esquemas conceptuales que utilizan los alumnos, aunque no sean prerequisitos para la formación de los mismos y que, de alguna forma, el alumno utiliza o coordina en la fase de construcción de la nueva estructura conceptual. Pues de esta forma, el investigador y el enseñante, pueden tener una visión mucho más amplia de los esquemas utilizados por los alumnos, incluso los erróneos, y de tal forma establecer una categoría de comprensión de las tareas, que son a la vez manifestaciones externas de las diferentes formas de pensamiento del sujeto (Dedicamos a la comprensión y a sus manifestaciones el siguiente apartado).

Precisemos ahora, la noción de *esquema conceptual* que adoptamos en nuestro trabajo. Varios autores han definido la noción de estructura conceptual. Así, encontramos una noción simplificada de estructura conceptual como “rica red interconectada de conceptos y relaciones” (Bell, Costello, y Küchermann, 1983) siendo un concepto un objeto que requiere definición en la matemática formal, concepto categórico creado por medio de una definición (Trzcieniecka-Schneider, 1993), mientras que una relación se expresa mediante una sentencia o predicado. Dentro de la literatura didáctica más reciente, encontramos una noción de esquema conceptual, cuyo carácter es básicamente dinámico, como “colección más o menos coherente de objetos cognitivos y procesos mentales internos para manipular tales objetos” (Dubinsky, 1991b). Dentro de todo esquema existe por lo tanto, un número determinado de hechos, procedimientos y conceptos que pueden utilizarse en la resolución de problemas de tal forma que el sujeto utiliza el esquema conceptual para dar sentido y resolver una situación problemática que es percibida como tal. Según las particulares relaciones o conexiones entre los hechos, conceptos y procedimientos existentes en el esquema conceptual, el sujeto afrontará una tarea de formas diversas cuyas manifestaciones externas pueden observarse en las respuestas, tanto por escrito como verbales, que proporciona el sujeto. Es esta cualidad funcional de la noción de esquema, la de ser construido, reconstruido y extendido con el objetivo preciso de dar sentido y resolver una situación problemática mediante su asimilación y acomodación a los esquemas existentes, la que consideramos importante y central en toda descomposición genética.

En este último sentido, es mucho más precisa la noción dada por von Glasersfeld (1991) en la que todo esquema, por su propia génesis, está compuesto de tres elementos. El primer componente, es un ítem o configuración experimental inicial, ligado funcionalmente a lo que el observador categorizaría como estímulo. Es decir, aquella situación problemática o tarea que ha aceptado como tal el sujeto y cuyo desequilibrio cognitivo resultante de tal aceptación, ha re-equilibrado mediante la asimilación-acomodación a los esquemas existentes y que eventualmente ha producido una reconstrucción de los mismos en el nuevo esquema. En segundo lugar, la actividad que el sujeto asocia con tal estímulo. Tal actividad puede ser física, mental o de los dos tipos. En tal actividad encontramos las acciones físicas y los procesos mentales derivados de asimilar los esquemas, que posee el sujeto, al estímulo y que eventualmente son acomodados al mismo. En tercer lugar, la subsecuente experiencia asociada con la actividad y que es el resultado de la misma. Luego, el esquema conceptual contiene todos los elementos claves de su desarrollo genético, como es el tipo de problema que resuelve, la experiencia asociada a la actividad de su construcción, la propia actividad generadora del esquema, otros esquemas con los cuales se relaciona o se asocia coordinándolos durante su génesis. El esquema conceptual variará, por tanto, a lo largo de toda la vida del individuo, ampliándose y enriqueciéndose, mediante la experiencia personal y colectiva. De tal forma que un sujeto particular poseerá un esquema conceptual que también es particular y que es el resultado de sucesivas generalizaciones, objetivaciones, reificaciones o encapsulaciones de procesos en objetos y que conserva al mismo tiempo las acciones, procesos y objetos que ha formado y coordinado.

Así pues, la descomposición genética de un esquema conceptual particular, parte de los esquemas conceptuales previos, sobre las cuales se apoya y mediante la coordinación de todos o algunos de ellos, el alumno avanza en la construcción del conocimiento que constituirá el esquema conceptual particular. La descomposición genética debe, por lo tanto, establecer las conexiones entre los esquemas conceptuales previos y las formas de coordinación resultantes. Tales coordinaciones pueden llevar a determinadas encapsulaciones de procesos en objetos, que marcarán un nivel determinado de generalización por medio de la abstracción reflexiva. Señalamos aquí la distinción clara entre abstracción reflexiva como medio para la encapsulación y la correspondiente generalización que es el producto o resultado del proceso cognitivo. En cada momento es pues necesario determinar las diferentes acciones que el sujeto realiza, los diferentes procesos que interioriza y los objetos cognitivos resultados de la encapsulación de los procesos en objetos.

En toda descomposición genética juegan un papel importante las distintas generalizaciones que pueden realizar los alumnos y es por lo que pretendemos, en este trabajo, definir unos niveles de generalización en el desarrollo y formación de la estructura conceptual de pauta lineal, que puedan ser caracterizados por el comportamiento o respuesta de los alumnos a problemas del tipo tratado, y que al mismo tiempo caractericen etapas claves en la construcción de los esquemas conceptuales que estudiamos. Luego, la descomposición debe señalar, en lo posible, los comportamientos de los alumnos en cada nivel y que de alguna forma sirven para caracterizarlos.

Consideramos que la descomposición genética de un esquema conceptual es importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pues tal esquema debe arrojar luz sobre los medios y los procesos por los que los alumnos construyen el conocimiento, y por lo tanto tal esquema debería construirse a partir de las siguientes fuentes:

1. Un análisis del tipo de contenido matemático sobre el que se construye el esquema. Este análisis debe incluir los aspectos matemáticos formales, establecidos en el curriculum o derivados de la interpretación que de los mismos se haga en los materiales escolares, las situaciones

didácticas que se van ha utilizar, y la valoración particular que de los mismos haga el profesor. Esto último señala un hecho importante y a veces obviado, la articulación de todo un material didáctico para la instrucción responde o refleja la valoración personal que el profesor o investigador realiza sobre el contenido conceptual a desarrollar en los alumnos.

2. Las respuestas dadas por alumnos enfrentados a situaciones problemáticas relacionadas, y que conllevan aspectos claves del concepto. Consideramos aquí dos formas bien diferenciadas de obtener tal información. En primer lugar, se debe obtener información sobre los conocimientos previos, esquemas cognitivos existentes, que los alumnos utilizan. En segundo lugar está la construcción del conocimiento específico realizado mediante la instrucción en el aula. Un análisis de tales respuestas debe permitir al investigador trazar un esquema de los comportamientos individuales, de los esquemas cognitivos conceptuales que subyacen bajo las estrategias empleadas por los alumnos en la construcción de un conocimiento específico.
3. La aplicación de un marco teórico que explique e interprete los comportamientos de los alumnos y que modele los esquemas cognitivos que las sostienen. Tal marco teórico permite que los comportamientos derivados del trabajo experimental realizado sobre los alumnos y las valoraciones sobre los contenidos matemáticos no se queden en una simple descripción y sirvan para explicar las sucesivas construcciones del concepto.

La construcción del esquema conceptual tiene, por lo tanto, como objetivo importante el derivar orientaciones didácticas importantes para el desarrollo de tales contenidos en el aula.

El esquema de la descomposición genética de la estructura conceptual permitirá establecer las diferentes fases del proceso de generalización y será útil en la práctica, tanto de la investigación como de la enseñanza. Pues, respecto de la investigación señalará determinadas fases de construcción del concepto que no han sido suficientemente documentadas por las primeras investigaciones y posibilitará el que se formulen con precisión los objetivos necesarios de la investigación. Respecto de la práctica educativa, informará al profesor de aquellos aspectos claves de comprensión y desarrollo del concepto que requieren de la adecuada intervención didáctica.

2.6. Comportamiento cognitivo. Conocimiento. Comprensión y obstáculos

2.6.1. Comportamiento cognitivo

Para Piaget (1990, pp. 72-76) y Dubinsky y Lewin (1986, pp 63-65) existen tres tipos de comportamiento cognitivo, manifestados a través de la conducta de los sujetos, ante una situación problemática o tarea a realizar.

El comportamiento *alfa* se caracteriza por la ausencia de abstracción reflexiva. Ante la situación problemática el sujeto actúa asimilándola a un esquema cognitivo incorrecto que no se sostiene frente a la crítica o que cambia de momento en momento. Debido que no se reconoce o se ignora el conflicto existente entre la situación problemática y el esquema inadecuado en el que esta se ha asimilado, el sujeto produce respuestas incorrectas de forma repetida que son además consideradas correctas por parte del sujeto. En un entorno de enseñanza y aprendizaje tal comportamiento se manifiesta en la repetida habilidad mostrada por los estudiantes al realizar cálculos específicos en situaciones bien conocidas, es decir, mediante un comportamiento imitativo, pero al mismo tiempo, en la incapacidad de contemplar el cálculo específico como una idea más general, que pueda ser aplicada a situaciones tanto conocidas como a otras no familiares, es decir hay ausencia de comportamiento autónomo por parte de los mismos.

El comportamiento *beta* se caracteriza porque ante una situación problemática el sujeto actúa con éxito, asimilando la situación a través de una reconstrucción cognitiva de los esquemas que ya posee. La abstracción reflexiva ha tenido lugar, pues, en primer lugar, el sistema cognitivo como un todo ha sido enriquecido, al ser reorganizado para acomodar el nuevo esquema y, en segundo lugar, la situación problemática se comprende al quedar localizada dentro del dominio de conceptos reconstruido. Este dominio de conceptos suele ser una coordinación de diferentes esquemas conceptuales entre los cuales la nueva situación problemática ha posibilitado una conexión, cuyo resultado es un esquema cognitivo nuevo, que puede además convertirse en un esquema estable.

Por último, está el comportamiento *gamma*: El sistema cognitivo del sujeto es lo suficientemente rico para integrar la situación novedosa sin que se construyan nuevos esquemas cognitivos. Pero sí ha tenido lugar la abstracción reflexiva, pues el sistema cognitivo es inducido a la acomodación de la situación novedosa mediante su extensión, es decir, la situación novedosa es incorporada al aplicársele el sistema existente de esquemas conceptuales y al establecerse nuevas relaciones entre las mismas y tal situación.

Luego toda situación problemática novedosa, demanda del sujeto una cierta reconstrucción de sus esquemas cognitivos. Tal demanda y el esfuerzo cognitivo resultante produce una cierta generalización de los esquemas cognitivos existentes. La cualidad de tales generaliaciones dependerá del comportamiento cognitivo manifestado por el sujeto. Harel y Tall (1991) han distinguido tres cualidades en la generalización de los esquemas cognitivos, denominándolas *disjuntiva*, *reconstructiva* y *expansiva*. La generalización del esquema es *disjuntiva* cuando el sujeto construye un nuevo esquema no conectado con los existentes. La generalización es *reconstructiva*, cuando el sujeto reconstruye un esquema existente en orden a ampliar su aplicabilidad (comportamiento beta). La generalización es *expansiva* cuando el sujeto amplía el rango de aplicabilidad del esquema sin reconstruirlo (comportamiento gamma).

2.6.2. Conocimiento y comprensión

La relación entre la habilidad para realizar una tarea, resolver un problema, y comprender tanto la tarea como que la actividad es la apropiada, parece complicada a poco que uno reflexione sobre esto. La distinción que se hace en didáctica de las matemáticas, en particular entre *comprensión conceptual* y *destreza o habilidad procedimental* ha tenido diferentes planteamientos a lo largo del tiempo (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 2-3), siendo en los últimos años el centro de atención del debate las relaciones entre conceptos y procedimientos derivados del aprendizaje escolar, del pre-escolar y del derivado de entornos informales de aprendizaje.

Para Hiebert y Lefevre (*op. cit.* p. 3-4), el *conocimiento conceptual* se caracteriza como aquel que es rico en relaciones. Es decir, aquel que se sitúa adecuadamente en una estructura conceptual, donde las relaciones son tan importantes como las piezas discretas de conocimiento que forman la estructura. Por lo tanto, una unidad de conocimiento conceptual no puede ser una pieza aislada de información. Según las relaciones existentes entre conceptos, las estructuras serán más o menos ricas. Por otro lado, el *conocimiento procedimental* está constituido por dos partes bien diferenciadas. En una parte, tenemos el lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las matemáticas. En la otra, tenemos los algoritmos, reglas o procedimientos que permiten realizar una tarea matemática. Dentro de los procedimientos, los hay de dos tipos. Tenemos los procedimientos para tratar y manipular expresiones simbólicas y los procedimientos que actúan sobre objetos concretos, diagramas visuales, imágenes mentales, es decir, sobre todos aquellos objetos que no son símbolos estándares de nuestro sistema matemático. Así, tenemos dos clases diferentes de procedimientos como hay clases diferentes de conceptos.

Pero además de identificar las diferentes cualidades del conocimiento y las piezas que lo forman, interesan las manifestaciones de los sujetos. Skemp (1976) llama la atención sobre dos significados distintos de la palabra comprensión. Así, la *comprensión instrumental*, se manifiesta por el uso, que hace el sujeto, de una regla sin capacidad para justificarla. Por otro lado, la *comprensión relacional*, se manifiesta en que el sujeto, frente a una tarea, sabe qué hay que hacer y por qué. A partir del trabajo de Skemp, varios autores han abordado este problema, presentando diferentes niveles de manifestación de la comprensión. Así, tenemos los trabajos recientes de Pirie (1988) y Schroeder (1987), además de los trabajos de Byers y Herscovics (1977) y Herscovics y Bergeron (1983). Ultimamente, Vollrath (1994) ha presentado una síntesis, donde la comprensión conceptual se manifiesta por parte del sujeto cuándo este es capaz de dar ejemplos y contraejemplos, comprueba si una situación dada es un ejemplo del concepto, conoce y manifiesta propiedades del concepto, conoce relaciones del concepto con otros conceptos y es capaz de aplicar el conocimiento sobre el concepto.

En relación con los diferentes tipos de comportamiento cognitivo, alfa, beta y gamma, parece claro que un término para designar la manifestación de tal conducta o comportamiento cognitivo gamma es *comprensión conceptual*. Por otro lado, denominaremos *actividad procedimental* a la manifestación del comportamiento cognitivo alfa. Pero, inevitablemente, surge la pregunta: ¿dónde ubicamos la *comprensión procedimental*? Creemos que en la manifestación externa, mediante respuestas a tareas propuestas, los sujetos muestran ejemplos de comprensión procedimental de los dos tipos señalados por Hiebert y Lefevre. Tales manifestaciones pueden derivar de una comprensión conceptual o no. La comprensión de un procedimiento manifestada a través de su ejecución puede ser, como señala Skemp, puramente instrumental. El ejemplo con el que Skemp (1976, p. 20) ilustra su argumento sirve: Aplicar correctamente el procedimiento para el cálculo del área de un rectángulo, puede ser una actividad sensible, con significado propio, para el alumno. Los resultados que obtiene son correctos, y como tales son evaluados por el profesor. Aunque el alumno sea incapaz de aprehender el significado completo del procedimiento o regla para el cálculo. Nosotros hemos optado por no asociar el término comprensión procedimental en exclusiva a ninguno de los comportamientos cognitivos beta y gamma. En la discusión sobre el esquema de descomposición genética (capítulo 5) definiremos todos los términos anteriores en el contexto de las tareas que utilizamos en esta investigación.

2.6.3. Actos de comprensión y obstáculos epistemológicos

Sierpinska (1990) considera la comprensión como un acto, y no como un proceso o forma de conocer. Un acto involucrado en un proceso de interpretación. Tal proceso comienza con ciertos ensayos que se intentan validar y justificar. En el curso de la validación tales ensayos pueden ser mejorados, cambiados o rechazados, estando a su vez los nuevos ensayos sujetos a validación tras validación. La interpretación se convierte así en un proceso dialéctico entre ensayos más y más elaborados y validaciones de tales ensayos. Tal proceso espiral continua hasta que el sujeto considera que el estímulo o situación a comprender lo ha sido de forma apropiada. Comprender un concepto, como un acto, consiste en captar su significado. El significado puede tener dos modalidades, bien sea personal o institucional (Godino y Batanero, 1994), siendo el significado institucional el que se constituye a partir del sistema de prácticas consideradas significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución, por ejemplo la matemática escolar. Tal acto es probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la estructura del concepto. Cada uno de tales significados particulares podrían ser adquiridos mediante actos de comprensión, algunos de los cuales podrían estar ligados a la superación de ciertos obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1987, p. 15), que pueden ser inducidos tanto por los significados personales como por los institucionales.

Para Sierpinska es pues importante establecer qué relación existe entre la noción de comprender y la noción de obstáculo epistemológico. Así, más adelante señala que “sabemos cosas en una cierta forma. Pero en el momento en que descubrimos que algo hay erróneo con ese conocimiento (somos conscientes de un obstáculo epistemológico), comprendemos algo y empezamos a saber de forma distinta. Esta nueva forma de conocer puede convertirse en un obstáculo epistemológico en una situación diferente. Quizás no todos, pero algunos actos de comprensión son a su vez actos de superación de un obstáculo epistemológico. Y algunos actos de comprensión se convertirán en actos de adquisición de nuevos obstáculos epistemológicos”(Sierpinska, 1990, p. 28).

Una descripción de los actos de comprensión de un concepto matemático debería enumerar los obstáculos epistemológicos relacionados con tal concepto que nos suministra una completa información sobre sus significados. Luego, en muchos casos, superar un obstáculo epistemológico y comprender son dos formas de hablar sobre lo mismo. La primera es ‘negativa’ y la otra ‘positiva’. Todo depende del punto de vista del observador. Los obstáculos nos hacen mirar atrás, centrando nuestra atención en lo que era erróneo, insuficiente, en nuestras formas de conocer. Comprender es mirar hacia delante hacia nuevas formas de conocer. Esto sugiere un postulado para el análisis epistemológico de los conceptos matemáticos: deberían contener tanto las imágenes positivas como las negativas, los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión (Sierpinska, 1990, p. 28).

La manifestación externa, a través de las respuestas que los sujetos producen frente a los estímulos o tareas propuestas, aporta indicios de tales comportamientos cognitivos que al mismo tiempo sirven para determinar la comprensión de los alumnos sobre tales tareas. A veces, los comportamientos cognitivos beta y gamma son difícilmente diferenciables en la práctica. Dependen obviamente, entre otros factores, de las tareas a que se somete al sujeto. Este puede ser capaz de dar respuestas a través de manifestaciones externas que inducen a pensar en una comprensión conceptual, cuando lo que está manifestando es ciertos aspectos procedimentales del mismo que ha sido capaz de situar en un esquema estable pero aún incompleto. La mayor dificultal radica en cuándo tales manifestaciones de comprensión procedimental, esconden o muestran al mismo tiempo comprensión conceptual de las tareas. Ejemplos de esto último serán discutidos en el capítulo 5.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo presentamos la metodología utilizada en el desarrollo de nuestra investigación. Nuestra reflexión parte de la acción didáctica y asume una realidad dinámica cambiante y, por lo tanto, se trata de un diseño emergente, no totalmente cerrado. Para facilitar la continuidad de la lectura de la presente memoria, hemos detallado y precisado cada metodología particular en los estudios correspondientes (Capítulos 4, 5 y 6).

3.1. Características de la metodología de la investigación

El término *metodología* designa el modo en que enfocamos los problemas y buscamos las respuestas (Taylor y Bogdam, 1986, p. 15). Hemos optado por diferentes enfoques metodológicos, que se combinan a lo largo de los diferentes estudios que constituyen nuestro trabajo de investigación.

Nuestra investigación pretende captar el significado de los procesos, comportamiento y actos de los alumnos, partiendo de unos objetivos generales que se particularizan y concretan en transcurso de la investigación y según las distintas fases de la misma. Tal estilo de investigación podría ser considerado dentro del marco de la etnografía educativa (Arnal, Rincón y LaTorre, 1992, p.199), pues su objetivo es describir, explicar e interpretar ciertos fenómenos educativos que tienen lugar en el contexto escolar. También nos hemos interesado por los significados personales que los alumnos atribuyen a los objetos presentes en las tareas y cómo, al interaccionar con ellos, se modifican y cambian tales significados por medio de las interpretaciones personales. En este sentido también podríamos enmarcar nuestra investigación en el ámbito del Interaccionismo Simbólico (Cohen y Manion, 1990; Arnal, Rincón y LaTorre, 1992).

El diseño característico de la investigación cualitativa-interpretativa, que sintetizaremos a continuación y que coinciden en lo esencial en diversos autores (Bogdan y Biklen, 1992; Cook y Reichardt, 1986; Taylor y Bogdan 1986; Ruiz Olabuénaga, 1996), configuran nuestra toma de postura metodológica.

El marco natural, el instituto de secundaria, es la fuente directa de la obtención de los datos y el investigador es pieza clave en el proceso. Se asume que el comportamiento humano está influenciado de forma significativa por el marco donde tiene lugar y se debe acudir a tal localización en lo posible.

El enfoque es interpretativo y descriptivo. La exploración de las conductas y su interpretación mediante informes descriptivos forma parte esencial del enfoque. Interesa primariamente el proceso y no simplemente los resultados o productos de tal proceso. Las entrevistas semiestructuradas y la observación de hechos y conductas en el aula son importantes y claves en el diseño.

El análisis de los datos en básicamente inductivo. En este sentido el análisis de los datos particulares se toma como evidencia para la construcción de los resultados y como apoyo a hipótesis generales sobre la realidad del comportamiento.

El significado forma parte importante de la investigación. Interesa las variadas formas en que diferentes alumnos dan sentido a la misma tarea. Qué asunciones realizan, que conocimiento utilizan y cómo lo utilizan en las tareas propuestas.

La teoría previa, presentada en el marco teórico (Capítulo 2) sirve de fundamento y es, a la vez, instrumento para la fase de interpretación.

Desde la perspectiva etnográfica, el investigador es un instrumento esencial de la investigación. Es primariamente un observador, recolector de datos y narrador. Su trabajo requiere relacionarse e interactuar con el escenario educativo de forma natural. Esto último queda favorecido al ser, al mismo tiempo, profesor del centro de secundaria donde se realizaron los estudios segundo y tercero. El investigador adopta diversos papeles, observador, participante, investigador, y debe adaptarse y cambiar tales papeles cuando las circunstancias lo precisen (Arnal, Rincón y LaTorre, 1992).

El número de estudios a realizar, los instrumentos particulares de observación y recogida de datos, así como las poblaciones y muestras no fueron totalmente determinados desde el principio de nuestra investigación.

3.2. Estudios, instrumentos de observación y recogida de datos

Comenzamos a partir de un primer estudio que tuvo un marcado carácter exploratorio.

3.2.1. Primer Estudio

Se formularon cuatro objetivos que constituyen la primera aproximación y concreción del primer objetivo general de nuestra investigación.

Se utilizó una población amplia de alumnos de secundaria (373 alumnos). El momento en que se realizó, curso 1993-1994, se estaba en el comienzo de la transición entre la Ley de Educación de 1970 y la LOGSE, tal transición todavía no afectaba de forma importante a la educación secundaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. Se eligió, en varias fases que más adelante describimos, una población compuesta por alumnos de todos los cursos de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), Curso de Orientación Universitaria (COU) y más tarde se añadió a tal población, otra compuesta por alumnos de 8º de Educación General Básica (EGB) y por alumnos de la nueva ordenación del sistema educativo, en concreto alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Inicialmente se comenzó con los cursos 1ºBUP, 3ºBUP y COU (período marzo-abril de 1993), pertenecientes al Instituto de Bachillerato Viera y Clavijo de La Laguna (Tenerife). Después de una entrevista con los profesores de Matemáticas se eligieron dos cursos por cada nivel educativo, prefiriéndose la heterogeneidad en su composición. Tal heterogeneidad fue determinada de acuerdo con las calificaciones de los alumnos y la apreciación que los diferentes profesores tenían de los grupos en los que impartían docencia. Posteriormente, y durante el siguiente curso, se añadieron al primer estudio los cursos de 8ºEGB (Colegio Público Montaña Pacho, La Laguna), 2ºBUP (Instituto de Bachillerato de Gracia. La Laguna) y 4ºESO (Instituto de Enseñanza Secundaria de Ravelo, Tacoronte) por este orden. Esta segunda fase duró desde octubre a diciembre de 1993.

Consideramos que la diversidad de alumnos, por nivel educativo, era importante pues introducía una nueva dimensión a nuestro trabajo, ya que los estudios anteriores que habíamos examinado (ver capítulo 1) se habían centrado en alumnos de edades comprendidas entre 8 y 15 años. Al ampliar el rango de edad de los alumnos, incluíamos también alumnos que habían recibido instrucción previa en progresiones aritméticas que es un tema relacionado estrechamente con los problemas de generalización lineal. Esta inclusión, nos permitiría observar si los alumnos instruidos reconocían las tareas como equivalentes, si aplicaban sus conocimientos y cómo.

El instrumento para la recogida de datos ha sido una prueba escrita, la misma que utilizó Stacey (1989) en su investigación, con las modificaciones que se especifican en el capítulo correspondiente a este primer estudio. Para la codificación de los datos y su posterior análisis se utilizó inicialmente la clasificación de Stacey. Sin embargo, después de esta primera clasificación, basada en la estructura del cálculo empleada por los alumnos en cada una de las cuestiones planteadas, se elaboró una segunda clasificación atendiendo al esquema conceptual subyacente y a la estructura del cálculo. Por último, a las respuestas clasificadas bajo el esquema lineal, se les introdujo una nueva categoría de clasificación relativa al ámbito (visual-geométrico o numérico) presente en la explicación de los alumnos. El proceso de categorización ha sido, por lo tanto, inductivo. Se ha partido de una categorización, la de Stacey, y luego a partir del análisis y comparación de los datos disponibles y de los nuevos datos obtenidos se elaboraron nuevas categorías hasta que se consideró suficiente a la vista de la interpretación que de las mismas se hacía.

Estos datos fueron codificados y a tal fin, se utilizó el paquete estadístico Systat, para crear una base de datos relacional. Utilizando la modalidad de tablas de frecuencias absolutas y tablas cruzadas entre diferentes variables, se confeccionaron las correspondientes tablas (Anexo I), utilizadas en el análisis de los datos relativos a la frecuencia de respuesta y a las transiciones entre diferentes cuestiones de una misma tarea y entre las diferentes tareas.

Tales datos fueron sometidos a una análisis interpretativo, bajo el marco teórico adoptado, donde interesa más el aspecto cualitativo de los mismos que su frecuencia estadística, describiéndose determinados comportamientos y conjeturando ciertas hipótesis para la realización de un segundo estudio.

El primer estudio suministró principalmente dos tipos de datos: las explicaciones escritas y las estructuras de los cálculos realizados en cada tarea. Aunque un análisis minucioso de tales explicaciones y estructuras nos permitía avanzar en la determinación de elementos claves del proceso, surgieron algunas dudas y conjeturas sobre el mismo. Por ejemplo, sobre las acciones y los esquemas de la acción sólo teníamos conjeturas y parecía que mientras unos alumnos utilizaban solo el dibujo, otros utilizaban solo los datos numéricos. Es decir, el uso de los ámbitos de la tarea parecía dicotómico. Respecto del proceso de resolución de las tareas, ¿qué dudas surgieron al abordar las cuestiones dentro de una tarea? ¿Cómo las resolvieron? ¿Qué induce a un alumno a abandonar una estrategia de solución incorrecta y abordar una correcta? ¿Son conscientes los alumnos de las similitudes de las tareas? ¿Por qué cambiaban de una estrategia correcta a otra diferente, pero también correcta, al abordar una nueva tarea?

A finales de Junio de 1995 se disponía ya de la categorización de las respuestas de los alumnos que se muestra en el capítulo dedicado al estudio primero. Además, se habían formulado algunas conjeturas y señalado algunos centros de interés para desarrollar una nueva investigación. Tal investigación no fue posible desarrollar hasta el curso 1996-1997, por diversos motivos que no consideramos pertinente relatar en esta memoria.

3.2.2. Segundo Estudio

Durante los meses de Junio a Septiembre de 1996 nos planteamos realizar un segundo estudio. Los objetivos particulares, de este estudio, matizaban algunos de los aspectos señalados en los objetivos del primer estudio y para los que no habíamos obtenido suficiente evidencia que apoyara la primera de nuestra hipótesis y el primer objetivo general de nuestra investigación.

Se nos planteó el problema de qué población elegir para este estudio. En el tiempo transcurrido desde el primer estudio, la implantación de la nueva ordenación del sistema educativo se había ampliado lo suficientemente y el sistema antiguo estaba ya en franca desaparición. Además, como hemos señalado en el capítulo 1, las nuevas orientaciones curriculares para el área de Matemáticas contemplan contenidos y criterios de evaluación acordes con el objeto de nuestra investigación. Así que elegimos un instituto de enseñanza secundaria, en el que, además, el investigador es profesor.

Las explicaciones escritas de los alumnos, tercer criterio de clasificación en el primer estudio, mostraban la importancia del papel que pueden jugar los ámbitos numéricos y visual-geométrico en el estudio del proceso, y aportaban indicios de las acciones específicas que pudieran desarrollar los alumnos como génesis de la generalización. Pero tales hechos nos parecieron claramente insuficientes debido, sobre todo, a la parquedad de las explicaciones y a lo esquemático de estas. Así, que se planteaba abordar este segundo estudio introduciendo otros instrumentos para la recogida de datos.

La recogida de datos se planificó en dos fases.

En la primera fase, con el objetivo de disponer de suficiente información sobre cómo se enfrentarían estos alumnos a problemas de generalización lineal, se pasó una prueba escrita al total de 168 alumnos de 4ºESO del Instituto de Enseñanza Secundaria Domingo Pérez Minik (La Laguna). Hubo dos formatos de prueba. Para 132 alumnos, la prueba consistió en una versión del problema del árbol de Navidad (Capítulo 1). La razón de elegir tal problema es que los alumnos del estudio primero mostraron en la realización del mismo una mayor variedad de respuestas, así como un mayor número de respuestas correctas. Con el fin de estudiar las estrategias numéricas, basadas en la sucesión numérica para 36 alumnos la prueba consistió en una versión del problema del árbol de Navidad sin dibujo pero contextualizada.

Una vez pasada la prueba, se clasificaron los datos utilizando las categorías de respuesta obtenidas del primer estudio. A partir de las respuestas dadas por los alumnos se hizo una primera selección de 35 alumnos, de acuerdo con la variedad de respuestas y de interrogantes planteados sobre la forma de proceder en la resolución de la tarea. El investigador se entrevistó con los profesores que el curso anterior habían impartido clase a dichos alumnos, con el fin de obtener información sobre determinadas cualidades de los mismos. En concreto, sobre la capacidad de comunicación verbal y sobre sus habilidades en matemáticas. A partir de tal entrevista se seleccionaron once alumnos para realizar la segunda fase.

La segunda fase consistió en una entrevista semiestructurada administrada a once alumnos. Nueve habían realizado la prueba escrita con el formato del dibujo y tres la prueba escrita sin dibujo. Por lo tanto, a todos los alumnos no se les formuló exactamente las mismas preguntas, ni la duración de las mismas fue idéntica. Sí hubo un formato previo de cuestionario común para todos los alumnos, que consistió en plantearles cuestiones relativas a sus particulares respuestas a la prueba escrita y una segunda tarea a resolver en presencia del investigador, consistente en un problema de generalización lineal con el formato adoptado en esta investigación, es decir con dibujo y texto. Las entrevistas fueron grabadas en vídeo. La grabación fue realizada con cámara estática, enfocando hacia un folio dónde el alumno realizaba sus cálculos e incluyendo en el plano la hoja donde se planteaban las cuestiones a realizar. Posteriormente se transcribieron las entrevistas y se sometieron a un análisis interpretativo utilizando elementos del marco teórico.

Los resultados de este estudio aportaron elementos del proceso de generalización nuevos, a los ya aportados por el primer estudio, y en conjunto, los datos de ambos estudios permiten las conclusiones sobre tal proceso que se exponen y discuten en el capítulo 7.

Del proceso de análisis e interpretación de las conductas de los alumnos hemos derivado un instrumento visual que permite contemplar las diferentes transiciones de un alumno, o de un grupo, entre cuestiones de una tarea y entre tareas diferentes. Tal instrumento que denominamos *grafo para visualizar transiciones* (GVT), ha sido de mucha utilidad para la planificación y el análisis de las actuaciones de los alumnos en los estudios segundo y tercero.

Por último, otro elemento importante ha sido la determinación del *esquema de descomposición genética* de la pauta lineal. Tal esquema se utiliza como instrumento interpretativo global de la actuación de los alumnos, relacionando la generalización alcanzada con la comprensión de las tareas propuestas.

3.2.3. Tercer Estudio

A lo largo del proceso de ejecución y análisis de los dos primeros estudios, no se había realizado instrucción directa sobre los alumnos por parte del profesor-investigador. Por otro lado, nos quedaba la segunda hipótesis general formulada en nuestra investigación, sobre la cuál seguíamos disponiendo sólo de conjeturas. Luego nos planteamos la realización de un estudio complementario, tercer estudio, en el que el objetivo principal era desarrollar una profunda comprensión de la pauta lineal a través de la interacción en el aula.

La población elegida para este estudio fue un grupo de 18 alumnos de 4º ESO del mismo instituto en el que se desarrolló el segundo estudio. La elección fue intencionada en dos sentido precisos. En primer lugar el investigador es profesor de ese grupo lo cuál facilita el estudio a desarrollar, al situarlo en el desarrollo normal de la actividad docente del grupo. En segundo lugar, se eligió un grupo de alumnos de bajo rendimiento en matemáticas y cuya opción en 4º ESO es la de Matemáticas A, poco formales y contextualizadas.

Se disponía de información inicial sobre la actuación de los alumnos derivada de la primera fase del estudio segundo. Se elaboró el GVT del grupo para la tarea árbol de Navidad y, de acuerdo, con la información obtenida se planificó la actuación en el aula, respecto de la ordenación, en secuencia, de estrategias personales empleadas por los alumnos para la discusión en gran grupo.

Se elaboraron tres grupos de categorías como guía y evaluación de la actuación de los alumnos. La primera relativa al contenido matemático, la segunda relativa a las normas sociales y la tercera a las normas sociomatemáticas de interacción en el aula. En conjunto definen tanto los contenidos matemáticos a desarrollar como la metodología bajo la cuál se desarrollaron las cuatro sesiones de aula.

Se seleccionaron tres tareas, problemas de generalización lineal con dibujo, para las sesiones de aula y se confeccionaron otras tres para la realización de dos pruebas escritas.

La primera prueba escrita tuvo lugar al finalizar las sesiones y la segunda siete meses después. En la primera prueba escrita, sobre un problema de generalización lineal y cuatro posibles soluciones dadas, se les pidió a los alumnos que argumentaran sobre la validez de las mismas en consonancia con las normas sociomatemáticas implementadas durante las sesiones de aula.

La prueba escrita segunda, dos tareas en secuencia, se realizó siete meses después de finalizadas las sesiones de aula y su objetivo era evaluar, mediante el esquema de descomposición genética, la persistencia del conocimiento adquirido por los alumnos durante las sesiones de aula.

Para la recogida de datos durante las sesiones de aula se utilizó un cuaderno, donde se anotaban los hechos más importantes observados por el profesor-investigador, que se ampliaban inmediatamente al finalizar la sesión, en un relatorio. Tal relatorio se apoyaba en la memoria y las anotaciones esquemáticas realizadas por el profesor-investigador así como, cuando había duda, en los cuadernos de los alumnos.

Capítulo 4

Primer estudio: Prueba escrita

Aún reconociendo las limitaciones que impone una prueba escrita, decidimos administrar la misma prueba que elaboró Stacey a una amplia población de alumnos de enseñanza secundaria. Nos interesa obtener evidencias empíricas sobre las hipótesis formuladas en la introducción y, a tal fin, nuestro análisis de los resultados será básicamente cualitativo. Es decir, nos interesará la cualidad de la respuesta, en primer lugar, y la frecuencia de la misma, en segundo y menos importante lugar.

Así, pues formulamos los siguientes objetivos de investigación para este primer estudio:

1. *Profundizar en la clasificación de las respuestas dadas por los alumnos, a través de la prueba escrita.*
2. *Determinar el papel que juega el dibujo en el proceso de generalización.*
3. *Determinar la consistencia de los alumnos en el empleo de los métodos desarrollados.*
4. *Determinar si hay diferencias en el comportamiento de los alumnos según edad y nivel de instrucción adquirido.*

La consistencia se estudiará, por un lado, observando si los alumnos cambian de método al pasar de las cuestiones de generalización próxima a las de generalización lejana dentro de un mismo problema. Por otro lado, observaremos la consistencia de uso de los métodos desarrollados en un problema al pasar a otro problema. Esta última consistencia es, a nuestro entender, una muestra clara de la comprensión que muestran los alumnos de las tareas propuestas.

Debido a que en nuestra muestra hay alumnos que han recibido instrucción previa en progresiones aritméticas, nos interesa comprobar como abordan esos alumnos las tareas propuestas (problemas de generalización lineal) y si hay diferencias en las respuestas según avanzan en el nivel educativo.

4.1. Metodología

En este primer estudio se utilizó una población de 373 alumnos de enseñanza secundaria. La tabla 4-1 especifica el número de alumnos por edad aproximada y nivel educativo.

Tabla 4-1. Población

Edad	Nivel	Alumnos
13-14	8ºEGB	62
14-15	1ºBUP	59
15-16	4ºESO	80
15-16	2ºBUP	52
16-17	3ºBUP	62
17-18	C.O.U.	58
	Total	373

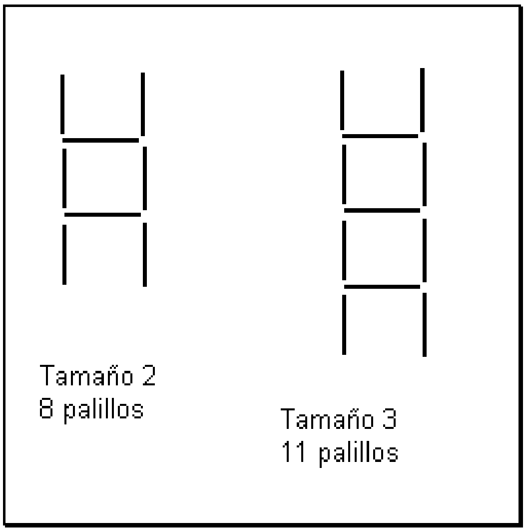
Utilizamos las mismas tareas de Stacey (1989) con las modificaciones siguientes: se confeccionaron cuatro tipos diferentes de pruebas atendiendo a las particularidades respectivas de los dibujos, tal y como se muestra en la tabla 4-2.

Tabla 4-2. Pruebas según formato del dibujo

	Palillos separados	*Palillos juntos*
Luces no alineadas	P1	P3
Luces alineadas	P2	P4

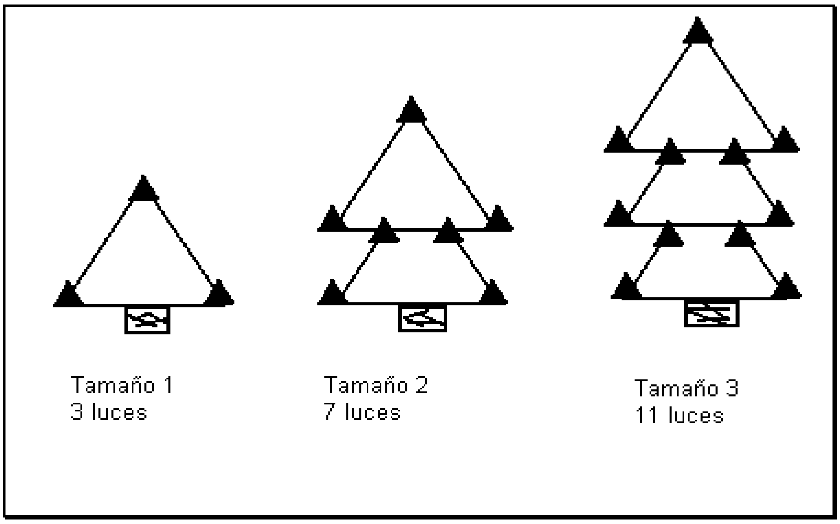
Prueba escrita

Tarea de la escalera:



E1. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera de la misma clase que tenga 4 peldaños?
E2. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera de la misma clase que tenga 5 peldaños?
E3. Sé que son necesarios 335 palillos para construir una escalera de 111 peldaños. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 112 peldaños?
E4. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 20 peldaños?
E5. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera que tenga 1000 peldaños?
Explica las respuestas a cada una de las cuestiones planteadas.

Tarea del *árbol de Navidad*:

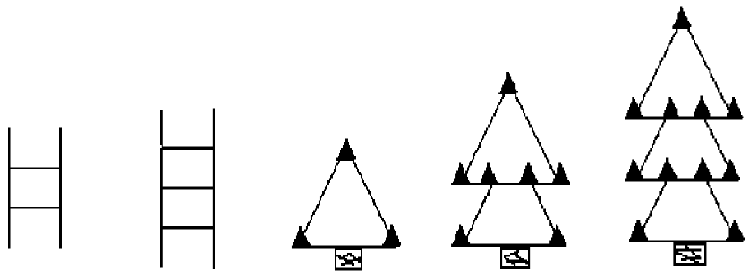


A1 ¿Cuántas luces habrá en un árbol de Navidad de tamaño 20? Explica tu respuesta.
A2 ¿Cuántas luces habrá en un árbol de Navidad de tamaño 100? Explica tu respuesta.

Tarea de la *lista numérica:*
S1. Continua la lista rellenando los cuatro espacios en blanco:
4, 10, 16, 22, , , , ,
S2. Si escribieras 100 números de esa lista, ¿qué número escribirías en último lugar?
(Figura 4-1)

La tarea de la escalera contiene cuestiones introductorias, no así la del árbol de Navidad. Este es el formato empleado por Stacey y consideramos que no era necesario modificarlo introduciendo cuestiones introductorias en la tarea del árbol de Navidad. Por otro lado, hemos supuesto que al ser similares los formatos de las dos primeras tareas, los alumnos no necesitarían de cuestiones introductorias en la segunda. Estas dos primeras tareas formulan cuestiones denominadas de generalización próxima y lejana. No ocurre así en la de la lista numérica, en la que se aborda, después de la introducción, una cuestión de generalización lejana.

En la Figura 4-2 se muestran las modificaciones introducidas en los dibujos.



(Figura 4-2)

La recogida de datos se realizó en los meses de marzo y diciembre de 1993. Los alumnos que respondieron a los problemas fueron elegidos en tres centros de secundaria (uno rural y dos urbanos) y uno de primaria (suburbano). En la elección de los alumnos se tuvo en cuenta que su nivel de conocimientos en matemáticas fuese heterogéneo. Se entrevistó a los profesores respectivos y teniendo en cuenta las calificaciones de cursos anteriores y del mismo curso, así como el juicio del profesor sobre la capacidad matemática de sus alumnos, se preparó un reparto equitativo de los diferentes tipos de pruebas entre los alumnos, garantizando de este modo que cada tipo de prueba fuera realizado por alumnos de diferentes capacidades. La prueba fue administrada por el profesor de cada grupo en presencia del investigador. Los alumnos no fueron avisados del día y hora en que se les administraría la prueba. Al comienzo de la misma, se les explicó el sentido de investigación que tenía la prueba y se les pidió encarecidamente su colaboración. No hubo explicaciones previas, pero se les insistió durante el desarrollo de la misma que explicaran cómo habían realizado los cálculos. Las tareas fueron realizadas en secuencia. En primer lugar se les entregó la tarea de la “escalera” y una vez finalizada se les entregó la del “árbol de Navidad”. La prueba concluyó con la tarea de la lista numérica. La duración de la prueba fue variable según los niveles, para los alumnos de 8º EGB la duración máxima fue de casi una hora, por el contrario en los niveles de BUP y COU la duración máxima no superó los cuarenta minutos.

Con respecto al cuarto objetivo planteado, debemos señalar que los alumnos de EGB, 4º ESO y 1º BUP no habían sido instruidos previamente en progresiones aritméticas; los alumnos de 2º BUP habían recibido tal instrucción aproximadamente dos meses antes de la fecha en que se les pasó la prueba; finalmente los alumnos de 3º BUP y COU habían recibido tal instrucción uno y dos años antes del curso en el que se les pasó la prueba, respectivamente. Los profesores respectivos nos manifestaron que los problemas de generalización lineal no eran objeto de estudio y como tales no figuraban en sus programaciones, así que para el conjunto de la muestra tales problemas, en principio, serían novedosos.

Una vez analizadas las respuestas de los alumnos y establecidas las diferentes categorías, se les asigno una notación particular y se utilizó el paquete estadístico SYSTAT para la elaboración de los datos que más adelante presentamos.

En primer lugar analizaremos las diferentes respuestas según la estructura del cálculo y las explicaciones que de los mismos hacen los alumnos. En su artículo, Stacey (1989) utiliza indistintamente los términos modelos, métodos o estrategias para referirse a la estructura del cálculo aritmético efectuado por los alumnos. De forma muy vaga hace referencia a las explicaciones que acompañan a tales cálculos. Nosotros utilizaremos una diferente nomenclatura. Hablaremos de categoría de respuesta para referirnos a la estructura del cálculo. Cada categoría de respuesta queda sometida a un esquema conceptual subyacente, luego las diferentes categorías de respuesta se agruparan por esquema conceptual. Por último tenemos las explicaciones de los alumnos, que en algunos casos hacen referencia a elementos del dibujo o de la sucesión numérica. Este hecho introduce una nueva subclasificación entre las categorías de respuesta.

En segundo lugar analizaremos la actuación de los alumnos en cada problema de generalización lineal por separado y en el conjunto formado por las dos primeras tareas, las que corresponden a problemas de generalización lineal. Tal actuación la relacionaremos con la comprensión y con la generalización. Por último, analizaremos algunos aspectos de la última tarea "lista numérica".

4.2. Estructura de los cálculos y explicaciones de los alumnos

4.2.1. La estructura del cálculo en las diferentes cuestiones. Categorías de respuesta.

La estructura aritmética de los cálculos realizados por los alumnos admite una primera clasificación en *recuentos directos* y *recuentos indirectos*. Los recuentos directos son a su vez de dos tipos: recuentos sobre un dibujo del objeto, realizado para tal propósito, y recuentos por extensión de la sucesión, suma iterada de la diferencia constante. Los recuentos indirectos son también de dos tipos: respuesta del tipo de proporcionalidad directa y respuesta de tipo lineal.

Es decir, aparecen tres *esquemas conceptuales* subyacentes a las estructuras del cálculo que denominaremos, esquema de *recuento* (R), esquema de *proporcionalidad directa* (W) y esquema *lineal* (L). Por otro lado, dentro de cada esquema hay ciertas cualidades de las estructuras de cálculo que nos permiten definir ciertas *categorías de respuestas*, que exponemos a continuación.

Recuentos directos (R):
Rd: Recuento sobre un dibujo.
Rs: Extensión de la sucesión hasta el término requerido por suma iterada de la diferencia constante.

Proporcionalidad directa (W):
W1: Se caracteriza por el uso explícito de la diferencia constante a, y se asume erróneamente, que el proceso de iteración (sumar repetidamente la diferencia constante) implica que $f(n) = an$. .

<u>Problema de la escalera</u> <u>Alumno 276 (4º ESO)</u>

<u>E4</u>: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?
<u>Respuesta</u>: *Necesitaría 60 palillos, pues si cada peldaño son 3, 3 ·20 son 60 palillos.*

W2: Se asume de forma implícita que $f(mn) = mf(n)$. No se hace uso explícito de la diferencia constante.

<u>Problema de la escalera</u> <u>Alumno 296 (4ºESO)</u>

<u>E4</u> :¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
<u>Respuesta</u>: *68 palillos, cogí la suma de 5 peldaños que son 17 palillos y 17 lo multiplique por 4 y me da el resultado de los 20 peldaños; lo multiplique por 4 porque 4 veces 17 da el resultado de 5 peldaños que sería 20 peldaños.*

W3: Se utiliza el esquema típico de la *regla de tres*. Tampoco se explícita el reconocimiento del papel que juega la diferencia constante.

<u>Problema de la escalera</u> <u>Alumno (49 1ºBUP)</u>

<u>E4</u>: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.

Respuesta: *Si para 4 ¾ 14*
20 ¾ x; 4x= 14 · 20, 4x=280, x=280/4, x=70
Se utilizan 70 palillos.

Señalemos que existe una singularidad en la primera categoría de respuesta (W1) que la hace esencialmente diferente de las otras dos categorías (W2 y W3). En la primera se utiliza la diferencia constante, mientras que en las otras dos no. La diferencia entre la segunda categoría (W2) y la tercera (W3) es que en la primera se constata, en la explicación dada, la evidencia del empleo del razonamiento de tipo proporcional, aunque incorrecto en esta cuestión, mientras que al emplear la regla de tres el alumno puede estar utilizando un algoritmo aprendido de memoria. En el primer caso (W2) el alumno ha podido conjeturar que una escalera mayor, digamos de tamaño 100, tendrá un número de palillos cinco veces mayor al número de palillos de una escalera de tamaño 20; es decir, si $f(20) = 60$, entonces $f(100) = 5\times 62 = 310$. Por otra parte, es conocida la predisposición que tienen algunos alumnos a utilizar la regla de tres en aquellas cuestiones en que se les da tres datos y se les pide el cálculo de un cuarto, ya que no se detienen a analizar la situación dada y aplican la regla de tres, sea directamente proporcional o no la relación entre las variables.

Lineal (L):

L1: La respuesta dada por los alumnos corresponde a la estructura simbólica *f(n) = an + b*, con *b* ¹ *0* y *a* igual a la diferencia constante. Se trata de una respuesta de tipo funcional.

Problema de la escalera Alumno 51 (1ºBUP)
E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *3 ´20=60+2. 62 palillos.*

Problema del árbol de Navidad Alumno 38 (1ºBUP)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *(20·4)-1=80-1=79. 79 luces.*

L2: Se caracteriza por el uso explícito de expresiones para el cálculo que se corresponden con la estructura simbólica *f(n) = d(n-m) + f(m), m < n, m ³ 1*. Se trata de una respuesta de tipo funcional-recursivo.

Problema de la escalera Alumno 59 (1ºBUP)
E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *62 palillos. 2 corresponden 8. 18´3=54; 54+8=62.*

A continuación damos un ejemplo de una modalidad dentro de la categoría anterior y que denominamos L2a. Corresponde al uso explícito que hacen los alumnos, de la expresión habitual para el cálculo del término general de las progresiones aritméticas. $f(n) = d(n-1) + f(1)$.

Problema de la escalera Alumno 350 (2ºBUP)
E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: $a_{20} = a_1 + \mathrm{d}(n-1)$. $a_{20} = 5 + 3$ ´ 19. $a_{20} = 5+57$. $a_{20} = 62$.

L3: Se caracteriza porque en las expresiones para el cálculo no aparece explícitamente la diferencia constante.

Problema de la escalera Alumno 48 (1ºBUP)
E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *21+21=42+20=62*.

Problema del árbol de Navidad Alumno195(COU)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?

Respuesta :

1 ¾ 3 ; 1 ´ 3 = 3 + 0 = 3
2 ¾ 7 ; 2 ´ 3 = 6 + 1 = 7
3 ¾ 11; 3 ´ 3 = 9 + 2 = 11
4 ¾ 15; 4 ´ 3 = 12 + 3 = 15 Þ 20 ¾ 79;
20 ´3=60+19=79

tamaño luces

Multiplicas el tamaño ´ 3 y le sumas el tamaño anterior 19.

Esta clasificación amplía la dada por Stacey (1989), pues en aquella clasificación no se distinguía entre las diferentes respuestas de tipo lineal. Aquí, además, se precisan tres esquemas conceptuales que se subdividen en categorías diferenciadas de respuestas. La tabla 4-3 muestra el porcentaje de respuestas en cada categoría, esquema y las no clasificadas (n.c.) dadas en las cuestiones de generalización próxima y lejana en las tareas de la escalera y del árbol de navidad. (En el Anexo I se incluyen las tablas para cada cuestión y tarea por nivel educativo)

Tabla 4-3:
Esquema conceptual y categoría de respuesta por nivel (%).

Nivel	**n.c.**	Rs	Rd	**R**	w1	w2	w3	**W**	L1	L2	L2a	L3	**L**
8ºEGB	**25**	0	7	**7**	33	6	7	**46**	9	10	0	3	**22**
1ºBUP	**13**	3	1	**4**	13	6	16	**35**	19	22	0	6	**47**
4ºESO	**22**	2	4	**6**	13	9	1	**23**	28	13	0	8	**49**
2ºBUP	**10**	0	0	**0**	9	3	26	**38**	4	8	39	1	**52**
3ºBUP	**12**	2	2	**4**	2	4	25	**31**	18	25	4	6	**53**
COU	**7**	0	1	**1**	2	1	21	**25**	22	33	1	11	**67**
Total	**15**	1	3	**4**	12	5	15	**32**	18	18	6	6	**48**

Hacemos ahora algunas observaciones respecto al porcentaje de respuestas de los alumnos según los esquemas conceptuales y las categorías de las mismas.

El porcentaje de alumnos que no contesta o contesta inclasificablemente (n.c.), es menor en los niveles superiores de la educación secundaria. Ocurre lo mismo con las respuestas correspondientes al esquema conceptual de proporcionalidad directa (W). Sin embargo, llama la atención el hecho de que en los niveles superiores, se obtenga el mayor porcentaje de empleo de la regla de tres (W3), siendo máximo en 2ºBUP. Por otro lado, la categoría W1 obtiene los mayores porcentajes en los niveles educativos inferiores. Las respuestas de tipo lineal aumentan según edad y nivel educativo. En 2º BUP casi todas las respuestas lineales son de la categoría L2a (fórmulas para las progresiones aritméticas), lo que indica que tales alumnos, que habían sido instruidos en tal tema dos meses antes de pasar la prueba, asimilan las situaciones al esquema conceptual de las progresiones aritméticas.

4.2.2. El ámbito en el que se desarrolla el proceso. Carácter estático o dinámico de las explicaciones.

Un análisis de las explicaciones dadas por los alumnos nos ha permitido detectar explicaciones en las que los alumnos hacen explícita referencia a elementos del dibujo y explicaciones basadas en los datos numéricos (sucesión). Este hecho nos lleva a conjeturar que tales ámbitos juegan un papel esencial en el proceso de generalización.

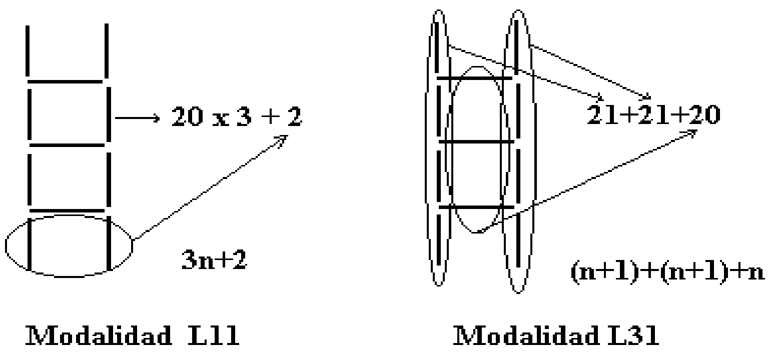
En Presmeg (1986, p. 298) se define *estrategia visual* como el método de solución en el que son esenciales ciertas imágenes mentales, con o sin apoyo de un diagrama. Usamos ese término en sentido algo más restringido y denominamos *estrategia visual* al procedimiento de obtención de una regla general de cálculo para *f(n)* en el que el dibujo juega un papel esencial. Análogamente, usaremos el término *estrategia numérica* cuando es la sucesión numérica la que juega un papel esencial en el proceso de generalización.

Analizamos a continuación las explicaciones dadas bajo el esquema lineal que se inscriben en la estrategia visual. Para la clasificación de las respuestas bajo esta variante hemos seguido el siguiente criterio: En las categorías L1 y L2, consideramos que una respuesta es el resultado de una estrategia visual siempre que en la explicación exista una referencia clara a elementos del dibujo que no se encuentren en los enunciados de la tareas. Según este criterio, las explicaciones que incluyen sólo las palabras “tamaño”, “árbol” o “escalera”, que son palabras que aparecen en los enunciados, no las consideramos incluidas en la estrategia visual. Por otro lado, cuando en la explicación se utilizan palabras como “partes laterales”, “líneas laterales”, “partes de abajo”, “partes de arriba”, “cúspide”, “triángulo”, “nivel”, “capa”, “punta de arriba”, “pisos uno debajo del otro”, “medios triángulos” y similares, que no aparecen explícitamente en los enunciados y que indican claramente una referencia a elementos de la escalera o del árbol, hemos considerado que tal respuesta sí se corresponde con una estrategia visual.

En la categoría L3 fijamos un criterio no tan restrictivo como en L1 y L2, ya que hemos considerado que en una respuesta juega un papel esencial el dibujo cuando la explicación más plausible, para el cálculo efectuado, conlleva referencias a los elementos del mismo y no hay otra posible explicación alternativa que haya sido constatada en respuestas puramente numéricas dadas por otros alumnos. Un ejemplo lo constituye la modalidad L31, que se expone a continuación, y cuya expresión para el cálculo es fácilmente deducible a partir del dibujo y no a partir de la sucesión numérica.

De la aplicación de tal criterio, las respuestas bajo las diferentes categorías tipificadas como lineales influenciadas por el dibujo, se tipifican con un segundo dígito. De esta forma tenemos las siguientes *modalidades* para las categorías de respuestas influidas por el dibujo, dentro de las lineales: L11, L12; L21, L22, L23; L31, L32 y L33.

Tarea de la “Escalera”



(Figura 4-3)

En esta tarea, 68 alumnos (18% del total de 373) hacen referencia expresa al dibujo que acompaña a la tarea al calcular el total de palillos necesarios en alguna de las cuestiones E4 y E5 planteadas. En sus explicaciones, dadas por escrito, utilizan por lo general, el dibujo de mayor tamaño (n = 3), donde introducen signos pictóricos para agrupar elementos y mediante sentencias verbales expresan la relación entre los elementos del mismo. Una vez analizadas las respuestas, y no habiendo encontrado diferencias significativas respecto de las dos variantes del dibujo (palillos separados o juntos), las hemos clasificado bajo las dos siguientes modalidades:

Modalidad L11: consiste en separar dos palillos en la base, o en lo alto, y considerar el resto de la escalera formada por una sucesión de elementos compuestos a su vez por tres palillos, uno horizontal y dos verticales. Si la escalera tiene tamaño 20 (peldaños) el número de palillos será por consiguiente igual a $3{\times}20 + 2$. En esta clase de respuestas se asume implícitamente que si la escalera tiene tamaño *n* (peldaños), entonces estará formada por *3n* + 2 palillos. Por tanto, la estructura aritmético-algebraica de esta modalidad corresponde a la forma canónica de la pauta lineal, es decir $f(n) = an + b$, que resulta claramente funcional. Sin embargo, al obtener el alumno tal expresión a partir del dibujo, hemos de pensar que tiene un marcado carácter recursivo: el término inicial está constituido por los dos palillos de la base, o de la parte superior de la escalera, y cada término se construye añadiendo tres palillos, uno de los cuales corresponde con un peldaño. Sin embargo, observemos que tal proceso recursivo no tiene un equivalente en la sucesión, donde claramente el primer término corresponde con la escalera formada por cinco peldaños. Luego, el dibujo, puede inducir en los alumnos un tipo de respuesta que en esencia es de cualidad recursiva aunque podría confundirse con una de tipo funcional. Por lo tanto, es esta modalidad, el dibujo puede introducir una cualidad a la respuesta ligeramente diferente de otra respuesta del mismo tipo derivada a partir del ámbito numérico.

Ejemplo de la modalidad L11

Problema de la escalera — Alumno 34 (1ºBUP)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.

Respuesta: *20´3=60+2=62 palillos. He multiplicado el número de peldaños por 3, pues es el número de palillos que lleva cada peldaño, y le he sumado 2, porque son los palillos que se ponen al principio de la escalera.*

Modalidad L31: consiste en separar la escalera en tres bloques diferenciados, de los que dos corresponden a las columnas laterales de palillos verticales y la otra a los palillos horizontales o peldaños. Si la escalera tiene tamaño 20 (peldaños) tendremos 20 + 1 por cada lateral, más los 20 centrales, es decir (20 + 1) + (20 + 1) + 20 = 62 palillos. En esta clase de respuestas se asume implícitamente que si la escalera tiene tamaño *n* (peldaños), entonces estará formada por (*n* + 1) + (*n* + 1) + *n* palillos. La respuesta es claramente funcional, pero no se utiliza la diferencia constante como elemento constitutivo de la misma. Realmente la respuesta se construye a partir de dos relaciones funcionales: los palillos-peldaños (*n*) y los palillos-laterales (*n* + 1) contados dos veces.

Ejemplo de la modalidad L31

Problema de la escalera — Alumno 213 (COU)

E5: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 1000 peldaños?.

Respuesta:

1000 peldaños. *1001* *1000*
lineas laterales = *1001*
1001 *1001*
3002

El total de alumnos que usan la estrategia visual en alguna de las cuestiones E4 ó E5, por nivel educativo y modalidad, se muestran en la tabla 4-4, donde el porcentaje hace referencia al total de alumnos de cada nivel educativo que constituyen la población estudiada:

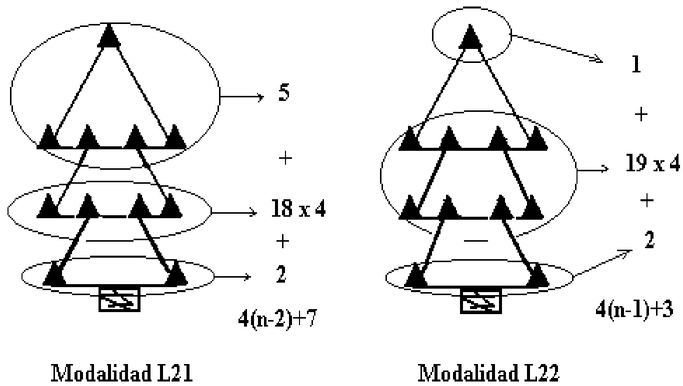
Tabla 4-4:

Categorías lineal-visual en "la escalera"

	Modalidades		Totales	
Niveles	L11	L31	Alumnos	%
8ºEGB	1	2	3	5
4º ESO	20	6	26	33
1º BUP	9	7	16	27
2º BUP	2	1	3	6
3º BUP	2	4	6	10
COU	10	4	14	24
Totales	44	24	68	18

Debemos señalar que no hay alumnos que usen dos modalidades distintas en las cuestiones de esta tarea de la escalera.

Tarea del "Árbol de Navidad"



(Figura 4-4)

En esta tarea 119 alumnos (32%) hacen referencia expresa al diagrama que acompaña a la situación al calcular el total de luces necesarias en alguna de las dos cuestiones planteadas. Una vez analizadas las respuestas de los alumnos hemos clasificado y agrupado las mismas, bajo las modalidades que ahora se indican. Las dos primeras, L21 y L22, fueron usadas en las tareas con luces alineadas, salvo 2 alumnos que usaron la L22 con las luces no alineadas, mientras que las restantes fueron utilizadas cuando las luces no estaban alineadas.

Modalidades L21 y L22: en ambas el esquema es muy similar y consiste en descomponer el árbol en copa, centro y base. En la modalidad L21 la copa consta de 5 luces; el centro está formado por un número variable de capas, según el tamaño del árbol, cada una con 4 luces; y la base está formada por 2 luces. La modalidad L22 difiere de la L21 en que la copa está formada por 1 luz solamente. Si ahora el árbol tiene tamaño 20, en la modalidad L21 el número total de luces necesarias será $5 + 4\times18 + 2$, mientras que en la modalidad L22 el número total de luces será $1 + 4\times19 + 2$. En estas modalidades se asume implícitamente que si el árbol tiene tamaño n, entonces se necesitan $5 + 4(n - 2) + 2$ y $1 + 4(n - 1) + 2$ luces, en las modalidades L21 y L22, respectivamente.

Ejemplo de la modalidad L21.

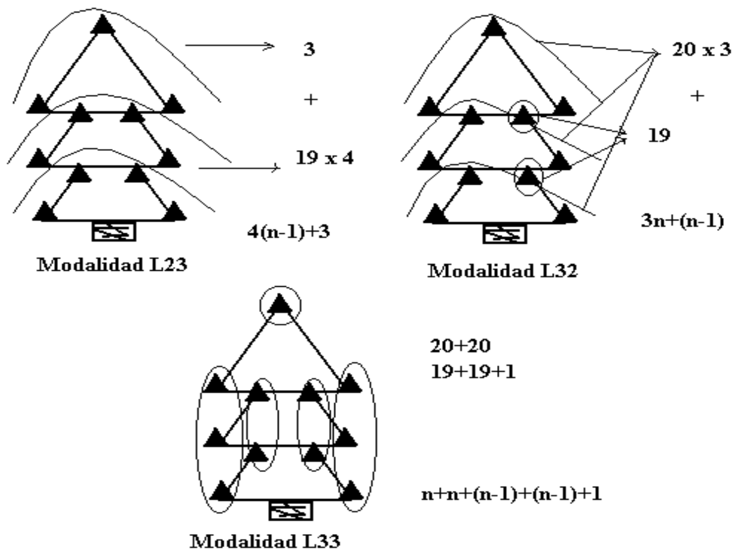
Problema del árbol de Navidad Alumno 181 (3ºBUP)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *18´4=72+5+2=79 luces. Si hay 20 medios triángulos, dieciocho tendran 4 luces, el primero tendrá 2 y el último, (en forma de triángulo) tendrá 5*.

Ejemplo de la modalidad L22.

Problema del árbol de Navidad Alumno 178 (3ºBUP)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *20; 3+(4·19)=79 luces. Si en el primer nivel hay tres, que al colocarle uno encima desaparece el de la punta, pero que aparece en el último nivel y sabemos que en el resto de los niveles hay cuatro.*

Tendremos: 1er nivel ---- 2 +1 (aparece en la punta del último nivel)
resto ---- 4 · (nº de niveles restantes).

Modalidad L23: consiste en considerar el árbol formado por una copa con 3 luces y por elementos variables, según el tamaño del árbol, compuestos cada uno por 4 luces. Si el árbol tiene tamaño 20 tendrá un número de luces igual a 4×19 + 3; se asume implícitamente que si el tamaño es *n*, entonces se tendrá un número de luces igual a 4(*n* - 1) + 3.



(Figura 4-5)

Ejemplo de la modalidad L23.
Problema del árbol de Navidad Alumno 188 (COU)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *19´ 4=76+3=79 luces. Porque le quito un triángulo que son 3 luces, después hallo cuantas luces tienen los 19 triángulos restantes (que tienen cuatro luces cada uno) y finalmente le sumo las 3 luces que faltan para completar el árbol.*

Modalidad L32: consiste en agrupar las luces de tres en tres, dejando una columna en el centro del árbol formada por luces aisladas. Si el tamaño del árbol es 20 se tendrá un número de luces igual a 3×20 + 19; se asume implícitamente que si el árbol tiene tamaño *n*, entonces el número de luces será igual a *3n* + (*n* - 1).

Ejemplo de la modalidad L32.
Problema del árbol de Navidad Alumno 162 (3º BUP)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *20´3=60+20=80 luces. He tomado como referencia el árbol de tamaño 1 y como al aumentar de tamaño cada triángulo tiene una luz más le sumo las 20 nuevas luces.*

Modalidad L33: esta modalidad es similar a la L11 de la escalera y consiste en agrupar las luces en columnas, cuya cantidad varía con el tamaño del árbol, y dejar una luz aislada en la copa del árbol. Si el árbol tiene tamaño 20 entonces el número de luces necesario será 20 + 20 + 19 + 19 + 1; se asume implícitamente que si el árbol tiene tamaño *n*, entonces el número de luces será *n* + *n* + (*n* - 1) + (*n* - 1) + 1.

Ejemplo de la Modalidad L33.

Problema del árbol de Navidad Alumno 201(COU)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?

Respuesta : *79 luces. Cada tamaño tiene dos luces en los extremos laterales (20·2), dos luces en las uniones de cada tamaño con el siguiente, salvo en el último, en el que sólo hay una luz. Por lo tanto: 20´2+19·2+1=79 luces.*

Modalidad L12: difiere de la modalidad L23 en que se añade una luz a la copa para que esta contenga un número de luces igual a las que tiene cada elemento de la parte variable; a continuación se multiplica el tamaño por 4 y se resta 1 (la luz que se había añadido) al resultado final. Se sigue que si el tamaño del árbol es 20 entonces el número de luces es 4×20 - 1; por lo tanto, se asume implícitamente que si el tamaño del árbol es *n*, entonces el número de luces es $4n$ - 1.

Ejemplo de la Modalidad L12.

Problema del árbol de Navidad Alumno295(4ºESO)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?

Respuesta : *Habrá 79 luces. Porque he cogido a cada tamaño y le he puesto 4 luces, que al final me ha dado 80 luces y le he quitado 1 de la punta de arriba. He multiplicado los tamaños con las luces que le he puesto.*

En su explicación, el alumno, hace clara referencia al dibujo en la frase “*... y le he quitado 1 de la punta de arriba”*.

En esta tarea, las modalidades L21, L22 y L23, que son evidentemente recursivas en su formulación aritmética y algebraica, coinciden con un procedimiento recursivo de construcción del dibujo. En las dos primeras, el elemento de partida es el número de objetos (luces) que hay en la copa y base del árbol; en la última este elemento lo forman las tres luces de la copa. Esta última construcción puede ser visualizada construyendo el árbol desde el primer elemento hacia abajo, añadiendo partes idénticas que contienen cuatro luces. Todas estas formulaciones recursivas a partir del dibujo tienen su correspondiente equivalencia en la sucesión numérica, hecho que no ocurre con la modalidad L11 de la tarea de la escalera como ya señalamos anteriormente. Es de notar que las diferentes modalidades se usan o bien con luces alineadas o bien con no alineadas, de forma que no hay modalidades de la estrategia visual comunes a las dos formas de presentar las luces (ex excepto dos alumnos que utilizan la modalidad L22 en la prueba con luces alineadas). Hay pues una clara influencia de que las luces estén o no alineadas en la modalidad de respuesta empleada por los alumnos.

En la tabla 4-5 se indica el número de alumnos que usan la estrategia visual en alguna de las cuestiones A1 ó A2, por nivel educativo y modalidad.

Tabla 4-5:

Categoría lineal-visual en “árbol de Navidad”

	Modalidades						Totales	
Niveles	L21	L22	L23	L12	L32	L33	Alumnos	%
8ºEGB	2	6	1	2	0	0	11	18
4ºESO	4	10	8	6	1	2	31	39
1ºBUP	1	10	3	4	0	0	18	30
2ºBUP	2	4	0	1	0	0	7	13
3ºBUP	4	6	9	1	1	1	22	35
COU	7	6	11	4	1	1	30	52
Totales	20	42	32	18	3	4	119	32

Tal como ocurre en la tarea de la escalera, no hay alumnos que usen dos modalidades distintas en las cuestiones de esta tarea del árbol de Navidad.

Hasta ahora los datos presentados en este apartado se refieren al número de veces que se ha aplicado cada modalidad de la estrategia visual, pero nos parece interesante comprobar cómo se comportan los alumnos que emplean una u otra modalidad al pasar de una cuestión a otra dentro de una misma tarea, incluso entre las dos tareas.

La Tabla 4-6 muestra el número de alumnos que contestó a cada cuestión con referencia explícita al dibujo. Bajo la columna "Prueba" se recoge el total de alumnos que utilizaron la estrategia visual en las cuatro cuestiones. Bajo la columna "Totales" se recoge el total de alumnos que utilizaron esta estrategia para resolver, al menos, una cuestión.

Tabla 4-6.

Frecuencia y porcentaje de uso de la estrategia visual

	Escalera		Árbol		Prueba		Totales	
Niveles	E4	E5	A1	A2	Alumnos	%	Alumnos	%
8ºEGB	3	1	11	11	0	0	14	23
1ºBUP	14	16	18	18	9	15	25	42
4ºESO	26	24	31	28	13	16	44	55
2ºBUP	3	3	7	6	2	4	8	15
3ºBUP	5	6	22	22	6	10	22	35
COU	12	13	30	30	10	17	34	59
Totales	63	63	119	115	40	11	147	39

En primer lugar, sospechamos que muchos más alumnos, de los recogidos en la tabla 4-6, emplearon la estrategia basada en el dibujo, aunque optaron por no dar ninguna explicación y se limitaron a consignar el resultado en cada cuestión.

El bajo porcentaje de alumnos de 2ºBUP que utilizan la estrategia visual no debe sorprendernos pues eran alumnos que habían sido instruidos dos meses antes sobre sucesiones aritméticas y, al reconocer la pauta numérica como correspondiente a este tipo de situaciones, utilizaron mayoritariamente la expresión $f(n) = f(1) + d(n-1)$. Sorprendentemente el mayor porcentaje de alumnos que utilizan el diagrama en la explicación de sus cálculos, se obtuvo en los alumnos con mayor edad y nivel académico (COU). Algunos de estos alumnos, así como los de 3ºBUP, reconocieron la pauta como "aritmética" pero anotaron frases como "no recuerdo la fórmula a aplicar" y optaron por desarrollar una estrategia personal de recuento.

Si comparamos los alumnos de 1ºBUP y 4ºESO, observamos que el porcentaje de alumnos que utilizaron esta estrategia en las cuatro cuestiones es similar (columna "Prueba" de la Tabla 4-6), siendo mayor en 4ºESO observando cuestión por cuestión y en el total de alumnos que a lo largo de la prueba utilizaron por lo menos una vez esta estrategia (última columna de la tabla 4-6). Esta diferencia podría ser debida a la distinta metodología aplicada por el profesor en los diferentes niveles educativos, observación que señalamos en el apartado relativo a la población estudiada

La tabla 4-6 muestra claramente la inconsistencia en el uso y empleo de esta estrategia visual a lo largo de toda la prueba, no así en cada tarea donde los alumnos que utilizan esta estrategia visual la emplean, por lo general, en ambas cuestiones. Otro hecho puesto de relieve por la última columna de la Tabla 4-6 es el alto porcentaje de alumnos que utilizan, al menos una vez, tal estrategia al responder a alguna cuestión dentro de las dos tareas (39% de la población total).

4.2.2.1. Carácter dinámico o estático de las explicaciones. Esquemas de la acción subyacente.

En el ámbito visual-geométrico (dibujo).

La cuestión a resolver, cálculo de $f(n)$ para un cierto n, dirige la atención de los alumnos hacia los elementos del dibujo y el tamaño n del objeto. Así, los alumnos desarrollan una *acción* mental sobre el dibujo, proceso interno, que puede tener su origen o no en una actividad física sobre el dibujo. Utilizamos el término dibujo, aunque sería más apropiado el de *figuras* en el sentido en que Laborde (1992, p. 57) distingue un término del otro, como representaciones mentales de los dibujos o de los símbolos presentes en la situación. La explicación escrita dada por los alumnos nos permite precisar el *esquema* de tal acción. Tales explicaciones inducen a pensar que los alumnos pueden contemplar el dibujo de forma estática o de forma dinámica.

Visión estática: Cuando un alumno considera de forma estática el dibujo imagina el objeto completo del tamaño requerido. La acción consiste en producir una partición del dibujo en un número constante de grupos. Los grupos, a su vez, pueden contener un número variable o invariable de elementos. Pero, esto es importante, el número de grupos es constante, aunque uno de ellos o todos estén compuestos de un número variable de elementos.

Problema del árbol de Navidad Alumno 34 (1ºBUP)Categoría L22

A1*: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?*

Respuesta*: 19´4=76+3=79. El árbol de tamaño 20, está formado por 20 triángulos, y en 19 de sus triángulos posee 4 luces por lo que tiene 76, pero se le suman 3 más porque son las que van en las dos puntas del primer triángulo y en la punta del triángulo número 20.*

El esquema de la acción sería:

<invariable> + <variable> + <invariable>

Visión dinámica: Cuando un alumno considera de forma dinámica el dibujo, imagina el objeto "creciendo" a partir de un cierto objeto hasta el tamaño requerido. El objeto desde el cuál comienza el "crecimiento", puede coincidir con un tamaño del objeto dado en la tarea o con otro objeto extraído de alguno de los objetos de diferente tamaño dados en la tarea. Una característica importante de la visión dinámica es que el número de grupos varía y depende del tamaño del objeto.

Problema del árbol de Navidad Alumno 178 (3ºBUP)Categoría L22

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?

Respuesta : *20; 3+(4·19)=79 luces. Si en el primer nivel hay tres, que al colocarle uno encima desaparece el de la punta, pero que aparece en el último nivel y sabemos que en el resto de los niveles hay cuatro.*
Tendremos: 1er nivel ---- 2 +1 (aparece en la punta del último nivel)
resto ---- 4 · (nº de niveles restantes).

La explicación es claramente dinámica en la expresión *"Si en el primer nivel hay tres, que al colocarle uno encima...* El esquema de la acción sería:

<invariable> + [<invariable> + <invariable> + ...] + <invariable>

Resulta, por tanto, que la manera en que se produzca la visión del dibujo determina un tipo u otro de esquema de acción. La visión estática conduce a un número constante de grupos alguno de los cuales es variable, mientras que la visión dinámica lleva a un número no constante de grupos, teniendo todos ellos un número invariable de elementos. En ambos casos hay aspectos (grupos o tamaño de grupos) variables e invariables. Debe observarse que dentro de una misma modalidad de estrategia visual pueden darse ambos tipos de visiones del dibujo y, por tanto, las dos clases de acciones que hemos descrito.

En el ámbito numérico (sucesión numérica).

En este ámbito incluimos, en primer lugar, las respuestas clasificadas bajo la categoría L2a. Es decir, aquellas en las que los alumnos utilizan las fórmulas para el cálculo del término general de una progresión aritmética. La tabla 4-7 muestra el porcentaje de respuestas a cada cuestión de generalización próxima y lejana en las tres tareas (En los niveles de 8ºEGB, 1ºBUP y 4ºESO no se produjo ninguna respuesta de este tipo, pues los alumnos no había sido instruidos en este tema).

Tabla 4-7: Categoría L2a (en %)

Nivel	E4	E5	A1	A2	S2
2ºBUP	33	33	46	46	71
3ºBUP	0	0	10	8	27
COU	0	0	2	3	7

Una vez separadas las respuestas clasificadas bajo la categoría L2a y las respuestas que claramente hacen referencia al dibujo en sus explicaciones, las restantes son muy parcas en tales explicaciones, pues un número importante de tales respuestas sólo consigna la estructura para el cálculo. Ejemplos:

Problema de la escalera — Alumno 51 (1ºBUP)
E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.
Respuesta: *3´20=60+2. 62 palillos.*

Problema del árbol de Navidad — Alumno 38 (1ºBUP)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta : *(20·4)-1=80-1=79. 79 luces.*

Tales respuestas no son clasificadas ni como influidas por el dibujo ni por la sucesión numérica.

Las siguientes respuestas pueden ser clasificadas como derivadas del ámbito numérico, ya que en las correspondientes explicaciones no se hace referencia al dibujo y sí se muestran ciertas regularidades basadas en los datos numéricos.

Problema del árbol de Navidad — Alumno 316 (4ºESO)
A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
Respuesta *: Habrá 79. He deducido la respuesta razonando de esta manera: si multiplico el tamaño por 4 y le resto 1, me cumplen la serie anterior:*
Nº luces = Tamaño · 4 –1 = 1·4 –1 = 3
“ = “ · 4 – 1 = 2· 4 – 1 = 7
“ = “ · 4 – 1 = 3· 4 – 1 = 11
Por lo tanto mi respuesta a esta pregunta la he hallado así:
Nº luces = 20·4 –1 =79.

Como se ve no existe referencia alguna al dibujo en la explicación y sí una serie de operaciones realizadas sobre los tres primeros términos de la sucesión, con el objeto de comprobar la validez de una regla. El alumno ha utilizado la diferencia constante 4 como factor, por el que ha ido multiplicando cada tamaño hasta “ajustar”, restando 1 a cada resultado parcial, el número de luces correspondiente.

Tal respuesta nos indica el siguiente esquema de la acción para la estrategia numérica dentro de la categoría de respuesta L1.

Esquema funcional (obtenido, posiblemente mediante ensayo y error)

1	2	3	. . .	20
↓	↓	↓		↓
4×1-1= **3**	4×2-1= **7**	4×3-1= **11**		4×20-1 = **79**

Veamos otro ejemplo de explicación numérica.

Problema de la escalera Alumno 241 (COU)

E4: ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?.

Respuesta: *5 peldaños 17 palillos. 20-5 peldaños que me faltan. 15·3 (palillos que lleva un nuevo peldaño)=45 palillos. El número total de palillos es 45+17=62 palillos.*

En ningún momento de la explicación se hace referencia al dibujo, y los términos peldaños y palillos figuran en el texto del problema. La explicación sólo se refiere a elementos de la sucesión numérica. El alumno ha buscado una relación entre el tamaño *n* y el número de elementos *f(n)*, pero, en este caso, la relación es recurrente, se apoya en el cálculo ya efectuado del número de palillos necesaria para una escalera de 5 peldaños. Aunque el alumno no lo explícita, podemos conjeturar que el esquema de la acción es el siguiente:

Esquema funcional-recursivo (se tiene en cuenta los "trechos" o términos que separan el buscado del último obtenido).

$$\begin{array}{ccc} 5 & \xrightarrow[15]{} & 20 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 17 & \xrightarrow[+3\ \ +3\ \ +3]{} & 3\cdot(20-5)+17 = \mathbf{62} \end{array}$$

Veamos otro ejemplo de categoría L2, pero en el que el esquema de la acción es ligeramente diferente al anterior.

Problema de la lista numérica Alumno 178(3ºBUP)

S2: Si escribieras 100 números de esa lista, ¿qué número escribirías en último lugar?

Respuesta: *(6·99)+4=598. La diferencia entre cada uno de los números de esta lista es 6, si tenemos que escribir los 100 primeros números, el total de diferencias serán 99, a el valor de estas diferencias tenemos que sumarle el valor del primer número de la lista, para obtener el número que ocupa el lugar 100.*

La explicación es mucho más explícita que la anterior en cuanto a que el alumno cuenta las "*diferencias*" entre el primer término y el término 100. El esquema de la acción es:

$$4 \xrightarrow[+6]{} 10 \xrightarrow[+6]{} 16 \xrightarrow[+6]{} 24 \quad \ldots \quad 6\cdot(100-1)+4 = \mathbf{598}$$

tal esquema es, en esencia, equivalente al señalado como funcional-recursivo.

Veamos finalmente un ejemplo dentro de la categoría L3 de respuesta.

Problema del árbol de Navidad Alumno 195(COU)

A1: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?

Respuesta :

1 ¾ 3 ; 1 ´ 3 = 3 + 0 = 3
2 ¾ 7 ; 2 ´ 3 = 6 + 1 = 7
3 ¾ 11; 3 ´ 3 = 9 + 2 = 11
4 ¾ 15; 4 ´ 3 = 12 + 3 = 15 Þ 20 ¾ 79;
20 ´ 3=60+19=79

tamaño luces

Multiplicas el tamaño ´ 3 y le sumas el tamaño anterior 19.

Se trata claramente de la búsqueda de una relación funcional entre *n* y *f(n)*, pero en este caso el alumno ha utilizado el factor 3 (¿las tres luces del primer árbol?) y ha multiplicado cada tamaño, desde el tamaño 1 al 4, por dicho factor. Luego ha restado el resultado al número de luces que de hecho tiene cada árbol, cantidad que añade a los resultados parciales. Finalmente observa que la sucesión de cantidades añadidas corresponde, en cada caso, con n - 1. El alumno, mediante "ensayo y error" ha construido una serie consecutiva de ejemplos, de los cuales induce la regla general. El esquema de la acción es funcional.

4.2.2.2. Esquemas con y sin diferencia

Una segunda clasificación de las acciones y de los esquemas de las acciones tiene que ver con el papel que juega la diferencia a. En ciertos casos, los elementos variables se relacionan con la diferencia, mientras que en otros no es así. Es decir, tenemos dos tipos de esquema de la acción.

Esquema A: con diferencia. El elemento variable del esquema de la acción está directamente relacionado con la diferencia a de la sucesión. Así ocurre en las modalidades L11 de la escalera y L12, L21, L22 y L23 del árbol de Navidad. En la visión estática el grupo variable está formado por subgrupos de tamaño a y en la visión dinámica los grupos que se van añadiendo tienen tamaño a. Consideremos, por ejemplo, la modalidad L11. Con una visión estática, el alumno produce una partición del tipo

<2> + <20×3>

En una visión dinámica, los grupos que se añaden son de 3 elementos:

<2> + <3> + <3> +...

En ambos supuestos la diferencia 3 juega un papel esencial.

Esquema B: sin diferencia. El elemento variable del esquema de la acción no está directamente relacionado con la diferencia a de la sucesión, como ocurre en las modalidades L31 de la escalera y L32 y L33 del árbol de Navidad. Veamos el ejemplo de la modalidad L31. Con visión estática el alumno actúa de modo que se produce una partición como

<21> + <20> + <21>

Desde una visión dinámica se tendrá

[<2> + <1> + <1> +...] + [<2> + <1> + <1> +...] + [<2> + <1> + <1> +...]

En ninguno de los dos casos aparece la diferencia 3 de modo explícito, ya que lo que ocurre es que la sucesión de diferencia 3 se descompone en suma de tres sucesiones de diferencia 1.

En la Tabla 4-8 se da el número de alumnos que utilizaron los distintos esquemas en cada prueba, referidos exclusivamente a los 40 que usaron la estrategia visual en las cuatro cuestiones E4, E5, A1 y A2.

Tabla 4-8:

Esquemas A y B de la acción

	Escalera	Árbol
A	25	38
B	15	2

Podemos concluir en este apartado que las acciones sobre los dos ámbitos conducen a una regla para el cálculo, que corresponde a un recuento generalizado de los elementos que componen un objeto de tamaño dado. En la búsqueda de tal regla se muestra, por los alumnos, el aspecto procedimental del comportamiento cognitivo, puesto que establecen un orden en los términos $f(n)$ de la sucesión, de modo que el correspondiente número natural n (tamaño del objeto) se contempla como una especificación ordinal de las cantidades de la sucesión y se obtiene la relación variable entre el número n y la cantidad correspondiente $f(n)$.

Este comportamiento cognitivo es un ejemplo de lo que Dubinsky y Harel (1992, p. 91) denominan concepto procedimental de función. Luego las situaciones son asimiladas a un esquema existente de función, donde prima el carácter procedimental del concepto. Los ejemplos analizados evidencian el uso que los alumnos hacen de tal esquema ya formado, y que tal esquema se coordina con el esquema que denominaremos con el término *números* y que contiene conceptos y procedimientos, como son los caracteres ordinal y cardinal, las operaciones básicas de la aritmética y del álgebra elemental.

4.3. Diferencias encontradas respecto al formato del dibujo

La tabla 4-9 muestra la frecuencia de respuesta por categoría y por modalidad del dibujo en la tarea de la escalera, es decir, palillos separados o palillos juntos. El número de alumnos a los que se les pasó la prueba con los palillos juntos fue de 183, siendo 190 los alumnos a los que se les pasó la prueba con los palillos separados. Las categorías L10, L20 y L30 corresponden a las respuestas en las que los alumnos no hacen referencia al dibujo.

Tabla 4-9: Escalera
Frecuencias por modalidad palillos juntos (183) / palillos separados (190)

	n.c.	*L10*	*L11*	*L20*	*L2a*	*L30*	*L31*	*Rs*	*Rd*	*W1*	*W2*	*W3*
E4(183)	20	20	21	11	6	0	11	4	21	26	10	33
E4(190)	27	26	23	7	11	1	9	2	17	25	8	34
E5(183)	32	23	19	9	6	0	11	0	0	29	9	45
E5(190)	37	27	23	8	11	1	11	0	0	31	9	32

No se observan diferencias notables, por lo que podemos inferir que unir o separar los palillos no produce diferencias en las respuestas de los alumnos. Las únicas modalidades de respuestas lineales aquí contempladas corresponden a L11 y L31, es por lo que bajo las otras modalidades no se contabiliza ninguna respuesta.

La tabla 4-10 muestra la frecuencia de respuesta por categoría y por modalidad del dibujo en la tarea del árbol de Navidad, luces no alineadas (185 alumnos) y luces alineadas (188 alumnos).

Tabla 4-10: Árbol de Navidad
Frecuencias por modalidad luces no alineadas (185)/luces alineadas (188)

	n.c.	*L10*	*L12*	*L20*	*L21*	*L22*	*L23*	*L2a*	*L30*	*L32*	*L33*	*Rs*	*Rd*	*W1*	*W2*	*W3*
A1(185)	24	4	18	14	0	2	32	18	13	3	5	5	1	20	11	15
A1(188)	31	18	0	13	20	40	0	14	2	1	0	7	2	14	3	23
A2(185)	25	4	18	14	0	2	31	17	12	3	4	1	0	22	14	18
A2(188)	31	17	0	13	20	38	0	14	4	1	0	1	0	16	10	23

Bajo las modalidades L11 y L31 no se contabiliza ninguna respuesta pues corresponden al problema de la escalera. Por otro lado, la ausencia de respuesta bajo la modalidad L21, en la prueba de luces no alineadas, es debido a que tal modalidad surge de un cálculo especial que corresponde al dibujo con luces alineadas. Ocurre lo mismo, pero ahora al revés con la modalidad L23. La modalidad L22 corresponde al dibujo con luces alineadas; las dos respuestas obtenidas bajo esta modalidad en el problema con luces no alineadas tiene como explicación más plausible el que los alumnos alinearon las luces mentalmente para desarrollar la estrategia.

Sin embargo, sí hay algunas diferencias en la cualidad de las respuestas que debemos considerar que son causa del dibujo. Por ejemplo, la modalidad L12 no aparece en ninguna de las respuestas cuando se alinean las luces. Al alinear las luces se pierde la visión del tamaño 1, tres luces, que si es visible en la copa del árbol cuando las luces no se alinean. Y según las explicaciones de los alumnos esa visión es clave, para suponer que el árbol tiene n grupos de 4 luces y que al final hay que restar una luz.

En la tarea de la escalera se observaron un total de 6 errores, correspondientes a 7 alumnos, y no se observaron diferencias apreciables entre las pruebas en las que los palillos se unieron respecto de las que estos se mantuvieron como en el formato original. Concretamente:

Modalidad L31 (3 alumnos):

22 + 22 (1 alumno)

22 + 22 + 20 (1 alumno)

$20 + 19 + 19$ (1 alumno)

Modalidad L11 (4 alumnos):

$20\times2 + 2$ (2 alumnos)

$20\times3 + 5$ (1 alumno)

$20\times2 + 4$ (1 alumno)

En la tarea del árbol de Navidad hemos contabilizado 25 alumnos que cometieron errores. Aquí sí se aprecian diferencias entre las pruebas con las luces alineadas y las que no. Cuando las luces estaban alineadas los errores cometidos fueron los siguientes (21 alumnos):

Modalidad L22 (19 alumnos):

$18\times4 + 3$ (13 alumnos)

$20\times4 + 3$ (4 alumnos)

$19\times4 + 1$ (1 alumno)

$18\times4 + 5$ (1 alumno)

Modalidad L21 (2 alumnos):

$18\times3 + 7$ (2 alumnos)

En las pruebas en las que las luces no estaban alineadas los errores fueron los siguientes (4 alumnos):

Modalidad L12 (3 alumnos):

$20\times4 - 2$ (1 alumno)

$20\times4 - 3$ (1 alumno)

Modalidad L32 (1 alumno)

$20\times3 + 20$ (1 alumno)

En la modalidad L22 (19 alumnos) todos los errores se deben a una apreciación errónea entre el tamaño del objeto y el número de partes en las que se descompone el elemento variable del mismo, más que a una incompetencia aritmética. En las modalidades L23 y L33 no se contabilizaron errores.

Si comparamos el porcentaje relativo de respuestas atendiendo al diferente formato del diagrama, observamos que un 40% (25 alumnos de un total de 62) cometieron errores en las pruebas con las luces alineadas, mientras que solo un 7% (4 alumnos de un total de 57) cometieron errores en las pruebas con las luces no alineadas. Además, el porcentaje de alumnos que utilizan el diagrama en su explicación es muy similar en ambas pruebas: 33% con luces alineadas (62 alumnos de un total de 188) y 31% con luces no alineadas (57 alumnos de un total de 185).

Avanzamos una posible explicación a esta diferencia. Hay 13 alumnos que comenten el error $18\times4 + 3$ y cuatro alumnos que cometen el error $20\times4 + 3$ en la modalidad L22, y en ambos casos corresponde a una apreciación errónea del número de alineamientos con respecto al tamaño del árbol. El número de alineamientos de cuatro luces, corresponde con n-1, siendo n el tamaño del árbol. Al multiplicar 4 por 18, los trece alumnos, han descontado dos al tamaño del objeto, cuando deberían haber descontado solo una unidad. Las dos unidades descontadas corresponden, obviamente, a la copa y la base del árbol. En el otro error, no se ha descontado ninguna unidad al tamaño del árbol, y por lo tanto los alumnos dan por hecho que el número de alineamientos variables es igual al tamaño del árbol. En el primer caso se ha descontado por defecto y en el segundo por exceso una unidad respecto de lo que se debería haber descontado. Los dos alumnos que alinearon las luces en las pruebas con luces alineadas dieron resultados correctos. Si un alumno parte del dibujo con las luces no alineadas y las alinea, aunque en su imagen mental las luces estén alineadas, conserva a la vista el dibujo original, sin luces alineadas. Si suponemos que tal imagen mental se construye observando el árbol de tamaño 3, en la acción de alinear las luces, uno debe separa dos de la copa y dos de la base para realizar el alineamiento, es decir, se construye un “nivel” más de los “niveles” de partida, y por lo tanto hay que descontar una unidad al tamaño del objeto. En el caso de las luces ya alineadas no hay que realizar tal acto y creemos que en ello está la causa de tantos errores. Parece que nuestra decisión de modificar el dibujo, alineando las luces, indujo a los alumnos a cometer un número mayor de errores al privarles del acto de alinearlas por ellos mismos.

4.4. La actuación de los alumnos y la comprensión de las tareas.

4.4.1. Las cuestiones introductorias: iteración y recursión. Primera generalización.

Para Stacey las tres cuestiones introductorias en la tarea de *la escalera* (E1, E2 y E3), sirven de "calentamiento" a los alumnos. En este apartado precisaremos ese papel. Las respuestas de los alumnos a las dos primeras cuestiones manifiestan que han asimilado bien el carácter iterativo, sumar repetidamente la diferencia constante, de la pauta lineal. En la primera cuestión, el 52% y el 34% de los alumnos dan respuestas de categorías Rs y Rd, respectivamente; mientras que en la cuestión E2, el porcentaje es 56% y 28% respectivamente. Se observa un desplazamiento hacia extender la sucesión frente a contar directamente sobre un dibujo realizado al tal efecto. De esta manera, las cuestiones E1 y E2, además de servir de "calentamiento", juegan el papel de hacer caer a los alumnos en el proceso de iteración, sumar 3 repetidamente, importante en la construcción de la sucesión numérica asociada a las escaleras, y en general en la construcción de cualquier sucesión aritmética. Esta es la primera característica que tienen en común las tres sucesiones numéricas presentes en ambos problemas. El proceso de iteración, cuyo significado preciso es de repetición, sumar repetidamente la misma cantidad en estas cuestiones, es una estrategia empírica cuya noción es captada mayoritariamente por los alumnos. La iteración sobre la sucesión la consideramos como manifestación de la comprensión de tal carácter de la pauta lineal, y lo calificaremos como de comprensión procedimental (iterativa), para distinguirlo de la actividad procedimental de contar sobre el dibujo. En el sentido en que tal iteración sobre la sucesión parte de una reflexión sobre los datos numéricos o sobre el dibujo y se abstrae esa cualidad de la pauta lineal.

Al llegar a la cuestión E3, en la que obviamente no se puede realizar un dibujo, los alumnos optan por las siguientes respuesta: 70% Rs, 13% L, 12% W y 6% n.c. (no clasificadas o en blanco). Hay un 18% de alumnos (12% de W y 6% n.c.) que muestran claramente un comportamiento de actividad procedimental, su comprensión de la tarea es nula o errónea. Hay un 13% que dan soluciones basadas en recuentos generalizados. Mientras que el 70% ha captado la otra cualidad de la pauta: la recursión sobre los elementos de la sucesión, es decir, sus respuestas son del tipo 332 + 3 = 335, asumiendo implícitamente que $f(n) = f(n - 1) + 3$.

Veamos en la Tabla 4-11 cuál ha sido la transición entre categorías de respuestas al pasar de E2 a E3.

Tabla 4-11:

	Tansición E2-E3 (%)			
	Rs	**L**	**W**	**n.c.**
Rs	48,5	1,9	3,8	1,6
Rd	19,8	2,1	3,5	2,7
L	0,8	8,8	0,0	0,0
W	0,3	0,0	4,3	0,0
n.c.	0,5	0,0	0,0	1,3

Casi un 20% de los alumnos que utilizaron el dibujo en la cuestión E2 ahora dan una respuesta numérica recursiva, mientras que algo más del 5% de los alumnos que daban una respuesta numérica en E2 o no dan respuesta o la dan del tipo de proporcionalidad directa en E3. Estos últimos alumnos no han abstraído la cualidad recursiva de la pauta. Para los alumnos que dan una respuesta de tipo recursivo partiendo de recuento sobre el dibujo o extendiendo la sucesión, el proceso iterativo, la acción de sumar la diferencia constante, ha sido generalizado y su manifestación clara es la comprensión procedimental (recursiva). Luego a través de las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones introductorias, se manifiesta un comportamiento, que indican claramente que se ha comprendido de diferentes formas la cualidad de la pauta lineal de "sumar la diferencia constante". Tendríamos dos primeras clasificaciones de comprensión procedimental, una comprensión de la cualidad iterativa (*comprensión procedimental iterativa*) y una comprensión procedimental de la cualidad recursiva (*comprensión procedimental recursiva*).

4.4.2. La transición entre la cuestión de generalización próxima y lejana en una misma tarea. Segunda generalización.

La consistencia en la transición entre las cuestiones de generalización próxima y lejana dentro de una misma tarea se consideran en este trabajo como signo necesario de la comprensión. La comprensión es procedimental si el alumno mantiene la misma categoría de respuesta lineal para las cuestiones de generalización próxima y lejana en una misma tarea. En otro caso tal comprensión será considerada como de actividad procedimental.

La tabla 4-12 muestra la frecuencia y porcentaje de alumnos que mantienen la misma categoría de respuesta dentro de cada tarea.

Tabla 4-12:
Consistencia en el uso de categoría de respuesta en la transición entre GP y GL en las tareas con dibujo.

	de E4 a E5		de A1 a A2	
Nivel	Frecuencia	%	Frecuencia	%
8º EGB	28	45	43	69
4º ESO	49	61	52	65
1º BUP	44	76	46	81
2º BUP	46	88	43	83
3º BUP	47	76	53	85
COU	50	86	53	91
Totales	264	71	290	77

De la tabla anterior se constatan dos hechos. En primer lugar, la consistencia en el empleo de la categoría de respuesta es muy alta y crece con el nivel educativo de los alumnos. En segundo lugar, tal consistencia es ligeramente superior en el problema del árbol de Navidad que en el de la escalera. Sin embargo, tal consistencia esconde dos tipos de comprensión que hemos denominado de actividad procedimental y de comprensión procedimental. Para separar ambos, interesa saber cuántas de las transiciones mantienen la misma categoría lineal de respuesta. La tabla 4-13 muestra la frecuencia y porcentaje de los alumnos que mantienen el esquema lineal de respuesta al pasar de la generalización próxima a la lejana en cada tarea.

Tabla 4-13:
Consistencia del esquema lineal en cada tarea.

	de E4 a E5		de A1 a A2	
Nivel	Frecuencia	%	Frecuencia	%
8º EGB	8	13	17	27
4º ESO	34	43	41	51
1º BUP	23	39	31	53
2º BUP	22	42	31	60
3º BUP	24	39	40	65
COU	28	48	48	83
Totales	139	37	208	56

Si comparamos los datos de la tabla 4-13 con los datos de la tabla 4-12, observamos que los alumnos no sólo generalizan sino que generalizan erróneamente y son además consistentes. La consistencia en un mismo problema, mantenimiento en el esquema lineal de respuesta, lo consideramos en nuestro estudio como clara indicación de la comprensión procedimental. La ausencia o presencia de consistencia en un esquema no correcto (W) es una indicación de actividad procedimental de los alumnos. Veamos un ejemplo para ilustrar nuestro argumento:

> Problema de la escalera. Alumno 343 2º(BUP)
>
> E4. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 20 peldaños?
>
> Respuesta:
>
> *Escalera 5 peldaños = 17 palillos*
>
> *1 peldaño = 3 palillos*
>
> *15´3= 45+17 =62 palillos necesito para una escalera de 20 peldaños.*
>
> E5. ¿Cuántos palillos necesitaré para construir una escalera con 1000 peldaños?
>
> Respuesta:
>
> *1 peldaño = 3 palillos*
>
> *62´5=310 palillos se necesitan para una escalera de 100 peldaños.*
>
> *310´10 = 3100 palillos se necesitan para una escalera de 1000 peldaños.*

En la generalización próxima, el cálculo efectuado por el alumno corresponde con la expresión $f(20) = 3\times(20\text{-}5) + f(5)$, que corresponde a la categoría L2. Sin embargo, al pasar a la generalización lejana utiliza para el cálculo la expresión $f(1000) = 10\times f(100) = 5f(20)$, que corresponde con la categoría W2.

La consistencia en un mismo problema y entre estrategias correctas, lo consideramos en nuestro estudio como clara indicación de la comprensión procedimental. Los siguientes ejemplos ilustran claramente nuestro argumento.

> Problema del árbol de Navidad. Alumno 73 (8ºEGB)
>
> A1. ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 20?
>
> Respuesta: *20´4=80. 80-1=79. Multiplicando el tamaño por 4 luces que tiene el piso uno debajo de otro y le resto 1 porque el primero tiene 3.*
>
> A2: ¿Cuántas luces habrá en un árbol de tamaño 100?
>
> Respuesta: *100´4=400. 400-1=399. Multiplicando el tamaño por 4 y restandolo 1.*

Es en la generalización próxima donde el alumno desarrolla la regla para el cálculo y la aplica, reproduciendo o no la explicación dada, pero consignando la estructura del cálculo en la cuestión de generalización lejana. Es esa explicitación de la estructura del cálculo, al pasar de una cuestión a la siguiente, lo que nos indica que existe comprensión del procedimiento.

Los signos necesarios de comprensión procedimental son superiores en la tarea del árbol de Navidad que en la tarea de la escalera. Tal aumento está claramente correlacionado con el aumento en el empleo del esquema lineal con una estrategia visual (salvo para 1ºBUP). Es decir, los datos indican que el dibujo de la tarea “árbol de Navidad” facilita en los alumnos la construcción de una respuesta lineal más que el dibujo de la “escalera”. La tabla 4-14 muestra también que el dibujo es un factor más importante que la sucesión numérica en la generalización, y en este caso, un medio importante para que los alumnos manifiesten un comportamiento de comprensión procedimental en cada tarea. En el caso del árbol de Navidad el porcentaje incluso supera el 50%.

Tabla 4-14: Frecuencias y porcentaje relativo de lineal-visual respecto de lineal en las dos tareas con dibujo.

	Escalera			Árbol		
	Lineal	Lineal-visual	% relativo	Lineal	Lineal-visual	% relativo
8ºEGB	8	1	13	17	11	65
1ºBUP	23	14	61	31	18	58
4ºESO	34	21	62	41	28	68
2ºBUP	22	3	14	31	6	19
3ºBUP	24	5	21	40	22	55
COU	28	12	43	48	30	63
	139	56	40	208	115	55

4.4.3. La transición entre las dos tareas. Tercera generalización.

El comportamiento de los alumnos al pasar de la primera a la segunda tarea es una muestra de la consistencia. Tal consistencia se define ahora como el mantenimiento de la misma categoría de respuesta al pasar del problema de la escalera al problema del árbol de Navidad.

Para poder abordar el estudio hemos tomado la siguiente decisión: clasificaremos las respuestas a cada problema de forma global. Si todas las respuestas, tanto en el problema de *la escalera* como en el del *árbol de Navidad*, responden a la misma categoría, la respuesta a un problema será clasificada obviamente mediante el código correspondiente. Si en las respuestas a la generalización próxima se utiliza una categoría de recuento y en las de generalización lejana no de recuento, la respuesta al problema será clasificada mediante el código de la respuesta a las cuestiones de generalización lejana. Según, este criterio, se ha eliminado, en esta parte del estudio, a 27 alumnos en 8º EGB (44%); a 30 alumnos en 4º ESO (38%); a 17 alumnos en 1º BUP (29%); a 7 alumnos en 2º BUP (13%); a 17 alumnos en 3º BUP (27%) y a 7 alumnos en COU (12%). Luego para esta parte del estudio la muestra original se redujo en 105 alumnos, quedando una muestra reducida de 268 alumnos.

La tabla 4-15 muestra, por nivel, el porcentaje de alumnos que no cambian de categoría de respuesta. Los porcentajes se refieren a la muestra reducida en cada nivel después de descontar los alumnos eliminados según el criterio adoptado.

Tabla 4-15: Transición Escalera - Árbol

Nivel	No cambian	Cambian
8º EGB	16 (46%)	19 (54%)
1º BUP	15 (36%)	27 (64%)
4ºESO	17 (34%)	33 (66%)
Parcial (8º a 1º)	**48 (38%)**	**79 (62%)**
2ºBUP	32 (71%)	13 (29%)
3ºBUP	19 (42%)	26 (58%)
COU	19 (33%)	32 (67%)
Parcial (2ºa COU)	**70 (49%)**	**71 (50%)**
TOTAL	118 (44%)	150(56%)

Los porcentajes revelan un mayoritario cambio de categoría de respuesta al pasar del problema de la escalera al problema del árbol de Navidad, salvo para el nivel 2º BUP. La razón creemos que vuelve a ser la ya apuntada antes. Estos alumnos aplican o asimilan la situación al esquema existente de las progresiones aritméticas. Sin embargo, vuelve a ser notable el olvido del conocimiento o no-reconocimiento de la situación como de progresiones aritméticas que ocurre con los niveles de 3º BUP y COU, donde los porcentajes son similares a los niveles donde los alumnos no han sido instruidos en el tema. De la tabla 4-15 se deduce que la consistencia es mayor en los niveles superiores (2ºBUP a COU) que en los niveles inferiores (8ºEGB a 4ºESO) y ello es debido al alto porcentaje de alumnos de 2ºBUP que emplean el conocimiento adquirido sobre progresiones aritméticas. Si nos fijamos en COU, el porcentaje de consistencia es el más bajo de toda la población, incluso 3ºBUP tiene un porcentaje de consistencia inferior a 8ºEGB.

La tabla 4-16 muestra hacia que categoría de respuesta se produce la transición, observándose un alto porcentaje (45%) de alumnos que se mueven entre categorías correctas, mientras que un 55% de los alumnos se mantienen en categorías incorrectas o cambian entre ambas categorías (los porcentajes se refieren a la muestra parcial de 268 alumnos).

Tabla 4-16:
Transición entre esquemas
(frecuencias)

	L	**W**	
L	122	12	
W	66	68	
			268

Los cambios a diferentes categorías y entre categorías incorrectas lo consideramos como signo de la actividad procedimental. La tabla 4-17 muestra la transición entre las categorías de respuesta lineal.

Tabla 4-17: Transición entre categorías lineales (frecuencias)

	L1	**L2**	**L3**	
L1	23	42	8	
L2	0	33	0	
L3	0	12	4	
				122

De los 4 alumnos que realizan la transición L3 a L3 sólo dos lo hacen a modalidades equivalentes. Uno en 3ºBUP presenta la transición L31 a L33, que son modalidades de respuestas equivalentes; el otro en COU cuya respuesta es numérica.

Luego el 49% (60 de 122) de los alumnos realizan una transición entre la misma categoría de respuesta y por lo tanto se podría considerar su comportamiento como signo necesario de la comprensión conceptual. El 51% de alumnos restantes, realizan transiciones entre categorías de respuestas correctas pero cambian de modalidad, siendo clasificada su comprensión como procedimental en la secuencia compuesta por las dos tareas.

Veamos que ocurre con los alumnos que utilizan el dibujo. Ya hemos señalado que el esquema de la acción para las modalidades L11 y L12 puede considerarse recursivo sobre el dibujo, mientas que no existe tal parangón con la sucesión numérica en la tarea de la escalera. Luego, los esquemas de la acción en las respuestas L11 de la escalera y L12 del árbol de Navidad comparten, con las L2 visuales, en los esquemas de la acción correspondientes, el que los grupos variables tienen todos el mismo número de elementos e igual a la diferencia constante. Luego desde el punto de vista del esquema de la acción todas ellas podrían considerarse como equivalentes. Obsérvese que tanto en las respuestas procedentes de los esquemas A como de los B se establece la relación entre las variables n y $f(n)$, pero mientras en las de la clase A se aproxima al objeto matemático $f(n) = an + b$, en las de la clase B la respuesta se aleja de tal objeto.

Recordemos que el número de alumnos que utilizaron la estrategia visual en las cuatro cuestiones de las dos tareas quedó reducido a 40 de un total de 373 (11%). La Tabla 4-18 muestra el número de alumnos que realizan una transición particular entre ambas tareas, según los esquemas de acción utilizados.

Tabla 4-18.
Transición entre las dos tareas

Tipo	Alumnos
De A a A	24
De B a B	1
De A a B	1
De B a A	14
Total	40

En primer lugar, observamos que 25 alumnos (62’5%) usan el mismo tipo de respuesta al pasar de la tarea de la escalera a la del árbol de Navidad, y podríamos considerar que tales alumnos han generalizado la estrategia al pasar de la escalera al árbol de Navidad, los restantes 15 alumnos (37’5%) modifican el tipo de respuesta al abordar el árbol de Navidad. Por otro lado, es clara una tendencia hacia las respuestas de clase A, que están más próximas al objeto matemático, pues de la tabla 4-18 se infiere que 38 alumnos (95%) mantienen o cambian a una respuesta de tipo A, mientras que 2 alumnos (5%) persisten o cambian a una respuesta de la clase B. Luego, es clara una tendencia hacia las respuestas de clase A, que están más próximas al objeto matemático.

4.5. Análisis de la tarea “lista numérica”

En este apartado presentamos las categorías de respuesta a la tarea “lista numérica”. En primer lugar, observamos en la tabla 4-19 un alto porcentaje de alumnos que no responden a la cuestión de generalización lejana (S2). Tal porcentaje es mayor en los niveles que no han recibido instrucción previa sobre progresiones aritméticas que en los que sí han recibido tal instrucción. Si comparamos la tabla 4-19 con la tabla 4-20, observamos que todas las respuestas bajo la categoría L2 son del tipo L2a en los niveles con instrucción previa en progresiones aritméticas. Sin embargo, es superior el porcentaje de alumnos que en COU utilizan la categoría L1 y bastante alto en 3ºBUP.

Tabla 4-19: Esquemas y categorías en la Lista numérica (Cuestión S2: Generalización lejana, en %)

Esquema	**R**		**W**			**L**			**n.c.**
Categoría	**RD**	**RS**	**W1**	**W2**	**W3**	**L1**	**L2**	**L3**	
8ºEGB(13-14)	0	0	23	2	2	2	2	0	71
4ºESO(15-16)	0	0	10	6	0	11	13	0	60
1ºBUP(14-15)	0	3	17	10	3	5	20	0	41
2ºBUP(15-16)	0	0	2	6	4	0	71	0	17
3ºBUP(16-17)	0	5	0	3	3	15	27	0	32
COU(17-18)	0	2	2	5	3	26	7	0	28
Categoría	0	2	9	5	2	10	15	0	43
Esquema	2		17			38			43

Llama la atención el bajo porcentaje (decreciente según se avanza en nivel educativo) de alumnos de 3ºBUP y COU que utilizan el conocimiento adquirido sobre progresiones aritméticas, tal y como se puede observar en la Tabla 4-20. Resaltamos el hecho de que ningún alumno de 3ºBUP y COU utilice tal conocimiento en el problema de la escalera y sí en el del árbol de Navidad. Es posible que los alumnos al enfrentarse a la segunda tarea hayan reconocido tal situación como una de progresiones aritméticas al comprobar que el paso de un objeto al siguiente siempre se realiza añadiendo la misma cantidad de elementos constituyentes. Puede ser debido al contexto, pues en la enseñanza tradicional de las progresiones aritméticas en el BUP, la mayoría de los ejercicios son puramente numéricos o no suelen ir acompañados de dibujos que los ilustren. Sin embargo, al llegar al problema de la lista numérica, similar a los problemas utilizados para la instrucción en progresiones aritméticas, los alumnos de 2ºBUP, de forma mayoritaria, utilizan tal conocimiento aprendido. Este es un claro ejemplo de comportamiento procedimental, en el sentido en que los alumnos han asimilado la situación dada al esquema conceptual de las progresiones aritméticas. Sin embargo, tal esquema se muestra débil con el paso del tiempo, pues según se avanza en nivel, el uso del conocimiento adquirido disminuye en porcentaje, tal y como se muestra en la Tabla 4-20.

Tabla 4-20: Categoría L2a (en %)

	E4	E5	A1	A2	S2
2ºBUP	33	33	46	46	71
3ºBUP	0	0	10	8	27
COU	0	0	2	3	7

4.6. Transición entre las tareas con dibujo y la "lista numérica"

La baja consistencia entre los dos problemas de contexto (44% en la población total) nos plantea un problema a la hora de decidir si conviene estudiar y cómo la consistencia entre los problemas de contexto y el problema de la lista numérica. La importancia de esta consistencia radica en que para muchos alumnos, aquellos que han estudiado progresiones aritméticas, el problema es o debería ser un problema familiar. Por esta razón hemos agrupado a los alumnos según hayan estudiado anteriormente progresiones aritméticas o no y hemos decidido estudiar solamente las transiciones hacia categorías lineales de respuesta, en la cuestión de generalización lejana de la Lista Numérica.

Tabla 4-21: Transición entre Escalera - Arbol y Lista Numérica

Sin instrucción en p.a. (8º, 4º y 1º)				Con instrucción en p.a. (2º, 3º y COU)			
	L1	**L2**	**n.c.**		**L1**	**L2**	**n.c.**
L1	12	6		L1	5	3	
L2		9		L2	3	22	2
L3		3		L3	1		
L1-L2	6	21	6	L1-L2	5	11	
L1-L3			3	L1-L3	2	2	
L3-L2			3	L3-L2	2	4	1
W-L1	3	6		W-L1	1	2	
W-L2	3	3		W-L2	2	19	3
L1-W	3			L1-W			
L2-W		3		L2-W			
L1-n.c.		3		L1-n.c.			
n.c.-L1		3		n.c.-L1			
n.c.-L2		3		n.c.-L2	2	1	2
n.c.-L3	3			n.c.-L3			
W				W		9	
	29	59	12		22	71	7

La tabla 4-21 recoge, en porcentajes, el cambio de categoría al considerar por un lado los problemas de la escalera y el árbol de Navidad y por otro lado el problema de la lista numérica. La población considerada bajo alguna de las clasificaciones mostradas en la tabla 4-21, fue de 34 alumnos en el agrupamiento 8º EGB, 4ºESO y 1ºBUP (alumnos sin previa instrucción en progresiones aritméticas) y de 111 alumnos para el agrupamiento 2ºBUP, 3ºBUP y COU (Los porcentajes se refieren a las poblaciones reducidas). Las expresiones con dos estrategias, por ejemplo L1-L2, significan que el alumno ha utilizado la primera estrategia para el problema de la escalera y la segunda estrategia en el problema del árbol de Navidad, L1 y L2 respectivamente.

La importancia de la tarea lista numérica radica en que nos permite comprobar, sin la presencia de un dibujo, los esquemas de las acciones desarrolladas sobre la sucesión numérica (ámbito numérico).

Esquema para L1

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 \quad . \; . \; . & 100 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6\times1\text{-}2= \mathbf{4} & 6\times2\text{-}2= \mathbf{10} & 6\times3\text{-}2= \mathbf{16} & 6\times100\text{-}2 = \mathbf{598} \end{array}$$

Esquema para L2

$$4 \xrightarrow[+6]{} 10 \xrightarrow[+6]{} 16 \xrightarrow[+6]{} 24 \quad . \; . \; . \quad 6\cdot(100\text{-}1)\text{+}4 = \mathbf{598}$$

En el primer esquema hay que "ensayar" con las posiciones de los respectivos términos de la sucesión hasta encontrar la expresión 6n - 2. En el segundo esquema hay que contar el número de "espacios" que separan el término requerido del primer término, para así determinar el número de veces que hay que sumar 6 al primer término, 4, para obtener 598. Los datos parecen indicar que la segunda categoría (L2) es más accesible a los alumnos que la primera (L1).

4.7. Conclusiones y conjeturas derivadas del primer estudio

El marco teórico de la generalización operativa se ha mostrado muy útil en nuestra interpretación de la actividad de los alumnos. En primer lugar nos ha permitido determinar elementos importantes del proceso de generalización desarrollado por los alumnos al enfrentarse a problemas de generalización lineal. Hemos particularizado la noción de acción, esquema de la acción e invariante para este tipo de tareas. Por otro lado, la consistencia en las respuestas sirve como signo necesario de la comprensión, en cuanto que el establecimiento de un invariante, así como la generalización correspondiente, mostrado por los alumnos en las respuestas escritas, en expresiones para el cálculo y explicaciones, aporta signos evidentes de comprensión de las tareas.

La información obtenida sobre las expresiones para el cálculo nos permite profundizar en la clasificación original empleada por Stacey. Fijándonos en la estructura para el cálculo y en las explicaciones dadas en las diferentes cuestiones, hemos definido varias categorías de respuestas que se enmarcan en diferentes esquemas conceptuales.

Los esquemas conceptuales a los que los alumnos asimilan las diferentes situaciones son, en una primera clasificación: números (recuentos directos, operaciones básicas de la aritmética y del álgebra), proporcionalidad directa, progresiones aritméticas y función entera. En tales esquemas conceptuales, y bajo la definición adoptada, están presentes hechos, procedimientos, conceptos y situaciones (estímulos) que hemos de explicitar en todo aquello que seaa relevante para la costrucción del esquema conceptual de pauta lineal.

Hemos señalado la importancia de los dos ámbitos en que se desarrollan las acciones, aunque debido a la parquedad de explicaciones de los alumnos sólo hemos podido avanzar en el papel que juega el ámbito visual-geométrico, en sus acciones y esquemas de la acción. Por otro lado, las explicaciones muestran un carácter dinámico o estático, aunque cabe hacernos la pregunta de sí será así durante el proceso de generalización: ¿la imagen de los objetos que construyen los alumnos es dinámica, estática o ambas cosas a la vez?

Las acciones sobre la sucesión numérica no son tan explícitas, pues en los cálculos los alumnos no dan suficiente información y se limitan a señalar determinados hechos numéricos. En este sentido creemos que es necesaria una ulterior investigación.

Hemos caracterizado la noción de estrategia visual y numérica. Pero debido a las limitaciones impuestas por la prueba, cabe hacernos la siguiente conjetura: ¿combinan los dos tipos de estrategia durante el proceso de generalización los alumnos?

4.7.1 Respecto del esquema de descomposición génetica de la pauta lineal

En primer lugar, en la construcción del esquema conceptual de pauta lineal aparecen dos procesos numéricos importantes, como son la iteración y la recursión. Además, consideramos que el aspecto recursivo es una generalización (entificación) del proceso iterativo y que ambos coexisten en el esquema formado por los alumnos, siendo manifestados ambos procesos mediante comportamientos que denominados *comprensión procedimental iterativa* y *compresión procedimental recursiva*.

Por otro lado existe un esquema más general que denominamos *números y operaciones* que contiene las correspondientes nociones y procesos que han aprendido los alumnos en cursos anteriores y que en estas situaciones utilizan para realizar tareas de recuento directo o indirecto, siendo así que el cálculo no es sino una prolongación, en el pensamiento del sujeto, de la enumeración efectiva, es decir un medio indirecto de contar. Dentro de tal esquema están las nociones o conceptos de número ordinal y número cardinal.

También está presente un esquema de *función entera*, como procedimiento, en el que a cada número natural (ordinal) se le asocia un término en la sucesión (cardinal) y cuya manifestación más clara son las estrategias bajo el esquema lineal.

4.7.2. Respecto de los signos de comprensión de las tareas

Los alumnos son consistentes dentro de un mismo problema en el uso de la estrategia, pero no así al cambiar de problema. Tal consistencia determinaría un tipo de calificación distinta. Así, la consistencia en la estrategia la denominamos comprensión conceptual, mientras que la no consistencia como actividad procedimental.

Por otro lado el empleo del conocimiento adquirido sobre las progresiones aritmética es notable en el nivel de 2º BUP y disminuye en los niveles posteriores, lo cuál indica que el esquema cognitivo relativo a las progresiones aritméticas de tales alumnos no es un esquema estable.

El uso amplio del esquema de proporcionalidad directa se observa en el alto porcentaje de estrategias tipificadas como W, y que claramente consideramos como una muestra del comportamiento cognitivo alfa, que aquí se constata por el uso de tales estrategias incorrectas y por la generalización de tales estrategias. Lo cual debemos calificar como de actividad procedimental. Sin embargo, esta no queda reducida al empleo de tales estrategias erróneas, sino que debemos ampliar tal calificación a las respuestas en las que los alumnos cambian de estrategia al pasar de una cuestión a otra dentro de un mismo problema.

La consistencia entre los dos problemas de contexto nos llevaría a considerar tal comportamiento como de construcción efectiva y refuerzo del esquema emergente y que denominamos lineal. Tal consistencia podría ser considerada como signo necesario de comprensión conceptual.

4.7.3. Respecto de la actuación de los alumnos según nivel educativo

Las respuestas bajo el esquema conceptual de proporcionalidad directa disminuye con la edad y el nivel educativo. Este es un signo necesario del abandono de la actividad procedimental y de asimilación de las nuevas tareas a esquemas conceptuales correctos. En este sentido los alumnos reorganizan sus esquemas cognitivos para acomodar la nueva situación y de tal asimilación-acomodación surge el esquema lineal. De hecho el mayor porcentaje de respuestas bajo este esquema aumenta con el nivel educativo. El esquema de progresiones aritméticas se muestra débil, pues es utilizado decrecientemente según nivel educativo por los alumnos. El alto porcentaje de respuestas de tipo lineal-visual dentro de las respuestas lineales indica que los alumnos utilizan sus esquemas conceptuales acomodándolos a la nueva situación, elaborando estrategias personales de solución.

4.7.4. Conjeturas y preguntas

A la vista de los resultados de este primer estudio podemos formular ciertas conjeturas y plantearnos algunas preguntas.

En primer lugar, relativas a las acciones. De las explicaciones de los alumnos, se induce que realizan acciones sobre el dibujo. Pero tales acciones sólo son una conjetura. No tenemos evidencia clara sobre el tipo de acciones, sino más bien indicios. Por otro lado, las acciones sobre la sucesión numérica, también se inducen, a partir de ciertos esquemas explicativos aportados por los alumnos. Sin embargo, cabe preguntarse si habrá diferencia entre la explicación y la ejecución de una acción particular. En otras palabras, ¿las explicaciones escritas de los alumnos reflejan suficientemente la actividad que han desarrollado sobre las tareas?. Pues bien, creemos que la contestación a esta pregunta es negativa. Es plausible considerar que los alumnos realizaran acciones exploratorias en ambos ámbitos hasta decidirse por uno de ellos. En este sentido, cabría plantear otro tipo de estrategia que sería mixta, uso del dibujo y de la sucesión numérica.

También cabe formular alguna conjetura respecto de los invariantes establecidos. Nuestra conjetura es que bastaría con aplicar la misma regla para el cálculo a dos cuestiones, al menos, dentro de una misma tarea para considerar que se ha establecido un invariante. Sin embargo, deberíamos contar con alguna otra evidencia sobre la actividad de los alumnos al establecer tales invariantes. Por ejemplo, ¿de qué acciones se derivan?, ¿corresponde un único invariante a una única acción? ¿Qué confianza muestran los alumnos en su actividad?. Una vez realizado un cálculo correcto en una cuestión, cuándo aplican la misma regla a otra cuestión dentro de la misma tarea, ¿muestran confianza? ¿dudan? ¿cómo resuelven sus dudas?

En relación a la comprensión, la consistencia en la estrategia la hemos considerado como muestra o signo necesario de comprensión conceptual. ¿En qué elementos de la tarea fijan la atención los alumnos para mantener la misma estructura de cálculo? ¿Cambian los alumnos de ámbito? Es decir, en una tarea el ámbito de actuación puede ser el dibujo y en la siguiente la sucesión numérica manteniendo la misma estructura para el cálculo. ¿Es esto posible? ¿Cómo tener evidencia de comprensión procedimental que discrimine esta, de la comprensión conceptual?

Estas cuestiones, nos llevaron a plantear un segundo estudio, en el que la recogida de datos se realizará mediante entrevistas semiestructuradas.

Capítulo 5

Estudio Segundo. Entrevistas

5.1. Introducción

Este estudio ha sido llevado a cabo para complementar los hallazgos del primer estudio y profundizar en el proceso de generalización y comprensión de las tareas por los alumnos.

El primer estudio suministró dos tipos de datos: las explicaciones escritas y las estructuras de los cálculos realizados en cada tarea. Aunque un análisis minucioso de tales explicaciones y estructuras nos permite avanzar en la determinación de elementos claves del proceso, surgen algunas dudas y conjeturas sobre el mismo.

Respecto de las acciones y esquemas de la acción, hemos visto que algunas explicaciones inducen a pensar que los alumnos han imaginado los objetos como creciendo a partir de uno de sus elementos y apoyándose en los dibujos presentes en la tarea. Otros alumnos parece que contemplan el objeto de forma estática y realizan una partición de sus elementos. Es decir, los alumnos utilizan explicaciones dinámicas y estáticas del esquema de la acción. Aquí surge la primera cuestión a investigar: ¿Son las imágenes estáticas o dinámicas durante el proceso de generalización? O de forma más precisa: ¿Son diferentes las explicaciones verbales de las escritas? ¿Podemos mediante entrevistas semiestructuradas determinar de forma más precisa el carácter de las imágenes que utilizan los alumnos?

Respecto del ámbito donde se desarrollan las acciones, ¿son excluyentes los ámbitos visual-geométrico (dibujo) y numérico (sucesión numérica)?. ¿Utilizan ambos ámbitos los alumnos?. En este sentido, ¿podemos hablar de sólo dos tipos de estrategias?

Respecto del establecimiento de un invariante, en el estudio anterior consideramos como signo necesario del establecimiento de un invariante, el hecho de que un alumno utilice, al menos dos veces en una misma tarea, la misma estructura para el cálculo (regla). ¿Es suficiente tal criterio? ¿Por qué determinados alumnos utilizan una regla para el cálculo en una cuestión y cambian a otra regla en la cuestión siguiente? Consideramos tal actuación como signo claro de que el alumno no ha establecido un invariante y por lo tanto no ha realizado una generalización.

Respecto del proceso de resolución de las tareas, ¿qué dudas les surgen al abordar las cuestiones dentro de una tarea? ¿Cómo las resuelven? ¿Qué induce a un alumno a abandonar una estrategia de solución incorrecta y abordar una correcta? ¿Son conscientes los alumnos de las similitudes de las tareas? ¿Por qué cambian de estrategia correcta a otra también correcta al abordar una nueva tarea?

Para avanzar en nuestro estudio y encontrar respuestas, en lo posible, a las dudas y conjeturas que hemos enumerado, nos planteamos los siguientes objetivos, en este segundo estudio.

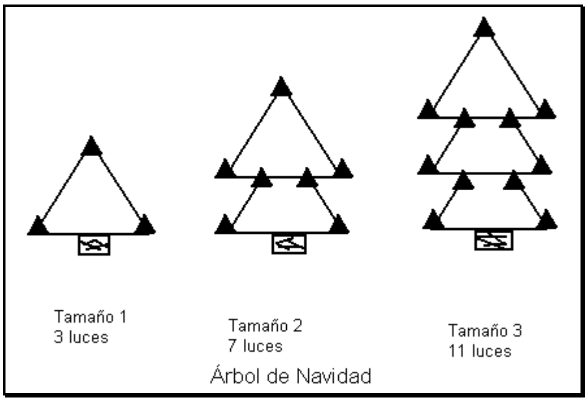
1. *Profundizar en las acciones y los invariantes según los diferentes ámbitos de la tarea.*
2. *Caracterizar cuándo un alumno ha establecido un invariante, es decir, cuándo se ha producido una generalización así como su cualidad*
3. *Especificar, en detalle, el papel jugado, en el proceso, por los diferentes ámbitos de la tarea.*
4. *Caracterizar la estrategia de solución en este tipo de problemas.*
5. *Elaborar el esquema de descomposición genética del concepto de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal.*

5.2. Metodología

Esta fase de nuestra investigación se ha centrado en el nivel de 4ºESO del Instituto de Enseñanza Secundaria Domingo Pérez Minik, en La Laguna. La razón principal por la que hemos elegido tal nivel y centro es porque el autor es profesor de matemáticas de ese nivel en ese centro, lo que facilita la tarea en esta fase de la investigación, así como en la siguiente (capítulo 6). Con respecto al alumnado hemos de señalar que en el curriculum de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria se considera como un criterio de evaluación al final de la etapa, es decir, en 4º ESO, "Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones conocidas en conjuntos de números..." (Currículo de la ESO, 1996, p.108). Por otro lado, la heterogeneidad del alumnado permite disponer de una población con amplias variaciones en cuanto a la capacidad matemática de los mismos, así como de su interés y actitud hacia la materia.

5.2.1. Prueba escrita

Con el objetivo de disponer de suficiente información sobre cómo se enfrentarían estos alumnos a problemas de generalización lineal, se pasó una prueba escrita al total de 168 alumnos de 4ºE.S.O. del referido Instituto. Para 132 alumnos, la prueba consistió en una versión ligeramente modificada del problema del árbol de Navidad, con las luces no alineadas, ya visto en el capítulo anterior, ya que se han añadido cuestiones introductorias y una acerca del tamaño *n.* La razón de elegir tal problema es que los alumnos del estudio primero mostraron en la realización del mismo una mayor variedad de respuestas, así como un mayor número de respuestas correctas. La prueba quedó de la forma siguiente:



1) ¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 4?
2) ¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 5?
3) ¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 10?
4) ¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 20?
5) ¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño n?
Explica tus respuestas.

(figura 5.1)

Con el fin de estudiar las estrategias numéricas, basadas en la sucesión numérica, para 36 alumnos la prueba consistió en una versión del problema del árbol de Navidad sin dibujo y con el siguiente texto:

Ana y Juan van a colocar el árbol de Navidad. En el cuaderno de instrucciones encuentran lo siguiente: un árbol de tamaño 1 necesita 3 luces, un árbol de tamaño 2 necesita 7 luces y un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces. Para ayudar a Ana y a Juan responde a las siguientes cuestiones:
1) *¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 4?*
2) *¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 5?*
3) *¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 10?*
4) *¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño 20?*
5) *¿Cuántas luces son necesarias para un árbol de tamaño n?*

Explica tus respuestas.

Los resultados de los alumnos se clasificaron de acuerdo a los criterios establecidos en el primer estudio en cuanto a la respuesta escrita se refiere. La Tabla 5-1 recoge los resultados globales, en porcentajes, de la prueba referidos a cada cuestión (las introductorias se agruparon) y a cada categoría de respuesta.

Tabla 5-1. Resultados Globales en %

	Rs	*Rd*	*W1*	*W2*	*W3*	*L1*	*L2*	*N.C*
f(4) y f(5)	85	6	0	0	6	3	1	0
f(10)	15	6	1	17	17	9	20	14
f(20)	13	0	1	20	17	9	19	22
f(n)	0	0	1	0	15	9	10	66
Totales		31			24		20	25

La última fila recoge, también en porcentajes, las respuestas dadas a lo largo de la prueba clasificadas por esquema conceptual subyacente a cada categoría.

En primer lugar se observa que el esquema conceptual más utilizado a lo largo de la prueba es el de Recuento directo, seguido del esquema de proporcionalidad directa, siendo alto el número de respuestas no clasificadas o dejadas en blanco (columna N.C.). Un 66% de alumnos no responden a la cuestión 5), donde se les pedía una expresión algebraica para el cálculo efectuado. Observamos además que las categorías de respuesta lineal son de dos tipos, la funcional L1 y la funcional- recursiva L2, no habiéndose dado ninguno caso respuestas de la categoría L3 señalada en el primer estudio.

La Tabla 5-2 presenta los mismos datos, pero referidos a la prueba con dibujo (132 alumnos) mientras que la Tabla 5-3 se refiere a la prueba sin dibujo (36 alumnos).

Tabla 5-2. Prueba con dibujo (132 alumnos) Resultados %

	Rs	*Rd*	*W1*	*W2*	*W3*	*L1*	*L2*	*N.C*
f(4) y f(5)	85	8	0	0	4	3	1	
f(10)	12	8	2	20	14	11	23	11
f(20)	11	0	1	23	14	11	21	18
f(n)	0	0	1	0	14	11	11	63
Totales		31			23		23	23

Tabla 5-3. Prueba sin dibujo (36 alumnos) Resultados (en %)

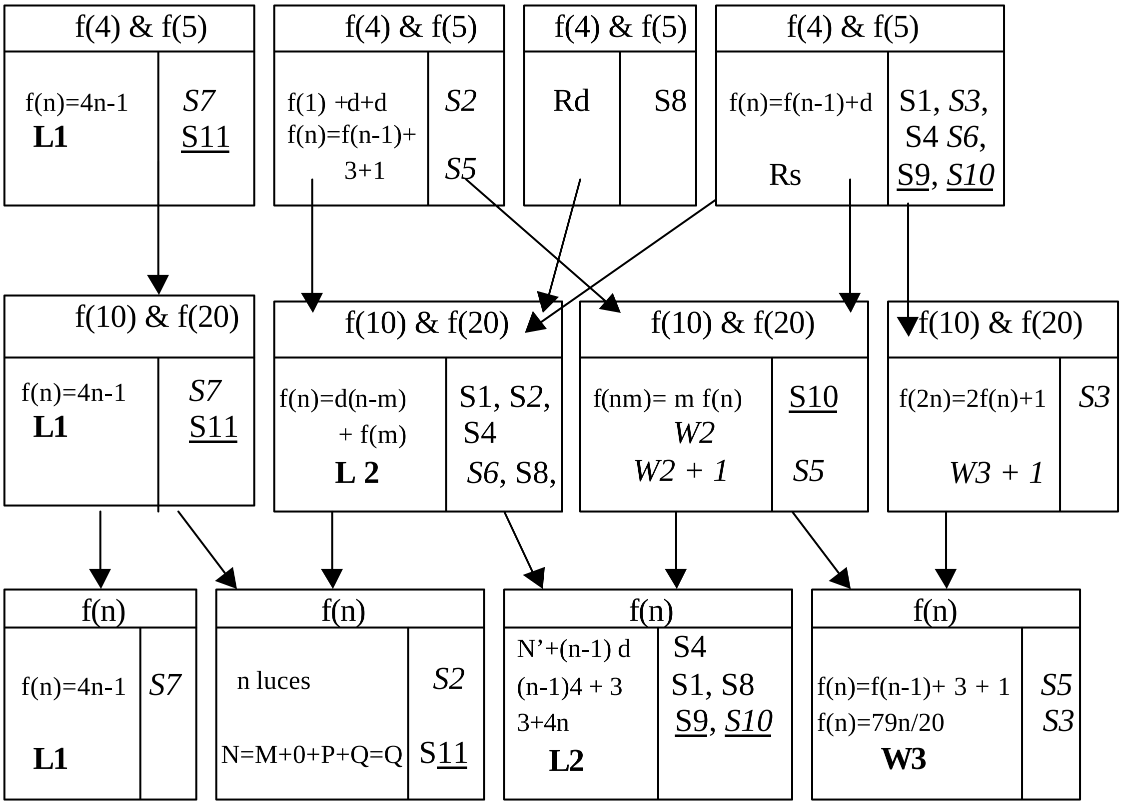
	Rs	*Rd*	*W1*	*W2*	*W3*	*L1*	*L2*	*N.C*
f(4) y f(5)	83	0	0	0	14	3	0	
f(10)	28	0	0	6	28	3	11	25
f(20)	19	0	0	6	25	3	11	36
f(n)	0	0	0	0	17	0	6	78
Totales		33			24		9	35

Los porcentajes son muy parecidos, casi similares en los totales, salvo para las respuestas dentro del esquema lineal. Llama también la atención el mayor porcentaje de respuestas no clasificables o no contestadas en la prueba sin dibujo, frente a la prueba con dibujo. Esto podría ser una indicación de que los alumnos encuentran más asequible la prueba con dibujo que sin dibujo, lo cuál nos llevaría a reforzar nuestra conjetura de que el dibujo juega un papel importante en cuanto a que facilita en los alumnos el desarrollo de estrategias de resolución correctas, es decir del tipo lineal. Otro dato a tener en cuenta es el bajo porcentaje de estrategias L1 en la prueba sin dibujo comparado con el porcentaje obtenido en la prueba con dibujo.

5.2.2. Selección de los 11 alumnos para las entrevistas

A partir de las respuestas dadas por los alumnos se eligieron once alumnos para ser entrevistados. Las respuestas de esos alumnos las presentamos utilizando un instrumento que hemos desarrollado para visualizar las transiciones de una cuestión a otra a lo largo de la prueba y que denominamos *Grafo para visualizar transiciones (GVT)* (García Cruz y Martinón, 1997a).

Grafo para visualizar transiciones en el problema del árbol de Navidad.



(Nota: Los alumnos subrayados corresponden a la prueba sin dibujo, los alumnos en cursiva son del sexo femenino).

Los once alumnos fueron elegidos por la variedad y calidad de sus respuestas escritas, pues nos interesaba obtener información sobre el proceso seguido en el desarrollo de las diferentes estrategias, lo que incluye también a las estrategias incorrectas. De los once alumnos seleccionados, ocho (alumnos S1 a S8) se les suministró la versión del problema del árbol de Navidad con dibujo, mientras que los tres alumnos restantes (alumnos S9, S10 y S11) se les suministró la versión sin dibujo.

A continuación detallamos las respuestas dadas por los alumnos y los diagnósticos efectuados antes de las entrevistas.

Alumno S1
Para los tamaños 4 y 5 responde "*15 luces*" y "*19 luces*", respectivamente.
Tamaño 10: " *39 luces, ya que un árbol de tamaño 1 necesita 3 luces y por cada tamaño que se le añada son 4 luces más. 9·4 Þ 36 +3 = 39 luces*".
Tamaño 20: " *19·4 = 76   76+3 = 79 luces*".
Tamaño n: *((n-1)·4)+3*
Diagnóstico: Categoría L2. No se deduce de las respuestas si ha utilizado el dibujo o los datos numéricos. Sin embargo, en la explicación se hace una observación claramente dinámica "*... por cada tamaño que se la añada…?*

Alumno S2
Para los tamaños 4 y 5 responde: " *15 luces. El primer árbol tiene 3 luces y el resto 4. 3+4+4+4 = 15 luces*", " *19 luces. 3+4+4+4+4 = 19*", respectivamente.
Tamaño 10: " *39 luces. 3+4´ 9 =3+36=39 luces. 1 árbol (*dibuja un triángulo*) tiene 3 esquinas, lleva 3 luces al unirse con otro árbol (*dibuja un triángulo y un trapecio debajo, unidos ambos) *las esquinas son siete. Si unes los 10 árboles da a 39 luces*".
Tamaño 20: " *79 luces. 3+4´19 = 3+76 =79*".
Tamaño n: " *n luces*".
Diagnóstico: Categoría L23. La explicación, dentro de la cuestión relativa al tamaño 10, hace clara referencia al dibujo. La explicación parece dinámica, pues el alumno utiliza la expresión "*al unirse con otro árbol*", como si los árboles estuvieran dispuestos espacialmente y cada uno se formara por agregación de otros dos.

Alumno S3
Para los tamaños 4 y 5 responde: " *necesitaría 15 luces. Contando 3 árboles y uno más*"," *necesitaría 19 luces*" respectivamente.
Tamaño 10: Presenta el esquema de uso de la Regla de Tres. Utiliza el resultado del tamaño 5, 19 luces, para calcular el de tamaño 10. Sin embargo, al resultado 38 le suma 1. "*39 luces, utilizando la regla de tres*".
Tamaño 20: Igual que el anterior. Utiliza el resultado 39 para plantear el esquema y al resultado 78 le suma 1. "*79 luces utilizando la regla de tres*".
Tamaño n: Igual. Utiliza el resultado 79 para plantear el esquema con n y x. Deja una fórmula:
"*x = n·79/20x = 79n/20x. Realizando una regla de tres*".
Diagnóstico: W3 (?). El esquema conceptual subyacente es el de proporcionalidad directa. Sin embargo, a los resultados obtenidos mediante la regla de tres les suma 1, obteniendo así resultados correctos en las cuestiones relativas al tamaño 10 y 20. No hay indicación relativa al dibujo. Un objetivo claro de la entrevista será determinar cómo se le ocurrió a este alumno, que tendría que sumar una unidad, al resultado obtenido aplicando la Regla de Tres a la tarea.

Alumno S4
Para los tamaños 4 y 5 responde "*15 luces.- Porque veo que la diferencia de luces entre el árbol de tamaño 1 y el 2 son 4 luces y que esta diferencia se repite del 2 al 3*" y "*19 luces.- Siguiendo el razonamiento anterior*", respectivamente.
Tamaño 10: " *Serían 39, árbol tamaño 10 =3+(10-1)·4*".
Tamaño 20: "*árbol tamaño 20 = 3 + (20-1)·4*".
Tamaño n: "*árbol tamaño n =* N_1 *+(N-1)·D*
D = Diferencia
N_1 *= Primer árbol*"
Diagnóstico: L2. La explicación no hace referencia alguna al dibujo, parece que

la estrategia es numérica. La expresión dada para el tamaño n, induce a pensar que este alumno ha recibido instrucción previa en progresiones aritméticas. Sin embargo, la notación empleada no es la estándar al uso.

Alumno S5

Para los tamaños 4 y 5 responde *"Un árbol de tamaño 4 necesita 15 luces porque sumando el nº de luces que tiene el árbol anterior + el nº de luces del primer árbol + 1 es igual al nº de luces que necesita"* y *"19 luces porque sumando el nº de luces que tiene el árbol anterior + el nº de luces del primer árbol + 1 es igual al nº de luces que necesita"*, respectivamente.
Además añade a la explicación lo siguiente "
Ejemplo: Un árbol de tamaño 6.
árbol de tamaño 5 = 19 luces.
árbol de tamaño 1 = 3 luces.
19 +3+1 = 23 luces necesita un árbol de tamaño 6".
Tamaño 10: " *necesita 39 luces* (debajo*) porque si uno de 5 necesita 19 luces* (debajo suma en vertical) *19 + 19 = 38 +1 = 39 luces que necesita uno de 10".*
En la explicación hay semiborrado lo siguiente
31 ---- 8
4
35 ---- 9
4
39 ---- 10.
Tamaño 20: " *si un árbol de tamaño 10 necesita 39, 39+39 = 78 +1 = 79 luces que necesita".*
Tamaño n: " *x + 3 + 1 = luces que necesita un árbol de tamaño n,*
x = nº de luces de un árbol un nº menor a n".
Diagnóstico: W2 (?). Al igual que el caso anterior interesa determinar cómo se le ocurrió añadir una unidad a los resultados. El ejemplo adicional aportado en las cuestiones introductorias podría señalar al dibujo como medio para el desarrollo de la estrategia, o por lo menos como punto de partida, dado que parece ser que el alumno considera que el árbol de tamaño 6 es una suma física de los árboles de tamaño 5 y 1 más una luz. Esto último corresponde con la simbolización dada en la cuestión relativa al tamaño n. Sin embargo, para los árboles de tamaño 10 y 20 utiliza la categoría de respuesta W2.

Alumno S6

Para los tamaños 4 y 5 responde " *Un árbol de tamaño 4 necesita 15 luces. Porque del árbol 1 al árbol 2 siempre se le añaden 4 luces. Por eso en un árbol de tamaño 3 tiene 11 luces, si se le añaden 4 luces te dan las luces del árbol de tamaño 4"* y " *Un árbol de tamaño 5 necesita 19 luces. Es el mismo razonamiento que la pregunta 1".*
Tamaño 10: " *Un árbol de tamaño 10 necesita 39 luces. Si un árbol de tamaño 5 necesita 19 luces, un árbol de tamaño 10 necesita 20 luces más".*
Tamaño 20: " *Un árbol de tamaño 20 necesita 79 luces. Si un árbol de tamaño 10 tiene 39 luces el árbol de tamaño 20 necesita 40 luces más".*
Tamaño n: *"N = X " (*sigue algo que ha tachado y es ilegible*).*
Diagnóstico: L2. Aunque la expresión es recursiva y por lo tanto L2, se trata de la variante en que $m \neq 1$, es decir, no se recurre al valor del primer término sino al último calculado. No hay indicaciones de que se haya utilizado el dibujo.

Alumno S7

Para los tamaños 4 y 5 responde: "*1 ® 3, 2 ® 7, 3 ® 11, 4´ 4 = 16 -1 = 15, 4 ® 15 luces.* (Sigue algo borrado pero distinguible, corresponde a cálculos que inducen a pensar que inicialmente sumo cuatro sucesivamente: *3 + 4 + 4 + 4 =*

15 luces ”)
“*19 luces. El mismo razonamiento que en el 1º he seguido. Multiplico la medida por 4 y le resto 1.*
Ejemplo: 15 ´ 4 = 60 - 1= 59. Es lo mismo que a medida que aumenta 1 le sumamos 4. (sigue una secuencia desde 1 → 3 luces hasta 15 → 59 luces*)* ”.
<u>Tamaño 10</u>: “ *39 luces. 10 ´ 4 = 40 - 1 = 39*”. (borrado pero distinguible tenuemente hay un cálculo de las luces necesarias usando el esquema de regla de tres),
<u>Tamaño 20</u>: “ *79 luces. 20 ´ 4 = 80 - 1 = 79*”.
<u>Tamaño n</u>: “ *n ´ 4 = 4n - 1*”
<u>Diagnóstico</u>: L1. Parece ser que inicialmente intentó resolver la cuestión relativa al tamaño 10 utilizando la regla de tres, sin embargo, algo le hizo cambiar de idea. El procedimiento iterativo, aparece borrado en las cuestiones introductorias, y después utilizado, para apoyar el ejemplo en que ilustra el uso de la regla para el cálculo del número de luces del árbol de tamaño 15. No hay indicación de que se haya apoyado en el dibujo.

<u>Alumno S8</u>
Para los tamaños 4 y 5 responde: “*Necesita 15 luces, porque tendría cuatro luces en la primera planta y, en la segunda...* (tachado*), hasta llegar a la cuarta que tendría 3, porque acaba en forma triangular*” (se acompaña de un dibujo del árbol de tamaño cuatro).
“ *Necesita 19 luces, (~~al aumentar su tamaño~~)*” (Se acompaña de un dibujo del árbol de tamaño cinco).
<u>Tamaño 10</u>: “ *Un árbol de tamaño 10 necesitaría, 9·4=36+3=<u>39</u>.*
39 luces. tendría 4 luces en cada parte, menos en la última que tendría 3”
<u>Tamaño 20</u>: “ *Necesitaría, 19·4=76+3=79* (recaudrado 79) *luces. Por que serían 19 partes con cuatro luces, y la última con 3.*”.
<u>Tamaño n</u>: “ *(n-1)· 4 + 3* (debajo*) por que a n se le quita una parte, que sería la última que tiene 3 luces, y luego se le sumaría,*”
Diagnóstico: L23. Hay referencias claras al dibujo en el desarrollo de la estrategia. Sin embargo, la explicación parece una mezcla de estática y dinámica. En primer lugar habla de plantas como si imaginara el dibujo completo y luego introduce el término “*hasta llegar a la cuarta*” que le confiere un cierto carácter dinámico.

A los anteriores ocho alumnos se les pasó la prueba con dibujo. Sólo dos muestran en sus explicaciones que han utilizado el dibujo en el desarrollo de su estrategia, por lo menos en la explicación dada. Tenemos cinco respuestas recursivas (L2) y una funcional (L1) entre las correctas. Por otro lado, tenemos dos alumnos, S3 y S5, que asimilan la tarea al esquema de proporcionalidad directa (W3 y W2) y acomodan el esquema para producir reglas cuyos resultados son correctos para los datos de las tareas, pero no en general.

Los tres alumnos siguientes corresponden a la prueba sin dibujo.

<u>Alumno S9</u>
Para los tamaños 4 y 5 responde “*Siguiendo la gráfica, un árbol de tamaño 4 necesitará 15 luces, cosa que se podría deducir por lógica siguiendo los datos, siendo incrementadas en 4 luces los diferentes tamaños correlativos*”
“*Utilizando la gráfica y siguiendo la deducción del ejercicio anterior, se necesitan 19 luces para un árbol de tamaño 5*”.
Se incluye un diagrama cartesiano, en el que se ha dibujado una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.
<u>Tamaño 10</u>: “ *Siguiendo el aumento progresivo de 4 unidades por tamaño se necesitan 39 luces*”.
<u>Tamaño 20</u>: “ *se necesitan 79 luces*”.

Tamaño n: *" luces = 3 + (n·4)"*
Diagnóstico: L2. La expresión final, cuestión tamaño n, corresponde a L2 con un error en la variable. El diagrama cartesiano mostrado en las cuestiones introductorias induce a pensar que fue realizado con los datos numéricos aportados en el texto, sin embargo la gráfica la hace pasar por el origen de coordenadas. Por otro lado, el alumno no explica cómo ha obtenido los valores correspondientes a los tamaños 10 y 20, se limita a consignar los resultados.

Alumno S10
Para los tamaños 4 y 5 responde *"Si un árbol de tamaño 2 necesita 7 luces, y un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces. Entonces un árbol de tamaño 4 necesita 4 luces más. 11+4=15 luces necesita. Pues, la diferencia que hay en cada árbol es de cuatro luces cada vez que aumenta el tamaño. Pues se le añade cuatro luces más que al árbol nº4. 15+4=19 luces necesita"*.
Tamaño 10: *"Pues si un árbol de tamaño 5 lleva 19 luces un árbol de tamaño 10 llevará el doble que el de 5. 19·2=38 luces llevará el árbol"*.
Tamaño 20: *"Pues llevará el doble que el árbol tamaño 10. 38·2=76 luces necesita el árbol tamaño 20"*.
Tamaño n: *" Para hayar n y el primer número de luces que necesitaría, solo tienes que hacer una suma o una resta con el número de luces inferior y el 4, n=3 (tamaño 1) +4n."*
Diagnóstico: W2. Las cuestiones de generalización próxima y lejana se contestan con la estrategia W2. Sin embargo, para el tamaño n la expresión corresponde a la estrategia L2, donde se ha cometido un error en la variable.

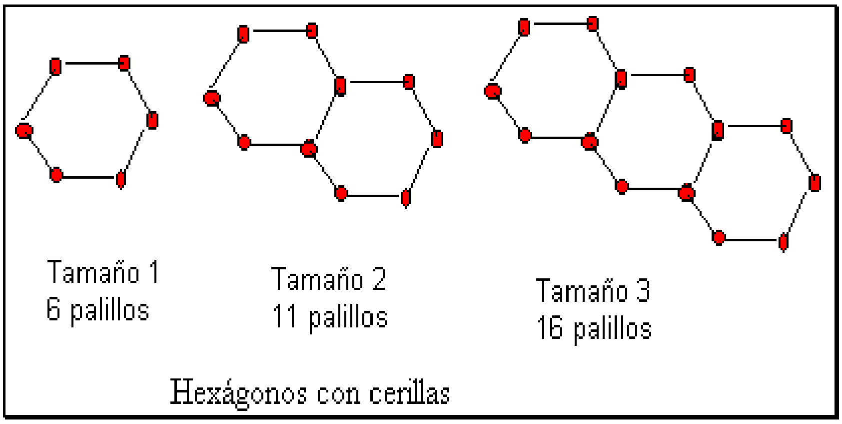
Alumno S11
Para los tamaños 4 y 5 responde *"15 luces. Se multiplica 4´4 y se le resta 1 = 15 luces o se le suma a 11 un 4 = 15 luces. 19 luces. Se multiplica 5´4 = 20 –1=19 luces o se le suma a 15 un 4 =19 luces"*.
Tamaño 10: *"39 luces. Se multiplica 4´10 y se le resta 1 = 39 luces"*.
Tamaño 20: *"79 luces. Se multiplica 4´20 y se le resta 1 = 79 luces"*.
Tamaño n: *"Es Q luces. A N le suman cuatro letras y da = Q. Ejemplo N=M+O+P+Q=Q luces."*
Diagnóstico: L1. En su explicación el alumno utiliza indistintamente la regla general o el proceso iterativo. Tal proceso iterativo se mantiene, aunque pasando de la sucesión numérica a la lista del abcdario, en la cuestión relativa al tamaño n.

Estos tres alumnos presentan tres categorías de respuesta diferentes, una de proporcionalidad directa y dos lineales, correspondiendo las lineales cada una a un tipo distinto según nuestra clasificación.

En conjunto los once alumnos presentan aspectos interesantes en sus respuestas e interrogantes sobre la forma de proceder. La variedad de respuestas y la cualidad de las explicaciones dadas es lo que nos ha llevado a elegirlos para la segunda fase de este estudio.

5.2.3. Las entrevistas

En esta segunda fase, los alumnos son entrevistados según un modelo semiestructurado de entrevista. Por lo tanto, a todos los alumnos no se les formuló exactamente las mismas preguntas, ni la duración de las mismas fue idéntica. Sí hubo un formato previo de cuestionario común para todos los alumnos, que consiste en plantearles cuestiones relativas a sus particulares respuestas a la prueba escrita y una segunda tarea a resolver en presencia del investigador y cuyo formato fue el siguiente:



(figura 5.2)

La primera cuestión de la segunda tarea, a proponer en la entrevista, será calcular el número necesario de cerillas para una cadena de cuatro hexágonos y, a continuación, se le plantearán cuestiones de generalización próxima y lejana. El objetivo de esta segunda tarea es, en primer lugar comprobar *in situ* como resuelven los alumnos el problema y si la estrategia empleada es similar o diferente a la empleada en la prueba escrita. En segundo lugar, obtener información sobre el proceso empleado, así como manifestaciones externas del comportamiento cognitivo de los alumnos.

Las entrevistas fueron grabadas en vídeo. La grabación fue realizada con cámara estática, enfocando hacia un folio dónde el alumno realizaba sus cálculos e incluyendo en el plano la hoja donde se planteaban las cuestiones a realizar. Como luego veremos, la grabación en vídeo aporta datos que de otra forma no se podrían obtener, en concreto acciones y gestos de los alumnos sobre los datos escritos relativos a la ejecución de la tarea propuesta.

5. 3. Acciones e invariantes

En este apartado daremos cuenta, en primer lugar, de las acciones e invariantes establecidos por los alumnos y, en segundo lugar, del tipo de comportamiento cognitivo mostrado en determinadas fases de resolución de los problemas.

En el marco teórico adoptado, el proceso de abstracción y generalización tiene como fuente genética las acciones introducidas por los alumnos sobre los elementos de la situación: dibujo o datos numéricos. El objetivo de tales acciones es determinar el número de elementos *f(n)* correspondiente a un cierto tamaño *n* del objeto. El reflejo de tales acciones se materializa, en el ámbito cognitivo, en el establecimiento de esquemas invariantes. En lo que sigue exponemos las acciones realizadas y los invariantes construidos por los once alumnos, y por lo tanto la lista no debe considerarse exhaustiva.

5.3.1. Acciones y esquemas de la acción

Realizar el dibujo completo del tamaño requerido y contar los elementos, es una acción utilizada en las cuestiones introductorias, *f(4)* y *f(5)*, pero no conduce obviamente a una estrategia generalizable. Se suele utilizar como medio para comprobar los cálculos, como veremos más adelante. Las acciones que sí llevan a estrategias generalizables son:

<u>Acción 1 (A1)</u>: Es una acción mental que involucra una imagen del dibujo dado en el problema, y que consiste en construir mentalmente, o imaginar mediante un esbozo incompleto de la figura del objeto del tamaño requerido, un dibujo de un cierto tamaño a partir del primer tamaño o de un tamaño dado, añadiéndole partes semejantes entre sí, cada una formada por un número constante de elementos. El número constante de elementos puede coincidir con la diferencia constante o no. Aquí un aspecto esencial es que no se realiza ningún recuento directo sobre el dibujo realizado.

Una vez analizadas las grabaciones de vídeo, que se han mostrado cruciales en esta parte de la investigación, hemos contabilizado cuatro explicaciones en la tarea del árbol de Navidad y tres en la tarea de los hexágonos. Todas las explicaciones poseen una vaga cualidad dinámica, debido quizás al modo verbal en que se producen. Los verbos utilizados por los alumnos en su explicación no son el único indicador de la cualidad dinámica o estática, sino que hay que prestar mucha atención a signos y gestos que realizan sobre los dibujos dados y sobre otros realizados por ellos sobre el papel. Los correspondientes esquemas de la acción son del tipo A:

<invariable> + [<invariable> + <invariable>+...],

salvo en la tarea de la cadena de hexágonos donde en una de las explicaciones se muestra un esquema del tipo B:

<variable> - <variable>.

A continuación mostramos, alumno por alumno, ejemplos de las entrevistas, donde explican la acción desarrollada sobre un dibujo del objeto. En algunos ejemplos no hemos separado los esquemas de la acción de los invariantes, pues se fragmentarían demasiado los ejemplos del resto de la entrevista, y se perdería la visión global y en detalle de ambas. Además, la mayoría de las veces es difícil separar la acción del invariante, pues la explicación de los alumnos se centran en los cálculos realizados (expresión aritmética de los invariantes) y las acciones sirven como justificación de los mismos.

Alumno S1

Tarea: Arbol de Navidad

El alumno ha utilizado el dibujo para la explicación del cálculo del número de luces del objeto de tamaño 10. Entonces el investigador (I) le hace la siguiente pregunta:

[11. S1] I: *¿En qué te fijaste tú para ver que era de cuatro en cuatro?*

[12. S1] A: **(gira la hoja)** *En principio aquí son tres...* **(señala el dibujo)** *después se le añade uno... son cuatro... otro son cuatro... otro son cuatro... cuatro... cuatro...* **(gestos sobre el árbol de tamaño 3 desde la cúspide hasta la base y continuando como si el árbol de tamaño tres se prolongara por la base)**

Los gestos sugieren que, a partir del árbol de tamaño 3, los demás árboles se construyen añadiendo una parte con cuatro luces. Luego en su explicación el alumno contempla un objeto de tamaño n como construido a partir del objeto de tamaño 1, añadiéndole partes sucesivas con cuatro elementos. La explicación tiene un marcado carácter dinámico. El alumno ha mostrado confianza y seguridad en la explicación.

Tarea: hexágonos con cerillas

El investigador le propone la nueva tarea.

[17. S1] I: *Bien. Ahora te voy a dar otro problema. Procura explicarme lo que haces...*

[18. S1] A: *...este tiene seis y por cada uno que se le añaden son cuatro más...* **(señala el dibujo y cuenta los puntos, cabezas de las cerillas, señalándolos, va de la fig. I a la II, luego cuenta sobre la fig. III. Señala el texto de la cuestión 4, y vuelve a la figura III, hace signos sobre el papel como si estuviera extendiendo la cadena añadiendo un cuarto hexágono).** *Bueno, ya está...*

La acción sobre el dibujo sugiere claramente el mismo esquema de la acción que en el árbol de Navidad. El alumno hace ademán de extender la cadena de hexágonos hacia la derecha y para ello utiliza el dibujo de tamaño 3, a partir del hexágono de la derecha hace gestos que sugieren que mentalmente está añadiendo un cuarto hexágono. La explicación tiene un cierto carácter dinámico. En ambos casos el esquema de la acción corresponde con:

<invariable> + [<invariable>+<invariable>+...]

Alumno S2
Tarea: Arbol de Navidad
Explicación por escrito: Tamaño 10: "*39 luces. 3+4´ 9 =3+36=39 luces. 1 árbol (*dibuja un triángulo*) tiene 3 esquinas, lleva 3 luces al unirse con otro árbol (*dibuja un triángulo y un trapecio debajo, unidos ambos) *las esquinas son siete. Si unes los 10 árboles da a 39 luces*".
La frase "al unirse con otro árbol" sugiere una imagen dinámica.

[32. S2] I: *¿Cómo has obtenido este 15? Explícalo.*
[33. S2] A: *Pues... si hay cuatro árboles, ¿no?.*
[34. S2] I: *¿Cuatro árboles?*
[35. S2] A: *Sí, cuatro.*
[36. S2] I: *Tamaño cuatro.*
[37. S2] A: *Pues se supone que aquí habría otro* **(señala debajo del dibujo del árbol de tamaño tres)...** *pues hay cuatro, como hay cuatro líneas y en cada una hay cuatro, es decir, hay cuatro árboles y hay tres líneas... A ver... si hay tres líneas, luego en la última. hay tres líneas están completas por cuatro, en la última...*

El esquema de la acción es similar al del alumno S1. Se imagina los árboles (tamaños) creciendo a partir de un tamaño (el tamaño 3). En [37] se observa que el alumno ha alineado las luces.

Tarea: Hexágonos con cerillas.

[41. S2] I: *Ahora mira este otro a ver como la resolverías.*
[42. S2] A: *... Es más o menos parecido a este... pero, que necesita. es como, ...más o menos parecido,... pero le quita una cerilla en ves de quitarle...como...*
[43. S2] I: *¿Cómo sería para la cadena de cuatro?*
[44. S2] A: *Si son seis, por cada una se quita una... ¿no? ... cuando se unen... tendría que quitar tres, sería...*

La expresión "*cuando se unen*" sugiere una imagen dinámica, para confirmar tal hipótesis la entrevista continua con una pregunta sobre el tamaño trece.

[49. S2] I: *Supón ahora que la cadena es de trece hexágonos. ¿Cómo calcularías las cerillas necesarias?*
[50. S2] A: **(escribiendo 13 ´ 6 = 78 - 12 = 66)** *Trece por seis... igual... setenta y ocho... menos doce...*
[51. S2] I: *¿Menos doce?*
[52. S2] A: *Si, me supongo yo...*
[53. S2] I: *¿De dónde salen esos doce?*
[54. S2] A: *Porque... cada vez... cuando se unen* **(señala el dibujo de la cadena de tres haciendo ademán de extenderla hacia la derecha)** *se le quita una cerilla que tiene utilidad para dos hexágonos. Entonces si son trece... son doce...*

En la última explicación la alumna utiliza la misma frase pero ahora hace ademán de extender la cadena hacia la derecha. La explicación parece dinámica.
Ahora el esquema de la acción es del tipo B:

<variable> - <variable>

Nos sorprende que a partir de una misma acción se puedan establecer dos esquemas de la acción diferentes, uno del tipo A y el otro del tipo B. En el primer estudio, conjeturamos que los invariantes del tipo B parecen corresponder con una imagen o visión del objeto estática. Se puede argumentar que, en este caso, el esquema de la acción es del tipo A. Sin embargo, la explicación de la alumna hace referencia a quitar una cerilla que tienen en común dos hexágonos. Tal explicación no cabe si se parte del primer hexágono y se unen hexágonos con un palillo menos, lo que correspondería con el esquema A. Parece claro que lo que la alumna imagina es una cantidad variable de hexágonos menos una cantidad también variable de palillos superpuestos. En el primer esquema la unidad de agregación es igual a la diferencia constante, en el segundo la unidad de agregación es el número de palillos de un hexágono. Tal cualidad en la unidad de agregación es importante y determina el tipo de invariante a establecer.

Alumno S5

Tarea: Hexágonos con cerillas

El ejemplo que mostramos a continuación corresponde al alumno S5 y muestra el desarrollo de la primera cuestión propuesta en la tarea hexágonos con cerillas.

[194.S5] I: *Contesta la pregunta. Léelo primero...*

[195.S5] A: *¿Cuántas cerillas harían falta para una cadena de 4 hexágonos?*

[196.S5] I: *Dime que estás pensando.*

[197.S5] A: *Lo que tendría que hacer es encadenar otro aquí.* **(Señalando el dibujo de la figura III).**

[198.S5] I: *A ver, ¿cómo sería?*

[199.S5] A: *¿Lo puedo continuar?* **(señalando la figura III y haciendo ademán de extender hacia la derecha)**

[200.S5] I: *Sí. Lo puedes dibujar.*
(dibuja un hexágono encadenado a la cadena de tres hexágonos de la figura III)

[201.S5] A: Serían **(contando las cerillas sobre el dibujo)** veintiuna cerillas... **(escribe “ *21 cerillas*”)**

[202.S5] I: *Y si encadenamos veinte hexágonos... ¿cómo calcularías las cerillas?...pon veinte hexágonos.*

[203.S5] A: **(escribe “*20 hexágonos* “)** *Como... el primero tiene seis* **(señalando el dibujo**)*... ¿no?...el segundo es cinco...* **(señala pieza común)** *porque encadenas con uno... entonces pones seis más...*

[204.S5] I: *Ve escribiendo.*

[205.S5] A: **(escribe “ 6 + “**)*... y entonces serían diecinueve los que quedan... diecinueve por cinco* **(escribe operación vertical 19 (debajo) ´ 5 (debajo) línea (debajo) 95**) *que son las posiciones de más... pues. ciento uno.* **(Añade 95 a la operación dejada antes y la completa: “ *6 + 95 = 101 cerillas*”).**

Durante la explicación de los cálculos ha hecho un ademán de extender la cadena de tres hexágonos hacia la derecha. A continuación ha dibujado un hexágono y ha contado sobre el dibujo el número de cerillas necesarias para la cadena de 4 hexágonos, pero en la siguiente cuestión vuelve al dibujo para señalar la cerilla común entre el primer y segundo hexágono, y a continuación contempla la cadena extendiéndose hacia la derecha y formada por diecinueve hexágonos a partir del primero. El esquema de la acción en del tipo A.

Alumno S6

Tarea: Árbol de Navidad.

En el siguiente ejemplo el alumno S6 dibuja un esbozo, del árbol de tamaño diez, para explicar cómo realizó el cálculo para el número de luces que corresponde a un árbol de dicho tamaño (prueba escrita), es decir, 19+4·5=39.

[221.S6] A: *A ver... es que aquí puse... un árbol de tamaño cuatro necesita quince luces... entonces... por que un árbol de tamaño uno necesita siempre... se necesitan... a ver... se le añade cuatro a cada árbol. Porque en el primero se la añade tres* **(señala dibujo figura I)**... *en el segundo cuatro* **(señala figura II)**. *y ya se ve que a cada... esto... se la van añadiendo cuatro* **(señala figura III)**... *entonces yo fui sumando... digo bueno... pues si en el tamaño cinco... en el diez necesitan veinte más* **(gira la hoja)** *para poder tener las luces que hacen falta... es que yo hice el dibujo del árbol...*

[222.S6] I: *A ver...* **(toma una hoja y empieza a dibujar un árbol)**

[223.S6] A: *Hice esto... hice el árbol... y después fui haciendo así... ¿no?* **(gestos sobre el papel)**

[224.S6] I: *¿Hiciste el dibujo completo?*

[225.S6] A: *No... el dibujo completo no...*

[226.S6] I: *¿ Hiciste un esquema?*

[227.S6] A: *Entonces... hice esto así...* **(dibuja un árbol de tamaño diez sin las luces)**... *le puse... uno, dos, tres,... entonces aquí* **(señala la copa)** *serían tres* **(dibuja tres luces),** *aquí cuatro* **(en el siguiente tramo del árbol dibuja cuatro luces**)... *en cada uno de estos serían cuatro* **(dibuja cuatro luces hasta el tamaño cinco)**... *y entonces ya... llegando al último ya se ve... contando del primer nivel al quinto, al otro* **(señalando desde el nivel cinco al último del dibujo)** *tienen que ir veinte luces más...*

Aunque se utiliza un esbozo del dibujo para el árbol de tamaño diez, hay que señalar, que es durante la explicación del cálculo cuando el alumno realiza tal dibujo y no mientras realizó la prueba escrita, pues allí se limitó a explicar verbalmente los cálculos realizados. Sin embargo, la explicación es claramente dinámica, pues el alumno realiza un esbozo del árbol de tamaño 10 a partir de la “copa” del árbol y extendiendo el dibujo hacia abajo sobre el papel, añadiendo partes con cuatro luces cada vez, sin llegar a completar la figura del todo. De hecho se detiene en la parte del dibujo que correspondería al árbol de tamaño 5. Esta es una de las más claras explicaciones dinámicas que hemos encontrado durante las entrevistas. El esquema de la acción es del tipo A.

Alumno S8

Tarea: Árbol de Navidad.

La explicación, dada por escrito, sugiere una imagen dinámica en f(4) y f(5), mientras que en f(10) y f(20) la explicación parece estática, pues el alumno habla de “partes” (partición en grupos de la figura). Mostramos a continuación un fragmento de la entrevista.

[309.S8] A: *Porque...* **(gira la hoja hacia la primera página)** *saque que por cada* ***triangulito*** **(señala sobre la figura I)** *que se le sumara al árbol,. .., el de abajo tendría cuatro* **(señala figura II)** *y el de arriba lo seguiría teniendo tres , porque tendría la puntita* **(señalando sobre las luces)** ... *y este en vez de tener uno en la puntita tendría uno en cada lado* **(señalando base del árbol en fig. II)** *y entonces ya ... después ... este ... lo mismo* **(señalando figura III)** ... *y después, ya para no hacerlo con diez ... para no estarlo haciendo tan ... tan ... o sea ... todo el dibujo, cogí y hice para tres, para altura tres* **(señalando fig. III)** ... *o sea uno tendría 3 lucitas* **(señala sobre las luces fig. I)** *y los restante tendría cuatro.*

El esquema de la acción es A y la imagen (por la explicación) se puede considerar dinámica. Obsérvese que el alumno dice “*por cada triangulito que se le sumara al árbol*”, lo que indica que imagina el árbol creciendo al sumársele “*triangulitos*”.

En resumen, sobre el dibujo hemos constatado una única acción (A1) y las explicaciones verbales, según las diferentes tareas, son vagamente dinámicas, aunque alguna tiene un claro carácter dinámico. En la tarea del árbol de Navidad, todo los esquemas son del tipo A. En la tarea de los hexágonos hemos constatado tres explicaciones también dinámicas, que corresponden dos a esquemas A y una a esquema B.

En las explicaciones por escrito hay explicaciones vagamente dinámicas (la mayoría) pero también las hay estáticas combinadas con dinámicas (alumno S8).

Una explicación plausible: El lenguaje hablado de los alumnos suele ser "gráfico" y coloquial, de ahí que las explicaciones verbales tengan un carácter más dinámico. Las explicaciones formales, suelen ser estáticas, y no muy próximas o familiares al lenguaje usual de los adolescentes. Pensamos que el lenguaje con explicaciones dinámicas es lo que caracteriza a los adolescentes frente al lenguaje con explicaciones estáticas o formales que es más característico de los adultos.

Esta fue la única acción detectada sobre el dibujo. A continuación exponemos las acciones sobre los datos numéricos (sucesión).

<u>Acción 2 (A2):</u> Consiste en contemplar la sucesión de términos numéricos a partir de uno ya calculado, o dado por el problema, y contar a partir de él el número de diferencias constantes que deben ser añadidas.

El siguiente fragmento de la entrevista realizada al alumno S9, muestra un ejemplo de tal acción. Durante la prueba escrita el alumno sólo consignó los resultados sin explicar el modo en que los había obtenido.

[409.S9] I: *Para tamaño diez, ¿cómo sacaste el treinta y nueve?*
[410.S9] A: *Sabiendo que cinco... cinco tamaños son diecinueve luces, cinco tamaños más serían veinte unidades sumadas a esas diecinueve serían treinta y nueve luces.*

<u>Acción 3 (A3):</u> Consiste en considerar que un tamaño buscado tiene el doble de elementos que el tamaño mitad correspondiente.

En el siguiente fragmento de la entrevista realizada al alumno S5, se le pregunta que aclare por qué sumó dos veces 19 (luces del tamaño 5) para obtener las luces del tamaño diez.

[187.S5] I: *¿Por qué sumaste dos veces diecinueve?*
[188.S5] A: *Porque... si cinco, uno de cinco necesita diecinueve...* **(señalando los cálculos)** *pues sumé lo que serían dos de cinco... que serían diez...*

Este alumno da por hecho, asume de forma implícita, que el objeto de tamaño diez se forma por agregación de dos objetos de tamaño cinco. En principio podría parecer que esta imagen se ha obtenido del dibujo, pero durante toda la entrevista, el alumno sólo hace referencia a los datos numéricos.

<u>Acción 4 (A4):</u> Realizada sobre los datos numéricos y consistente en la búsqueda de una relación de tipo funcional entre el tamaño del objeto n y el número de elementos del mismo $f(n)$.

En el siguiente fragmento, al alumno S7 se le pregunta sobre cómo obtuvo la fórmula para calcular el número de luces de cualquier objeto que había consignado en la prueba escrita.

[291.S7] A: *A ver... yo fui multiplicando uno por uno, uno por dos, uno por tres ...* **(señalando el 1 de la frase donde se da que para tamaño 1 se necesitan 3 luces)** *... aquí uno por tres me dio tres ... pero aquí dos por tres* **(señalando el dato 2 en la segunda frase)** *no me daba ... me daba menor que siete ... y tres por tres* **(señalando el dato 3 en la tercera frase)** *ya había ... faltaba dos para llegar a once.*

El alumno ensaya primero el uno, luego el dos y con el tres le da el número de luces para el tamaño 1, pero observa que el tres no vale como factor para calcular el número de luces para el tamaño 2, luego prueba con el factor 3 y comprueba que no le sirve para el cálculo del número de luces en el tamaño 4. Esto se produce al final de la entrevista y es la aclaración de como mediante ensayo y error llegó a que había que multiplicar cada tamaño por cuatro y restar luego una unidad.

Acción 5 (A5): Es una acción sobre los datos numéricos y consiste en actuar sobre los números mediante el algoritmo de la *regla de tres*.

El siguiente fragmento es un ejemplo de tal acción.

[73. S3] I: *Para calcular el tamaño diez... ¿qué hiciste?*
[74. S3] A: *Hice una regla de tres*. **(Vuelve la hoja a la primera página para ver el número de luces que necesita el árbol de tamaño 5)** *si cinco, diez y nueve.... de diez ... equis...* **(señala los cálculos que hizo sobre el papel y los recita en voz alta).**

Acción 6 (A6): Es una acción realizada sobre los datos numéricos del problema y consiste en aplicar la expresión simbólica para calcular un término cualquiera de una progresión aritmética.

El siguiente fragmento muestra un ejemplo de la acción anterior realizada sobre un cálculo correspondiente a la tarea árbol de Navidad.

[124. S4] A: ..... **(escribe 10·4)** ***(3+(10·4))***
[125. S4] A: *...me falla algo...*
[126. S4] I: *¿Qué té falla?*
[127. S4] A: *¿Puedo ver la fórmula?*

El alumno pide permiso para observar lo que había escrito para el tamaño n, durante la prueba escrita.

Tamaño n: *"árbol tamaño n =* N_1 *+(N-1)·D*
D = Diferencia
N_1 *= Primer árbol"*

[128. S4] I: *¿La que hiciste?...Sí...*
[129. S4] A: *.... Ah... Claro... tengo que restarle el árbol inicial, porque al árbol inicial... porque no tenía las cuatro luces... y después sería...* **(vuelve a escribir debajo de lo anterior 3 +)** *más... el puesto* **(escribe *10-1*)** *que tendría menos el árbol inicial... y esto todo... multiplicado por la diferencia de luces. por cuatro***. (*3+(10-1)·4*).**

Acción 7 (A7): Consistente en extender la sucesión numérica mediante suma iterada de la diferencia constante *d*. Esta acción es la manifestación del carácter iterativo de la pauta numérica. Aunque es una acción puramente rutinaria, a través de ella se resalta la diferencia constante que separa a cada término del anterior, hecho que no queda siempre claro en la acción rutinaria de realizar un dibujo del objeto y contar los elementos que lo componen.

En los ejemplos mostrados, las acciones realizadas sobre el dibujo o sobre la situación comienzan por lo general con un acto físico, como es el dibujar un tamaño no dado del objeto o realizar una operación numérica. Tal acción física, se transforma en un proceso cognitivo interno al sujeto de tal forma que es capaz de imaginar la acción física sin de hecho llevarla a cabo. Esta imagen interna de la acción física es un esquema general de tal acción, y de alguna forma es un invariante, en el sentido en que el sujeto siempre imagina el proceso de la misma forma. Dado que el objetivo planteado en este tipo de problemas es siempre el mismo, calcular el número de elementos f(n) que tiene un objeto de tamaño n, las acciones interiorizadas se orientan a tal fin, y se traducen en la búsqueda de ciertas relaciones conectivas entre los elementos de la acción, ya sean elementos del dibujo, datos numéricos o ambos.

El establecimiento de un invariante, para la acción interiorizada, es el punto clave del proceso de generalización. Aquí surge la cuestión de cuándo un alumno ha establecido un invariante, es decir ha realizado una generalización. El papel que juega la abstracción reflexiva en la construcción de la generalización pasa por el establecimiento de un invariante. El reflejo de las acciones físicas se traduce en un proceso cognitivo interno al sujeto, y de la reflexión interna sobre tal proceso surge la estructura intrínseca de la relación conectiva entre los elementos de la acción. Tal estructura intrínseca marca la cualidad intensional de la generalización. La cualidad extensional hace referencia al rango de los elementos variables de la estructura aritmética para el cálculo. Por un lado, tenemos una generalización intensional, cuando el alumno cae en la cuenta de la forma general, característica intrínseca, de la estructura del cálculo, y por otro lado una generalización extensional, que se manifiesta por la aplicación de tal estructura de cálculo a otro ejemplo concreto, es decir, mediante la variación de los elementos de la acción, tamaño del objeto y elementos constituyentes. Luego, no siempre que se realiza un cálculo concreto se ha realizado una generalización, para ello es necesario de otras manifestaciones del sujeto, como son la verbalización de la estructura del cálculo sin referencias concretas al ejemplo, es decir, sin explicar sólo los cálculos realizados, y de una aplicación de la regla para el cálculo al menos a otro caso.

5.3.2. Esquemas Invariantes como resultado de las acciones

Según el criterio señalado en el apartado anterior los alumnos han establecido los siguientes invariantes a partir de las acciones señaladas.

Invariante-1: Corresponde con la expresión algebraica $f(n) = d(n-1) + f(1)$. Su cualidad es recursiva, y equivale a la expresión o fórmula que se enseña corrientemente en el tema de progresiones aritmética. Se establece tanto a partir de acciones introducidas sobre los elementos del dibujo como sobre los datos numéricos, es decir su génesis está en las acciones A1, A2 y A6. En su estructura es clave la relación que guardan los elementos constantes, primer término y diferencia constante, con los elementos variables, n y $f(n)$.

Invariante-2: Corresponde con la expresión algebraica $f(n) = 6n - (n - 1)$. Fue establecido en el problema 2 (cadena de hexágonos) por la alumna S2, a partir de la acción A1. Lo esencial en este invariante es que no interviene ni la diferencia constante ni el primer término de la sucesión.

Estos dos invariantes nos muestran que a partir de una misma acción, que se interioriza en la construcción de un dibujo del objeto, añadiendo partes semejantes entre sí, conduce a dos esquemas invariantes básicamente diferentes. En el primer invariante, juega un papel importante la diferencia constante a y el primer término de la sucesión $f(1)$, mientras que en el segundo ambos elementos no son partes esenciales del mismo.

Invariante- 3: Corresponde con la expresión algebraica $f(n) = d(n-m) + f(m)$ con $m > 1$. Este invariante fue desarrollado por el alumno S6 a partir de la acción A1, y por el alumno S9 a partir de la acción A2. Aunque es obviamente equivalente al primer invariante, la forma de actuar de los alumnos le confiere cierta especificidad, pues en cada respuesta en que se emplea tal invariante, se varía el valor de m, es decir, los alumnos recurren siempre al valor obtenido en el cálculo anterior. El único elemento constante en la expresión es la diferencia constante.

Invariante-4: Corresponde con la expresión algebraica $f(2n) = 2f(n)$, es claramente incorrecto y su empleo es la manifestación clara de una generalización errónea, pero al fin y al cabo una generalización, como consecuencia de asimilar la situación al esquema incorrecto de proporcionalidad directa. Obviamente se obtiene a partir de la acción A3. Ninguno de sus elementos constituyentes es constante.

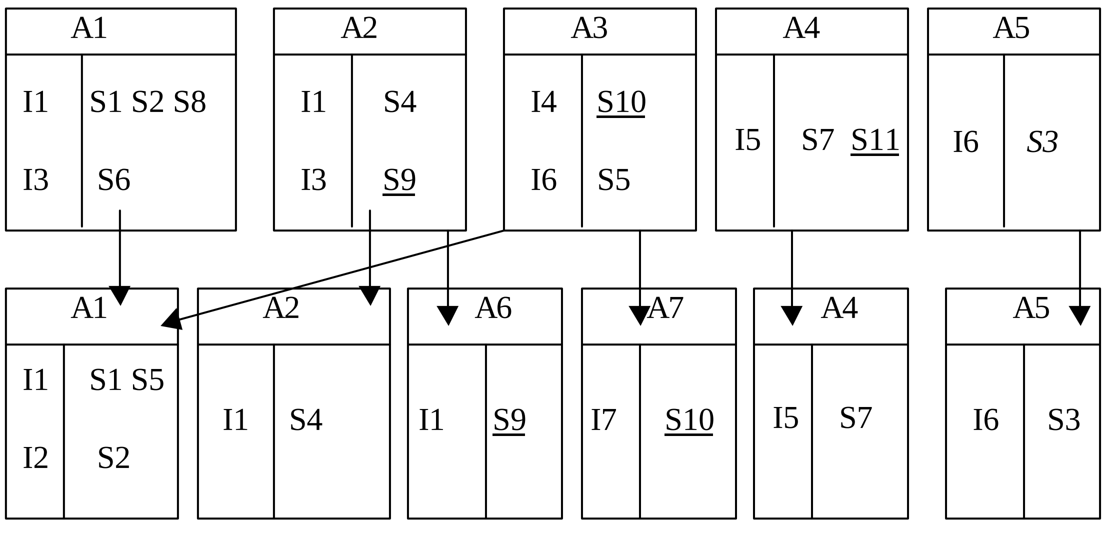
Invariante-5: Corresponde con la expresión algebraica $f(n) = dn + b$. Tal expresión muestra la relación funcional no recursiva entre n y $f(n)$. En particular su expresión es $4n-1$ y $5n+1$ para el problema del árbol de Navidad y para el problema de la cadena de hexágonos respectivamente. Su génesis es la acción A4 realizada sobre los datos numéricos, donde se suele utilizar la estrategia heurística de ensayo y error partiendo de la diferencia constante hasta obtener el término independiente b. Señalemos de paso que b no está explícitamente relacionado con ningún elemento del dibujo ni con la sucesión, pero es bien conocido que entre b, el primer término $f(1)$ y la diferencia constante a existe la relación $b = f(1) - a$.

Invariante-6: Obtenido de aplicar la *regla de tres*, acción A5, y mediante comprobación ajustar tal resultado para obtener una respuesta correcta. Para el problema del árbol de Navidad, la estudiante S3 desarrolló este invariante cuya correspondiente expresión simbólica es $f(2n) = 2f(n) + 1$, siendo $f(2n) = 2f(n) - 1$ para el problema de la cadena de hexágonos. También se puede obtener a partir de la acción A3 y ajuste posterior del resultado obtenido, tal y como la hace la alumna S5 en el problema del árbol de Navidad. En ambos casos, la situación se asimila a un esquema incorrecto, pero el esquema se acomoda a la situación y se construye una generalización parcialmente válida.

Invariante-7: Corresponde con la expresión algebraica $f(n) = an$. Su génesis se encuentra en la acción A7, asumiendo que la adición repetida de a implica $f(n) = an$. Establecido por la alumna S10 en el problema de la cadena de hexágonos. La acción repetida de sumar la diferencia constante se generaliza a una multiplicación, cuyo factor constante, es la unidad de agregación. Encontramos aquí la manifestación de un obstáculo epistemológico, en el sentido de Sierpinska (1990).

El siguiente GVT muestra las acciones e invariantes establecidos por los alumnos en la secuencia de los dos problemas, la primer fila corresponde al problema del árbol de Navidad y la segunda al problema de la cadena de hexágonos.

<u>GVT que relaciona acciones, invariantes y alumnos en las dos tareas</u>



Ya hemos señalado que de una misma acción se pueden establecer invariantes distintos. Pero ahora, estamos interesados por la actuación particular de cada alumno. Esta actuación nos interesa en un doble sentido, por un lado su actuación en cada problema por separado (actuación local) y, por otro, en el conjunto de la prueba (actuación global). Tal comportamiento será relacionado con diferentes manifestaciones de la comprensión.

El GTV muestra que, un mismo alumno, puede establecer diferentes invariantes a partir de una misma acción. Por ejemplo, la alumna S2 estableció a partir de la acción A1 los invariantes I1 e I2 en los problemas de árbol de Navidad y la cadena de hexágonos respectivamente. Señalemos que ambos invariantes son correctos y constituyen elementos básicos del esquema lineal, con la diferencia de que en el primero están presentes elementos importantes de la estructura canónica de la pauta lineal y en el segundo tales elementos están ausentes.

Otra característica referida al comportamiento de los alumnos es que pueden actuar de forma diferente en cada problema, diferentes acciones, y establecer diferentes invariantes, este es el caso de los alumnos S5, S9 y S10. El caso de la alumna S10 es significativo, en el sentido en que, ambos invariantes son la concreción de la asimilación de la situación a un esquema incorrecto, el esquema de proporcionalidad directa. Mientras que la alumna S3, en ambos problemas, y la alumna S5 en el problema del árbol de Navidad, asimilan la situación al esquema incorrecto de proporcionalidad directa. Sin embargo, ambas alumnas al acomodar el esquema a la tarea, mediante el ajuste de los resultados parciales obtenidos, establece invariantes parcialmente correctos. Aquí se nos plantean varias cuestiones, en primer lugar ¿cómo se dieron cuenta las alumnas que no eran correctos los cálculos parciales obtenidos? ; en segundo lugar, la comprobación de la validez de los cálculos parciales ¿deberíamos considerarla como otra acción?. Más adelante retomaremos estas cuestiones en el apartado en que analizamos el papel específico que juegan los ámbitos numéricos y gráficos en el establecimiento de los invariantes.

La actuación global de la alumna S5 durante la prueba se resume en la asimilación-acomodación del problema del árbol de Navidad a un esquema incorrecto y la construcción de un esquema lineal para enfrentarse al problema de la cadena de hexágonos. En resumen, su actuación refleja el uso de un esquema conceptual distinto en cada tarea.

Los alumnos S6, S8 y S11 no fueron capaces de establecer invariantes en el problema de la cadena de hexágonos.

Finalmente la actuación de los alumnos S1, S4, S7 y S11, al mostrar una gran consistencia en las acciones y los invariantes establecidos en ambos problemas, hemos de considerarla como paradigmática de un aprendizaje espontáneo o construcción espontánea del esquema lineal.

Dentro de un problema, sea el del árbol de Navidad o la cadena de hexágonos, el establecimiento de invariantes, es un signo claro del paso de la pura actividad procedimental, cálculos específicos, a la comprensión procedimental. No siempre es fácil detectar cuándo un alumno ha pasado de un nivel cognitivo a otro, y tal paso la mayoría de las veces es difícil de detectar sólo en una prueba escrita. Pues hay alumnos cuyas anotaciones pueden inducir a una incorrecta interpretación, que sólo puede ser corregida mediante entrevista y observación directa de su actuación. A continuación daremos ejemplos de los protocolos de las entrevistas en los que tipificaremos la actividad procedimental, comprensión procedimental y conceptual. Además, argumentaremos sobre cuándo un alumno establece o no un invariante.

5.4. Comprensión y generalización

En este apartado relacionaremos el comportamiento de los alumnos durante el proceso de generalización con la comprensión y la generalización que construyen. Tal relación nos llevará a precisar aspectos concretos del esquema de descomposición genética del concepto de pauta lineal.

5.4.1. Actividad procedimental

El no establecimiento de un invariante se debe considerar como signo claro de actividad procedimental. También el establecimiento de un invariante erróneo, debe ser considerado como signo claro de actividad procedimental. Además consideraremos dos tipos de actividad procedimental, en primer lugar la que se manifiesta en la resolución de una tarea, al responder a las cuestiones en ella planteadas y, en segundo lugar, a la que se manifiesta en una secuencia de tareas del mismo tipo. Veamos algunos ejemplos de tal comportamiento y argumentos en favor de nuestra tesis.

Debido al formato de la tarea, las primeras acciones efectuadas por los alumnos suelen ser de tipo rutinario como ya hemos señalado. Así, comienzan realizando un dibujo y realizando un recuento directo sobre el mismo de los elementos componentes. Como ya hemos señalado en el capítulo 3, tales acciones las consideramos como muestra clara de actividad procedimental, en el sentido en que no se ha realizado ninguna generalización. Sin embargo, caer en la cuenta y utilizar la cualidad más perceptual de la pauta, la diferencia constante, marca la primera generalización por los alumnos en este tipo de tareas. El procedimiento es simple, cada término se obtiene del anterior por suma de la diferencia constante, pero existe una diferente cualidad según se capte la cualidad iterativa del mismo o la cualidad recursiva. Tendríamos dos primeras calificaciones de la comprensión procedimental: la iterativa y la recursiva.

La cuestión de generalización próxima marca, para la mayoría de los alumnos, un punto de inflexión en su comportamiento, pues pueden abandonar o no los procedimientos de recuento directo. El abandono de tales procedimientos supone la búsqueda de una forma indirecta de realizar los recuentos, que expresan mediante reglas de cálculo. Tal búsqueda puede tomar diferentes formas. Veamos un ejemplo de uso erróneo del conocimiento por parte del alumno en tal búsqueda.

El siguiente fragmento corresponde al alumno S8 y a la entrevista sobre el problema de la cadena de hexágonos. El alumno, ha realizado previamente actividades rutinarias de recuento sobre el dibujo como respuesta a las preguntas realizadas por el entrevistador. En el fragmento se le ha preguntado por el número de cerillas que correspondería a una cadena de quince hexágonos.

[344.S8] A: *Entonces sería ... por cada hexágono se le sumarían cinco, entonces, uno tendría seis, el otro tendría once que serían cinco más, el tercero tendría dieciséis ... que serían cinco más ... entonces quince ... si cuatro tiene veintiuno ... quince tendría equis* **(gestos sobre el papel como escribiendo el esquema correspondiente a la regla de tres)**

[345.S8] I: *A ver ...*

[346.S8] A: **(escribe esquema de la regla de tres *4 ¾ ¾ 21* (debajo) *15 ¾ ¾ x* (debajo) *4x=21·15*)**

[347.S8] I: *Haz la operación ...*

[348.S8] A: **(realizando los cálculos sobre el papel)***... setenta y ocho coma setenta y cinco…? ...*

[349.S8] I: *Te parece raro...*

[350.S8] A: *Sí.*

[351.S8] I: *¿Tendría que dar exacto? Entonces... ¿cómo es que... ?*

[352.S8] A: *Porque a lo mejor no se puede hacer como una regla de tres.*

El resultado no entero, al aplicar la regla de tres, hace caer en la cuenta al alumno de que quizás (ver subrayado en la última respuesta) no es procedente su uso en este tipo de problemas. El uso de la regla de tres es claramente, y en la mayoría de los casos, signo de actividad procedimental pues los alumnos no se aseguran de que, tal algoritmo, pueda ser utilizado en este tipo de problemas, que obviamente no son de proporcionalidad directa. Sin embargo, no le queda claro por qué no funciona la regla de tres en el ejemplo donde la ha aplicado. Este caso es un ejemplo claro de asimilación de la tarea a un esquema conceptual incorrecto. Además no se produce acomodación del esquema conceptual a la tarea, pues el alumno no sabe por qué no es de aplicación y concluye con una frase vaga que refleja claramente la duda que le ha producido, el hecho de que el resultado del cálculo no sea entero. Continuemos con la entrevista.

[353.S8] I: *Bien. Si no se puede hacer por una regla de tres ¿cómo se podría hacer?*

[354.S8] A: *Por la lógica... por ejemplo... si seis... a ver... seis* **(señalando dato numérico)***... tendría cinco... dos tendría cinco más, once... tres tendría cinco más, dieciséis... o sea... quince tendrían...* **(señalando esquema de la regla de tres como contando)***...*

[355.S8] I: *¿Qué estás pensando?*
[356.S8] A: *Sí. Por ejemplo... es que intento llegar hasta el quince...*
[357.S8] I: *Pero hasta el quince no vas a llegar... entonces...*
[358.S8] A: *Por eso... voy a ponerlo aquí, que lo veo...*
(Escribiendo ***1*** ¾ ¾ ***6***
2 ¾ ¾ ***11***
3 ¾ ¾ ***16***
4 ¾ ¾ ***21***
15 ¾ ¾ … (**esquema - asignación**)
[359.S8] I: *Quince...*
[360.S8] A: **(Escribe *11·5 = 55)***
[361.S8] I: *Explícame...*
[362.S8] A: *Aquí sería... a medida que van contando los hexágonos* **(señalando sobre el esquema -asignación anterior)** *aumentan cinco cerillas, entonces... aquí sólo hay cuatro... y tienen veintiuno... entonces cinco han aumentado veintiuno... en once... lo multiplico por cinco son cincuenta y cinco cerillas, y pero... sólo esto son once... ahora faltaría* ***poner*** **(suma veintiuno al resultado anterior, escribiendo 76)...**
[363.S8] I: *Y le sumas veintiuno...*
[364.S8] A: *Sí.*
[365.S8] I: *Y.... ¿de dónde salieron? ...*
[366.S8] A: *De los cuatro restantes.*
[367.S8] I: *O sea, tú calculaste cuántas cerillas para once... y ¿quiénes son esos once?*
[368.S8] A: *Los once que le faltan para llegar de cuatro a quince. ... serían setenta y seis...* **(señalando sobre el esquema - asignación).**

El alumno ha cambiado la estrategia de solución, que por otro lado es numérica. Ahora utiliza para los cálculos una expresión de tipo recursivo, que hemos tipificado con la notación L2 (*f(15) = f(4) + 5´(15-4)*). Para asegurarnos que tal expresión, muestra que el alumno ha establecido un invariante, le hacemos otra pregunta. La entrevista continua así:

[369.S8] I: *Veamos. Imagina ahora que te pongo treinta y dos hexágonos. ¿Cómo sería...?*
[370.S8] A: *.... no sé...* **(añade 32** ¾ **al esquema - asignación)**
[371.S8] I: *¿Qué estás pensando?*
[372.S8] A: *Si quince tendría setenta y seis* **(completando esquema - asignación)** *treinta debería tener... ¿el doble? ...*
[373.S8] I: *¿El doble?*
[374.S8] A: *.... ¿treinta debería tener el doble de quince?*
[375.S8] I: *¿Por qué crees que debería tener el doble?*
[376.S8] A: *Porque si este* **(señala sobre 15 en el esquema - asignación)** *tendría setenta y seis... si treinta es el doble de quince...*

Ahora el alumno utiliza implícitamente la expresión *f(30) = 2f(15),* que corresponde con la respuesta W2. No es capaz de contemplar la estructura general del cálculo anterior (L2) y aplicarlo a esta cuestión, es decir, no realiza una generalización. Por el contrario vuelve al esquema conceptual de proporcionalidad directa, proporcionando ahora una respuesta del tipo W2. El alumno se ha quedado dudando, pues además la pregunta no es relativa a 30 hexágonos, sino a 32 hexágonos.

[377.S8] I: *¿Pero eso no es equivalente a la regla de tres anterior?*
[378.S8] A: *Falla en unos cuántos....* **(señalando sobre la figura III)**

El alumno se ha dado cuenta que la regla, *f(2n) = 2f(n),* no es válida comprobando sobre la figura 3. Además, en la comprobación ha utilizando el dibujo.

[380.S8] A: ... *¡Ah! Ya... a ver... tengo una forma, pero no sé...* **(señalando sobre el esquema - asignación)** *uno por seis, seis; dos por seis, doce, le quito uno, once; tres por seis, dieciocho, le quito dos, dieciséis... tres por cuatro, veinticuatro, le quito tres, veintiuno... quince por cuatro...*
[381.S8] I: *¿Cómo que quince por cuatro?*
[382.S8] A: *No. Quince por seis... noventa... le quito cuatro... no me da.*
[383.S8] I: *Busca otra forma...*
[384.S8] A: *... Por cinco, le sumo una...*
[385.S8] I: *¿Funciona?*
[386.S8] A: *Sí. Porque...* **(sobre el esquema - asignación)** *cinco por una, cinco, le sumo una, seis; cinco por dos, diez, le sumo una, once; tres por cinco, quince, le sumo una, dieciséis; cinco por cuatro, veinte, le sumo una, veintiuno; cinco por quince... setenta y cinco, le sumo una, setenta y seis...*
[387.S8] I: *Entonces, ¿cómo sería para treinta y dos?*
[388.S8] A: ... **(escribiendo *32·5=160 + 1=161)***

Ahora la expresión para el cálculo es funcional y equivale a la expresión $f(32\ )= 5\acute{}32+1$ (L1). El entrevistador nota que el alumno ha dudado también en este cálculo. La entrevista sigue:

[389.S8] I: *Ciento sesenta y uno... Entonces tu crees que esa es la regla...*
[390.S8] A: *Podría...*
[391.S8] I: *No estas muy seguro... ¿por qué dijiste podría?*
[392.S8] A: *Porque, yo, o sea... la... es a lo mejor algún... por lógica se saca, pero a lo mejor fallaría en algún número... no estoy seguro...*
[393.S8] I: *Pero, en los que tu tenías aquí te funciona...*
[394.S8] A: *En todos estos sí, y este...* **(señalando el último cálculo)**
[395.S8] I: *En los que has puesto tu aquí no falla... ¿dónde crees tu que fallaría?*
[396.S8] A: *A lo mejor en un número más elevado.*
[397.S8] I: *Y si fallara en un número más elevado... ¿qué podríamos hacer?*
[398.S8] A: *Ya no serviría esta regla... tendría que haber otra... entonces.*

Las sospechas del entrevistador eran fundadas, pues lo anterior muestra claramente que el alumno duda también del último cálculo efectuado. Un dato importante a tener en cuenta es que el alumno ha comprobado, la no validez de la regla $f(2n) = 2f(n)$, observando que no se cumple para algún ejemplo presente en la tarea, en este caso ha sido en el dibujo.

En resumen, la entrevista muestra que el alumno S8 no realiza una generalización de ninguna de las reglas para el cálculo desarrolladas. Ha introducido varias acciones, todas sobre la sucesión numérica, y no ha llegado a establecer ningún invariante. Este modo de actuar lo denominamos como *actividad procedimental*, que en este tipo de tarea se caracteriza en que el alumno utiliza conocimiento erróneo, como es considerar que la situación obedece a una de proporcionalidad directa. En otras palabras, el alumno asimila la tarea a un esquema conceptual incorrecto, es capaz de realizar cálculos correctos para casos específicos pero no es capaz de generalizar la estructura de ninguno de los cálculos correctos a otro caso distinto, es decir no hay generalización intensional ni extensional. Como resultado de la no generalización, el alumno muestra un comportamiento dubitativo y no muestra confianza en su propia actuación.

El siguiente caso se refiere a una generalización mediante el establecimiento de un invariante erróneo y por consiguiente es un caso de sobregeneralización de un procedimiento.

[439.S10] I: ¿Cómo supiste que el árbol de tamaño cuatro necesitaba 11+4 luces?
[440.S10] A: ...vi que el tamaño aumentaba de uno en uno, y las luces de cuatro en cuatro según el tamaño de cada árbol, si un árbol de tamaño 3 necesita esas luces (**señala dato 11**), entonces uno de tamaño 4 necesita 11+4 = 15 luces.
[441.S10] I: ¿para el tamaño diez?

[442.S10] A: ...yo calculé cuánto era para un árbol de tamaño 5, 19, luego para 10 llevará el doble, 38.
[443.S10] I: ¿para un árbol de veinte?
[444.S10] A: pues, el doble que el de diez (**respuesta rápida**).

En esta primera parte de la entrevista el alumno está implícitamente utilizando la relación $f(2n) = 2f(n)$. Parece ser que el tamaño relativo de los números, $10 = 2´5$ y $20 = 2´10$, es lo que le induce a tal estrategia. La rápida respuesta a la cuestión del tamaño 20 indica que se ha realizado una sobregeneralización, es decir, se ha establecido el invariante erróneo, equivalente a $f(m) = 2f(n)$ con $m = 2n$. Lo similar entre el comportamiento cognitivo de este alumno y el anterior, es que ambos asimilan la tarea propuesta a un esquema cognitivo erróneo. Lo que diferencia a ambos comportamientos, es que mientras el primero es incapaz de generalizar, el segundo alumno lo hace, establece un invariante, aunque es incorrecto.

Por otro lado, el alumno había anotado durante la prueba escrita, la expresión $3 + 4n$ para el cálculo general. Sobre la misma versa el siguiente fragmento de la entrevista.

[445.S10] I: Y, ¿de dónde salió esta fórmula?
[446.S10] A: pues,... el número de luces en el tamaño del árbol, es igual al tamaño más tres...
[447.S10] I: ¿de dónde sale ese 3?
[448.S10] A: ... 3 es el primero... , más, ... según el tamaño que tenga el árbol...
[449.S10] I: Pero, esa fórmula no la aplicaste antes...
[450.S10] A: ... porque aquí, yo multipliqué por..., sumé todo.... el número del árbol más las cuatro luces... por cada tamaño del árbol serían cuatro luces más...

De la explicación se deduce que no ha comprendido la aclaración hecha por el entrevistador de que tal fórmula no ha sido aplicada en los cálculos previos. El alumno se limita a explicar la sintaxis de la expresión algebraica.

El comportamiento mostrado por este alumno lo tipificamos de actividad procedimental, pues a pesar de haber establecido un invariante, que es erróneo, es esta cualidad del invariante la que determina tal clasificación. El esquema conceptual subyacente no es de aplicación y el alumno no reconoce tal hecho, lo que le lleva a realizar una sobregeneralización del procedimiento.

5.4.2. Comprensión procedimental

En este apartado mostramos tres ejemplos de comprensión procedimental. La comprensión procedimental viene caracterizada en nuestro estudio por el establecimiento de un invariante, es decir una generalización. Tal generalización posee dos cualidades: una intensional, reconocimiento de la estructura intrínseca del cálculo efectuado y la otra extensional, ampliación del rango de validez de tal estructura. Para el investigador es difícil separar los momentos en que ambas se han producido de aquellos en los que el individuo tiene un comportamiento de actividad procedimental, sin embargo hay momentos en los que la generalización es patente en las explicaciones que dan los alumnos. Los tres ejemplos difieren en la cualidad de las respuestas de los alumnos y por lo tanto tendremos ejemplos distintos de establecimiento de invariantes y de la correspondiente generalización. En el primer ejemplo, se muestra la actuación de un alumno que establece un invariante correcto en toda su extensión a partir de acciones sobre la sucesión numérica que acompaña a la tarea. En el segundo ejemplo, la alumna establece el invariante a partir de acciones sobre el dibujo. Por último, en el tercer ejemplo, se muestra cómo a partir de la asimilación de la tarea al esquema conceptual de proporcionalidad directa, se puede llegar por acomodación de tal esquema al establecimiento de una generalización no válida para todo n, es decir, parcialmente correcta.

Primer ejemplo. El siguiente extracto corresponde a la entrevista realizada al alumno S11.

[468.S11] I: Explícame cómo obtuviste que hacia falta 15 luces para el árbol de tamaño 4.

[469.S11] A: Empece... haciendo... sumando... se suma... iba de 4 en 4... empece sumando a cada uno 4... y al llegar al tamaño 10... ya era demasiado para sumar de 4 en 4... entonces ...empece a buscar una fórmula para que ... por ejemplo el tamaño 4, entonces con los datos que tenía, como va de 4 en 4, entonces busqué una fórmula para que me diera 15, ...4×4 me daba 16, me faltaba...restar 1 para 15, se lo resté...en el siguiente hice lo mismo y me daba 19...20 resto 1 y me da 19. Y luego lo apliqué aquí 4×10 y resto 1... aquí 20, 4×20 y resto 1.

Por su explicación se deduce que, en primer lugar capta la cualidad de la pauta, sumar cuatro. Luego, le parece mucho sumar cuatro a cada término hasta llegar el que ocupa el lugar diez, y por lo tanto pasa a buscar una regla mediante ensayo y error. La encuentra y la aplica al cálculo de *f*(10) y *f*(20) mostrando soltura y confianza.

Segundo Ejemplo. Los fragmentos corresponden a la entrevista de la alumna S5, sobre la tarea de los hexágonos.

[195.S5] A: *¿Cuántas cerillas harían falta para una cadena de 4 hexágonos?*

[196.S5] I: *Dime que estás pensando.*

[197.S5] A: *Lo que tendría que hacer es encadenar otro aquí.* **(Señalando el dibujo de la figura III).**

[198.S5] I: *A ver, ¿cómo sería?*

[199.S5] A: *¿Lo puedo continuar?* **(señalando la figura III y haciendo ademán de extender hacia la derecha)**

[200.S5] I: *Sí. Lo puedes dibujar.*

(dibuja un hexágono encadenado a la cadena de tres hexágonos de la figura III)

[201.S5] A: Serían **(contando las cerillas sobre el dibujo)** veintiuna cerillas... **(escribe "*21 cerillas*")**

En la primera cuestión, cálculo de f(4), la alumna utiliza un recuento directo sobre el dibujo. Tal comportamiento es de actividad procedimental, según lo discutido anteriormente. Se le pregunta, a continuación, por f(20).

[202.S5] I: *Y si encadenamos veinte hexágonos... ¿cómo calcularías las cerillas?...pon veinte hexágonos.*

[203.S5] A: **(escribe "*20 hexágonos* ")** *Como... el primero tiene seis* **(señalando el dibujo)**... *¿no?...el segundo es cinco...* **(señala pieza común)** *porque encadenas con uno... entonces pones seis más...*

[204.S5] I: *Ve escribiendo.*

[205.S5] A: **(escribe " 6 + ")**... *y entonces serían diecinueve los que quedan... diecinueve por cinco* **(escribe 19**

´ 5

95 *) que son las posiciones de más... pues. ciento uno.* **(Añade 95 a la operación dejada antes y la completa: "*6 + 95 = 101 cerillas*").**

Ya hemos visto antes que el éxito en un cálculo no garantiza la generalización. Luego, el investigador le pregunta por la validez general del cálculo.

[206.S5] I: *¿Cuál sería la regla general? Si te dan cualquier tamaño... ¿cómo lo calcularías tú?*

[207.S5] A: *Sería sumando el número de cerillas que tiene el primero. por ....a ver... el número de cerillas que tiene el primero...por...una menos que tienen los demás lo multiplicas luego por la cantidad que se de...*

En [207] se muestra claramente que la alumna ha abstraído una regla general para el cálculo. Pues su explicación ha perdido las referencias concretas de los ejemplos y su discurso se elabora en términos genéricos. El investigador le propone una particularización.

[212.S5] I: *Por ejemplo, son cien hexágonos. Cien.*

[213.S5] A: *Son cien... pues si tiene... si tiene a lo mejor seis cerillas... pues pones seis cerillas más cinco que es una menos... cinco... por cien.*
[214.S5] I: *Escríbelo. ahí...*
[215.S5] A: **(escribiendo *"6 + 5· 100 = 506"*)...** *seis. Más cinco... por cien... que serían quinientas seis cerillas en total.*

El invariante establecido corresponde a L2, aunque con un error en la variable.

Tercer ejemplo. Veamos a continuación un ejemplo que parte del uso de un conocimiento adquirido y que no es apropiado en esta situación, pero que conduce al establecimiento de un invariante parcialmente correcto, mediante acomodación del esquema a la tarea.

El fragmento que reproducimos corresponde a la alumna S3, y se refiere a las preguntas realizadas sobre los cálculos aportados por el alumno en la prueba escrita (problema del árbol de Navidad). Para las cuestiones introductorias la alumna sumó la diferencia constante a cada término anterior para hallar el siguiente. En las cuestiones relativas al tamaño 10 y al tamaño 20 aparecen unos cálculos aplicando la regla de tres y ajustados al final sumando una unidad para obtener en ambos casos el resultado correcto. Esta es la parte de la entrevista en la que nos interesamos por esas operaciones.

[73. S3] I: *Para calcular el tamaño diez... ¿qué hiciste?*
[74. S3] A: *Hice una regla de tres*. **(Vuelve la hoja a la primera página para ver el número de luces que necesita el árbol de tamaño 5)** *si cinco. diez y nueve....de diez ... equis...* **(señala los cálculos que hizo sobre el papel y los recita en voz alta).**
[75. S3] I: *Y.. ¿Por qué treinta y ocho más uno?*
[76. S3] A: *...no sé... porque... no sé... porque después conté... y digo, si este daba diecinueve... no podía dar treinta y ocho...*
[77. S3] I: ¿Por qué daba treinta y nueve?
[78. S3] A: *Porque los conté.*
[79. S3] I: *¿Dónde?*
[80. S3] A: *Aquí.* **(Señala el árbol de tamaño tres).**
[81. S3] I: *¿Cómo?... ¿hiciste el árbol de tamaño diez?*
[82. S3] A: *Si, y luego lo borré...* **(en el papel no hay rastro de un dibujo borrado)**
[83. S3] I: *¿Hiciste también el árbol de tamaño veinte?*
[84. S3] A: *....porque... supongo que si aquí había que sumar uno... aquí también...*

A pesar de que sólo han transcurrido tres días desde la prueba escrita, la alumna parece no recordar cómo cayó en la cuenta de que, la regla de tres le llevaba a un resultado erróneo. Este ejemplo, es claro de la asimilación de una situación novedosa a un esquema existente (regla de tres) y de la acomodación de tal esquema a la situación mediante la modificación del mismo, pues al ajustar el valor dado por la regla de tres al caso de tamaño 10, la alumna ha establecido la expresión para el cálculo equivalente a $f(10) = 2f(5) + 1$, y esta expresión es aplicada sin señal de duda, y con manifiesta confianza, al cálculo del número de luces en el árbol de tamaño 20, obteniendo $f(20) = 2f(10) + 1$. Es decir, la alumna ha establecido un invariante y por lo tanto ha hecho una generalización. Matemáticamente tal generalización no es válida para todo valor de n, pues dado que la expresión para el término general es $f(n) = 4n - 1$, se sigue que $f(2n) = 4´\cdot 2n - 1 = 2(4n -1) + 1 = 2f(n) + 1$, y por lo tanto la expresión es correcta para todo término que ocupa una posición par, (tamaño par del objeto). Pero independientemente de este hecho, está claro que la alumna ha generalizado tal expresión y ha contado, además, con el hecho de que los datos dados en el problema le son favorables. Este ejemplo muestra que incluso partiendo de un esquema conceptual erróneo, proporcionalidad directa, o de una actividad procedimental, un alumno puede establecer una generalización correcta. Tal generalización ha sido posible, al superar la alumna el obstáculo epistemológico que supone el esquema conceptual de proporcionalidad directa. Este es un ejemplo paradigmático de lo que Sierpinska considera un acto de comprensión, a través de ensayo y validaciones sucesivas de tales ensayos.

5.4.3. La comprensión conceptual

La comprensión conceptual, como señalamos en el capítulo dos, se caracteriza por ser *rica en relaciones*. La comprensión conceptual como acto, se traduce en los comportamientos cognitivos beta y gamma de Piaget. Y en esto radica la dificultad de su evaluación externa.

Como pondremos de relieve en este apartado, para determinar con cierto grado de fiabilidad la comprensión conceptual de los alumnos, hemos de analizar su comportamiento en una secuencia de, al menos, dos tareas del mismo tipo. Veremos que tal comprensión puede tomar diferentes formas según los alumnos.

5.4.3.1. Primer caso: expansión de un esquema existente. Los fragmentos de la entrevista, con la que ilustramos este ejemplo, corresponden al alumno S4. Analizaremos en primer lugar su explicación a los cálculos realizados durante la prueba escrita. En su respuesta a la cuestión relativa al tamaño *n*, este alumno anotó:

Tamaño n: *"árbol tamaño n =* N_1 *+(N-1)·D*
D = Diferencia
N_1 *= Primer árbol"*

La respuesta induce a pensar que este alumno ha recibido previamente instrucción en progresiones aritméticas. Tal expresión está contextualizada en los términos dados en la tarea, aunque la notación empleada no es claramente la expresión estándar ($a_n = a_1 + d(n-1)$) que suele aparecer en los libros de texto y que por otro lado la mayoría de los alumnos reproducen cuando reconocen en el problema, la característica de la diferencia constante de un término al anterior tal y como ya señalamos en el estudio primero.

[107. S4] I: Explícame este cálculo. ¿Cómo lo hiciste? (**Refiriéndose a la primera cuestión**)
[108. S4] A: *Me fije en el dibujo, en el primero y después... en el segundo y.. vi ...más o menos lo que tenía de diferente...y...*
[109. S4] I: *Y.. ¿Qué notaste tú de diferente?*
[110. S4] A: *Que... por ejemplo... que el árbol que se le había añadido por debajo...*
[111. S4] I: *Señálamelo con el lápiz.*
[112. S4] A: *...el árbol que se le había añadido por encima podía ser también* **(señala sobre la figura II en la base y puntea sobre las cuatro luces).** *El que estaba debajo llevaba... ahora... llevaba dos luces más... las cuatro luces* **(se mueve señalando de la figura II a la I)...** *tendría... cuatro luces más* **(vuelve a la figura II señalando)** *y ese se volvía a repetir en el siguiente dibujo* **(señala la figura III).**

En esta primera parte de la entrevista, el alumno hace referencia clara al dibujo, incluso habla de que se añade un árbol, una vez por arriba y otra por debajo, a la figura 2. Es como si contemplara tal figura como construida a partir de la primera. El alumno anota que para pasar del tamaño uno al tamaño 2 y del tamaño 2 al tamaño 3 se necesitan cuatro luces más.

[113. S4] I: *Y entonces... ¿cómo calculaste el quince?*
[114. S4] A: *¿El quince?...*
[115. S4] I: *Si... ¿cómo calculaste tú que si había cuatro árboles ahí... eran quince...?.*
[116. S4] A: *No sé... le sume cuatro a once* **(primero señala la figura II luego se mueve señalando al dato 11).**
[117. S4] I: *Y.. ¿El treinta y nueve?*
[118. S4] A: *Me estoy acordando de... no me acuerdo...más o menos me acorde de otros años y...*
[119. S4] I: *Intenta recordar cómo calculaste tú que eran treinta y nueve luces. Pones el cálculo pero no lo explicas.*
[120. S4] A: *Más o menos probando... en el papel... fui probando...*
[121. S4] I: *¿Cómo?...Hazlo en el papel...*

[122. S4] A: *Más o menos... intente... me acorde que el primer árbol tenia... ¿cuántas?.. Tres* **(escribe 3)...** *lo que quería calcular* **(hace signos sobre el papel al lado del 3 escrito)** *era cuántas luces más había... por ejemplo... el árbol de tamaño diez* **(señala el dibujo figura III)**... *serían... las tres luces iniciales más* **(escribe + al lado del 3).** *Si a cada árbol...de diferencia tenían cuatro luces, ¿no?...tenía que multiplicar el número de alturas que tiene por la diferencia que hay de uno a otro que es cuatro... ¡ahí va!. No me acuerdo...*

En el anterior fragmento hay una clara referencia a recordar algo de otros años. Además el alumno en el último párrafo nombra la diferencia que hay de uno a otro tamaño. Los alumnos que no han sido instruidos en progresiones aritméticas no suelen utilizar este término, por lo menos los que nosotros hemos entrevistado. Suelen hablar de añadir una cantidad pero nunca hacen referencia a una resta. El investigador sospecha que este alumno ha sido instruido en progresiones aritméticas. Posteriormente confirmará que es un alumno que proviene del BUP.

[123. S4] I: *Inténtalo.*
[124. S4] A: **(escribe 10·4, para luego concluir en *3+(10·4)*)**
[125. S4] A: *...me falla algo...*
[126. S4] I: *¿Qué té falla?*
[127. S4] A: *¿Puedo ver la fórmula?*
[128. S4] I: *¿La que hiciste?...Sí...*
[129. S4] A: *.... Ah... Claro... tengo que restarle el árbol inicial, porque al árbol inicial... porque no tenía las cuatro luces... y después sería...* **(vuelve a escribir debajo de lo anterior 3 +)** *más... el puesto* **(escribe *10-1*)** *que tendría menos el árbol inicial... y esto todo... multiplicado por la diferencia de luces. por cuatro*....**(*3+(10-1)·4*).**

La explicación del alumno relativa a los cálculos realizados nos da pistas de varios aspectos de su proceder. En primer lugar, el dibujo le aporta la *diferencia constante*. Luego habla de algo que no recuerda y debe revisar varias veces la expresión anotada para el término general, cuando tiene que justificar otro cálculo realizado. Incluso se da cuenta de que algo le falla en una primera anotación y vuelve hacia la fórmula general para verificar dónde está su error. En esta última parte, no es el dibujo, ni siguiera la sucesión, sino su deseo de recordar y de ver una y otra vez la fórmula escrita lo que le lleva a establecer el cálculo correcto para el árbol de tamaño diez. El esquema formado anteriormente de progresiones aritmética es muy débil, y prueba de ello es que el alumno duda y reconoce que su recuerdo no es muy bueno. Sin embargo, parece ser que al final de la entrevista sobre la primera tarea ha logrado reconstruirlo. Veamos que ocurre con la segunda tarea.

La entrevista comienza con la pregunta sobre el número de palillos para una cadena de hexágonos de tamaño cuatro.

[130.S4] I: *¿En qué té estas fijando?*
[130.S4] A: *Me fijo en... el número de cerillas que tiene el primero y* **(señalando el dato 6 se mueve al dato 11 con el lápiz)** *la diferencia que tiene con el segundo...*

El alumno vuelve a referirse a la diferencia, no a que hay que sumar o añadir algo para pasar del primero a segundo. Además sus observaciones son sobre los datos numéricos, no sobre las figuras de los objetos. Su percepción de la tarea se aleja, cada vez más de los elementos pictóricos, y se centra en los datos numéricos.

[130.S4] I: *Té estas fijando en el seis y el once...*
[130.S4] A: *Si... veo que tienen cinco cerillas... de diferencia... y otra vez se vuelve a repetir esa... cinco...* **(señalando el dato 16 correspondiente a la tercera cadena de hexágonos)**

[130.S4] I: *Entonces. ¿El de cuatro…?*
[130.S4] A: *El de cuatro... por lógica debería de tener cinco más... que serían veintiuno.*
[130.S4] I: ***Escribe. ahí...***
[130.S4] A: .... **(escribe 4 h = 21)**
[130.S4] I: *¿Cómo sacaste el veintiuno?*
[130.S4] A: *....repitiendo la diferencia...* **(señalando entre los datos 6, 11, 16)***... sumando a dieciséis... cinco.*
[130.S4] I: *Supón que ahora tenemos 23 hexágonos.*
[130.S4] A: *A los veintitrés hexágonos esos les restaría...*
[130.S4] I: *Ve haciéndolo en el papel.*
[130.S4] A: *...le restaría (escribe 23 - 1) uno, el primer hexágono... y ahora al resto, veintidós, los debería de multiplicar por el número de cerillas... no por la* diferencia **(señala los datos 6 y 11*)*** *que tengo del primero...*
[130.S4] I: *Hazlo.*
[130.S4] A: .... **(termina de escribir 22·5 = 110) (escrito *“23 H Þ 23 - 1 = 22 · 5 = 110”*)**

El alumno se ha quedado parado observando los datos. A continuación muestra serias dudas sobre el cálculo efectuado. No hace ningún gesto de girar la hoja como ha hecho otras veces y de ir a echar un vistazo a la fórmula anotada en la prueba escrita.

[130.S4] A: *Ya está... ¿no?...¿a ver?...así no...*
[130.S4] I: *¿ Tú crees que está bien?*
[130.S4] A: *No... No, No... porque tendría que... tendría que sumarle... tendría que haber sumado antes* **(señalando con el lápiz las operaciones)** *el número de cerillas que tiene el primer hexágono* **(señalando el primer hexágono sobre las cerillas*)***...

Ahora se ha referido al dibujo.

[130.S4] I: *Sumar, ¿a quién?.*
[130.S4] A: *Esto sería el número de hexágonos que hay entre el primero y el último... y entonces esto...* **(señalando sobre los cálculos)***... esto... y por la diferencia... tendría que sumarlo a esto... al ciento diez...*
[130.S4] I: *Tendrías que sumar...*
[130.S4] A: *Seis... que son las que lleva... el hexágono base...* **(escribe + *6 = 116)***
(escrito “ 23 H Þ 23 - 1 = 22 · 5 = 110 + 6 = 116”*)*

El investigador tiene la intuición de que, aunque el alumno no lo manifiesta claramente, está aplicando de nuevo la misma fórmula que en la anterior tarea. Así, que le hace una pregunta directa.

[130.S4] I: *O sea... que... la regla...*
[130.S4] A: *¿La regla?*
[130.S4] I: *Si, ¿cuál es la regla?*
[130.S4] A: *¿Sí?*

El alumno no parece entender la pregunta, así que se impone una cuestión más directa.

[130.S4] I: *La fórmula. ¿Cuál es la fórmula?*
[130.S4] A: *Si... sería... ¿la escribo?*
[130.S4] I: *Sí.*
[130.S4] A: *Sería... ene igual a..* **(escribe n =)**
[130.S4] I: *¿Quién es ene?*
[130.S4] A: *Lo que quiero hallar. El primero... este... sería... ene sub uno...* **(continua escribiendo $n_{1)}$)**
[130.S4] I: *Tu... estás usando una fórmula... ¿cuál?*

[130.S4] A: *De... la de... en la... de sucesiones me parece... pero no me acuerdo...*
[130.S4] I: *No te acuerdas... pero inténtalo... sácalo sin la fórmula...*
[130.S4] A: *Yo lo primero... cuando hice el árbol... primero lo hice y después me acorde de la fórmula...*

Aquí el alumno ha confirmado la sospecha que hemos señalado anteriormente. La primera tarea ha servido para que el alumno reconstruya la fórmula olvidada para el término general de una progresión aritmética.

[130.S4] I: *Inténtalo aquí también...*
[130.S4] A: *Sería el primero... más... ene menos uno... por...* **(escribe $n = n_1 + (n - 1)$)**
[130.S4] I: *La diferencia...*
[130.S4] A: *La diferencia...* **(termina escribiendo D)... (escrito $n = n_1 + (n - 1) \cdot D$)**
[130.S4] I: *Tu... ¿no te acordabas de ella…?*
[130.S4] A: *Sí... no...*
[130.S4] I: *¿Te la ha recordado el problema?*
[130.S4] A: *Si... es que el año pasado... fueron muchas fórmulas... no me acordaba de casi nada... me lo ha recordado el problema... sí...*

La entrevista, muestra claramente que el alumno ha reconstruido una fórmula que le fue enseñada el curso anterior. En este sentido es clara su afirmación final sobre las muchas fórmulas del año pasado y lo arduo que le resulta recordarlas todas. Como el mismo afirma, la situación planteada le ha permitido tal reconstrucción. Es a partir de resolver las cuestiones planteadas en la prueba escrita lo que le permite identificar la situación dada como una de progresiones aritméticas y es por esto, que anota al final de la prueba escrita una fórmula equivalente al término general de tales progresiones y no una expresión general contextualizada en la tarea, como hacen otros alumnos.

El comportamiento del alumno se puede resumir de la siguiente manera. En primer lugar se observa una asimilación de las tareas propuestas al esquema débil de progresiones aritméticas. El dibujo, y después la sucesión numérica, le asegura que las tareas pueden corresponder a sucesiones aritméticas. Habla de la diferencia, en clara referencia a la diferencia de un término al anterior. Luego intenta recordar la fórmula, la escribe y finalmente la aplica a los cálculos requeridos. El esquema de progresiones aritméticas también se acomoda a la tarea y permite su reconstrucción para asimilar las nuevas situaciones propuestas. En este sentido, el esquema conceptual presente se reconstruye y se enriquece con las nuevas tareas. Respecto del esquema cognitivo resultante estaríamos frente a lo que Harel y Tall (1991) denominan una generalización expansiva, pues el esquema existente, aunque débil, se expande para incluir la nueva tarea.

5.4.3.2. Segundo caso: construcción del esquema conceptual.

Los fragmentos de entrevista que mostramos a continuación, corresponden al alumno S1. Este alumno proviene de un centro de Educación General Básica, donde el curso anterior realizó el 8º de EGB. Anotamos este dato pues suponemos que no ha recibido, anteriormente, instrucción sobre progresiones aritméticas. La primera parte de la entrevista versa sobre sus respuestas a la tarea del árbol de Navidad.

[1. S1] I: *¿Cómo calculaste 15?* **(señala al dato aislado en la hoja de trabajo)**
[2. S1] A: *Porque al principio un árbol tiene tres luces y por cada árbol que le añadieras son cuatro luces.* **(señalando el dibujo)**
[3. S1] I: *¿Cómo que cada árbol? Explícame...*
[4. S1] A: *Cada tamaño...* **(señala el dibujo)**
[5. S1] I: *Ah!. Cada tamaño...*
[6. S1] A: *Cada tamaño eran cuatro luces... y el primer tamaño siempre lleva tres luces, entonces hice tres por cuatro, o sea tres tamaños tienen que llevar forzosamente*

cuatro luces y el otro tamaño, que es el primero, lleva tres luces, tres por cuatro... doce... más tres. quince.
[7. S1] I: *Que es este cálculo... ¿no?.*
[8. S1] A: *Sí.*

El alumno no había explicado cómo calculó el número de luces para los árboles de tamaño cuatro y cinco, se limitó a consignar los resultados. En la explicación, se observa que S1 utiliza un recuento indirecto para las cuestiones introductorias. Sin embargo, queda claro durante esta fase de la entrevista, que se ha dado cuenta de que se pasa de un tamaño al otro sumando cuatro luces al tamaño anterior. El alumno, ha tenido tiempo de observar lo realizado en la prueba y es muy posible que utilice la expresión general para la explicación de los cálculos en las cuestiones introductorias. Luego, este alumno no opta por lo evidente, sumar cuatro, sino que elige una explicación más elaborada.

El fragmento que sigue ya ha sido reproducido en el apartado donde se analiza la acción y el esquema de la acción. Lo volvemos ha reproducir aquí para que haya continuidad en la exposición del comportamiento del alumno.

[9. S1] I: *Entonces... ¿cómo calculaste el tamaño 10?*
[10. S1] A: *Porque... son el primer tamaño... son tres, está aquí* **(señala los cálculos)**... *después el segundo tamaño son pues nueve por cuatro luces que tiene cada tamaño... nueve por cuatro... treinta y seis... más tres... treinta y nueve.*
[11. S1] I: *¿En qué te fijaste tú para ver que era de cuatro en cuatro?*
[12. S1] A: **(gira la hoja)** *En principio aquí son tres...* **(señala el dibujo).** *después se le añade uno... son cuatro... otro son cuatro... otro son cuatro... cuatro... cuatro...* **(gestos sobre el árbol de tamaño 3 desde la cúspide hasta la base y continuando como si el árbol de tamaño tres se prolongara por la base)**

Sus explicaciones muestran claramente que ha realizado una generalización de la regla para el cálculo, ha establecido un invariante. El investigador se interesa por la expresión algebraica anotada en la cuestión relativa al tamaño *n*.

[13. S1] I: *¿Esa es la regla?*
[14. S1] A: *Si, es que no puede ser de otra manera.*
[15. S1] I: *¿Cómo sacaste la fórmula?* **(Girando la hoja y señalando la expresión algebraica).**
[16. S1] A: *Al final... pues hice tamaño n, imagínate que n es por ejemplo diez...* **(razonando en voz alta)**... *entonces le descuentas el primer tamaño que lleva tres... ene menos uno... diez menos uno... nueve... entonces esos nueve tamaños siempre llevan cuatro luces... lo multiplique por cuatro, luego le sume el primer tamaño que tiene tres luces...*

La explicación del alumno es, podríamos decir tan "didáctica", que sobran los comentarios. Este es un ejemplo claro de expresión, por un alumno, de las cualidades intensional y extensional de la generalización establecida.

Veamos su actuación en la segunda tarea.

[17. S1] I: *Bien. Ahora te voy a dar otro problema. Procura explicarme lo que haces...*
[18. S1] A: *...este tiene seis y por cada uno que se le añaden son cuatro más...* **(señala el dibujo y cuenta los puntos, cabezas de las cerillas, señala como contando los puntos, va de la fig. I a la II, luego cuenta sobre la fig. III. Señala el texto de la cuestión 4, y vuelve a la figura III, hace signos sobre el papel como si estuviera extendiendo la cadena añadiendo un cuarto hexágono).** *Bueno, ya está..*

.

En primer lugar, resalta el valor de la diferencia constante, cuatro cabezas de cerillas, y señala sobre le dibujo. La diferencia constante en la sucesión numérica es cinco, que corresponde a palillos y no a las cabezas de las cerillas. Este hecho, que se nos pasó por alto cuando elaboramos la prueba escrita, muestra aquí en esta precisa entrevista el valor que los alumnos le dan a sus acciones sobre el dibujo.

[19. S1] I: *Contesta la pregunta.*
[20. S1] A: *En principio son...* **(escribe 3· 4 = 12...)** *y luego le sumo seis*... **(continua... + 6 = 18)** *son dieciocho, dieciocho serían...*
[21. S1] I: *Dieciocho.*
[22. S1] A: *No, no, espera, espera. son seis, y cuatro....¿tres hexágonos necesitan diez y seis cerillas?* **(Observa que el número que aparece como total de cerillas para una cadena de tres hexágonos no corresponde con sus cálculos. Ha contado los puntos y no los palillos. El investigador no le corrige sino que le dice que corrija el dato aportado y que continúe con su razonamiento)**
Si aquí hay seis, diez. catorce cerillas....son catorce....no diez y seis.
(....)

El fragmento anterior muestra claramente que el alumno duda, y de hecho desecha los datos aportados por la tarea. Confía más en los que ha obtenido fijándose en determinados elementos del dibujo, los puntos negros que quieren representar cabezas de cerillas, y no en los segmentos que corresponderían a los palillos. La acción que realiza es la misma, en la explicación, que la realizada en la primera tarea.

[23. S1] A: *El primer hexágono siempre lleva seis,* **(señalando sobre la fig. III)** *y después aquí cuatro, se cogen las dos primeras de este... dieciocho.*
[24. S1] I: *¿Cómo lo calcularías si el tamaño fuera trece?*
[25. S1] A: *Sería...* **(escribe TAMAÑO 13)...** *doce por cuatro igual cuarenta y ocho... más seis del primero... cincuenta y cuatro...* **(escribe 12·4 = 48 + 6 = 54).**
[26. S1] I: *Y si el tamaño es cincuenta y dos...*
[27. S1] A: *Pues la misma regla.* **(escribe TAMAÑO 52)** *... tamaño cincuenta y dos son cincuenta y uno por cuatro...igual a doscientos cuatro...más seis ... serían doscientos diez* **(escribe 51· 4 = 204 + 6 = 210).**

El alumno establece el mismo invariante que en la tarea anterior. Su actuación es un calco de la allí realizada. El investigador, a la vista de la similitud de ejecución y la confianza mostrada por el alumno, cierra la entrevista con una pregunta más general.

[28. S1] I: *La regla. si fuera n el tamaño, ¿ cuál sería la regla ?*
[29. S1] A: *Si el tamaño es n* **(escribe TAMAÑO N),** *lo que tienes que hacer es sustituir ene menos uno, después por cuatro, y después se le suma seis.* **(Escribe ((n-1)·4)+6).**
[30. S1] I: *...que corresponde a..*
[31. S1] A: *Al primer hexágono...*

La estructura simbólico algebraica es la misma en las dos tareas. Esta claro que para este alumno, la segunda tarea ha servido para extender la forma global de actuación que desarrolló en la primera tarea. El establecimiento de un invariante dentro de una tarea, es decir, la generalización de la regla específica para el cálculo empleada en una cuestión, a las demás cuestiones, seguida de una transferencia de la misma estructura general del cálculo a otro problema del mismo tipo, nos lleva a otro tipo de generalización contemplada en el marco teórico de Dörfler, que es la generalización del resultado de las acciones. En la primera de las generalizaciones, regla específica para el cálculo, hay elementos constantes y los elementos variables son n (tamaño del objeto, o posición que ocupa en al sucesión) y $f(n)$ (elementos que constituyen el objeto o término de la sucesión). Los elementos constantes están relacionados, según el invariante establecido, con el primer término, con la diferencia constante o con ambos.

Al transferir la misma estructura de cálculo de un problema a otro se varían también aquellos elementos que en la situación anterior eran constantes. Esta variación de los elementos constituye una generalización, cuya cualidad es claramente extensional, pues el rango de referencia para tales elementos se ha ampliado. Pero aquí hemos de distinguir entre los diferentes invariantes establecidos y generalizados como resultados de las acciones. Pues, no es lo mismo generalizar la estrategia, mediante la cuál se establece el invariante $f(n) = a(n-1) + f(1)$, que generalizar la estrategia mediante la cuál se establece cualquiera de los invariantes del tipo B (I6). Pues en el segundo de los casos los invariantes no reflejan ninguno de los elementos básicos de la pauta lineal (diferencia constante y primer término). Este punto de la discusión será abordado en el siguiente apartado.

La comprensión conceptual, tal y como la hemos tipificado en este tipo de tareas, es un signo claro de construcción de un esquema conceptual, pues el esquema existente o en construcción se enriquece y se refuerza mediante el éxito en tareas similares. El esquema cognitivo resultante se ha reconstruido, al establecer relaciones con esquemas anteriores y acomodar la tarea. Es lo que Harel y Tall (1991) denominan una generalización reconstructiva del esquema cognitivo. El alumno S1 ha utilizado obviamente esquemas ya formados y de los cuales hemos hablado en las conclusiones del estudio primero. Pero en la terminología adoptada sobre esquemas conceptuales (von Glaserfeld) las nuevas tareas forman parte del esquema construido, así como las conexiones establecidas con esquemas ya poseídos.

Los dos casos analizados en este apartado nos proporcionan una visión más amplia de la actuación de los alumnos en una secuencia de tareas. Ambos alumnos han generalizado la estrategia empleada en una tarea al aplicarla de forma similar, idéntica podríamos afirmar, a la siguiente tarea.

Si limitamos nuestro análisis a una sola tarea, creemos que las consecuencias que se pueden derivar de la comprensión de la misma por un alumno podrían llevarnos a conclusiones no correctas e incluso ocultarnos inconsistencias y debilidades de los esquemas en formación. Esto último será analizado en el siguiente apartado.

5.4.4. La actividad y la comprensión procedimental en una secuencia de tareas.

Ya hemos señalado la importancia que tiene el observar la actuación de un alumno en la secuencia de las dos tareas, a la hora de valorar su comprensión de las mismas. Esta observación es necesaria en el caso de la comprensión conceptual tal y como hemos puesto de manifiesto en el apartado anterior. Surge la cuestión de cómo tipificar la actuación de un alumno que no mantiene la consistencia en su comportamiento al pasar de una a otra tarea, es decir, modifica el par acción-invariante. Parece claro que un alumno cuyo comportamiento haya sido de actividad procedimental en cada tarea, se considerará que su comportamiento en el conjunto de las dos tareas es de actividad procedimental. Sin embargo, un alumno cuyo comportamiento haya sido de comprensión procedimental en cada parte de la tarea, y que cumpla la condición impuesta de mantener el par acción-invariante en la segunda tarea, su comportamiento global puede ser caracterizado como de comprensión conceptual. Cabe por tanto varias posibilidades. Puede ocurrir que algunos alumnos utilicen una estrategia correcta para un problema y otra diferente e incorrecta para el siguiente problema propuesto. Tal cambio lo consideramos signo de actividad procedimental en conjunto, pues el alumno no ha sido capaz de generalizar la estrategia (formada por el par acción e invariante) correcta al pasar de una situación a la siguiente. Aquí se plantea un problema, pues no deberíamos considerar por igual el tránsito desde una estrategia incorrecta hacia una correcta que viceversa. En el primero de los casos, cuando el alumno es capaz de abandonar una estrategia incorrecta y pasar a otra correcta, podría ser signo de una reconstrucción cognitiva de los esquemas empleados, pero en conjunto la actividad no es de comprensión procedimental, pues consideramos que tal comprensión parte de la generalización de la estrategia correcta en una secuencia de problemas. Tal es el caso del alumno S5. En estos casos habría que confirmar el comportamiento del alumno con otra nueva tarea del mismo tipo.

Por otro lado, nos plantea ciertos problemas tipificar la comprensión de aquellos alumnos cuyo comportamiento local, en cada tarea, es de comprensión procedimental. Pues no todos los casos son como los discutidos en el apartado anterior. En nuestro estudio tenemos tres casos. El estudiante S2, desarrolla la estrategia definida por el par A1-I1 en la primera tarea, y en la segunda tarea desarrolla la estrategia A1-I2. La acción es la misma, no así el esquema resultante ni el invariante. Su actuación pasa del invariante $f(n) = a(n-1) + f(1)$, al invariante $f(n) = 6n - (n - 1)$, que claramente depende del dibujo de la segunda tarea. No ha generalizado la estrategia primera al abordar la segunda, tal y como discutimos en el apartado anterior. Luego su comprensión global en el conjunto de las dos tareas debe ser tipificada como comprensión procedimental. El dibujo, aunque un medio importante en el desarrollo de la generalización, se puede convertir en un obstáculo. El estudiante S3 plantea otro caso diferente. Mantiene la misma estrategia en ambas tareas, A5-I6, pero ha asimilado las tareas propuestas a un esquema conceptual erróneo, aunque luego ha acomodado el esquema a la tarea para concluir con un invariante parcialmente correcto. Sin embargo, generaliza tal estrategia a la segunda tarea, donde vuelve a establecer un invariante parcialmente correcto. Dado que el rango de validez de los invariantes no es total, consideraremos tales comprensiones como procedimentales. El significado personal del alumno, difiere del significado institucional (Godino y Batanero, 1994).

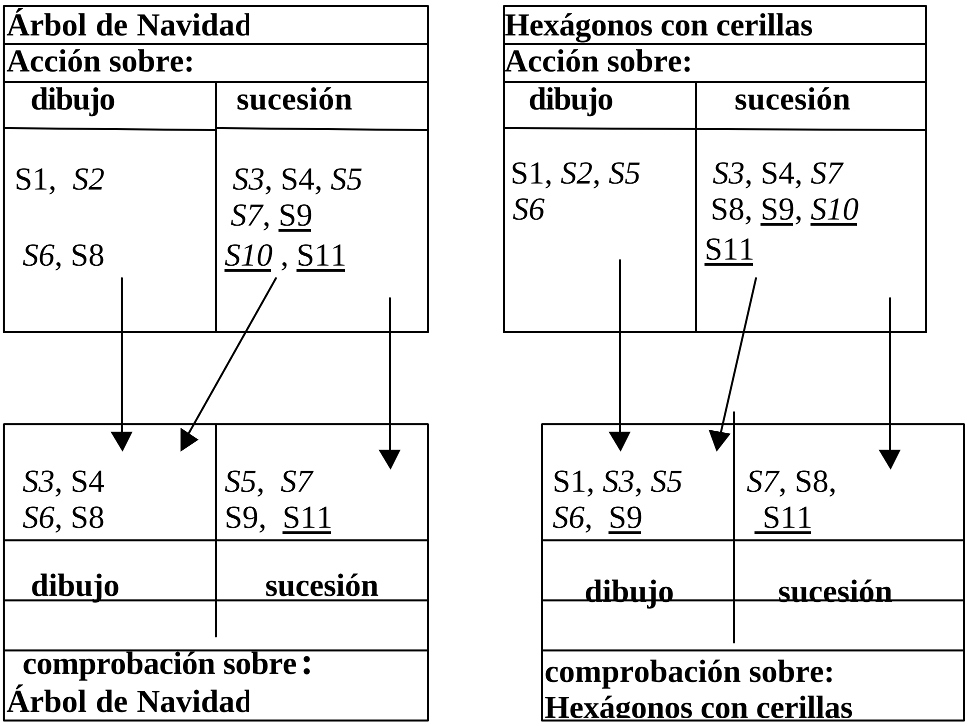
5.5. El papel de los ámbitos numéricos y gráficos

En este apartado presentamos nuestras conclusiones sobre el papel que juegan los ámbitos numéricos y gráficos, es decir la sucesión y el dibujo presentes en el formato de tarea, en el desarrollo de la generalización por parte de los alumnos. Tal papel podría servir para señalar otra cualidad de las estrategias empleadas por los alumnos como es el carácter visual, numérico o mixto de ambas. De forma general, una *estrategia visual* es un método de solución que "involves visual imagery, with or without a diagram, as an essential part of the method of solution" (Presmeg, 1986, p.298). En este trabajo consideramos que una *estrategia visual* es aquella en la que el dibujo que acompaña a la situación juega un papel esencial en el proceso de abstracción. Por otro lado, una *estrategia numérica* es aquella que utiliza, como parte esencial del proceso de abstracción, los datos numéricos. Una estrategia mixta, sería por tanto aquella que combina ambos elementos numéricos y gráficos en el proceso de abstracción. Es pues, su carácter numérico o visual lo que nos interesa señalar en este apartado con referencia al papel jugado en el proceso de abstracción y cuya conclusión es el establecimiento de un invariante.

La grabación de la actuación de los alumnos durante las entrevistas se ha mostrado clave en determinar cuándo un alumno utiliza un ámbito u otro. En los protocolos hemos señalado cuando un alumno hace gestos o indica elementos concretos del dibujo o de los datos numéricos para reforzar sus explicaciones.

En el apartado 4.3. hemos señalado las acciones que realizan los alumnos sobre los ámbitos numéricos y gráficos, luego un papel importante que juegan ambos ámbitos es servir de escenarios para el desarrollo de las acciones y por lo tanto como punto de partida para la abstracción. Sin embargo, hay otro papel que, por lo general, queda oculto en el desarrollo de la estrategia y que es el de dónde comprueban los alumnos que la estrategia empleada es o no correcta. También por qué algunos alumnos no comprueban o no sienten la necesidad de comprobar si la estrategia empleada es correcta o no. Un análisis de los protocolos de las entrevistas revela dos tipos diferenciados de comportamiento. En primer lugar, el de los alumnos que realizan comprobaciones y el de los alumnos que no necesitan comprobar si la estrategia es correcta. Más aún, si los cálculos, es decir la regla empleada, es válida o no. Hemos señalado anteriormente que comprobar la regla abstraída debe considerarse como una acción dentro del proceso de abstracción. Esta acción es importante para aquellos alumnos que utilizan el ámbito numérico en el desarrollo de la estrategia como muestra el siguiente GVT.

GVT- Relación entre acciones y comprobación relativas al ámbito empleado



Independientemente de que los alumnos hayan establecido un invariante, el grafo muestra que aquellos alumnos que realizan las acciones sobre el dibujo no comprueban sobre los datos numéricos aportados en ninguno de los dos problemas. Durante las entrevistas mostraron una mayor seguridad que los alumnos que realizan las acciones sobre la sucesión numérica y ello es debido a que el reflejo de las acciones sobre el dibujo fija de manera precisa y sin ambigüedad la estructura general del invariante desarrollado (generalización intensional). Sin embargo, comprueban sobre el dibujo algunos alumnos que desarrollan las acciones sobre el ámbito numérico (S3 y S4 en el problema del árbol de Navidad y S3, S9 en el problema de los hexágonos con cerillas).

Sólo dos alumnos, S2 y S10, no realizaron ninguna comprobación. El alumno S1 realizó la comprobación en el problema de la cadena de hexágonos sólo cuándo fue preguntado por el entrevistador al final del proceso. Por otro lado el alumno S4 no realizó ninguna comprobación pues reconoció la pauta de la cadena de hexágonos como similar al problema del árbol de Navidad y aplicó directamente el invariante obtenido en el problema anterior.

La forma más común de comprobar la validez del esquema invariante, es contando sobre el dibujo o extendiendo la sucesión numérica, por suma iterada de la diferencia constante, hasta el término deseado. Sólo dos comprobaciones fueron realizadas sustituyendo un par *(n,f(n))* conocido y comprobando su validez en ambos problemas. En ambos casos eran alumnos (S7 y S11) que habían utilizado los datos numéricos como fuente de las acciones durante el proceso de abstracción. Para el alumno S7 la comprobación es esencial en el establecimiento del invariante I5 a partir de la acción A4. Sin embargo, para S11 la comprobación no fue suficiente para el establecimiento del invariante.

El comportamiento de los alumnos S1 y S2 es notable. Ambos utilizan el dibujo y a partir de un único ejemplo, cálculo de *f(4),* establecen el invariante correspondiente que aplican, sin referencia ulterior al dibujo, al cálculo de *f(10)* y *f(23),* respectivamente. Para estos alumnos el proceso de abstracción concluye en una generalización intensional en la que los elementos variables y constantes del invariante pierden el referente de la situación en que han sido abstraídos (el dibujo) y cobran significado por sí mismos. La cualidad extensional de la generalización se pone de manifiesto al extender el rango de referencia de *n* a cualquier número entero.

El comportamiento mostrado por los estudiantes muestra que el dibujo juega un doble papel, por un lado es el ámbito donde se realiza la abstracción y por otro sirve de medio para comprobar los invariantes desarrollados en el ámbito numérico. Pues el hecho de desarrollar el invariante mediante acciones introducidas en el dibujo, lleva implícito la acción de contar sobre el mismo, que como hemos visto es una acción rutinaria, que emplean los alumnos para ganar confianza en sus cálculos parciales.

5.6. Niveles de generalización. Esquema de descomposición genética.

Lo expuesto en los apartados anteriores sobre la actuación de los alumnos tanto en el ámbito local, dentro de un problema, como en el ámbito global, nos lleva a considerar diferentes niveles de generalización, que por otro lado son elementos claves en la descomposición genética del esquema conceptual de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal.

Los problemas de generalización lineal conllevan una pauta numérica cuya expresión simbólico-algebraica corresponde con la función afín $f(n) = an + b$, con a y b números enteros, $b \neq 0$, y $f(n)$ y n naturales; además a es la diferencia constante y, por lo tanto, $f(n+1) - f(n) = a$ para todo n natural, siendo la anterior relación la característica necesaria del tipo de sucesiones numéricas asociadas a este tipo de problema. Sin embargo, no las caracteriza suficientemente pues la misma relación es también propia de las *funciones lineales*, $f(n) = an$, y por lo tanto no es una relación exclusiva de la función afín.

Llamaremos a la expresión $f(n) = an + b$, forma canónica de la pauta lineal, pues existen otras formas equivalentes de expresar la relación como lo son: $f(n) = a(n - 1) + f(1)$, $f(n) = a(n - 2) + f(1) + a$. Además para cada problema de generalización lineal concreto tenemos relaciones particulares, pues si la pauta corresponde a la forma canónica $f(n) = 4n - 1$, entonces se puede expresar también como $f(n) = 3n + (n - 1)$ o como $f(n) = n + n + (n -1) + (n - 1) + 1$. En resumen, el *significado* $f(n) = an + b$, posee varios *significantes*.

Nuestro objeto de investigación es la descomposición genética del esquema conceptual de pauta lineal, que incluye obviamente su expresión formal matemática dada por la forma canónica $f(n) = an + b$. Luego entendemos el concepto de pauta lineal como el desarrollo por los alumnos del esquema conceptual asociado a la función afín discreta $f(n) = an + b$, a partir de los problemas de generalización lineal.

Los diferentes elementos que intervienen en la expresión canónica, $f(n) = an + b$, y su simbolización por parte de los alumnos es un aspecto clave del proceso de generalización. La acción de simbolizar y el carácter cognitivo del resultado es un estadio importante en el marco de la generalización teórica.

En primer lugar $f(n)$ y n forman un par importante en el proceso. Dentro del tipo de problema tratado, el valor de $f(n)$ corresponde con el término de la sucesión numérica asociada y con el número de elementos que componen los tamaños requeridos de los objetos en los problemas a resolver. El valor de n corresponde con la posición en la sucesión, su carácter es eminentemente ordinal en principio y, más tarde toma el carácter de variable independiente (número natural), y es también el tamaño del objeto requerido. Luego, ambos elementos n y $f(n)$ poseen una cualidad doble. Por un lado hacen referencia a objetos y elementos constituyentes de los objetos cuya naturaleza es material y cuya referencia viene dada por el texto del problema y las imágenes gráficas (dibujos, esquemas) que acompañan al mimo. Por otro lado poseen una cualidad básicamente numérica y su relación matemática es la de variables discretas, donde *n* es la variable independiente y *f(n)* la variable dependiente. El rango de referencia para *n* y *f(n)*, dominio y rango en términos de funciones discretas, son piezas claves para determinar la extensión de la generalización.

Los elementos *a* y *b* son constantes para cada problema concreto, pero adquieren la cualidad variable cuando se cambia el problema sin variar la estructura matemática subyacente. El elemento *a* corresponde con la diferencia constante y *b* queda determinado por la relación $b = f(1) - a$, es decir es la diferencia entre el primer término de la sucesión (elementos que componen el objeto de tamaño 1) y la diferencia constante (unidad de agregación, o factor de multiplicación). Luego existe también una doble cualidad para los elementos *a* y *b* según se contemple su significado en la sucesión numérica o en el dibujo/situación concreta de cada problema. El rango de referencia de *a* y de *b* determina por tanto, y de igual forma que para los otros elementos, la extensión de la generalización.

Por último existen símbolos "=" y "+". El símbolo de igualdad "=" suele ser equiparado por los alumnos con el signo "⇒", cuyo significado primario es el de resultado de un proceso de cálculo. Por otro lado el signo "+" posee la connotación aritmética de suma, es decir se excluye el significado algebraico que incluiría también la operación de resta aritmética. Por otro lado, sus significados provienen de las relaciones que se establecen entre los tamaños de los objetos y sus elementos constituyentes, siendo este el significado concreto dado por la contextualización de los problemas. La pérdida de los referentes concretos y su contemplación como entes abstractos, el símbolo "+" como operación algebraica y su correspondiente pérdida del carácter puramente aritmético, determinarán también el rango y extensión de la generalización.

Luego las generalizaciones pueden ser de cualidad diversa en referencia al significado y extensión de los elementos *n*, *f(n)*, *a*, *b*, = y +. Son los significados y las extensiones de los mismos los que van a caracterizar el proceso de generalización y la extensión del mismo. Los niveles que a continuación definiremos establecen la extensión de la generalización y su cualidad, y constituyen las etapas claves de la descomposición genética del esquema conceptual.

Los siguientes tres niveles caracterizan otros tipos de generalización, y confieren al esquema de descomposición genética un carácter cíclico, en el que se producen sucesivas generalizaciones, que pueden ser o no jerárquicas. Aquí, consideramos que el primer nivel no es jerárquico, en el sentido en que un alumno puede mostrar signos de comprensión que le situarían en el segundo o tercer nivel, sin haber mostrado necesariamente tales signos de comprensión relativos al primer nivel. El alumno abandona la característica obvia y es capaz de dar respuestas con estrategias generalizables, pues no recurre por más tiempo al carácter iterativo o al carácter recursivo de los recuentos directos. La situación se contempla como una relación entre la posición que ocupa el término y el valor de dicho término en la sucesión. Para conseguir esto es necesario que el sujeto piense en términos de primer término, segundo término, etc. El sujeto construye internamente un proceso, se pasa de la acción al proceso, mediante el cuál contempla cada número natural como una especificación ordinal de las cantidades dadas, o construidas en secuencia, y toma tales cantidades como resultados del proceso. En otras palabras, ha establecido una biyección entre la sucesión natural y las cantidades dadas o construidas en secuencia. Es el indicio de que se ha interiorizado la actividad repetida de sumar, en un proceso y el individuo muestra un comportamiento en el que se manifiesta el uso del aspecto procedimental del concepto de función (Dubinsky y Harel, 1992). Tal aspecto procediemental conlleva la transformación dinámica de cantidades de acuerdo con ciertas reglas repetibles. Ahora el alumno es capaz de pensar sobre las transformaciones como una actividad completa que comienza con ciertos objetos, se realiza algo con los mismos y se obtienen nuevos objetos como resultado de lo realizado. Luego determinados aspectos concretos de las estructuras conceptuales de función y de proporcionalidad directa, se coordinan para llevar a cabo recuentos indirectos.

5.6.1. Nivel 1

El sujeto reconoce y utiliza el carácter iterativo y recursivo de la pauta lineal. El alumno se centra en el rasgo perceptual más obvio de la pauta lineal: sumar la diferencia constante. Tales estrategias no son generalizables, corresponden a recuentos directos, pero son importantes pues resaltan la diferencia constante de la pauta lineal. Tales comportamientos rutinarios son útiles, en otro nivel, como procedimientos de comprobación de la validez de los cálculos efectuados. Con respecto a la sucesión numérica, se pueden dar dos comportamientos bien diferenciados. El primero consiste en extender la sucesión numérica desde el primer término hasta alcanzar el término requerido (suma iterada, sumar todo: por ejemplo, $f(10) = f(1) + d + d + ...$), el segundo consiste en darse cuenta que se puede alcanzar el término requerido sin necesidad de comenzar cada vez desde el primer término, basta con utilizar el valor numérico para un término dado o previamente calculado (proceso recursivo, sumar desde: por ejemplo, $f(10) = f(9) + d$). Tales comportamientos caracterizan la comprensión que de las tareas muestran los alumnos. El primero de tales comportamientos lo interpretamos como *comprensión procedimental- iterativa* y el segundo *como comprensión procedimental-recursiva*. El término *procedimental-recursivo* hace referencia al carácter de la pauta, en este sentido, la comprensión del carácter recursivo de la pauta y no del simple carácter iterativo le confiere un nivel superior de pensamiento. Se produce ciertamente una objetivación del proceso iterativo en el objeto recursivo, siendo la cualidad dinámica del primero la que lo diferencia de la cualidad estática del segundo. En este nivel, el alumno ha asimilado la situación planteada a un esquema amplio, que denominamos *Números* y cuyos elementos básicos, utilizados por los alumnos, son técnicas de recuento directo y operaciones aritméticas básicas, que conllevan aspectos conceptuales importantes como son el carácter ordinal y cardinal del concepto de número natural. En este nivel lo que se generaliza es la acción de sumar la diferencia constante.

5.6.2. Nivel 2

Se caracteriza por que el alumno ha establecido una *generalización local*. Diremos que un alumno ha realizado una *generalización local* cuando ha aplicado la misma regla de cálculo a las cuestiones de generalización próxima y lejana, dentro de un mismo problema. Es decir, ha aplicado la misma acción y ha establecido el mismo invariante en todas y cada una de las cuestiones propuestas (puede incluso ser en las introductorias, primeros términos). No consideraremos aquí que sea necesario haber expresado algebraicamente los invariantes establecidos ni el cálculo específico llevado a cabo en cada cuestión.

Luego en este nivel lo que el alumno ha generalizado es la *regla específica de cálculo* para cada cuestión en el mismo problema, la cual queda fijada por el *invariante* establecido. Pues, se ha establecido la cualidad de variable para los elementos n y $f(n)$, así como implícita o explícitamente su dominio y rango (variables con propiedad sustitutoria). Los elementos constantes presentes en los invariantes poseen todavía un rango de referencia concreto. De la misma forma, los signos "=", "+" y "-" poseen un grado de referencia concreta y su cualidad es básicamente aritmética, es decir, en el caso del símbolo "+" su significado es el de suma y se distingue del símbolo "-" como otra operación diferente. La referencia concreta de los símbolos y los elementos se debe principalmente a las relaciones conectivas establecidas entre los elementos de las acciones. El invariante establecido se contempla cognitivamente como un proceso que se ha interiorizado y que se aplica, en este caso la regla para el cálculo, a cualquier otro objeto/tamaño de forma automática. El alumno muestra en su cálculo un dominio de la expresión para el mismo y en este caso diremos que su comprensión de la tarea es del tipo *comprensión procedimental*. Si un alumno utiliza otra regla distinta, para otros cálculos dentro del mismo problema, diremos que su comportamiento es de *actividad procedimental.* Tal actividad procedimental es previa a la comprensión procedimental y se manifiesta con referencias concretas a los objetos materiales (dibujo) o a los números (sucesión) presentes en la situación dada. Toda comprensión procedimental presenta también ciertas manifestaciones con referencia a objetos concretos siendo el establecimiento del invariante lo que la diferencia claramente de la actividad procedimental. El establecimiento de un invariante, parcialmente correcto, por asimilación de la tarea a un esquema conceptual incorrecto y acomodación del esquema a la tarea, sitúa al sujeto en este nivel. Este caso ha sido ya discutido en el apartado sobre la comprensión procedimental. En resumen, lo que en este nivel se generaliza es la regla específica para el cálculo y cuya expresión aritmética o algebraica viene dada por el invariante establecido. La comprensión que los alumnos muestran de la tarea es del tipo comprensión procedimental.

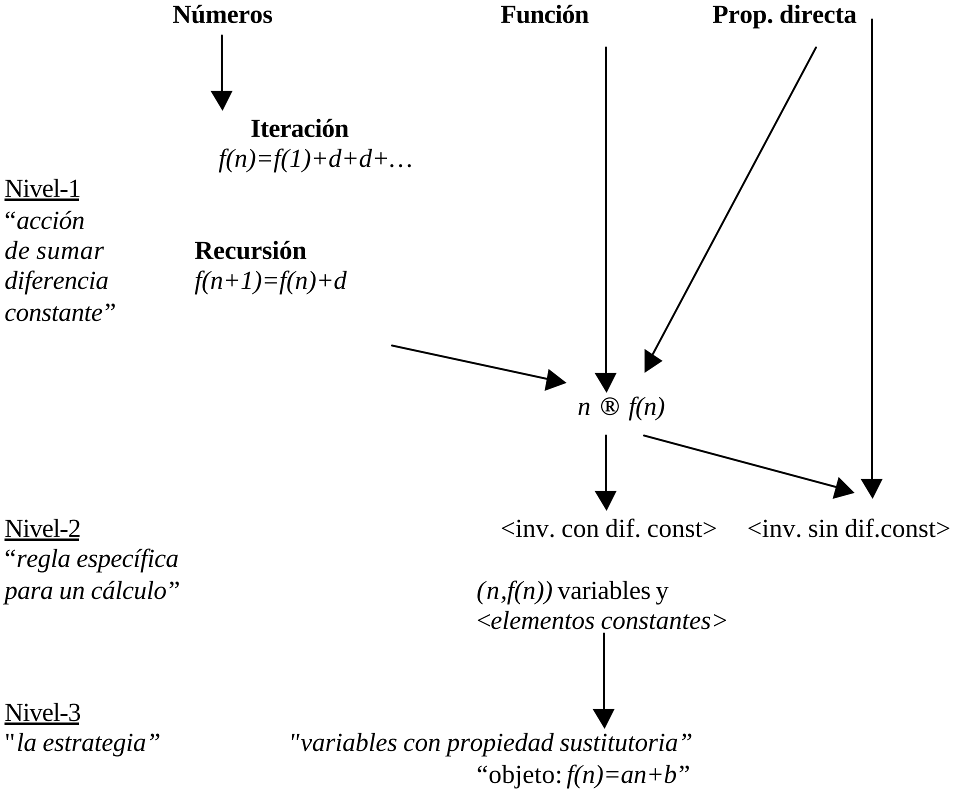
5.6.3. Nivel 3.

El comportamiento del alumno es consistente en secuencias de problemas del mismo tipo. En este nivel, el alumno aplica la misma estrategia de resolución en dos o más problemas, del mismo tipo, dados en secuencia. Lo que a este nivel se generaliza es la estrategia empleada para resolver una tarea concreta, es decir, la forma general de proceder que consiste en, las acciones realizadas, esquemas de las acciones, relaciones conectivas entre elementos de las acciones que conducen al invariante establecido. Los invariantes establecidos en una sola situación contienen por lo general, elementos variables y elementos constantes. Ahora los elementos constantes adquieren la cualidad variable, pierden la referencia concreta a la tarea original y son sustituidos por otros valores y, por lo tanto, tiene lugar una generalización extensional al ampliarse el rango de validez de tales elementos. Obviamente, si un alumno aplica diferentes estrategias en diferentes problemas estaría en el nivel anterior, es decir su comportamiento debería ser caracterizado como de generalización local para cada problema tratado, y su comportamiento cognitivo en cada problema sería el de *comprensión procedimental* y con respecto a la secuencia sería de *actividad procedimental*. En este nivel el alumno ha reorganizado un esquema existente y ha extendido su grado de aplicabilidad, siendo este comportamiento cognitivo lo que caracteriza a una generalización *reconstructiva*. Lo que aquí se generaliza es la estrategia y la comprensión de las tareas es del tipo comprensión conceptual.

5.6.4. Esquema de descomposición genética

A continuación resumimos lo anterior mediante el esquema de descomposición genética del concepto de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal.

Esquema de descomposición genética del concepto de pauta lineal



Debemos señalar, por último, que tal esquema puede ser contemplado como una jerarquía, dada por los niveles, sobre la comprensión. Sin embargo, en nuestro trabajo hemos encontrado evidencias en alumnos que no manifiestan durante la resolución de las tareas un recorrido secuencial por los niveles. Así, hay alumnos que se sitúan directamente en el nivel 2, sin mostrar los comportamientos tipificados en el nivel 1. Es este el caso de los alumnos que asimilan la tarea al esquema incorrecto de proporcionalidad directa por aplicación de la regla de tres y acomodan el esquema a la tarea para establecer un invariante parcialmente correcto.

5.7. Conclusiones y cuestiones derivadas del segundo estudio

El análisis de las entrevistas nos ha llevado a la clarificación de determinadas cuestiones planteadas en el primer estudio, debido a las limitaciones impuestas por la prueba escrita.

5.7.1. Relativas al proceso de generalización

En primer lugar hemos clarificado los papeles jugados por los ámbitos numérico y gráfico presentes en el formato de tarea (problemas de generalización lineal). El dibujo juega un doble papel, pues no sólo es el marco donde algunos alumnos desarrollan acciones que conducen al establecimiento de un invariante, sino que además es el ámbito donde varios de los alumnos que han desarrollado acciones sobre el ámbito numérico comprueban la validez de sus estrategias.

Esto, nos lleva a describir con mayor precisión la estrategia de solución y sus modalidades. En primer lugar una estrategia de solución está compuesta por las acciones, esquemas de la acción, e invariantes establecidos por los alumnos que se concreta en la estructura aritmética del cálculo. Según el papel esencial que juega un ámbito, en el desarrollo de las acciones que conducen al establecimiento del invariante, la estrategia se tiene tres modalidades de estrategia, visual, numérica o mixta. En las estrategias visual y numérica juegan un papel esencial los dibujos y la sucesión numérica respectivamente. Sobre sus elementos, los alumnos desarrollan las acciones y establecen los invariantes como resultado del proceso de generalización. Por otro lado, hemos observado que la actuación de los alumnos no se limita a un solo ámbito, pues los alumnos que utilizan acciones sobre la sucesión numérica utilizan el dibujo para realizar comprobaciones parciales. Esto último nos lleva a considerar una tercera modalidad, que denominamos mixta, en la que los dos ámbitos juegan un papel determinado en el establecimiento del invariante, siendo el ámbito numérico donde se desarrollan las acciones y el ámbito visual donde se comprueba la validez de los cálculos.

En segundo lugar hemos señalado las acciones y los invariantes desarrollados por los alumnos. También, hemos definido qué significa haber realizado una generalización en este tipo de problemas. En el proceso de generalización, y en el marco de la generalización operativa, es clave el establecimiento de un invariante y queda caracterizado por la aplicación de la misma regla de cálculo a las sucesivas cuestiones planteadas en una misma tarea.

Durante el proceso de solución de una o varias tareas, los alumnos alcanzan diferentes tipos de generalizaciones: acción repetida de sumar la diferencia constante, regla para el cálculo dentro de un mismo problema y estrategia de solución entre diferentes problemas. Las diferentes generalizaciones nos lleva a definir unos niveles de generalización que caracterizan la descomposición genética del concepto de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal. En tal descomposición genética se presentan los diferentes esquemas conceptuales que son coordinados y las generalizaciones resultantes.

La actuación de los alumnos en la resolución de las tareas permite profundizar en la actividad cognitiva del alumno, es decir en la comprensión de las tareas. Tal comprensión la hemos tipificado según tres categorías: actividad procedimental, comprensión procedimental y comprensión conceptual. El establecimiento de un invariante, y por lo tanto la generalización desarrollada durante el proceso es clave para tal clasificación. Lo que en cada momento se generaliza permite caracterizar cada uno de los tres niveles de generalización, que a su vez se articulan para constituir el esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal. Así, la actividad procedimental se caracteriza por la asimilación de la tarea, sin acomodación, a esquemas conceptuales erróneos, por el cambio de estrategia de cálculo dentro de un mismo problema o por la permanencia del alumno en aspectos de recuento directo sobre un dibujo. Por otro lado, la comprensión procedimental, se caracteriza por la generalización establecida en los dos primeros niveles del esquema de descomposición genética. Por último, la comprensión conceptual, tercer nivel del esquema, queda caracterizada por la generalización de la estrategia de solución o por la expansión de un esquema existente.

Capítulo 6

La comprensión de la pauta lineal a través de la interacción en el aula

6.1. Introducción

En este capítulo presentamos el tercer estudio sobre la compresión de pautas lineales. En el estudio segundo hemos elaborado, a partir de entrevistas individuales, el esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal.

También hemos fijado en el capítulo anterior el criterio mediante el cuál se puede considerar que un alumno ha realizado una generalización. El primer nivel de generalización se alcanza cuando el alumno percibe la pauta lineal y halla $f(n)$, para un cierto n, mediante el cálculo de $f(n-1)+a$. En el segundo nivel de generalización el alumno establece un invariante, que se comprueba mediante la utilización de la misma estructura de cálculo para $f(n)$ en dos cuestiones, al menos, dentro de una misma tarea. Finalmente, el tercer nivel de generalización se alcanza cuando usa la misma estrategia en dos tareas diferentes, lo que supone la realización de las mismas acciones y el establecimiento del mismo invariante.

Las entrevistas individuales no fueron planificadas como una tarea de enseñanza, sino como un medio para obtener información sobre los procesos mentales internos del individuo al enfrentarse a situaciones novedosas de forma espontánea. Luego, el esquema de descomposición genética allí elaborado correspondería con lo que, a lo largo del tiempo, un alumno desarrollaría de forma espontánea o guiado mediante instrucción. En el primer y segundo estudio hemos presentado ejemplos de alumnos que asimilan la situación presentada a esquemas cognitivos no adecuados, como es el esquema de proporcionalidad directa, incluso alumnos que persisten en recuentos directos como medio para responder a cuestiones accesibles, generalización próxima, y que abandonan la tarea sin más cuando llegan a cuestiones de generalización lejana. Por otro lado, hemos observado alumnos que asimilan la situación a esquemas cognitivos de proporcionalidad directa y que por medio de la acomodación del esquema a la situación producen invariantes parcialmente correctos. También hemos observado el establecimiento de invariantes que no contienen la diferencia constante (esquema B), así como una actividad de los alumnos inconsistente al moverse desde tales invariantes a otro que sí contienen tal diferencia. Se plantea aquí cómo reconducir tales comportamientos hacia esquemas cognitivos adecuados, que debe construir el propio alumnos; al abandono de actividades procedimentales rutinarias, siendo tales actividades sustituidas por otras más productivas en la construcción de esquemas cognitivos más apropiados; y por último cómo inducir en los alumnos la generalización de la estrategia y que tal estrategia conlleve el establecimiento de invariantes del tipo A. En definitiva se nos plantea el problema más general de cómo reconducir, mediante intervención directa en el aula, tales comportamientos hacia la elaboración de estrategias que conlleven el establecimiento de invariantes óptimos que corresponde con la forma canónica de la pauta lineal $f(n) = an + b$.

6.2. El aprendizaje de las matemáticas y los alumnos

La instrucción matemática en las aulas de secundaria puede caracterizarse (Dossey et all 1988, citado en Schoenfeld, 1991, p. 354), con ligeras variaciones, como la actividad que consiste en la explicación del contenido por el profesor, trabajo individual de los alumnos sobre las tareas propuestas y corrección de las mismas, dirigidas al gran grupo, en la pizarra. La mayoría de las veces, y debido a la dificultad del contenido o al tiempo disponible, la explicación se dirige hacia un nivel medio de la clase, cuando no al más alto, y hacia el aprendizaje directo de determinados algoritmos o definiciones. Los informes preliminares del TIMS sugieren incluso un enfoque mucho más formalista para nuestro país (Beaton et all, 1996, página 155). El resultado de tal práctica es, por lo general, una prevalencia de aprendizajes rutinarios, carentes de significado, y la construcción de esquemas conceptuales débiles por los alumnos, que se manifiestan en una pobre actuación, sobre contenidos supuestamente aprendidos, después de un cierto tiempo.

La construcción significativa del conocimiento por parte de los alumnos es una de las ideas centrales de la reforma educativa que está en marcha, en nuestro país y en otros. Tal reforma supone, entre otras cosas, un cambio profundo de la visión que se tiene del alumno, al que no se le debe contemplar como un recipiente pasivo a llenar de conocimiento, sino como constructor activo del mismo. Siguiendo a Anthony (1996), este nuevo punto de vista se apoya en los tres siguientes principios acerca del aprendizaje:

1. El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento y no de mera retención y absorción del mismo.
2. El aprendizaje es dependiente del conocimiento previo del alumno, pues este utiliza el conocimiento que ya posee para construir nuevo conocimiento.
3. El alumno es consciente de sus procesos cognitivos, y puede llegar a desarrollar la capacidad de controlarlos y regularlos; tal autoconciencia influye de forma significativa en el aprendizaje.

El primer principio concede al alumno un papel de actor, y no de mero observador, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este principio implica revisar los papeles del profesor y del alumno en la clase.

El segundo principio llama la atención sobre la importancia del conocimiento previo del alumno, también del conocimiento imperfecto, el que aún no está bien construido. Todos los profesores tienen ejemplos de uso inapropiado del conocimiento, de los errores con los algoritmos y destrezas básicas, de la mala interpretación de los símbolos matemáticos. Podemos contemplarlos como resultados defectuosos del aprendizaje, que nos obligan a retroceder para corregirlos, pero también podemos cambiar de enfoque, de forma que actuando sobre la situación y modificándola, se facilite la continuación del aprendizaje; a tal fin procede preguntarnos ¿cómo identificamos los errores cometidos por los alumnos?, ¿cómo podemos utilizar las expresiones inapropiadas del conocimiento para llegar a acuerdos y significados que posibiliten la continuidad en el aprendizaje?, ¿qué dificultades encuentran los alumnos ante las intervenciones del profesor?, ¿qué entienden cuando el profesor introduce una nueva notación o da un nuevo significado a notaciones ya conocidas?

El tercer principio nos lleva a la autonomía en la construcción del conocimiento por los alumnos mediante el desarrollo de habilidades metacognitivas. Sin embargo, como ha señalado Schoenfeld (1991, p.334), la metacognición es un término difícil de utilizar como concepto, pues posee múltiples y disjuntos significados, desde el conocimiento sobre los propios procesos de pensamiento hasta la autorregulación durante la resolución de un problema.

Es precisamente, la autorregulación durante la resolución de un problema una de las habilidades metacognitivas que pensamos deberían formar parte del propio aprendizaje. En una nueva situación, yo, como aprendiz, debo ser capaz de discernir lo importante de lo accesorio, de reflexionar sobre lo que se ha hecho, por qué se ha hecho así y no de otra forma, de entender por qué no se ha hecho como había pensado inicialmente, de comprender la relevancia que tiene una observación realizada por otro, de comunicar qué he hecho, por qué lo he hecho y en la forma en que lo presento. Todas estas habilidades metacognitivas son claves en el aprendizaje y deberían ser tenidas en cuenta como elementos propios de la instrucción. El desarrollo de tales capacidades debe formar parte de la instrucción y no considerarlas como algo que se da por hecho, que se espera a que con el tiempo el alumno las adquiera, no se sabe muy bien cómo.

Schoenfeld (1985) ha señalado tres aspectos de la comprensión matemática que se extienden más allá del dominio de hechos y procedimientos rutinarios y que resumió en las tres siguientes afirmaciones. En primer lugar, las habilidades metacognitivas son un componente esencial de la actuación matemática competente. En segundo lugar, la mayoría de los estudiantes no desarrollan muchas habilidades cognitivas hasta cierto grado, debido principalmente a que la instrucción matemática se centra casi exclusivamente en el dominio de hechos y procedimientos en vez de en la comprensión. Y por último, aunque es una tarea difícil, tales habilidades se pueden desarrollar en los alumnos.

6.2.1. La interacción como modelo didáctico para el aprendizaje.

Otro componente importante del aprendizaje lo constituyen los procesos generales de la matemática, que desde hace tiempo han sido tema central de las preocupaciones de los investigadores y educadores. Así en un primer trabajo, Bell (1979), después de señalar algunos de los aspectos del proceso de la actividad matemática, y en particular los de representación, generalización y abstracción, concluye con su visión particular sobre cómo debería desarrollarse la enseñanza para que los alumnos adquirieran las capacidades relacionadas con tales aspectos: “ *mi propia visión es que el progreso en el desarrollo de tales capacidades en los alumnos es mucho más probable que provenga de una enseñanza basada en las investigaciones de los alumnos a partir de situaciones problemáticas, seleccionadas y dispuestas para animar el aprendizaje de un cuerpo coherente de ideas matemáticas, mediante la interacción entre los alumnos dentro del grupo, y con intervenciones del profesor que principalmente tendrían la forma de guía por medio de cuestiones generales las cuales deberían ser apropiadas eventualmente por los alumnos como estrategias*”.

Así, la enseñanza se debe transformar en los intentos de organizar un proceso interactivo y reflexivo, con el profesor empeñado continuamente en actividades diferenciadas y actualizadas con los estudiantes, y no solo en la transmisión, introducción o redescubrimiento de un conocimiento objetivamente codificado y dado de antemano. Por otro lado, el aprendizaje resulta ser, principalmente, el proceso personal de construcción significativa del conocimiento, para lo que se necesita participación activa, en vez de una simple recepción de normas y conocimiento objetivado (Bauersfeld, 1994).

La investigación reciente en educación matemática ha prestado bastante atención a profundizar sobre la regulación de la actividad de enseñanza y aprendizaje en el aula basada en la interacción entre profesores y alumnos, así como los beneficios que para el aprendizaje se derivan de tal interacción (Cobb, Yackel y Wood, 1992; Lo y Wheatley, 1994; Wood, 1996; Anthony, 1996; Yackel y Cobb, 1996). Precisamente Anthony ha señalado en su trabajo que no basta con que los alumnos trabajen en grupo, monitorizados por el profesor, para desarrollar una profunda comprensión de la tarea si tal actividad no va acompañada de la potenciación y desarrollo simultáneo de habilidades metacognitivas.

6.2.2. Normas sociales y normas sociomatemáticas.

En el aula, como espacio en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, hay normas que regulan las relaciones entre los alumnos, entre éstos y el profesor, y entre todos ellos y la disciplina en estudio. Tales normas constituyen una microcultura de aula y son parte esencial del proceso educativo. Desde la perspectiva interaccionista de Bauersfeld, los profesores y alumnos deben involucrarse conjuntamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, así que las normas deben facilitar la participación de los alumnos en el proceso de interacción. Para ello, las normas deben ser objeto de negociación entre los actores, para que sean aceptadas por todos.

Existen *normas sociales*, independientes de la materia en estudio (historia, lengua, matemáticas...). He aquí algunas de ellas que deberían seguirse en la interacción (en matemáticas o en cualquier otra asignatura): los alumnos deben argumentar sus opiniones y criterios, y la forma como han llegado a ellos; cuando se está discutiendo una situación, los alumnos deben participar, procurando aportar enfoques y consideraciones diferentes de las ya expuestas; cuando un alumno expone sus criterios, opiniones, soluciones... debe dirigirse al conjunto de la clase y no sólo al profesor.

También existen normas propias de cada una de las disciplinas escolares. Así, las *normas sociomatemáticas* son las que rigen de modo específico la actividad matemática que desarrollan los estudiantes (Yackel y Cobb, 1996). Entre ellas se encuentran las que se refieren a decidir lo que constituye una explicación matemática aceptable, así como lo que puede entenderse por una solución matemática a un problema y por una solución diferente a una dada. Por ejemplo, una buena explicación matemática es aquella en la que los alumnos no se limitan a explicitar cómo realizan un cálculo concreto, sino que explican cómo llegaron a que había que realizar tal cálculo.

Las normas de la interacción suponen para el profesor un papel bien diferente al habitual. Seguirá siendo el representante de las matemáticas establecidas, pero debe ser algo más que el transmisor de esa cultura y evaluador del aprendizaje de los alumnos. Deberá luchar contra un obstáculo difícil de erradicar: los estudiantes buscarán en su autoridad la aprobación expresa de sus actos; la larga tradición de clases dirigidas por el profesor, en las que se presentan conceptos y convenciones matemáticas con escasa base concreta y familiar para los alumnos, ha creado en los mismos la disposición a intentar imaginar qué es lo que el profesor quiere que digan y hagan, en vez de construir significados de tal forma que los conceptos y convenciones cobren sentido personal. Además, el profesor deberá romper con la tradición de que sólo los argumentos de autoridad (porque es así, porque así ha sido siempre así, porque en el libro de texto viene así, porque yo soy el profesor) determinan cuando acaba una discusión; lo que es una solución matemática, lo que significa una solución matemática diferente o lo que constituye una explicación matemáticamente aceptable, deberá ser argumentado y discutido de forma significativa y relevante para los alumnos. Es decir, en la microcultura de la interacción no existe un criterio previo sobre qué debe entenderse por una solución matemática a un problema o lo que constituye una explicación matemática; por el contrario, tal significado deberá ser negociado entre los alumnos y el profesor.

Las normas de la interacción también afectan al papel tradicional de los alumnos. Un punto de partida es que el alumno sea capaz de generar sus propias y personales formas de resolver un problema; es decir, utilizar con confianza sus conocimientos matemáticos, en vez de esperar del profesor o de un compañero las instrucciones precisas, el procedimiento, para llegar a la solución. Una vez alcanzada una solución propia, no necesariamente precisa, el alumno debe estar en condiciones de comunicar sus hallazgos, lo cual le llevará a distinguir qué es lo que constituye una explicación o justificación aceptable, así como a elaborar la base de los significados que se comparten para la efectiva comunicación en el aula. Pero, además, deberá obligarse a sí mismo a dar sentido propio a las explicaciones aportadas por otros alumnos, así como a las críticas y argumentaciones que se produzcan contra la posición que ha mantenido durante la exposición. Explicar, justificar y argumentar los propios hallazgos, así como comprender, criticar y argumentar los hallazgos de otros, requiere que las propias explicaciones sean objeto de reflexión personal. Tales esfuerzos permiten el desarrollo de habilidades metacognitivas que son necesarias para un correcto desarrollo y progreso en el aprendizaje, pues cuando uno empieza a considerar lo adecuado de una explicación para los otros, y no sólo para uno mismo, la explicación se convierte en objeto explícito del propio discurso (Feldman, 1987, citado por Yackel y Cobb). Luego, un aspecto importante de la discusión, tanto como la misma solución, es también lo adecuado o no de la propia explicación, y tal conciencia requiere del desarrollo y ejercicio de la actividad metacognitiva que facilita la profunda comprensión, tanto de la solución como del proceso que a ella lleva.

6.3. Metodología

El estudio de las sucesiones numéricas forma parte del curriculum de secundaria obligatoria (DCB 1989). Por otro lado, el criterio 13 de evaluación: *Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones conocidas en conjuntos de números y formas geométricas similares*, y su comentario aclaratorio (DGOI, 1996, página 108), señala la orientación del anterior contenido hacia la valoración del aprendizaje del alumnado en cuanto al reconocimiento y comunicación de las regularidades y relaciones allí señaladas. Para el 4º Curso se establece además una alternativa en la elección de los alumnos entre matemáticas A y matemáticas B, siendo las primeras de carácter más terminal que las segundas, menos formales y orientadas hacia la utilización de la matemática en la comunicación habitual, y se señala también que debe limitarse en esta opción la utilización de representaciones simbólicas y formalismos no estrictamente necesarios (DGOI, 1996, páginas 103-104).

Para el estudio de aula, hemos elegido intencionadamente un grupo de 4º curso de ESO y cuya opción de matemáticas es la A. Tales alumnos formaron parte de la muestra inicial del segundo estudio (Capítulo 5) y por lo tanto a los mismos se les administró la prueba inicial de tal estudio. Más adelante presentaremos los resultados de tal prueba para este grupo.

Hemos elegido seis problemas de generalización lineal que constituirán la base para las tarea durante las sesiones de aula y para las pruebas escritas.

Decidimos llevara a cabo no más de cuatro sesiones de trabajo en el aula con los alumnos. Tal limitación viene impuesta por la programación del Instituto de Secundaria donde se lleva a cabo la experiencia. Además, nuestra intención era dedicar un tiempo razonable dentro de la programación del Departamento de Matemáticas y no superior al que, por otro lado, consideraban los profesores componentes del mismo.

Como guía y evaluación de la actuación de los alumnos en las sesiones de aula y en las pruebas escritas hemos elaborado los siguientes tipos de categorías:

CCM: Categorías de comprensión del contenido matemático.

NSI: Categorías de interacción didáctica específicas de las normas sociales de la interacción.

*NSM:*Categorías específicas de las normas sociomatemáticas relativas a ciertas habilidades metacognitivas referentes al control y autorregulación durante las tareas y a la explicación de las mismas.

6.3.1. Categorías de análisis.

a) *Categorías de comprensión del contenido matemático* (**CCM**).

CM-1. Reconocer la diferencia constante, carácter iterativo de la pauta lineal.

CM-2. Expresar la relación para un cálculo.

CM-3. Extender tal relación a otros cálculos dentro de un mismo problema.

CM-4. Expresar verbalmente con relación a la sucesión la validez de la regla para un cálculo.

CM-5. Expresar verbalmente con relación al dibujo la validez de la regla para un cálculo.

CM-6. Utilizar datos disponibles para validar una expresión para el cálculo.

CM-7. Contruir datos para validar la expresión para un cálculo.

CM-8. Distinguir una regla para el cálculo con diferencia constante de otra sin diferencia constante.

CM-9. Simbolizar mediante expresiones literales la regla para el cálculo.

CM-10. Simplificar la regla para el cálculo.

CM-11. Expresar acciones sobre la sucesión que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

CM-12. Expresar acciones sobre el dibujo que podrían ser la génesis de una regla para el cálculo dada.

b) *Categorías de normas sociales de interacción* (**NSI**).

NS-1. Apreciar que participar en la discusión en clase es beneficioso para el propio aprendizaje.
NS-2. Explicar cómo se llegó a un procedimiento de cálculo.
NS-3. Criticar la validez de una regla para el cálculo.
NS-4. Expresar con corrección y lo más concretamente posible cualquier argumento que se desee aportar a la discusión.
NS-5. Apreciar que mediante la explicación a un compañero de la estrategia de solución empleada por uno mismo beneficia la propia comprensión del procedimiento empleado.
NS-6. Apreciar que la explicación debe ser clara y concisa para una perfecta comunicación.
NS-7. Ser tolerante con las explicaciones de los demás.
NS-8. Ayudar a un compañero que presenta dificultades en su explicación mediante preguntas que le ayuden a facilitar su comunicación, así como argumentos que no hayan sido tenidos en cuenta.

c) *Categorías de normas sociomatemáticas* (**NSM**).

NSM-1. Distinguir entre una explicación sobre la validez de la regla para un cálculo y la explicación sobre la validez de los cálculos efectuados.
NSM-2. Argumentar sobre la validez de la regla para el cálculo.
NSM-3. Formular que es lo que distingue una solución de otra.
NSM-4. Generar diferentes soluciones para un mismo problema.
NSM- 5. Expresar una regla para el cálculo, solución, diferente a una ya dada.

Para la recogida de datos se utilizó un cuaderno de campo del investigador-profesor, en el que se anotaba todo lo relativo y relevante de las distintas sesiones, justo al finalizar las mismas, así como los cuadernos de los alumnos y las dos pruebas escritas finales. Pensamos inicialmente en la grabación en vídeo de tales sesiones, sin embargo, consideramos que tal grabación introduciría un elemento extraño y distorsionador en el ambiente normal del aula. Al descartar el uso de tal instrumento de registro, renunciábamos conscientemente a una mayor documentación de los episodios pero, por otro lado, se conservaba el normal ambiente de aula. Esta fue nuestra decisión.

6.3.2. Los alumnos y la prueba inicial.

Para nuestra experiencia de aula hemos elegido un grupo de 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), compuesto por 18 alumnos (Este grupo es uno de los participantes en la prueba inicial del estudio segundo. De este grupo no se eligió a ningún alumno para las entrevistas).

La opción de Matemáticas elegida por los alumnos era la opción A, es decir unas Matemáticas "blandas". Siete alumnos habían cursado en años anteriores el Bachillerato Unificado y Polivalente, y sus calificaciones en matemáticas eran insuficientes. Los restantes alumnos provenían del 3º curso de la ESO y sólo cinco habían superado las matemáticas el curso anterior (3 Bien y 2 Suficiente). En referencia al pasado académico reciente de estos alumnos los podemos considerar como de bajo rendimiento en Matemáticas.

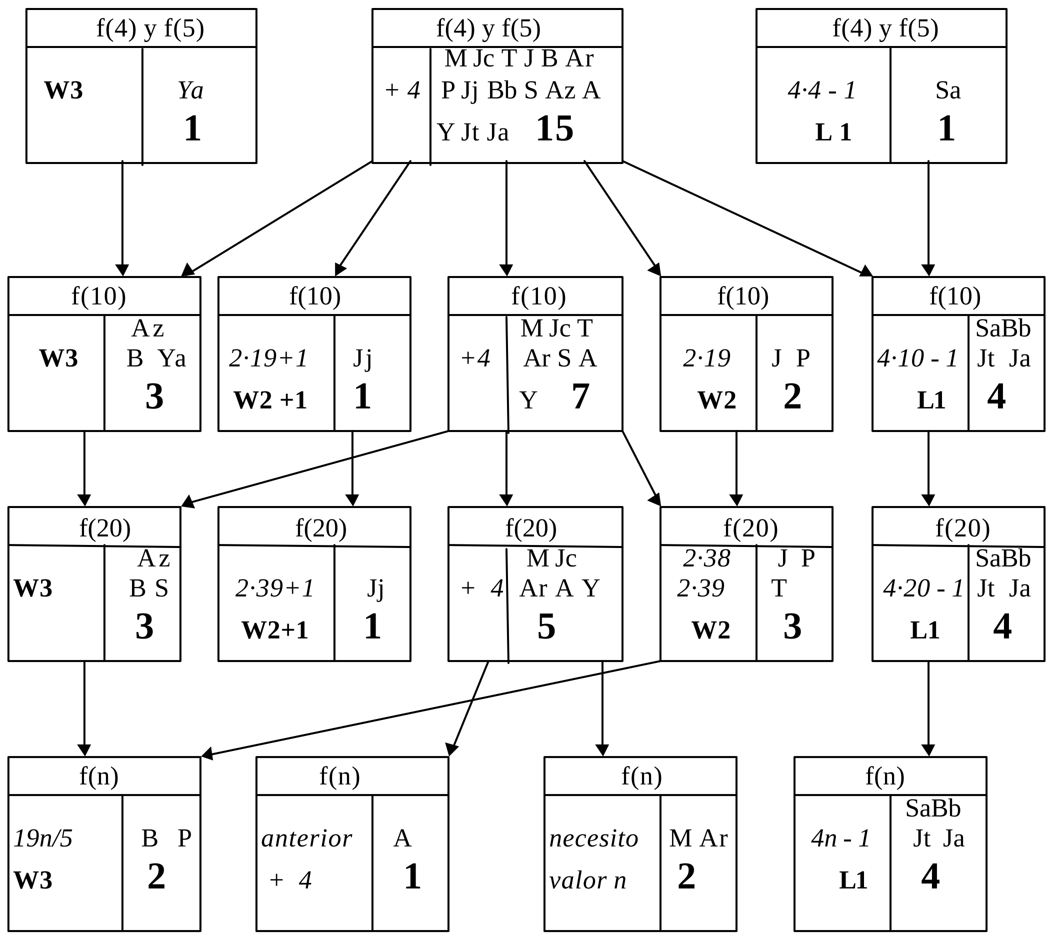
6.3.3. Resultados de la prueba inicial (Octubre 1996)

A continuación incluimos el GVT correspondiente a las respuestas de estos alumnos en la prueba escrita realizada durante el segundo estudio (capítulo 5). Usaremos las siguientes claves para la designación de los alumnos:

Claves de Alumnos

S= Santiago	Ar= Ana Rosa	Az= Aranzazu
P= Pedro	Sa= Samuel	A= Ariram
B= Beatríz	Jt= Jonathan	Y= Yisel
Jj= José Jonay	J= Julio	M= Marcos
Bb= Bibiana	T= Tamara	Jc= José Carlos
Ya= Yaiza	Ja= José Antonio	

GVT Prueba Inicial. Tarea: Árbol de Navidad.



Analicemos las respuestas de los alumnos a la luz del esquema de descomposición genética de la estructura conceptual de pauta lineal.

Al constar la prueba de una sola tarea, nuestro análisis se limitará a aquellas respuestas que corresponderían a los niveles uno y dos del esquema de descomposición genética.

Sólo una alumna, muestra desde el principio de la prueba, un comportamiento claro de actividad procedimental, pues asimila la situación a un esquema de proporcionalidad directa y aplica la regla de tres.

Una abrumadora mayoría de los alumnos, 16 de 17, utilizan la diferencia constante en las cuestiones introductorias. Incluso uno de ellos desarrolla una "*regla*" para el cálculo de f(4) que aplica a f(5). Sin embargo, sus comportamientos a lo largo de la prueba difieren notablemente.

Se observa que seis alumnos persisten en el procedimiento rutinario de sumar la diferencia constante para el cálculo de f(20). Incluso dos de estos alumnos, para el cálculo de f(n), declaran que para tal propósito necesitan el valor de n. Otro alumno indica claramente que ha entendido el carácter recursivo del procedimiento (anterior + 4) y aporta una expresión final en ese sentido. La diferencia cualitativa entre ambos comportamientos es que mientras el último alumno, ha entendido el carácter recursivo de la pauta, y solicita un valor cardinal, elementos del objeto anterior, f(n-1), los dos alumnos que solicitan el valor de n, un dato ordinal, muestran que no han establecido una generalización, ni siquiera de la acción de sumar la diferencia constante. La acción de sumar la diferencia constante se generaliza y tal generalización se muestra al pasar de la mera iteración a la recursión. La actuación de estos dos alumnos permanece en un nivel de actividad procedimental a lo largo de toda la prueba. Sólo el segundo alumno, el que muestra un comportamiento recursivo permanece en el nivel 1 del esquema conceptual.

Un total de siete alumnos abandonan el procedimiento rutinario de sumar la diferencia constante y asimilan la situación al esquema de proporcionalidad directa, aportando soluciones bajo las categorías W2 y W3. Su comportamiento es claramente de actividad procedimental.

Un alumno, Jj, ha sido capaz de abandonar tal procedimiento rutinario y, mediante la asimilación de la situación al esquema de proporcionalidad directa y acomodación del esquema a la situación (ajuste), establecer una generalización parcialmente correcta (esquema de tipo B, sin diferencia constante). Pero no es capaz de simbolizar tal generalización para el cálculo de f(n). Sin embargo, su comportamiento es de comprensión procedimental y su respuesta es del nivel-2, pues ha generalizado una "*regla*".

Hay cuatro alumnos que a lo largo de la prueba muestran claramente una comprensión procedimental, incluso son capaces de simbolizar correctamente la regla para el cálculo en la cuestión más general. Podemos considerar que estos alumnos se encuentran en el nivel-2 en la construcción del esquema conceptual.

En resumen, tenemos seis alumnos cuyas respuestas son de nivel 2, un alumno cuya respuesta es de nivel 1 y los restantes diez alumnos se encuentran en una fase previa de construcción del esquema conceptual claramente señalada por el comportamiento de actividad procedimental mostrado a lo largo de toda la tarea.

La información comportamiento previo de los alumnos es esencial para la planificación de las sesiones de aula. Debido a la gran cantidad de alumnos que han utilizado el carácter iterativo de la pauta se plantea abordar este hecho, crear la necesidad de abandonar tal comportamiento y avanzar en la construcción del esquema conceptual de pauta lineal. Por otro lado, hay cinco alumnos que persisten en un esquema erróneo y habrá que plantear el abandono de tal esquema de forma significativa, es decir, mostrando claramente lo inadecuado de tal razonamiento.

Para las sesiones de aula se plantea por lo tanto la necesidad de iniciarlas mediante una tarea exploratoria, seguida de una discusión de los resultados y tal discusión se deberá iniciar en primer lugar, mediante la explicitación del carácter iterativo de la pauta así como la necesidad de abandonar el mismo. En segundo lugar, utilizar un resultado erróneo, del tipo W2 o W3, como objeto de discusión. Se seguirá con las soluciones correctas, que se pedirá sean validadas por los alumnos que las presenten, centrando la explicación no es los cálculos sino en el por qué de tales cálculos.

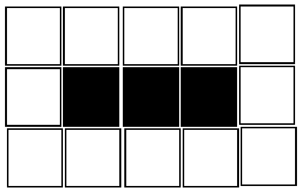
6.4. Las sesiones

6.4.1 Primera sesión Miércoles 30 de Octubre de 1996

Asisten 17 alumnos. El profesor se dirige a los alumnos y les anuncia que durante unas cuantas sesiones se va a tratar un nuevo tema. Tiene que ver con la prueba que se realizó hace una semana.

Deberán trabajar en grupo, no más de tres alumnos por cada grupo. Cuando el profesor solicite soluciones deberán estar dispuestos a presentarlas al resto de la clase, incluyendo una explicación lo más detallada posible sobre cómo se ha obtenido tal solución. Deberán tener cuidado de no ser repetitivos, es decir, cuándo se halla presentado una solución deberán aportar otra diferente. También se les pide que deben criticar las soluciones presentadas así como, pedir toda clase de explicaciones sobre las mismas.

La primera situación propuesta fue “baldosas cuadradas”.



(figura 6.1)

Los alumnos forman grupos para trabajar. Se constituyen siete parejas y un trío. Se les indica que han de resolver la situación propuesta, cuestiones 1 a 5 (Ver Anexo III), la cuestión 6 no se abordará por lo pronto.

Después de un tiempo, el profesor realiza una incursión por los grupos observando el trabajo de los alumnos. Detecta soluciones correctas e incorrectas, generalizables y no generalizables. Los alumnos no están muy dispuestos a intervenir en presentaciones para toda la clase. Para facilitar y promover la discusión se elige para la primera intervención a Yisel, alumna que ha usado una estrategia no generalizable: extender la sucesión hasta el término requerido sumando iteradamente la diferencia constante. Se le pide que explique cómo ha resulto la cuestión: “*cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear 10 baldosas negras alineadas*”.

Yisel: sumando siempre dos, obtenemos 26 baldosas blancas.

Esta alumna utilizó esa misma estrategia en todas las cuestiones numéricas del árbol de Navidad (prueba inicial), en esta situación ha vuelto a utilizar la misma estrategia en todas las cuestiones.

Se pregunta a continuación si algún alumno tiene otra solución diferente. Nadie responde. El profesor observa que algunos alumnos no intervienen pues “*otra solución diferente*” significa el resultado distinto. Se les aclara que “*otra solución diferente*” se refiere a una forma diferente de resolver la cuestión.

Varios alumnos solicitan intervenir. Para animar la discusión se solicita que intervenga un alumno cuya solución no es correcta (en resultado y en estrategia).

Pedro: *Si 5 baldosas negras necesitan 16 baldosas blancas, 10 negras necesitan 32 blancas.*

Pedro utilizó esta misma estrategia al resolver las cuestiones relativas al tamaño 10 y 20 del árbol de Navidad. Ahora persiste en su estrategia.

Profesor: *¿Cómo es que el resultado es diferente?*

Varios alumnos: *¡Está mal!*

Pedro no responde. Se encoge de hombros mirando al profesor.

Profesor, dirigiéndose a Beatriz: *¿Qué está mal?*

Beatriz: *¡El resultado!*

Profesor: *¿Puedes explicar donde está el error?*

Beatriz: *No lo sé, pero no da lo mismo que la primera...*

Profesor: *¿Cómo sabes que la primera es correcta?*

Beatriz: ...(dudando) *porque el dibujo dice que hay que sumar siempre dos...*

Con estas dos intervenciones se pretendía sentar la base de la discusión, no sólo hay que criticar una solución sino que hay que aportar un argumento convincente. En este caso Beatriz ha optado por señalar la ley de formación dada por el dibujo como hecho concluyente. Así, la primera estrategia se adapta a la ley de formación y es por lo tanto correcta. La segunda no es correcta pues el resultado final no corresponde con la primera. Señalemos de paso que, obviamente, no se ha explicitado por qué falla la segunda estrategia. Se le sugiere a Pedro que intente encontrar dónde está el fallo de su estrategia.

Profesor: *¿Tiene alguien otra solución diferente?*

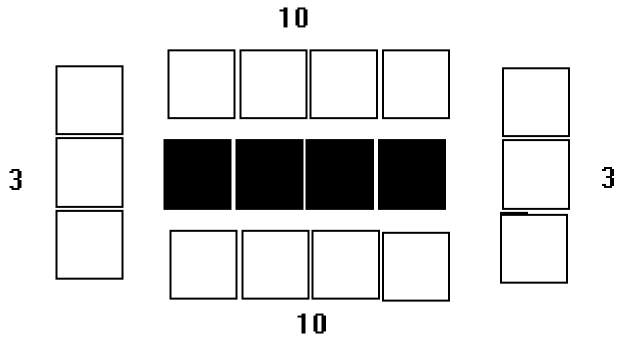
Julio: *Para 1 baldosa negra necesito 8 baldosas blancas, y por cada baldosa negra necesito dos baldosas blancas más. Para 10 baldosas negras tengo 8 + 9´2 = 26 baldosas blancas.*

Su explicación es así de clara y simple. En ningún momento ha dudado y no ha intentado explicar de cómo la obtuvo.

Samuel: *Yo tengo otra diferente.*

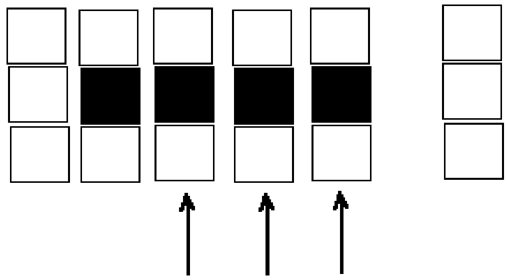
Profesor: *Explícala.*

Samuel: (Sobre el dibujo de la figura 2) *Hay tres baldosas blancas al principio y al final. Por encima y por debajo hay el mismo número de baldosas blancas que negras. Luego 3+3+10+10=26.*



(figura 6.2)

Ambas explicaciones se produjeron en la pizarra de forma muy rápida pues, ambos parecen tener prisa en volver a sus asientos. Para Julio y Samuel está claro que sus respectivas soluciones son correctas. En el caso de Samuel, su expresión para el cálculo deriva de acciones de descomponer el dibujo en partes y contar los elementos de cada parte para hallar el total. Julio no ha explicado cómo ha obtenido su expresión. Otros alumnos requirieron de Julio y Samuel que explicaran, de nuevo, sus estrategias pues no las habían entendido plenamente. La explicación se produce, en ambos casos, repitiendo lo anterior, aunque en este caso han sido un poco más claras. Por ejemplo, Julio cuya explicación se había limitado a consignar la expresión para el cálculo, aclara cómo ha derivado tal expresión, y para tal fin utiliza la figura 3. En su nueva intervención aclara como contempla la construcción del objeto de tamaño 4 a partir del de tamaño 1, separando la columna de tres baldosas blancas de la derecha e introduciendo tres columnas adicionales de baldosas donde la baldosa central es negra (señaladas con flechas en la figura 6.3).



(figura 6.3)

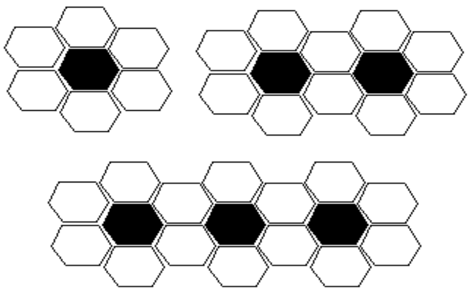
Por fin parece que Julio entiende que la explicación que se le pide debe referirse a cómo ha obtenido su regla para el cálculo y no sólo a consignar la expresión aritmética del mismo. Señalemos de paso, que Julio en la prueba inicial había utilizado la estrategia incorrecta W2. Por otro lado, Samuel en la prueba inicial utilizó una estrategia diferente también, la L1 y ahora en clase ha resuelto el problema mediante la estrategia L3. Algunos alumnos miran al profesor solicitando la aprobación de las dos estrategias expuestas, pues no parece muy usual que un problema se pueda resolver de dos formas distintas. Otros parecen dar por buenas las estrategias, pues el resultado es coincidente con el cálculo realizado sumando repetidamente dos, y esta estrategia ha sido aceptada por toda la clase.

Para Julio y Samuel la reflexión sobre las acciones realizadas sobre el dibujo ha tenido como efecto una generalización de la regla de cálculo particular. Los otros alumnos tendrán que pasar por el mismo proceso para poder comprobar la validez de las estrategias explicitadas. Se observa que algunos alumnos parecen dudar de las explicaciones dadas por los demás y siguen sin entender dónde está el fallo en sus estrategias y muestran una cierta obcecación en las mismas. Son alumnos que aplican el razonamiento directamente proporcional a este tipo de situaciones.

La primera sesión ha llegado a su fin.

El profesor propone abordar otra tarea para la siguiente sesión.

Profesor: (figura 6.4) *Propongo esta otra tarea: "Baldosas hexagonales". Hay que calcular cuántas baldosas blancas son necesarias para rodear 10 negras, como indica el dibujo, pero también cuántas harían falta para rodear 45 negras.*



(figura 6.4)

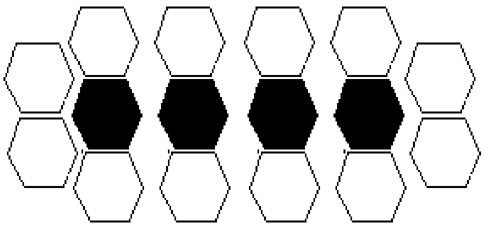
6.4.2. Segunda Sesión. Jueves 31 de Octubre de 1996

Asisten 18 alumnos. Al comienzo de la segunda sesión Yisel proporciona una respuesta acorde con las soluciones que había dado a otras cuestiones:

> Yisel: *He sumado 4 siempre. Para 10 baldosas negras necesito 42 blancas y para 45 negras necesito 182 blancas.*

Debe aclararse que Yisel escribió una suma detallada, formada por el 6, como primer sumando, y ¡cuarenta y cuatro sumandos iguales a 4! Desde luego, lo que parece arduo para el profesor, a veces es lo sencillo y obvio para el alumno. Yisel, por lo tanto, sigue manteniéndose en una estrategia rutinaria, parece incapaz de dar el salto de un recuento directo a otro indirecto. Con su intervención se pretendía que avanzara desde el propio conocimiento, sin imponer otro punto de vista.

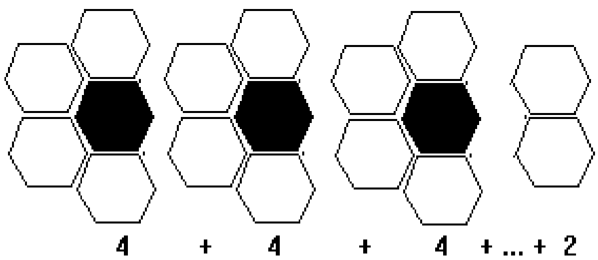
Aranza afirma haber empleado la estrategia que Samuel desarrolló en el problema anterior y sale a la pizarra a explicar su solución. Al realizar el dibujo coloca los hexágonos alineados, reproduciendo la misma disposición que tenían los cuadrados, pero ahora con los hexágonos (ver figura 6.5).



(figura 6.5)

Aranza, al intentar reproducir la estrategia de Samuel sobre la nueva situación, modifica el dibujo para que se parezca al del problema de las *baldosas cuadradas*. Su comprensión de la estrategia de Samuel está fuertemente asociada al dibujo de la situación anterior, es la disposición particular de las piezas y no las acciones de descomposición y recomposición la base para su comprensión de la estrategia. Hay un cierto revuelo en la clase, pero se permite que Aranza termine su explicación para el cálculo de 10 baldosas, obteniendo el resultado de 24. Debido al ambiente de murmullo generado por su intervención, y al comparar su resultado y el de Yisel, concluye que su estrategia no es correcta, pero no sabe explicar por qué. Hay intervenciones, esperadas, por parte de algunos alumnos: *¡Ese dibujo no está bien!* . Otros alumnos señalan que en el dibujo de Aranza faltan hexágonos blancos.

A continuación interviene otra alumna, Ana. Para su explicación utiliza un dibujo realizado sobre cuatro baldosas hexagonales:



(figura 6.6)

La estrategia de Ana consiste en agrupar de cuatro en cuatro (diferencia constante) las baldosas blancas. Al final sobran 2 baldosas. Luego la expresión de cálculo para cuatro baldosas negras es $4\times4 + 2$. Para 10 baldosas negras será por tanto $4\times10 + 2$, y para 45 baldosas negras será $4\times45 + 2$. Durante la prueba inicial Ana ha utilizado en todas las cuestiones la estrategia no generalizable de extender la sucesión, mediante suma iterada de la diferencia constante, hasta el término requerido.

No se encontraron otras soluciones diferentes, pues los alumnos, por lo general, habían aplicado la estrategia de Julio. Sólo otro alumno utilizó la estrategia de Samuel correctamente.

Las estrategias desarrolladas son claramente visuales y consisten en acciones introducidas sobre el dibujo, el reflejo de tales acciones conduce al establecimiento de un invariante para la regla de cálculo (García Cruz y Martinón, 1997). El comportamiento de

Samuel, muestra que es capaz de pasar de una a otra estrategia modificando las acciones sobre el dibujo y, aunque comprende la estrategia de Julio, no la aplica, pues para él está claro que debe contribuir a la discusión en clase con una estrategia diferente. Aquí, la diferencia, la marca la particular acción sobre el dibujo. Julio, por el contrario, se muestra muy satisfecho de su estrategia. En la prueba inicial había utilizado una estrategia incorrecta, basada en un razonamiento directamente proporcional. Su confianza en la nueva y correcta estrategia se ve reforzada por dos hechos, en primer lugar ha funcionado en otra situación y además ha tenido mucho éxito entre los otros alumnos, pues ha sido imitada, y no ve la necesidad de aportar ninguna nueva. Por último Ana, que en la prueba inicial había utilizado la estrategia de sumar iteradamente la diferencia constante, después de la primera sesión y del trabajo propuesto para la segunda, ha sido capaz de elaborar una estrategia propia, diferente y generalizable.

A señalar un hecho importante. La aceptación de la estrategia de Julio por una gran mayoría de alumnos da un valor social a tal estrategia. Es evidentemente correcta, pues sus cálculos particulares coinciden con los derivados de una estrategia rutinaria, como es sumar iteradamente la diferencia constante, y muy arraigada como medio de comprobación en los alumnos, aunque algunos no capten su validez por medio de una comprensión profunda de la misma. Esta comprensión profunda de la misma, como ya hemos señalado, se adquiere mediante una actividad reflexiva realizada de forma individual por cada alumno sobre el dibujo. El uso del dibujo, como medio para abstraer y generalizar la regla de cálculo, confirma nuestra hipótesis inicial. Las acciones realizadas sobre los elementos particulares del cada dibujo llevan a los alumnos a establecer ciertas relaciones conectivas entre estos, estas relaciones conectivas se transforman en expresiones de cálculo, donde intervienen las operaciones de sumar y de multiplicar y que constituyen lo que denominamos invariantes. Invariantes en el sentido en que los alumnos, que han pasado por este proceso cognitivo, establecen una generalización de la regla de cálculo a partir de aplicar dicho invariante a otros cálculos concretos. Es la estructura general del invariante, y no los elementos numéricos concretos, lo que dan el carácter genérico a la regla de cálculo. Así, en primer lugar se tiene una generalización intensional, abstracción de la estructura general de la regla de cálculo que se compone de elementos variables y elementos constantes, y en segundo lugar una generalización extensional por ampliación del rango de los elementos variables.

En este punto creemos que los alumnos se pueden dividir en dos categorías atendiendo a su comprensión de las estrategias generalizables. Alumnos cuya comprensión es instrumental "saben que hacer, aunque no por qué lo hacen" y otros cuya comprensión es relacional "saben que hacer y por qué lo hacen" (Skemp, 1976). Para los primeros la validez de la estrategia queda determinada por su coincidencia, en el resultado, con el obtenido por medio de la estrategia rutinaria, como es sumar la diferencia constante o mediante recuento sobre un dibujo. No son capaces de dar una explicación más allá de una mera repetición del proceso de cálculo, pero si son capaces de memorizar una estrategia e imitarla. Para los segundos, la validez de la estrategia empleada, queda determina por las acciones realizadas sobre el dibujo, en un caso particular, y por la correspondiente extensión de su aplicación a cualquier caso. En sus explicaciones siempre recurren al caso particular en el que establecieron la estructura general de la regla para el cálculo, es decir, donde construyeron la generalización.

En el ambiente del aula, a veces es difícil para el profesor determinar con seguridad que tipo de comportamiento manifiestan los alumnos. Muchas veces, bajo la apariencia de una comprensión relacional se encuentra de hecho una comprensión instrumental, enmascarada por una buena imitación de una estrategia concreta.

Para una mejor comprensión de las estrategias expuestas, se les pidió a los alumnos que resolvieran cada cuestión mediante las estrategias que no habían empleado. Además, se les pidió que su resolución no se limitará a un mero cálculo, sino que deberían explicar las acciones del cálculo con sus propias palabras y en referencia al dibujo que acompaña a cada situación. Consideramos esta parte de la tarea como de vital importancia, pues por un lado, fuerza a los alumnos a interpretar más de una estrategia y por otro lado prepara el camino hacia la simbolización de cada una de las estrategias empleadas.

6.4.3. Tercera Sesión. Lunes 4 de Noviembre de 1996

Asisten 18 alumnos. La sesión se dedica por completo a la introducción de símbolos literales para expresar las estructuras generales de los invariantes establecidos en las anteriores sesiones y para cada uno de los problemas resueltos. La introducción de símbolos es clave en el proceso de generalización pues ayudan a descontextualizar los cálculos particulares y a que las expresiones correspondientes sean objeto de reflexión por sí mismas. Para esta parte de la tarea, se contó con los alumnos que habían sido capaces de contestar correctamente a la cuestión relativa al tamaño n del árbol de Navidad. Siguiendo un esquema de traducción entre símbolos y elementos concretos, se simbolizaron las correspondientes estrategias, tal y como se muestra a continuación:

Estrategia de Julio

Baldosas cuadradas	Baldosas hexagonales
8 + 9 · 2	6 + 44 · 4
primer elemento (*f(1)*) — 10-1 — diferencia constante (*d*)	primer elemento — 45-1 — diferencia constante
cálculo requerido (n)	cálculo requerido
8 + 2(n-1)	6 + 4 (n-1)

Expresión general: **f(n) = f(1) +d (n-1)**

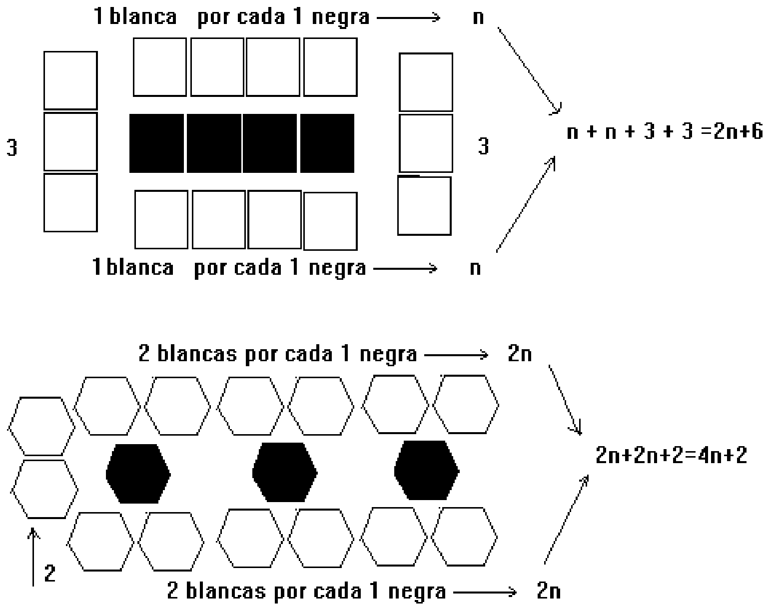
Estrategia de Ana

Baldosas cuadradas	Baldosas hexagonales
10 · 2 + 6	45 · 4 + 2
cálculo requerido — diferencia constante	cálculo requerido — diferencia constante
2 n + 6	4 n + 2

Expresión general: **f(n)= n d + b**

Se resaltó la función importante que cumple en ambas estrategias la diferencia constante, pues es el factor que multiplica al elemento variable de ambas estrategias.

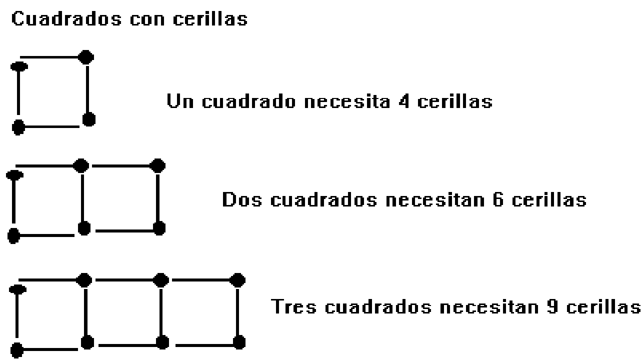
La estrategia de Samuel, fue simbolizada para cada caso particular, pues es claramente dependiente del dibujo.



(figura 6.7)

Una vez simbolizadas las estrategias se simplificaron las correspondientes expresiones, resaltándose el hecho de que las expresiones resultantes son idénticas a las obtenidas mediante la estrategia de Ana. Así, una simbolización como es 2n+2n+2, que se obtiene de aplicar una acción de descomposición del dibujo en tres partes, dos variables y una constante, una vez simplificada y obtenido 4n+2, permite observar el dibujo de las baldosas hexagonales mediante otra acción diferente, consistente en el agrupamiento de cuatro en cuatro de las baldosas hexagonales blancas, quedando un resto de dos baldosas. Esta última actividad es importante en el proceso de dar significado a las expresiones simbólicas en relación con las acciones particulares desarrolladas sobre el dibujo, pues, para aquellos alumnos que tienen dificultad en dar el salto abstracto de un cálculo concreto a un cálculo simbólico, este tipo de actividad sirve para facilitar tal tránsito.

Para la siguiente sesión se propuso la siguiente tarea:



(figura 6.8)

a) *¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir 12 cuadrados?*
b) *¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir 35 cuadrados?*
c) *¿Cuántas cerillas se necesitarán para construir n cuadrados?*
d) *Explica cómo obtienes cada uno de los cálculos.*

6.4.4. Cuarta sesión. Miércoles 6 de Noviembre de 1996.

Asisten 18 alumnos. Se revisa lo que los alumnos han realizado. La mayoría de las acciones correspondieron a la expresión simbólica 4+3(n-1), es decir a la estrategia desarrollada por Julio.

Finalmente se introdujo la simbolización $f(n) = an+b$, con a la diferencia constante y b es el primer término menos la diferencia constante. Para facilitar la comprensión de los alumnos los datos relevantes de cada problema se les pidió que rellenasen las columnas tercera a cuarta de la siguiente tabla, el profesor fue rellenando las columnas primera y quinta. Lo hecho se resume en la siguiente tabla:

Problema	*Pavimentos cuadrados*	*Baldosas hexagonales*	*Cuadrados con cerillas*	**Notación general**
Expresión simbólica	2n+6	4n+2	3n+1	f(n)=an+b
Diferencia constante	+2	+4	+3	d
Coeficiente de n	*2*	*4*	*3*	a
Relación entre a y d	2=*2*	4=*4*	3=*3*	d=a
Primer término	8	6	4	
dif entre pri.ter y *d*	8-2=6	6-4=2	4-3=1	f(1) - d = b
valor numérico de *b*	6	2	1	

Con esta última actividad, se pretendía hacer evidente lo que en común tienen los tres problemas desarrollados, es decir la función afín "f(n) = $an+b$". También dar un paso más en el proceso de generalización, pues en cada problema, los alumnos habían sido capaces de generalizar una regla particular para el cálculo, y ahora, el objetivo era contemplar la expresión general de esa regla. En cada problema, se había variado el tamaño del objeto "n" y el número de objetos asociado a ese tamaño "$f(n)$", pero obviamente " a " y " b " habían permanecido constantes. La variación de "a " y "b", a través de los tres problemas resueltos, iniciaba la extensión del rango de referencia de dichos elementos y permitía iniciar la generalización de la regla particular hacia la expresión general "$f(n)=an+b$". A continuación se pidió los alumnos que inventaran expresiones de la forma "$f(n)=an+b$", y calculasen los primeros términos de la correspondiente sucesión, para comprobar sobre la misma, que correspondían con la misma estructura de los problemas descritos, es decir, pasar de un término al siguiente se suma siempre la cantidad constante "a", y el primer término es igual a "$a+b$". Los alumnos en su mayoría, y a juicio del profesor, aparentemente comprendieron la tarea y la misma fue realizada satisfactoriamente.

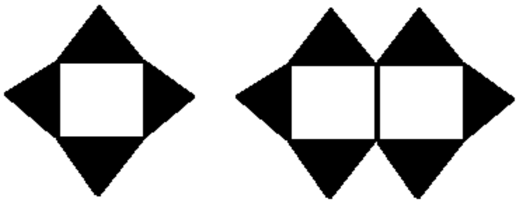
El único invariante erróneo establecido por los alumnos durante la prueba escrita y la primera sesión fue $f(2n)=2f(n)$. A los alumnos se les pidió que argumentaran en contra de tal invariante. La mayoría de los argumentos eran del tipo " *no vale pues no da un resultado correcto*". Un alumno (Jonay) fue capaz de argumentar de la forma siguiente: "*Si calculo el número de baldosas blancas cuadradas para el tamaño 2 por la fórmula tengo $f(2)=2\cdot 8=16$, y si cuento sobre el dibujo me da $f(2)=10$*". Para algunos alumnos el argumento empleado por Jonay les pareció igual al más generalizado, es decir, no es válido pues no da el resultado correcto. Si nos fijamos detenidamente observamos que el argumento inicial sólo contempla la similitud de resultados y da por hecho que uno de ellos es correcto, luego si los resultados son distintos, el diferente del aceptado como correcto, es incorrecto. Sin embargo, el argumento de Jonay utiliza un resultado conocido (mediante recuento directo sobre el dibujo), f(2)=10, como contraejemplo para invalidar el invariante. La dificultad para distinguir la sutileza presente en el segundo argumento pensamos que es lo que hace que los alumnos no lo comprendan suficientemente y por lo tanto no lo utilicen como argumento concluyente.

6.5. Las pruebas escritas.

6.5.1. Prueba escrita 1, realizada una semana después de las sesiones de aula.

Una semana más tarde, el 13 de Noviembre de 1996, se administró a los 18 alumnos una prueba escrita (figura 6.9).

Observa los dibujos siguientes:



Para rodear un cuadrado utilizamos cuatro triángulos
Para rodear dos cuadrados necesitamos seis triángulos:
El profesor ha preguntado ¿Cuántos triángulos harían falta para rodear 30 cuadrados unidos por un lado?
A continuación están los cálculos de cuatro alumnos:
José: 2 ´ 30 = 60, 60 + 4 = 64. Solución: Necesitaríamos 64 triángulos.
Luisa: 30 + 30 = 60, 60 + 1 + 1 = 62. Solución : 62 triángulos.
Jonathan: Si dos cuadrados necesitan 6 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitan: 90 triángulos,
ya que 30 = 2 ´ 15 y 15 ´ 6 = 90.
Ana: Si 1 cuadrado necesita 4 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitaran 4´30 = 120 triángulos.
a) ¿Cuál de las soluciones es correcta? Explica detenidamente tu elección.
b) Explica en qué fallan las incorrectas.

(figura 6.9)

Al no solicitar explícitamente la solución del problema, y sí que se criticaran cuatro soluciones, pretendíamos comprobar como eran capaces de dar sentido a sus reflexiones por escrito. La necesidad de dar sentido a unas explicaciones, que aunque esquemáticas son lo suficiente significativas respecto de las tareas desarrolladas en las anteriores sesiones y tener además que explicar las no correctas mediante argumentos convincentes, son tareas que conllevan una actividad cognitiva de alto nivel, pues la propia explicación ha de ser el objeto de la reflexión individual y ayuda a la comprensión profunda de estrategias cuya base cognitiva, para muchos alumnos, se apoya fundamentalmente en la memoria y se manifiesta, como hemos señalado antes, por imitación de un procedimiento cuya comprensión es básicamente instrumental.

A la vista del éxito de la estrategia de Julio consideramos no incluir entre las soluciones dadas una equivalente. De las cuatro soluciones sólo la de *Luisa* es correcta y corresponde al esquema de solución que hemos denominado de Samuel. La solución de *José* es incorrecta y correspondería a la estrategia de Julio, pero para el caso de 31 cuadrados. La de *Jonathan y Ana* equivalen a una interpretación de la situación como correspondiente a una de proporcionalidad directa. Esto queda muy claro en la de Ana pero no tan claro en la de Jonathan, cuya expresión simbólica corresponde con $f(2n) = 2\,f(n)$, y que como hemos visto fue utilizada en la primera sesión de clase.

Todos los alumnos, menos uno, dieron en primer lugar la solución al problema. La tabla siguiente recoge la frecuencia de esquema empleado:

Tipo de solución	**Expresión de cálculo**	**Alumnos**
Estrategia de Ana	2·30+ 2	9
Estrategia de Julio	2·29+ 4	5
Estrategia de Samuel	30+30+1+1	3

En primer lugar notamos que ha habido un cambio en las preferencias de los alumnos. Ahora la estrategia más utilizada es la de Ana. Se podría argumentar que no es la de Ana, sino la expresión general para el cálculo explicada en clase y que por lo tanto los alumnos han vuelto a confiar en la autoridad del profesor. Sin embargo, una lectura cuidadosa de esas 9 soluciones indica que 8 de ellas se apoyan en el dibujo, lo cuál las aproxima más a la estrategia de Ana que a la expresión general que fue establecida sin hacer referencia a ningún dibujo.

Sólo una alumna utiliza la expresión general $f(n)=an+b$ señalando que a es la diferencia constante y que b se obtiene restando del valor del primer término la diferencia constante a. Un alumno Jonathan, que emplea la estrategia de Ana, aporta otra solución diferente razonando sobre el dibujo y cuya expresión de cálculo es 2 · (30-2)+ 6. Luego los alumnos, mayoritariamente, siguen confiando en las estrategias personales elaboradas en clase, que parten de acciones realizadas sobre el dibujo.

6.5.2. Argumentos empleados por los alumnos

Una vez revisado el trabajo realizado por los alumnos, hemos clasificado los argumentos según las cuatro categorías siguientes:

A0: Se decide la validez de una solución por comparación con el cálculo propio, es decir, si coincide es correcta si no coincide es incorrecta. La justificación es vaga e imprecisa.
Ejemplos:
-"*Jonathan: Está mal porque no sería (15·6) sino 2·30+4=64*". (Tamara).
-"*La de José no es correcta, porque se fija en el tamaño 2 y ve que por los lados necesita dos triángulos*". (Marcos)

A1: El argumento repite básicamente el procedimiento de cálculo y no aporta otras razones.
Ejemplos:
-"*Luisa ha cogido el número que le han pedido y lo ha sumado por sí mismo. Luego ha sumado al resultado que le ha dado +1+1 porque 1+1=2.*"(Bibiana)
-"*Ana: multiplicó 1·4 y le dio 4 y creyó que si multiplicaba 30·4 le daría los triángulos que necesitaba*". (Airam)

A2: El argumento se basa en un contraejemplo (válido solo en las estrategias incorrectas).
Ejemplos:
-"*Ana: Yo creo que es incorrecta... si lo hacemos como ella dice nos daría con 2 cuadrados: 2·4=8 y no es correcto*". (Beatriz)
-"*Ana: Multiplica 30 por 4 que son los triángulos de la primera figura y no podría, porque la figura de dos cuadrados tendría que tener entonces 8 cuadrados*". (Ivan)

A3: El argumento es correcto. La explicación muestra claramente que se han comprendido las operaciones dadas. Utiliza el dibujo o la sucesión para justificar el procedimiento de cálculo.
Ejemplos:
-"*José: Está mal, porque José multiplica 30 que son los cuadrados por dos y después le suma el primero, o sea que lo hace para 31 cuadrados y debería de restarle uno a los 30 y entonces sumarle el que es el primero*" (Julio).
-"*Ana no miró como se iban sucediendo el número de triángulos, simplemente miró el primero y creyó que todos los demás eran iguales*" (Jonathan).

La siguiente tabla recoge el tipo de argumento utilizado para cada una de las soluciones aportadas en el enunciado del problema.

Tipo de Argumento Utilizado en cada solución dada

	José	Jonathan	Ana	Luisa
A0	5	2	1	1
A1	2	5	4	3
A2	1	1	6	--
A3	9	5	5	13
no responden	1	5	2	1

Los cuatro argumentos tipificados constituyen mediante apareamiento dos grupos bien diferenciados. Tenemos un primer grupo de argumentos, A0 y A1, que corresponderían a la manifestación de una comprensión instrumental por los alumnos, es decir, *"explican lo que se hizo y no por qué se hizo así, o comparan con el propio cálculo"*. Al segundo grupo corresponderían los argumentos, A2 y A3, que indican una comprensión relacional *"explican lo que se hizo y por qué se hizo así"*.

Los argumentos A2 y A3 serían argumentos de alto nivel, pues los alumnos que los utilizan muestran un aceptable nivel de comprensión respecto de cómo debe una validar o invalidar una solución dada. Por el contrario, los argumentos A0 y A1 serán clasificados de bajo nivel. La siguiente tabla muestra la frecuencia de tales emparejamientos con respecto a cada solución dada.

Argumentos	***José***	***Jonathan***	***Ana***	***Luisa***
Bajo nivel A0, A1	7	7	5	4
Alto nivel A2, A3	10	6	11	13

De la tabla se deduce que los argumentos de alto nivel superan a los argumentos de bajo nivel, en todas las soluciones dadas, salvo en la solución "Jonathan", donde la frecuencia es muy similar. Siendo mayor la frecuencia en la solución "Luisa" que es la correcta. Tales argumentos tienen una frecuencia muy similar en la explicación de las soluciones incorrectas "José" y "Ana". Esta última solución, que claramente supone el uso de un razonamiento de proporcionalidad directa, parece que es fácilmente entendible por los alumnos y sus explicaciones se basan en el dibujo (5 argumentos) o emplean un contraejemplo (6 argumentos) utilizando el caso de los dos cuadrados que figura en la prueba, para verificar que la solución de "Ana" no es correcta. En el caso de la solución "José", los alumnos optaron mayoritariamente por el uso de un argumento tipo A3 dentro de este grupo.

A destacar que el uso del contraejemplo fue utilizado una sola vez durante las sesiones de aula. Pensamos que el uso del contraejemplo zanja rápidamente la cuestión de decidir si una solución es incorrecta, pero no aporta nada sobre el posible razonamiento que llevó a un individuo a resolver una cuestión de esa manera. Para los alumnos el uso de argumentos vía contraejemplo, al ser estos más sintéticos que explicar la posible vía o estrategias de solución, les ahorra el consiguiente esfuerzo cognitivo. En este sentido, un alumno que utiliza un contraejemplo no necesita dar sentido a una explicación errónea, lo único que tiene que hacer es verificar que la expresión para el cálculo no se verifica en un caso cuyo resultado es conocido. Así que poco o nada hay que reflexionar sobre la explicación dada y por lo tanto esta no pasa a ser objeto de reflexión por parte del alumno. Sólo los alumnos cuyo argumento es del tipo A3 han pasado necesariamente por dicho proceso reflexivo. Esto último nos lleva a una conclusión ciertamente paradójica, como lo es el que un argumento "muy matemático" como es el uso del contraejemplo evita en los alumnos un proceso importante en la construcción significativa, relacional, del conocimiento, al menos en este tipo de problemas.

Luego en las explicaciones a las estrategias erróneas, mayoritariamente se utilizan argumentos que no parten de un proceso reflexivo. Siendo superior al 50% para las soluciones "Jonathan" y "Ana". Las cifras son contundentes tal y como se recoge en la siguiente tabla:

Argumentos	*José*	*Jonathan*	*Ana*	*Luisa*
A0, A1, A2	8	8	11	4
A3	9	5	5	13

Los argumentos con referencia al dibujo abundan en la comprensión de las estrategias, incluso las incorrectas. Señalemos de paso que los argumentos de cálculo rutinario, o expresiones aprendidas de memoria, incluso los contraejemplos que aquí son básicamente de cálculo, pueden dar resultados o respuestas satisfactorias pero pueden ocultar una falta profunda de conocimiento y significado de las estrategias y por lo tanto de las expresiones simbólicas utilizadas.

Por último, la siguiente tabla muestra para cada alumno y solución dada el tipo de argumento utilizado, así como la frecuencia de argumentos empleados y la frecuencia por agrupamiento en argumentos de bajo y alto nivel.

Alumno	José	Luisa	Jonathan	Ana	nº arg.	A3-A2	A1-A0
Jonathan	A3	A3	A3	A3	1	4	0
Julio	A3	A3	A3	A3	1	4	0
Jonay	A3	A3	A3	A2	2	4	0
Airam	A3	A3	A1	A1	2	2	2
Samuel	A0	A3	A0	A3	2	2	2
J.Antonio	A3	A1	A1	A1	2	1	3
Beatriz	A2	A1	A3	A2	3	3	1
Pedro	A0	A3	A2	A2	3	3	2
Yisel	A1	A3	A1	A2	3	2	2
Ivan	A3	A3	A1	A2	3	3	1
Ana Rosa	A3	A3	-	A3	1	3	0
Marcos	A0	A3	-	A3	2	2	1
Carlos	-	A3	A1	A1	2	1	2
Yaiza	A1	A3	-	A1	2	1	2
Tamara	A0	-	A0	A2	2	1	2
Aranza	A3	A0	-	A0	2	1	2
Santiago	A0	A3	-	-	2	1	1
Bibiana	A3	A1	-	-	2	1	1

La tabla muestra la consistencia de los alumnos al argumentar. Se observa que sólo dos alumnos utilizan el mismo argumento para las cuatro soluciones dadas. Cuatro alumnos utilizan dos tipos de argumentos para las cuatro soluciones dadas. Es decir, un tercio de los alumnos no utilizan más de dos argumentos para las cuatro soluciones dadas. También observamos que solo cuatro alumnos no utilizan argumentos de bajo nivel y que todos los alumnos utilizan al menos un argumento de alto nivel, en cualquiera de las soluciones dadas.

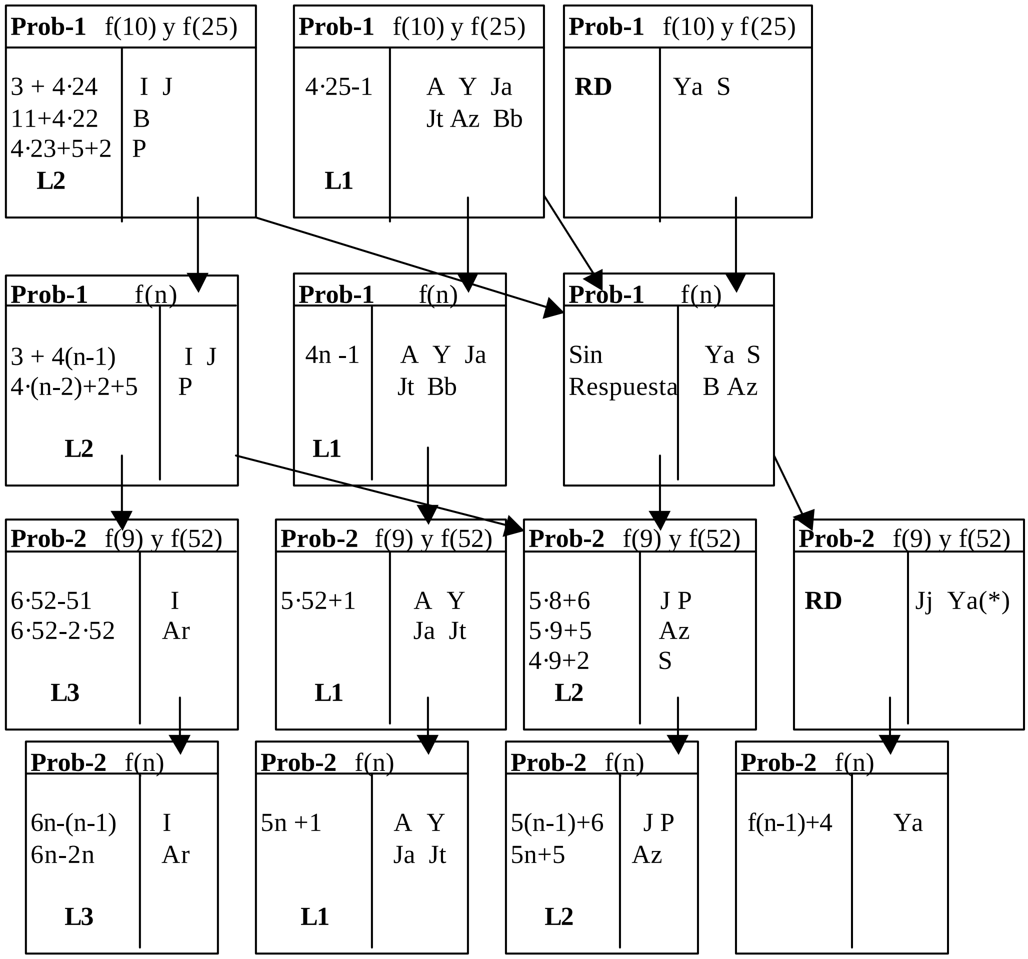
Los resultados, en general, muestran que los alumnos han desarrollado una más que aceptable comprensión sobre lo que matemáticamente cuenta con respecto a los argumentos empleados en una discusión matemática. Pero tal nivel no es algo logrado en general, y mucho alumnos aún permanecen en un nivel bajo con respecto a sus argumentos, siendo muchas de las explicaciones del tipo "*qué es lo que se hizo*" en vez de "*por qué se hizo así*" o "*cómo se hizo así*".

6.5.3. Prueba escrita 2, realizada al final del curso (12 de Junio de 1997).

Siete meses después de llevada a cabo la experiencia se realizó una prueba escrita a los alumnos para estudiar la persistencia en el tiempo de los conocimientos adquiridos durante las sesiones de aula. La prueba se realizó el día 12 de Junio de 1997, y a la misma asistieron 14 alumnos de los 18 que realizaron la experiencia de aula. La prueba fue administrada sin que los alumnos supiesen nada sobre su composición ni sobre el día en que se iba a llevar a cabo.

Para la prueba se utilizaron dos problemas que no habían sido trabajados en clase. Fueron administrados en secuencia, es decir, a los alumnos se les entregó en primer lugar el problema del árbol de Navidad y una vez realizado se les entregó el problema de la cadena de hexágonos.

El siguiente GVT muestra las respuestas dadas por los alumnos a las cuestiones planteadas en cada problema.



(*) sólo la cuestión f(9).

Claves de Alumnos

S	Santiago	Ar	Ana Rosa	Az	Aranzazu
P	Pedro	**Sa**	**Samuel**	A	Ariram
B	Beatríz	Jt	Jonathan	Y	Yisel
Jj	José Jonay	J	Julio	**M**	**Marcos**
Bb	Bibiana	**T**	**Tamara**	**Jc**	**José Carlos**
Ya	Yaiza	Ja	José Antonio	I	Ivan

En negrita los alumnos que no asistieron a la prueba final.

Si atendemos ahora al comportamiento de los alumnos, observamos que sólo Ya se ha mantenido en el nivel-1 durante toda la prueba, es decir su comportamiento es de actividad procedimental. Los alumnos I, Az, Ar, Bb, B, Jj y S cambian de estrategia al pasar de un problema al otro, luego su comportamiento se debería calificar como de comprensión procedimental (nivel-2), pues en cada problema han sido capaces de establecer una generalización local. Por último los alumnos A, Y, Ja, Jt, J y P han generalizado la estrategia y su comportamiento es de comprensión conceptual (nivel-3).

Luego dan respuestas en el Nivel-3 un 43% de los alumnos, mientras que un 50% dan respuestas en el Nivel-2. Lo cuál debe ser considerado como una buena muestra de la persistencia del conocimiento y por lo tanto de la estabilidad, a través del tiempo, de los esquemas conceptuales construidos por los alumnos.

6.6. Conclusiones.

Al asumir el profesor-investigador el papel de moderador de la actividad en el aula, los alumnos muestran un alto grado de actividad, creciente según avanzan las sesiones. Las normas sociales y sociomatemáticas son aceptadas mayoritariamente. Creemos que es debido a que las sesiones se iniciaron proponiéndose la discusión de estrategias de solución no generalizables seguidas de discusiones sobre estrategias de solución no correctas. Tal comienzo favorece la intervención de los alumnos que han desarrollado estrategias correctas y sienta las bases para la crítica y explicación de las soluciones particulares. Referir la validez de la “regla” particular desarrollda, a acciones sobre el dibujo es aceptada y entendida por los alumnos. Trasladar tales acciones en primer lugar a expresiones aritméticas y más tarde a expresiones literales (algebra), manteniendo en todos los casos la referencia a agrupamientos y elementos del dibujo es una actividad desarrollada sin grandes complicaciones por los alumnos. El dibujo se muestra en esta fase como un medio importante para la generalización, al conferir significado a expresiones simbólicas (aritméticas o algebraicas) mediante acciones desarrolladas sobre el mismo.

Otra conducta que adoptan los alumnos es la de acompañar con explicaciones los cálculos realizados. En la prueba final, la mayoría de los cálculos realizados, fueron acompañados de explicaciones, en unos casos breves y en otros más amplias. Sin embargo, a los alumnos les cuesta distinguir, tanto en intervenciones habladas como escritas, entre una explicación sobre cómo se obtiene una *regla*, de una explicación sobre cómo funciona tal *regla*. Este hecho queda de manifiesto en los argumentos empleados en la prueba escrita 1, donde muchos alumnos todavía permanecen en explicaciones intuitivas sobre qué se hace en vez de por qué se hace así.

La prueba escrita 2, muestra una notable persistencia del esquema conceptual de pauta lineal desarrollada a partir de las tareas propuestas (problemas de generalización lineal). La mayoría de las estrategias desarrolladas corresponden con esquemas de tipo A, sin embargo, algunos alumnos persisten en esquemas de tipo B. Creemos que esto último es debido, a la insistencia e importancia que se dio, durante las sesiones de aula, a que la argumentación de las estrategias desarrolladas se hiciera con referencia a elementos del dibujo. En este sentido, pensamos que el dibujo se puede convertir en un obtáculo en el desarrollo del aprendizaje de algunos alumnos, pues muestran una cierta dependencia del mismo, incluso cuando las estrategias corresponden a esquemas del tipo A.

Por último, El esquema de descomposición genética desarrollado en el segundo estudio se ha mostrado muy útil para obtener información inicial del comportamiento de los alumnos, y clave para la planificación de las sesiones de aula. También para guiar estas y para tipificar el desarrollo conceptual del esquema mediante las dos pruebas escritas finales.

Capítulo 7

Síntesis de los tres estudios

En este capítulo haremos una síntesis de los tres estudios llevados a cabo. Tal síntesis reflejará la forma general del proceso de generalización en problemas de generalización lineal.

7.1. Sobre el proceso de generalización y la comprensión

En este apartado discutiremos el proceso de generalización desarrollado por los alumnos al abordar las tareas propuestas, utilizando como marco teórico interpretativo los constructos explicitados en el capítulo 2. Tal proceso de generalización se refiere a la resolución de dos tareas de problemas de generalización lineal con dibujo dadas en secuencia.

7.1.1. El proceso de generalización en una tarea

La cuestión a resolver, cálculo de *f(n)* para un cierto *n*, dirige la atención de los alumnos hacia los elementos del dibujo y el tamaño *n* del objeto, o hacia los términos de la sucesión numérica.

A partir de ahí, los alumnos desarrollan una *acción*, que puede suponer o no una actividad física sobre el dibujo, o sobre la sucesión numérica. Tales acciones pueden tener un carácter dinámico o estático según las explicaciones escritas de los alumnos, pero hemos constatado que durante las entrevistas tales explicaciones presentan un marcado carácter dinámico, siendo acompañadas por gestos sobre los objetos presentes en las tareas.

Tales acciones se interiorizan en forma de proceso (Dubinsky, 1991a) cuyo elemento más representativo es el esquema de la acción (Dörfler, 1991).

Las acciones manifiestan la asimilación, que los alumnos realizan de la situación planteada, a un esquema conceptual existente. Distinguiremos entre cuestiones introductorias y cuestiones de generalización próxima y lejana.

Cuestiones introductorias

Para las cuestiones introductorias, la mayoría de los alumnos asimilan la situación al esquema particular de recuentos directos (que consideramos una parte del esquema más general que hemos denominado *números*). Se percibe la característica más obvia de la pauta lineal: la diferencia constante, o cantidad de agregación que hay que sumar a los elementos de un objeto, de un determinado tamaño, para obtener el número de componentes del objeto de tamaño superior en una unidad. Tal percepción deriva en la manifestación por algunos alumnos de dos procedimientos importantes de recuento directo sobre la sucesión numérica: procedimientos iterativo y recursivo sobre la sucesión numérica. Consideramos el segundo, el recursivo, como una generalización, primera que establecen los alumnos, del iterativo. Para comprobar este hecho, hemos de situar a los alumnos en una cuestión como la cuestión E3, tarea de la escalera (primer estudio), donde se proporciona el número de elementos de un objeto de tamaño n y se solicita el número de elementos de un objeto de tamaño n+1 (siendo n un número suficientemente grande, no fácilmente alcanzable por recuento directo). Por otro lado, hay alumnos que realizan dibujos de los objetos de tamaño pedido y cuentan directamente sobre los mismos el número de componentes. Otros alumnos son capaces de iniciar recuentos indirectos, asimilando la situación a los esquemas de *función* y de *proporcionalidad directa*, pero esto será discutido más adelante. Resumiendo, en las cuestiones introductorias se produce la primera generalización, que consiste en *objetivar la acción de sumar la diferencia constante*. Tal generalización caracteriza el primer nivel del esquema de descomposición genética.

Cuestiones de generalización próxima y lejana

Los alumnos, ahora abordan la cuestión de generalización próxima. En algunos casos sus comportamientos, persistencia en recuentos directos, no se diferencian de los descritos anteriormente, pero una gran mayoría de alumnos optan por recuentos indirectos.

Algunos alumnos centran su atención sobre el dibujo, mientras que otros lo hacen sobre la sucesión numérica. El centro de atención marca la cualidad de la acción y por lo tanto del esquema resultante de tal acción. Tales acciones se orientan hacia determinados elementos presentes en el estímulo. Luego, la acción en un principio actúa sobre representaciones externas de objetos, dadas por sus símbolos. Más tarde, esta acción se interioriza en un proceso. De esta forma el sujeto, es capaz de pensar sobre la acción sin que de hecho tal acción se lleve a cabo de forma física. Dörfler (1991) habla de los elementos de tales acciones como de objetos materiales, que corresponderían con los dibujos o símbolos sobre el papel, o de objetos ideales, figuras en el sentido en que Laborde (1992, p. 57) distingue un término del otro, como representaciones mentales de los dibujos o de los símbolos presentes en el estímulo.

Debido al esquema conceptual existente, al que se ha asimilado el estímulo, los alumnos producirán un tipo de respuesta, cálculo específico para los elementos correspondientes a un objeto de tamaño dado (generalización próxima). Tal cálculo específico, posee una estructura particular que refleja y sintetiza el esquema de la acción.

Dörfler (1991) considera que para la construcción de una generalización es necesario el establecimiento de un *invariante.* Las categorías de respuesta, estructura del cálculo en la cuestión de generalización próxima, establecen las estructuras sintácticas y semánticas de tales invariantes. Sin embargo, no podemos concluir que de una única expresión para el cálculo, anotada por un alumno, en una cuestión se pueda considerar que el alumno ha establecido un invariante. Tales expresiones son necesarias pero no suficientes para concluir que un alumno ha establecido una generalización. Para poder afirmar que se ha establecido una generalización es necesario observar el comportamiento del alumno a lo largo de la tarea, es decir, cómo responde a la cuestión de generalización lejana. Así, los alumnos que utilizan la misma categoría de respuesta en las dos cuestiones de generalización próxima y lejana habrían establecido un invariante, que corresponde con la estructura aritmética de la regla de cálculo. Estos alumnos han establecido un invariante al generalizar la regla de cálculo específica obtenida en la cuestión de generalización próxima. Esta es la segunda generalización que los alumnos alcanzan en este tipo de tarea. Los invariantes son de dos tipos A o B, estando presente en el esquema de tipo A la diferencia constante y ausente en los del tipo B. Los invariantes del tipo A provienen de acciones realizadas sobre la sucesión o sobre el dibujo, o en los dos ámbitos. Los invariantes del tipo B, parece que tienen su génesis en el ámbito visual-geométrico, y por lo tanto son dependientes en su configuración del dibujo presente en las tareas (Capítulo 5 y Capítulo 6). Sin embargo, de las explicaciones dadas por los alumnos en el primer estudio (Capítulo 4) se infiere que también, y en ciertos casos, se pueden establecer a partir de acciones sobre la sucesión numérica.

Tal generalización tiene dos cualidades. La primera es una cualidad *intensional*, que se manifiesta en la estructura sintáctica y semántica de la regla de cálculo, abstraída en una cuestión concreta y para un cálculo concreto. Tal estructura, contiene elementos variables (n y $f(n)$) y elementos invariables, y sus significados están claramente asociados a partes del dibujo o a elementos de la sucesión numérica. La segunda cualidad es la *extensional,* que se refiere al rango de los elementos variables.

Tal generalización la denominamos *generalización local*, y caracteriza el segundo nivel del esquema de descomposición genética. Para aquellos alumnos que han utilizado la misma relación invariante en ambas cuestiones dentro de una misma tarea parece claro que la expresión aritmética para un cálculo específico, generalización próxima, refleja la estructura general de dicho cálculo y produce en los alumnos el desarrollo de una generalización intensional, comprobable al aplicar la misma relación invariante a la cuestión de generalización lejana. Sin embargo, para establecer una entidad conceptual como es el objeto matemático $f(n) = an + b$, es necesario variar los elementos que lo componen, extender el rango de referencia de los elementos y de sus símbolos (Dörfler, 1991). Dentro de cada tarea, los alumnos obtienen una relación entre n y $f(n)$ que contiene elementos invariables y variables, específicos de la tarea concreta, como por ejemplo el par de parámetros a y b en la categoría L1. Lo que podemos concluir es que los alumnos han abstraído un método general de recuento para cada tarea. En principio ese esquema general de recuento es sólo de aplicación a cuestiones dentro de la tarea en la que se ha establecido. Por ello creemos que mientras no se perciba el mismo esquema a través de una secuencia de tareas, lo que supone la aplicación del mismo esquema de la acción y por lo tanto la variación de los elementos invariables, no es posible contemplar la similitud entre las diferentes estructuras de cálculo y por lo tanto reconocer esa estructura como similar a $f(n) = an + b$, o equivalentes.

7.1.2. La comprensión y la generalización en una misma tarea.

La consistencia del empleo de la misma estructura de cálculo, en la cuestión de generalización próxima y en de generalización lejana dentro de una misma tarea, permite en primer lugar, conjeturar sobre el objeto generalizado por los alumnos y en segundo lugar, relacionar tal generalización con la comprensión de la tarea. Hemos precisado (Capítulo 5) las nociones de comprensión procedimental y actividad procedimental según establezcan un invariante o no respectivamente, al resolver las cuestiones de generalización próxima y lejana.

En las cuestiones introductorias, la actividad procedimental (contar sobre el dibujo) y la percepción y uso, por los alumnos, de la pauta lineal (suma de la diferencia constante) manifiesta dos tipos de comprensión procedimental de la tarea (Capítulo 4 y Capítulo 6). Por un lado, tenemos la comprensión procedimental iterativa, suma de la diferencia constante sin solución de continuidad y por otro lado, la comprensión procedimental recursiva, en el que la acción de sumar la diferencia constante se ha generalizado, y el alumno cae en la cuenta que no es necesario realizar todo el proceso, de sumar la diferencia constante, desde el primer término, sino que se puede apoyar en el último cálculo efectuado. En tal cuestión se proporcionaría a los alumnos, el número de elementos constituyentes de un objeto de tamaño $n-1$ (no fácilmente obtenible por recuento directo), y se les pediría el correspondiente a un objeto de tamaño n. Esta cuestión tiene un doble propósito. Por un lado, permite al alumno generalizar la acción de sumar la diferencia constante y por otro permite al investigador evaluar la comprensión resultante.

El conocimiento útil, desarrollado en las cuestiones introductorias, puede convertirse en un obstáculo, para algunos alumnos, cuándo abordan la cuestión de generalización próxima. Así, acciones de contar sobre el dibujo o extender la sucesión, limitan las posibilidades para estos alumnos de alcanzar una regla universal para el cálculo, segunda generalización, al permanecer los alumnos en la actividad de recuento directo. La construcción de los esquemas lineales de tipo A y B, y de la asimilación-acomodación de la tarea al esquema de proporcionalidad directa, lleva a los alumnos a establecer un invariante y por lo tanto desarrollar una generalización de la regla de cálculo.

Así, tenemos que el esquema conceptual, no apropiado para este tipo de tareas, de *proporcionalidad directa* es utilizado por los alumnos frecuentemente (Capítulo 4). La asimilación de las tareas a tal esquema tiene dos cualidades bien diferenciadas. La primera consiste en asimilar la tarea al esquema, pero no acomodar el esquema a la tarea. De esta forma, el alumno considera que la situación es de proporcionalidad directa, no comprueba la validez de tal suposición, y establece invariantes erróneos en las tareas propuestas. La segunda, consiste en asimilar la tarea al esquema, pero acomodando al mismo tiempo el esquema conceptual a la tarea, llegando a establecer invariantes parcialmente correctos (Capítulo 5).

Los alumnos que han sido instruidos previamente en progresiones aritméticas no siempre reconocen este tipo de tareas y por lo tanto no las asimilan al esquema de progresiones aritméticas (Capítulo 4). Otros alumnos, sí realizan tal asimilación y hemos descrito tal asimilación y expansión del esquema en un caso concreto (Capítulo 5).

Por último está el esquema lineal emergente, que construyen los alumnos al coordinar las acciones sobre los diferentes ámbitos de la tarea con esquemas existentes, que hemos denominado de *números* y de *función entera*. Hemos descrito ejemplos del proceso de construcción de tal esquema, que posee diferentes cualidades según sea el dibujo o la sucesión numérica el ámbito donde se desarrollan las acciones (Capítulo 5).

Las generalizaciones que desarrollan los alumnos se pueden entender como actos de comprensión de las cuestiones planteadas y relacionar tales actos de comprensión con los obstáculos epistemológicos que manifiestan algunos alumnos en la resolución de una tarea. Sintetizamos la discusión precedente en el siguiente cuadro 1.

Cuadro 1.
Actos de comprensión y obstáculos en la ejecución de una tarea

Cuestiones	**Actos de comprensión**	**Obstáculos epistemológicos**
$f(4)$	Contar sobre el dibujo $f(4) = f(3) + a$	
$f(5)$	$f(5) = f(4) + a$	Contar sobre el dibujo
G.P.	Lineales tipo A y B Asimilación-Acomodación esquema de prop.directa	Contar sobre el dibujo Extender la sucesión (iteración)
G.L.	Lineales tipo A y B Asimilación-Acomodación al esquema de prop.directa	Extender la sucesión (iteración)

7.1.3. El proceso de generalización en la secuencia de dos tareas

Al abordar la segunda tarea se pueden dar diferentes tipos de comportamientos. Los comportamientos intra tarea son los mismos descritos en el apartado anterior. Pero los comportamientos inter tareas son los que ahora interesan para determinar la generalización alcanzada por algunos alumnos.

Hemos señalado que las reglas de cálculo generales tienen su origen en determinadas acciones sobre el dibujo o sobre la sucesión numérica y, de alguna forma, las relaciones entre las diferentes partes del dibujo (o términos de la sucesión) y sus elementos se traducen en relaciones aritméticas entre los números. Pues bien, podemos ahora caracterizar la noción de *estrategia* y de sus diferentes modalidades, afirmando que se compone de las acciones particulares realizadas sobre el dibujo (sucesión), de las relaciones entre elementos del mismo y de las relaciones aritméticas que se formulan mediante la regla general de cálculo, es decir en el invariante establecido en el proceso de generalización. Con esta caracterización, y atendiendo al ámbito donde se desarrollan las acciones, tenemos dos tipos de estrategia: *estrategia visual* y *estrategia numérica*. En cada una de ellas el ámbito correspondiente juega un papel esencial en el proceso de generalización. Pero también, hemos señalado que hay alumnos que utilizan el dibujo como medio de comprobación de la validez de las expresiones para el cálculo desarrolladas en una cuestión, a partir de acciones introducidas sobre la sucesión numérica. Esto nos lleva a considerar una tercera estrategia, que denominamos *estrategia mixta*.

Con esta noción más precisa podremos profundizar aún más sobre el comportamiento de los alumnos en la secuencia de las dos tareas. Así, aquellos alumnos que mantienen la misma categoría de respuesta (lineal) entre las dos tareas podemos afirmar que la estrategia desarrollada en la primera tarea se generaliza al ser aplicada en la segunda tarea. Es decir, en el esquema conceptual emergente, los alumnos asimilan la nueva tarea a las mismas acciones que la tarea anterior y establecen invariantes equivalentes. Al mismo tiempo, el esquema conceptual desarrollado en la primera tarea se amplía para incluir la nueva situación como elemento del mismo. Es decir, el esquema se acomoda y se expande para incluir la nueva situación.

Esta forma de actuar, caracteriza la tercera generalización que alcanza algunos alumnos en este tipo de tareas, y que consiste en generalizar la estrategia de solución. A tal generalización la denominamos *generalización global*, y caracteriza el tercer nivel del esquema de descomposición genética.

7.1.4. La comprensión y la generalización en una secuencia de tareas.

Si un alumno desarrolla diferentes estrategias en diferentes tareas, ha establecido generalizaciones locales en cada una de ellas y su comprensión la hemos denominado como *comprensión procedimental*. Con respecto a la secuencia sería de *actividad procedimental* (Capítulo 5). Hemos descrito en el capítulo 5, dos casos diferentes de comprensión conceptual. En el primer caso, el alumno que generaliza la estrategia, ha reorganizado un esquema existente y ha extendido su grado de aplicabilidad, siendo este comportamiento cognitivo lo que caracteriza a una generalización *expansiva*. En el segundo caso, ha construido un esquema conceptual nuevo, que inició durante la resolución de la primera tarea. Ambos casos los consideramos como manifestaciones de la comprensión conceptual.

Por otro lado, hemos descrito casos de alumnos que utilizan otra estrategia al abordar la segunda tarea. Si los invariantes correspondientes a tales estrategias son correctos, o parcialmente correctos, consideramos tales comportamientos como comprensión procedimental. Se ha descrito (Capítulo 5) que mediante la asimilación y acomodación de la situación al esquema de proporcionalidad directa, surge una estrategia cuyo invariante es parcialmente correcto. Tal estrategia si se generaliza, creemos que se puede convertir en un obstáculo epistemológico para tal alumno. Pues, al garantizarle un resultado correcto, según las cuestiones propuestas, no le animaría a buscar otra estrategia que le condujera a invariantes del tipo L1 o L2, idénticos o próximos por su estructura al objeto matemático $f(n) = an + b$. Por otro lado, las estrategias con invariantes del tipo L3 (sin diferencia constante), se alejan del objeto matemático, al ser dependientes, en muchos casos, de particulares relaciones establecidas por el alumno sobre el dibujo o la sucesión numérica. Creemos que la persistencia en tales comportamientos por algunos alumnos, convierten a las estrategias, tanto las derivadas de asimilar-acomodar la situación al esquema de proporcionalidad directa, como las otras, con invariantes lineales tipo L3, se convierten en claros obstáculos epistemológicos al abordar la segunda tarea. La discusión precedente la podemos sintetizar en el siguiente cuadro 2.

Cuadro 2.
Actos de comprensión y obstáculos en la ejecución de tareas del mismo tipo

Tareas	**Actos de comprensión**	**Obstáculos epistemológicos**
1ª tarea	Lineales tipo A y B Asimilación-Acomodación esquema de prop.directa	
2ª tarea	Lineales tipo A	Lineales tipo B Asimilación-Acomodación esquema de prop.directa

7.2. Consideraciones didácticas para la enseñanza y aprendizaje

El esquema de *descomposición genética*, en combinación con el *grafo para visualizar transiciones* correspondiente a una prueba exploratoria, serviría al profesor para realizar una evaluación inicial de los alumnos. En primer lugar, tendríamos los alumnos que persisten en actividades rutinarias de recuento sobre el dibujo o que asimilan la tarea a un esquema incorrecto, sin acomodación, que quedarían fuera del esquema de descomposición genética.

A continuación, tendríamos los alumnos que utilizan la diferencia constante en cuestiones introductorias y que generalizan la acción de sumar esa diferencia, que estarían en el nivel 1. Para estos alumnos, la secuencia de instrucción debería centrarse en el segundo de los procesos del marco teórico da la generalización operativa. Es decir, habría que establecer las condiciones para la acción. La importancia de estas condiciones es obvia, pues hay acciones que no conducen a un determinado objetivo, mientras que otras sí lo hacen. Luego el punto de partida sería llevar a cabo acciones cuyo componente básico sean agrupamientos de elementos o agregación de cantidades iguales a la diferencia constante. Este hecho impone una restricción al tipo de acciones a realizar.

Siguiendo el segundo de los procesos del marco teórico de la generalización operativa, el centro de atención sería ahora las condiciones para la plausibilidad de las acciones formuladas como relaciones entre los objetos o como propiedades de los mismos. Lo que se va a generalizar en este proceso, y que constituye la esencia en este nivel de generalización, son las *condiciones para la acción*. Un requisito o condición importante en este proceso queda señalado por la importancia que tiene la diferencia constante. En los estudios experimentales hemos detectado que los esquemas invariantes establecidos por algunos alumnos contienen o no la diferencia constante, esquemas de tipo A y esquemas de tipo B, respectivamente. Luego las condiciones deben resaltar este hecho diferencial. Siendo el esquema A, con diferencia constante, el que establece tal restricción sobre las condiciones para la ejecutabilidad de las acciones.

El proceso didáctico a seguir debería contemplar los siguientes pasos:

1. Obtención de la sucesión derivada o de diferencias primeras de la sucesión dada. Para resaltar la característica constante de la diferencia.
2. Utilización de cualquier acción que contemple la diferencia constante como elemento básico de la misma: agrupamiento de elementos del dibujo según la unidad básica definida por la diferencia constante; multiplicación de las posiciones (n) por dicha diferencia hasta la obtención de la expresión correspondiente; acción de contar los “trechos”.
3. Simbolización de las relaciones obtenidas vía la introducción de símbolos para los elementos que intervienen.
4. Variación de los elementos (nuevos problemas del mismo tipo), donde se resaltará la posibilidad de reemplazamiento respecto al cumplimiento de las condiciones para la acción.

Por otro lado, tenemos a los alumnos que han realizado una generalización local, nivel 2 del esquema de descomposición genética. Tales generalizaciones locales, y dependiendo de la actuación en una secuencia de tareas pueden ser signos de comprensión procedimental o conceptual. Hemos señalado algunos ejemplos de actuación de alumnos, que no podemos considerar de comprensión conceptual. Tales alumnos estarían situados en el nivel 2 del esquema de descomposición genética, siendo la cualidad de sus generalizaciones ligeramente diferente en unos casos respecto de los otros. Para estos alumnos, es necesario establecer una secuencia de instrucción que parta en unos casos del segundo proceso del marco teórico, generalización de las condiciones para la acción, y en segunda instancia de la generalización del resultado de las acciones, es decir, la estrategia.

Generalizar la estrategia conlleva actuar de la misma forma en cada tarea, siendo esta misma forma la que establecen los esquemas con diferencia constante. Luego, habrá que proponer tareas similares y animar a los alumnos a que generalicen una estrategia que conlleve acciones e invariantes bajo el esquema con diferencia constante, tipo A.

Tal actividad se debe complementar con la siguiente. Partiendo de situaciones similares se formularan los invariantes establecidos y se deberá abstraer la estructura común subyacente. De esta forma, partiendo de un conjunto de invariantes ya establecidos, por ejemplo $4n - 1$, $6n + 5$, $2n + 3$, se llegará a la expresión general $f(n) = an + b$. La variación de los elementos constantes, en cada invariante, para construir la generalidad requiere de la introducción de símbolos algebraicos adecuados. En principio estos símbolos tienen un carácter concreto, son variables con propiedad sustitutoria, el coeficiente de n es la diferencia constante o unidad básica de agrupamiento y el término independiente en principio no es un elemento concreto en la mayoría de los casos. Por otro lado, los símbolos para las operaciones, “-“ y “+”, tienen un claro referente en la relación en que se encuentran los elementos de la acción. En conjunto esos símbolos poseen una cualidad básicamente representativa y juegan sólo un papel descriptivo, lo cuál hace que expresiones del tipo anterior se contemplen en la cognición del alumno como un proceso y no como un objeto. Por ejemplo, $4 \times 14 - 1$ es el cálculo a realizar para obtener el número de luces de un árbol de tamaño 14. El paso de *variables con propiedad sustitutoria* a *variables con el carácter de objeto*, es decir *objetivar* el invariante $an + b$ es un problema didáctico mucho más complejo.

El estudio tercero, capítulo 6, fue llevado a cabo como un estudio complementario donde poner en práctica las ideas que hemos expuesto en este apartado. Una lectura del mismo, así como de las transcripciones de las sesiones de aula, podría servir para sugerir al profesor algunas ideas, que concretan lo anteriormente expuesto. Allí, hemos querido presentar de la forma más vívida posible el relato de los episodios relevantes de la experiencia, con el ánimo de quién lo desee lo pueda ensayar. Aunque como afirma Freudenthal (1991, 160-161), en las ciencias sociales, y la educación es una de ellas, replicar un experimento solo es posible excepcionalmente, en contraste con lo que ocurre con otras ciencias, como la física. Sin embargo, algunas ideas pueden servir como guía general.

En primer lugar, la aceptación por parte del profesor de las normas sociales y sociomatemáticas expresadas allí como categorías de análisis y evaluación, son tan o más importantes para el desarrollo de las sesiones, como lo son los propios objetivos de contenido matemático. En segundo lugar, el profesor debe tener idea previa, aunque no siempre podrá tenerla completa, de las posibles soluciones que los alumnos darán a la tarea. En la presentación de las soluciones en clase, obviamente, se debe empezar por las incorrectas o no generalizables, pues son las que mejor facilitan la discusión. Se debe hacer hincapié en las normas sociales de participación, tanto en la presentación de soluciones como en la discusión y explicación de las mismas. Luego se pedirán diferentes correctas y se deberá usar el tiempo necesario de tal forma que los alumnos las presenten con todo detalle y no sólo como un relato lineal de los procedimientos de cálculo. Esta parte, como ya señalamos, es importantísima, pues la propia explicación se convierte en objeto del discurso del alumno y facilita la comprensión profunda de las estrategias desarrolladas.

Como hemos señalado anteriormente, no basta con una única situación o problema, y habrá que repetir el mismo proceso, dependiendo del tema y de los alumnos, un cierto número de veces. El tiempo empleado en desarrollar el hábito de pensar y reflexionar sobre los propios actos y los de los otros siempre proporciona recompensa.

Capítulo 8

Conclusiones

En primer lugar, la adopción de un marco teórico, que parte de las ideas centrales de Piaget sobre la construcción del conocimiento, ha sido muy útil en la determinación de los elementos claves del proceso de generalización presente el las tareas escolares denominadas problemas de generalización lineal. La interpretación del proceso de generalización realizado desde el marco teórico de la generalización operativa (Dörfler, 1991) ha permitido describir las sucesivas generalizaciones que los alumnos realizan. Por último, hemos utilizado y ampliado la noción de esquema de descomposición genética de una estructura conceptual (Dubinsky y Lewin, 1986), para concretar el proceso de generalización según tres niveles. En cada nivel se ha caracterizado la generalización lograda por los alumnos, relacionando tal generalización con la comprensión de las tareas. Así como las condiciones necesarias, que se deben dar en el comportamiento de los alumnos durante la resolución de una o varias tares, para determinar el objeto generalizado.

Hemos ampliado la clasificación original dada por Stacey (1989), al analizar las respuestas escritas de los alumnos según los tres siguientes criterios:

- el esquema conceptual subyacente
- la estructura del cálculo aritmético
- la explicación aportada sobre tales cálculos

Los esquemas conceptuales señalados a partir del primer estudio, son los de recuento directo (R), proporcionalidad directa (W) y lineal (L). A partir de la estructura aritmética del cálculo hemos definido las categorías de respuesta bajo cada esquema conceptual: Rs y Rd (R); W1, W2 y W3 (W) y L1, L2 y L3 (L).

Hemos precisado y descrito el papel que juegan en el proceso de generalización los ámbitos visual-geométrico y numérico presentes en las tareas. Detallamos acciones sobre ambos ámbitos, así como los invariantes establecidos a partir de ellas. Clasificamos tales acciones según esquemas de la acción con diferencia (A) y sin diferencia (B), lo que supone otra categoría de clasificación de los invariantes, según posean o no en su estructura el elemento *diferencia constante*, cualidad perceptiva más obvia de la pauta lineal.

Esbozamos una primera aproximación al esquema de descomposición genética de pauta lineal, a partir de los problemas de generalización. En tal esquema concretamos en niveles las diferentes generalizaciones que alcanzan los alumnos en este tipo de tareas.

Aportamos una caracterización de la noción de estrategia de solución en este tipo de tareas. Entendemos por tal, el conjunto formado por la acción, esquema de la acción e invariante establecido. La generalización de la estrategia define el tercer nivel del esquema de descomposición genética (Capítulo 5). El comportamiento de los alumnos en este nivel determina la cualidad de la comprensión en procedimental y en conceptual (Capítulo 5 y Capítulo 6).

Las normas sociales y sociomatemáticas que rigen la interacción, así como una versión preliminar del esquema de descomposición genética obtenida a partir de los estudios primero y segundo, ha permitido planificar y desarrollar un estudio complementario, estudio tercero (Capítulo 6), donde se han puesto de manifiesto varias de las conjeturas formuladas en los dos primeros estudios desarrollados. El uso del dibujo como medio para las acciones se ha mostrado muy eficiente en el desarrollo de una comprensión más profunda en los alumnos del concepto de pauta lineal a partir de los problemas de generalización lineal. Sin embargo, hemos comprobado, parcialmente, el obstáculo que tal medio puede crear, hacia el establecimiento de una generalización según el esquema con diferencia (tipo A). Incluso, algunos alumnos, son capaces de trasladar acciones sobre el dibujo sin acomodarlas a la nueva tarea (Capítulo 6). En general las conclusiones sobre la experiencia de aula son positivas, como indican los informes de las sesiones y los resultados a las dos pruebas finales (Capítulo 6), sobre la persistencia del esquema lineal a lo largo del tiempo.

Conclusiones relativas a las hipótesis generales

Respecto de la primera hipótesis de nuestro trabajo, relativa al papel facilitador del dibujo en el proceso de generalización, nuestro estudio ha dado cumplida cuenta de las expectativas allí formuladas. Sin embargo, hemos expuesto algunos de los obstáculos que podrían ser inducidos por el ámbito visual-geométrico. Sin embargo, creemos que son más las ventajas que proporciona a los alumnos, sobre todo los de bajo rendimiento (Capítulo 6) en el desarrollo significativo de la comprensión de las tareas y en la construcción del esquema conceptual lineal.

La segunda hipótesis, relativa al uso didáctico de la producción espontanea y de la discusión en el aula de las diferentes estrategias, ha sido confirmada. Los resultados del estudio tercero (Capítulo 6) ponen de manifiesto la persistencia en el tiempo, en una mayoría de alumnos, de los esquemas lineales desarrollados.

Algunas cuestiones abiertas para futuras investigaciones

Algunas cuestiones que parece oportuno estudiar con detenimiento son las siguientes:

1. ¿Qué factores hacen que los alumnos decidan elegir el dibujo o la sucesión para desarrollar las acciones?
2. ¿Cómo es que después de desarrollar un esquema lineal del tipo A (con diferencia), desarrollan un esquema lineal B (sin diferencia) en la siguiente tarea?
3. ¿Utilizan los alumnos otros medios para la comprobación de la validez de las estructuras de cálculo, que no sea el simple recuento o la sustitución de datos en las expresiones obtenidas?
4. ¿Cómo debería plantearse una tarea para que los alumnos que la asimilan al esquema de proporcionalidad directa, acomoden al mismo tiempo el esquema a la tarea y establezcan un invariante parcialmente correcto?

La metodología desarrollada en este estudio creemos que puede ser de aplicación a otros conceptos matemáticos. En este sentido, tenemos la intención de estudiar el proceso de generalización en problemas con pautas cuadráticas, sobre el que ya hemos realizado algunos estudios exploratorios.

BIBLIOGRAFÍA

Andrews, P: 1990. ' Generalising Number Pattern'. *Mathematics in School*. September, 9-13.

Anthony, G: 1996. 'Active Learning in a Constructivist Framework'. *Educational Studies in Mathematics*, **31**, 349-369.

Arnal, J. Del Rincón, D y Latorre, A: 1992. *Investigación Educativa. Fundamentos y Metodología*. Labor Universitaria. Barcelona.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., y Lewin, P.: 1988. Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 246-259.

Bachelard, G.: 1987. *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Siglo XXI editores.

Bauersfeld, H.: 1994. 'Perspectives on Classroom Interaction', en R.Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (editores) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, 117-146.

Beaton, A.E., Mullis, I.V.S., Martin, M.O., González, E.J., Kelly, D.L., Smith, T.A.: 1996. *Mathematics Achievement in the Middle School Years : IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. TIMSS International Study Center. Boston. USA.

Bell, A.: 1979. ' The Learning of Process Aspects of Mathematics'. Educational Studies in Mathematics, **10**, 361-387.

Bell, A.W., Costello, J. y Küchermann, D.E.: 1983. *A Review of Research in Mathematical Education: Part A. Research on Learning and Teaching*. NFER-NELSON.

Bell, A., Swan, M., Onslow, B., Pratt, K., y Purdy, D.: 1985. '*Diagnostic Teaching: Report of ESRC Project HR8491/1'*. Shell Centre for Mathematics Education. University of Nottinham.

Beth, E.W. y Piaget, J.: 1980. *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona. [Épistémologie Mathématique et Psychologie. Essais sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle. Presses Universitaires de France, París. 1961]

Biehler, R. Scholz, R. Strässer, R. & Winkelmann, B. (editores).: 1994. *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers.

Biggs, J.B. y Collis, K.F.: 1982. *Evaluating the Qualiting of Learning. The SOLO taxonomy*. Educational Psychology Series. Academic Press.

Biggs, J.B. y Collis, K.F.: 1991. 'Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior', en *Inteligence, Reconceptualization and Measurement*, Helga, A.H. Rowe (Editor). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Australian Council for Educational Research.

Bishop, A *et all* (eds).: 1991. *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R.C. y Biklen, S.K.: 1992. *Qualitative Research for Education. An introduction to Theory and Methods*. Allyn and Bacon.

Byers, V. y Herscovics, N.: 1977. 'Understandig school mathematics'. *Mathematics Teaching*. 81, 24-27.

Castro, E: 1995. *Exploración de Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares del Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años)*. Editorial Comares. Granada.

Castro Martinez, E. y Rico Romero, L.: 1994. 'Visualización de Secuencias Numéricas'. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, **1**.

Cobb, P.; Yackel, E.y Wood, T.: 1992. Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, **23**, 99-122.

Cook, T.D. y Reichardt, CH.S.: 1986. Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa. Ediciones Morata. Madrid.

Cornell, R.H. y Siegfried, E.: 1991. 'Incorparating recursion and fuctions in the secondary school mathematics curriculum' en Kenney y Hirsch (editores) *Discrete Mathematics across the curriculum k-12*. 1991 Yearbook. N.C.T.M. 1991.

Davydov. V.V.: 1990. *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*. Soviet Studies in Mathematics Education. Volumen 2. Editor J. Kilpatrick. Traducción inglesa de J.Teller. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

Dienes, Z.P.: 1961. 'Abstraction and Generalization'. *Harvard Educational Review*, **31**, 281-300.

D.C.B.: 1989. *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

DGOIE. : 1996. Currículo de la ESO. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias.

Dörfler, W.:1986. 'The cognitive distance between material actions and mathematical operations', en *Proceedings of the X Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, London, 147-152.

Dörfler, W.:1987. 'Empirical Investigation of the Construction of Cognitive Schemata from Actions', en *Proceedings of the XI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Montreal, Volumen III, 3-9.

Dörfler, W.: 1991. 'Forms and means of generalization in mathematics', en A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.

Dossey, J.; Mullis, I. ; Lindquist, M. y Chambers, D.: 1988. *The mathematics report card: are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Dubinsky, E.: 1986. Teaching Mathematical Induction I, *The Journal of Mathematical Behavior,* **5**, 305-317.

Dubinsky, E. y Lewin, P.: 1986. Reflective Abstraction and Mathematics Education: the genetic decomposition of induction and compactness, *The Journal of Mathematical Behavior*, **5**, 55-92.

Dubinsky, E.: 1990. Teaching Mathematical Induction II, *The Journal of Mathematical Behavior*,

Dubinsky, E.: 1991a. 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking' en D. Tall (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Dubinsky, E.: 1991b. 'Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics', en L.P. Steffe (editor) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Springer-Verlag, 160-202.

Dubinsky, E.: 1996. 'Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria'. *Educación Matemática*, Vol 8-No3, pp24-41.

Dubinsky, E. Harel, G.: 1992. 'The Nature of the Process Conception of Function' en Harel, G. y Dubinsky, E (editores*) The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Mathematical Association of America, 85-106.

Feldman, C.F.: 1987. Thought from lenguage: The linguistic construction of cognitive representations. En J.Bruner y H.Haste (Eds), *Making sense: The child's construction of the world*. Methuen. London.

Freudenthal, H.: 1991. *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

García, R.:1997. 'Piaget y el problema del conocimiento', en R. García (coordinador) *La Epistemología Genética y la Ciencia Contemporánea. Homenaje a Jean Piaget en su centenario*. Editorial Gedisa. Barcelona.

García, R.(coordinador): 1997. *La Epistemología Genética y la Ciencia Contemporánea. Homenaje a Jean Piaget en su centenario*. Editorial Gedisa. Barcelona.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1996a. 'Modelos y estrategias en problemas de generalización lineal' en J. A. Dorta *et all* (eds), *25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna,* Universidad de La Laguna, 297-307.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1996b. 'Personal strategies of generalization in linear generalizing problems' en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* University of Valencia, Vol. 1, p.174.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1997a. 'Graph for visualizing transitions (GVT) in sequences of problems with many questions', en E. Pehkonen (editor) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Helsinki, Vol. 1, 279.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1997b. 'Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems', en E. Pehkonen (editor) *Proceedings of the 21th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Univerity of Helsinki, Vol. 2, 289-296.

García Cruz, J.A., y Martinón, A.: 1998a. 'Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa'. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, **16**, pp.85-100.Grao. Barcelona.

García Cruz, J.A. y Martinón, A. (1998b): "Levels of generalization in linear patterns", en Olivier A. y Newstead K. (editores) *Proceeding of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2, pp 329-336.University of Stellenbosch. Stellenbosch, South Africa.

García Cruz, J. A. y Martinón, A.: 1998c. 'A teaching experience with linear pattern and sociomathematical norms', en P. Abrantes, J. Porfirio & M. Baía (editores), *The interactions in the mathematics classroom - Proceedings of CIEAEM-49*, pp 262–269. Escola Superior de Educação de Setúbal. Portugal.

García Cruz, J. A. y Martinón, A.: 1998d. 'Estrategia visual en la generalización de pautas lineales'. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*. (aceptado)

García Cruz, J. A. y Martinón, A.: 1998e. 'Números poligonales'. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Mexico. (aceptado)

Glasersfeld, E. von.: 1991. 'Abstraction, Re-Presentation, and Reflection: An interpretation of Experience and Piaget's Approach, en L.P. Steffe (editor) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Springer-Verlag, 45-67.

Gobierno de Canarias. :1996. *Educación Secundaria Obligatoria. Currículo de la E.S.O.* Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa.

Godino, J.D. y Batanero, C.: 1994. Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, nº 3, 325-355.

Grouws. D.A.(editor).: 1991. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Company. New York.

Harel, G. y Tall, D.: 1991. 'The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics', *For the Learning of Mathematics*, **11**, 1, 38-42.

Herscovics, N. y Bergeron, J.C.: 1983. 'Models of Understandig'. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. (Febrero), 75-83.

Hiebert, J. y Lefevre, P.: 1986.'Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: an Introductory Analysis' en J. Hiebert (editor) *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics*. LEA. Hillsdale.New Jersey. London.

Hiebert, J. (editor): 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics*. LEA. Hillsdale.New Jersey. London.

Konold, C., Johnson, D.: 1991. 'Philosophical and Psychological Aspects of Constructivism', en L.P. Steffe (editor) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Springer-Verlag, 1-13.

Krutetskii, V.A.: 1976. '*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren'*. Translated from the Russian by J. Teller. Edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup. The University of Chicago Press.

Laborde, C.: 1992. 'Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. Teaching geometry: Permanences and Revolutions', en C. Gaulin et all (editores), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education*. Les Presses de L'Univertité Laval. Québec.

Lee, L. y Wheeler, D.: 1987. *Algebraic Thinking in High School Students: Their Conceptions of Generalization and Justification*, Concordia University, Montreal.

Lewis, B.: 1983. *Matemáticas Modernas. Aspectos Recreativos*. Editorial Alhambre. Madrid.

Lo, J.J. y Wheatley, G.H.: 1994. Learning opportunities and negotiatins social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics*, **27**, 145-164.

Lopez Varona, J.A., Moreno Martínez, M.L.: 1997. *Resultados de Matemáticas. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS).* Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Mason, J. Burton, L. Kaye, S.: 1982. *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley.[Existe versión en castellano: Pensar Matemáticamente. Editorial Labor y Ministerio de Educación y Ciencia. 1988.]

Mason, J. (sin fecha). 'Expressing Generality and roots of Algebra', comunicación presentada en el coloquio internacional "*Research Perspectives on the Emergence and Development of Algebra Thought*". CIRADE. Univertité de Québec a Montréal. Canada.

NCTM: 1989. *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia. USA.

NCTM: 1991. *Discrete Mathematics Acroos the Curriculum, K-12*. Kenney, M.J. y Hirsch, C.R. (editores). National Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.

Tall, D. (editor).: 1991. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Orton, A. y Orton, J.: 1994. 'Students' perception and use of pattern and generalization', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, University of Lisbon, 407-414.

Orton, A. y Orton, J.: 1996. 'Making sense of children's patterning' en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, University of Valencia, 83-90.

Philips, E.: 1991. *Patterns and Functions*. Addenda Series grades 5-8, Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics. N.C.T. M. Reston. Virginia.

Piaget, J y García, R.: 1982. *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI Editores. México.

Piaget, J.: 1987. *Introducción a la Epistemología Genética: El pensamiento Matemático*. Editorial Paidós. Mexico.

Piaget, J.: 1990. *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid. [L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement (Études d'Épistemologie génétique, XXXIII). Presses Universitaires de France. 1975] (Traducción de Eduardo Bustos).

Pirie, S.E.B.: 1988. 'Understanding: instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized...? How can we know? '. *For the Learning of Mathematics*, 8(3), 2-6.

Polya, G.: 1966. *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. Traducción de J.L. Abellán. Editorial Tecnos. Madrid.

Presmeg, N.: 1986. 'Visualization and mathematical giftedness', *Educational Studies in Mathematics*, **17**, 297-311.

Puig, L. y Calderón, J.: 1996. *'Investigación y Didáctica de las Matemáticas'*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Real Decreto 1345.: 1991. *Curriculum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria*. B.O.E 220. Madrid.

Redden, E.: 1994. 'Alternative pathways in the transition form arithmetic thinking to algebraic thinking', en J. P. da Ponte y J. F. Matos (eds), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, University of Lisbon, 89-96.

Rico, L. Castro, E y Romero, I.: 1996. 'The role of representations systems in the learning of numerical structures', en L. Puig y A. Gutierrez (eds), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, University of Valencia, 87-102.

Robitaille, D.F.(General Editor).: 1993. *Curriculum Frameworks for Mathematics and Science. Thrird International Mathematical and Science Monograph No.1*. Pacific Educational Press. Vancouver. Canada.

Rowe, A.H.H.(Editor).: 1991. *Inteligence, Reconceptualization and Measurement*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Australian Council for Educational Research.

Ruiz Olabuénaga, J.I.:1996. *Metodología de la investigación cualitativa*. Universidad de Deusto.

Schoenfeld, A.: 1985. 'Metacognitive and Epistemological Issues in Mathematical

Understanding', en E.A.Silver (editor): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp 361-379). Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.: 1991. 'Learning to think mathematically: problem solving, methacognition, and sense making in mathematics' en D.A. Grouws (editor): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp 334-370). Macmillan Publishing Company. New York.

Sfard, A.: 1991. 'On the dual nuture of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin'. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

Sierpinska, A.: (1990). 'Some remarks on understanding in mathematics'. *For the learning of mathematics* **10**, 3, pp 24-36.

Silver, E.A. (editor). 1985. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Lawrence Erlbaum Associated. Hillsdale. New Jersey.

Skemp, R.R.: 1976. 'Relational understanding and instrumental understanding'. *Mathematics Teaching*, **77**, pp 20-26.

Stacey, K.: 1989. 'Finding and using patterns in linear generalising problems', *Educational Studies in Mathematics*, **20**, 147-164.

Steffe, L.P. (editor).: 1991. *Epistemological Foundations of Mathematical Experience*. Springer-Verlag.

Swan, M. (Editor).: (1984). *Problems with Patterns and Numbers*. Join Matriculation Boards. Shell Centre for Mathematics Education. Nottingham. [Existe versión en castellano: *Problemas con pautas y números*. Servicio Editorial del País Vasco. Bilbao.]

Taplin, M.: 1995. 'Spatial patterning: a pilot study of pattern formation and generalization', en L. Meira y D. Carraher (eds), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 42-49.

Taylor, S.J. y Bogdan, R.: 1986. *Introducción a los métodos cualitativos en investigación*. Paidos Studio básica.

Trzcieniecka-Schneider, I.: 1993. 'Some Remarks on Creating Mathematical Concepts', *Educational Studies in Mathematics*, **24**, 257-264.

Vollrath, H.J.: 1994, 'Reflection on Mathematical Concepts as starting points for didactical thinking' en R.Biehler, R. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (editores) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, 61-72.

Wood, T.: (1996), 'Events in learning mathematics: insights from research in classrooms'. *Educational Studies in Mathematics*, **30** , 85-105.

Yackel, E. y Cobb, P.: 1996, 'Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics', *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**, 458-477.

Zazkis, R y Campbell, S.: 1996. 'Divisibility and Multiplicative Structure of Nutural Numbers: Preservice Teachers' Understanding', *Journal for Resarch in Mathematics Education*, **27**, 540-563.

Anexo I

Primer Estudio
Tablas

Cuestiones introductorias (%)

E1	Rs	Rd	L	W	n.c.
8ºEGB	47	47	0	2	4
1ºBUP	51	39	3	2	5
4ºESO	54	36	8	1	1
2ºBUP	33	25	25	17	0
3ºBUP	61	26	8	5	0
C.O.U	66	28	5	1	0
Total	52	34	8	4	2

E2	Rs	Rd	L	W	n.c.
8ºEGB	52	39	3	2	5
1ºBUP	53	37	3	2	5
4ºESO	60	30	8	1	1
2ºBUP	38	19	25	17	0
3ºBUP	66	19	10	5	0
C.O.U	62	22	12	3	0
Total	56	28	9	5	2

E3	Rs	Rd	L	W	n.c.
8ºEGB	66	0	6	13	15
1ºBUP	81	0	7	5	7
4ºESO	81	0	12	3	4
2ºBUP	37	0	31	31	2
3ºBUP	65	0	11	18	6
C.O.U	84	0	10	5	0
Total	70	0	13	12	6

S1	Rs	Rd	L	W	n.c.
8ºEGB	97	0	0	0	3
1ºBUP	95	0	0	0	5
4ºESO	96	0	1	0	3
2ºBUP	87	0	12	0	2
3ºBUP	95	0	3	0	2
C.O.U	97	0	3	0	0
Total	95	0	3	0	2

Tablas para las transiciones entre cuestiones sucesivas en el conjunto de las tres pruebas. Frecuencias.

8ºEGB: E4-E5

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	12		1								13
rs											0
w1	1		18								19
L1				8							8
L2											0
L2a											0
rd	7		3	1				3	3		17
w2	1							1			2
w3									1		1
L3	1		1								2
	22	0	23	9	0	0	0	4	4	0	62

8ºEGB: E5-A1

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	9		6	1	3			2	1		22
rs											0
w1	1		10	2	5			1	2	2	23
L1	1		2		5				1		9
L2											0
L2a											0
rd											0
w2	2		1					1			4
w3	1								3		4
L3											0
	14	0	19	3	13	0	0	4	7	2	62

8º EGB: A1-A2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	10		3					1			14
rs											0
w1	1		18								19
L1				3							3
L2					12				1		13
L2a											0
rd											0
w2								3		1	4
w3	2								5		7
L3										2	2
	13	0	21	3	12	0	0	4	6	3	62

8º EGB: A2-S2											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	12		1								13
rs											0
w1	14		7								21
L1	2		1								3
L2	8		3		1						12
L2a											0
rd											0
w2	2		1					1			4
w3	4			1					1		6
L3	2		1								3
	44	0	14	1	1	0	0	1	1	0	62

1º BUP: E4-E5

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	4										4
rs	2				1				1	1	5
w1			11								11
L1				15							15
L2					3						3
L2a											0
rd								1	1	1	3
w2	1		1					1	1		4
w3									9		9
L3										5	5
	7	0	12	15	4	0	0	2	12	7	59

1º BUP: E5-A1

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	6				1						7
rs											0
w1	3		2	2	4				2		13
L1				4	9				1	1	15
L2			1		3						4
L2a											0
rd											0
w2		1						1			2
w3		1		3	2			1	5		12
L3	2		1		3						6
	11	2	4	9	22	0	0	2	8	1	59

1º BUP: A1-A2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	8							1		1	10
rs								4			4
w1			4								4
L1				7							7
L2					23						23
L2a											0
rd											0
w2								2			2
w3									8		8
L3										1	1
	8	0	4	7	23	0	0	7	8	2	59

1º BUP: A2-S2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	5	1	2								8
rs											0
w1	2				1			1			4
L1	2		2		3						7
L2	9	1	1	2	7			2	1		23
L2a											0
rd											0
w2	2		2					3			7
w3	4		2	1					1		8
L3			1		1						2
	24	2	10	3	12	0	0	6	2	0	59

4º ESO: E4-E5

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	12		2						1		15
rs											0
w1	1		10								11
L1	1			28				1			30
L2											0
L2a											0
rd	6		1	2					1		10
w2	1		2					5			8
w3											0
L3										6	6
	21	0	15	30	0	0	0	6	2	6	80

4º ESO: E5-A1

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	8	2	3	2	2		2			2	21
rs											0
w1	1	2	2	3	5			2			15
L1	4	1	2	9	11		1			2	30
L2											0
L2a											0
rd											0
w2	1	1		1	1			1		1	6
w3								1		1	2
L3	1				3			1		1	6
	15	6	7	15	22	0	3	5	0	7	80

4º ESO: A1-A2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	13							2			15
rs	4			1							5
w1			7								7
L1			1	14							15
L2			1		20				1		22
L2a											0
rd	1							2			3
w2					1			4			5
w3											0
L3								1		7	8
	18	0	9	15	21	0	0	9	1	7	80

4º ESO: A2-S2											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	13		1	2	1			1			18
rs											0
w1	7		1		1						9
L1	6		2	5	1			1			15
L2	13		2	1	5						21
L2a											0
rd											0
w2	3		2		1			3			9
w3	1										1
L3	5			1	1						7
	48	0	8	9	10	0	0	5	0	0	80

2º BUP: E4-E5											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	4										4
rs											0
w1			6								6
L1				2							2
L2					2			1			3
L2a						17					17
rd									1		1
w2								1			1
w3									17		17
L3										1	1
	4	0	6	2	2	17	0	2	18	1	52

2º BUP: E5-A1											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	3		1								4
rs											0
w1	2		2	1	1						6
L1					1	1					2
L2					1	1					2
L2a						17					17
rd											0
w2				1	1						2
w3	2				1	5		1	9		18
L3					1						1
	7	0	3	2	6	24	0	1	9	0	52

2º BUP: A1-A2											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	6							1			7
rs											0
w1			3								3
L1				2							2
L2					5			1			6
L2a						24					24
rd											0
w2									1		1
w3									9		9
L3											0
	6	0	3	2	5	24	0	2	10	0	52

2º BUP: A2-S2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	2					4					6
rs											0
w1	2		1								3
L1						2					2
L2	3					2					5
L2a						24					24
rd											0
w2								2			2
w3	2					5		1	2		10
L3											0
	9	0	1	0	0	37	0	3	2	0	52

3º BUP: E4-E5

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	7								1		8
rs	1										1
w1			2								2
L1				16							16
L2					5						5
L2a											0
rd	1			1					1	1	4
w2								2			2
w3	1							1	19		21
L3										3	3
	10	0	2	17	5	0	0	3	21	4	62

3º BUP: E5-A1

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	2	1			6			1			10
rs											0
w1					1	1					2
L1		1	1	5	7	1		1		1	17
L2	1				3	1					5
L2a											0
rd											0
w2					1				1	1	3
w3	2	1		1	5	3			8	1	21
L3					3					1	4
	5	3	1	6	26	6	0	2	9	4	62

3º BUP: A1-A2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	5										5
rs	1	2									3
w1			1								1
L1				5				1			6
L2					26						26
L2a						5			1		6
rd											0
w2								1	1		2
w3									9		9
L3										4	4
	6	2	1	5	26	5	0	2	11	4	62

3ºBUP: A2-S2

	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	5					1					6
rs	1	1									2
w1	1										1
L1	1			3	1						5
L2	4	2		4	7	8			1		26
L2a						5					5
rd											0
w2	1							1			2
w3	5				1	3		1	1		11
L3	2			2							4
	20	3	0	9	9	17	0	2	2	0	62

COU: E4-E5											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	3										3
rs											0
w1			2								2
L1	1			18							19
L2					6				1		7
L2a											0
rd	1			1						1	3
w2								1			1
w3									19		19
L3										4	4
	5	0	2	19	6	0	0	1	20	5	58

COU: E5-A1											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	2				1					2	5
rs											0
w1					2						2
L1	1			6	8					4	19
L2					6						6
L2a											0
rd											0
w2					1						1
w3	1			1	10	1			5	2	20
L3					4					1	5
	4	0	0	7	32	1	0	0	5	9	58

COU: A1-A2											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	4										4
rs											0
w1											0
L1				7							7
L2					31						31
L2a						2					2
rd											0
w2											0
w3									5		5
L3	1									8	9
	5	0	0	7	31	2	0	0	5	8	58

COU: A2-S2											
	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
n.c.	5										5
rs											0
w1											0
L1	1			4	2						7
L2	4	1	1	9	12	2		2			31
L2a						2					2
rd											0
w2											0
w3	4								1		5
L3	2			2	2			1	1		8
	16	1	1	15	16	4	0	3	2	0	58

Frecuencias por cuestión (GP y GL), categoría de respuesta y nivel

Tarea de la escalera

E4	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
8º EGB	13	0	19	8	0	0	17	2	1	2	
1ºBUP	4	5	11	15	3	0	3	4	9	5	
4ºESO	15	0	11	30	0	0	10	8	0	6	
2ºBUP	4	0	6	2	3	17	1	1	17	1	
3ºBUP	8	1	2	16	5	0	4	2	21	3	
COU	3	0	2	19	7	0	3	1	19	4	
	47	6	51	90	18	17	38	18	67	21	373

E5	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
8º EGB	22	0	23	9	0	0	0	4	4	0	
1ºBUP	7	0	12	15	4	0	0	2	12	7	
4ºESO	21	0	15	30	0	0	0	6	2	6	
2ºBUP	4	0	6	2	2	17	0	2	18	1	
3ºBUP	10	0	2	17	5	0	0	3	21	4	
COU	5	0	2	19	6	0	0	1	20	5	
	69	0	60	92	17	17	0	18	77	23	373

Tarea del árbol de Navidad

A1	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
8º EGB	14	0	19	3	13	0	0	4	7	2	
1ºBUP	11	2	4	9	22	0	0	2	8	1	
4ºESO	15	6	7	15	22	0	3	5	0	7	
2ºBUP	7	0	3	2	6	24	0	1	9	0	
3ºBUP	5	3	1	6	26	6	0	2	9	4	
COU	4	0	0	7	32	1	0	0	5	9	
	56	11	34	42	121	31	3	14	38	23	373

A2	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
8º EGB	13	0	21	3	12	0	0	4	6	3	
1ºBUP	8	0	4	7	23	0	0	7	8	2	
4ºESO	18	0	9	15	21	0	0	9	1	7	
2ºBUP	6	0	3	2	5	24	0	2	10	0	
3ºBUP	6	2	1	5	26	5	0	2	11	4	
COU	5	0	0	7	31	2	0	0	5	8	
	56	2	38	39	118	31	0	24	41	24	373

Tarea de la lista numérica.

S2	n.c.	rs	w1	L1	L2	L2a	rd	w2	w3	L3	
8º EGB	44	0	14	1	1	0	0	1	1	0	
1ºBUP	24	2	10	3	12	0	0	6	2	0	
4ºESO	48	0	8	9	10	0	0	5	0	0	
2ºBUP	9	0	1	0	0	37	0	3	2	0	
3ºBUP	20	3	0	9	9	17	0	2	2	0	
COU	16	1	1	15	16	4	0	3	2	0	
	161	6	34	37	48	58	0	20	9	0	373

Transiciones entre Escalera y Árbol de Navidad. Frecuencias por nivel.

8º	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	0	5	0	1	0	1	
L2	0	2	0	0	0	0	
L3	0	0	0	0	0	1	
w1	2	4	3	10	0	1	
w2	0	0	0	1	2	0	
w3	0	0	0	0	0	2	
							35

4º	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	9	11	3	2	0	0	
L2	0	0	0	0	0	0	
L3	0	2	1	0	1	0	
w1	3	4	0	4	2	0	
w2	1	1	1	0	3	0	
w3	0	0	1	0	1	0	
							50

1º	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	4	8	1	0	0	1	
L2	0	2	0	1	0	0	
L3	0	2	0	1	1	0	
w1	1	2	0	2	0	2	
w2	0	0	0	0	2	0	
w3	2	3	0	0	2	5	
							42

2º	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	0	2	0	0	0	0	
L2	0	19	0	0	0	0	
L3	0	1	0	0	0	0	
w1	1	1	0	2	1	0	
w2	1	0	0	0	1	0	
w3	0	6	0	0	0	10	
							45

3º	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	4	8	1	1	1	0	
L2	0	4	0	0	0	0	
L3	0	3	1	0	0	0	
w1	0	2	0	0	0	0	
w2	0	1	1	0	0	0	
w3	1	6	1	0	0	10	
							45

cou	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	6	8	3	0	0	0	
L2	0	6	0	0	0	0	
L3	0	4	2	0	0	0	
w1	0	2	0	0	0	0	
w2	0	1	0	0	0	0	
w3	1	11	2	0	0	5	
							51

Transiciones entre Escalera y Árbol de Navidad
Agrupando por niveles sin y con instrucción previa en progresiones aritméticas.

8º EGB- 4º ESO - 1º BUP (sin instrucción previa. Frecuencias)

	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	13	24	4	3	0	2	
L2	0	4	0	1	0	0	
L3	0	4	1	1	2	1	
w1	6	10	3	16	2	3	
w2	1	1	1	1	7	0	
w3	2	3	1	0	3	7	
							127

2º BUP - 3º BUP – COU (Con instrucción previa. Frecuencias)

	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	10	18	4	1	1	0	
L2	0	29	0	0	0	0	
L3	0	8	3	0	0	0	
w1	1	5	0	2	1	0	
w2	1	2	1	0	1	0	
w3	2	23	3	0	0	25	
							141

Transiciones entre Escalera y Árbol de Navidad
Población total. Frecuencias

	L1	L2	L3	w1	w2	w3	
L1	23	42	8	4	1	2	
L2	0	33	0	1	0	0	
L3	0	12	4	1	2	1	
w1	7	15	3	18	3	3	
w2	2	3	2	1	8	0	
w3	4	26	4	0	3	32	
							268

Anexo II

Segundo Estudio
Transcripción de las entrevistas

Las transcripciones de las entrevistas, realizadas a los once alumnos, contienen en esencia todo lo relevante a las tareas. Se ha excluido de las mismas, lo relativo a los prolegómenos, en los que el investigador ha explicado a los alumnos el objetivo de las entrevistas y que se espera de ellos toda la colaboración que puedan aportar. Aunque la presentación es secuencial, entre un fragmento y otro, a veces existen instantes de silencios y de actividad que no se refleja, salvo cuando se ha creído necesario. Se ha respetado la forma particular del léxico empleado por los alumnos.

Primera entrevista.

Alumno: Javier García Sanabria. Grupo: C (matemáticas B). **S-1**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde escuetamente "*15 luces*" y "*19 luces*", respectivamente.

En la cuestión relativa al tamaño 10: " *39 luces, ya que un árbol de tamaño 1 necesita 3 luces y por cada tamaño que se le añada son 4 luces más. 9·4 Þ 36 +3 = 39 luces*".

Tamaño 20: " *19·4 = 76 76+3 = 79 luces*".

Tamaño n: *((n-1)·4)+3*

Diagnóstico: L2. Parece un enfoque numérico pero el investigador tiene la intuición de que es gráfico visual.

Árbol de Navidad

[1. S1] I: *¿Cómo calculaste 15?* **(señala al dato aislado en la hoja de trabajo)**
[2. S1] A: *Porque al principio un árbol tiene tres luces y por cada árbol que le añadieras son cuatro luces.* **(señalando el dibujo)**
[3. S1] I: *¿Cómo que cada árbol? Explícame...*
[4. S1] A: *Cada tamaño...* **(señala el dibujo)**
[5. S1] I: *Ah!. Cada tamaño...*
[6. S1] A: *Cada tamaño eran cuatro luces... y el primer tamaño siempre lleva tres luces, entonces hice tres por cuatro, o sea tres tamaños tienen que llevar forzosamente cuatro luces y el otro tamaño, que es el primero, lleva tres luces, tres por cuatro... doce... más tres. quince.*
[7. S1] I: *Que es este cálculo... ¿no?.*
[8. S1] A: *Sí.*
[9. S1] I: *Entonces... ¿cómo calculaste el tamaño 10?*

[10. S1] A: *Porque... son el primer tamaño... son tres, está aquí* **(señala los cálculos)**... *después el segundo tamaño son pues nueve por cuatro luces que tiene cada tamaño... nueve por cuatro... treinta y seis... más tres... treinta y nueve.*

[11. S1] I: *¿En qué te fijaste tú para ver que era de cuatro en cuatro?*

[12. S1] A: (**gira la hoja)** *En principio aquí son tres...* **(señala el dibujo).** *después se le añade uno... son cuatro... otro son cuatro... otro son cuatro... cuatro... cuatro...* **(gestos sobre el árbol de tamaño 3 desde la cúspide hasta la base y continuando como si el árbol de tamaño tres se prolongara por la base)**

[13. S1] I: *¿Esa es la regla?*

[14. S1] A: *Si, es que no puede ser de otra manera.*

[15. S1] I: *¿Cómo sacaste la fórmula?* **(Girando la hoja y señalando la expresión algebraica).**

[16. S1] A: *Al final... pues hice tamaño n, imagínate que n es por ejemplo diez...* (**razonando en voz alta**)... *entonces le descuentas el primer tamaño que lleva tres... ene menos uno... diez menos uno... nueve... entonces esos nueve tamaños siempre llevan cuatro luces... lo multiplique por cuatro, luego le sume el primer tamaño que tiene tres luces...*

Hexágonos con cerillas

[17. S1] I: *Bien. Ahora te voy a dar otro problema. Procura explicarme lo que haces...*

[18. S1] A: *...este tiene seis y por cada uno que se le añaden son cuatro más...* **(señala el dibujo y cuenta los puntos, cabezas de las cerillas, señala como contando los puntos, va de la fig. I a la II, luego cuenta sobre la fig. III. Señala el texto de la cuestión 4, y vuelve a la figura III, hace signos sobre el papel como si estuviera extendiendo la cadena añadiendo un cuarto hexágono).** *Bueno, ya está...*

[19. S1] I: *Contesta la pregunta.*

[20. S1] A: *En principio son...* **(escribe 3· 4 = 12...)** *y luego le sumo seis***... (continua... + 6 = 18)** *son dieciocho, dieciocho serían...*

[21. S1] I: *Dieciocho.*

[22. S1] A: *No, no, espera, espera. son seis, y cuatro....¿tres hexágonos necesitan diez y seis cerillas?* **(Observa que el número que aparece como total de cerillas para una cadena de tres hexágonos no corresponde con sus cálculos. Ha contado los puntos y no los palillos. El investigador no le corrige sino que le dice que corrija el dato aportado y que continúe con su razonamiento)**
Si aquí hay seis, diez. catorce cerillas....son catorce....no diez y seis.
(....)

[23. S1] A: *El primer hexágono siempre lleva seis,* **(señalando sobre la fig. III)** *y después aquí cuatro, se cogen las dos primeras de este... dieciocho.*

[24. S1] I: *¿Cómo lo calcularías si el tamaño fuera trece?*

[25. S1] A: *Sería...* **(escribe TAMAÑO 13)...** *doce por cuatro igual cuarenta y ocho... más seis del primero... cincuenta y cuatro...* **(escribe 12·4 = 48 + 6 = 54).**

[26. S1] I: *Y si el tamaño es cincuenta y dos...*

[27. S1] A: *Pues la misma regla.* **(escribe TAMAÑO 52)** *... tamaño cincuenta y dos son cincuenta y uno por cuatro...igual a doscientos cuatro...más seis ... serían doscientos diez* **(escribe 51· 4 = 204 + 6 = 210).**

[28. S1] I: *La regla. si fuera n el tamaño, ¿ cuál sería la regla ?*

[29. S1] A: *Si el tamaño es n* **(escribe TAMAÑO N),** *lo que tienes que hacer es sustituir ene menos uno, después por cuatro, y después se le suma seis.* **(Escribe ((n-1)·4)+6).**

[30. S1] I: *...que corresponde a..*

[31. S1] A: *Al primer hexágono...*

Informe

Árbol de Navidad: La estrategia es visual. Es el dibujo, y no la sucesión numérica, la que induce la regla. Contempla los sucesivos tamaños del árbol como construidos a partir del primer tamaño por adición de partes, cada una con cuatro luces. Corresponde a una modalidad del Esquema A.

A-1, I-1.

Hexágonos con cerillas: Cuenta sobre el dibujo los puntos (no las líneas), observa que se pasa de un tamaño al otro sumando cuatro. Luego al calcular las cerillas necesarias para la cadena de cuatro hexágonos aplica la regla (similar a la del árbol de Navidad) y al realizar el cálculo obteniendo dieciocho, pero observa que sólo hay una diferencia de dos cerillas con el dato aportado para las cerillas necesarias para la cadena de tres hexágonos y vuelve a contar sobre la figura III, y añade al final cuatro obteniendo lo mismo que había obtenido al aplicar la regla. Se reafirma en su cálculo y considera que el dato aportado en el problema no es correcto.

En la fase de abstracción utiliza el dibujo para generar la regla. Las representaciones externas (dibujos) le inducen a la representación interna que consiste en: “tamaño menos uno por diferencia constante más lo que corresponde al primer tamaño”. Aplica la misma en las dos situaciones. Cuándo generaliza, aplica a los tamaños 13 y 53, ya no hace referencia al dibujo, prima la representación interna. Muestra seguridad en las generalizaciones y cálculos correspondientes, y escribe al final con soltura la expresión simbólica correspondiente. Al solicitar el investigador la regla simbólica utiliza la *expresión “lo que tienes que hacer es sustituir”*, que corresponde con la acción de sustituir en la representación interna el tamaño por la variable “n”.

A-1, I-1.

Segunda entrevista.

Alumna: Thais Pérez López. **Grupo: C (matemáticas B).** **S-2**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde: " *15 luces. El primer árbol tiene 3 luces y el resto 4. 3+4+4+4 = 15 luces*", " *19 luces. 3+4+4+4+4 = 19*", respectivamente.

Tamaño 10: " *39 luces. 3+4´ 9 =3+36=39 luces. 1 árbol (dibujo triangular como la copa) tiene 3 esquinas, lleva 3 luces al unirse con otro árbol (dibujo copa y base) las esquinas son siete. Si unes los 10 árboles da a 39 luces*".

Tamaño 20: " *79 luces. 3+4´19 = 3+76 =79*".

Tamaño n: " *n luces*".

Diagnóstico: L2 y visual.
La entrevista se realiza para abundar sobre el esquema y por estudiar la consistencia en una serie de dos problemas con pauta lineal.

Árbol de Navidad

[32. S2] I: *¿Cómo has obtenido este 15? Explícalo.*
[33. S2] A: *Pues... si hay cuatro árboles, ¿no?.*
[34. S2] I: *¿Cuatro árboles?*
[35. S2] A: *Sí, cuatro.*
[36. S2] I: *Tamaño cuatro.*
[37. S2] A: *Pues se supone que aquí habría otro* **(señala debajo del dibujo del árbol de tamaño tres)...** *pues hay cuatro, como hay cuatro líneas y en cada una hay cuatro, es decir, hay cuatro árboles y hay tres líneas... A ver... si hay tres líneas, luego en la última. hay tres líneas están completas por cuatro, en la última...*
[38. S2] I: *Señálame la línea... utiliza... el papel.*
[39. S2] A: *Están aquí las cuatro...* **(dibujando en un papel un árbol de tamaño cuatro)**. *Entonces hay cuatro bolas* **(dibuja bolas alineadas sobre la base o línea)** *en las tres primeras líneas, en la primera hay una y en la última hay dos, por ejemplo* **(señala en el dibujo),** *si en cuatro hay tres líneas y me sobran tres bolas, pongo cuatro por tres más tres, es decir, el número de bolas por la cantidad de líneas que es una inferior al triángulo.*
[40. S2] I: *Bien. De acuerdo.*

Hexágonos con cerillas

[41. S2] I: *Ahora mira este otro a ver como la resolverías.*
[42. S2] A: *... Es más o menos parecido a este... pero, que necesita. es como, ...más o menos parecido,... pero le quita una cerilla en ves de quitarle...como...*
[43. S2] I: *¿Cómo sería para la cadena de cuatro?*
[44. S2] A: *Si son seis, por cada una se quita una... ¿no? ... cuando se unen... tendría que quitar tres, sería...*
[45. S2] I: *Ve escribiendo*
[46. S2] A: *Sería seis por cuatro igual veinticuatro le restas... le restas tres***...** **(escribiendo 6´ 4 =24 - 1 =21).**

[47. S2] I: *¿Tres? ¿Por qué?.*
[48. S2] A: *Cada vez que se unen* **(señala las cerillas comunes en el dibujo a dos hexágonos unidos utilizando la cadena de tres)** *le quitas uno... ¿no?...y si son cuatro se le quitarían estas tres líneas.*
[49. S2] I: *Supón ahora que la cadena es de trece hexágonos. ¿Cómo calcularías las cerillas necesarias?*
[50. S2] A: **(escribiendo 13 ´ 6 = 78 - 12 = 66)** *Trece por seis... igual... setenta y ocho... menos doce...*
[51. S2] I: *¿Menos doce?*
[52. S2] A: *Si, me supongo yo...*
[53. S2] I: *¿De dónde salen esos doce?*
[54. S2] A: *Porque... cada vez... cuando se unen* **(señala el dibujo de la cadena de tres haciendo ademán de extenderla hacia la derecha)** *se le quita una cerilla que tiene utilidad para dos hexágonos. Entonces si son trece... son doce...*
[55. S2] I: *Entonces, la regla general... ¿cómo sería?...si tenemos una cadena de n hexágonos como sería...*
[56. S2] A: *Sería... ene por seis... igual... a lo que dé... menos... dependerá de... sería menos ene menos uno...*
[57. S2] I: *Lo puedes escribir...*
[58. S2] A: **(escribiendo N´ 6 = - (N-1))**
[59. S2] I: *Esos ene menos uno son coincidentes... dices tú...*
[60. S2] A: *Sí.*

Informe

Árbol de Navidad: Durante la entrevista se confirma plenamente el diagnóstico inicial ya que incluso la alumna dibuja un árbol de tamaño cuatro para explicar con detalle los cálculos. Para verificar la regla utiliza el dibujo. Es curioso que en vez de luces utilice la palabra *"bolas"*, sin duda está pensando en un árbol de Navidad adornado, y que además las sitúa alineadas. El esquema visual es del tipo A.

A-1, I-1.

Hexágonos con cerillas: Utiliza el esquema B. Contempla la situación como si los hexágonos estuvieran separados y después los uniera, haciendo coincidir la cerilla de la unión, cerilla que ha de restar al cómputo total.

A-1, I-2.

Tercera entrevista.

Alumna: Carolina Expósito Hernández. Grupo: A (matemáticas B). **S-3**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde: " *necesitaría 15 luces. Contando 3 árboles y uno más*", " *necesitaría 19 luces*" respectivamente.

Tamaño 10: Presenta el esquema de uso de la Regla de Tres. Utiliza el resultado del tamaño 5, 19 luces, para calcular el de tamaño 10. Sin embargo, al resultado 38 le suma 1. "*39 luces, utilizando la regla de tres*".

Tamaño 20: Igual que el anterior. Utiliza el resultado 39 para plantear el esquema y al resultado 78 le suma 1. "*79 luces utilizando la regla de tres*".

Tamaño n: Igual. Utiliza el resultado 79 para plantear el esquema con n y x. Deja una fórmula: "*x= n·79/20x = 79n/20x. Realizando una regla de tres*".

Diagnóstico: W3 (¿?)
Un objetivo claro de la entrevista es determinar cómo se le ocurrió que tendría que sumar 1 al resultado obtenido aplicando la Regla de Tres.

Árbol de Navidad

[61. S3] I: *¿Cómo calculaste que necesitabas 15 luces? Trata de recordar.*
[62. S3] A: *... le sumo cuatro...* **(señalando los datos numéricos que acompañan a los dibujos)**
[63. S3] I: *¿Por qué sumas cuatro?*
[64. S3] A: *... uno, dos, tres, cuatro...* **(cuenta las luces sobre el dibujo)**
[65. S3] I: *Le sumas cuatro... ¿a quién?*
[66. S3] A: *Al árbol de cuatro*.
[67. S3] I: *Tu tiene el árbol de tres...*
[68. S3] A: *Tenemos once luces...* **(señala el dato)**
[69. S3] I: *...entonces el de cuatro...*
[70. S3] A: *Cuatro más... que son quince*.
[71. S3] I: *¿El de cinco?*
[72. S3] A: *Sumo a este* **(señala sobre el dato once)** *cuatro... son diecinueve*.
[73. S3] I: *Para calcular el tamaño diez... ¿qué hiciste?*
[74. S3] A: *Hice una regla de tres*. **(Vuelve la hoja a la primera página para ver el número de luces que necesita el árbol de tamaño 5)** *si cinco. diez y nueve....de diez ... equis...* **(señala los cálculos que hizo sobre el papel y los recita en voz alta).**
[75. S3] I: *Y.. ¿Por qué treinta y ocho más uno?*
[76. S3] A: *...no sé... porque... no sé... porque después conté... y digo, si este daba diecinueve... no podía dar treinta y ocho...*
[77. S3] I: ¿Por qué daba treinta y nueve?
[78. S3] A: *Porque los conté.*
[79. S3] I: *¿Dónde?*
[80. S3] A: *Aquí*. **(Señala el árbol de tamaño tres).**
[81. S3] I: *¿Cómo?... ¿hiciste el árbol de tamaño diez?*
[82. S3] A: *Si, y luego lo borré...* **(en el papel no hay rastro de un dibujo borrado)**
[83. S3] I: *¿Hiciste también el árbol de tamaño veinte?*
[84. S3] A: *....porque... supongo que si aquí había que sumar uno... aquí también...*

Hexágonos con cerillas

[85. S3] I: *A ver cómo haces este... léelo y responde a la pregunta que viene debajo...*
[86. S3] A: *Si aquí son seis...¿por qué aquí son once?* **(Señala sobre le dibujo y cuenta, luego compara con el dato numérico aportado)**... *porque aquí está unido uno.*
[87. S3] I: *Bien.*
[88. S3] A: *Y aquí estarían unidos dos... y ¿por qué dieciséis?* **(Igual que antes señala el dibujo y el dato numérico).**
[89. S3] I: *Son dieciséis... ¿no?.*
[90. S3] A: *¿Lo puedo dibujar?*
[91. S3] I: *Si... puedes...*
[92. S3] A: **(en silencio dibuja una cadena de cuatro hexágonos y aplica la regla de tres, sin contar sobre el dibujo, para calcular el total de cerillas utilizando el dato aportado de que tres hexágonos necesitan dieciséis cerillas. Mediante los cálculos realizados obtiene 22 cerillas)**
...Ahora... este no es el resultado pienso yo...
[93. S3] I: *¿Por qué piensas que no es el resultado?*
[94. S3] A: *Porque si esta unido aquí dos...* **(señala fig. III)** *y aquí tres* **(señala sobre la figura que ha construido de tamaño cuatro).** *aquí se une uno* **(señala sobre la fig. II)** *y se le añaden....*
[95. S3] I: *Tranquila. Piénsalo.*
[96. S3] A: *Uno, dos, tres, ... once...* **(contando sobre el dibujo fig. II)**
[97. S3] I: *Aquí de dejaste una, no contaste bien.*
[98. S3] A:*...serían cinco más... aquí...*
[99. S3] I: *Bien. Cinco más...*
[100. S3] A: **... (contando sobre el dibujo de tamaño cuatro realizado sobre el papel)**
[101. S3] I: *¿Cuánto sale?*
[102. S3] A: *Veintidós. No.*
(cuenta sobre la cadena de tamaño cuatro y sobre la fig. III, escribe “22 - 1 = 21”)
[103. S3] I: *¿Cómo lo podrías hacer de otra manera?*
[104. S3] A: *Contando.*
[105. S3] I: *Si tuvieras 23 hexágonos, ¿cómo lo harías?.*
[106. S3] A: Regla de tres y le quito uno.

Informe

Árbol de Navidad: Inicialmente deduce que hay que sumar cuatro de los datos numéricos, sin embargo cuenta sobre el dibujo para comprobar que al pasar de un tamaño al otro se suma cuatro, de esta manera se reafirma en la cantidad a sumar. Al pasar al árbol de tamaño diez, emplea la regla de tres y parece ser que al dar los cálculos un resultado par sospecha que no está bien. Que todos los cálculos anteriores le hallan dado impar, parece que establece una nueva pauta para el resultado posible. Entonces vuelve y comprueba contando sobre el dibujo (imaginario), hasta que cae en la cuenta que debe sumar uno al resultado. De aquí que su regla sea: Aplica la regla de tres y al resultado obtenido le suma uno. Esta regla es la que generaliza al tamaño 20, cuyo cálculo mediante la regla de tres apoya en el resultado obtenido para el tamaño 10.

A-5, I-6.

Hexágonos con cerillas: Comprueba mediante los datos numéricos y recuento sobre el dibujo que hay que sumar cinco para pasar de un tamaño al otro. Sin embargo, dibuja la cadena de tamaño cuatro y realiza el recuento sobre ella, después de haber aplicado la regla de tres y obtener como resultado 22. Una vez comprobado por recuento sobre el dibujo, resta uno a veintidós. Es exactamente el mismo procedimiento que en el problema anterior y su modo de proceder es el mismo en ambos casos: verifica sobre datos numéricos y comprueba contando sobre el dibujo, aplica la regla de tres y ajusta contando sobre el dibujo de tamaño cuatro.

A-5, I-6.

Utiliza el dibujo para verificar la pauta deducida sobre los datos numéricos. Utiliza la regla de tres en la generalización próxima y duda del resultado obtenido. Ajusta sobre el dibujo realizado al efecto y deduce la cantidad que debe sumar o restar al resultado obtenido sobre la regla de tres. El enfoque es numérico con utilización de conocimiento rutinario (regla de tres) y ajuste mediante recuento sobre el dibujo.

Cuarta entrevista:

Alumno: José Damián Valeriana Magdalena. Grupo: G (matemáticas B). S-4

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde *"15 luces.- Porque veo que la diferencia de luces entre el árbol de tamaño 1 y el 2 son 4 luces y que esta diferencia se repite del 2 al 3"* y *"19 luces.- Siguiendo el razonamiento anterior"*, respectivamente.

Tamaño 10: " *Serían 39, (aparte) árbol tamaño 10 =3+(10-1)·4"*.

Tamaño 20: "árbol tamaño 20 = 3 + (20-1)·4".

Tamaño n: *"árbol tamaño n =* N_1 *+(N-1)·D*
D = Diferencia
N_1 *= Primer árbol"*

Diagnóstico: L2. Claramente parece que el enfoque es numérico. Interesa ver el proceso y la obtención de la expresión final.

Árbol de Navidad

[107. S4] I: Explícame este cálculo. ¿Cómo lo hiciste? (Refiriéndose a la primera cuestión)
[108. S4] A: *Me fije en el dibujo, en el primero y después... en el segundo y.. vi ...más o menos lo que tenía de diferente...y...*
[109. S4] I: *Y.. ¿Qué notaste tú de diferente?*
[110. S4] A: *Que... por ejemplo... que el árbol que se le había añadido por debajo...*
[111. S4] I: *Señálamelo con el lápiz.*
[112. S4] A: *...el árbol que se le había añadido por encima podía ser también* **(señala sobre la figura II en la base y puntea sobre las cuatro luces).** *El que estaba debajo llevaba... ahora... llevaba dos luces más... las cuatro luces* **(se mueve señalando de la figura II a la I)...** *tendría... cuatro luces más* **(vuelve a la figura II señalando)** *y ese se volvía a repetir en el siguiente dibujo* **(señala la figura III).**
[113. S4] I: *Y entonces... ¿cómo calculaste el quince?*
[114. S4] A: *¿El quince?...*
[115. S4] I: *Si... ¿cómo calculaste tú que si había cuatro árboles ahí... eran quince...?.*
[116. S4] A: *No sé... le sume cuatro a once* **(primero señala la figura II luego se mueve señalando al dato 11).**
[117. S4] I: *Y.. ¿El treinta y nueve?*
[118. S4] A: *Me estoy acordando de... no me acuerdo...más o menos me acorde de otros años y...*
[119. S4] I: *Intenta recordar cómo calculaste tú que eran treinta y nueve luces. Pones el cálculo pero no lo explicas.*
[120. S4] A: *Más o menos probando... en el papel... fui probando...*
[121. S4] I: *¿Cómo?...Hazlo en el papel...*
[122. S4] A: *Más o menos... intente... me acorde que el primer árbol tenia... ¿cuántas?.. Tres* **(escribe 3)...** *lo que quería calcular* **(hace signos sobre el papel al lado del 3 escrito)** *era cuántas luces más había... por ejemplo... el árbol de tamaño diez* **(señala el dibujo figura III)**... *serían... las tres luces iniciales más* **(escribe + al lado del 3).** *Si a cada árbol...de diferencia tenían cuatro luces, ¿no?...tenía que multiplicar el número de*

alturas que tiene por la diferencia que hay de uno a otro que es cuatro... ¡Ahí va!. No me acuerdo...

[123. S4] I: *Inténtalo.*

[124. S4] A: **(escribe 10·4, para luego concluir en *3+(10·4))***

[125. S4] A: *...me falla algo...*

[126. S4] I: *¿Qué té falla?*

[127. S4] A: *¿Puedo ver la fórmula?*

[128. S4] I: *¿La que hiciste?...Sí...*

[129. S4] A: *.... Ah... Claro... tengo que restarle el árbol inicial, porque al árbol inicial... porque no tenía las cuatro luces... y después sería...* **(vuelve a escribir debajo de lo anterior 3 +)** *más... el puesto* **(escribe *10-1*)** *que tendría menos el árbol inicial... y esto todo... multiplicado por la diferencia de luces. por cuatro* **....(*3+(10-1)·4*).**

Hexágonos con cerillas

[130.S4] I: *¿En qué té estas fijando?*

[131.S4] A: *Me fijo en... el número de cerillas que tiene el primero y* **(señalando el dato 6 se mueve al dato 11 con el lápiz***) la diferencia que tiene con el segundo...*

[132.S4] I: *Té estas fijando en el seis y el once...*

[133.S4] A: *Si... veo que tienen cinco cerillas... de diferencia... y otra vez se vuelve a repetir esa... cinco...* **(señalando el dato 16 correspondiente a la tercera cadena de hexágonos)**

[134.S4] I: *Entonces. ¿El de cuatro...?*

[135.S4] A: *El de cuatro... por lógica debería de tener cinco más... que serían veintiuno.*

[136.S4] I: *Escribe. ahí...*

[137.S4] A: .... **(escribe 4 h = 21)**

[138.S4] I: *¿Cómo sacaste el veintiuno?*

[139.S4] A: *....repitiendo la diferencia...* **(señalando entre los datos 6, 11, 16)***... sumando a dieciséis... cinco.*

[140.S4] I: *Supón que ahora tenemos 23 hexágonos.*

[141.S4] A: *A los veintitrés hexágonos esos les restaría...*

[142.S4] I: *Ve haciéndolo en el papel.*

[143.S4] A: *...le restaría (escribe 23 - 1) uno, el primer hexágono... y ahora al resto, veintidós, los debería de multiplicar por el número de cerillas... no por la* diferencia **(señala los datos 6 y 11***) que tengo del primero...*

[144.S4] I: *Hazlo.*

[145.S4] A: .... **(termina de escribir 22·5 = 110)** **(escrito *"23 H Þ 23 - 1 = 22 · 5 = 110"*)**

[146.S4] A: *Ya está... ¿no?...¿a ver?...así no...*

[147.S4] I: *¿ Tú crees que está bien?*

[148.S4] A: *No... No, No... porque tendría que... tendría que sumarle... tendría que haber sumado antes* **(señalando con el lápiz las operaciones)** *el número de cerillas que tiene el primer hexágono* **(señalando el primer hexágono sobre las cerillas***)...*

[149.S4] I: *Sumar, ¿a quién?.*

[150.S4] A: *Esto sería el número de hexágonos que hay entre el primero y el último... y entonces esto...* **(señalando sobre los cálculos)***... esto... y por la diferencia... tendría que sumarlo a esto... al ciento diez...*

[151.S4] I: *Tendrías que sumar...*

[152.S4] A: *Seis... que son las que lleva... el hexágono base...* **(escribe *+ 6 = 116)***
(escrito " 23 H Þ 23 - 1 = 22 · 5 = 110 + 6 = 116"*)*

[153.S4] I: *O sea... que... la regla...*

[154.S4] A: *¿La regla?*

[155.S4] I: *Si, ¿cuál es la regla?*

[156.S4] A: *¿Sí?*

[157.S4] I: *La fórmula. ¿Cuál es la fórmula?*
[158.S4] A: *Si... sería... ¿la escribo?*
[159.S4] I: *Sí.*
[160.S4] A: *Sería... ene igual a..* **(escribe n =)**
[161.S4] I: *¿Quién es ene?*
[162.S4] A: *Lo que quiero hallar. El primero... este... sería... ene sub uno...* **(continua escribiendo $n_{1)}$**
[163.S4] I: *Tu... estás usando una fórmula... ¿cuál?*
[164.S4] A: *De la de... en la... de sucesiones me parece... pero no me acuerdo...*
[165.S4] I: *No te acuerdas... pero inténtalo... sácalo sin la fórmula...*
[166.S4] A: *Yo lo primero... cuando hice el árbol... primero lo hice y después me acorde de la fórmula...*
[167.S4] I: *Inténtalo aquí también...*
[168.S4] A: *Sería el primero... más... ene menos uno... por...* **(escribe $n = n_1 + (n - 1)$)**
[169.S4] I: *La diferencia...*
[170.S4] A: *La diferencia...* **(termina escribiendo D)... (escrito $n = n_1 + (n - 1) \cdot D$)**
[171.S4] I: *Tu... ¿no te acordabas de ella...?*
[172.S4] A: *Sí... no...*
[173.S4] I: *¿Te la ha recordado el problema?*
[174.S4] A: *Si... es que el año pasado... fueron muchas fórmulas... no me acordaba de casi nada... me lo ha recordado el problema... sí...*

Informe

Árbol de Navidad: Para explicar el cálculo se apoya en el dibujo señalando, como contando, las luces en la base de la fig. II, comprobando que al pasar de la fig. I a la fig. II se añaden cuatro luces. Luego verifica que al pasar a la fig. III se vuelve a añadir cuatro luces. Así que parece que tenemos una estrategia visual. Sin embargo al preguntar sobre la obtención de 39 luces para el árbol de tamaño 10, afirma que no se acuerda y hace referencia explícita a otros años. Lo que sigue de la entrevista confirma que el dibujo le ha hecho recordar la fórmula para las progresiones aritméticas, aprendida el año anterior, la clave está en que al escribir 3 + 10 · 4 confiesa que la falta algo y solicita ver la fórmula que escribió en clase, para concluir que, en vez de 10, debe poner 10-1, ya que el árbol inicial no tenía cuatro luces sino 3.

A-2, I-1.

Hexágonos con cerillas: Observa los datos numéricos, 6 y 11, para obtener la diferencia y comprueba que es la misma entre 11 y 16. Induce ("*por lógica...*") que la cadena de cuatro debería tener cinco más, lo que hace 21. Al solicitar que se explique señala los datos numéricos. No hay referencia al dibujo. Al calcular las cerillas para la cadena de 23 hexágonos, resta uno de 23 y multiplica el resultado por 5 señalando los datos numéricos (6 y 11) y luego suma 6, y es el único momento en que señala al dibujo, primer hexágono, para reforzar que tiene 6 cerillas. El resto de la entrevista se dedica a deducir la fórmula general, que es sin duda la del cálculo de un término genérico en las progresiones aritméticas.

A-2, I-1.

El comienzo prometía un enfoque visual-gráfico, pero se observa durante la entrevista una mayor atención a los datos numéricos como referentes de la abstracción de la regla (sobre todo en los hexágonos con cerillas). También es de notar el hecho de que durante casi toda la entrevista intente recordar una fórmula aprendida el curso anterior, lo cuál indica que reconoce este tipo de situación como similar a las sucesiones aritméticas. Hay algunos momentos claves en los que para explicar sus cálculos se refiere con cierta insistencia a los datos numéricos aportados en el problema y luego, como si quisiera enfatizar estos es cuando hace referencia al dibujo. No hay claramente señales sobre el dibujo ni usos del lenguaje que hagan pensar en una estrategia visual. Cuando se le pregunta por el tamaño cuatro en la cadena de hexágonos, hace señales sobre los números y entonces emplea la palabra "*en teoría*" claro sinónimo de "*sí esto debe ser como lo anterior entonces...*" que denota un razonamiento inductivo sobre la sucesión de datos aportado. Es notable el hecho de que no dibuje la cadena de cuatro para comprobar que necesita veintiuna cerillas. Lo cuál apoya aún más nuestra conclusión.

L1 (funcional) con intento de recuerdo de conocimiento adquirido previamente y vuelto a deducir en el transcurso de la entrevista.

Quinta entrevista.

Alumno: Beatríz Toral Marrero. **Grupo: B (matemáticas A).** **S-5**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde *"Un árbol de tamaño 4 necesita 15 luces porque sumando el nº de luces que tiene el árbol anterior + el nº de luces del primer árbol + 1 es igual al nº de luces que necesita"* y *"19 luces porque sumando el nº de luces que tiene el árbol anterior + el nº de luces del primer árbol + 1 es igual al nº de luces que necesita"*, respectivamente. Además añade a la explicación lo siguiente " *Ejemplo: Un árbol de tamaño 6. árbol de tamaño 5 = 19 luces* (debajo*) árbol de tamaño 1 = 3 luces.* (Debajo*) 19 +3+1 = 23 luces necesita un árbol de tamaño 6"*.

Tamaño 10: " *necesita 39 luces* (debajo*) porque si uno de 5 necesita 19 luces* (debajo suma en vertical) *19 + 19 = 38 +1 = 39 luces que necesita uno de 10"*.
En la explicación hay semiborrado lo siguiente *31* ---- *8* (debajo) *4* (línea) *35* ---- *9* (debajo) *4* (debajo) *39* ---- *10*.

Tamaño 20: " *si un árbol de tamaño 10 necesita 39* (debajo*) 39+39 = 78 +1 = 79 luces que necesita"*.

Tamaño n: " *x + 3 + 1 = luces que necesita un árbol de tamaño n* (debajo) *x = nº de luces de un árbol un nº menor a n"*.

Diagnóstico: W2+1

Árbol de Navidad

[175.S5] I: *¿ De dónde sacaste tú que era 19+3+1=23?*
[176.S5] A: *Para hacer el tamaño 6. Si el 5 tenía 19... pues era sumarle cuatro...*
[177.S5] I: *Entonces... ¿por qué pusiste tres más uno?*
[178.S5] A: *Porque... como había aquí tres* **(señalando al dato)***... pues tres más tres, seis, digo... pues más uno, en vez de decir cuatro... pues... no sé...*
[179.S5] I: *A ver, repite... tres...*
[180.S5] A: *Tres más tres, seis. y entonces...para que...*
[181.S5] I: *Te faltaba uno... entonces siete...*
[182.S5] A: *...es de cuatro en cuatro* **(señala datos***)... pero yo no sabía...*
[183.S5] I: *Tú hiciste tres más uno. Bien. Aquí en este otro...* **(señalando cuestión tres relativa al cálculo del tamaño diez)...**
¿Cómo calculaste que para el tamaño diez hacían falta treinta y nueve luces? Explícamelo.
[184.S5] A: *A ver... me parece que lo relacione con los anteriores... que los sume para no estar...*
[185.S5] I: *Este diecinueve... dice... lee lo que dice ahí...* **(señalando explicación escrita)**
[186.S5] A: *... porque si uno de cinco necesita diecinueve...* **(leyendo)**
[187.S5] I:*¿Por qué sumaste dos veces diecinueve?*
[188.S5] A: *Porque... si cinco, uno de cinco necesita diecinueve...* **(señalando los cálculos)** *pues sumé lo que serían dos de cinco... que serían diez...*
[189.S5] I: *Bien, y entonces te dio treinta y ocho. Y ese uno... ¿de dónde salió ese uno?*
[190.S5] A: *Y.. le sume uno... porque como aquí a todos les sumaba tres... tres más uno... porque... no me acuerdo...*
[191.S5] I: *Y no podrías recordar...*

[192.S5] A: *Este que aquí... como yo sé que lo del tres más uno... ¿no?...así a todos... pues fue. parece que fue porque pense que diez y nueve...había como ....a lo mejor algún intervalo de números...¿no? ... y entonces se lo sume. pero no...*
[193.S5] I: *No te acuerdas...*

Hexágonos con cerillas

[194.S5] I: *Contesta la pregunta. Léelo primero...*
[195.S5] A: *¿Cuántas cerillas harían falta para una cadena de 4 hexágonos?*
[196.S5] I: *Dime que estás pensando.*
[197.S5] A: *Lo que tendría que hacer es encadenar otro aquí.* **(Señalando el dibujo de la figura III).**
[198.S5] I: *A ver, ¿cómo sería?*
[199.S5] A: *¿Lo puedo continuar?* **(señalando la figura III y haciendo ademán de extender hacia la derecha)**
[200.S5] I: *Sí. Lo puedes dibujar.*
(dibuja un hexágono encadenado a la cadena de tres hexágonos de la figura III)
[201.S5] A: Serían **(contando las cerillas sobre el dibujo)** veintiuna cerillas... **(escribe “ *21 cerillas*”)**
[202.S5] I: *Y si encadenamos veinte hexágonos... ¿cómo calcularías las cerillas?...pon veinte hexágonos.*
[203.S5] A: **(escribe “*20 hexágonos* “)** *Como... el primero tiene seis* **(señalando el dibujo**)*... ¿no?...el segundo es cinco...* **(señala pieza común)** *porque encadenas con uno... entonces pones seis más...*
[204.S5] I: *Ve escribiendo.*
[205.S5] A: **(escribe “ 6 + “**)*... y entonces serían diecinueve los que quedan... diecinueve por cinco* **(escribe operación vertical 19 (debajo) ´ 5 (debajo) línea (debajo) 95**) *que son las posiciones de más... pues. ciento uno.* **(Añade 95 a la operación dejada antes y la completa: “ *6 + 95 = 101 cerillas*”).**
[206.S5] I: *¿Cuál sería la regla general? Si te dan cualquier tamaño... ¿cómo lo calcularías tú...?*
[207.S5] A: *Sería sumando el número de cerillas que tiene el primero. por ....a ver... el número de cerillas que tiene el primero...por...una menos que tienen los demás lo multiplicas luego por la cantidad que se de...*
[208.S5] I: *¿La cantidad? ¿ Qué cantidad?*
[209.S5] A: *A lo mejor te piden... según la cantidad que te pidan...*
[210.S5] I: *Si... sería... entonces...*
[211.S5] A: *El número de...*
[212.S5] I: *Por ejemplo, son cien hexágonos. Cien.*
[213.S5] A: *Son cien... pues si tiene... si tiene a lo mejor seis cerillas... pues pones seis cerillas más cinco que es una menos... cinco... por cien.*
[214.S5] I: *Escríbelo. ahí...*
[215.S5] A: **(escribiendo “ *6 + 5· 100 = 506*”)...** *seis. Más cinco... por cien... que serían quinientas seis cerillas en total.*

Informe
Árbol de Navidad: Durante la explicación se observa un enfoque básicamente numérico. En el cálculo de las luces necesarias para el tamaño diez se observa que utiliza la estrategia W2, pero se da cuenta de que no coincide el resultado con el obtenido extendiendo la sucesión hasta el tamaño diez por suma iterada de cuatro (aparece borrado parcialmente), y procede a sumar uno. No hay referencia expresa al dibujo ni comprobación sobre el mismo.

A-3, I-6.

Hexágonos con cerillas: Aquí el enfoque es visual-gráfico y corresponde al esquema A. Para verificar la regla, cuenta sobre el dibujo. Observa que van de cinco en cinco y utiliza este número como factor. Comete el error de no restar un hexágono al total de cien. Sin embargo, ha hecho bien la operación en el caso de veinte hexágonos.

A-1, I-1.

Para verificar sus cálculos en la generalización próxima, utiliza dos procedimientos distintos. En el caso del árbol de Navidad extiende la sucesión y ajusta e resultado obtenido por la estrategia W2 al dado por extensión de la sucesión sumando cuatro. En este caso la comprobación se realiza mediante el procedimiento numérico de extender la sucesión.
En el caso de la cadena de hexágonos utiliza un recuento sobre el dibujo que realiza al efecto.

Sexta entrevista.

Alumno: Mª Candelaria Afonso Díaz. **Grupo: B (matemáticas A).** **S-6**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde " *Un árbol de tamaño 4 necesita 15 luces. Porque del árbol 1 al árbol 2 siempre se le añaden 4 luces. Por eso en un árbol de tamaño 3 tiene 11 luces, si se le añaden 4 luces te dan las luces del árbol de tamaño 4"* y " *Un árbol de tamaño 5 necesita 19 luces. Es el mismo razonamiento que la pregunta 1"*, respectivamente.

Tamaño 10: " *Un árbol de tamaño 10 necesita 39 luces. Si un árbol de tamaño 5 necesita 19 luces, un árbol de tamaño 10 necesita 20 luces más".*

Tamaño 20: " *Un árbol de tamaño 20 necesita 79 luces. Si un árbol de tamaño 10 tiene 39 luces el árbol de tamaño 20 necesita 40 luces más".*

Tamaño n: *"N = X " (tachado no se entiende).*

Diagnóstico: L2

Árbol de Navidad

[216.S6] I: *Cómo calculaste tú que un árbol de tamaño 10 necesita 39 luces? (señalando al papel)*

[217.S6] A: *Por que yo puse que si un árbol de tamaño cinco necesita 19 luces para un árbol de diez se le añadirían veinte luces más para que me dé treinta y nueve.*

[218.S6] I: *¿ Por qué veinte?*

[219.S6] A: *Porque... a ver... ¿puedo mirar lo otro?* **(hace ademán de girar la hoja)**

[220.S6] I: *Puedes mirar lo que quieras.*

[221.S6] A: *A ver... es que aquí puse... un árbol de tamaño cuatro necesita quince luces... entonces... por que un árbol de tamaño uno necesita siempre... se necesitan... a ver... se le añade cuatro a cada árbol. Porque en el primero se la añade tres* **(señala dibujo figura I)**... *en el segundo cuatro* **(señala figura II)**. *y ya se ve que a cada... esto... se la van añadiendo cuatro* **(señala figura III)**... *entonces yo fui sumando... digo bueno... pues si en el tamaño cinco... en el diez necesitan veinte más* **(gira la hoja)** *para poder tener las luces que hacen falta... es que yo hice el dibujo del árbol...*

[222.S6] I: *A ver...* **(toma una hoja y empieza a dibujar un árbol)**

[223.S6] A: *Hice esto... hice el árbol... y después fui haciendo así... ¿no?* **(gestos sobre el papel)**

[224.S6] I: *¿Hiciste el dibujo completo?*

[225.S6] A: *No... el dibujo completo no...*

[226.S6] I: *¿ Hiciste un esquema?*

[227.S6] A: *Entonces... hice esto así...* **(dibuja un árbol de tamaño diez sin las luces)**... *le puse... uno, dos, tres,... entonces aquí* **(señala la copa)** *serían tres* **(dibuja tres luces),** *aquí cuatro* **(en el siguiente tramo del árbol dibuja cuatro luces**)... *en cada uno de estos serían cuatro* **(dibuja cuatro luces hasta el tamaño cinco)**... *y entonces ya... llegando al último ya se ve... contando del primer nivel al quinto, al otro* **(señalando desde el nivel cinco al último del dibujo)** *tienen que ir veinte luces más...*

[228.S6] I: *Y entonces... ¿ en el otro?* **(se refiere a la cuestión de tamaño veinte)**

[229.S6] A: *Lo hice exactamente igual.*

Hexágonos con cerillas

[230.S6] I: *Ahora vas a contestar a este otro... lee primero...*
[231.S6] A: *... sería igual... más o menos...*
[232.S6] I: *A ver... ¿cómo?*
[233.S6] A: **(siseo leyendo)**... *serían seis* **(cuenta sobre la figura III)**... *dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve,... veinte...* **(gestos como sí estuviera contando en un hipotético cuarto hexágono encadenado a los tres de la figura III).**
[234.S6] I: *¿ Por qué veinte?*
[235.S6] A: *Porque si a cada... a ver... el primer hexágono, uno, dos, tres, cuatro* **(cuenta sobre figura I)**... *tiene seis,..., entonces con estos dos... con el mismo de uno de estos* **(señala cerilla común a dos hexágonos unidos en figura II)**... *con los otros... entonces, uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis* **(cuenta sobre la figura II)** ... *entonces en el otro sería , uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis* **(cuenta sobre la figura III)** *, entonces para el otro sería uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis más, entonces son dieciséis, diecisiete*, **(contando sobre hexágono hipotético añadido a la cadena de tres hexágonos De la figura III)**,... *, veintidós.*
[236.S6] I: *Bueno, vamos a hacerlo mejor. Ve escribiendo lo que vas haciendo. Tamaño cuatro...*
[237.S6] A: *A ver... sería primer hexágono* **(empieza un dibujo)**... *uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis* **(cuenta las cerillas)**, *y entonces al hacer el otro hexágono... te quedaría así...* **(continua la cadena de hexágonos que empezó a dibujar, con un segundo hexágono)**... *¿no?... entonces de aquí saldría el otro hexágono... así...* **(dibuja un tercer hexágono unido a los anteriores)**... *y entonces te dicen cuatro... entonces habría que hacer otro hexágono...* **(termina de hacer la cadena de cuatro hexágonos y sitúa las cabezas de las cerillas como puntos negros**).
[238.S6] I: *Más que dibujar. Dime cuántas cerillas son en total.*
[239.S6] A: *Veintidós. Porque de aquí a aquí* **(señala los tres primeros de la cadena de cuatro)** *son dieciséis... entonces sumas los que* ***quedan*** **(señalando las cerillas del cuarto hexágono de la cadena de cuatro).**
[240.S6] I: *¿Cuántos son?*
[241.S6] A: *Dos,... , cuatro,... seis, siete.*
[242.S6] I: *¿Siete?*
[243.S6] A: *Seis.... seis.*
[244.S6] A: *Son estos... y entonces serían veintiuno... ¿no? ... veintiuna cerillas...*
[245.S6] I: *¿Cuántas has sumado? ¿Cómo obtuviste el veintiuno?*
[246.S6] A: *En el primer hexágono te dan seis cerillas* **(señala figura I)** *y por cada hexágono son seis cerillas... y entonces si son seis por cuatro* **(señalando sobre el dibujo echo por ella)**... *no... son seis por cada hexágono... entonces si cuatro hexágonos fuesen cuatro más...* **(hace ademán de un nuevo hexágono en la figura III)**... *sí... seis cerillas más...*
[247.S6] I: *¿Seguro?*
[248.S6] A: *Si... porque... bueno. en común tienen el mismo lado* **(señala lado común a los dos primeros hexágonos de la cadena de tres, figura III**)... *entonces serían cuatro más* **(cuenta los puntos negros)**...
[249.S6] I: *No cuentes las cabezas de las cerillas... Supón que ahora la cadena tiene quince hexágonos. ¿Cuántas cerillas necesitarás?*
[250.S6] A: *Yo, ... es que lo dibujaba...* **(hace ademán de dibujar)**... *en otra hoja aparte.*
[251.S6] I: *Inténtalo sin dibujar.*
[230.S6] A: *Pues, si no voy a dibujar más ... entonces ...* **(señalando sobre el dibujo hecho)** *contaría tres veces estos ...*
[252.S6] I: *A ver ... ¿cómo sería ?*

[253.S6] A: *Veintiuno entre todos ...* **(siseo contando sobre el dibujo de la cadena de cuatro)** ... *treinta y nueve cerillas en ocho hexágonos ... esos son en ocho ...*
(....) **(Aclaración: Sigue pensando en cabezas y no en palillos, luego cada hexágono son cuatro más; como ya tiene 21 cerillas para cuatro hexágonos, vuelve al dibujo y desde 21 va contando las cabezas hasta llegar a 39)**
[254.S6] I: *Bien. Vale. Sin contar ahora ... puedes hacerlo sin contar .*
[255.S6] A: *Sí ...*
[256.S6] I: *¿Cómo?*
[257.S6] A: *Multiplicando cuatro ... quince ... por el número de cerillas que pongo* **(señalando sobre el dibujo hecho).**
[258.S6] I: *¿Cuántas cerillas son?*
[259.S6] A: *A ver ... también se puede hacer por una regla de tres ... ¿no?... si en cuatro hay veintiuno en quince habría equis ...*
[260.S6] I: *Hazlo ... a ver ...*
[261.S6] A: **(siseo mientras escribe el esquema de regla de tres y empieza los cálculos)** ... *entonces sería equis igual a veintiuno por quince ... partido por cuatro* ... (multiplica 21 por 15 escribiendo sobre el papel) ... *trescientos quince ... entre cuatro* .... **(efectúa la división sobre el papel)** .. *Serían ... (?) setenta y ocho ... cerillas ...*
[262.S6] I: *¿Crees que está bien?*
[263.S6] A: *Creo ... que ... sí ...*
[264.S6] I: *Y si te pidiesen otra cantidad ...*
[265.S6] A: *Volvería a hacerlo igual ...*
[266.S6] I: *¿No te parece raro que la división anterior no te diera exacta ?*
[267.S6] A: *Sí. Sí me pareció raro ...*
[268.S6] I: *Y ... ¿por qué no me dijiste nada?*
[269.S6] A: *Sí ... me quede pensando ... si te saliera setenta y ocho tendría que darte cero ...*
[270.S6] I: *A lo mejor es que no funciona la regla de tres.*
[271.S6] A: *Entonces serían cincuenta y tres cerillas ...***(Contando los puntos sobre el dibujo)**
[272.S6] I: *¿Por qué cincuenta y tres ?*
[273.S6] A: **(Es el mismo proceso descrito anteriormente: Para 8 hexágonos contó 39 cerillas, y vuelve a contar sobre el dibujo pero esta vez sólo las cabezas correspondientes a 3 hexágonos más que hacen un total de 53)**

Informe
Árbol de Navidad: Utiliza la expresión $f(10)=f(5) + 4\times(10-5)$, que claramente es la estrategia tipificada como L2. Sin embargo, en toda la explicación se deduce que es el dibujo la referencia clara para la abstracción de la regla. Incluso, dibuja un árbol de tamaño diez para afirmar su estrategia, señalando que cada vez que se añade una parte, o crece el árbol, se añaden cuatro luces. Enfoque claramente visual. Comprueba sobre el dibujo.

A-1, I-3.

Hexágonos con cerillas: Utiliza una estrategia de recuento sobre el dibujo. Comete errores de apreciación sobre el total de hexágonos que debe contar partiendo de una cuenta ya realizada sobre la cadena de 4 hexágonos y que sabe que corresponde a 21 cerillas. Cuando se le pide que no cuente sobre el dibujo emplea la regla de tres y sólo cuando se le señala que no da exacta vuelve a realizar el recuento sobre el dibujo a partir del dato conocido para 4 hexágonos.

No invariante.

Es claramente visual. Aunque emplea diferentes métodos. No aplica en los hexágonos la estrategia deducida para el árbol de Navidad y, quizás debido a la confusión entre palillos y cabezas de las cerillas, se obceca en contar sobre el dibujo y no construir una regla general. Siempre cuenta a partir de la cadena de cuatro. Esto es lo que tiene en común la estrategia de recuento sobre el dibujo con la empleada en el árbol de Navidad.

Séptima entrevista.

Alumno: Mª Ángeles Antón Padilla. **Grupo: E (matemáticas A).** **S-7**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde "*1 ® 3, 2 ® 7, 3 ® 11, 4´ 4 = 16 -1 = 15 , 4 ® 15 luces* (borrado, pero distinguible hay cálculos que inducen a pensar que inicialmente sumo cuatro sucesivamente: *3 + 4 + 4 + 4 = 15 luces* " y "*19 luces. El mismo razonamiento que en el 1º he seguido. Multiplico la medida por 4 y le resto 1.* (debajo*) Ejemplo: 15 ´ 4 = 60 - 1= 59. Es lo mismo que a medida que aumenta 1 le sumamos 4.* (sigue una secuencia desde 1 → 3 luces hasta 15 → 39 luces*)* ", respectivamente.

Tamaño 10: " *39 luces. 10 ´ 4 = 40 - 1 = 39*". (borrado pero distinguible tenuemente cálculo de las luces necesarias usando el esquema de regla de tres),

Tamaño 20: " *79 luces. 20 ´ 4 = 80 - 1 = 79*".
Tamaño n: " *n ´ 4 = 4n - 1*"

Diagnóstico: L1. Sin embargo interesa comprobar qué le indujo a abandonar la regla de tres y cómo saco la expresión final.

Árbol de Navidad

[274.S7] I: **(señalando los cálculos para el árbol de tamaño 10)** *Antes de los cálculos esos, hiciste otros cálculos. ¿Qué hiciste?*
[275.S7] A: *... Una regla de tres.*
[276.S7] I: *Y ... ¿por qué la dejaste?*
[277.S7] A: *Porque me di cuenta que el resultado no era el que yo quería obtener ... porque me di cuenta que con la regla de tres no se podía hacer ...*
[278.S7] I: *¿Dónde te diste cuenta?*
[279.S7] A: **(gira la hoja a la primera página)** *Me parece que aquí dos ... a ver como era ... ¡aja! ... aquí multiplique uno por cuatro y le resté uno* **(señalando el 1 y el 3 de los datos)** *... aquí dos por cuatro y le resté uno* **(señalando el 2 y el 7 de los datos)**.
[280.S7] I: *¿Tú lo hiciste para comprobar?*
[281.S7] A: *¡Aja! ver como eso ... después multiplique tres por cuatro y le reste uno* **(señala el 3 y el 11 de los datos) ...**
[282.S7] I: *Y te diste cuenta ... que ...*
[283.S7] A: *... había que multiplicar por cuatro y restar uno.*
[284.S7] I: *Y esa es la regla que después usaste ...*
[285.S7] A: *¡Aja!*
[286.S7] I: *Y ... ¿cómo se te ocurrió?*
[287.S7] A: *Porque ... a ver ... no sé ...* **(señalando sobre los datos numéricos)** *... en ver que en estos tres daba ... salía ... por esa regla ... me dio por hacerla ...*
[288.S7] I: *Pero, ¿ de dónde salió el cuatro ?*
[289.S7] A: *¿ El cuatro?*
[290.S7] I: *Sí. Porque tu dices ... multipliqué por cuatro ...*
[291.S7] A: *A ver ... yo fui multiplicando uno por uno, uno por dos, uno por tres ...* **(señalando el 1 de la frase donde se da que para tamaño 1 se necesitan 3 luces)** *... aquí uno por tres me dio tres ... pero aquí dos por tres* **(señalando el dato 2 en la segunda frase)** *no me daba ... me daba menor que siete ... y tres por tres* **(señalando el dato 3 en la tercera frase)** *ya había ... faltaba dos para llegar a once.*

Hexágonos con cerillas

[292.S7] I: *Intenta resolver, ahora, este otro problema.*
[293.S7] A: **(señalando los datos numéricos, recorriendo de la primera frase a la última)** *... sumando cinco .*
[294.S7] I: *Entonces, el de cuatro hexágonos ¿cuántas tendría ?*
[295.S7] A: *uno, seis ... dos, once ... tres, dieciséis ... cuatro ... veintiuno.* **(señalando los datos numéricos)**
[296.S7] I: *Ponlo. Cuatro serían veintiuno.*
[297.S7] A: **(escribiendo: 4 ® 21)**
[298.S7] I: *¿De dónde salió ... el veintiuno?*
[299.S7] A: *De ... cuatro por cinco ... bueno ... a ver ... como ...porque aquí de seis a once, cinco* **(señalando los datos numéricos)** *... de once a dieciséis, cinco ... dieciséis más cinco, veintiuno.*
(Escribe : 21 = 16 + 5)
[300.S7] I: I*magina que ahora tenemos veintiún hexágonos. ¿Cómo lo calcularías? ... ¿ cómo sabrías el número de cerillas necesarias ?*
[301.S7] A: *... ¡ aja ! ... uno por cinco más uno, seis* **(señalando datos numéricos)** *... dos por cinco más uno, once* **(señalando datos numéricos)** *... tres por cinco más uno, dieciséis ... cuatro por cinco más uno, diecisiete ..*
[302.S7] I: *¿Cómo? ... tres por cinco ... a ver ... ¿cómo es ... ?*
[303.S7] A: *A ver .... aquí ...* **(vuelve a señalar los datos de la primera frase)** *... un hexágono se le lleva cinco ... cinco por uno ... eh ... uno ... un hexágono por cinco más uno ...*
[304.S7] A: *Bien.*
[305.S7] A: *Aquí hay dos hexágonos y once cerillas* **(señalando datos de la segunda frase)** *... dos por cinco más uno ... aquí tres hexágonos y dieciséis cerillas* **(señalando datos de la tercera frase)** *... tres por cinco más uno ... aquí ...* **(señalando a la frase 21 hexágonos que escribió antes)** *veintiuno por cinco más uno ...* **(escribe 21 ´ 5 = 105 + 1 = 106)**
[306.S7] I: *¿ De dónde sacaste el cinco ? ese cinco con el que tu multiplicas ...*
[307.S7] A: *Es que en estos tres* **(señala las frases donde están los datos)** *... y también en este* **(señalando la frase dónde se pregunta por el número de cerillas necesarias para cuatro hexágonos encadenados)** *... también.*

Informe

Árbol de Navidad: La explicación es básicamente numérica. Incluso es de tipo funcional. Al principio utilizó un enfoque secuencial, de hecho extiende la sucesión hasta el término 15. Después intentó abreviar los cálculos empleando una regla de tres, pero se dio cuenta que no obtenía los mismos resultados. Después intentó, mediante comprobación sobre los datos aportados, una pauta funcional.

A-4, I-5.

Hexágonos con cerillas: Desde el comienzo intenta una pauta funcional y la encuentra rápidamente. Son los datos numéricos los que le sirven para obtener, en primer lugar, la diferencia y, en segundo lugar, utilizando esta diferencia como factor encontrar la pauta funcional que comprueba sobre los datos aportados.

A-4, I-5.

Enfoque claramente numérico. Pauta funcional obtenida por ajuste sobre los datos aportados. No hay referencia al dibujo en ningún momento. Las comprobaciones las realiza también sobre los datos numéricos generados o aportados.

Octava entrevista

Alumno: Carlos Hugo López Reboso. **Grupo: E (matemáticas A).** **S-8**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad":

Para los tamaños 4 y 5 responde "*Necesita 15 luces, porque tendría cuatro luces en la primera planta y, en la segunda ...* (tachado*), hasta llegar a la cuarta que tendría 3, porque acaba en forma triangular"* (Se acompaña de un dibujo del árbol de tamaño cuatro) , y " *Necesita 19 luces, (~~al aumentar su tamaño~~)"* (Se acompaña de un dibujo del árbol de tamaño cinco), respectivamente.

Tamaño 10: " *Un árbol de tamaño 10 necesitaría, 9·4=36+3=39* (Debajo) 39 *luces. tendría 4 luces en cada parte,* (tachado) *menos en la última que tendría 3"*

Tamaño 20: " *Necesitaría, 19·4=76+3=79 luces. Por que serían 19 partes con cuatro luces, y la última con 3."*.

Tamaño n: " *(n-1)· 4 + 3* (debajo*) por que a n se le quita una parte, que sería la última que tiene 3 luces, y luego se le sumaría,"*

Diagnóstico: L2 (visual).

Árbol de Navidad

[308.S8] I: *Trata de recordar lo que hiciste en clase ... yo te voy a hacer unas preguntas ... por ejemplo, tamaño 10 necesita 39 luces. ¿Por qué treinta y nueve luces?* **(Señalando a los cálculos sobre el papel).**

[309.S8] A: *Porque...* **(gira la hoja hacia la primera página)** *saque que por cada **triangulito*** **(señala sobre la figura I)** *que se le sumara al árbol, ... , el de abajo tendría cuatro* **(señala figura II)** *y el de arriba lo seguiría teniendo tres , porque tendría la puntita* **(señalando sobre las luces)** *... y este en vez de tener uno en la puntita tendría uno en cada **lado*** **(señalando base del árbol en fig. II)** *y entonces ya ... después ... este ... lo mismo* **(señalando figura III)** *... y después, ya para no hacerlo con diez ... para no estarlo haciendo tan ... tan ... o sea ... todo el dibujo, cogí y hice para tres, para altura tres* **(señalando fig. III)** *... o sea uno tendría 3 lucitas* **(señala sobre las luces fig. I)** *y los restantes tendría cuatro ...*

[310.S8] I: *Muy bien. Entonces ...*

[311.S8] A: *O sea, entonces sería ...* **(gira la hoja)** *el tamaño diez sería nueve por cuatro, porque nueve tendrían cuatro luces, y se le sumarían tres que sería la última que quedaría, que tendría tres luces.*

Hexágonos con cerillas

[312.S8] I: *Ahora, intenta resolver este ...*

[313.S8] A: **(leyendo casi dos minutos)***... ¿Lo puedo hacer por el dibujo?...*

[314.S8] I: *Puedes hacerlo como quieras.*

[315.S8] A: *Yo creo que tendría dieciocho.*

[316.S8] I: *¿Por qué?*

[317.S8] A: *No. A ver ...* **(lee siseando la frase " un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces")**

[318.S8] I: *Entonces ... ¿cuatro cuántas necesita? ...*
[319.S8] A: *Seis ... tendría ... por que yo ... o sea, este tendría seis* **(señala figura III),** *después ya con estos ... con una cerilla de este podría tener... tres, cuatro, cinco* **... (contando sobre la fig. III)** *... este forma, ... este tendría después, o sea, ... este dos* **(señalando sobre la figura II),** *tendría cuatro cerilla más que el primero.*
[320.S8] I: *¿cuatro?*
[321.S8] A: *Sí. Cuatro ... bueno ...*
[322.S8] I: *Cuenta las cerillas ...*
[323.S8] A: *... tres, cuatro, cinco, y ....* **(contando las cerillas sobre la fig. III).**
[324.S8] I: *Bien.*
[325.S8] A: ... (pensando)
[326.S8] I: *Cuenta cabezas de cerillas ... a ver los cálculos ...*
[327.S8] A: *¿ En el cuarto?*
[328.S8] I: Sí.
[329.S8] A: *Veinte.*
[330.S8] I: *A ver. ¿Cómo lo calculaste?*
[331.S8] A: *O sea ... ¿con el dibujo? ...*
[332.S8] I: *Tu escribe los cálculos y después me cuentas cómo lo haces.*
[333.S8] A: ... **(dibuja un hexágono)**
[334.S8] I: *¿Vas a pintar todo el dibujo?*
[335.S8] A: *Yo calculé, por ejemplo si* **(señalando figura III)** *este tendría dieciséis, entonces le sumaría ... otro, otro, otro, y otro* **(gestos como ampliando la figura III con cerillas, cabezas).**
[336.S8] I: *Que sería ...*
[337.S8] A: *Que serían entonces ya veinte.*
[338.S8] I: *Porque has sumado ... ¿cuatro?*
[339.S8] A: *Cuatro.*
[340.S8] I: *Pon dieciséis más cuatro igual veinte ...* **(el alumno escribe *16 + 4 = 20*).** *Supón que ahora tenemos quince hexágonos. ¿Cuántas cerillas necesitarías ahora?*
[341.S8] A: *O sea ... dieciséis tendría ... dieciséis ... cuatro hexágonos, necesitan veinte, ... tres, once, ...*
[342.S8] I: *No. Tres, dieciséis.*
[343.S8] A: *Tres, dieciséis ... dos, once, ... y ...* **(señalando sobre los datos numéricos, frases).**

(En este momento se produce una intervención clara del investigador, ante la confusión del alumno, para aclarar que si quiere que los datos numéricos coincidan con sus cálculos sobre el dibujo, debe contar palillos y no cabezas de cerillas. Como resultado se corrige el cálculo anterior a *16+5=21*).

[344.S8] A: *Entonces sería ... por cada hexágono se le sumarían cinco, entonces, uno tendría seis, el otro tendría once que serían cinco más, el tercero tendría dieciséis ... que serían cinco más ... entonces quince ... si cuatro tiene veintiuno ... quince tendría equis* **(gestos sobre el papel como escribiendo el esquema correspondiente a la regla de tres)**
[345.S8] I: *A ver ...*
[346.S8] A: **(escribe esquema de la regla de tres *4* ¾ ¾ *21* (debajo) *15* ¾ ¾ *x* (debajo) *4x=21·15*)**
[347.S8] I: *Haz la operación ...*
[348.S8] A: **(realizando los cálculos sobre el papel)** *... setenta y ocho coma setenta y cinco ... ? ...*
[349.S8] I: *Te parece raro ...*
[350.S8] A: *Sí.*
[351.S8] I: *¿Tendría que dar exacto? Entonces ... ¿cómo es que ...?*

[352.S8] A: *Porque a lo mejor no se puede hacer como una regla de tres.*
[353.S8] I: *Bien. Si no se puede hacer por una regla de tres ¿cómo se podría hacer?*
[354.S8] A: *Por la lógica ... por ejemplo ... si seis ... a ver ... seis* **(señalando dato numérico)** ... *tendría cinco ... dos tendría cinco más, once ... tres tendría cinco más, dieciséis ... o sea ... quince tendrían* ... **(señalando esquema de la regla de tres como contando)** ...
[355.S8] I: *¿Qué estás pensando?*
[356.S8] A: *Sí. Por ejemplo ... es que intento llegar hasta el quince ...*
[357.S8] I: *Pero hasta el quince no vas a llegar ... entonces ...*
[358.S8] A: *Por eso ... voy a ponerlo aquí, que lo veo ...* **(Escribiendo *1* ¾ ¾ *6* (debajo) *2* ¾ ¾ *11* (debajo) *3* ¾ ¾ *16* (debajo) *4* ¾ ¾ *21* (debajo) *15* ¾ ¾** ...**(esquema - asignación**)
[359.S8] I: *Quince...*
[360.S8] A: **(Escribe *11·5 = 55*)**
[361.S8] I: *Explícame...*
[362.S8] A: *Aquí sería ... a medida que van contando los hexágonos* **(señalando sobre el esquema -asignación anterior)** *aumentan cinco cerillas, entonces ... aquí sólo hay cuatro ... y tienen veintiuno ... entonces cinco han aumentado veintiuno ... en once ... lo multiplico por cinco son cincuenta y cinco cerillas, y pero ... sólo esto son once ... ahora faltaría* ***poner*** **(suma veintiuno al resultado anterior, escribiendo 76)** ...
[363.S8] I: *Y le sumas veintiuno ...*
[364.S8] A: *Sí.*
[365.S8] I: *Y.... ¿de dónde salieron? ...*
[366.S8] A: *De los cuatro restantes.*
[367.S8] I: *O sea, tú calculaste cuántas cerillas para once ... y ¿quiénes son esos once?*
[368.S8] A: *Los once que le falta para llegar de cuatro a quince. ... serían setenta y seis ...* **(señalando sobre el esquema - asignación).**
[369.S8] I: *Veamos. Imagina ahora que te pongo treinta y dos hexágonos. ¿Cómo sería ...?*
[370.S8] A: .... *no sé* ... **(añade 32 ¾ al esquema - asignación)**
[371.S8] I: *¿Qué estás pensando?*
[372.S8] A: *Si quince tendría setenta y seis* **(completando esquema - asignación)** *treinta debería tener ... ¿el doble? ...*
[373.S8] I: *¿El doble?*
[374.S8] A: .... *¿treinta debería tener el doble de quince?*
[375.S8] I: *¿Por qué crees que debería tener el doble?*
[376.S8] A: *Porque si este* **(señala sobre 15 en el esquema - asignación)** *tendría setenta y seis ... si treinta es el doble de quince ...*
[377.S8] I: *¿Pero eso no es equivalente a la regla de tres anterior?*
[378.S8] A: *Falla en unos cuántos ....* **(señalando sobre la figura III)**
[379.S8] I: *Al comprobar ...*
[380.S8] A: ... *Ah! Ya ... a ver ... tengo una forma, pero no sé ...* **(señalando sobre el esquema - asignación)** *uno por seis, seis; dos por seis, doce, le quito uno, once; tres por seis, dieciocho, le quito dos, dieciséis ... tres por cuatro, veinticuatro, le quito tres, veintiuno ... quince por cuatro ...*
[381.S8] I: *¿Cómo que quince por cuatro?*
[382.S8] A: *No. Quince por seis ... noventa ... le quito cuatro ... no me da.*
[383.S8] I: *Busca otra forma ....*
[384.S8] A: *... Por cinco, le sumo una ...*
[385.S8] I: *¿Funciona?*
[386.S8] A: *Sí. Porque ...* **(sobre el esquema - asignación)** *cinco por una, cinco, le sumo una, seis; cinco por dos, diez, le sumo una, once; tres por cinco, quince, le sumo una, dieciséis; cinco por cuatro, veinte, le sumo una, veintiuno; cinco por quince ... setenta y cinco, le sumo una, setenta y seis ....*
[387.S8] I: *Entonces, ¿cómo sería para treinta y dos?*

[388.S8] A: ... **(escribiendo *32·5=160 + 1=161*)**
[389.S8] I: *Ciento sesenta y uno .... Entonces tu crees que esa es la regla ...*
[390.S8] A: *Podría ....*
[391.S8] I: *No estas muy seguro ... ¿por qué dijiste podría ?*
[392.S8] A: *Porque, yo, o sea ... la ... es a lo mejor algún ... por lógica se saca, pero a lo mejor fallaría en algún número ... no estoy seguro ...*
[393.S8] I: *Pero, en los que tu tenías aquí te funciona ...*
[394.S8] A: *En todos estos sí, y este ....* **(señalando el último cálculo)**
[395.S8] I: *En los que has puesto tu aquí no falla ... ¿dónde crees tu que fallaría?*
[396.S8] A: *A lo mejor en un número más elevado.*
[397.S8] I: *Y si fallara en un número más elevado ... ¿qué podríamos hacer?*
[398.S8] A: *Ya no serviría esta regla ... tendría que haber otra ... entonces.*

Informe

Árbol de Navidad: El enfoque es claramente visual. Utiliza los dibujos para explicar cómo obtuvo la regla que aplica para el tamaño diez.

A-1, I-1.

Hexágonos con cerillas: Empieza contando sobre el dibujo y observa que sus cuentas no corresponden con los datos numéricos aportados, pues ha contado cabezas en vez de palillos, vuelve a contar sobre el dibujo y una vez hecha la aclaración correspondiente, entre los datos numéricos y él sus cuentas sobre el dibujo deduce que tiene que sumar 5. Le pregunto cuántas cerillas necesitará una cadena de 15 hexágonos y trata de resolver la cuestión empleando la regla de tres. Al realizar la división, esta no da exacta y muestra su extrañeza, sugiriéndome que no se puede realizar por la regla de tres. Entonces vuelve a los datos numéricos y a partir de la primera cadena, comprueba una vez más que sumando cinco obtiene el número de cerillas de la cadena siguiente, trata de este modo de llegar hasta quince. Los cálculos mentales no los puede retener y pasa a realizar un esquema tamaño número de cerillas. Observa que desde el tamaño cuatro al quince ha añadido once hexágonos y multiplica los once por cinco y suma las veintiuna cerillas que corresponden al tamaño cuatro ($f(15)=f(4)+(15-4)\cdot 5$). Le propongo que calcule cuántas cerillas necesitaría para treinta y dos hexágonos y me contesta que el doble de quince pero sin mucha seguridad. Entonces trata de probar factores, sobre el esquema de asignación, y finalmente obtiene la regla $5\times$ tamaño $+1$. Le pregunto si cree que esa es la regla y dudando me dice que podría, que en caso de que fallara en un “número muy elevado” habría que probar con otra.

(Acciones varias - Ningún Invariante)

En la cadena de hexágonos muestra un enfoque claramente numérico, aunque al principio utilice el dibujo, pero en todo el desarrollo posterior priman los números sobre la abstracción. Es de resaltar que una vez que abstrae la regla para un caso concreto, no la aplica al siguiente que le propongo sino que, de nuevo, inicia el proceso de abstracción desde el principio. Al final duda de que la última expresión que ha comprobado sobre todos los casos recogidos en el esquema asignación.

Novena entrevista

Alumno: Cesar Méndez Jorge. **Grupo D (Matemáticas B**) S-9

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad": A este alumno se le entregó una versión equivalente al problema pero sin dibujo.

Para los tamaños 4 y 5 responde "*Siguiendo la gráfica, un árbol de tamaño 4 necesitará 15 luces, cosa que se podría deducir por lógica siguiendo los datos, siendo incrementadas en 4 luces los diferentes tamaños correlativos* " y "*Utilizando la gráfica y siguiendo la deducción del ejercicio anterior, se necesitan 19 luces para un árbol de tamaño 5*", respectivamente.

Tamaño 10: " *Siguiendo el aumento progresivo de 4 unidades por tamaño se necesitan 39 luces*".

Tamaño 20: " *se necesitan 79 luces*".

Tamaño n: " *luces = 3 + (n·4)*"

Diagnóstico: Dudas sobre L1. Pues no hay cálculos explicativos y la fórmula final corresponde a L2. El alumno a hecho una gráfica en la cuestión 4, cuyo propósito es claramente explicativo.

Árbol de Navidad

[399.S9] I: *Explícame cómo se necesitan treinta y nueve luces para el tamaño diez.*
[400.S9] A: *Lo deduci, sobre todo, por lógica.*
[401.S9] I: *A ver .*
[402.S9] A: *Si no me equivoco ... el razonamiento que hice en la pregunta número uno* **(gira la hoja hacia la pregunta primera**) *... en la que siguiendo la gráfica que hice aquí ...*
[403.S9] I: *¿Con qué datos hiciste la gráfica?*
[404.S9] A: *Con los que me venían aquí* **(señalando gráfica)**, *un árbol de tamaño uno, necesitaría tres luces, uno de tamaño dos, siete luces, y uno de tamaño tres necesitaría once luces* **(señalando los datos)** , *de ahí salía una recta, con aumentos progresivos de cuatro unidades por tamaños correlativos.*
[405.S9] I: *Muy bien.*
[406.S9] A: *Por ejemplo, si el tamaño cuatro necesitaría quince luces, el tamaño cinco necesitaría diecinueve luces ...* **(señalando sobre la gráfica)**
[407.S9] I: *Y.. Diecinueve ... porque le sumas cuatro al quince ... bien ...*
[408.S9] A: *O también, se podría averiguar, por ejemplo, sabiendo que ... si fuéramos sumando progresivamente cinco tamaños más, serían veinte luces más.*
[409.S9] I: *Para tamaño diez, ¿cómo sacaste el treinta y nueve?*
[410.S9] A: *Sabiendo que cinco ... cinco tamaños son diecinueve luces, cinco tamaños más serían veinte unidades sumadas a esas diecinueve serían treinta y nueve luces.*
[411.S9] I: *Y ... ¿ el setenta y nueve?*
[412.S9] A: *Pues lo hice ... las diez unidades de diferencia con este serían cuarenta unidades, más las treinta y nueve anteriores serían las setenta y nueve.*
[413.S9] I: *Y ... ¿ aquella fórmula al final ?*
[414.S9] A: *Esta fórmula, la puse así, pero creo que está equivocada, porque el número de luces serían igual a tres, que serían ... las ... unidades del primer tamaño más el número de luces, más el tamaño .. más ... el número de tamaños multiplicado por cuatro ...* **(gesticulando sobre la fórmula)**
[415.S9] I: *¿Crees que está bien?*

[416.S9] A: *No.*
[417.S9] I: *¿Por qué?*
[418.S9] A: *Vamos a ver... ¿cómo lo podría explicar? ... viendo un ejemplo ... tres más, ... tomemos este ejemplo que sería el cinco como hice antes, cinco por cuatro serían veinte, más tres, veintitrés y ahí se veía que eran diecinueve, ... había una diferencia de cuatro, por que el número de tamaños había que restarle cuatro ... porque ... menos cuatro* **(corrige la fórmula añadiéndole "- 4")**
[419.S9] I: *Así ... ¿ya funcionaría?*
[420.S9] A: *Porque el tamaño que aquí nombré como n podría ser cinco, en este caso, o diez ... entonces multiplicando por cuatro, darían cuarenta, más el número tres, que serían las tres unidades del tamaño primero, menos el cuatro este ... que simbolizaría que el primer tamaño no es de cuatro, sino de tres ... y al sumarle este tres aquí no tenemos porque sumarle el cuatro este aquí ..* **(señalando sobre la fórmula y el papel)**

Hexágonos con cerillas

[421.S9] I: *Ahora, intenta resolver este otro problema.*
[422.S9] A: *Lo puedo ... lo digo ...*
[423.S9] I: *Si, ve diciéndome lo que estás pensando ... puedes escribir ahí en el margen ...*
[424.S9] A: *Si un hexágono necesita seis cerillas* **(escribiendo "** ***Si un hexágono 6 cerilla 6+5 = 11 cerillas*****")** *... y aquí vemos que ... un hexágono se une al otro por un lado* **(señalando figura II)** *serían las seis más las cinco cerillas más del otro ... que se unen* **(señalando lado común a los dos hexágonos de la figura II)** *.... que daría once.*
[425.S9] I: *Bien ...*
[426.S9] A: *Este aquí, ... sería lo mismo ... sería seis,* **(escribiendo "** ***6+5+5 = 16 cerillas)*** *más las cinco de este correlativo, más las cinco del siguiente.*
[427.S9] I: *Y ... entonces ... si fueran cuatro hexágonos ...*
[428.S9] A: *Si fueran cuatro hexágonos correlativos, serían las seis cerillas del primer hexágono, más las cinco del segundo,* **(escribiendo "** ***6+5+5+5 = 21 cerillas*** **")** *más las cinco del tercero, más las otras cinco del cuarto, que darían veintiuna cerillas .*
[429.S9] I: *Supón que ahora, tenemos veintitrés hexágonos. ¿Cómo calcularías tú lo necesario para veintitrés hexágonos?*
[430.S9] A: *Eh... pues...* **(escribe "** ***23 hexágonos*****")** *... a ver ... para hacer estas cifras mayores podríamos hacer una regla general, ¿no?, que basándonos en los anteriores cálculos podría ser ...*
[431.S9] I: *¿En cuál anterior?*
[432.S9] A: *En esto anterior* **(señalando el cálculo "** ***6+5 = 11*** **" que escribió al principio de la hoja)** *... serían veintitrés hexágonos ... cerillas ... serían igual a seis más* **(escribiendo "** ***cerillas = 6 +*** n_h ***· 5*****")** *el número de hexágonos ... podríamos poner ene sub hache ...*
[433.S9] I: *¿Estas escribiendo una fórmula?.*
[434.S9] A: *Sí. Una fórmula general para después calcular ... ene sub hache ... por cinco ... a lo que se le restaría cinco ...* **(termina de escribir la fórmula anterior restando cinco al final)** *... porque con esta fórmula el hexágono primero ... que serían seis lados también tendría cinco ... y al restarle cinco y sumársele seis te daría correctamente. Aplicando ... esta fórmula ... sería* **(escribiendo "** ***cerillas = 6 + (23·5)=6 + 115*****")** *cerillas igual ... seis más el número de hexágonos, veintitrés por cinco, ..., serían ...* **(calculando)** *... ciento veintiuna cerillas ... menos cinco cerillas que serían ciento dieciséis* **(escribiendo "** ***121 cerillas - 5 = 116 cerillas*****")**
[435.S9] I: *Razóname otra vez la fórmula general.*

[436.S9] A: *El primer hexágono es de seis lados* **(señalando la figura I)**, *el segundo ... como se le adhiere y ocupa un lado de él, este aquí,* **(señalando lado común a los dos hexágonos en la figura II)** *solamente tendría cinco, estos cinco* **(señalando sobre los lados en la figura II)** *, el tercero tendría otro cinco ... y así sucesivamente ...el primer hexágono es de seis, le sumamos estos seis al número de hexágonos correspondientes por cinco, que serían los lados de ese supuesto hexágono, menos cinco ...*

[437.S9] I: *Y ... esos cinco .. ¿De dónde salen?*

[438.S9] A: *El número de hexágonos que serían veintitrés en este caso, estaríamos hablando de veintitrés hexágonos* **(escribe "*23 hexágonos*")** *, pero no cabe meter aquí uno de ellos que es de seis lados, se le resta cinco para quitar ese hexágono ... habría veintidós hexágonos de cinco lados y uno de seis ...* **(escribe "*22 ® 5 lado*" y debajo "*1 ® 6* ")**

Informe

Árbol de Navidad: Utiliza la estrategia L2. Al final escribe la fórmula 3 + 4·n y durante la entrevista me dice que está mal y la corrige restándole 4. Cuándo me explica por qué ha de corregirla utiliza el tamaño 5 donde comprueba que por la fórmula ha de restar cuatro si quiere obtener el resultado calculado sumando cuatro luces a las luces del árbol de tamaño cuatro.

A-2, I-3.

Hexágonos con cerillas: Para calcular el número de cerillas necesarias para una cadena de veintitrés hexágonos utiliza una fórmula equivalente a la utilizada para el árbol de Navidad. Ha notado que el comportamiento numérico de las dos sucesiones es equivalente y procede a utilizar una fórmula general semejante: 6 + 23·5 -5. Cuándo le pido que me razone de nuevo la fórmula general utiliza el dibujo, y concluye que en una cadena de veintitrés hexágonos habrían 22 hexágonos con 5 lados y sólo un hexágono con 6 lados. Esta es otra fórmula.

A-2, I-1.

El comportamiento en el árbol de Navidad es el equivalente a la estrategia L2. Durante la entrevista corrige la fórmula mostrando un enfoque funcional, sólo comprueba sobre un caso, el tamaño cinco. En la cadena de hexágonos utiliza una expresión semejante a la anterior, signo de que la ha interiorizado y reconoce la situación como equivalente a la anterior . Cuándo le insisto utiliza el dibujo como medio de explicación y deduce la otra expresión, estrategia L1.

Décima entrevista.

Alumno: Cristina Otero Fernández **Curso: 4º E.S.O. (Mat. B)** **S-10**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad": A este alumno se le entregó una versión equivalente al problema pero sin dibujo.

Para los tamaños 4 y 5 responde "*Si un árbol de tamaño 2 necesita 7 luces, y un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces. Entonces un árbol de tamaño 4 necesita 4 luces más. 11+4=15 luces necesita.*
Pues, la diferencia que hay en cada árbol es de cuatro luces cada vez que aumenta el tamaño. Pues se le añade cuatro luces más que al árbol nº4. 15+4=19 luces necesita".

Tamaño 10: "*Pues si un árbol de tamaño 5 lleva 19 luces un árbol de tamaño 10 llevará el doble que el de 5. 19·2=38 luces llevará el árbol".*

Tamaño 20: "*Pues llevará el doble que el árbol tamaño 10. 38·2=76 luces necesita el árbol tamaño 20".*

Tamaño n: " *Para hayar n y el primer número de luces que necesitaría, solo tienes que hacer una suma o una resta con el número de luces inferior y el 4, n=3 (tamaño 1) +4n."*

Diagnóstico: Las cuestiones de generalización próxima y lejana se contestan con la estrategia W2. Sin embargo, para el tamaño n expresa correctamente la relación , según L2.

Árbol de Navidad

[439.S10] I: ¿Cómo supiste que el árbol de tamaño cuatro necesitaba 11+4 luces?
[440.S10] A: ...vi que el tamaño aumentaba de uno en uno, y las luces de cuatro en cuatro según el tamaño de cada árbol, si un árbol de tamaño 3 necesita esas luces (**señala dato 11**), entonces uno de tamaño 4 necesita 11+4 = 15 luces.
[441.S10] I: ¿para el tamaño diez?
[442.S10] A: ...yo calculé cuánto era para un árbol de tamaño 5, 19, luego para 10 llevará el doble, 38.
[443.S10] I: ¿para un árbol de veinte?
[444.S10] A: pues, el doble que el de diez (**respuesta rápida**).
[445.S10] I: Y, ¿de dónde salió esta fórmula?
[446.S10] A: pues, ... el número de luces en el tamaño del árbol, es igual al tamaño más tres...
[447.S10] I: ¿de dónde sale ese 3?
[448.S10] A: ... 3 es el primero..., más, ... según el tamaño que tenga el árbol...
[449.S10] I: Pero, esa fórmula no la aplicaste antes...
[450.S10] A: ... porque aquí, yo multipliqué por ..., sumé todo .... el número del árbol más las cuatro luces...por cada tamaño del árbol serían cuatro luces más...

Hexágonos con cerillas

[451.S10] A: Pues serían, ... 4 hexágonos... (**señala con el bolígrafo el dato numérico que corresponde a 2 hexágonos y luego el dato que corresponde a 3 hexágonos**) ... cada vez que añadimos 1 hexágono sería sumarle cinco cerillas.
[452.S10] I: Explícamelo.

[453.S10] A: Porque la diferencia... si este (**señala fig. 1**) necesita seis, ... y 2 hexágonos (**señala dato fig. 2**), once ... van añadiéndose cinco cerillas, pues en ... aquí (**señala figura 2, la cerilla que comparten los dos hexágonos**) este está unido y luego compruebo aquí (**señala los datos numéricos**).
(**Escribe 16 + 5 = 21 cerillas**).
[454.S10] I: ¿para 23 hexágonos?
[455.S10] A: Pues, 23 por 5 ... (**escribe 23 ´ 5 = 115**)
[456.S10] I: ¿Por qué por 5?
[457.S10] A: Porque cada hexágono que se añade (**señala fig. 3**) son cinco cerillas, ... haría falta cinco cerillas.
[458.S10] I: ¿y para 80 hexágonos?
[459.S10] A: Pues multiplico por cinco.
[460.S10] I: ¿Crees que está bien?
[461.S10] A: Yo creo que sí.
[462.S10] I: ¿Cómo comprobarías que está bien?
[463.S10] A: Pues... dividiendo 115 entre 5 y si me da 23 es que está bien.
[464.S10] I: Pero así lo que compruebas que está bien es el cálculo que has hecho... yo te pregunto por la forma de calcular ...
[465.S10] A: Pues, dibujando el hexágono.
[466.S10] I: Sin dibujar.
[467.S10] A: ... no... no lo sé... no se me ocurre nada... dividiendo esto (**señala el 115**) entre 5...

Informe

Árbol de Navidad: Comprueba que los tamaños van de uno en uno y que las luces van de cuatro en cuatro y, por lo tanto, induce que hay que sumar cuatro al anterior para obtener el siguiente. Para el tamaño diez, conjetura que será el doble que el tamaño cinco (W2) y no comprueba en ninguno de los casos de los que dispone. Al preguntarle por la fórmula escrita para el tamaño "n" observa que como cada tamaño son cuatro luces más, pues debe multiplicar el tamaño por cuatro. No acierta a explicar por qué sumo el número de luces del primer tamaño.

A-3, I-4.

Hexágonos con cerillas: Señala sobre los datos numéricos y observa que van de cinco en cinco. Al insistir sobre el cinco, me explica sobre el dibujo que dos hexágonos unidos comparten un palillo, pero que lo ha descubierto mirando los datos numéricos aportados por el enunciado. Al preguntarle por el número de cerillas necesarias para 23 hexágonos me dice que multiplicando 23 por 5 obtendría el resultado buscado. Le pregunto si le parece que la regla es correcta y me contesta que sí. Al preguntarle que cómo podría asegurarse, no parece entender la pregunta pues utiliza una explicación en la que parte de 115, finalmente me dice que dibujando y contando sobre el dibujo.

A-7, I-7.

El enfoque es claramente numérico. Comete el error de considerar que sumar cinco iteradamente es lo mismo que multiplicar por cinco. Recurre al dibujo para aclarar la explicación, en el árbol de Navidad y recurriría al dibujo en la cadena de hexágonos para comprobar que la regla es cierta. Sin embargo, no siente por sí sola la necesidad de comprobar ninguna regla.

Onceava entrevista

Alumno: Eduardo Martín Díaz. **Curso: 4º E.S.O. - B (Mat. B)** **S-11**

Informe de lo realizado en el problema del "árbol de Navidad": A este alumno se le entregó una versión equivalente al problema pero sin dibujo.

Para los tamaños 4 y 5 responde "*15 luces. Se multiplica 4 ´4 y se le resta 1 = 15 luces o se le suma a 11 un 4 = 15 luces. 19 luces. Se multiplica 5 ´4 = 20 –1=19 luces o se le suma a 15 un 4 =19 luces".*

Tamaño 10: "*39 luces. Se multiplica 4 ´10 y se le resta 1 = 39 luces*".

Tamaño 20: "*79 luces. Se multiplica 4 ´20 y se le resta 1 = 79 luces*".

Tamaño n: "*Es Q luces. A N le suman cuatro letras y da = Q. Ejemplo N=M+O+P+Q=Q luces."*

Diagnóstico: L1.

Árbol de Navidad

[468.S11] I: Explícame cómo obtuviste que hacia falta 15 luces para el árbol de tamaño 4.
[469.S11] A: Empece... haciendo... sumando... se suma... iba de 4 en 4... empece sumando a cada uno 4... y al llegar al tamaño 10... ya era demasiado para sumar de 4 en 4... entonces ...empece a buscar una fórmula para que ... por ejemplo el tamaño 4, entonces con los datos que tenía, como va de 4 en 4, entonces busqué una fórmula para que me diera 15, ...4×4 me daba 16, me faltaba...restar 1 para 15, se lo resté...en el siguiente hice lo mismo y me daba 19...20 resto 1 y me da 19. Y luego lo apliqué aquí 4×10 y resto 1... aquí 20, 4×20 y resto 1.

Hexágonos con cerillas

[470.S11] A: (...) (**escribe 16+5=21**).
[471.S11] I: Explícame lo que haces.
[472.S11] A: Miré los números que había, cuántas cerillas para cada hexágono... de 6 a 11 van 5 y también de 11 a 16 van 5.
[473.S11] I: Y para 23 hexágonos...
[474.S11] A: (...)
[475.S11] I: ¿Qué piensas?
[476.S11] A: Estoy buscando una fórmula...
[477.S11] I: Si tuvieras 5 hexágonos ¿qué harías?
[478.S11] A: (**escribe 21+5= 26**).
[479.S11] I: Y para 6 hexágonos...
[480.S11] A: Le sumo a 26 el 5.
[481.S11] I: Entonces, para 23 hexágonos...
[482.S11] A: ... no consigo sacarlo...
[483.S11] I: ¿Qué?
[484.S11] A: Estoy pensando cómo hacerlo...
[485.S11] I: ¿Cómo sería para 20 hexágonos?
[486.S11] A: Creo que es 39... no, no ....

[487.S11] I: Explícame...
[488.S11] A: (después de más de un minuto), sería dividiendo 20 por 6 y restándole 4... no, no... multiplicar 20 por 6 y restarle 4...
[489.S11] I: ¿Por qué?
[490.S11] A: Sí, multiplicando 5 por ... multiplicando por ejemplo (señala figura tamaño 3) en este caso 3 hexágonos, 3 por 6 ... no, no,
[491.S11] I: Trata de explicar...
[492.S11] A: Van de 5 en 5... por 5, y ...
[493.S11] I: Luego...
[494.S11] A: ...no lo sé... no puedo sacarlo... no sé... estoy bloqueado...

Informe

Árbol de Navidad: Para los tamaños 4 y 5 sumo cuatro al número de luces necesarias para los tamaños 3 y 4 respectivamente. Después al ir a calcular el número de luces para el tamaño diez le pareció demasiado sumar cuatro y fue cuando se le ocurrió probar una fórmula. Empezó probando con los datos que tenía para el tamaño 4, sumaba 4 siempre y entonces 4×4 le daba 16 y tendría que dar 15, luego al resultado de multiplicar el tamaño por cuatro le restó la unidad. Comprobó que esa regla servía para el tamaño cinco y luego la aplicó al tamaño veinte.

A-4, I-5.

Hexágonos con cerillas: No se fija en el dibujo. Observa que de 6 a 11 van 5 y lo mismo de 11 a 16. Luego para la cadena de 4 hexágonos suma 5 al número de cerillas necesarias para la cadena de 3 hexágonos. Cuándo le pregunto por el número de cerillas necesarias para una cadena de 20 hexágonos intenta buscar una fórmula, intenta multiplicar el tamaño de la cadena por 6, y restar 4 (parece que emplea la expresión 6n-(n-1), pero comete un error en la cantidad a restar). Lo intenta con 5 y me dice que está bloqueado, que no encuentra la fórmula.

Varias acciones, no concluye en un invariante.

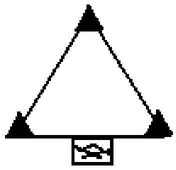
Claramente muestra un enfoque numérico funcional. Por inspección y ajuste busca la regla. La comprueba sobre algún dato numérico y la generaliza. Parece que en un momento ha utilizado el dibujo...

Anexo III

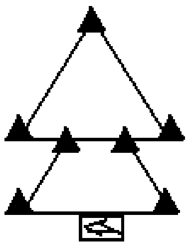
Tareas. Problemas de generalización lineal

Tarea utilizada en los tres estudios según objetivos señalados en los correspondientes capítulos. El formato aquí presente corresponde a la prueba inicial del Estudio segundo.

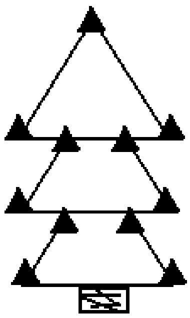
ÁRBOL DE NAVIDAD



Un árbol de tamaño 1 necesita 3 luces.



Un árbol de tamaño 2 necesita 7 luces.



Un árbol de tamaño 3 necesita 11 luces.

1. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 4?
2. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 5?

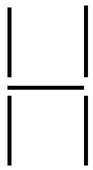
Explica cómo respondes a las cuestiones utilizando tus propias palabras.

3. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 10?
4. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño 20

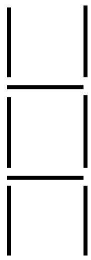
5. ¿Cuántas luces necesitará un árbol de tamaño n?

Tarea utilizada en primer estudio, según el formato ilustrado en el Capítulo 3.

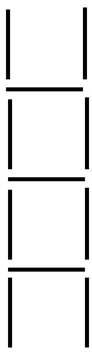
ESCALERA



La escalera tiene tamaño 1 y está formada por 5 palillos.



La escalera tiene tamaño 2 y está formada por 8 palillos.



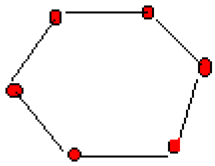
La escalera tiene tamaño 3 y está formada por 11 palillos.

1. ¿Cuántos palillos serán necesarios para una escalera de tamaño 4?
2. ¿Cuántos palillos serán necesarios para una escalera de tamaño 5?
3. ¿Cuántos palillos serán necesarios para una escalera de tamaño 10?
4. ¿Cuántos palillos serán necesarios para una escalera de tamaño 20?
5. Explica cómo has respondido a las cuestiones anteriores y utiliza tus propias palabras para describir el procedimiento o regla empleado en cada caso.
6. Ahora se trata de expresar el procedimiento o regla según el lenguaje del álgebra. ¿Cuántos palillos serán necesarios para una escalera de tamaño n?

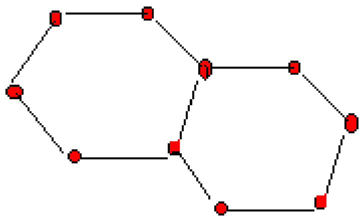
Tarea utilizada para las entrevistas del estudio segundo y la prueba final del tercer estudio, Junio de 1997.

HEXÁGONOS CON CERILLAS

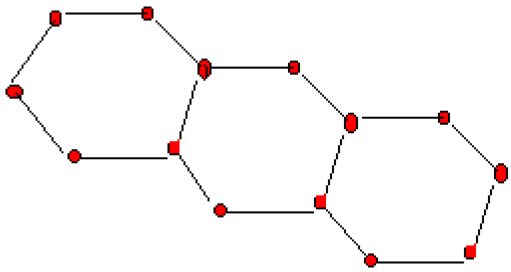
Con cerillas podemos construir un hexágono.



Un hexágono necesita 6 cerillas.



Dos hexágonos necesitan 11 cerillas.



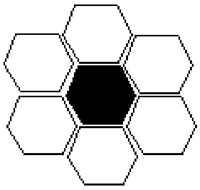
Tres hexágonos necesitan 16 cerillas.

¿Cuántas cerillas necesitan 4 hexágonos?

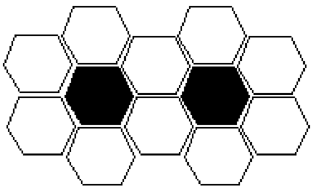
Tarea utilizada durante las sesiones de aula del Estudio tercero.

PAVIMENTOS

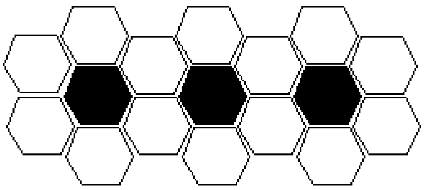
Tenemos jardineras de base hexagonal y el pavimento alrededor se realiza con baldosas también hexagonales.
Los siguientes dibujos ilustran la situación, los hexágonos negros representan la jardinera y los blancos las baldosas.



Si tenemos una jardinera necesitamos 6 baldosas.



Si tenemos 2 jardineras necesitamos 10 baldosas.



Si tenemos 3 jardineras necesitaremos 14 baldosas.

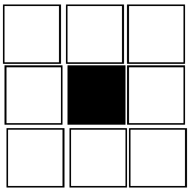
Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Cuántas baldosas necesitaremos si tenemos 4 jardineras?
2. ¿Cuántas baldosas necesitaremos si tenemos 5 jardineras?
3. ¿Cuántas baldosas necesitaremos si tenemos 10 jardineras?
4. ¿Cuántas baldosas necesitaremos si tenemos 20 jardineras?
5. Explica cómo has respondido a las cuestiones anteriores y utiliza tus propias palabras para describir el procedimiento o regla empleado en cada caso.

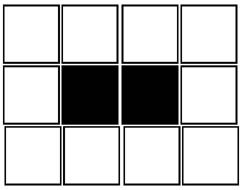
6. Ahora se trata de expresar el procedimiento o regla según el lenguaje del álgebra. ¿Cuántas baldosas necesitaremos si tenemos “ n “ jardineras?

Tarea utilizada durante las sesiones de aula del estudio tercero.

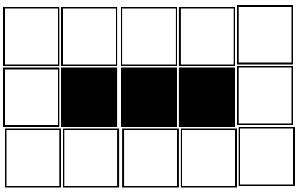
BALDOSAS CUADRADAS



Una baldosa negra necesita 8 baldosas blancas para rodearla completamente.



Dos baldosas negras necesitan 10 baldosas blancas.



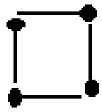
Tres baldosas negras necesitan 12 baldosas blancas.

1. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 4 baldosas negras alineadas?
2. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 5 baldosas negras alineadas?
3. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 10 baldosas negras alineadas?
4. ¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a 20 baldosas negras alineadas?
5. Explica cómo has respondido a las cuestiones anteriores y utiliza tus propias palabras para describir el procedimiento o regla empleado en cada caso.
6. Ahora se trata de expresar el procedimiento o regla según el lenguaje del álgebra.

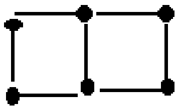
¿Cuántas baldosas blancas serán necesarias para rodear completamente a n baldosas negras alineadas?

Tarea utilizada durante las sesiones de aula del estudio tercero.

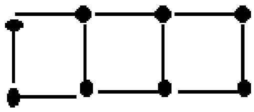
CUADRADOS CON CERILLAS



Si el objeto es de tamaño 1 necesitamos 4 cerillas.



Si el objeto es de tamaño 2 necesitamos 7 cerillas.

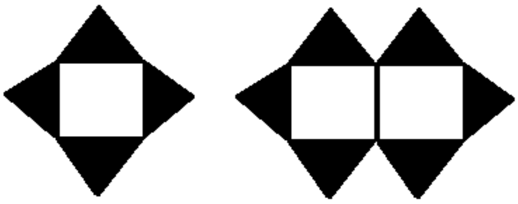


Si el objeto es de tamaño 3 necesitamos 10 cerillas.

1. ¿Cuántas cerillas serán necesarias para un objeto de tamaño 4?
2. ¿Cuántas cerillas serán necesarias para un objeto de tamaño 5?
3. ¿Cuántas cerillas serán necesarias para un objeto de tamaño 10?
4. ¿Cuántas cerillas serán necesarias para un objeto de tamaño 20?
5. Explica cómo has respondido a las cuestiones anteriores y utiliza tus propias palabras para describir el procedimiento o regla empleado en cada caso.
6. Ahora se trata de expresar el procedimiento o regla según el lenguaje del álgebra. ¿Cuántas cerillas serán necesarias para un objeto de tamaño n?

Tarea utilizada para la prueba final del estudio tercero. Diciembre 1996

Observa los dibujos siguientes:



Para rodear un cuadrado utilizamos cuatro triángulos
Para rodear dos cuadrados necesitamos seis triángulos:

El profesor ha preguntado ¿Cuántos triángulos harían falta para rodear 30 cuadrados unidos por un lado?

A continuación están los cálculos de cuatro alumnos:

José: $2 \times 30 = 60$, $60 + 4 = 64$. Solución: Necesitaríamos 64 triángulos.
Luisa: $30 + 30 = 60$, $60 + 1 + 1 = 62$. Solución : 62 triángulos.
Jonathan: Si dos cuadrados necesitan 6 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitan: 90 triángulos, ya que $30 = 2 \times 15$ y $15 \times 6 = 90$.
Ana: Si 1 cuadrado necesita 4 triángulos, entonces 30 cuadrados necesitaran $4 \times 30 = 120$ triángulos.

a) ¿Cuál de las soluciones es correcta? Explica detenidamente tu elección.

b) Explica en qué fallan las incorrectas.