Homotopía propia simplicial

José Manuel García Calcines.

A ANGELA.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi director, Luis Javier Hernández Paricio, por su dedicación, orientaciones y formación recibida en la elaboración de esta memoria, así como el trato afectivo que me ha brindado en todo momento.

También a mi director, Sergio Rodríguez Machín, por haberme introducido en la investigación matemática con sus enseñanzas en homotopía axiomática, sus valiosos consejos y sus amenas e interesantes charlas.

Hago extensivo el agradecimiento a los miembros del Area de Geometría y Topología del Departamento de Matemática Fundamental de la Universidad de La Laguna por su apoyo incondicional y ayuda desinteresada, en especial a Loreto Figueruelo y a Angel Montesdeoca. Así mismo, a los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, que hicieron que me sintiera como en mi propia casa durante mis cortas estancias en dichas Universidades.

Por último, quiero agradecer a mis padres que pusieran todos los medios y facilidades a mi alcance y no dejaran que me desanimara en los momentos más difíciles.

Contenido

Introducción.

La teoría de homotopía propia tiene como uno de sus principales objetivos el estudio de los espacios no compactos. El primer invariante de homotopía propia fue el de “punto ideal”, definido en 1923 por B. Kerékjárto [52], que dio una clasificación de las superficies no compactas. En 1931, H. Freudenthal [35] generalizó dicho invariante para cualquier espacio topológico con el denominado “punto final”.

Posteriormente, en 1965, L. Siebenmann [72] dio condiciones necesarias y suficientes para que una n-variedad diferenciable, con $n \geq 6$, fuera el interior de una variedad compacta con borde. En su trabajo asoció nuevos invariantes a los finales semiestables de Freudenthal, utilizando el grupo fundamental y límites inversos de grupos. Más tarde proponía en su trabajo de 1970 [73] que, para el estudio de los espacios no compactos las hipótesis de homotopía deberían darse en la categoría de las aplicaciones propias mejor que en la de todas las aplicaciones continuas.

Respecto a los primeros invariantes de homotopía propia con estructura de grupo, en 1974, E.M. Brown [10] definió grupos de homotopía propia. Estos grupos están asociados a un espacio X no compacto y a un final de Freudenthal, representado por un rayo propio $\alpha : [0, \infty) \to X$. Definió estos grupos como clases de homotopía propia relativa a $[0, \infty)$ de gérmenes de aplicaciones propias de $\underline{S}^n$ en X, donde $\underline{S}^n$ se construye a partir del invervalo $[0, \infty)$ pegando una n-esfera basada en cada entero. En este trabajo, Brown caracterizó las equivalencias de homotopía propia en la categoría de los complejos simpliciales conexos localmente finitos y de dimensión finita en función de estos nuevos grupos y de los grupos de Hurewicz π_n. También definió el funtor $\mathcal{P}$ que permite calcular los grupos de homotopía propia a partir de sistemas inversos de los grupos de homotopía.

También, Z. Čerin [17], en 1980 define una noción diferente de grupo de homotopía propia, como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones propias que conservan el rayo base de $S^n \times [0, \infty)$ en X.

Una técnica usada para el estudio de homotopía propia es el empleo de los sistemas inversos de espacios o proespacios. La conexión consiste en asignar al espacio X el sistema inverso de la clausura de los complementarios de sus compacto-cerrados:

$$\varepsilon(X) = \{Cl(X\text{-}K) : K \text{ es compacto y cerrado en } X\}.$$

Este sistema inverso se denomina proespacio final asociado a X y define un funtor ε que permite comparar categorías de homotopía propia con categorías homotópicas de proespacios.

La construcción de una categoría que tuviera como objetos sistemas inversos de espacios y la definición de morfismos entre sistemas inversos con distintos conjuntos de índices fue realizada por A. Grothendieck [43]. Asociada a una categoría $\mathbf{C}$ construyó la categoría $\mathbf{proC}$ cuyos objetos son los sistemas inversos de $\mathbf{C}$ indexados por categoría filtrantes y cuyos morfismos son tales que hacen a los sistemas cofinales isomorfos.

En 1967, D. Quillen [68] introdujo la noción de categoría de modelos cerrada, consistente en una categoría $\mathbf{C}$, junto con tres clases de morfismos: cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles, satisfaciendo seis axiomas que dan condiciones suficientes para desarrollar una teoría de homotopía en $\mathbf{C}$ y que traslada el problema de encontrar invariantes a probar que ciertas categorías, con los morfismos adecuados, son de Quillen. También, en 1973, K.S. Brown [11] desarrolla una teoría diferente a la de Quillen para poder aplicarla a algunas categorías de haces. Recientemente, H.J. Baues [4] ha introducido la noción de categoría cofibrada, una forma más débil de la axiomática de Quillen, con axiomas más sencillos y un mayor número de ejemplos. En su trabajo estudia también las categorías con cilindro natural, axiomática de homotopía funtorial y caso particular de categoría cofibrada. Existen otras teorías de homotopía basadas en funtores. En categorías aditivas, la más amplia desarrollada hasta el momento es la dada por S. Rodríguez-Machín [63], [71] con la noción de categoría aditiva con cono natural, que usa un funtor cono y axiomas similares a los de categoría con un cilindro natural.

En la utilización de técnicas axiomáticas cabe destacar los trabajos de T. Porter, W. Grossman y Edwards y Hastings. En 1974, T. Porter [65] introdujo una procategoría homotópica de conjuntos simpliciales, **Ho(proSS)**, invirtiendo formalmente aquellos morfismos de **proSS** que, salvo isomorfismo, se podían representar como un sistema inverso de equivalencias débiles (de homotopía) de **SS**. Después, en 1976 [66], desarrolló esta idea en un contexto más abstracto. Probó que si **C** es una categoría con una estructura axiomática de Brown, entonces se puede dotar a **proC** de una nueva estructura de Brown.

W. Grossman, en 1975 [41] da una estructura de categoría de modelos cerrada a la categoría de torres de conjuntos simpliciales, **towSS**. También definió grupos de homotopía de proespacios [42] utilizando técnicas similares a las de Brown, definidos mediante "racimos" de n-esferas, determinando los llamados grupos de Brown-Grossman.

En 1976, Edwards y Hastings [21] por una parte, recogen las ideas de T. Porter, al considerar categorías homotópicas obtenidas al invertir equivalencias débiles por niveles, y por otra, las también mencionadas de Grossman, que daba una estructura de categoría de modelos cerrada a **towSS**. Probaron que si **C** es una categoría de modelos cerrada, con propiedades adicionales, entonces **proC** admite también una estructura cerrada de modelos de Quillen. De los resultados de Edwards y Hastings también se destacan sus teoremas de incrustación, considerando las categorías $\mathbf{P}_\sigma$ de espacios σ-compactos y Hausdorff con aplicaciones propias y $(\mathbf{P}_\sigma)_\infty$ con los mismos objetos de $\mathbf{P}_\sigma$ y cuyos morfismos son gérmenes de aplicaciones propias. Con el proceso de asignar a cada espacio su proespacio final se definen los funtores,

$$\mathbf{Ho}((\mathbf{P}_\sigma)_\infty) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{proTop}),$$

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{P}_\sigma) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{proTop}, \mathbf{Top}),$$

que Edwards y Hastings probaron que son incrustaciones plenas. Aquí, la categoría **(proTop,Top)** es aquella que tiene como objetos morfismos $X \to Y$, donde X es un proespacio e Y un espacio topológico considerado como proespacio.

Apoyándose en estos encajes, L.J. Hernández y T. Porter [47] dieron en 1988 una definición alternativa de los grupos de Čerin y por otra parte modificaron la definición de los grupos de Brown-Grossman introduciendo versiones globales de dichos grupos.

En relación con teoremas de incrustación, destaca también el trabajo de Bassendoski [6] que introduce la noción de espacio filtrado, que es un proespacio global X de $(\mathbf{proTop}, \mathbf{Top})$ tal que $limX_i = \emptyset$, y las aplicaciones de transición son inyectivas. Observó que la categoría de los CW complejos localmente finitos y aplicaciones propias se puede representar como una subcategoría plena de la categoría de los espacios filtrados que a su vez es una subcategoría plena de $(\mathbf{proTop}, \mathbf{Top})$. Este enfoque es diferente al de Edwards-Hastings.

Uno de los problemas existentes en la categoría de los espacios y aplicaciones propias, $\mathbf{P}$, es que no verifica la axiomática de Quillen, que exige, en el axioma **M0**, tener límites y colímites finitos, pues la categoría $\mathbf{P}$ no tiene objeto final y en general no existen push-outs. Una forma de establecer un marco de trabajo en teoría de homotopía propia, es escoger axiomáticas menos restrictivas, como la noción de categoría cofibrada. En este sentido se demuestra que $\mathbf{P}$ tiene estructura de categoría cofibrada [14].

Existen otras posibilidades, por ejemplo, se puede embeber $\mathbf{P}$ en una categoría completa y cocompleta y usar teorías de homotopía que asuman la existencia de límites y colímites. En esta dirección, se tiene el embebimiento de Edwards y Hastings de la subcategoría de $\mathbf{P}$ de los espacios σ-compactos, Hausdorff y localmente compactos en la categoría de homotopía de proespacios. Una desventaja de este embebimiento es la gran restricción hecha en $\mathbf{P}$. Otro problema es que las contrucciones homotópicas producen proespacios que muchas veces no pueden ser interpretados geométricamente como un espacio.

García-Pinillos [38] propone en su tesis una nueva solución, introduce la noción de espacio exterior, de forma que la categoría de los espacios exteriores, $\mathbf{E}$, es completa y cocompleta y demuestra que $\mathbf{P}$ se puede considerar como una subcategoría plena suya. Además, $\mathbf{E}$, tiene varias estructuras de categoría de modelos cerrada.

Por otro lado, la obtención de modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios topológicos ha sido un objetivo primordial en la homotopía algebraica. Uno de los primeros modelos con información algebraica sobre tipos de homotopía fueron los complejos de cadenas de grupos abelianos. En su estudio tuvo lugar un proceso de algebraización de la teoría de homotopía topológica que produjo el concepto de homotopía entre aplicaciones de cadenas.

La obtención de adecuados modelos algebraicos para tipos de homotopía de espacios ha conducido, con el tiempo al intento de hacer teoría de homotopía con tales modelos algebraicos con el objetivo de utilizar métodos algebraicos que aparecen más simples que aquellos de los espacios topológicos.

En los años 50, D. Kan [50] y J.C. Moore [62] desarrollan las técnicas simpliciales, introduciendo las nociones de conjunto simplicial, grupo simplicial y grupo abeliano simplicial . Probaron que la categoría homotópica de los conjuntos simpliciales de Kan es equivalente a la categoría homotópica de los CW complejos y que la categoría homotópica de los grupos simpliciales es equivalente a la categoría homotópica de CW complejos basados y 0-conexos. Las teorías de homología y cohomología también se desarrollaron haciendo algunas versiones que utilizaban grupos abelianos simpliciales. De este modo, las categorías de homotopía en categorías abelianas se utilizaron como una aproximación a las categorías de homotopía de espacios. Esta perspectiva permite entonces, disponer, para el estudio de objetos geométricos, de lenguajes y herramientas que podrían ser más simples al ser tratados con esta óptica abstracta.

El objetivo principal de esta memoria es el de desarrollar las técnicas simpliciales para las categorías de homotopía propia, buscar los modelos axiomáticos adecuados para dichas categorías y desarrollar las teorías de homología derivadas de las construcciones simpliciales correspondientes, concretamente:

- encontrar nociones análogas a la de conjunto simplicial para el estudio de los invariantes del infinito de un espacio no compacto;

- encontrar categorías simpliciales adecuadas para el desarrollo de teorías de homología invariantes por homotopía propia;

- buscar aquellos modelos axiomáticos que sean verificados por las categorías y teorías de homotopía encontradas para así disponer de las propiedades generales de estos modelos;

- y aplicar la maquinaria simplicial para poder calcular dichos invariantes homológicos.

El marco de trabajo usado para la categoría propia será la categoría de los espacios exteriores. Para ello se desarrolla más esta nueva categoría, dando nuevos resultados, de gran interés, que demostrará la utilidad de $\mathbf{E}$ como una herramienta eficaz para el estudio de la homotopía propia.

Siguiendo todas estas ideas esta memoria se ha estructurado en tres partes:

La primera consiste en un capítulo 0 de preliminares, donde se establecen nociones y resultados bien conocidos sobre categorías simpliciales, de modelos cerrada y categorías de prehaces, resultados importantes para el desarrollo de la memoria. Destaca un elegante teorema que permite construir funtores del tipo realización geométrica en una gran variedad de contextos.

La segunda parte abarca desde el capítulo 1 hasta el 3 y está constituida por una nueva estructura homotópica para los espacios exteriores, una elaborada construcción de modelos de tipo simplicial e invariantes de homología derivados de éstos.

En el primer capítulo se hace un desarrollo más amplio y exhaustivo de $\mathbf{E}$, surgiendo generalizaciones y nuevas nociones, así como resultados. En este sentido, en la primera sección se comprueba el hecho de que $\mathbf{E}$ es equivalente a $\mathbf{Top}_\infty$, la categoría de los espacios topológicos punteados (X, x_0) donde $\{x_0\}$ es un cerrado en X, cuyos morfismos son las aplicaciones continuas punteadas tales que el único punto que va al punto distinguido del espacio punteado codominio es el punto distinguido del espacio punteado dominio.

En la segunda sección se generalizan leyes exponenciales, en concreto,

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X),$$

para X, Z espacios exteriores, X con ciertas propiedades adicionales, e Y espacio topológico, que establece una conexión entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{Top}$. Y

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y),$$

con X, Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto, importante, por ejemplo, para dar la adjunción entre el funtor cilindro y el funtor cocilidro.

En la tercera sección se enriquece la estructura de modelos cerrada dada por García-Pinillos, que aquí se denomina *e-estructura*, con una estructura de categoría simplicial compatible suya. Por otro lado, se consideran en $\mathbf{E}$ unos nuevos morfismos:

- g-equivalencias débiles (resp. g-fibraciones), que son equivalencias débiles (resp. fibraciones) en el sentido de García-Pinillos, tales que al olvidar su estructura exterior son equivalencias débiles clásicas, en **Top**;

- g-cofibraciones, que son aquellos que verifican la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las g-fibraciones triviales.

Con estos morfismos, se demuestra que **E** es una categoría simplicial de modelos cerrada (*g-estructura*). Unos objetos cofibrantes en esta categoría son los denominados *gCW complejos*. Un gCW complejo es un cierto espacio exterior X dotado de una filtración,

$$\emptyset = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset ... \subset X^n \subset ...$$

de forma que el n-esqueleto se obtiene del (n-1)-esqueleto pegando celdas de dos tipos: las clásicas celdas compactas y un tipo de celdas no compactas.

En estos espacios las equivalencias de homotopía exterior se podrán caracterizar con los grupos de homotopía de tipo Brown y con los grupos de homotopía clásicos, mediante un teorema de tipo Whitehead, que tendrá una adaptación para la categoría **P**.

En la cuarta y última sección del capítulo se comparan las distintas estructuras homotópicas de **E** entre sí, la e-estructura y la g-estructura, y con la de **Top**. En primer lugar, de la clara adjunción con las identidades en **E**, se prueba la existencia de una adjunción,

$$\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho}_{\mathrm{e}}(\mathbf{E}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(id).$$

donde $\mathbf{Ho}_{\mathrm{e}}(\mathbf{E})$ denota a la categoría localizada de **E** con la estructura de modelos derivada de la e-estructura, y $\mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E})$ a la localizada de **E** con la estructura derivada por la g-estructura. Además, $\underline{\underline{L}}(id)$ es un embebimiento.

Por otro lado, se demuestra otra adjunción:

$$\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(U),$$

donde U es el funtor que olvida la estructura exterior, y $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$ es aquel funtor que a cada espacio topológico le considera como externología su topología. Aquí, también, $\underline{\underline{L}}(V)$ es un embebimiento.

El segundo capítulo es de naturaleza más algebraica. En él se presentan los M-conjuntos simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores como modelos algebraicos para $\mathbf{E}$.

En las secciones uno y dos se estudia el primer modelo mencionado, que no es más que la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos con la acción de un determinado monoide M. Se define en esta categoría:

- equivalencia débil (resp. fibración), a aquellos morfismos que al olvidar la acción del monoide es equivalencia débil (resp. fibración) en conjuntos simpliciales;
- y cofibración, a aquellos morfismos que verifican la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las fibraciones triviales.

Con estos morfismos se demuestra que tiene estructura de categoría simplicial de modelos cerrada, resultado ya verificado por Hernández Paricio en [44], pero que aquí se hace de una forma diferente, más directa.

A continuación se compara dicho modelo con $\mathbf{E}$, viéndose la existencia de una adjunción del tipo singular-realización, adjunción que se hereda en las categorías localizadas respectivas, proceso que necesita muchas comprobaciones previas. También se introduce, asociado a cada espacio exterior X, y vía un M-conjunto simplicial, un conjunto simplicial, denominado *prismas infinitos*, cuyos grupos de homotopía recogen información sobre los grupos de homotopía de tipo Steenrod de X.

En las dos siguientes secciones se estudia la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores, comprobando tener una estructura de categoría simplicial, dotada de tensor y exponenciación en el sentido de Quillen y, al igual que con los M-conjuntos simpliciales, la existencia de una adjunción del tipo singular-realización con los espacios exteriores. Para esta adjunción se hace uso de la ya existente entre los conjuntos simpliciales y los espacios topológicos. Se destaca la extensión de la noción de exterior a ésta y a otras categorías como conjuntos (resp. grupos abelianos) exteriores y grupos abelianos simpliciales exteriores, así como también para funtores. En esta línea también se estudia la categoría de objetos simpliciales de los conjuntos exteriores, que es categoría simplicial, así como una relación funtorial con el modelo en cuestión, que preserva cilindros, importante para demostrar la invarianza por homotopía en ciertos invariantes que se definirán más tarde.

Para finalizar el capítulo se estudia la categoría de los grupos abelianos simpliciales exteriores, demostrando tener propiedades similares a la de los conjuntos simpliciales exteriores, en concreto, también es una categoría simplicial. Se dan dos relaciones funtoriales: por un lado, un funtor que relaciona esta categoría con la de objetos simpliciales de los grupos abelianos exteriores, que preserva cilindros. Por otro, mediante adjunciones del tipo libre-olvido con las categorías análogas de conjuntos.

En el tercer capítulo, último de esta segunda parte, se estudian invariantes de naturaleza homológica para $\mathbf{E}$, en concreto la M-homología, u homología con la acción del monoide M, y la $\mathfrak{R}$-homología. Antes se hace un análisis de las distintas categorías de complejos de cadenas, así como de las categorías exteriores de complejos de cadenas, creadas partiendo de categorías en las que intervienen los grupos abelianos con las nociones de exterior y simplicial vistos en el anterior capítulo. Estas relaciones se harán a través de funtores de tipo Moore y de sumas alternas, aunque el que se utilizará realmente es este último. Posteriormente se hace un estudio totalmente algebraico del anillo de las matrices localmente finitas con coeficientes enteros y el funtor $\mathcal{P}$ de Brown, importantes para la construcción de la $\mathfrak{R}$-homología. Destaca la existencia de un funtor adjunto a izquierda suyo, adjunción que se hereda en las respectivas categorías de complejos de cadenas positivos. En la última sección se trabaja con la homología en sí. Finalmente se estudian las homologías que surgen cuando existe la acción del monoide y en la que interviene el anillo $\mathfrak{R}$, demostrándose tener riqueza en propiedades, como existencia de sucesiones exactas largas de homología, invarianza por homotopía exterior, etc. Cabe destacar también la creación en la $\mathfrak{R}$-homología de un algoritmo de cálculo para una amplia clase de gCW complejos. Para ello se define el *complejo de cadenas $\mathfrak{R}$-celular* de X como

$$C_n^{\mathfrak{R}cel}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}),$$

con operador frontera

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde δ_* es el homomorfismo de conexión y j_{n-1} el inducido por la inclusión, demostrándose que los grupos de homología del gCW complejo X son los de su complejo de cadenas $\mathfrak{R}$-celular asociado.

La última parte de la memoria consta de un solo capítulo y está dedicado al estudio de otras homologías en los espacios exteriores que se derivan de las ya estudiadas: la homología tubular y la tubular cerrada. Estas homologías tienen especial importancia en el estudio del final de un espacio exterior y tienen como análogos la homología del final y la localmente finita respectivamente de un espacio topológico. Entre sus propiedades destacan la existencia de una sucesión exacta larga de homología, invarianza por homotopía exterior, aditividad finita y teoremas de tipo escisivo.

En 1940 Steenrod [75] definió grupos de homología para los espacios métrico-compactos basados en ciclos regulares. Posteriormente, en 1961, J. Milnor [59] dio una caracterización axiomática para este tipo de grupos en la categoría de los pares de espacios métrico-compactos.

Para un CW complejo contable y localmente finito resulta que la homología reducida de Steenrod de su compactificación de Alexandroff es precisamente la homología celular basada en ciclos infinitos; es decir se toma el complejo formado por un producto de cíclicos infinitos donde el conjunto de índices de dicho producto es el cardinal de las celdas de la dimensión correspondiente y el operador borde es el inducido por los números de incidencia de dichas celdas.

La importancia de la homología tubular cerrada radica en que, para CW complejos, K, localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión su homología celular localmente finita coincide, salvo un salto de dimensión, con la homología tubular cerrada K dotado de cierta estructura de gCW complejo, teniéndose como consecuencia que la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto X es isomorfa a la homología tubular cerrada de su complejo fundamental de Lefschetz asociado [53], también llamado construcción telescópica de Milnor. Este apartado cierra la memoria.

Como posible línea de continuación a este trabajo se propone estudiar los grupos simpliciales exteriores y categorías de M-grupos simpliciales, donde M es un monoide, con métodos análogos a los utilizados en [12], [15] y [39]. También, las técnicas desarrolladas en [25], [29] y [30] pueden ser de utilidad en un estudio del n-tipo de un espacio exterior y sus aplicaciones a homotopía propia y teoría de la forma, así como las de [16] para un análisis de los espacios exteriores con grupos de homotopía de torsión.

En esta memoria el autor ha contado con la importante financiación conjunta de:

- El proyecto PB96-0740 titulado "Modelos homotópicos", de la Dirección General de Enseñanza Superior y el proyecto API-98/B14, de la Universidad de La Rioja;
- Proyecto precompetitivo nº 23386/97 de la Universidad de La Laguna, titulado "Homotopía cónica y un modelo algebraico para la homotopía propia";
- Una beca para estancias en otros centros de la Dirección General de Universidades, de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, cuya convocatoria fue efectuada por Orden de 3 de julio de 1997 (B.O.C. de 16 de julio).

Capítulo 0

Preliminares: Categorías notables.

Este capítulo está centrado en dar nociones y resultados preliminares con los que se trabajará en la memoria. Se recuerda las definiciones de categorías de modelos cerrada, simplicial y simplicial de modelos cerrada, así como la categoría de prehaces, analizando algunas de sus propiedades más importantes.

0.1 Categoría de modelos cerrada.

Sin duda alguna, una de las teorías de homotopía abstracta más extendidas y consistentes es la desarrollada por Quillen [68]. En 1967 introdujo la axiomática de categoría de modelos cerrada reflejando sus axiomas propiedades suficientes para desarrollar una teoría de homotopía.

Definición 0.1.1 Una *categoría de modelos* es una categoría $\mathbf{C}$ junto con tres clases de morfismos, llamados *fibraciones*, *cofibraciones* y *equivalencias débiles*, tales que verifican los axiomas siguientes:

M0: $\mathbf{C}$ es cerrada respecto a límites y colímites finitos.

M1: Dado un cuadrado conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde i es cofibración, p es fibración y uno de ellos es, además, equivalencia débil, entonces existe un morfismo $h : B \to X$ que hace los triángulos conmutativos. A este morfismo se le denomina *elevación del diagrama.*

Los morfismos que sean simultáneamente fibraciones y equivalencias débiles se llamarán *fibraciones triviales.* Similarmente *cofibraciones triviales* para cofibraciones y equivalencias débiles.

M2: Todo morfismo se puede factorizar de dos formas:

(i) $f = pi$, donde i es cofibración y p fibración trivial.

(ii) $f = qj$, donde j es cofibración trivial y q fibración.

M3: La composición de fibraciones es fibración, la inducida en un pull-back de una fibración es fibración y todo isomorfismo es fibración. Análogamente, la composición de cofibraciones es cofibración, la inducida en un push-out de una cofibración es cofibración y todo isomorfismo es cofibración.

M4: La inducida en un pull-back de una fibración trivial es, además, equivalencia débil, y la inducida en un push-out de una cofibración trivial es, también, equivalencia débil.

M5: Para dos morfismos,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \ ,$$

si dos cualesquiera de f, g y gf son equivalencias débiles, también lo es el tercero. Todo isomorfismo es equivalencia débil.

Saber cuándo un morfismo, que sale de un push-out y llega a otro, es equivalencia débil, resulta ser, muchas veces, necesario.

Proposición 0.1.1 *Sea* **C** *una categoría de modelos, y sea*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & X_1 \arrow[d, "\beta"'] \\ Y_0 & Y \arrow[l, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo en **C***, donde* α *,*β *y* γ *son equivalencias débiles y en cada fila de morfismos al menos uno es cofibración. Entonces la inducida en los push-outs,* $\alpha \cup \beta : X_0 \cup_X X_1 \to Y_0 \cup_Y Y_1$ *es equivalencia débil.*

Invirtiendo el sentido de las flechas, sustituyendo cofibración por fibración y push-out por pull-back, se tiene el resultado dual. Véase para una demostración, por ejemplo, [4].

Definición 0.1.2 Dados f, g morfismos de **C**, si para cualquier diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y, \end{tikzcd}$$

existe una elevación $h : B \to X$, se dirá que f tiene la *propiedad de elevación a izquierda (P.E.I.)* respecto de g. Similarmente se dirá que g tiene la *propiedad de elevación a derecha (P.E.D.)* respecto de f.

Definición 0.1.3 Sea X un objeto de **C**. Un *cilindro* para X es una factorización del morfismo codiagonal,

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "id+id"] \arrow[dr, "\delta_0+\delta_1"'] & & X \\ & X', \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\delta_0 + \delta_1$ es una cofibración y σ una equivalencia débil. Dualmente, un *cocilindro* para X es una factorización del morfismo diagonal,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "{(id,id)}"] \arrow[dr, "s"'] & & X \times X \\ & X'', \arrow[ur, "{(d_0,d_1)}"'] & \end{tikzcd}$$

donde (d_0, d_1) es una fibración y s una equivalencia débil.

Se denotará por $\emptyset$ al objeto inicial de $\mathbf{C}$, y por $*$ al objeto final.

Definición 0.1.4 Un objeto X se dirá que es *cofibrante* si el morfismo inicial $\emptyset_X : \emptyset \to X$ es cofibración. Análogamente, se dirá *fibrante* si el morfismo final $*_X : X \to *$ es fibración.

Un apartado importante en las categorías de modelos es lo que se denomina localización.

Definición 0.1.5 Sea $\mathbf{C}$ una categoría arbitraria y $\mathcal{S}$ una subclase de la clase de morfismos de $\mathbf{C}$. La *localización* de $\mathbf{C}$ respecto de $\mathcal{S}$ es una categoría $\mathcal{S}^{-1}\mathbf{C}$ junto con un funtor $\gamma : \mathbf{C} \to \mathcal{S}^{-1}\mathbf{C}$ tal que transforma los morfismos de $\mathcal{S}$ en isomorfismos, y dado cualquier otro funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ con la misma propiedad entonces existe un único funtor $\theta : \mathcal{S}^{-1}\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{S}^{-1}\mathbf{C} \arrow[d, "\theta"] \\ & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Esta categoría siempre existe. Para ver su construcción puede consultarse [36].

Dada una categoría de modelos, $\mathbf{C}$, se define su *categoría de homotopía* como la localización de $\mathbf{C}$ respecto de las equivalencias débiles, denotada como $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$. Análogamente se tienen las localizaciones de $\mathbf{C_c}$ respecto de sus equivalencias débiles, $\gamma_c : \mathbf{C_c} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C_c})$ y de $\mathbf{C_f}$ respecto de sus equivalencias débiles, $\gamma_f : \mathbf{C_f} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C_f})$, donde $\mathbf{C_c}$ y $\mathbf{C_f}$ son las subcategorías plenas de $\mathbf{C}$ de objetos cofibrantes y objetos fibrantes, respectivamente. Además, si $\mathbf{C_{cf}}$ es la subcategoría de objetos cofibrantes y fibrantes, se tiene que el funtor inducido en homotopía, $\bar{\gamma} : \pi\mathbf{C_{cf}} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$, es una equivalencia de categorías, por lo que se tiene como consecuencia que, si A es cofibrante y B es fibrante entonces $Hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{C})}(A, B) = [A, B]$.

Se dice que la categoría $\mathbf{C}$ es *punteada* cuando el objeto inicial es isomorfo al final. En este caso se le denomina objeto cero y se denotará por $*$. Si $f : X \to Y$ es un morfismo, se define *fibra* de f como el pull-back $* \times_Y X$, y *cofibra* al push-out $* \cup_X Y$:

$$\begin{tikzcd} * \times_Y X \arrow[r, "p_1=*"] \arrow[d, "p_2"'] & * \arrow[d, "*"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "*"] \arrow[d, "f"'] & * \arrow[d, "j_1=*"] \\ Y \arrow[r, "j_2"'] & * \cup_X Y. \end{tikzcd}$$

Si X es un objeto cofibrante, un objeto *suspensión* de X, $S(X)$, es la cofibra de $\delta_0+\delta_1 : X \coprod X \to X'$, donde X' es un cilindro para X. Por otro lado, si Y es fibrante, un objeto *lazos* de Y, $\Omega(Y)$, es la fibra de $(d_0, d_1) : Y'' \to Y \times Y$, donde Y'' es un cocilindro para Y. Estas construcciones, S y Ω inducen funtores,

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \underset{\Omega}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}),$$

tales que S es adjunto a izquierda de Ω.

Definición 0.1.6 Sean $\gamma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ y $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funtores. El funtor *derivado a izquierda* de F respecto de γ es un funtor,

$$L^\gamma F : \mathbf{A}' \to \mathbf{B},$$

junto con una transformación natural, $\varepsilon : (L^\gamma F)\gamma \to F$ de manera que, dado cualquier otro funtor, $G : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}$ y transformación natural $\xi : G\gamma \to F$, existe una única transformación natural $\theta : G\gamma \to (L^\gamma F)\gamma$ tal que $\varepsilon\theta = \xi$.

De forma dual, el funtor *derivado a derecha* de F respecto de γ es un funtor,

$$R^\gamma F : \mathbf{A}' \to \mathbf{B},$$

junto con una transformación natural $\eta : F \to (R^\gamma F)\gamma$ de forma que, dado cualquier otro funtor $G : \mathbf{A}' \to \mathbf{B}$ y transformación natural $\xi : F \to G\gamma$ existe una única transformación natural $\theta : (R^\gamma F)\gamma \to G\gamma$ tal que $\theta\eta = \xi$.

En el caso que $\mathbf{A}$ sea una categoría de modelos, $\mathbf{C}$, y $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ el funtor localización, se denotará simplemente por LF. Si $\mathbf{C}$ es categoría de modelos y $F : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ funtor, $(LF)\gamma \to F$ es isomorfismo si y sólo si F transforma equivalencias débiles en isomorfismos. En este caso se supondrá que LF es inducido por F en el sentido que es el único funtor $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \to \mathbf{B}$ tal que $(LF)\gamma = F$. Además $RF = LF$.

Definición 0.1.7 Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor entre categorías de modelos. El funtor *derivado total a izquierda* de F es el funtor

$$\underline{\underline{L}}(F) : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C}'),$$

dado por $\underline{\underline{L}}(F) = L^{\gamma}(\gamma' F)$ donde $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ y $\gamma' : \mathbf{C}' \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C}')$ son los funtores localización. De forma análoga se define el funtor *derivado total a derecha* de F, $\underline{\underline{R}}(F) : \mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Ho}(\mathbf{C}')$.

Con ciertas condiciones adicionales, una pareja de funtores adjuntos entre categorías de modelos inducen otra adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Teorema 0.1.1 *Sean* $\mathbf{C}$ *y* **C'** *categorías de modelos y sea*

$$\mathbf{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathbf{C}'$$

un par de funtores adjuntos, L adjunto a izquierda de R. Supóngase que L preserva cofibraciones y que transforma equivalencias débiles entre cofibrantes en equivalencias débiles, así como R preserva fibraciones y que transforma equivalencias débiles entre fibrantes en equivalencias débiles. Entonces los funtores

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{C}) \underset{\underline{\underline{R}}(R)}{\overset{\underline{\underline{L}}(L)}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ho}(\mathbf{C}')$$

son canónicamente adjuntos. Además, si para cada objeto cofibrante X y objeto fibrante Y, todo morfismo $L(X) \to Y$ es equivalencia débil si y sólo si su morfismo asociado $X \to RY$ es equivalencia débil, entonces la unidad y counidad de la adjunción son isomorfismos, por lo que $\mathbf{Ho}(\mathbf{C})$ *y* $\mathbf{Ho}(\mathbf{C}')$ *son equivalentes.*

Definición 0.1.8 Sea $\mathbf{C}$ una categoría de modelos. Se dirá que $\mathbf{C}$ es *cerrada* si satisface el axioma adicional siguiente:

M6: Dos clases de morfismos determinan a la tercera por las siguientes condiciones:

(i) Un morfismo es cofibración si y sólo si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

(ii) Un morfismo es fibración si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de las cofibraciones triviales.

(iii) Un morfismo f es equivalencia débil si y sólo si $f = uv$ donde v tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones y u tiene la P.E.D. respecto de las cofibraciones.

Es fácil de comprobar que **M6** implica **M1**, **M3** y **M4**, luego una categoría de modelos cerrada se puede definir haciendo uso de los axiomas **M0**, **M2**, **M5** y **M6**.

Las categorías de modelos cerradas tienen la propiedad de que un morfismo f es equivalencia débil si y sólo si $\gamma(f)$ es isomorfismo en $\mathbf{Ho(C)}$. Además, se pueden redefinir mediante la noción de retracto.

Definición 0.1.9 Un morfismo $f : X \to Y$ es un *retracto* de $f' : X' \to Y'$ si existe un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[r, "v"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Y, \end{tikzcd}$$

con $u'u = id_X$ y $v'v = id_Y$.

Proposición 0.1.2 *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría de modelos. Entonces* $\mathbf{C}$ *es cerrada si y sólo si cada una de las clases de morfismos, cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles, tiene la propiedad de que todo retracto de un miembro de la clase es también un miembro de la clase.*

Así una categoría de modelos cerrada es una categoría $\mathbf{C}$ con tres familias distinguidas de morfismos, denominados cofibraciones, fibraciones y equivalencias débiles verificando los siguientes axiomas:

CM1: **C** es cerrada respecto a límites y colímites finitos.

CM2: Para dos morfismos,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z ,$$

si dos cualesquiera de f, g y gf son equivalencias débiles, entonces también lo es el tercero.

CM3: Si f es un retracto de g, y g es fibración, cofibración o equivalencia débil entonces también lo es f.

CM4: Dado un cuadrado conmutativo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y, \end{tikzcd}$$

con i cofibración, p fibración y uno de ellos es equivalencia débil, entonces existe elevación del diagrama.

CM5: Todo morfismo f se puede factorizar como:

(i) $f = pi$, con i cofibración y p fibración trivial.

(ii) $f = qj$, con j cofibración trivial y q fibración.

Ejemplos:

(a) Sea $\mathbf{Ch_{ai}}(\mathbf{Ab})$ la categoría que tiene por objetos complejos de cadenas de grupos abelianos, X, tales que existe $n_X \in \mathbb{Z}$ con $X_n = 0$, $\forall n \leq n_X$. Los morfismos son los de complejos de cadenas entre estos objetos. Se denominará esta categoría como de complejos de cadenas *acotados inferiormente.*

Si $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathbf{Ch_{ai}}(\mathbf{Ab})$, se dirá que,

(i) f es *fibración* si f_n es epimorfismo, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(ii) f es *cofibración* si f_n es monomorfismo y $coker(f_n)$ es proyectivo, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(iii) f es *equivalencia débil* si $H_n(f) : H_n(X) \to H_n(Y)$ es isomorfismo, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Quillen asegura que $\mathbf{Ch_{ai}}(\mathbf{Ab})$, junto con las fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles anteriormente definidas tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

(b) Sea la categoría de conjuntos simpliciales, **SS**, es decir, la categoría de funtores $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$, donde $\mathbf{\Delta}$ es la categoría simplicial, cuyos objetos son los ordinales finitos $[n] = \{0 < 1 < 2 < ... < n\}$, $n \geq 0$, y cuyos morfismos son aplicaciones crecientes $\varphi : [n] \to [m]$ ($\varphi(i) \leq \varphi(j)$, si $i \leq j$). En esta categoría $\mathbf{\Delta}$ se tienen unos morfismos especiales:

Por un lado, $\delta_i : [n-1] \to [n]$, $0 \leq i \leq n$ dado por $\delta_i(k) = k$ si $k < i$, y $\delta_i(k) = k+1$ si $k \geq i$; y por otro $\sigma_i : [n+1] \to [n]$, $0 \leq i \leq n$, dado por $\sigma_i(k) = k$, si $k \leq i$, y $\sigma_i(k) = k-1$ si $k > i$.

Si X es un conjunto simplicial, esto es, un funtor $X : \mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Sets}$, entonces $d_i = X(\delta_i) : X_n \to X_{n-1}$ y $s_i = X(\sigma_i) : X_n \to X_{n+1}$ son los operadores cara y degeneración respectivamente, como ya se sabe. Nótese que $X_n = X([n])$, para $n \geq 0$.

También Quillen da la siguiente estructura de categoría de modelos cerrada: Sea $f : X \to Y$ una aplicación simplicial,

(i) f es *fibración* (resp. *fibración trivial*) si tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones $\{V(n,k) \hookrightarrow \Delta[n],\ 0 \leq k \leq n,\ n \geq 0\}$, (resp. respecto de $\{\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n],\ n \geq 0\}$) donde $V(n,k)$ es el subconjunto simplicial generado por las caras $\{\delta_i\Delta[n],\ 0 \leq i \leq n,\ i \neq k\}$ del n-símplice standard $\Delta[n]$, y $\dot{\Delta}[n]$ está generado por las caras de $\Delta[n]$;

(ii) f es *cofibración* (resp. *cofibración trivial*) si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales (resp. fibraciones);

Finalmente,

(iii) f es *equivalencia débil* si se puede factorizar como $f = pi$, donde i es una cofibración trivial y p una fibración trivial.

(c) Se denota por **Top** la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas. Una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice que es

(i) *fibración*, si es una fibración de Serre, es decir, que tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones $\delta_0 : D^n \to D^n \times I, (x \rightsquigarrow (x,0))$, $n \geq 0$,

(ii) *equivalencia débil*, si $\pi_n(f) : \pi_n(X,x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es isomorfismo, para cada $x \in X$ y $n \geq 0$.

Una *cofibración* es una aplicación continua con la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

Con estas definiciones, **Top** tiene estructura de categoría de modelos cerrada.

0.2 Categoría simplicial.

Otra estructura, también importante, es la denominada categoría simplicial, relacionada con **SS**.

Definición 0.2.1 Una *categoría simplicial* es una categoría $\mathbf{C}$ dotada de la siguiente estructura:

(i) Un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathbf{SS}$;

(ii) una aplicación simplicial, para cada terna de objetos X, Y, Z de $\mathbf{C}$, llamada composición,

$$\circ : \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \times \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) \to \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z),$$

denotándose $\circ_n(f,g) = g \circ_n f$;

y,

(iii) un isomorfismo natural, $\varphi : Hom_{\mathbf{C}}(\_,\_) \to \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(\_,\_)_0$,

sujeta a los siguientes axiomas:

(i) Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)_n$, $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)_n$ y $h \in \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,W)_n$ entonces $(h \circ_n g) \circ_n f = h \circ_n (g \circ_n f)$.

(ii) Dado $u \in Hom_{\mathbf{C}}(X,Y)$,

(a) si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z)_n$ entonces $\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(u,Z)_n(f) = f \circ_n s_0^n(\varphi(u))$.

(b) si $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(W,X)_n$ entonces $\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(W,u)_n(f) = s_0^n(\varphi(u)) \circ_n g$.

Aquí se entiende que

$$\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(u,Z)_n = \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(u,id_Z)_n,$$

y que

$$\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(W,u)_n = \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(id_W,u)_n.$$

Como un ejemplo representativo se tiene la categoría **SS**, la categoría de los conjuntos simpliciales:

El producto de conjuntos simpliciales da lugar a un funtor,

$$\_ \times \_ : \mathbf{SS} \times \mathbf{SS} \to \mathbf{SS},$$

dado como

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n,$$
$$(X \times Y)(\varphi) = X(\varphi) \times Y(\varphi),$$
$$(f \times g)_n = f_n \times g_n.$$

También se tiene el conjunto simplicial Y^X :

$$(Y^X)_n = Hom_{\mathbf{SS}}(X \times \Delta[n], Y),$$
$$(Y^X)(\varphi) = Hom_{\mathbf{SS}}(id_X \times \varphi_*, id_Y) = (id_X \times \varphi_*)^*,$$
$$(f^\lambda)_n = Hom_{\mathbf{SS}}(\lambda \times id_{\Delta[n]}, f) = (\lambda \times id_{\Delta[n]})^* f_*.$$

Obsérvese que el n-símplice standard es el funtor $\Delta[n] = Hom_{\mathbf{\Delta}}(\_, [n])$ y que si $\varphi : [p] \to [q]$ es un morfismo de $\mathbf{\Delta}$ entonces se induce una transformación natural, es decir, una aplicación simplicial $\varphi_* : \Delta[p] \to \Delta[q]$.

El funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{SS}}$ es $(.)^{(.)}$. Por otro lado $g \circ_n f$ viene dada por la composición,

$$X \times \Delta[n] \xrightarrow{id_X \times \Delta} X \times \Delta[n] \times \Delta[n] \xrightarrow{f \times id_{\Delta[n]}} Y \times \Delta[n] \xrightarrow{g} Z,$$

siendo $\Delta : \Delta[n] \to \Delta[n] \times \Delta[n]$ la aplicación simplicial diagonal canónica.

Además, ya que $X \times \Delta[0] \cong X$ para cada conjunto simplicial X, se puede definir el isomorfismo natural φ sin problemas.

Es sencillo comprobar que **SS**, con esta estructura, es una categoría simplicial.

Análogamente, se define en **Top** un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{Top}} : \mathbf{Top}^{op} \times \mathbf{Top} \to \mathbf{SS}$ como

$$\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)_n = Hom_{\mathbf{Top}}(X \times |\Delta[n]|, Y),$$
$$\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)(\varphi) = Hom_{\mathbf{Top}}(id_X \times |\varphi_*|, id_Y),$$
$$\underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(f, g)_n = Hom_{\mathbf{Top}}(f \times |id_{\Delta[n]}|, g).$$

Aquí, $|.|: \mathbf{SS} \to \mathbf{Top}$ denota el funtor realización geométrica, véase [60]. Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)_n$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y,Z)_n$, entonces $g \circ_n f$ viene determinado por la composición,

$$X \times |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \times \Delta} X \times |\Delta[n]| \times |\Delta[n]| \xrightarrow{f \times id_{|\Delta[n]|}} Y \times |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

Por otro lado, $|\Delta[0]| \cong *$, entonces $X \times |\Delta[0]| \cong X$ para cada espacio topológico X, teniéndose un isomorfismo natural,

$$Hom_{\mathbf{Top}}(\_,\_) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{Top}}(\_,\_)_0.$$

Con esta estructura, **Top** es una categoría simplicial.

Definición 0.2.2 Sean $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ categorías simpliciales. Un *funtor simplicial* de $\mathbf{C_1}$ a $\mathbf{C_2}$ consiste en

(i) Un funtor $F: \mathbf{C_1} \to \mathbf{C_2}$, y

(ii) una aplicación simplicial, para cada par de objetos X, Y de $\mathbf{C_1}$, denotada por $F_{\_}: \underline{Hom}_{\mathbf{C_1}}(X,Y) \to \underline{Hom}_{\mathbf{C_2}}(F(X),F(Y))$ tal que

(a) $F_n(g \circ_n f) = F_n(g) \circ_n F_n(f)$;

(b) $F_0(\varphi_1(f)) = \varphi_2(F(f))$.

Proposición 0.2.1 *Sea K un conjunto simplicial fijo. Entonces existe una adjunción,*

$$\_ \times K : \mathbf{SS} \rightleftarrows \mathbf{SS} : (.)^K, \qquad (\_ \times K \dashv (.)^K).$$

Aquí, la biyección $\Phi: Hom_{\mathbf{SS}}(X \times K, Y) \to Hom_{\mathbf{SS}}(X, Y^K)$ viene dada por $((\Phi(f))_n(x))_m(k,\sigma) = f_m((X(\sigma))(x),k)$, cuya inversa se define como $\tilde{\Phi}(g) = ev(g \times id_K)$, donde la aplicación evaluación $ev: Y^K \times K \to Y$ se define como $(ev)_n(f,k) = f_n(k, id_{[n]})$.

Definición 0.2.3 Sea $\mathbf{C}$ categoría simplicial, X objeto de $\mathbf{C}$ y K un conjunto simplicial. Se define $X \otimes K$ como un objeto de $\mathbf{C}$ junto con una aplicación simplicial $\alpha: K \to \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X \otimes K)$ tal que para todo objeto Y, la aplicación simplicial

$$\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X \otimes K, Y) \to (\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y))^K$$

es isomorfismo, donde su aplicación simplicial adjunta es la composición

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X \otimes K, Y) \times K \arrow[rr, dotted] \arrow[d, "{(p_2,p_1)}"'] & & \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \\
K \times \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X \otimes K, Y) \arrow[r, "\alpha \times id"'] & \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X, X \otimes K) \times \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X \otimes K, Y). \arrow[ur, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

De forma análoga, se define X^K como un objeto de $\mathbf{C}$ junto con una aplicación simplicial $\beta : K \to \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X^K, X)$ tal que para todo objeto Y, la aplicación simplicial

$$\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X^K) \to (\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X))^K$$

es isomorfismo, donde su aplicación simplicial adjunta es la composición

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X^K) \times K \arrow[r, dotted] \arrow[d, "id \times \beta"'] & \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X) \\
\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X^K) \times \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X^K, X). \arrow[ur, "\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

En la práctica, es suficiente definir una operación, $X \otimes K$, satisfaciendo:

(i) $X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L$;

(ii) $Hom_{\mathbf{C}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y))$,

siendo isomorfismos naturales, para demostrar la existencia del tensor ([68]). De forma análoga para X^K con las propiedades:

(i) $(X^K)^L \cong X^{K \times L}$;

(ii) $Hom_{\mathbf{C}}(Y, X^K) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X))$.

Por otro lado, se puede comprobar que si para cada objeto X y conjunto simplicial K existe el objeto $X \otimes K$ entonces se define un funtor

$$\_ \otimes \_ : \mathbf{C} \times \mathbf{SS} \to \mathbf{C}.$$

Análogamente, si existe el objeto X^K entonces define un funtor

$$(.)^{(.)} : \mathbf{SS}^{\mathbf{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

Definición 0.2.4 Se define la *categoría de objetos simpliciales* de una categoría arbitraria $\mathbf{C}$, como la categoría de funtores $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$.

Así, los objetos de $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ son funtores $X : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$, y los morfismos son las transformaciones naturales entre estos funtores.

Dados X, Y objetos simpliciales de $\mathbf{C}$ y K un conjunto simplicial, una *flecha* $f : X \times K \to Y$ consiste en una colección de morfismos,

$$\{f(\sigma) : X_q \to Y_q,\ \sigma \in K_q, q \geq 0\},$$

tal que para todo morfismo de $\mathbf{\Delta}$, $\varphi : [p] \to [q]$, y $\sigma \in K_q$, el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_q \arrow[r, "f(\sigma)"] \arrow[d, "X(\varphi)"'] & Y_q \arrow[d, "Y(\varphi)"] \\ X_p \arrow[r, "f(K(\varphi)(\sigma))"'] & Y_p \end{tikzcd}$$

Se define $Map(X \times K, Y)$ al conjunto de todas las flechas $X \times K \to Y$. La siguiente proposición establece la funtorialidad de esta asignación:

Proposición 0.2.2 *Existe un funtor,*

$$Map(\_ \times \_, \_) : (\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{SS} \times \mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}.$$

Obsérvese que si α, β son morfismos simpliciales y ρ aplicación simplicial entonces $(Map(\alpha \times \rho, \beta)(f))(\sigma) = \beta_q f(\rho_q(\sigma))\alpha_q$, para cada $\sigma \in K'_q$, $q \geq 0$.

Así, denotando por $A : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{SS}$ el funtor dado por

$$\begin{aligned} A([n]) &= \Delta[n], \\ A(\varphi) &= \varphi_*, \end{aligned}$$

entonces se obtiene un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}} = Map(\_ \times A\_, \_)$.

Por otro lado, la composición se define $(g \circ_n f)(\sigma) = g(\sigma)f(\sigma)$, $\sigma \in \Delta[n]_p$, $n, p \geq 0$. Finalmente, como $\Delta[0]_p$ tiene un único p-símplice, $\sigma_p : [p] \to [0]$, se define $\varphi(f)(\sigma_p) = f_p$. Esta construcción da lugar al siguiente teorema:

Teorema 0.2.1 *La categoría de objetos simpliciales de una categoría* $\mathbf{C}$ *es simplicial.*

Toda categoría $\mathbf{C}$ induce una categoría simplicial $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$. Este hecho también se traslada para funtores, es decir, dado un funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, se induce un funtor simplicial $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{D}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ de la siguiente forma: Por un lado $F^{\Delta^{op}} : \mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{D}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ viene dado como $F^{\Delta^{op}}(X)_n = F(X_n)$, $F^{\Delta^{op}}(X)(\varphi) = F(X(\varphi))$ y $F^{\Delta^{op}}(f)_n = F(f_n)$. La aplicación simplicial correspondiente viene dada como $F_n^{\Delta^{op}}(f)(\sigma) = F(f(\sigma))$.

El siguiente resultado, probado por Quillen, da condiciones suficientes para la existencia de $X \otimes K$ y X^K para cada objeto simplicial de $\mathbf{C}$, X, y conjunto simplicial K :

Proposición 0.2.3 *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría y* X *objeto simplicial de* $\mathbf{C}$. *Si* $\mathbf{C}$ *es cerrada bajo coproductos (resp. coproductos finitos) entonces existe el objeto* $X \otimes K$ *en* $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ *para cada conjunto simplicial* K *(resp. conjunto simplicial finito.) Si* $\mathbf{C}$ *es cerrada bajo límites (resp. límites finitos) entonces existe* X^K, *para cada conjunto simplicial (resp. conjunto simplicial finito)* K.

En este caso,

$$(X \otimes K)_n = \textstyle\coprod_{\tau \in K_n} X_n,$$

y si se denota por $j_\sigma : X_n \to \coprod_{\tau \in K_n} X_n$ la inyección σ-ésima, para $\sigma \in K_n$ y $\varphi : [m] \to [n]$ es un morfismo de $\mathbf{\Delta}$ se induce $\omega = (X \otimes K)(\varphi)$ único tal que $\omega j_\sigma = j_{K(\varphi)(\sigma)} X(\varphi)$, para cada $\sigma \in K_n$. De forma similar, por propiedades de coproductos se induce, para cada morfismo simplicial f y aplicación simplicial λ, el morfismo simplicial $f \otimes \lambda$.

Proposición 0.2.4 $Hom_{\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}}(\_ \otimes \_, \_)$ *y* $Map(\_ \times \_, \_)$ *son funtores naturalmente isomorfos.*

Como consecuencia el funtor de la estructura simplicial de $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}}$ se puede poner en función del tensor $\otimes$.

0.3 Categoría simplicial de modelos cerrada.

Diversas categorías son simpliciales y también de modelos cerradas. Compatibilizando ambas estructuras con axiomas adicionales surge otra noción diferente.

Definición 0.3.1 Una *categoría simplicial de modelos cerrada* es una categoría de modelos cerrada $\mathbf{C}$, que es también simplicial, y que satisface los siguientes axiomas de compatibilidad:

SM0: Si X es un objeto de $\mathbf{C}$ entonces existen los objetos $X \otimes K$ y X^K para cada conjunto simplicial finito K.

SM7: Si $i : A \to B$ es una cofibración y $p : X \to Y$ es una fibración, entonces el morfismo $(\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(B,p), \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(i,X))$ inducido desde $\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(B,X)$ en el pull-back,

$$\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(A,X) \times_{\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(A,Y)} \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(B,Y) \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(B,Y) \arrow[d, "\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(i,Y)"'] \\
\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(A,X) \arrow[r, "\underline{Hom}_{\mathbf{C}}(A,p)"'] & \underline{Hom}_{\mathbf{C}}(A,Y),
\end{tikzcd}$$

es una fibración de conjuntos simpliciales, y es fibración trivial si i o p lo son.

Como ejemplo de categoría simplicial de modelos cerrada está $\mathbf{SS}$, con $X \otimes K = X \times K$ y X^K la exponenciación usual de conjuntos simpliciales. También $\mathbf{Top}$, con $X \otimes K = X \times |K|$ y $X^K = X^{|K|}$.

La definición de categoría simplicial de modelos cerrada no es muy práctica, por lo que muchas veces se hace uso de una equivalencia más manejable.

Proposición 0.3.1 *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría simplicial satisfaciendo los axiomas* **M0** *y* **SM0***, con cuatro clases distinguidas de morfismos: fibraciones, cofibraciones, fibraciones triviales y cofibraciones triviales, tales que la primera y la cuarta (resp. la segunda y la tercera) determina cada una por propiedades de elevación como en* **M6** *(a) y (b) de la definición de categoría de modelos cerrada. Entonces* **SM7** *es equivalente separadamente a cada una de las siguientes condiciones:*

SM7(a): *Si f es fibración (resp. fibración trivial) entonces el morfismo inducido en el pull-back,*

$$
\begin{tikzcd}
X^{\Delta[n]} \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f^{id_{\Delta[n]}}"] \arrow[ddr, bend right, "(id_X)^j"'] & & \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]} \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & Y^{\Delta[n]} \arrow[d, "(id_Y)^j"] \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \arrow[r, "f^{id_{\dot{\Delta}[n]}}"'] & Y^{\dot{\Delta}[n]},
\end{tikzcd}
$$

es una fibración (resp. fibración trivial), donde $j : \dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n]$ denota la inclusión, y

$$
\begin{tikzcd}
X^{\Delta[1]} \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f^{id_{\Delta[1]}}"] \arrow[ddr, bend right, "(id_X)^{l_k}"'] & & \\
& X^{V(1,k)} \times_{Y^{V(1,k)}} Y^{\Delta[1]} \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & Y^{\Delta[1]} \arrow[d, "(id_Y)^{l_k}"] \\
& X^{V(1,k)} \arrow[r, "f^{id_{V(1,k)}}"'] & Y^{V(1,k)}
\end{tikzcd}
$$

es fibración trivial, donde $l_k : V(1,k) \hookrightarrow \Delta[1]$ es la inclusión, $k \in \{0,1\}$.

SM7(b): *Si $i : A \to B$ es cofibración (resp. cofibración trivial), entonces el morfismo inducido en el push-out,*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes \dot{\Delta}[n] \arrow[r, "i \otimes id_{\dot{\Delta}[n]}"] \arrow[d, "id_A \otimes j"'] & B \otimes \dot{\Delta}[n] \arrow[d, "j_1"'] \arrow[ddr, bend left, "id_B \otimes j"] & \\
A \otimes \Delta[n] \arrow[r, "j_2"'] \arrow[drr, bend right, "i \otimes id_{\Delta[n]}"'] & (B \otimes \dot{\Delta}[n]) \vee_{(A \otimes \dot{\Delta}[n])} (A \otimes \Delta[n]) \arrow[dr, dotted] & \\
& & B \otimes \Delta[n],
\end{tikzcd}
$$

es cofibración (resp. cofibración trivial) y

$$\begin{tikzcd}
A \otimes V(1,k) \arrow[r, "i \otimes id_{V(1,k)}"] \arrow[d, "id_A \otimes l_k"'] & B \otimes V(1,k) \arrow[d, "j_1"'] \arrow[ddr, bend left, "id_B \otimes l_k"] & \\
A \otimes \Delta[1] \arrow[r, "j_2"'] \arrow[drr, bend right, "i \otimes id_{\Delta[1]}"'] & (B \otimes V(1,k)) \vee_{(A \otimes V(1,k))} (A \otimes \Delta[1]) \arrow[dr, dotted] & \\
 & & B \otimes \Delta[1]
\end{tikzcd}$$

es cofibración trivial, $k \in \{0,1\}$.

Quillen da condiciones suficientes para que una categoría de objetos simpliciales tenga estructura de categoría simplicial de modelos cerrada. No obstante, otra forma más elegante, de la que pondrá en práctica en esta memoria, es introducir categoría de I-diagramas y usar un teorema de J. Miranda [61]. Es necesario definir previamente una nociones.

Definición 0.3.2 Sea X un objeto de una categoría $\mathbf{C}$ con colímites de sistemas directos. Se dirá que X es *secuencialmente pequeño* si para cualquier $\{Y_n, j_n : Y_n \to Y_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, sistema directo, se verifica que

$$colim\ Hom_{\mathbf{C}}(X, Y_n) \cong Hom_{\mathbf{C}}(X, colim\ Y_n).$$

Como ejemplos representativos de objetos secuencialmente pequeños están los conjuntos finitos en la categoría de conjuntos, los grupos finitamente generados en la categoría de grupos y los conjuntos simpliciales finitos en la categoría de los conjuntos simpliciales, en particular $\Delta[n]$, $\dot{\Delta}[n]$ y $V(n,k)$ son conjuntos simpliciales secuencialmente pequeños.

Definición 0.3.3 Sea $\mathbf{C}$ una categoría e $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Se define la *categoría de* $\mathbf{I}$*-diagramas* de $\mathbf{C}$ a la categoría de funtores $\mathbf{C}^{\mathbf{I}^{\mathbf{op}}}$.

Esta categoría tiene, por tanto, como objetos funtores $X : \mathbf{I}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{C}$, llamados $\mathbf{I}$-diagramas, y como morfismos, $\alpha : X \to Y$, las transformaciones naturales.

Aparece el funtor *evaluación* en $j \in J : (ev)_j : \mathbf{C}^{\mathbf{I}^{op}} \to \mathbf{C}$ como

$$(ev)_j(X) = X_j, \quad (ev)_j(\alpha) = \alpha_j,$$

para cada $\mathbf{I}$-diagrama X y morfismo de $\mathbf{I}$-diagramas, α.

Si la categoría primitiva tiene tres clases distinguidas de morfismos: fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, surge de forma natural tres clases de morfismos en la categoría de I-diagramas asociada:

Definición 0.3.4 Sea f un morfismo en $\mathbf{C}^{\mathbf{I}^{op}}$, se dirá que,

(i) f es fibración, si $(ev)_j(f)$ es fibración en $\mathbf{C}$, para cada $j \in \mathbf{I}$;

(ii) f es equivalencia débil, si $(ev)_j(f)$ es equivalencia débil en $\mathbf{C}$, para cada $j \in \mathbf{I}$;

(iii) f es cofibración, si verifica la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

Teorema 0.3.1 *Sea $\mathbf{C}$ una categoría de modelos cerrada, completa y cocompleta. Sean, además, $\{f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{g_\gamma : C_\gamma \to D_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ dos familias de morfismos de $\mathbf{C}$ tales que $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y $\{C_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ son objetos secuencialmente pequeños. Supóngase que un morfismo f en $\mathbf{C}$ es fibración (resp. fibración trivial) si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$ (resp. respecto de $g_\gamma : C_\gamma \to D_\gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$). Entonces $\mathbf{C}^{\mathbf{I}^{op}}$, con la estructura dada anteriormente es una categoría de modelos cerrada.*

En el caso que interesa, se considera la categoría de los $\mathbf{I}$-diagramas de $\mathbf{C}$, donde $\mathbf{I}$ es una categoría pequeña. Así, si $\mathbf{C}$, tiene fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles, dado un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$ se dirá que es fibración (resp. equivalencia débil) si $f_i : X_i \to Y_i$ es fibración en $\mathbf{C}$ (resp. equivalencia débil), para cada i, y se dirá que es cofibración si tiene la P.E.D. respecto de las fibraciones triviales.

Con esto, en las condiciones del teorema 0.3.1, teniendo en cuenta el teorema 0.2.1 y la proposición 0.2.3, en el caso que $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$ verificase **SM7** entonces sería una categoría simplicial de modelos cerrada.

Si $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña, la categoría de $\mathbf{C}$-diagramas en **Sets** recibe un nombre especial.

0.4 Categoría de prehaces. Teorema de Mac Lane-Moerdijk.

En esta sección se introduce la categoría de prehaces y se da un teorema importante para la construcción de diversos funtores del tipo realización geométrica.

Definición 0.4.1 Sea $\mathbf{C}$ una categoría pequeña, se define la *categoría de prehaces* de $\mathbf{C}$, a la categoría $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$.

A los objetos de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ se les denomina *prehaces* de $\mathbf{C}$. La notación usual es $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$.

Si P es un prehaz en $\mathbf{C}$ y $x \in P(C)$, donde C es un objeto de $\mathbf{C}$, dado un morfismo $f : D \to C$ en $\mathbf{C}$, el valor $P(f)(x)$ se denomina *restricción* de x a lo largo de f. Normalmente se denota como $P(f)(x) = x|f = x \cdot f$.

Todo objeto C de $\mathbf{C}$ se puede considerar como el prehaz,

$$y(C) = Hom_{\mathbf{C}}(\_, C),$$

definido como $y(C)(D) = Hom_{\mathbf{C}}(D, C)$, $y(C)(\alpha) = \alpha^*$.

Definición 0.4.2 Sea P un prehaz, se dirá que es *representable* si existe un objeto C tal que $y(C)$ y P son naturalmente isomorfos.

Si $f : C_1 \to C_2$ es un morfismo, se define $y(f) : y(C_1) \to y(C_2)$, dado como $y(f)_C = f_*$. Esto da lugar a un funtor $y : \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}}$ denominado *embebimiento de Yoneda*. Este funtor es fiel y pleno; este hecho es un caso especial del lema de Yoneda, que dice que si P es un prehaz, existe una biyección,

$$\theta : Hom_{\hat{\mathbf{C}}}(y(C), P) \to P(C),$$

dada por $\theta(\alpha) = \alpha_C(id_C)$, para cada objeto C de $\mathbf{C}$.

Definición 0.4.3 Sea P un prehaz, se define la *categoría de elementos* de P, $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{P}$, también llamada *categoría de Grothendieck* de P, a aquella que tiene por objetos pares de la forma (C, x), donde C es un objeto de $\mathbf{C}$ y $x \in P(C)$. Un morfismo $\tilde{u} : (C, x) \to (C', x')$ consiste en un morfismo de $\mathbf{C}$, $u : C \to C'$, tal que $P(u)(x') = x$.

Esta categoría tiene un funtor proyección $\pi_P : \int_{\mathbf{C}} \mathbf{P} \to \mathbf{C}$ dado como $\pi_P((C,x)) = C$ y $\pi_P(\tilde{u}) = u$.

Los colímites sobre la categoría de elementos se pueden usar para construir funtores adjuntos.

Teorema 0.4.1 *(Mac Lane-Moerdijk)*

Si $A : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ es un funtor desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta, el funtor

$$R : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}},$$

dado por $R(E)(C) = Hom_{\mathbf{E}}(A(C), E)$ tiene un funtor adjunto a izquierda $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{E}$ definido para cada prehaz, P, como el colímite

$$L(P) = colim\,(\int_{\mathbf{C}} P \stackrel{\pi_P}{\to} \mathbf{C} \stackrel{A}{\to} \mathbf{E}).$$

Obsérvese que R está definido como

$$R(E)(C) = Hom_{\mathbf{E}}(A(C), E),\ R(E)(u) = A(u)^*,\ R(f)_C = f_*.$$

L viene definido para cada transformación natural $P \stackrel{\alpha}{\to} Q$ como sigue:

Si $f_{(C,p)} : (A\pi_P)((C,p)) \to L(P)$ y $g_{(C,q)} : (A\pi_P)((C,q)) \to L(Q)$ representan los coconos universales respectivos para $A\pi_P$ y $A\pi_Q$, definiendo $h_{(C,p)} = g_{(C,\alpha_C(p))}$ se tiene un cocono para $A\pi_P$. Así, existe un único morfismo $\varphi : L(P) \to L(Q)$ tal que $\varphi f_{(C,p)} = g_{(C,\alpha_C(p))}$, para cada (C,p) objeto de $\int_{\mathbf{C}} P$. Entonces $L(\alpha) = \varphi$.

Si en este teorema se considera $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{C}}$ y como el funtor A el embebimiento de Yoneda, teniendo en cuenta que por el lema de Yoneda el funtor R es

$$R(E)(C) = Hom_{\hat{\mathbf{C}}}(y(C), E) \cong E(C),$$

esto es, $R : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ es naturalmente isomorfo a la identidad en $\hat{\mathbf{C}}$. Por la unicidad salvo isomorfismo natural de la adjunción, su adjunto a izquierda debe ser naturalmente isomorfo al funtor identidad, por lo que

$$P \cong colim\,(\int_{\mathbf{C}} P \stackrel{\pi_P}{\to} \mathbf{C} \stackrel{y}{\to} \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}),$$

es decir, todo prehaz es colímite de prehaces representables.

Otro resultado interesante y que se deduce del teorema es el siguiente:

Proposición 0.4.1 *Para cada funtor* $A : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ *desde una categoría pequeña a una categoría cocompleta existe un funtor* $L : \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \to \mathbf{E}$ *verificando*

(i) L *preserva colímites.*

(ii) L *hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "y"] \arrow[d, "A"'] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{op}} \arrow[dl, "L"] \\ \mathbf{E}. & \end{tikzcd}$$

Además, este funtor L *con las propiedades* (i) *y* (ii) *es único salvo isomorfismo y se puede definir como*

$$L(P) = colim\,(\int_{\mathbf{C}} P \xrightarrow{\pi_P} \mathbf{C} \xrightarrow{A} \mathbf{E}).$$

Capítulo 1

Espacios exteriores.

Se realizará ahora un desarrollo exhaustivo del marco de trabajo en el que estará totalmente inmersa la memoria: la categoría de los espacios exteriores, introducida por García-Pinillos [38]. En la primera sección se ven sus propiedades básicas, así como otra interpretación de esta categoría. En la siguiente se desarrollan leyes exponenciales generales, cruciales para la determinación y relación de estructuras homotópicas, así como de invariantes. Posteriormente se generaliza enriqueciendo esta categoría con estructuras de categoría simplicial de modelos cerrada con la llamada g-estructura. Además se dará la noción de gCW complejo, objeto g-cofibrante para esta estructura, y se podrán dar teoremas de tipo Whitehead. Por último, se harán comparaciones entre las distintas estructuras axiomáticas de la categoría de los espacios exteriores: la e-estructura, dada por García-Pinillos, y la mencionada g-estructura, introducida aquí, así como la existente en **Top**, los espacios topológicos con aplicaciones continuas.

1.1 La categoría de los espacios exteriores, primeras propiedades.

Intuitivamente hablando, un espacio exterior es un espacio topológico enriquecido con un sistema de entornos en el "infinito". El comportamiento de los complementos de sus compacto-cerrados inspira la definición abstracta de exterior.

Definición 1.1.1 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *externología* en (X, τ) es una colección no vacía de abiertos, $\varepsilon \subset \tau$, tal que

(i) Si E_1, $E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $E \in \varepsilon$, $U \in \tau$ y $E \subset U$ entonces $U \in \varepsilon$.

A los elementos de ε se les denomina *abiertos externos* o *e-abiertos*. Un *espacio exterior* consiste en un espacio topológico junto con una externología. Se denotará por $(X, \varepsilon \subset \tau)$.

De esta definición de externología se deducen algunas propiedades inmediatas, entre ellas cabe destacar que una externología ε es una topología si y sólo si $\emptyset \in \varepsilon$ si y sólo si $\varepsilon = \tau$. También, que la unión de un e-abierto con un abierto es un e-abierto y que el espacio total, X, es siempre un e-abierto.

Ejemplos:

Dado un espacio topológico (X, τ) se tiene la externología formada por los complementos de sus compacto-cerrados:

$$\varepsilon_{cc}^X = \{E \in \tau : X\text{-}E \text{ es compacto}\}.$$

Otras externologías que se le pueden asignar son la trivial, $\varepsilon = \{X\}$, y la propia topología, $\varepsilon = \tau$.

Obsérvese que si X es un espacio compacto entonces $\emptyset \in \varepsilon_{cc}^X$ y, por tanto, $\varepsilon_{cc}^X = \tau$.

Definición 1.1.2 Una aplicación, $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \to (X', \varepsilon' \subset \tau')$, entre espacios exteriores se dice que es *exterior* si es continua y $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Proposición 1.1.1 *Sea $f : X \to X'$ una aplicación continua entre espacios exteriores, entonces f es exterior si y sólo si para cada $E' \in \varepsilon'$, existe $E \in \varepsilon : f(E) \subset E'$.*

Demostración:

"$\Rightarrow$" Sea $E' \in \varepsilon'$, entonces $E = f^{-1}(E') \in \varepsilon$ y $f(E) = f(f^{-1}(E') \subset E'$.

"$\Leftarrow$" Sea $E' \in \varepsilon'$, entonces $\exists E \in \varepsilon : f(E) \subset E'$, luego $E \subset f^{-1}(E')$. Ya que f es continua se tiene que $f^{-1}(E')$ es abierto y por tanto e-abierto. $\square$

Una noción análoga a la de cerrado en un espacio topológico es la de cerrado exterior o e-cerrado en un espacio exterior.

Definición 1.1.3 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ un espacio exterior y $F \subset X$. Se dirá que F es *e-cerrado* o *cerrado exterior* si X-$F \in \varepsilon$.

Si (X, τ) es un espacio topológico y ξ_e es una subfamilia no vacía de la familia ξ de cerrados tal que

(i) Si F_1, $F_2 \in \xi_e$ entonces $F_1 \cup F_2 \in \xi_e$;

(ii) Si $F \in \xi$, $L \in \xi_e$ y $F \subset L$ entonces $F \in \xi_e$,

entonces existe una única externología en (X, τ), $\varepsilon = \{X\text{-}F : F \in \xi_e\}$, tal que ξ_e son todos sus cerrados externos. Dicha externología se denomina *de complementos de cerrados de* ξ_e.Un ejemplo es considerar en (X, τ) la familia de sus compacto-cerrados, originando la externología ε_{cc}^X.

Es sencillo comprobar que dada una aplicación continua entre espacios exteriores, ésta es exterior si y sólo si la antiimagen de todo e-cerrado es e-cerrada.

La composición de aplicaciones exteriores es exterior y la aplicación identidad en un espacio exterior es exterior, de aquí se tiene la categoría cuyos objetos son los espacios exteriores y cuyos morfismos son las aplicaciones exteriores. Dicha categoría se denotará por $\mathbf{E}$.

Se recuerda ahora la noción de aplicación propia.

Definición 1.1.4 Dada una aplicación continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$, se dirá *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada K, compacto-cerrado.

La categoría de los espacios topológicos y aplicaciones propias se denotará por $\mathbf{P}$. Como consecuencia se tiene que $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es una aplicación propia si y sólo si $f : (X, \varepsilon_{cc}^X \subset \tau_X) \to (Y, \varepsilon_{cc}^Y \subset \tau_Y)$ es exterior.

Obsérvese que si X no es compacto y $f : X \to Y$ es propia entonces Y no puede ser compacto; por otro lado, si X es compacto cualquier aplicación continua con dominio X es propia, en este caso propia y continua son equivalentes.

$\mathbf{P}$ es una subcategoría plena de $\mathbf{E}$, existe el embebimiento $e : \mathbf{P} \to \mathbf{E}$ que consiste en asignar a cada espacio topológico X el espacio exterior $e(X) = X_e$ provisto de la topología de X y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados. A cada aplicación propia f se le asigna $e(f) = f_e = f$.

Muchas veces es más cómodo quedarse con una subfamilia representativa de ε.

Definición 1.1.5 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ espacio exterior y $\beta \subset \varepsilon$. Se dice que β es *base exterior* de X si para cada E e-abierto, existe $B \in \beta$ tal que $B \subset E$.

Como consecuencia, si $B_1, B_2 \in \beta$ entonces existe $B_3 \in \beta$ con $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Proposición 1.1.2 *Sea (X, τ) espacio topológico y β una colección no vacía de abiertos tal que si $B_1, B_2 \in \beta$ entonces existe $B_3 \in \beta$ verificando que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Entonces,*

$$< \beta >= \{E \in \tau : \exists B \in \beta,\ B \subset E\}$$

es la única externología en (X, τ) tal que β es base exterior.

Demostración: Se deja para el lector.

Definición 1.1.6 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ espacio exterior y $\Sigma \subset \varepsilon$. Se dice que Σ es *subbase exterior* de X si para cada E e-abierto existe $\{S_1, ..., S_n\} \subset \Sigma$ tal que $\cap_{i=1}^{n} S_i \subset E$.

Proposición 1.1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y Σ una colección no vacía de abiertos. Entonces,*

$$< \Sigma >= \{E \in \tau : \exists \{S_1, ..., S_n\} \subset \Sigma,\ \cap_{i=1}^{n} S_i \subset E\}$$

es la única externología en (X, τ) tal que Σ es subbase exterior.

Demostración: Se deja para el lector.

Proposición 1.1.4 *Sea $f : (X, \varepsilon \subset \tau) \to (X', \varepsilon' \subset \tau')$ aplicación continua entre espacios exteriores. Entonces*

(i) Dada β base exterior de X', f es exterior si y sólo si $f^{-1}(B) \in \varepsilon$, para cada $B \in \beta$.

(ii) Dada Σ subbase exterior de X', f es exterior si y sólo si $f^{-1}(S) \in \varepsilon$, para cada $S \in \Sigma$.

Demostración:

Para la demostración de (i) tan sólo la implicación hacia la izquierda no es obvia. Supóngase que $f^{-1}(B) \in \varepsilon$, para cada $B \in \beta$. En este caso, si $E \in \varepsilon'$ entonces existe $B \in \beta$ con $B \subset E$, por lo que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(E)$. La propiedad (ii) de la definición 1.1 concluye el resultado.

La demostración de (ii) se hace de forma similar a la hecha en (i) haciendo uso de las dos propiedades de la definición 1.1. □

Se repasará ahora una serie de definiciones y resultados que comprobarán que la categoría de los espacios exteriores, **E**, es completa y cocompleta.

Definición 1.1.7 Sea $\{(X_i, \varepsilon_i \subset \tau_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios exteriores. Se define el espacio exterior $(X, \varepsilon \subset \tau)$ como $X = \coprod_{i \in I} X_i$ la unión disjunta con la topología coproducto y con externología la de los subconjuntos $E \subset X$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$ para cada $k \in I$, donde $j_k : X_k \to X$ es la inyección k-ésima.

No existe ningún problema en comprobar que el espacio exterior creado en la definición anterior es el coproducto de la familia dada.

Definición 1.1.8 Sea $\{(X_i, \varepsilon_i \subset \tau_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios exteriores. Se define el espacio exterior $(X, \varepsilon \subset \tau)$ como $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto conjuntista con la topología producto, y si se denota por $p_k : \prod_{i \in I} X_i \to X_k$ la proyección k-ésima, entonces la externología es la generada por la subbase exterior cuyos elementos son de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$.

Tampoco en este caso es difícil la verificación de que este espacio exterior es, realmente, el producto de la familia considerada.

Todo espacio exterior induce subespacios exteriores.

Definición 1.1.9 Sea X espacio exterior y $A \subset X$, se define en A la externología cuyos elementos son de la forma $E \cap A$ donde E es e-abierto en X.

Nótese que la inclusión canónica $i : A \to X$ es exterior.

Definición 1.1.10 Sea $(X, \varepsilon \subset \tau)$ un espacio exterior, "$\sim$" una relación de equivalencia en X, $X/\!\sim$ el espacio topológico cociente. Si se denota por $\pi : X \to X/\!\sim$ la proyección canónica, se define en $X/\!\sim$ la externología dada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E) \in \varepsilon$.

Proposición 1.1.5 *Dadas dos aplicaciones exteriores,*

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \ ,$$

existe su igualador y su coigualador

Demostración:

Sea $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \subset X$, entonces con la inclusión canónica $i : A \to X$ es el igualador. Por otro lado se considera en Y la relación de equivalencia cuyas relaciones elementales son $f(x) \sim g(x)$, $x \in X$; no es difícil verificar que la proyección $\pi : Y \to Y/\!\sim$ es el coigualador de f y g.

$\square$

Se hace notar que $(\emptyset, \{\emptyset\} \subset \{\emptyset\})$ es el objeto inicial en $\mathbf{E}$ y que el objeto $(*, \{*\} \subset \{\emptyset, *\})$ es final, donde $*$ representa el conjunto unipuntual.

Como consecuencia de los resultados anteriores:

Corolario 1.1.1 $\mathbf{E}$ *es una categoría completa y cocompleta.*

Un hecho especial de la categoría $\mathbf{E}$ es que se puede considerar como una subcategoría de $\mathbf{Top}_*$, la categoría de los espacios topológicos punteados, mediante un proceso similar a la compactificación de Alexandroff.

Si $(X, \varepsilon_X \subset \tau_X)$ es un espacio exterior y $*$ un punto no perteneciente a X se define $X_\infty = X \cup \{*\}$ con punto distinguido $*$, junto con la topología $\tau_\infty = \tau_X \cup \{E \cup \{*\} : E \in \varepsilon_X\}$. Por otro lado, si $f : X \to X'$ es una aplicación exterior, se define $f_\infty : X_\infty \to X'_\infty$ ($X_\infty = X \cup \{*\}$, $X'_\infty = X' \cup \{*'\}$) dada por $f_\infty(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $f_\infty(*) = *'$. Esto origina un funtor $(.)_\infty : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}_*$. Este funtor es fiel puesto que si $f, g : X \to X'$ son aplicaciones exteriores tales que $f_\infty = g_\infty$ entonces $f = f_\infty | X = g_\infty | X = g$. No obstante no es pleno pues, por ejemplo, la aplicación constante en el punto distinguido $X_\infty \to X'_\infty$, $x \rightsquigarrow *'$, no proviene de ninguna aplicación exterior $X \to X'$.

Se considera $\mathbf{Top}_\infty$ la subcategoría de $\mathbf{Top}_*$ cuyos objetos son los espacios topológicos punteados de la forma (X, x_0) donde $\{x_0\}$ es cerrado en X. Los morfismos de esta categoría son las aplicaciones continuas punteadas $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ tales que $f^{-1}(\{y_0\}) = \{x_0\}$.

Teorema 1.1.1 **E** *y* $\mathbf{Top}_\infty$ *son categorías equivalentes.*

Demostración:

Obsérvese que el funtor $(.)_\infty$ se puede considerar un funtor $\mathbf{E} \to \mathbf{Top}_\infty$. Si X, X' son espacios exteriores,

$$(.)_\infty : Hom_{\mathbf{E}}(X, X') \to Hom_{\mathbf{Top}_\infty}(X_\infty, X'_\infty)$$

es inyectiva, según lo comentado anteriormente. Ahora, si $h : X_\infty \to X'_\infty$ es continua punteada con $h^{-1}(\{*'\}) = \{*\}$, entonces se considera la aplicación exterior $f = h|X : X \to X'$, además $f_\infty = h$, con lo cual $(.)_\infty : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}_\infty$ es un funtor fiel y pleno.

Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado tal que $\{x_0\}$ es cerrado en X. Entonces se considera $\bar{X} = X\text{-}\{x_0\}$ con la topología y externología siguientes:

$$\tau_{\bar{X}} = \{A\text{-}\{x_0\} : A \in \tau_X\},$$

$$\varepsilon_{\bar{X}} = \{A\text{-}\{x_0\} : A \in \tau_X, x_0 \in A\}.$$

Obsérvese que $\tau_{\bar{X}} \subset \tau_X$ puesto que $X\text{-}\{x_0\} \in \tau_X$.

Entonces $(\bar{X}_\infty, *) \cong (X, x_0)$ en $\mathbf{Top}_\infty$; efectivamente, en $\bar{X}_\infty$ se tiene la topología $\tau_{\bar{X}_\infty} = \tau_{\bar{X}} \cup \{E \cup \{*\} : E \in \varepsilon_{\bar{X}}\}$. Se define $f : (\bar{X}_\infty, *) \to (X, x_0)$ dada por $f(x) = x$ si $x \in \bar{X}$ y $f(*) = x_0$. Sea $A \in \tau_X$, $x_0 \notin A$, entonces se tiene que $f^{-1}(A) = A = A\text{-}\{x_0\} \in \tau_{\bar{X}} \subset \tau_{\bar{X}_\infty}$. Si $x_0 \in A$ entonces $f^{-1}(A) = (A\text{-}\{x_0\}) \cup \{*\} \in \tau_{\bar{X}_\infty}$. Además $f^{-1}(\{x_0\}) = \{*\}$. Por otro lado se considera $g : (X, x_0) \to (\bar{X}_\infty, *)$ dada por $g(x) = x$, si $x \neq x_0$, $g(x_0) = *$. De forma similar se demuestra que es un morfismo de $\mathbf{Top}_\infty$, además $fg = id$ y $gf = id$. □

1.2 Leyes exponenciales.

Ahora se analizarán unas leyes exponenciales en **E** de carácter general y también unas consecuencias que se deducen de éstas.

Definición 1.2.1 Sea X un espacio exterior y $L \subset X$. Se dice que L es *e-compacto* si L-E es compacto para cada E e-abierto.

Se deduce inmediatamente que X es e-compacto si y sólo si su externología está contenida en la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Lema 1.2.1 *Si $f : X \to Y$ es exterior y $L \subset X$ es e-compacto entonces $f(L)$ es e-compacto.*

Demostración:

Sea E e-abierto en Y, entonces $f(L)$-$E = f(L\text{-}f^{-1}(E))$. Ya que f es exterior, $f^{-1}(E)$ es e-abierto, por tanto, L-$f^{-1}(E)$ es compacto. De la continuidad de f se deduce el resultado. □

Definición 1.2.2 Sean X, Z espacios exteriores. Se define

$$Z^X = Hom_{\mathbf{E}}(X, Z),$$

con la topología generada por la subbase cuyos elementos son de la forma

$$(K, U) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(K) \subset U\},$$

$$(L, E) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(L) \subset E\},$$

donde K es compacto en X, U abierto en Z, L es e-compacto en X y E e-abierto en Z. Esta topología se denotará por τ_{Z^X}.

Lema 1.2.2

(i) Si $f : X' \to X$ es una aplicación exterior y Z espacio exterior entonces $f^* : Z^X \to Z^{X'}$ es continua.

(ii) Si $g : Z \to Z'$ es una aplicación exterior y X espacio exterior entonces $g_* : Z^X \to (Z')^X$ es continua.

Demostración:

(i) Sea K un compacto en X', U abierto en Z. Entonces

$$(f^*)^{-1}((K, U)) = \{\alpha \in Z^X : \alpha(f(K)) \subset U\} = (f(K), U).$$

De la continuidad de f se desprende que $f(K)$ es compacto por lo que esta antiimagen es abierta en Z^X. Análogamente si L es e-compacto en X' y E e-abierto en Z entonces se tiene que

$$(f^*)^{-1}((L,E)) = (f(L),E).$$

Por el lema 1.2.1 este subconjunto es abierto en Z^X.

(ii) Si K es compacto en X y U abierto en Z' entonces

$$(g_*)^{-1}((K,U)) = \{\alpha \in Z^X : g(\alpha(K)) \subset U\} = \{\alpha \in Z^X : \alpha(K) \subset g^{-1}(U)\},$$

que es $(K, g^{-1}(U))$. Por la continuidad de g, $g^{-1}(U)$ es abierto, por lo que se tiene que $(g_*)^{-1}((K,U))$ es abierto. Finalmente,

$$(g_*)^{-1}((L,E)) = (L, g^{-1}(E)),$$

que es abierto, teniendo en cuenta esta vez que g es exterior.

□

Corolario 1.2.1 *Existe un funtor,*

$$(.)^{(.)} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \to \mathbf{Top},$$

dado por $(X,Z) \rightsquigarrow Z^X$, $(f,g) \rightsquigarrow g^f = f^* g_*$.

Lema 1.2.3 *Sea X espacio exterior, Hausdorff, localmente compacto, con externología ε^X_{cc}, y Z espacio exterior. Entonces Z^X admite como subbase a aquella que tiene como elementos los de la forma (K,U), $(\bar{E}_X, E_Z)$, con K compacto, U abierto, E_X e-abierto en X y E_Z e-abierto en Z, donde $\bar{E}_X$ denota la clausura de E_X.*

Demostración:

Se denota por τ'_{Z^X} la topología generada por estos nuevos subconjuntos cuya subbase se denotará por Σ'. Si la subbase de τ_{Z^X} se denota por Σ y E es e-abierto en X entonces $\bar{E}$ es e-compacto puesto que, si E' es e-abierto, se tiene que $\bar{E}\text{-}E' = \bar{E} \cap (X\text{-}E')$, que es un cerrado contenido en el compacto $X\text{-}E'$. Así, $\bar{E}\text{-}E'$ es compacto. Esto demuestra que $\Sigma' \subset \Sigma$ y, por tanto, $\tau'_{Z^X} \subset \tau_{Z^X}$. Para ver $\tau_{Z^X} \subset \tau'_{Z^X}$ basta comprobar que $\Sigma \subset \tau'_{Z^X}$. Sea L e-compacto en X, E e-abierto en Z y $\alpha \in (L,E)$. Entonces $\alpha^{-1}(E) \in \varepsilon^X_{cc}$. Ya que X es Hausdorff y localmente compacto no es difícil comprobar que existe $E' \in \varepsilon^X_{cc}$ tal que su clausura está contenida en $\alpha^{-1}(E)$. Entonces se verifica que $\alpha \in (\bar{E}', E) \cap (L\text{-}E', E) \subset (L,E)$, pero $(\bar{E}', E) \cap (L\text{-}E', E) \in \tau'_{Z^X}$ demostrándose así que $(L,E) \in \tau'_{Z^X}$. □

Definición 1.2.3 Sean X espacio exterior e Y espacio topológico. Se define en $X \times Y$ la topología producto y externología dada por aquellos subconjuntos abiertos de $X \times Y$, E, tales que para cada $y \in Y$ existe $U_y \in \tau_Y$, $y \in U_y$, y existe $E_y \in \varepsilon_X$ tal que $E_y \times U_y \subset E$. Este nuevo espacio exterior se denotará por $X \bar{\times} Y$.

Lema 1.2.4 *Sea $f : X \to X'$ una aplicación exterior y $g : Y \to Y'$ una aplicación continua, entonces $f \bar{\times} g : X \bar{\times} Y \to X' \bar{\times} Y'$, $(x, y) \rightsquigarrow (f(x), g(y))$, es exterior.*

Demostración:

Por la continuidad de f y g se tiene la continuidad de $f \bar{\times} g$. Ahora, si E es e-abierto de $X' \bar{\times} Y'$ e $y \in Y$ entonces existe $U_{g(y)} \in \tau_{Y'}$, $g(y) \in U_{g(y)}$, existe $E_{g(y)} \in \varepsilon_{X'}$ tal que $E_{g(y)} \times U_{g(y)} \subset E$. Entonces

$$f^{-1}(E_{g(y)}) \times g^{-1}(U_{g(y)}) \subset (f \bar{\times} g)^{-1}(E).$$

El hecho de que f es exterior y que g es continua concluye la demostración. □

Corolario 1.2.2 *Existe un funtor,*

$$\_\bar{\times}\_ : \mathbf{E} \times \mathbf{Top} \to \mathbf{E},$$

dado por $(X, Y) \rightsquigarrow X \bar{\times} Y$, $(f, g) \rightsquigarrow f \bar{\times} g$.

Cuando el espacio topológico Y es compacto, la externología de $X \bar{\times} Y$ tiene una expresión más sencilla y manejable.

Proposición 1.2.1 *Sea X espacio exterior, Y espacio topológico compacto, entonces $\varepsilon_{X \bar{\times} Y} = \{E \in \tau_{X \times Y} : \exists G \in \varepsilon_X, G \times Y \subset E\}$.*

Demostración:

Sea E e-abierto de $X \bar{\times} Y$. Para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto de y, U_y y existe E_y e-abierto de X tal que $E_y \times U_y \subset E$. De la compacidad de Y se tiene $Y = \cup_{k=1}^{n} U_{y_k}$. Se considera $G = \cap_{k=1}^{n} E_{y_k}$. Se comprueba inmediatamente que $G \times Y \subset E$. El resto de la demostración es trivial. □

Un hecho importante es que, en el caso que X tenga la externología de los complementos de sus compacto-cerrados y que Y sea un espacio topológico compacto, la externología en $X\bar{\times}Y$ coincide con la de los complementos de sus compacto-cerrados. Para demostrarlo se introduce, a nivel técnico, lo que se denomina descomposición.

Una *descomposición* de un conjunto X es una partición $\mathcal{P}$ de X,

$$\mathcal{P} = \{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X),$$

con $\cup_{i\in I}A_i = X$, $A_i \cap A_j = \phi$, si $i \neq j$. En el caso de un espacio topológico (X, τ) se puede definir una topología en $\mathcal{P}$ de la siguiente forma:

$A = \{A_i\}_{i\in L\subset I} \in \tau_{\mathcal{P}}$ si y sólo si $\cup_{i\in L}A_i \in \tau$. Esto da lugar a que la proyección canónica $p : X \to \mathcal{P}$, ($x \rightsquigarrow A_x$, A_x el único elemento de la partición que contiene a x) sea continua. Esta aplicación se denomina *descomposición* y es sencillo comprobar que es cociente.

Dado un abierto V de X se dice que es *saturado* relativo a $\mathcal{P}$ si existe un abierto W en $\mathcal{P}$ tal que $V = p^{-1}(W)$. Se dirá que la descomposición $\mathcal{P}$ es *semicontinua superiormente* si para cada $A \in \mathcal{P}$, $U \in \tau$ con $A \subset U$ existe $V \in \tau$ saturado tal que $A \subset V \subset U$. La siguiente proposición puede verse demostrada en [78]:

Proposición 1.2.2 *$p : X \to \mathcal{P}$ es cerrada si y sólo si $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente.*

Como consecuencia, si $f : X \to Y$ es una aplicación cociente, entonces f es cerrada si y sólo si $\mathcal{P} = \{f^{-1}(\{y\}) : y \in Y\}$ es una descomposición semicontinua superiormente.

Proposición 1.2.3 *Sea X un espacio exterior dotado de la externología de los complementos de sus compacto-cerrados y sea Y espacio topológico compacto, entonces la externología de $X\bar{\times}Y$ coincide con la de los complementos de sus compacto-cerrados.*

Demostración:

Se denota por $p_X : X \times Y \to X$ la proyección sobre X, que es cociente. Se considera también la descomposición de $X \times Y$,

$$\mathcal{P} = \{p_X^{-1}(\{x\}) : x \in X\} = \{\{x\} \times Y : x \in X\}.$$

Sea $A = \{x_0\} \times Y \in \mathcal{P}$ y U un abierto de $X \times Y$ que contiene a A. Para cada $y \in Y$, $(x_0, y) \in U$, por lo que existe un abierto en X, A_y, y un abierto en Y, B_y, tales que $(x_0, y) \in A_y \times B_y \subset U$. De la compacidad de $\{x_0\} \times Y$ se tiene $\{x_0\} \times Y \subset \cup_{k=1}^n (A_{y_k} \times B_{y_k})$. Si se considera $C = \cap_{k=1}^n A_{y_k}$ que es abierto en X y $x_0 \in C$ entonces $C \times Y = p^{-1}(\{\{x\} \times Y : x \in C\})$ es abierto saturado y $A \subset C \times Y \subset U$. Así se tiene que $\mathcal{P}$ es semicontinua superiormente, por lo que p_X es cerrada. Ahora sea $E \in \varepsilon_{cc}^{X \times Y}$, entonces $E^c = K$ es compacto-cerrado en $X \times Y$, luego $p_X(K)$ es compacto-cerrado en X. Para finalizar se considera $G = X\text{-}p_X(K)$, entonces $G \times Y \subset E$, por lo que E es un e-abierto de $X \bar{\times} Y$.

Recíprocamente, si E es e-abierto de $X \bar{\times} Y$ entonces $G \times Y \subset E$, para algún G, complemento de un compacto-cerrado. Así,

$$E^c \subset (G \times Y)^c = G^c \times Y.$$

$\square$

Proposición 1.2.4 *Sean X,Z espacios exteriores, Y espacio topológico. Si $f : X \bar{\times} Y \to Z$ es exterior, entonces la aplicación $\tilde{f} : Y \to Z^X$, definida como $\tilde{f}(y)(x) = f((x, y))$, es continua.*

Demostración:

$\tilde{f}$ está bien definido, si $y_0 \in Y$, se considera $j_{y_0} : X \to X \bar{\times} Y$, $x \rightsquigarrow (x, y_0)$, que es exterior, y como $\tilde{f}(y_0) = f j_{y_0}$ entonces $\tilde{f}(y_0) \in Z^X$.

Sea $y_0 \in Y$ tal que $\tilde{f}(y_0) \in (K, U)$, para algún compacto K de X y abierto U de Y. De la continuidad de f, para cada $x \in K$ existen entornos abiertos de x e y_0, V_x y W_x respectivamente, tales que $f(V_x \times W_x) \subset U$. De la compacidad de K, se tiene $K \subset \cup_{i=1}^n V_{x_i}$, y considerando el entorno abierto de y_0, $W = \cap_{i=1}^n W_{x_i}$, se tiene que $\tilde{f}(W) \subset (K, U)$.

Por otro lado, si $\tilde{f}(y_0) \in (L, E)$ para algún L e-compacto y E e-abierto, del hecho que f es exterior, existe E' un e-abierto en X y existe un entorno abierto de y_0, U, tal que $E' \times U \subset f^{-1}(E)$. Para cada $x \in L\text{-}E'$, como f es continua y $f((x, y_0)) \in E$ existen entornos abiertos de x e y_0, A_x, B_x, respectivamente, con $f(A_x \times B_x) \subset E$. Como $L\text{-}E'$ es compacto entonces se extrae $\{A_{x_i}\}_{i=1}^n$ un subrecubrimiento finito. Sea el entorno abierto de y_0, $W = (\cap_{i=1}^n B_{x_i}) \cap U$, entonces $\tilde{f}(W) \subset (L, E)$. $\square$

Proposición 1.2.5 *Sean X, Z espacios exteriores, X Hausdorff, localmente compacto, con externología ε^X_{cc}, y sea Y un espacio topológico. Si $g : Y \to Z^X$ es continua, entonces $\bar{g} : X\bar{\times}Y \to Z$, $\bar{g}((x,y)) = g(y)(x)$, es exterior.*

Demostración:

Sea $(x_0, y_0) \in X\bar{\times}Y$ con $\bar{g}((x_0,y_0)) \in U$, para U abierto en Z. De la compacidad local de X y la continuidad de $g(y_0)$, existe K un entorno compacto de x_0 tal que $g(y_0) \in (K,U)$. Por la continuidad de g existe V un entorno abierto de y_0 tal que $g(V) \subset (K,U)$, es decir, $\bar{g}(K \times V) \subset U$, de lo que se deduce la continuidad de $\bar{g}$.

Sea ahora E e-abierto en Z, y sea $y_0 \in Y$. Ya que $g(y_0) \in Z^X$ existe un compacto-cerrado en X, K, tal que $g(y_0)(X\text{-}K) \subset E$. X es Hausdorff y localmente compacto, luego existe un compacto-cerrado, K', verificando que $\overline{X\text{-}K'} \subset X\text{-}K$. Así $g(y_0) \in (\overline{X\text{-}K'}, E)$. De la continuidad de g se deduce que existe un entorno abierto de y_0, U, con $g(U) \subset (\overline{X\text{-}K'}, E)$. Para concluir, $(X\text{-}K') \times U \subset (\bar{g})^{-1}(E)$, siendo $(\bar{g})^{-1}(E)$ abierto pues $\bar{g}$ es continua. □

Corolario 1.2.3 *Sean X, Z espacios exteriores, X Hausdorff, localmente compacto, con externología ε^X_{cc}, e Y espacio topológico. Entonces existe una biyección,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z^X).$$

Definición 1.2.4 Sea Y un espacio topológico y Z un espacio exterior. Se define $Z^Y = Hom_{\mathbf{Top}}(Y,Z)$ provista de la topología compacto-abierta y la externología cuya base exterior está formada por los subconjuntos de Z^Y de la forma (K,E), K compacto en Y, E e-abierto en Z. Esta externología se denotará por ε_{Z^Y}.

Nótese que, si K, K' son compactos en Y y E, E' son e-abiertos en Z, entonces $(K \cup K', E \cap E') \subset (K,E) \cap (K',E')$. En el caso que Y sea compacto se puede simplificar la subbase exterior.

Proposición 1.2.6 *Si Y es un espacio topológico compacto, Z un espacio exterior, entonces ε_{Z^Y} está generada por la base exterior cuyos elementos son de la forma (Y,E), E e-abierto en Z.*

Demostración:

Sea β' la base formada por los elementos (Y, E), y sea β la base de definición de ε_{Z^Y}. Por un lado $\beta' \subset \beta$, con lo cual se tiene un contenido en las externologías generadas. Si K es un compacto en Y y E es un e-abierto en Z, evidentemente (K, E) es un abierto de Z^Y que contiene a (Y, E). $\square$

Lema 1.2.5

(i) Si $g : Z \to Z'$ es una aplicación exterior e Y es un espacio topológico entonces $g_* : Z^Y \to (Z')^Y$ es exterior.

(ii) Si $f : Y' \to Y$ es una aplicación continua y Z es un espacio exterior entonces $f^* : Z^Y \to Z^{Y'}$ es exterior.

Demostración:

(i) Si K es compacto en Y, U abierto en Z entonces

$$(g_*)^{-1}((K, U)) = (K, g^{-1}(U)),$$

que es abierto pues g es continua. Análogamente si E es e-abierto entonces $(g_*)^{-1}((K, E)) = (K, g^{-1}(E)) \in \tau_{Z^Y}$ que es abierto pues g es exterior.

(ii) Si K es compacto y U abierto entonces $(f^*)^{-1}((K, U)) = (f(K), U)$ que es abierto pues $f(K)$ es compacto. Se tiene también lo mismo para e-abiertos. $\square$

Corolario 1.2.4 *Existe un funtor,*

$$(.)^{(.)} : \mathbf{Top}^{op} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E},$$

dado por $(Y, Z) \rightsquigarrow Z^Y$, $(f, g) \rightsquigarrow g^f = g_* f^*$.

Es conocido que si X,Y,Z son espacios topológicos, Y localmente compacto, entonces existe la biyección natural

$$Hom_{\mathbf{Top}}(X \times Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{Top}}(X, Z^Y),$$

donde en $X \times Y$ se considera la topología producto y en $Z^Y = Hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$ la topología compacto-abierta. Se verifica una ley exponencial similar para espacios exteriores.

Proposición 1.2.7 *Sean X, Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto. Si $f : X\bar{\times}Y \to Z$ es una aplicación exterior, entonces la aplicación $\tilde{f} : X \to Z^Y$, dada por $\tilde{f}(x)(y) = f((x,y))$, es exterior.*

Demostración:

Al ser f exterior, en particular es continua, por lo que, haciendo uso de la ley exponencial en **Top**, se tiene que $\tilde{f}$ es continua.

Sea K un compacto en Y, E un e-abierto en Z. Para cada $y \in K$ existe un entorno abierto de y, U_y, y existe un e-abierto de X, E_y, tales que $E_y \times U_y \subset f^{-1}(E)$. De la compacidad de K se toma un subrecubrimiento finito $\{U_{y_k}\}_{k=1}^n$. Sea el e-abierto $E' = \cap_{k=1}^n E_{y_k}$. Entonces $\tilde{f}(E') \subset (K, E)$.

□

Proposición 1.2.8 *Sean X,Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto. Si $g : X \to Z^Y$ es una aplicación exterior, entonces la aplicación $\bar{g} : X\bar{\times}Y \to Z$ definida como $\bar{g}((x,y)) = g(x)(y)$, es exterior.*

Demostración:

Teniendo en cuenta de nuevo la ley exponencial en **Top** se deduce la continuidad de $\bar{g}$. Por otro lado, si E es e-abierto en Z, para cada $y \in Y$ existe un entorno compacto de y, K_y. Como g es exterior, existe un e-abierto, E_y, de X tal que $g(E_y) \subset (K_y, E)$. Tomando U_y el interior de K_y, entonces $E_y \times U_y \subset (\bar{g})^{-1}(E)$. □

Corolario 1.2.5 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X\bar{\times}Y, Z) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Z^Y),$$

con X,Z espacios exteriores, Y espacio topológico localmente compacto.

De las biyecciones naturales 1.2.3, 1.2.5 se deduce primeramente que, fijado un espacio exterior X Hausdorff, localmente compacto, con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, existe una situación de adjunción,

$$X\bar{\times}\_ : \mathbf{Top} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^X, \quad X\bar{\times}\_ \dashv (.)^X.$$

También, fijado un espacio topológico localmente compacto Y, existe una adjunción,

$$\_\bar{\times}Y : \mathbf{E} \rightleftarrows \mathbf{E} : (.)^Y, \quad \_\bar{\times}Y \dashv (.)^Y.$$

Dados X, Z dos espacios exteriores, X Hausdorff, localmente compacto y con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, e Y un espacio topológico localmente compacto, cabe preguntarse qué relación tienen los espacios topológicos $(Z^Y)^X$ y $(Z^X)^Y$. Según lo visto, existe una biyección natural entre ellos, pero esta biyección es especial.

Proposición 1.2.9 *$(Z^Y)^X$ y $(Z^X)^Y$ son homeomorfos.*

Demostración:

Se define $\varphi : (Z^Y)^X \to (Z^X)^Y$, por $\varphi(f)(y)(x) = f(x)(y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Nótese que es biyección, teniendo en cuenta las biyecciones 1.2.3 y 1.2.5.

Sea K un compacto en Y, K' compacto en X, U abierto en Z y f_0 de $(Z^Y)^X$ tal que $\varphi(f_0) \in (K,(K',U))$. Se considera $(K',(K,U))$, que es un abierto en $(Z^Y)^X$ que contiene a f_0 y $\varphi((K',(K,U))) \subset (K,(K',U))$. De forma similar, si el abierto que contiene a $\varphi(f_0)$ es de la forma $(K,(\bar{E}_X, E_Z))$, entonces $\varphi((\bar{E}_X,(K,E_Z))) \subset (K,(\bar{E}_X,E_Z))$. Así se deduce la continuidad de φ. Se denota por ψ a la aplicación inversa de φ. Haciendo argumentos similares se demuestra su continuidad. $\square$

Nótese que el homeomorfismo dado en la proposición anterior es transformación natural.

1.3 Estructuras de Quillen para E.

Se estudiarán diferentes estructuras de modelo para homotopía en el sentido de Quillen, relacionándolas entre sí. Se considerará el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta y externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, de sus subconjuntos finitos. También a S^n, D^n, I, la n-esfera, el n-disco y el intervalo unidad cerrado provistos con las topologías inducidas por la usual, respectivamente.

Definición 1.3.1 Dado X espacio exterior se define el *cilindro de X* como el espacio exterior $X\bar{\times}I$.

Puesto que I es compacto se observa que la externología en $X\bar{\times}I$ es la formada por aquellos abiertos de la topología producto de $X \times I$, E, tales que existe un e-abierto en X, G con $G \times I \subset E$.

Esta construcción da lugar al *funtor cilindro* $\_\bar{\times}I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$. Asociadas a este funtor surgen $\delta_0, \delta_1 : id \to \_\bar{\times}I$ y $p : \_\bar{\times}I \to id$, transformaciones naturales dadas para cada espacio exterior, X, como $\delta_\varepsilon(x) = (x, \varepsilon)$, $x \in X$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, y $p((x,t)) = x$, $x \in X$, $t \in I$. Además $p\delta_\varepsilon = id$, haciendo el diagrama siguiente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[rr, "id+id"] \arrow[dr, "\delta_0+\delta_1"'] & & X \\ & X\bar{\times}I. \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

De forma totalmente dual se tiene:

Definición 1.3.2 Dado X espacio exterior se define el *cocilindro de* X como el espacio exterior X^I.

Surge el *funtor cocilindro* $(.)^I : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ y transformaciones naturales $d_0, d_1 : (.)^I \to id$, $s : id \to (.)^I$ definidos para cada espacio exterior X como $d_\varepsilon(\alpha) = \alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\alpha \in X^I$, y $s(x)(t) = x$, para $x \in X$, $t \in I$. Se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(id{,}id)"] \arrow[dr, "s"'] & & X \times X \\ & X^I. \arrow[ur, "(d_0{,}d_1)"'] & \end{tikzcd}$$

Según lo ya visto, el funtor cilindro es adjunto a izquierda del funtor cocilindro.

Se va a considerar la categoría de los espacios exteriores bajo $\mathbb{N}$, $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$. Los objetos $a : \mathbb{N} \to X$, que son aplicaciones exteriores, se denotarán por (X, a), mientras que los morfismos

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

se denotarán por $f:(X,a)\to(Y,b)$.

Definición 1.3.3 Sean $f,g:(X,a)\to(Y,b)$ aplicaciones exteriores bajo $\mathbb{N}$. Se dirá que f *es e-homótopa a* g *relativamente a* $\mathbb{N}$, si existe una aplicación exterior $H: X\bar{\times}I\to Y$, denominada *homotopía exterior* relativa a $\mathbb{N}$, tal que $H\delta_0=f$, $H\delta_1=g$ y $H(a\times id)=bp$.

Se observa que, por la adjunción del funtor cilindro con el funtor cocilindro, f es homótopa a g relativamente a $\mathbb{N}$ si y sólo si existe una aplicación exterior $\tilde{H}:X\to Y^I$, tal que $d_0\tilde{H}=f$, $d_1\tilde{H}=g$ y $\tilde{H}a=sb$.

Sustituyendo $\mathbb{N}$ por $\emptyset$ surge, de forma natural, la *homotopía exterior no relativa.*

Una rápida comprobación demuestra que la relación de e-homotopía relativa a $\mathbb{N}$ es de equivalencia en $Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}((X,a),(Y,b))$. Además, esta relación es compatible respecto de la composición con aplicaciones exteriores bajo $\mathbb{N}$.

Se considera $id\times *:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\bar{\times}S^n$, $n\rightsquigarrow(n,*)$, aplicación exterior, para cada n un entero no negativo, donde $*$ es el punto distinguido de S^n.

Dado X espacio exterior existe la biyección

$$Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}S^n,X)\cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n,X^{\mathbb{N}}).$$

Este tipo de biyección se puede trasladar para objetos bajo $\mathbb{N}$:

$$Hom_{\mathbf{E}^{\mathbb{N}}}((\mathbb{N}\bar{\times}S^n,id\times *),(X,a))\cong Hom_{\mathbf{Top}^*}((S^n,*),(X^{\mathbb{N}},a)).$$

Teniendo en cuenta que $Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(S^n\times I),X)\cong Hom_{\mathbf{Top}}(S^n\times I,X^{\mathbb{N}})$ existe la biyección

$$[(\mathbb{N}\bar{\times}S^n,id\times *),(X,a)]^{\mathbb{N}}\cong[(S^n,*),(X^{\mathbb{N}},a)],$$

donde el primer miembro de la biyección es el conjunto de las clases de e-homotopía relativa y el segundo es el conjunto de clases homotopía punteado clásico. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 1.3.4 Dado (X,a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}$, se define su *n-conjunto de homotopía exterior de tipo Brown* como el conjunto

$$\pi_n^B((X,a))=[(\mathbb{N}\bar{\times}S^n,id\times *),(X,a)]^{\mathbb{N}}.$$

Así, existe una biyección $\varphi_{(X,a)} : \pi_n^B((X,a)) \to \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, de forma que induce la estructura algebraica de uno a otro. Entonces, $\pi_0^B((X,a))$ es un conjunto punteado, $\pi_1^B((X,a))$ es un grupo y $\pi_n^B((X,a))$ es un grupo abeliano, para $n \geq 2$. Por otro lado, dado $f : (X,a) \to (Y,b)$ una aplicación exterior bajo $\mathbb{N}$, se define $\pi_n^B(f) = f_* : \pi_n^B((X,a)) \to \pi_n^B((Y,b))$. Como la aplicación $f^{\mathbb{N}} : (X^{\mathbb{N}}, a) \to (Y^{\mathbb{N}}, b)$ es continua punteada y existe un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^B((X,a)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi_n^B(f)"'] & \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \arrow[d, "\pi_n(f^{\mathbb{N}})"] \\
\pi_n^B((Y,b)) \arrow[r, "\cong"] & \pi_n(Y^{\mathbb{N}}, b),
\end{tikzcd}$$

entonces $\pi_0^B(f)$ es aplicación de conjuntos, $\pi_1^B(f)$ es homomorfismo de grupos y $\pi_n^B(f)$ es homomorfismo de grupos abelianos, para $n \geq 2$. Además, $\pi_n^B(f)$ es biyectivo si y sólo si $\pi_n(f^{\mathbb{N}})$ lo es.

También se puede considerar $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ con la topología inducida por la usual y externología de los complementos de sus compactos. De forma totalmente análoga, se tiene la categoría de los espacios exteriores bajo $\mathbb{R}_+$, $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$. Surge la noción de e-homotopía relativa a $\mathbb{R}_+$ y, observando que $\mathbb{R}_+$ es Hausdorff, localmente compacto y con la externología $\varepsilon_{cc}^{\mathbb{R}_+}$, se puede hacer el mismo razonamiento hecho para $\mathbb{N}$, dando lugar, así, a la siguiente definición:

Definición 1.3.5 Dado (X,a) objeto en $\mathbf{E}^{\mathbb{R}_+}$, se define su *n-conjunto de homotopía exterior de tipo Steenrod* como el conjunto

$$\pi_n^S((X,a)) = [(\mathbb{R}_+ \bar{\times} S^n, id \times *), (X,a)]^{\mathbb{R}_+}.$$

Así, se tiene un conjunto punteado para $n = 0$, un grupo para $n = 1$ y un grupo abeliano para $n \geq 2$. De igual manera se tiene, dado una aplicación exterior bajo $\mathbb{R}_+$, una aplicación de conjuntos, un homomorfismo de grupos o un homomorfismo de grupos abelianos, dependiendo que la dimensión sea 0, 1 o mayor o igual que 2, respectivamente.

Definición 1.3.6 Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *equivalencia débil exterior* o *e-equivalencia débil* si verifica una de las dos condiciones siguientes:

(i) Si $X^{\mathbb{N}} = \emptyset$ entonces $Y^{\mathbb{N}} = \emptyset$.

(ii) Si $X^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$ entonces, $\pi_n^B(f) : \pi_n^B((X, a)) \to \pi_n^B((Y, fa))$ es biyección, para cada $n \geq 0$, $a \in X^{\mathbb{N}}$.

Definición 1.3.7 Sea $p : E \to B$ una aplicación exterior, se dice que es una *fibración exterior*, o *e-fibración* si tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones $\delta_0 : \mathbb{N}\bar{\times}D^n \to \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I)$, $n \geq 0$. Es decir, todo diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}D^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\delta_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

tiene elevación, $h : \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I) \to E$, $ph = v$, $h\delta_0 = u$.

Lema 1.3.1 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces f es equivalencia débil exterior o fibración exterior si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil o fibración en* **Top***, respectivamente. Además, si f es equivalencia de homotopía exterior, entonces $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia de homotopía en* **Top***.*

Demostración:

Obsérvese que, como $\pi_n^B(f) \cong \pi_n(f^{\mathbb{N}})$, entonces es equivalente que f sea e-equivalencia débil a que $f^{\mathbb{N}}$ sea equivalencia débil en **Top**. De la ley exponencial 1.2.3 f tiene la P.E.D. respecto de $\delta_0 : \mathbb{N}\bar{\times}D^n \to \mathbb{N}\bar{\times}(D^n \times I)$, $n \geq 0$ si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ la tiene respecto de $\delta_0 : D^n \to D^n \times I$, $n \geq 0$.

Supóngase ahora un inverso homotópico exterior $g : Y \to X$ de f. Si $F : X \to X^I$ es tal que $d_0F = gf$ y $d_1F = id_X$, considerando la composición de $F^{\mathbb{N}}$ con el homeomorfismo $(X^I)^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\cong} (X^{\mathbb{N}})^I$ se tiene una homotopía tal que $g^{\mathbb{N}}f^{\mathbb{N}} \simeq id_{X^{\mathbb{N}}}$. Análogamente se demuestra que $f^{\mathbb{N}}g^{\mathbb{N}} \simeq id_{Y^{\mathbb{N}}}$. $\square$

Definición 1.3.8 Sea $i : A \to B$ una aplicación exterior, se dice que es *cofibración exterior* o *e-cofibración* si tiene la propiedad de elevación de homotopía a izquierda respecto de las e-fibraciones triviales.

García-Pinillos demostró que **E**, junto con la e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias débiles, tiene estructura de categoría de modelos cerrada. Se demostrará que, además, tiene una estructura adicional, la de categoría simplicial de modelos cerrada.

Se define un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E}} : \mathbf{E}^{op} \times \mathbf{E} \to \mathbf{SS}$ por,

$$\begin{gathered}\underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)_n = Hom_{\mathbf{E}}(X \bar{\times} |\Delta[n]|, Y),\\ \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)(\varphi) = Hom_{\mathbf{E}}(id_X \bar{\times} |\varphi_*|, id_Y),\\ \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(f,g)_n = Hom_{\mathbf{E}}(f \bar{\times} |id_{\Delta[n]}|, g).\end{gathered}$$

Si $f \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)_n$ y $g \in \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y,Z)_n$, entonces $g \circ_n f$ viene determinado por la composición

$$X \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{id_X \bar{\times} \Delta} (X \bar{\times} |\Delta[n]|) \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{f \bar{\times} id_{|\Delta[n]|}} Y \bar{\times} |\Delta[n]| \xrightarrow{g} Z.$$

Es de fácil comprobación el hecho que $\circ$ define una aplicación simplicial para cada terna de espacios exteriores X, Y, Z.

Teniendo en cuenta que $|\Delta[0]| \cong *$, entonces $X \bar{\times} |\Delta[0]| \cong X$ para cada espacio exterior X, pudiéndose definir, $Hom_{\mathbf{E}}(\_,\_) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(\_,\_)_0$, isomorfismo natural.

Se deja para el lector demostrar que:

Proposición 1.3.1 **E** *con la estructura definida anteriormente es una categoría simplicial.*

Definición 1.3.9 Sea X un espacio exterior y sea K un conjunto simplicial finito. Se define $X \otimes K = X \bar{\times} |K|$ y $X^K = X^{|K|}$.

Nótese que, en este caso, $|K|$ es un espacio topológico compacto y Hausdorff

Si X es un espacio exterior se considera el funtor $B(X) : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{E}$ dado como $B(X)([n]) = B(X)_n = X \bar{\times} |\Delta[n]|$, $[n] \in \mathbf{\Delta}$ y $B(X)(\varphi) = id_X \bar{\times} |\varphi_*|$, para cada morfismo φ de $\mathbf{\Delta}$.

Como $Hom_{\mathbf{E}}(B(X)(.), Y) = \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)$, haciendo uso del Teorema de MacLane-Moerdijk cuando $\mathcal{C} = \mathbf{\Delta}$, $\varepsilon = \mathbf{E}$ y $A = B(X)$ se tiene una biyección natural en K e Y,

$$Hom_{\mathbf{E}}(L_{B(X)}(K), Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y)),$$

donde $L_{B(X)}(K) = colim\ (\int_{\mathbf{\Delta}} K \overset{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \overset{B(X)}{\to} \mathbf{E})$.

Realmente se tiene que B es un funtor $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{\mathbf{\Delta}}$ dado para los morfismos como $B(f)_{[n]} = f \bar{\times} id_{|\Delta[n]|}$.

Sean $\lambda : K \to K'$ una aplicación simplicial y $f : X \to X'$ exterior. Si $\Delta(C)$ es el funtor constante con valor C, se consideran los coconos universales respectivos de $B(X)\pi_K$ y $B(X')\pi_{K'}$, $\alpha : B(X)\pi_K \to \Delta(L_{B(X)}(K))$ y $\alpha' : B(X')\pi_{K'} \to \Delta(L_{B(X')}(K'))$.

Se define la transformación natural $\alpha'_\lambda : B(X')\pi_K \to \Delta(L_{B(X')}(K'))$ como $(\alpha'_\lambda)_{([n],k)} = \alpha'_{([n],\lambda_n(k))}$, $([n],k) \in \int_\Delta K$. Por la propiedad universal del colímite se induce una única $L_{B(f)}(\lambda) : L_{B(X)}(K) \to L_{B(X')}(K')$ tal que $\Delta(L_{B(f)}(\lambda))\alpha = \alpha'_\lambda B(f)\pi_K$.

Esta construcción define un funtor,

$$L_{B(\_)}(\_) : \mathbf{SS} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

Proposición 1.3.2 *La biyección*

$$Hom_{\mathbf{E}}(L_{B(X)}(K), Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y))$$

es también natural en X.

Demostración:

Se deja para el lector teniendo en cuenta que la biyección

$$\theta : Hom_{\mathbf{E}}(L_{B(X)}(K), Y) \to Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X,Y))$$

viene dada por $\theta(h)_n(k) = h\alpha_{([n],k)}$ donde $\alpha : B(X)\pi_K \to \Delta(L_{B(X)}(K))$ es cocono universal de $B(X)\pi_K$. $\square$

Lema 1.3.2 *Sea*

$$Z_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Z_2 \xrightarrow{h} Z_3$$

coigualador en **Top**, *Z_2 compacto, Z_3 Hausdorff, y sea Y un espacio exterior. Entonces,*

$$Y^{Z_3} \xrightarrow{h^*} Y^{Z_2} \underset{g^*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} Y^{Z_1}$$

es igualador en **E**.

Demostración:

Sea $\omega : X \to Y^{Z_2}$ una aplicación exterior tal que $f^*\omega = g^*\omega$. Si $x \in X$ entonces $\omega(x)f = \omega(x)g$ con lo que existe una única $\varphi(x) : Z_3 \to Y$ continua tal que $\varphi(x)h = \omega(x)$. Esto define una aplicación $\varphi : X \to Y^{Z_3}$, que es exterior: Si K es un compacto en Z_3 y U un abierto en Y, por las hipótesis del lema $h^{-1}(K)$ es compacto en Z_2 y $(h^{-1}(K), U)$ es abierto en Y^{Z_2}. Así, $\omega^{-1}((h^{-1}(K), U))$ es abierto en X, pero este subconjunto coincide con $\varphi^{-1}((K, U))$ probándose la continuidad de φ. De forma análoga se demuestra que la antiimagen vía φ de todo abierto externo es externa. El resto de la demostración es evidente. $\square$

Lema 1.3.3 *Sea $F : \mathbf{J} \to \mathbf{Top}$ un funtor, donde $\mathbf{J}$ es una categoría finita, $colim_{i\in\mathbf{J}}F(i)$ y cada $F(i)$ son espacios compactos y Hausdorff. Si X es un espacio exterior entonces,*

$$colim_{i\in\mathbf{J}}(X \bar{\times} F(i)) \cong X \bar{\times} colim_{i\in\mathbf{J}}F(i).$$

Demostración:

Primeramente se ve para coproductos finitos, en este caso basta para el coproducto de dos. Si Z_1, Z_2 son espacios compactos y Hausdorff, es sencillo comprobar que $Z_1 \coprod Z_2$ también lo es. Se considera $j_\varepsilon : Z_\varepsilon \to Z_1 \coprod Z_2$ la inyección ε-ésima, $\varepsilon \in \{1, 2\}$, dada por $j_\varepsilon(z) = (z, \varepsilon)$ interpretando $Z_1 \coprod Z_2$ como $(Z_1 \times \{1\}) \cup (Z_2 \times \{2\})$. Entonces,

$$\varphi : X \bar{\times} (Z_1 \coprod Z_2) \to (X \bar{\times} Z_1) \coprod (X \bar{\times} Z_2)$$

dada por $\varphi(x, (z, \varepsilon)) = ((x, z), \varepsilon)$ es isomorfismo exterior.

Por otro lado, si

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z_2 \arrow[r, "h"] & Z_3 \end{tikzcd}$$

es un coigualador en **Top**, con Z_i compacto y Hausdorff, $i \in \{1, 2, 3\}$, entonces, según el lema anterior, para cada espacio exterior Y,

$$\begin{tikzcd} Y^{Z_3} \arrow[r, "h^*"] & Y^{Z_2} \arrow[r, shift left, "f^*"] \arrow[r, shift right, "g^*"'] & Y^{Z_1} \end{tikzcd}$$

es igualador en $\mathbf{E}$. Esto es equivalente a que, para cada espacio exterior X,

$$Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^{Z_3}) \xrightarrow{(h^*)_*} Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^{Z_2}) \underset{(g^*)_*}{\overset{(f^*)_*}{\rightrightarrows}} Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^{Z_1})$$

sea un igualador en **Sets**. Por la ley exponencial del corolario 1.2.5 se concluye que

$$X \bar{\times} Z_1 \underset{id_X \bar{\times} g}{\overset{id_X \bar{\times} f}{\rightrightarrows}} X \bar{\times} Z_2 \xrightarrow{id_X \bar{\times} h} X \bar{\times} Z_3$$

es coigualador en $\mathbf{E}$.

El caso general, teniendo en cuenta que el colímite se construye a partir de coproductos finitos y un coigualador. □

Obsérvese que este lema se extiende de forma natural para morfismos, si $f : X \to Y$ es una aplicación exterior y $\alpha : F \to G$ una transformación natural entre funtores con las hipótesis del lema, entonces

$$colim(f \bar{\times} \alpha) \cong f \bar{\times} colim\ \alpha.$$

Por otro lado, en el caso que X sea localmente compacto, Hausdorff, con externología ε^X_{cc}, el lema es válido para $F : \mathbf{J} \to \mathbf{Top}$ cualquier funtor desde una categoría pequeña a los espacios topológicos.

Las propiedades de colímites que se exponen ahora serán de gran utilidad.

Dado un funtor $L : \mathbf{J}' \to \mathbf{J}$ y un objeto $j \in \mathbf{J}$, la *categoría comma* $j \downarrow L$ tiene como objetos morfismos de la forma $u : j \to L(j')$. Un morfismo de $u_0 : j \to L(j'_0)$ a $u_1 : j \to L(j'_1)$ es un morfismo $v' : j'_0 \to j'_1$ tal que $L(v')u_0 = u_1$.

Una categoría $\mathbf{J}$ es *conexa* si, dados dos objetos j_0, j_1 de $\mathbf{J}$ existe una sucesión finita de morfismos (en ambas direcciones posibles) uniendo j_0 con j_1. Un funtor $L : \mathbf{J}' \to \mathbf{J}$ es *final* si para cada $j \in \mathbf{J}$, la categoría comma $j \downarrow L$ es no vacía y conexa.

Proposición 1.3.3 *Si $L : \mathbf{J}' \to \mathbf{J}$ es final y $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ es un funtor tal que existe $colim\ FL$ entonces existe $colim\ F$ y el morfismo canónico $colim\ FL \to colim\ F$ es un isomorfismo.*

Para su demostración puede consultarse [54]. Se denotará por $\mathbf{\Delta/n}$ la subcategoría plena de $\mathbf{\Delta}$ determinada por los objetos $[0], [1], ..., [n]$. Entonces, dado un conjunto simplicial $K : \mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Sets}$, se define el funtor $Sk_n(K)$ como la composición $(\mathbf{\Delta/n})^{\mathbf{op}} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}} \xrightarrow{K} \mathbf{Sets}$.

Proposición 1.3.4 *Si K es un conjunto simplicial con $dim(K) \leq n$ entonces el funtor canónico $I : \int_{\mathbf{\Delta/n}} Sk_n(K) \to \int_{\mathbf{\Delta}} K$ es final.*

Demostración:

Sea $([p], x)$ un objeto de $\int_{\mathbf{\Delta}} K$. Como la dimensión de K es menor o igual que n se tiene que la categoría comma $([p], x) \downarrow I$ es no vacía. Para probar que $([p], x) \downarrow I$ es conexa se aplica el lema de Eilenberg-Zilber (pág. 26 de [36]). □

Haciendo uso de todos estos últimos resultados se demostrará que la categoría de los espacios exteriores, **E**, tiene estructura de categoría simplicial de modelos cerrada.

Proposición 1.3.5 *Si X es un espacio exterior y K un conjunto simplicial finito, entonces $L_{B(X)}(K) \cong X \otimes K$.*

Demostración:

Supóngase que $dim(K) \leq n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
X \otimes K &= X \bar{\times} |colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{\pi_K} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{y} \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}})| \\
&\cong X \bar{\times} colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{y\pi_K} \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \xrightarrow{|.|} \mathbf{Top}) \\
&\cong X \bar{\times} colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta/n}} Sk_n(K) \xrightarrow{I} \int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{|.|y\pi_K} \mathbf{Top}) \\
&\cong colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta/n}} Sk_n(K) \xrightarrow{I} \int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{|.|y\pi_K} \mathbf{Top} \xrightarrow{X \bar{\times}} \mathbf{E}) \\
&\cong colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{B(X)\pi_K} \mathbf{E}) = L_{B(X)}(K).
\end{aligned}$$

Nótese que $K = colim(\int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{\pi_K} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{y} \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}})$, el funtor

$$|.| : \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathbf{op}}} \to \mathbf{Top}$$

preserva colímites al ser adjunto a izquierda, y que

$$\int_{\mathbf{\Delta/n}} Sk_n(K) \xrightarrow{I} \int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{|.|y\pi_K} \mathbf{Top}$$

está en las hipótesis del lema 1.3.3. □

De forma similar se comprueba que $f \otimes \lambda \cong L_{B(f)}(\lambda)$, donde f es una aplicación exterior y λ simplicial entre conjuntos simpliciales finitos. Como consecuencia inmediata,

Corolario 1.3.1 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y)),$$

donde X, Y son espacios exteriores y K un conjunto simplicial finito.

Proposición 1.3.6 *Sean X un espacio exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos, entonces,*

(i) $X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L,$

(ii) $X^{K \times L} \cong (X^K)^L.$

Demostración:

(i) $X \otimes (K \times L) = X \bar{\times} |K \times L| \cong X \bar{\times} (|K| \times |L|) = (X \bar{\times} |K|) \bar{\times} |L| = (X \otimes K) \otimes L$, teniendo en cuenta que $|K \times L| \cong |K| \times |L|$, (véase [60]).

(ii) Si Y es un espacio exterior arbitrario entonces,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{E}}(Y, X^{K \times L}) &\cong Hom_{\mathbf{E}}(Y \otimes (K \times L), X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}((Y \otimes L) \otimes K), X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(Y \otimes L, X^K) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(Y, (X^K)^L), \end{aligned}$$

concluyéndose el resultado. □

Haciendo uso de los corolarios 1.2.5 y 1.3.1 se tiene

$Hom_{\mathbf{E}}(Y, X^K) \cong Hom_{\mathbf{E}}(Y \otimes K, X) \cong Hom_{\mathbf{SS}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(Y, X))$. Así, $\mathbf{E}$ verifica el axioma SM0.

Se tiene que $Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{E}}(X, Y^K)$. Esto se puede generalizar a nivel simplicial.

Proposición 1.3.7 *Existe un isomorfismo natural simplicial,*

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y^K).$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X \otimes K, Y)_n &= Hom_{\mathbf{E}}((X \otimes K) \otimes \Delta[n], Y) \\
&\cong Hom_{\mathbf{E}}((X \otimes \Delta[n]) \otimes K, Y) \\
&\cong Hom_{\mathbf{E}}(X \otimes \Delta[n], Y^K) = \underline{Hom}_{\mathbf{E}}(X, Y^K)_n.
\end{aligned}
$$

La naturalidad en todas las variables concluye la demostración. □

E es una categoría simplicial que verifica el axioma **SM0**. Además es una categoría de modelos cerrada, por lo que está en las condiciones de la proposición 0.3.1.

Proposición 1.3.8 **E** *verifica el axioma* **SM7***.*

Demostración:

Basta ver que verifica **SM7(a)**. Sea $p : X \to Y$ una e-fibración (resp. e-fibración trivial). Se tiene el morfismo pull-back,

$$
\begin{tikzcd}
X^{\Delta[n]} \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "(id_X)^j"] \arrow[ddr, bend right, "p^{id_{\Delta[n]}}"'] & & \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]} \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & X^{\dot{\Delta}[n]} \arrow[d, "p^{id_{\dot{\Delta}[n]}}"] \\
& Y^{\Delta[n]} \arrow[r, "(id_Y)^j"] & Y^{\dot{\Delta}[n]}.
\end{tikzcd}
\qquad j : \dot{\Delta}[n] \to \Delta[n]
$$

Ya que el funtor $(.)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ es adjunto a derecha del funtor $\mathbb{N}\bar{\times}\_$ se sigue que preserva límites, en particular pull-backs. Así se tiene

$$\varphi^{\mathbb{N}} : (X^{\Delta[n]})^{\mathbb{N}} \to (X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]})^{\mathbb{N}} \cong (X^{\dot{\Delta}[n]})^{\mathbb{N}} \times_{(Y^{\dot{\Delta}[n]})^{\mathbb{N}}} (Y^{\Delta[n]})^{\mathbb{N}},$$

que es isomorfo al pull-back en **Top**,

$$
\begin{tikzcd}
(X^{\mathbb{N}})^{\Delta[n]} \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "(id_{X^{\mathbb{N}}})^j"] \arrow[ddr, bend right, "(p^{\mathbb{N}})^{id_{\Delta[n]}}"'] & & \\
& (X^{\mathbb{N}})^{\dot{\Delta}[n]} \times_{(Y^{\mathbb{N}})^{\dot{\Delta}[n]}} (Y^{\mathbb{N}})^{\Delta[n]} \arrow[r] \arrow[d] & (X^{\mathbb{N}})^{\dot{\Delta}[n]} \arrow[d] \\
& (Y^{\mathbb{N}})^{\Delta[n]} \arrow[r] & (Y^{\mathbb{N}})^{\dot{\Delta}[n]}.
\end{tikzcd}
$$

Como **Top** es una categoría simplicial de modelos cerrada entonces verifica SM7. Por otro lado, p es e-fibración (resp. e-fibración trivial) si y sólo si $p^{\mathbb{N}}$ lo es en **Top**. Como $\psi \cong \varphi^{\mathbb{N}}$ y ψ es fibración (resp. fibración trivial) se tiene que $\varphi^{\mathbb{N}}$ es fibración (resp. fibración trivial) y, por tanto, φ es una e-fibración (resp. e-fibración trivial). El resto de la demostración se hace por razonamientos análogos. □

De todo lo visto hasta ahora se deduce que **E** tiene estructura de categoría simplicial de modelos cerrada.

Se definirá ahora una nueva estructura en **E**. Existe un funtor de olvido $U : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ de forma que prescinde de la externología de cada espacio exterior y a cada aplicación exterior se le asigna la misma aplicación entre los espacios topológicos correspondientes. Siempre que no haya lugar a ambigüedad o confusión se denotará al olvido de $f : X \to Y$ como el mismo $f : X \to Y$.

Existe otro funtor, $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$ que a cada espacio topológico lo transforma en un espacio exterior sin más que considerar como externología la propia topología. No es difícil comprobar que U es adjunto a derecha de V.

Definición 1.3.10 Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Se dice que f es *g-equivalencia débil* si es e-equivalencia débil y su olvido es equivalencia débil en **Top**.

Un hecho sencillo de comprobar es que toda equivalencia de homotopía exterior es una g-equivalencia débil.

Definición 1.3.11 Sea $p : E \to B$ una aplicación exterior. Se dice que es *g-fibración* si es e-fibración y su olvido es fibración en **Top**.

Decir que el olvido de p es fibración en **Top** es lo mismo que decir que p, como aplicación exterior, tiene la P.E.D. en **E** respecto de las aplicaciones exteriores $\delta_0 : D^q \to D^q \bar{\times} I$, donde en D^q se considera la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es decir, la propia topología, por tanto en $D^q \bar{\times} I$ se tiene también la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, o la propia topología. Asimismo, toda aplicación $u : D^q \to X$ es exterior si y sólo si su olvido es continua, al igual con aplicaciones del tipo $D^q \times I \to X$.

Definición 1.3.12 Sea $i : A \to B$ una aplicación exterior, se dice que es *g-cofibración* si verifica la P.E.I. respecto de las g-fibraciones triviales.

Se deduce que todo espacio exterior es g-fibrante. Además, no es difícil comprobar que tanto el coproducto de g-cofibraciones como la inducida en un push-out de una g-cofibración es de nuevo una g-cofibración.

A continuación, una caracterización para g-fibraciones triviales.

Proposición 1.3.9 *Sea f una aplicación exterior. Entonces f es g-fibración trivial si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de las aplicaciones*

$$\{\mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1} \to \mathbb{N}\bar{\times}D^n,\ \ S^{n-1} \to D^n,\ \ n \geq 0\}.$$

Demostración:

Teniendo en cuenta la ley exponencial $Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}Y, X) \cong Hom_{\mathbf{E}}(Y, X^{\mathbb{N}})$, f es e-fibración trivial si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ tiene la P.E.D. respecto de $S^{n-1} \to D^n$ en **Top** si y sólo si f tiene la P.E.D. respecto de $\mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1} \to \mathbb{N}\bar{\times}D^n$ en **E**, $\forall n \geq 0$. Además, el olvido de f es fibración trivial si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de $S^{n-1} \to D^n$ en **Top**, esto es equivalente a que f tenga la P.E.D. respecto de $S^{n-1} \to D^n$, considerados como aplicaciones exteriores. $\square$

Otra consecuencia inmediata de estas definiciones es que dados

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

tales que dos de las aplicaciones exteriores f, g, gf son g-equivalencias débiles, también lo es la tercera. Para comprobarlo se tiene en cuenta la estructura de categoría de modelos cerrada de **Top**. Asimismo las clases de g-fibraciones, g-cofibraciones y g-equivalencias débiles son cerradas bajo retractos. Para verificar CM5 es necesario partir de unos resultados previos.

Supóngase una sucesión

$$X_0 \xrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{i_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots$$

tal que cada $i_k : X_{k-1} \to X_k$ es inyectiva, cerrada, e-cerrada y los puntos de X_k menos los de $\rho_{0k}(X_0)$ son cerrados y e-cerrados, donde se denota por

$\rho_{kl} : X_k \to X_l$ a la composición $i_l i_{l-1} ... i_{k+2} i_{k+1}$. Se considera $\tilde{X} = colim\ X_n$. Este espacio exterior es

$$\tilde{X} = (\coprod_{n=0}^{\infty} X_n)/\!\sim = (\cup_{n=0}^{\infty}(X_n \times \{n\}))/\!\sim,$$

donde $(x,k) \sim (y,l)$ si y sólo si $(x,k) = (y,l)$, o bien $k < l$ y $\rho_{kl}(x) = y$ o bien $l < k$ y $\rho_{lk}(y) = x$, y que la topología (resp. externología) de $\tilde{X}$ es la más fina que hace continuas (resp. exteriores) las inyecciones $\alpha_k : X_k \to \tilde{X}$, $\alpha_k(x) = [(x,k)]$. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad que i_k no es isomorfismo, para cada k. De existir uno se puede suprimir y reagrupar adecuadamente la sucesión dando el mismo colímite.

Lema 1.3.4 *Sea $K \subset \tilde{X}$ un compacto. Entonces existe $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $K \subset \alpha_n(X_n)$.*

Demostración:

Supóngase que $K \not\subset \alpha_n(X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Como $K \not\subset \alpha_0(X_0)$ entonces existe $k_0 \in K$ tal que $k_0 \notin \alpha_0(X_0)$. Así, $k_0 \in \alpha_{n_1}(X_{n_1})$-$\alpha_0(X_0)$.

$K \not\subset \alpha_{n_1}(X_{n_1})$, luego existe $k_1 \in K$ tal que $k_1 \in \alpha_{n_2}(X_{n_2})$-$\alpha_{n_1}(X_{n_1})$, para $n_2 > n_1$. Reiterando el proceso se obtiene una sucesión de puntos de K, $\{k_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $k_i \in \alpha_{n_{i+1}}(X_{n_{i+1}})$-$\alpha_{n_i}(X_{n_i})$, $n_0 = 0$, $n_{i+1} > n_i$.

Se considera el conjunto numerable $T = \{k_i\}_{i=0}^{\infty}$. Si S está contenido en T entonces $\alpha_n^{-1}(S)$ es finito, y como $\alpha_0^{-1}(S) = \emptyset$ entonces $\alpha_n^{-1}(S)$ es cerrado en X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Luego S es cerrado en $\tilde{X}$ y, por tanto, cerrado en T. Se concluye que T tiene la topología discreta. Ahora bien, razonando para $S = T$ se tiene que T es cerrado en $\tilde{X}$, y como está contenido en el compacto K, es compacto, lo cual es una contradicción pues T es infinito y discreto. $\square$

Proposición 1.3.10 *Sea $f : Z \to \tilde{X}$ una aplicación exterior, Z Hausdorff, localmente compacto, σ-compacto, $\varepsilon_Z = \varepsilon_{cc}^Z$. Entonces f se factoriza a través de X_n, para n suficientemente grande*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_n"'] & & \tilde{X} \\ & X_n \arrow[ur, hook, "\alpha_n"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración:

Supóngase que $f(Z) \not\subset \alpha_n(X_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Por un lado, ya que Z es Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto entonces $Z = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, con K_n compacto y $Int(K_n) \subset K_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ya que f es continua, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(K_i)$ es compacto, por lo que, haciendo uso del lema anterior, $f(K_i) \subset \alpha_{n_i}(X_{n_i})$. Además, $n_i \to \infty$ $(i \to \infty)$. Entonces existe un s_1 suficientemente grande y existe $k_1 \in K_{s_1}$ tal que $f(k_1) \in \alpha_{n_{s_1}}(X_{n_{s_1}})$-$\alpha_0(X_0)$, existe s_2 suficientemente grande y $k_2 \in K_{s_2}$ tal que $f(k_2) \in \alpha_{n_{s_2}}(X_{n_{s_2}})$-$\alpha_{n_{s_1}}(X_{n_{s_1}})$, con $s_2 > s_1$. Reiterando el proceso, se obtiene una sucesión $\{k_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de manera que $f(k_i)$ está en $\alpha_{n_{s_i}}(X_{n_{s_i}})$-$\alpha_{n_{s_{i-1}}}(X_{n_{s_{i-1}}})$.

Sea $a : \mathbb{N} \to Z$ dado por $a(i) = k_i$. Entonces a es exterior: la continuidad está clara; y si $K \subset Z$ es compacto, se tiene que $K \subset Z = \cup_{n\in\mathbb{N}} Int(K_n)$ por lo que $K \subset \cup_{i=1}^m Int(K_i) \subset \cup_{i=1}^m K_i$. Así, $a^{-1}(K) \subset \cup_{i=1}^m a^{-1}(K_i)$, que es finito.

Sea ahora $\sigma = fa$, que es exterior al ser composición de aplicaciones exteriores. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(\mathbb{N}) \cap X_n$ es finito, pero $\sigma(\mathbb{N}) \cap X_n \cap X_0 = \emptyset$. Esto demuestra que $\sigma(\mathbb{N}) \cap X_n$ es e-cerrado en X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Se concluye que $\sigma(\mathbb{N})$ es e-cerrado en X, por lo que $\sigma^{-1}(\sigma(\mathbb{N})) = \mathbb{N}$ es e-cerrado en $\mathbb{N}$, es decir, finito, lo cual es una contradicción. Por tanto existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f(Z) \subset \alpha_n(X_n)$. $\square$

Dada una aplicación exterior inyectiva i, entonces su inducida en un push-out, $\bar{i}$, también es inyectiva. Si además i es cerrada o e-cerrada entonces también lo es $\bar{i}$, respectivamente. Así, dada la sucesión

$$X_0 \xrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{i_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow \cdots$$

de forma que cada X_n se obtiene inductivamente a través de un push-out en **E** de la forma

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda & \longrightarrow & X_{n-1} \\ {\scriptstyle \coprod_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_n} \\ \coprod_{\lambda\in\Lambda} Z'_\lambda, & \longrightarrow & X_n, \end{array}$$

donde cada h_λ es cerrada, e-cerrada e inyectiva, y además los puntos de Z_λ y Z'_λ son cerrados y e-cerrados, se tiene que la sucesión está en las condiciones de los resultados anteriores.

Proposición 1.3.11 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces f se factoriza como $f = pi$, con i g-cofibración y p g-fibración trivial.*

Demostración:

Se construye un diagrama,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & X_1 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "p_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[dl, "p_2"] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[dlll, "p_n"] & \cdots \\
 & Y & & & &
\end{tikzcd}$$

como sigue: si $X_0 = X$, $p_0 = f$ y X_{n-1} y $p_{n-1} : X_{n-1} \to Y$ se suponen construidos, se considera Λ el conjunto de todos los diagramas conmutativos,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}\bar{\times}S^{q_\lambda-1} \arrow[r, "u_\lambda"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
\mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda} \arrow[r, "v_\lambda"'] & Y
\end{tikzcd} \qquad q_\lambda \geq 0$$

y Γ el conjunto de todos los diagramas conmutativos,

$$\begin{tikzcd}
S^{q_\gamma-1} \arrow[r, "u_\gamma"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
D^{q_\gamma} \arrow[r, "v_\gamma"'] & Y
\end{tikzcd} \qquad q_\gamma \geq 0$$

Se construye el diagrama push-out,

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{N}\bar{\times}S^{q_\lambda-1})\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}S^{q_\gamma-1}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda}u_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}u_\gamma)"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook, "i_n"] \\
(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda-1})\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}D^{q_\gamma-1}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda}w_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}w_\gamma)"'] & X_n.
\end{tikzcd}$$

Puesto que $p_{n-1}u_\lambda = v_\lambda|\mathbb{N}\bar{\times}S^{q_\lambda-1}$ y $p_{n-1}u_\gamma = v_\gamma|\mathbb{N}\bar{\times}S^{q_\gamma-1}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $\gamma \in \Gamma$ se considera la aplicación exterior push-out $p_n : X_n \to Y$.

Si $\tilde{X} = colim\, X_n$, se denota por $\alpha_n : X_n \to \tilde{X}$ a cada una de las aplicaciones exteriores que definen el cocono universal.

Ya que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_k i_k = p_{k-1}$, existe $p = colim\ p_n : \tilde{X} \to Y$. Sea $i = \alpha_0$. Entonces $pi = p\alpha_0 = p_0 = f$.

Por un lado p es g-fibración trivial, dado un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}D^q \arrow[r, "v"'] & Y, \end{tikzcd}$$

entonces, por la proposición 1.3.11, u tiene una factorización $u = \alpha_n u'$. Esto da lugar al diagrama $p_n u' = v|\mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1}$. Para un $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $u' = u_\lambda$, $q = q_\lambda$, $v = v_\lambda$ y, teniendo en cuenta la construcción de X_{n+1} existe una aplicación exterior $w_\lambda : \mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda} \to X_{n+1}$ tal que $w_\lambda|\mathbb{N}\bar{\times}S^{q_\lambda - 1} = i_{n+1}u_\lambda$. Entonces $h = \alpha_{n+1}w_\lambda$ es la extensión buscada.

De forma análoga se puede encontrar una elevación para el segundo tipo de diagrama,

$$\begin{tikzcd} S^{q-1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ D^q \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

Por otro lado i es g-cofibración. $\mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \hookrightarrow \mathbb{N}\bar{\times}D^q$ y $S^{q-1} \hookrightarrow D^q$ son g-cofibraciones, para cada $q \geq 0$, ya que verifican la P.E.I. respecto de las g-fibraciones triviales. De esta forma el coproducto de aplicaciones de este tipo es g-cofibración y, por tanto, cada $i_n : X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ es g-cofibración al ser la inducida en un push-out de una g-cofibración. Ahora, sea el diagrama conmutativo, con $q : E \to B$ g-fibración trivial:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "q"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "v"'] & B. \end{tikzcd}$$

Ya que $i = \alpha_0 = \alpha_1 i_1$ se tiene $qu = (v\alpha_1)i_1$ y como i_1 es g-cofibración existe $l_1 : X_1 \to E$ tal que $l_1 i_1 = u$, $ql_1 = v\alpha_1$. Como $\alpha_1 = \alpha_2 i_2$ se tiene el diagrama $ql_1 = (v\alpha_2)i_2$, luego existe $l_2 : X_2 \to E$ tal que $l_2 i_2 = l_1$, $ql_2 = v\alpha_2$. Siguiendo el proceso inductivo existe $l_k : X_k \to E$ con $l_k i_k = l_{k-1}$, $ql_k = v\alpha_k$. Entonces $l = colim\ l_k : \tilde{X} \to E$ es la elevación buscada. $\square$

Definición 1.3.13 Sea $i : B \to A$ una aplicación exterior. Se dice que B es *retracto por deformación fuerte* de A a través de i si existe una aplicación exterior $r : A \to B$ llamada *retracción* tal que $ri = id_B$, $ir \simeq_{rel\, i} id_A$, es decir, existe $F : A\bar{\times}I \to A$ exterior tal que $F\delta_0 = ir$, $F\delta_1 = id_A$ y $F(i\bar{\times}id) = ip$. Si sólo se verifica $ri = id_B$ se dice, simplemente, que B *es retracto de* A *a través de* i.

Lema 1.3.5 *Sea el diagrama push-out siguiente:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "j"] \\ A \arrow[r, "g"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Si B es retracto o bien retracto por deformación fuerte de A a través de i entonces también X lo es de Z a través de j, respectivamente.

Demostración:

Sea $r : A \to B$ con $ri = id_B$. Entonces, se induce del push-out una única aplicación exterior $h : Z \to X$ tal que $hg = fr$, $hj = id_X$. Supóngase ahora que, además, $ir \simeq_{rel\, i} id_A$ y sea homotopía $F : A\bar{\times}I \to A$ correspondiente. El funtor cilindro es adjunto a izquierda, por lo que el siguiente diagrama es push-out:

$$\begin{tikzcd} B\bar{\times}I \arrow[r, "f\bar{\times}id"] \arrow[d, "i\bar{\times}id"'] & X\bar{\times}I \arrow[d, "j\bar{\times}id"] \\ A\bar{\times}I \arrow[r, "g\bar{\times}id"'] & Z\bar{\times}I \end{tikzcd}$$

Se induce una única aplicación exterior $H : Z\bar{\times}I \to Z$ con $H(j\bar{\times}id) = jp$, $H(g\bar{\times}id) = gF$. Es inmediato comprobar que esta homotopía es la buscada. $\square$

Proposición 1.3.12 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces f se factoriza como $f = qj$, con j g-cofibración trivial y q g-fibración.*

Demostración:

Similarmente a la proposición 1.3.11 se construye un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f"'] & X_1 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "q_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[dl, "q_2"] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[dlll, "q_n"] & \cdots \\
& Y, & & & &
\end{tikzcd}$$

de la siguiente forma: si $X_0 = X$, $q_0 = f$ y se supone construido X_{n-1} y $q_{n-1} : X_{n-1} \to Y$ se considera entonces Λ el conjunto de todos los diagramas conmutativos,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda} \arrow[r, "u_\lambda"] \arrow[d, hook, "\delta_0^\lambda"'] & X_{n-1} \arrow[d, "q_{n-1}"] \\
\mathbb{N}\bar{\times}(D^{q_\lambda} \times I) \arrow[r, "v_\lambda"'] & Y
\end{tikzcd} \qquad q_\lambda \geq 0$$

y Γ el conjunto de todos los diagramas conmutativos,

$$\begin{tikzcd}
D^{q_\gamma} \arrow[r, "u_\gamma"] \arrow[d, hook, "\delta_0^\gamma"'] & X_{n-1} \arrow[d, "q_{n-1}"] \\
D^{q_\gamma} \times I \arrow[r, "v_\gamma"'] & Y.
\end{tikzcd} \qquad q_\gamma \geq 0$$

Se construye el diagrama push-out,

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda}) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} D^{q_\gamma}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma)"] \arrow[d, hook] & X_{n-1} \arrow[d, hook, "j_n"] \\
(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{N}\bar{\times}(D^{q_\lambda} \times I)) \coprod (\coprod_{\gamma\in\Gamma} D^{q_\gamma} \times I) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda} w_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma} w_\gamma)"'] & X_n.
\end{tikzcd}$$

Entonces se induce del push-out, $q_n : X_n \to Y$. Se considera $\tilde{X} = colim\, X_n$, y se denota por $\beta_n : X_n \to \tilde{X}$ a cada una de las aplicaciones exteriores que definen el cocono universal. Estas aplicaciones son secciones. Si $q = colim\, q_n$ y $j = \beta_0 : X \to \tilde{X}$ entonces $qj = f$. Haciendo el mismo razonamiento que el hecho en la factorización de la proposición 1.3.11 se tiene que q es g-fibración y j es g-cofibración. Tan solo resta demostrar que j es g-equivalencia débil.

Cada $\mathbb{N}\bar{\times}D^{q_\lambda}$ es retracto por deformación fuerte del espacio exterior $\mathbb{N}\bar{\times}(D^{q_\lambda}\times I)$ a través de δ_0^λ así como D^{q_γ} de $D^{q_\gamma}\times I$ a través de δ_0^γ por lo que se deduce que cada X_{n-1} es retracto por deformación fuerte de X_n a través de j_n.

Por un lado, j es e-equivalencia débil: Si $(\tilde{X})^{\mathbb{N}}\neq\emptyset$, como se tiene que $Hom_{\mathbf{E}}(\tilde{X},X_0)\neq\emptyset$ entonces $X^{\mathbb{N}}\neq\emptyset$. Supóngase que $X^{\mathbb{N}}\neq\emptyset$, y sean $a\in X^{\mathbb{N}}$, $q\geq 0$ y $[\alpha]\in\pi_q^B((\tilde{X},ja))$. Sea $\alpha:(\mathbb{N}\bar{\times}S^q,id_{\mathbb{N}}\times *)\to(\tilde{X},ja)$ un representante. Se toma una factorización para un n suficientemente grande $\alpha=\beta_n\alpha'$. X es retracto por deformación fuerte de $\tilde{X}$ a través de $\rho_{0n}=j_nj_{n-1}...j_2j_1$, por lo que $\pi_q^B(\rho_{0n}):\pi_q^B((X,a))\to\pi_q^B((X_n,\rho_{0n}a))$ es biyectiva. Así, existe $\alpha''\in\pi_q^B((X,a))$ con $\pi_q^B(\rho_{0n})([\alpha''])=[\alpha']$, luego $\pi_q^B(j)([\alpha''])=[\alpha]$ demostrándose la suprayectividad de $\pi_q^B(j)$.

Sean ahora, $[\alpha_0]$, $[\alpha_1]\in\pi_q^B((X,a))$ con $\pi_q^B(j)([\alpha_0])=\pi_q^B(j)([\alpha_1])$. Se considera la homotopía exterior $H:(\mathbb{N}\bar{\times}S^q)\bar{\times}I\to\tilde{X}$ tal que $H\delta_0=j\alpha_0$, $H\delta_1=j\alpha_1$ y $H((id_{\mathbb{N}}\bar{\times}*)\bar{\times}id)=jap$ y se toma una factorización para un n suficientemente grande $H=\beta_nH'$. Es sencillo comprobar que H' es una homotopía entre $\rho_{0n}\alpha_0$ y $\rho_{0n}\alpha_1$, y como $\pi_q^B(\rho_{0n})$ es biyectiva se concluye que $[\alpha_0]=[\alpha_1]$.

Por otro lado, sustituyendo en el razonamiento anterior $\mathbb{N}$ por $*$ se demuestra que el olvido de j es equivalencia débil en **Top**. □

La g-cofibración trivial j de la proposición anterior verifica la P.E.I. respecto de las g-fibraciones. En efecto, esta propiedad se conserva por coproductos y por cambio de cobase, luego cada $j_n:X_{n-1}\to X_n$ también verifica esta propiedad. Ahora bien, dado un diagrama conmutativo $vj=pu$ con p g-fibración, entonces $(v\beta_1)j_1=pu$ por lo que existe l_1 tal que $l_1j_1=u$ y $pl_1=v\beta_1$; ahora se considera el diagrama $(v\beta_2)j_2=pl_1$ y su elevación asociada l_2, con $l_2j_2=l_1$ y $pl_2=v\beta_2$. De forma inductiva, se obtiene l_k tal que $l_kj_k=l_{k-1}$ y $pl_k=v\beta_k$. Entonces $l=colim\, l_n$ es la elevación del diagrama $pu=vj$.

Corolario 1.3.2 **E** *junto con las g-fibraciones, g-cofibraciones y las g-equivalencias débiles es una categoría simplicial de modelos cerrada.*

Demostración:

Sólamente hay que comprobar los axiomas **CM4** y **SM7**.

Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "v"'] & Y. \end{tikzcd}$$

El caso no obvio es cuando i es g-cofibración trivial y p es g-fibración. Se factoriza $i = qj$, con $j : A \to Z$ g-cofibración trivial con la P.E.I. respecto de las g-fibraciones y q g-fibración que, por **CM2**, es trivial. Entonces existe una elevación $r : B \to Z$ para el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "id_B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Luego, i es retracto de j y, así, tiene la P.E.I. respecto de las g-fibraciones.

En cuanto a **SM7** basta ver **SM7(a)**: Si $p : X \to Y$ es g-fibración (resp. g-fibración trivial) entonces es e-fibración (resp. e-fibración trivial), por lo que el morfismo pull-back $\varphi : X^{\Delta[n]} \to X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]}$ es e-fibración (resp. e-fibración trivial). Por otro lado, el olvido de p es fibración en **Top** (resp. fibración trivial). Ya que el funtor olvido, U, es adjunto a derecha preserva límites, en particular pull-backs, además $U(X^K) = (U(X))^K$ y **Top** es categoría simplicial de modelos cerrada por lo que se tiene el olvido de φ es fibración en **Top** (resp. fibración trivial). El resto de la demostración se razona igual. $\square$

La definición de gCW complejo surge como un espacio exterior en el que se pegan adecuadamente celdas compactas y no compactas. Se dará ahora su definición rigurosa y se verán algunas de sus propiedades más importantes, así como un teorema de tipo Whitehead.

Definición 1.3.14 Sea X un espacio exterior, se dice que es un *gCW complejo* si admite una filtración

$$\emptyset = X^{-1} \overset{i_0}{\hookrightarrow} X^0 \overset{i_1}{\hookrightarrow} X^1 \overset{i_2}{\hookrightarrow} X^2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X^n \hookrightarrow \cdots$$

tal que X es el colímite de dicha sucesión y cada X^n se obtiene de X^{n-1} mediante un push-out de la forma

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_{\lambda\in A_n}\mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1}_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}S^{n-1}_\mu) \arrow[rr, "(\coprod_{\lambda\in A_n}\varphi_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}\varphi_\mu)"] \arrow[d, hook] & & X_{n-1} \arrow[d, hook, "i_n"] \\
(\coprod_{\lambda\in A_n}\mathbb{N}\bar{\times}D^{n}_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}D^{n}_\mu) \arrow[rr, "(\coprod_{\lambda\in A_n}\psi_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_n}\psi_\mu)"'] & & X_n.
\end{tikzcd}$$

Se deduce, entonces, que X tiene la topología y externología débiles respecto de dicha sucesión, que cada i_k es inyectiva, cerrada, e-cerrada y los puntos de X^k son cerrados y e-cerrados. Se denotan por $\alpha_k : X^k \to X$ a cada una de las inyecciones canónicas. Se puede suponer, sin perder generalidad, que cada i_k y cada α_k son inclusiones.

A $\psi_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times}D^n_\lambda)$, $\psi_\mu(D^n_\mu)$ se les denominará $\mathbb{N}$-*celda* y *celda simple* respectivamente, y a las aplicaciones $\varphi_\lambda : \mathbb{N}\bar{\times}S^{n-1}_\lambda \to X^{n-1}$, $\varphi_\mu : S^{n-1}_\mu \to X^{n-1}$ las aplicaciones *característica* respectivas.

Se llamará *q-esqueleto* de X al elemento q-ésimo de la filtración que admite X, X^q.

Proposición 1.3.13 *Todo gCW complejo es un espacio exterior g-cofibrante.*

Demostración:

Primeramente se demostrará por inducción sobre q, que X^q es g-cofibrante. Si $q = 0$ entonces X^0 se obtiene del push-out

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\
(\coprod_{\lambda\in A_0}\mathbb{N}\bar{\times}D^{0}_\lambda)\coprod(\coprod_{\mu\in B_0}D^{0}_\mu) \arrow[r] & X_0.
\end{tikzcd}$$

Como $\emptyset \hookrightarrow X_0$ es la inducida en el push-out de una g-cofibración entonces es g-cofibración. Supóngase ahora que X^{q-1} es g-cofibrante. $i_q : X^{q-1} \hookrightarrow X^q$ es la inducida en un push-out de una g-cofibración por lo que es g-cofibración, luego la composición $\emptyset \hookrightarrow X^{q-1} \hookrightarrow X^q$ también lo es. Teniendo en cuenta que $X = colim\ X^q$ y haciendo uso de razonamientos análogos a los hechos en la proposición 1.3.11 para verificar que la aplicación i de la factorización de f es g-cofibración, se demuestra que X es g-cofibrante. $\square$

Corolario 1.3.3 *(Teorema de Whitehead)*

Sea $f : X \to Y$ aplicación exterior entre gCW complejos. Entonces f es una equivalencia de homotopía exterior si y sólo si f es g-equivalencia débil.

Demostración:

Basta observar que todo gCW complejo es g-fibrante y g-cofibrante y que para espacios exteriores g-cofibrantes, homotopías a izquierda, a derecha y homotopía exterior coinciden. Combinando esto con el teorema de Whitehead en una categoría de modelos cerrada [68] se tiene el resultado. $\square$

Nótese que todo CW complejo es un gCW complejo con externología la propia topología. Esta externología no tiene por qué coincidir con la de los complementos de los compacto-cerrados. El lema que viene a continuación es una herramienta útil a la hora de dar condiciones suficientes para que un CW complejo dotado de la externología de los complementos de sus compacto-cerrados sea un gCW complejo.

Lema 1.3.6 *Sea el push-out en* **E***,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\overline{f}"] \\ B \arrow[r, "\overline{g}"'] & X, \end{tikzcd}$$

donde B, C son Hausdorff y con las externologías de los complementos de sus compacto-cerrados. Si f es cerrada e inyectiva, o bien propia, y g es propia entonces la externología push-out en X es la de los complementos de sus compacto-cerrados.

Para una demostración puede consultarse [38].

Proposición 1.3.14 *Sea X un CW complejo localmente finito, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces*

X, con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, es un gCW complejo.

Demostración:

Se procede por inducción sobre la dimensión de X, q. Si q es cero entonces $X = X^0$ se obtiene a través del push-out en **Top** de la forma

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\ \coprod_{n\in A_0} D^0_n \arrow[r, "\coprod_{n\in A_0} f_n"'] & X_0, \end{tikzcd}$$

con $\coprod_{n\in A_0} f_n$ homeomorfismo. Si A_0 es numerable, las 0-celdas se pueden reagrupar como $\mathbb{N}\bar{\times}D^0$. Se define $f : \mathbb{N}\bar{\times}D^0 \to X^0$ como $f(n,x) = f_n(x)$, dando lugar al diagrama

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\ \mathbb{N}\bar{\times}D^0 \arrow[r, "f"'] & X^0. \end{tikzcd}$$

Entonces, si se considera en $X^0 = X$ la externología push-out, se tiene un push-out en **E**. Nótese este diagrama está en las condiciones del lema anterior, por lo que se tiene un push-out en **E** considerando en X^0 la externología de los complementos de sus compacto-cerrados. En el caso que A_0 sea finito, se tiene que $\coprod_{n\in A_0} D^0_n$ tiene la externología de los complementos de sus compacto-cerrados; haciendo el mismo razonamiento se tiene también el resultado.

Supóngase ahora cierto para dimensiones menores o iguales que $q-1$. Si $X = X^q$, se obtiene de un diagrama push-out en **Top**:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{n\in A_q} S^{q-1}_n \arrow[r, "\coprod_{n\in A_q} g^q_n"] \arrow[d, hook] & X^{q-1} \arrow[d, hook, "i_q"] \\ \coprod_{n\in A_q} D^q_n \arrow[r, "\coprod_{n\in A_q} f^q_n"'] & X^q. \end{tikzcd}$$

Si A_q es numerable, procediendo de forma similar para $q = 0$, se pueden reunir las celdas en una $\mathbb{N}$-celda.

Se tienen las aplicaciones $g^q : \mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \to X^{q-1}$ y $f^q : \mathbb{N}\bar{\times}D^q \to X^q$, dadas por $g^q(n,x) = g^q_n(x)$, $f^q(n,x) = f^q_n(x)$ respectivamente. Así, se tiene un push-out en **Top**:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \arrow[r, "g^q"] \arrow[d, hook] & X^{q-1} \arrow[d, hook, "i_q"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}D^q \arrow[r, "f^q"'] & X^q. \end{tikzcd}$$

Se observa que en $\mathbb{N}\bar{\times}D^q$, $\mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1}$ las externologías coinciden con las de los complementos de sus compacto-cerrados. El diagrama anterior es un push-out en **E** si se considera en X^q la externología push-out. Por otro lado, todos los p-esqueletos de X son espacios Hausdorff. Si se denota por $i : S^{q-1} \hookrightarrow D^q$ la inclusión canónica se tiene que $id_{\mathbb{N}}\bar{\times}i : \mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \hookrightarrow \mathbb{N}\bar{\times}D^q$ es una aplicación propia. Además, la aplicación $g^q : \mathbb{N}\bar{\times}S^{q-1} \to X^{q-1}$, es exterior. Efectivamente, sea $K \subset X^{q-1}$ un compacto-cerrado, entonces está contenido en un número finito de celdas. Sea e una de esas celdas, de dimensión $q-1$. Si $(g^q)^{-1}(\bar{e})$ no es compacto entonces corta a un número infinito de (q-1)-esferas, contradiciendo que X sea localmente finito. Así, $(g^q)^{-1}(\bar{e})$ es compacto; se concluye de la continuidad de g^q y el hecho de que todo cerrado en un compacto es compacto, que $(g^q)^{-1}(K)$ es compacto-cerrado. Aplicando el lema anterior se obtiene el resultado.

Si A^q es finito, entonces $\coprod_{n\in A_q} D^q_n$ tiene la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, $\coprod_{n\in A_q} S^{q-1}_n \hookrightarrow \coprod_{n\in A_q} D^q_n$ es propia, así como $\coprod_{n\in A_q} S^{q-1}_n \to X^{q-1}$. Procediendo de forma análoga al caso numerable se concluye la demostración. $\square$

Como corolario,

Corolario 1.3.4 *(Teorema de Whitehead propio)*

Sea $f : X \to Y$ una aplicación propia entre CW complejos localmente finitos, de dimensión finita y con un número contable de celdas en cada dimensión. Entonces $f = f_e$ es g-equivalencia débil si y sólo si f es una equivalencia de homotopía propia.

Demostración:

Por la proposición anterior, X_e, Y_e son gCW complejos. Entonces $f = f_e$ es g-equivalencia débil si y sólo si f_e es equivalencia de homotopía exterior si y sólo si f es equivalencia de homotopía propia.

Nótese que $e(X \times I) = e(X)\bar{\times} I$. □

1.4 Comparación de estructuras de modelos.

En esta nueva sección se compararán las estructuras de categorías de modelos existentes en $\mathbf{E}$: la e-estructura, la g-estructura, así como también la de los espacios topológicos.

Como se ha visto, la categoría de los espacios exteriores tiene una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada con las e-fibraciones, e-cofibraciones y las e-equivalencias, y otra con las g-fibraciones, g-cofibraciones y g-equivalencias débiles. Cabe preguntarse qué ocurre con las categorías localizadas respectivas.

Se denotará por $\mathbf{Ho}_{\mathrm{e}}(\mathbf{E})$ a la categoría localizada de $\mathbf{E}$ con la estructura de modelos derivada de las e-fibraciones, e-cofibraciones y e-equivalencias débiles. Similarmente se denotará por $\mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E})$ a la localizada de $\mathbf{E}$ con la estructura derivada por los g-morfismos respectivos. Obsérvese que, de forma obvia, existe una adjunción,

$$\mathbf{E} \underset{id}{\overset{id}{\rightleftarrows}} \mathbf{E} .$$

Evidentemente $id : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ lleva g-fibraciones en e-fibraciones y g-equivalencias débiles en e-equivalencias débiles, por lo que lleva e-cofibraciones en g-cofibraciones. Además,

Proposición 1.4.1 *Si $f : X \to Y$ es una e-equivalencia débil, con X, Y e-cofibrantes, entonces es una g-equivalencia débil.*

Demostración:

Por el teorema de Whitehead f es una e-equivalencia de homotopía. Obviamente su olvido en $\mathbf{Top}$ es equivalencia de homotopía puesto que

$U(X\bar{\times}I) = U(X) \times I$. En particular es equivalencia débil en **Top**, por lo que f es g-equivalencia débil. $\square$

Corolario 1.4.1 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}) \rightleftarrows \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(id).$$

Demostración:

Consecuencia inmediata de la proposición anterior, de los anteriores comentarios y del teorema 0.1.1. $\square$

Proposición 1.4.2 *El funtor* $\underline{\underline{L}}(id) : \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}) \hookrightarrow \mathbf{Ho_g}(\mathbf{E})$ *es un embebimiento.*

Demostración:

Si X es un objeto de $\mathbf{Ho_e}(\mathbf{E})$ entonces $\underline{\underline{L}}(id)(X) = Q_e(X)$ donde $Q_e(X)$ es la aproximación e-cofibrante de X; $p_X : Q_e(X) \to X$ es la e-fibración trivial asociada.

Por otro lado $\underline{\underline{R}}(id)(X) = R_e(X) = X$, con $R_e(X)$ la aproximación e-fibrante de X, que es igual a X pues todos los objetos son e-fibrantes. En este caso, dado X un objeto e-cofibrante, si $f : id(X) \to Y$ es e-equivalencia débil entonces su inducida en la adjunción $f : X \to id(Y)$ es e-equivalencia débil, de lo que se deduce que la unidad de la adjunción en X, η_X, es isomorfismo en $\mathbf{Ho_e}(\mathbf{E})$. Si X no es e-cofibrante se considera su aproximación e-cofibrante mediante la e-fibración trivial $p_X : Q_e(X) \to X$, y el diagrama conmutativo en $\mathbf{Ho_e}(\mathbf{E})$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] & \underline{\underline{R}}(id)\underline{\underline{L}}(id)(X) \\
Q_e(X) \arrow[u, "\cong"', "\gamma_e(p_X)"] \arrow[r, "\cong", "\eta_{Q_e(X)}"'] & \underline{\underline{R}}(id)\underline{\underline{L}}(id)(Q_e(X)), \arrow[u, "\cong"', "\underline{\underline{R}}(id)(\gamma_e(p_X))"]
\end{tikzcd}$$

donde $\gamma_e : \mathbf{E} \to \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E})$ es la proyección de $\mathbf{E}$ sobre la localizada, por lo que la unidad de la adjunción en X, η_X es isomorfismo, concluyendo la demostración. $\square$

Otra comparación de especial interés es entre las categorías localizadas de **Top** con la estructura de Quillen y la localizada $\mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E})$. El funtor olvido $U : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ transforma g-fibraciones en fibraciones y g-equivalencias débiles en equivalencias débiles.

Su funtor adjunto a izquierda $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$, en el que a cada espacio topológico se le considera como externología su topología, verifica la siguiente propiedad:

Proposición 1.4.3 $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$ *transforma equivalencias débiles entre cofibrantes en g-equivalencias débiles.*

Demostración:

Por el teorema de Whitehead y como en **Top** todos los objetos son fibrantes, dado $f : X \to Y$ equivalencia débil entre cofibrantes, es una equivalencia de homotopía. Como $V(Z \times I) = V(Z)\bar{\times} I$, para cualquier espacio topológico Z, se tiene que $V(f)$ es una e-equivalencia de homotopía, luego una e-equivalencia débil. Además $U(V(f)) = f$ es equivalencia débil en **Top**. $\square$

Corolario 1.4.2 *Existe una adjunción,*

$$\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E}) : \underline{\underline{R}}(U).$$

$\square$

Proposición 1.4.4 *El funtor* $\underline{\underline{L}}(V) : \mathbf{Ho}(\mathbf{Top}) \hookrightarrow \mathbf{Ho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{E})$ *es un embebimiento.*

Demostración:

Si X es un espacio topológico, entonces $\underline{\underline{L}}(V)(X) = V(Q(X))$, con $Q(X)$ aproximación cofibrante de X en **Top**. Por otro lado, si X es espacio exterior, $\underline{\underline{R}}(U)(X) = U(X)$. Razonando de forma análoga a la demostración hecha en la proposición 1.4.2, si X es cofibrante en **Top** y se tiene que $f : V(X) \to Y$ es g-equivalencia débil entonces $f : X \to U(X)$ es equivalencia débil, deduciéndose que la unidad de la adjunción es isomorfismo. $\square$

Capítulo 2

Modelos simpliciales.

En este capítulo se presentan dos modelos algebraicos para la categoría de los espacios exteriores: los M-conjuntos simpliciales y los conjuntos simpliciales exteriores. Las dos primeras secciones están dedicadas al primer modelo mencionado. Se establece una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada y la creación de funtores adjuntos, realización y singular exteriores, que inducen otra adjunción en las categorías localizadas respectivas. En la segunda sección se estudia un conjunto simplicial, *prismas infinitos*, asociado a cada M-conjunto simplicial y, por tanto, a cada espacio exterior mediante su singular exterior.

En las siguientes secciones se extenderá la noción de exterior a otras categorías, entre ellas, el segundo modelo. Otras son los grupos abelianos simpliciales exteriores y conjuntos (grupos abelianos) exteriores. La relación de este otro modelo con $\mathbf{E}$ es la existencia de una adjunción a través de funtores análogos a la realización geométrica y el singular clásicos. En la última sección se estudia la categoría de los grupos abelianos simpliciales exteriores y sus relaciones con el modelo y otras categorías con el fin de establecer un puente para definir invariantes homológicos.

2.1 M-conjuntos simpliciales.

Se definirá la categoría de M-conjuntos simpliciales, demostrándose que tiene una estructura de categoría simplicial de modelos cerrada y después se crearán los funtores adjuntos singular y realización geométrica exteriores. Dichos funtores inducirán una adjunción en las categorías localizadas respectivas.

L.J. Hernández [44] demuestra la existencia de tal estructura de Quillen, no obstante, se presenta aquí una demostración diferente.

Se comienza con las nociones de monoide, M-conjunto y M-aplicación.

Definición 2.1.1 Un *monoide* es un conjunto M con una ley de composición interna $\cdot : M \times M \to M$ verificando

(i) $m \cdot (m' \cdot m'') = (m \cdot m') \cdot m''$, para cualquier m, m', m'' de M. (Ley asociativa).

(ii) Existe $1 \in M$ tal que $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, para cualquier m de M. (Existencia de elemento neutro).

Todo monoide M se puede considerar como una categoría con un solo objeto $*$, donde los morfismos $* \to *$ son los elementos de M, siendo la composición la operación. Recíprocamente, toda categoría con un único objeto tiene estructura de monoide considerando sus morfismos y como operación su composición.

Definición 2.1.2 Sea M un monoide, un *M-conjunto a derecha* es un par (X, θ), donde X es un conjunto y θ representa una acción de M por la derecha de X, esto es, una aplicación $\theta : X \times M \to X$ tal que

(i) $\theta(\theta(x, m), m') = \theta(x, m \cdot m')$, para cada x de X y m, m' de M;

(ii) $\theta(x, 1) = x$, para cada x de X.

Para simplificar notación, $\theta(x, m)$ se representará por $x \cdot m$. Si no hay lugar a confusión el par (X, θ) se denotará simplemente por X. Así, en las propiedades (i) y (ii) de la definición anterior se escribe $(x \cdot m) \cdot m' = x \cdot (m \cdot m')$ y $x \cdot 1 = x$ respectivamente.

Definición 2.1.3 Si X, Y son M-conjuntos por la derecha, una *M-aplicación a derecha* de X a Y consiste en una aplicación $f : X \to Y$ que respeta las acciones, es decir, $f(x \cdot m) = f(x) \cdot m$, para x de X y m de M.

La composición de M-aplicaciones por la derecha es M-aplicación por la derecha y la identidad en un M-conjunto es M-aplicación por la derecha. Surge entonces la categoría de M-conjuntos por la derecha, denotada por $\mathbf{Sets_M}$. También existe la noción de M-conjunto y M-aplicación por la izquierda, dando lugar, de forma natural, a la categoría de M-conjuntos a izquierda, ${}_\mathbf{M}\mathbf{Sets}$. A partir de aquí, cuando se haga referencia a M-conjuntos y M-aplicaciones se entenderá que son por la derecha.

Considerando a M como categoría se puede hablar de la categoría de funtores, $\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}$. Esta categoría y la categoría de M-conjuntos están relacionadas.

Proposición 2.1.1 $\mathbf{Sets_M}$ *y* $\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}$ *son categorías isomorfas.*

Demostración:

Se define $F : \mathbf{Sets_M} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}$ como sigue: si X es un M-conjunto, entonces $F(X)(*) = X$, $F(X)(m)(x) = x \cdot m$; Y, si $f : X \to Y$ es una M-aplicación entonces $F(f)_* = f : X \to Y$, haciendo que $F(f)$ sea una transformación natural.

Ahora se define $G : \mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets_M}$ como, $G(X) = X(*)$ con la acción $x \cdot m = X(m)(x)$; y si $f : X \to Y$ es una transformación natural entonces $G(f) = f_* : X(*) \to Y(*)$ es M-aplicación.

Se dejan los detalles al lector. $\square$

Dada una categoría cualquiera $\mathbf{C}$, se ha hablado de la categoría de objetos simpliciales de $\mathbf{C}$ como la categoría de funtores $\mathbf{C}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ donde $\mathbf{\Delta}$ es la categoría simplicial. En este caso, la categoría de M-conjuntos simpliciales es $(\mathbf{Sets_M})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \cong (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \cong \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{op}}} = \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$. Todas estas reformulaciones se podrán usar indistintamente para designar a la categoría de los M-conjuntos simpliciales.

Si $X : (\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ es un M-conjunto simplicial entonces se denotará $X(([p], *)) = X_p$, a $(\varphi, m) : ([p], *) \to ([q], *)$ como $\varphi : [p] \to [q]$.

De forma natural surge el funtor olvido $U : \mathbf{Sets_M} \to \mathbf{Sets}$, también considerado como $U : \mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}$, $U(X) = X(*)$, olvidando la acción del monoide. Este funtor se extiende simplicialmente, olvidando nivel a nivel la acción del monoide en los conjuntos, a $U^{\Delta^{op}} : (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$, que se denotará, si no hay lugar a ambigüedad, como U.

Mediante este funtor olvido, U, se obtienen los siguientes morfismos especiales:

Definición 2.1.4 Sea $f : X \to Y$ una M-aplicación simplicial, entonces

(i) f es una *fibración*, si $U(f)$ es fibración en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$;

(ii) f es una *equivalencia débil*, si $U(f)$ es equivalencia débil en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$;

(iii) f es *cofibración*, si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

En el siguiente teorema se hará una aplicación directa del teorema 0.3.1.

Teorema 2.1.1 *La categoría de M-conjuntos simpliciales,* $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$, *junto con las fibraciones, cofibraciones y equivalencia débiles definidas anteriormente, tiene estructura de categoría de modelos cerrada.*

Demostración:

Obsérvese que la categoría de conjuntos simpliciales, $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$, es una categoría de modelos cerrada completa y cocompleta. Por otro lado, si $f : X \to Y$ es una aplicación simplicial, entonces f es fibración (resp. fibración trivial) si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de

$$\{V(n,k) \hookrightarrow \Delta[n],\ n \geq 0,\ 0 \leq k \leq n\}$$

(resp. respecto de la familia de aplicaciones simpliciales

$$\{\dot{\Delta}[n] \hookrightarrow \Delta[n],\ n \geq 0\}).$$

Se hace notar que los dominios son secuencialmente pequeños. Entonces, el teorema 0.3.1 asegura que $(\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}$ es una categoría de modelos cerrada con la siguiente estructura: $f : X \to Y$ se dirá que

(i) es fibración si $f_* : X(*) \to Y(*)$ es fibración en conjuntos simpliciales;

(ii) es equivalencia débil si $f_* : X(*) \to Y(*)$ lo es en conjuntos simpliciales;

(iii) es cofibración si tiene la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales.

Pero, observando la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \\
(\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}, \arrow[ur, "(ev)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

con $\varphi(X)(*)_n = X_n(*)$, se tiene que $(ev)_* \cong U$. Entonces, con la estructura dada inicialmente, $(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \cong \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$ es categoría de modelos cerrada. □

Evidentemente, $(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ es una categoría simplicial, véase 0.2.1. Ahora, el objetivo a demostrar es la compatibilidad de las dos estructuras, es decir, que se verifican los axiomas **SM0** y **SM7**. Primeramente, y en esta línea, se comprueba la existencia de $X \otimes K$ y X^K en el sentido simplicial de Quillen.

De la cocompletitud de $\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}}$, dado X un M-conjunto simplicial y K un conjunto simplicial:

Definición 2.1.5 El M-conjunto simplicial $X \otimes K$ viene dado como

$$(X \otimes K)_n = \textstyle\coprod_{\tau \in K_n} X_n,$$

y si $j_\sigma : X_n \to \coprod_{\tau \in K_n} X_n$ denota a la inclusión σ-ésima, $\sigma \in K_n$, y $\varphi : [m] \to [n]$ es una aplicación creciente, entonces $(X \otimes K)(\varphi)$ es la única M-aplicación, w, tal que $wj_\sigma = j_{K(\varphi)(\sigma)} X(\varphi)$, para cada $\sigma \in K_n$.

De forma similar, si $f : X \to X'$ es una M-aplicación simplicial y $\lambda : K \to K'$ es una aplicación simplicial, se tiene una M-aplicación simplicial $f \otimes \lambda : X \otimes K \to X' \otimes K'$. De esta forma se comprueba la existencia del funtor

$$\_ \otimes \_ : (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}.$$

Según el capítulo 0 de la memoria, $X \otimes K$, es el objeto simplicial en el sentido de Quillen. En este caso existía, además, un isomorfismo canónico,

$$X \otimes (K \times L) \cong (X \otimes K) \otimes L.$$

Definición 2.1.6 Dado X un M-conjunto simplicial, K un conjunto simplicial, se define X^K como sigue:

$$(X^K)_n = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K \times \Delta[n], U(X)),$$
$$X^K(\varphi) = (id_K \times \varphi_*)^*.$$

X^K es un M-conjunto simplicial sin más que hacer uso de la estructura de M-conjunto simplicial de X. Por otro lado, si $f : X \to Y$ es M-aplicación simplicial y $\lambda : K \to L$ es aplicación simplicial, entonces $f^\lambda : X^L \to Y^K$ viene dada como $(f^\lambda)_n = (\lambda \times id_{\Delta[n]})^* U(f)_*$. Se obtiene, así, un funtor

$$(.)^{(.)} : (\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{op}} \times (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}.$$

Inspirándose en la proposición 0.2.1 se obtiene,

Proposición 2.1.2 *Si X, Y son M-conjuntos simpliciales y K un conjunto simplicial, existe una biyección natural,*

$$Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K).$$

Demostración:

Sea $\varphi : Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y) \to Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K)$, dada por

$$(\varphi(f)_n(x))_m(k, \sigma) = f_m j_k(X(\sigma)(x)).$$

Su inversa viene dada como

$$\psi(g)_n j_k(x) = g_n(x)_n(k, id_{[n]}).$$

Es sencillo comprobar la naturalidad. □

Corolario 2.1.1 *Si X es un M-conjunto simplicial y K, L son conjuntos simpliciales entonces $X^{K \times L} \cong (X^K)^L$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y, X^{K \times L}) &\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y \otimes (K \times L), X) \\ &\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}((Y \otimes L) \otimes K, X) \\ &\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y \otimes L, X^K) \\ &\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y, (X^K)^L), \end{aligned}$$

para todo M-conjunto simplicial Y. Se deduce así que $X^{K \times L} \cong (X^K)^L$. □

Se sigue que

$$Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K) \cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y)$$

$$\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(K, \underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X,Y)),$$

donde $\underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}$ es el funtor de la estructura simplicial de la categoría de los M-conjuntos simpliciales. Luego X^K, así definido, es el objeto X^K en el sentido simplicial de Quillen. Así, pues, la categoría de los M-conjuntos simpliciales verifica el axioma **SM0**.

La proposición 2.1.2 tiene una generalización simplicial.

Proposición 2.1.3 *Sean X, Y M-conjuntos simpliciales y K un conjunto simplicial. Entonces existe un isomorfismo simplicial,*

$$\underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong \underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X, Y^K).$$

Demostración:

Si $n \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X \otimes K, Y)_n &\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}((X \otimes K) \otimes \Delta[n], Y) \\
&\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X \otimes (K \times \Delta[n]), Y) \\
&\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}((X \otimes \Delta[n]) \otimes K, Y) \\
&\cong Hom_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X \otimes \Delta[n], Y^K) \\
&\cong \underline{Hom}_{(\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}}}(X, Y^K)_n.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la naturalidad de las biyecciones en todas las variables el resto de la demostración es evidente. □

Queda por comprobar el axioma **SM7**. Es necesario definir antes un funtor adjunto a izquierda del funtor olvido de M-conjuntos simpliciales en conjuntos simpliciales.

Definición 2.1.7 Sea X un conjunto. Se define el M-conjunto $X \odot M$ como $X \times M$. Si $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces $f \odot M = f \times id_M$.

Nótese que $(x,m) \cdot m' = (x, m \cdot m')$, origina una acción por la derecha de M en $X \times M$ haciendo que $X \odot M$ sea un M-conjunto. Además, de forma natural, $f \odot M$ es M-aplicación. Esta construcción da un funtor

$$\_ \odot M : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets_M},$$

o su isomorfo $\mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets^{M^{op}}}$.

Proposición 2.1.4 *Sea X un conjunto, Y un M-conjunto. Entonces existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{Sets_M}}(X \odot M, Y) \cong Hom_{\mathbf{Sets}}(X, U(Y)).$$

Demostración:

Si $f : X \odot M \to Y$ es una M-aplicación entonces $\tilde{f} : X \to Y$ viene dado por $\tilde{f}(x) = f(x,1)$. Por otro lado, si $g : X \to U(Y)$ es aplicación entonces $\overline{g} : X \odot M \to Y$ viene dado por $\overline{g}(x,m) = g(x) \cdot m$. Evidentemente $\overline{g}$ es M-aplicación. Además, $\overline{\tilde{f}} = f$, y $\tilde{\overline{g}} = g$, dando lugar a la biyección. La naturalidad es inmediata. $\square$

Así, se tiene una adjunción,

$$\_ \odot M : \mathbf{Sets} \rightleftarrows \mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}} : U, \quad \_ \odot M \dashv U.$$

que inducen funtores adjuntos, que se denotarán con los mismos símbolos, en las categorías simpliciales correspondientes:

$$\_ \odot M : \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \rightleftarrows (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M}^{\mathrm{op}}})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} : U.$$

Proposición 2.1.5 *La categoría de los M-conjuntos simpliciales verifica el axioma* **SM7**.

Demostración:

Ya que $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$ es una categoría de modelos cerrada en la que se da el axioma **SM0**, basta comprobar que verifica **SM7(a)**.

Sea $p : X \to Y$ una fibración en $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$ (resp. fibración trivial). Se tiene el pull-back

$$\begin{tikzcd}
X^{\Delta[n]} \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "f^{id_{\Delta[n]}}"] \arrow[ddr, bend right, "(id_X)^j"'] & & \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \times_{Y^{\dot{\Delta}[n]}} Y^{\Delta[n]} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & Y^{\Delta[n]} \arrow[d, "(id_Y)^j"] \\
& X^{\dot{\Delta}[n]} \arrow[r, "f^{id_{\dot{\Delta}[n]}}"'] & Y^{\dot{\Delta}[n]}.
\end{tikzcd}$$

Como $U : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ es un funtor adjunto a derecha, preserva límites, en particular pull-backs. Teniendo en cuenta que $U(X^K) = U(X)^K$, $U(f^\lambda) = U(f)^\lambda$ y que $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ verifica **SM7(a)** al ser una categoría simplicial de modelos cerrada, como $U(p)$ es fibración (resp. fibración trivial) de conjuntos simpliciales se tiene que $U(\varphi)$ es fibración (resp. fibración trivial) de conjuntos simpliciales. Así, φ es fibración de M-conjuntos simpliciales (resp. fibración trivial). El resto de la demostración se razona de forma idéntica. □

Todos los resultados expuestos se resumen en un corolario.

Corolario 2.1.2 $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}}$ *es una categoría simplicial de modelos cerrada.*

Se construirán ahora unos funtores adjuntos de una categoría en la otra, llamados *singular exterior* y *realización geométrica exterior*, para, posteriormente comprobar que inducen una adjunción en las categorías localizadas respectivas.

Se considera el monoide concreto $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, donde en $\mathbb{N}$ se toma la topología discreta y externología de los complementos de sus subconjuntos finitos. Dado $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ se considera el n-símplice standard geométrico Δ_n. Si $\varphi : [n] \to [m]$ es creciente, $v_0, v_1, ..., v_n$ son los vértices de Δ_n y $w_0, w_1, ..., w_m$ los correspondiente vértices de Δ_m entonces se induce una aplicación continua denotada como $\tilde{\varphi} : \Delta_n \to \Delta_m$ dada por

$$\tilde{\varphi}(\textstyle\sum_{i=0}^n x_i v_i) = \sum_{i=0}^n x_i w_{\varphi(i)}.$$

Esto da origen a un funtor $\mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$.

Definición 2.1.8 Se define el *funtor singular exterior*,

$$Sing_e : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}},$$

como

$$Sing_e(X)_n = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n, X),$$
$$Sing_e(X)(\varphi, m) = (m\bar{\times}\tilde{\varphi})^*,$$
$$Sing_e(f)_n = f_*.$$

Proposición 2.1.6 *Existe un funtor* $|.|_e : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}} \to \mathbf{E}$, *llamado realización geométrica exterior, tal que es adjunto a izquierda del funtor singular exterior.*

Demostración:

Sea el funtor $A : \mathbf{\Delta} \times \mathbf{M} \to \mathbf{E}$ dado como

$$A([n], \mathbb{N}) = \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n,$$
$$A(\varphi, m) = m\bar{\times}\tilde{\varphi}.$$

Nótese que se está en las condiciones del teorema 0.4.1, y que, en este caso, el funtor R es, exactamente, el funtor singular exterior $Sing_e$. Así, existe el funtor $|.|_e = L : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}} \to E$:

$$|X|_e = colim\,(\int_{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M}} X \stackrel{\pi_X}{\to} \mathbf{\Delta} \times \mathbf{M} \stackrel{A}{\to} \mathbf{E}),$$

para cada M-conjunto simplicial X. $\square$

Lo siguiente a desarrollar es desvelar si estos funtores, de reciente construcción, inducen de alguna forma unos funtores adjuntos en las categorías localizadas respectivas. La metodología empleada para tal fin vendrá dirigida por las hipótesis del teorema 0.1.1 de Quillen.

Primeramente se observa que el funtor $|.|_e$ hace conmutativo el siguiente diagrama (véase la proposición 0.4.1):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta}\times\mathbf{M} \arrow[r, "y"] \arrow[d, "A"'] & \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}} \arrow[dl, "|.|_e"] \\ \mathbf{E}. & \end{tikzcd}$$

En $\mathbf{Top}$, el conocido funtor singular, $Sing : \mathbf{Top} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ viene dado por $Sing(X)_n = Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X)$, $Sing(X)(\varphi) = (\tilde{\varphi})^*$, $Sing(f)_n = f_*$. Se construye a partir del funtor $B : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$, dado por $B([n]) = \Delta_n$, $B(\varphi) = \tilde{\varphi}$, mediante el teorema de Mac Lane-Moerdijk. En este caso, la realización geométrica ordinaria, $|.| : \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}} \to \mathbf{Top}$, tiene la expresión

$$|K| = colim\,(\int_{\mathbf{\Delta}} K \stackrel{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \stackrel{B}{\to} \mathbf{Top}),$$

para cada conjunto simplicial K. Además, hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[r, "y"] \arrow[d, "B"'] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \arrow[dl, "|.|"] \\
\mathbf{Top}. &
\end{tikzcd}$$

La próxima proposición dará una caracterización de e-fibración en $\mathbf{E}$ a través del singular exterior.

Proposición 2.1.7 *Sea K un conjunto simplicial, entonces*

$$|K \odot M|_e \cong \mathbb{N}\bar{\times}|K|.$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el triángulo conmutativo $|.|_e y = A$, dado $([p], *)$ objeto de $\mathbf{\Delta} \times \mathbf{M}$, el funtor de Yoneda, y, verifica

$$\begin{aligned}
y([p],*)_q &= Hom_{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M}}(([q],*),([p],*)) \\
&= Hom_{\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M}}(([q],\mathbb{N}),([p],\mathbb{N})) \\
&= Hom_{\mathbf{\Delta}}([q],[p]) \times Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \\
&= \Delta[p]_q \times M \\
&= (\Delta[p] \odot M)_q.
\end{aligned}$$

Se llega a que $y([p],*) = \Delta[p] \odot M$. Así, $|\Delta[p] \odot M|_e = \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_p = \mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[p]|$. Se observa que también $|\varphi_* \odot M|_e = id_{\mathbb{N}}\bar{\times}|\varphi_*|$. Se considera ahora el funtor $C : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{E}$ como $C([p]) = \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_p$, $C(\varphi) = id_{\mathbb{N}} \times \tilde{\varphi}$. Entonces, por un lado $C = (\mathbb{N}\bar{\times}\_)B$, y, por el teorema de Mac Lane-Moerdijk, un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[r, "y"] \arrow[d, "C"'] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \arrow[dl, "|.|_C"] \\
\mathbf{E}, &
\end{tikzcd}$$

donde $|K|_C = colim\,(\int_{\mathbf{\Delta}} K \overset{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \overset{C}{\to} \mathbf{E})$, para cada conjunto simplicial K, siendo su adjunto a derecha un funtor $Sing_C$, dado por la expresión $Sing_C(X)_p = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_p, X)$.

Si $U : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ es el funtor olvido entonces se tiene que $Sing_C = USing_e$:

Sea X un espacio exterior y $p \geq 0$. Entonces

$$\begin{gathered} Sing_C(X)_p = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_p, X) = U(Sing_e(X)_p) = (USing_e(X))_p, \\ Sing_C(X)(\varphi) = (id_{\mathbb{N}}\bar{\times}\tilde{\varphi})^* = (USing_e(X))(\varphi), \\ Sing_C(f)_p = f_* = USing_e(f). \end{gathered}$$

Teniendo en cuenta que la composición de adjunciones es adjunción y que el adjunto es único salvo isomorfismo natural se tiene $|.|_C \cong |.|_e(\_\odot M)$. Así, para cada conjunto simplicial K se tiene $|K|_C \cong |K \odot M|_e$. Para finalizar, hay dos diagramas conmutativos, $|.|y = B$ y $|.|_C y = (\mathbb{N}\bar{\times}\_)B$. Entonces

$$\begin{aligned} |K \odot M|_e &\cong |K|_C \\ &\cong colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \stackrel{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \stackrel{C}{\to} \mathbf{E}) \\ &\cong colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \stackrel{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \stackrel{B}{\to} \mathbf{Top} \stackrel{\mathbb{N}\bar{\times}}{\longrightarrow} \mathbf{E}) \\ &\cong \mathbb{N}\bar{\times} colim\ (\textstyle\int_{\mathbf{\Delta}} K \stackrel{\pi_K}{\to} \mathbf{\Delta} \stackrel{B}{\to} \mathbf{Top}) \\ &\cong \mathbb{N}\bar{\times}|K|. \end{aligned}$$

El penúltimo isomorfismo proviene del hecho que $\mathbb{N}\bar{\times}\_ : \mathbf{Top} \to \mathbf{E}$ es adjunto a izquierda de $(.)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \to \mathbf{Top}$ (corolario 1.2.3), por lo tanto, preserva los colímites. □

De forma natural se comprueba que si $\lambda : K \to K'$ es una aplicación simplicial entonces $|\lambda \odot M|_e \cong id_{\mathbb{N}}\bar{\times}|\lambda|$, y de aquí, el isomorfismo natural $|.|_e(\_\odot M) \cong (\mathbb{N}\bar{\times}\_)|.|$.

Proposición 2.1.8 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces, f es e-fibración si y sólo si tiene la P.E.D. respecto de $\mathbb{N}\bar{\times}|V(p,k)| \hookrightarrow \mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[p]|$, $p > 0$, $0 \leq k \leq p$.*

Demostración:

f es e-fibración si y sólo si $f^{\mathbb{N}}$ es fibración en **Top**, es decir, para cada diagrama conmutativo, con $p > 0$, $0 \leq k \leq p$,

$$\begin{tikzcd} {|V(p,k)|} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & X^{\mathbb{N}} \arrow[d, "f^{\mathbb{N}}"] \\ {|\Delta[p]|} \arrow[r, "v"'] & Y^{\mathbb{N}}, \end{tikzcd}$$

existe elevación. Haciendo uso del corolario 1.2.3 es equivalente a que f tenga la P.E.D. respecto de $\mathbb{N}\bar{\times}|V(p,k)| \hookrightarrow \mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[p]|$. $\square$

Proposición 2.1.9 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces f es e-fibración si y sólo si $Sing_e(f)$ es fibración en* $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$.

Demostración:

Si $f : X \to Y$ es exterior, $Sing_e(f)$ es fibración de M-conjuntos simpliciales si y sólo si $USing_e(f)$ es fibración de conjuntos simpliciales. A su vez, esto es equivalente a que para cada $p > 0$, $0 \leq k \leq p$ y diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} V(p,k) \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "i"'] & USing_e(X) \arrow[d, "USing_e(f)"] \\ \Delta[p] \arrow[r, "v"'] & USing_e(Y), \end{tikzcd}$$

exista elevación. Ahora bien, se tiene unas adjunciones,

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \underset{U}{\overset{\_\odot M}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}} \underset{Sing_e}{\overset{|.|_e}{\rightleftarrows}} \mathbf{E},$$

cuya composición da lugar a la adjunción

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \underset{USing_e}{\overset{|.|_e(\_\odot M)}{\rightleftarrows}} \mathbf{E}.$$

Así, probar que existe elevación en dicho diagrama es probar, teniendo en cuenta el isomorfismo natural $|.|_e(\_ \odot M) \cong (\mathbb{N} \times \_)|.|$, que existe elevación en el siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}|V(p,k)| \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, hook, "id_{\mathbb{N}}\bar{\times}|i|"'] & |V(p,k) \odot M|_e \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "|i\odot M|"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[p]| \arrow[r, "\cong"] & |\Delta[p] \odot M|_e \arrow[r, "\tilde{v}"'] & Y. \end{tikzcd}$$

$\square$

En particular, el funtor singular exterior preserva fibraciones. Además, este funtor preserva equivalencias débiles.

Lema 2.1.1 *$USing_e, Sing(.)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ son funtores naturalmente isomorfos.*

Demostración:

Sea X espacio exterior y $p \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} USing_e(X)_p &= U(Sing_e(X)_p) \\ &= U(Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_p, X)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_p, X^{\mathbb{N}}) \\ &\cong Sing(X^{\mathbb{N}})_p \\ &\cong Sing(.)^{\mathbb{N}}(X)_p. \end{aligned}$$

La naturalidad en todas las variables concluye la demostración. □

Proposición 2.1.10 *El funtor singular exterior preserva equivalencias débiles.*

Demostración:

Sea $f : X \to Y$ una equivalencia débil. Comprobar que $Sing_e(f)$ es equivalencia débil es comprobar que $USing_e(f)$ es equivalencia débil en conjuntos simpliciales. Por otro lado, $f^{\mathbb{N}}$ es equivalencia débil en **Top**, y como el funtor singular $Sing : \mathbf{Top} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ preserva equivalencias débiles, entonces $Sing(f^{\mathbb{N}})$ es equivalencia débil en conjuntos simpliciales; pero $USing_e(f) \cong Sing(f^{\mathbb{N}})$. □

El funtor singular exterior también tiene relaciones con las fibraciones triviales.

Proposición 2.1.11 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación exterior. Entonces f es e-fibración trivial si y sólo si $Sing_e(f)$ es fibración trivial en* $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$.

Demostración:

Que f sea e-fibración trivial es equivalente a que tenga la P.E.D. respecto de los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\bar{\times}S^{p-1} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{N}\bar{\times}D^p \arrow[r, "v"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Pero $\mathbb{N}\bar{\times}S^{p-1} = \mathbb{N}\bar{\times}|\dot{\Delta}[p]| \cong |\dot{\Delta}[p]\odot M|_e$ y $\mathbb{N}\bar{\times}D^p = \mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[p]| \cong |\Delta[p]\odot M|_e$. Como $|.|_e(\_ \odot M)$ es adjunto a izquierda de $USing_e$, es equivalente a que tenga elevación para

$$\begin{tikzcd} \dot{\Delta}[p] \arrow[r, "\hat{u}"] \arrow[d, hook] & USing_e(X) \arrow[d, "USing_e(f)"] \\ \Delta[p] \arrow[r, "\hat{v}"'] & USing_e(Y). \end{tikzcd}$$

Es decir, que $USing_e(f)$ sea fibración trivial en conjuntos simpliciales, o, equivalentemente, que $Sing_e(f)$ sea fibración trivial en M-conjuntos simpliciales. □

El funtor singular exterior y la exponenciación están relacionados.

Proposición 2.1.12 *Sea X espacio exterior y K un conjunto simplicial. Entonces $Sing_e(X^K) \cong Sing_e(X)^K$.*

Demostración:

Sea $n \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} Sing_e(X^K)_n &= Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n, X^{|K|}) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}((\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n)\bar{\times}|K|, X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}((\mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[n]|)\bar{\times}K, X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[n] \times K|, X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(|(\Delta[n] \times K) \odot M|_e, X) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}}}((\Delta[n] \times K) \odot M, Sing_e(X)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(\Delta[n] \times K, USing_e(X)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(K \times \Delta[n], USing_e(X)) \\ &\cong Sing_e(X)^K_n. \end{aligned}$$

La naturalidad de todas las biyecciones concluye la demostración. □

De forma similar, si λ es una aplicación simplicial y f una aplicación exterior, entonces $Sing_e(f^\lambda) \cong Sing_e(f)^\lambda$.

El funtor singular exterior preserva fibraciones triviales y las cofibraciones están caracterizadas por la P.E.I. respecto de las fibraciones triviales con lo cual se tiene que el funtor realización geométrica exterior transforma cofibraciones en e-cofibraciones. En particular, como $|.|_e$ preserva el objeto inicial, transforma cofibrantes en cofibrantes. Haciendo uso de la proposición 2.1.9, el hecho de que en $\mathbf{E}$ todos los objetos son e-fibrantes y que preserva el objeto final entonces, el singular exterior de todo espacio exterior es un objeto fibrante.

Proposición 2.1.13 *Sea $f : X \to Y$ una equivalencia débil de M-conjuntos simpliciales, con X, Y cofibrantes. Entonces, $|f|_e : |X|_e \to |Y|_e$ es una equivalencia de homotopía exterior.*

Demostración:

Sea Z un espacio exterior cualquiera, entonces, por la proposición 2.1.12, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{E}}(|X|_e, Z^I) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, shift right, "(d_0)_*"'] \arrow[d, shift left, "(d_1)_*"] & Hom_{\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}}(X, Sing_e(Z)^{\Delta[1]}) \arrow[d, shift right, "(d_0)_*"'] \arrow[d, shift left, "(d_1)_*"] \\ Hom_{\mathbf{E}}(|X|_e, Z) \arrow[r, "\cong"'] & Hom_{\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}}(X, Sing_e(Z)). \end{tikzcd}$$

Así, los coigualadores correspondientes son isomorfos, en otras palabras, $Hom_{\pi(\mathbf{E})}(|X|_e, Z) \cong Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(X, Sing_e(Z))$, siendo la biyección natural.

Ya que f es equivalencia débil induce una biyección en la categoría localizada de $\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}$,

$$Hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(Y, Sing_e(Z)) \xrightarrow{(\overline{f})^*} Hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(X, Sing_e(Z)).$$

Como Y es cofibrante y $Sing_e(Z)$ es fibrante,

$$Hom_{\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(Y, Sing_e(Z)) = Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(Y, Sing_e(Z)),$$

y de la misma forma para X. Luego

$$f^* : Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(Y, Sing_e(Z)) \to Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(X, Sing_e(Z))$$

es biyección. Además, se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{E}}(|Y|_e, Z) \arrow[r, "(|f|_e)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{\mathbf{E}}(|X|_e, Z) \arrow[d, "\cong"] \\ Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(Y, Sing_e(Z)) \arrow[r, "f^*"'] & Hom_{\pi(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}})}(X, Sing_e(Z)). \end{tikzcd}$$

Por tanto, $(|f|_e)^* : Hom_{\pi(\mathbf{E})}(|Y|_e, Z) \to Hom_{\pi(\mathbf{E})}(|X|_e, Z)$ es biyectivo, para Z cualquier espacio exterior, siendo la biyección, natural. Considerando $Z = |X|_e$, es un simple ejercicio comprobar, usando la naturalidad y la biyección, que $h = ((|f|_e)^*)^{-1}(id_{|X|_e}) : |Y|_e \to |X|_e$ es el inverso e-homotópico de $|f|_e$. $\square$

Corolario 2.1.3 *El funtor realización geométrica exterior, $|.|_e$, transforma equivalencias débiles entre cofibrantes en e-equivalencias débiles.*

Demostración:

Basta tener en cuenta la proposición anterior y el hecho de que toda equivalencia de homotopía exterior es una e-equivalencia débil. $\square$

Como corolario a todos estos resultados relativos a los funtores singular exterior y realización geométrica exterior,

Corolario 2.1.4 *Existe una adjunción, $\underline{\underline{L}}(|.|_e) \dashv \underline{\underline{R}}(Sing_e)$,*

$$\mathbf{Ho}(\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{op}}) \underset{\underline{\underline{R}}(Sing_e)}{\overset{\underline{\underline{L}}(|.|_e)}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ho_e}(\mathbf{E}).$$

Demostración:

El funtor $|.|_e$ es adjunto a izquierda de $Sing_e$. $|.|_e$ preserva cofibraciones y equivalencias débiles entre cofibrantes. Además $Sing_e$ preserva fibraciones y equivalencias débiles. El teorema 0.1.1 concluye la demostración. $\square$

2.2 Prismas infinitos.

En esta sección se definirá, para cada M-conjunto simplicial, un conjunto simplicial especial, denominado *prismas infinitos*. En ciertos casos será de Kan, por lo que se podrán definir directamente sus grupos de homotopía. Se verán propiedades muy interesantes, entre éstas se relacionarán los grupos de homotopía exterior de tipo Steenrod con los grupos de homotopía de los prismas infinitos de un determinado M-conjunto simplicial.

Para X, M-conjunto simplicial, se considera $X^{\Delta[1]}$ y $d_0, d_1 : X^{\Delta[1]} \to X$. Cada d_ε es tal que

$$(d_\varepsilon)_n : (X^{\Delta[1]})_n \to X_n, \quad \alpha \rightsquigarrow \alpha_n(\sigma_\varepsilon, id_{[n]}),$$

donde $\sigma_\varepsilon : [n] \to [1]$ es tal que $\sigma_\varepsilon(t) = \varepsilon$, $t \in [n]$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

También se tiene a $s : X \to X^{\Delta[1]}$:

$$s_n : X_n \to (X^{\Delta[1]})_n, \quad (s_n(x))_m(k,\sigma) = X(\sigma)(x).$$

Existe un elemento especial del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Definición 2.2.1 El elemento $sh : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $sh(k) = k+1$, $k \in \mathbb{N}$, se denomina *operador shift.*

Si X es un M-conjunto simplicial se puede definir una aplicación simplicial $(sh)^* : X \to X$, dada por $(sh)^*_n(x) = x \cdot sh$, $x \in X_n$. Sin embargo, no es M-aplicación simplicial.

Definición 2.2.2 Sea X un M-conjunto simplicial, se define *los prismas infinitos* de X, y se denotará por $Prinf(X)$, al conjunto simplicial pull-back

$$\begin{tikzcd}
Prinf(X) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X^{\Delta[1]} \arrow[d, "{(d_0,d_1)}"] \\
X \arrow[r, "{(id_X,(sh)^*)}"'] & X \times X.
\end{tikzcd}$$

Nótese que el pull-back es en $\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$. Por otro lado $Prinf(X)$ tiene la descripción explícita:

$$Prinf(X)_n = \{a \in (X^{\Delta[1]})_n : (d_1)_n(a) = (d_0)_n(a) \cdot sh\},$$
$$Prinf(X)(\varphi) = X^{\Delta[1]}(\varphi)|Prinf(X)_n.$$

Además, $p_1 : Prinf(X) \hookrightarrow X^{\Delta[1]}$ es la inclusión canónica y p_2 es $d_0|Prinf(X) : Prinf(X) \to X$.

Si $h : X \to Y$ es M-aplicación simplicial, se induce una única aplicación simplicial $Prinf(h) : Prinf(X) \to Prinf(Y)$ con $p_1 Prinf(h) = h^{\Delta[1]} p_1$, $p_2 Prinf(h) = hp_2$. En otras palabras:

$$Prinf(h)_n(a) = h_n(a), \quad a \in Prinf(X)_n \subset (X^{\Delta[1]})_n.$$

Esto define un funtor $Prinf : \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$.

Se ha comprobado que los funtores $USing_e, Sing(.)^{\mathbb{N}} : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ son naturalmente isomorfos. Como consecuencia inmediata se obtiene una relación entre los grupos de homotopía de tipo Brown y los grupos de homotopía de un determinado conjunto simplicial punteado.

Corolario 2.2.1 *Sea Z un espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{N}}$. Entonces el n-grupo de homotopía de tipo Brown de (Z, a) es isomorfo al n-grupo de homotopía del conjunto simplicial punteado $(U(Sing_e(Z)), a')$ donde $a' : \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_0 \to Z$ es isomorfo a a.*

Demostración:

$$\begin{aligned} \pi_n^B((Z,a)) &\cong \pi_n(Z^{\mathbb{N}}, a) \\ &\cong \pi_n(Sing(Z^{\mathbb{N}}), Sing(a)). \end{aligned}$$

Pero $Sing(Z^{\mathbb{N}}) \cong U(Sing_e(Z))$ y $Sing(a)$ se corresponde con a'. □

Para el caso de los grupos de homotopía de tipo Steenrod, $\pi_n^S((Z,a))$, con $a \in Z^{\mathbb{R}_+}$, existe una relación directa con el funtor prismas infinitos. Existe un diagrama de funtores,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[r, "Sing_e"] \arrow[d, "(.)^{\mathbb{R}_+}"'] & \mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}} \arrow[d, "Prinf"] \\ \mathbf{Top} \arrow[r, "Sing"'] & \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}. \end{tikzcd}$$

No es conmutativo en el sentido estricto, sin embargo, las composiciones respectivas son naturalmente isomorfas.

Proposición 2.2.1 *$PrinfSing_e, Sing(.)^{\mathbb{R}_+} : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ son funtores naturalmente isomorfos.*

Demostración:

Si Z es un espacio exterior,

$$Sing(Z^{I\!R_+})_n = Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Z^{I\!R_+}) \cong Hom_{\mathbf{E}}(I\!R_+\bar{\times}\Delta_n, Z).$$

Llamando $L : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ al funtor

$$\begin{aligned} L(Z)_n &= Hom_{\mathbf{E}}(I\!R_+\bar{\times}\Delta_n, Z), \\ L(Z)(\varphi) &= (id_{I\!R_+}\bar{\times}\tilde{\varphi})^*, \\ L(f)_n &= f_*, \end{aligned}$$

entonces $L \cong Sing(.)^{I\!R_+}$ de forma obvia. Por otro lado,

$$Prinf(Sing_e(Z))_n = \{a \in (Sing_e(Z)^{\Delta[1]})_n : (d_1)_n(a) = (d_0)_n(a)\cdot sh\}.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} (Sing_e(Z)^{\Delta[1]})_n &= Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(\Delta[1]\times\Delta[n], U(Sing_e(Z))) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{M})^{\mathrm{op}}}}((\Delta[1]\times\Delta[n])\odot M, Sing_e(Z)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(|(\Delta[1]\times\Delta[n])\odot M|_e, Z) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}|\Delta[1]\times\Delta[n]|, Z) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n|), Z), \end{aligned}$$

donde $I \cong \Delta_1 = |\Delta[1]|$, siendo la biyección natural en todas las variables. Además, existe el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (Sing_e(Z)^{\Delta[1]})_n \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(d_\varepsilon)_n"'] & Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n), Z) \arrow[dl, "(id_{\mathbb{N}}\bar{\times}(\delta_\varepsilon)_n)^*"] \\ Sing_e(Z)_n = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n, Z), & \end{tikzcd}$$

donde $(\delta_\varepsilon)_n : \Delta_n \to I\times\Delta_n$, $x \rightsquigarrow (\varepsilon, x)$, $\varepsilon\in\{0,1\}$.

Teniendo en cuenta la conmutatividad del diagrama y denotando, para cada $a \in (Sing_e(Z)^{\Delta[1]})_n$, su imagen por $\hat{a} \in Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n), Z)$ entonces es sencillo comprobar que $a \in Prinf(Sing_e(Z))_n$ si y sólamente si $\hat{a} \in Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n), Z)$ tal que $\hat{a}(k,1,x) = \hat{a}(k+1,0,x)$, para cada k natural, y $x\in\Delta_n$.

Para cada espacio exterior Z se considera el conjunto simplicial $T(Z)$, donde $T(Z)_n$ es el conjunto de las aplicaciones exteriores $b : \mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n) \to Z$ tales que $b(k,1,x) = b(k+1,0,x), k \in \mathbb{N}, x \in \Delta_n$. Se define,

$$T(Z)(\varphi) = id_{\mathbb{N}}\bar{\times}(id_I \times \tilde{\varphi})^*,$$
$$T(f)_n = f_*.$$

Entonces, se obtiene un funtor $T : \mathbf{E} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ tal que $PrinfSing_e \cong T$. Sea la transformación $\theta : T \to L$:

$$(\theta_Z)_n(a) = \hat{a} : I\!R_+\bar{\times}\Delta_n \to Z, \quad (t,x) \rightsquigarrow a([t], t-[t], x),$$

donde $(t,x) \in I\!R_+\bar{\times}\Delta_n$ y $[t]$ denota la parte entera de t.

$\hat{a} = (\theta_Z)_n(a)$ es continua puesto que $a(k,1,x) = a(k+1,0,x)$. Además es exterior: sea E e-abierto en Z, entonces $a^{-1}(E)$ es e-abierto en $\mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n)$, luego existe $K \subset \mathbb{N}$ finito tal que $(\mathbb{N}\text{-}K)\times I\times\Delta_n \subset a^{-1}(E)$. Se considera $M = \cup_{i\in K}[i,i+1] \subset I\!R_+$, que es compacto en $I\!R_+$ y, por tanto cerrado. Entonces es de sencilla comprobación que $\hat{a}((I\!R_+\text{-}M)\times\Delta_n) \subset E$.

Recíprocamente, si $b : I\!R_+\bar{\times}\Delta_n \to Z$ es exterior, entonces

$$\bar{b} : \mathbb{N}\bar{\times}(I\times\Delta_n) \to Z, \quad (k,t,x) \rightsquigarrow b(k+t,x),$$

es también exterior: evidentemente es continua y si E es e-abierto en Z entonces existe $K \subset I\!R_+$ compacto tal que $(I\!R_+\text{-}K)\times\Delta_n \subset b^{-1}(E)$. Sea $M = \{[t],[t]+1 : t \in K\}$. Es finito pues K está acotado. No presenta tampoco dificultad demostrar que $\bar{b}((\mathbb{N}\text{-}M)\times I\times\Delta_n) \subset E$. Además, $\bar{b}$ verifica $\bar{b}(k,1,x) = \bar{b}(k+1,0,x)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Delta_n$.

Esto define un isomorfismo simplicial $\theta_Z : T(Z) \to L(Z)$. La naturalidad de la transformación es inmediata. $\square$

Corolario 2.2.2 *Si Z es espacio exterior entonces $Prinf(Sing_e(Z))$ es un conjunto simplicial de Kan.*

Demostración:

Basta tener en cuenta el isomorfismo natural de la proposición anterior y el hecho de que el singular de todo espacio topológico es un conjunto simplicial de Kan. $\square$

Corolario 2.2.3 *Sea Z espacio exterior y $a \in Z^{\mathbb{R}_+}$. Entonces los grupos de homotopía exterior de tipo Steenrod de (Z, a) son isomorfos a los grupos de homotopía del conjunto simplicial punteado $(Prinf(Sing_e(Z)), \bar{a})$, donde $\bar{a}$ se corresponde con a de modo canónico.*

Demostración:

$$\begin{aligned} \pi_n^S((Z,a)) &\cong \pi_n(Z^{\mathbb{R}_+}, a) \\ &\cong \pi_n(Sing(Z^{\mathbb{R}_+}), Sing(a)). \end{aligned}$$

Pero $Sing(Z^{\mathbb{R}_+}) \cong Prinf(Sing_e(Z))$.

□

2.3 Conjuntos simpliciales exteriores.

Se introducirá ahora otro modelo algebraico para **E**: la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores. Esta nueva categoría, a pesar de no ser de objetos simpliciales, tendrá una estructura de categoría simplicial y además dispondrá de unos objetos $X \otimes K$, X^K, en el sentido simplicial de Quillen. De esta manera se podrá hablar de homotopía y categoría homotópica. Posteriormente se verá la relación existente con **E** mediante una cierta adjunción.

Primeramente se recordarán algunas propiedades conocidas concernientes a subconjuntos simpliciales de un conjunto simplicial dado.

Dado $X : \mathbf{\Delta^{op}} \to \mathbf{Sets}$ un conjunto simplicial, un subconjunto simplicial, Z, de X, y se denotará $Z \subset X$, es un conjunto simplicial tal que $Z_n \subset X_n$, $n \geq 0$, y tal que la inclusión $i : Z \hookrightarrow X$ es simplicial.

Si Z, Z' son subconjuntos simpliciales de X se puede hablar del subconjunto simplicial intersección $Z \cap Z'$, como

$$\begin{gathered} (Z \cap Z')_n = Z_n \cap Z'_n, \\ (Z \cap Z')(\varphi) = X(\varphi)|Z_n \cap Z'_n, \quad \varphi : [m] \to [n]. \end{gathered}$$

También se puede hablar de su unión $Z \cup Z'$, como

$$\begin{gathered} (Z \cup Z')_n = Z_n \cup Z'_n, \\ (Z \cup Z')(\varphi) = X(\varphi)|Z_n \cup Z'_n, \quad \varphi : [m] \to [n]. \end{gathered}$$

Estas nociones se pueden extender de forma natural a una colección arbitraria de subconjuntos simpliciales $\{Z^i\}_{i\in I}$. Otra propiedad interesante es que si $Z \subset X$ y $W \subset Y$ entonces $Z \times W \subset X \times Y$.

Sea ahora $f : X \to Y$ una aplicación simplicial, si $Z \subset Y$ (resp. $W \subset X$) se considera $f^{-1}(Z) \subset X$ (resp. $f(W) \subset Y$) como $f^{-1}(Z)_n = f_n^{-1}(Z_n)$, $n \geq 0$ y $f^{-1}(Z)(\varphi) = X(\varphi)|f^{-1}(Z)_n$, $\varphi : [m] \to [n]$, (resp. $f(W)_n = f_n(W_n)$ y $f(W)(\varphi) = X(\varphi)|f(W)_n$).

A continuación, las nociones de *conjunto simplicial exterior* y *aplicación simplicial exterior*.

Definición 2.3.1 Un *conjunto simplicial exterior* consiste en un par (X, ε), donde X es un conjunto simplicial y ε es una familia no vacía de subconjuntos simpliciales de X, llamada *externología*, verificando

(i) Si Z_1, $Z_2 \in \varepsilon$ entonces $Z_1 \cap Z_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $Z \in \varepsilon$, $W \subset X$ y $Z \subset W$ entonces $W \in \varepsilon$.

Definición 2.3.2 Una *aplicación simplicial exterior* es una aplicación simplicial entre conjuntos simpliciales exteriores, $f : (X, \varepsilon) \to (X', \varepsilon')$, tal que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Surgen, de forma natural, bases y subbases exteriores, al estilo de los espacios exteriores. Se deja como ejercicio para el lector comprobar que todos los resultados concernientes a estas nociones relacionados con las aplicaciones continuas se pueden transcribir al lenguaje de los conjuntos simpliciales exteriores con aplicaciones simpliciales.

Si no hay peligro de confusión, a las aplicaciones simpliciales exteriores se las denotará por $f : X \to X'$, omitiendo las externologías. También, se notará la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores por $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$.

Teniendo como objetivo demostrar que esta nueva categoría es completa y cocompleta, se introducen los subobjetos y conjuntos simpliciales exteriores cocientes, y se comprueba que tiene productos, coproductos, igualadores y coigualadores.

Definición 2.3.3 Sea (X, ε) un conjunto simplicial exterior y $A \subset X$ un subconjunto simplicial. Se define

$$\varepsilon_A = \{E \cap A : E \in \varepsilon\}.$$

Es externología en A, dotándola así de estructura de conjunto simplicial exterior y haciendo que la inclusión canónica $i : A \hookrightarrow$ sea una aplicación simplicial exterior.

Sea ahora (X, ε) un conjunto simplicial exterior, de forma que en cada X_n existe una relación de equivalencia compatible, es decir, $x \sim x'$ si y sólo si $X(\varphi)(x) \sim X(\varphi)(x')$, para cada φ de $\mathbf{\Delta}$, con codominio $[n]$. Se considera $(X/{\sim})_n = X_n/{\sim}$ y $(X/{\sim})(\varphi) = \bar{\varphi}$ la inducida en las proyecciones. $X/{\sim}$ es el conjunto simplicial *cociente*.

Se tiene también la proyección $\pi : X \to X/{\sim}$, $\pi_n(x) = [x]$, $x \in X_n$. Evidentemente es simplicial, y la externología

$$\varepsilon_{X/\sim} = \{E \subset X/{\sim} \colon \pi^{-1}(E) \in \varepsilon\}$$

dota a $X/\sim$ de estructura de conjunto simplicial exterior. Se denomina *conjunto simplicial exterior cociente*.

Sea ahora $\{(X^i, \varepsilon^i)\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos simpliciales exteriores. Por un lado se considera $\coprod_{i \in I} X^i$ el conjunto simplicial coproducto, dado por $(\coprod_{i \in I} X^i)_n = \coprod_{i \in I} X^i_n$, y si $j_k : X^k \hookrightarrow \coprod_{i \in I} X^i$ representa la inyección k-ésima, $k \in I$, entonces se define la externología

$$\varepsilon_{(\coprod_{i \in I} X^i)} = \{E \subset \textstyle\coprod_{i \in I} X^i : j_k^{-1}(E) \in \varepsilon^k, \forall k \in I\},$$

haciendo a cada j_k exterior. Es un simple ejercicio comprobar que $\coprod_{i \in I} X^i$ con la estructura exterior es el coproducto categórico de la familia dada. Por otro lado, si se considera el conjunto simplicial producto $\prod_{i \in I} X^i$ y se denota por $p_k : \prod_{i \in I} X^i \to X^k$, la proyección k-ésima, se define la externología generada por la subbase exterior

$$S = \{p_k^{-1}(E_k) : E_k \in \varepsilon^k, k \in I\}.$$

Tampoco aquí es difícil comprobar el hecho de que $\prod_{i \in I} X^i$ es el producto categórico de la familia dada en $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$. Teniendo en cuenta las herramientas introducidas, se comprueba que, dadas

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y,$$

aplicaciones simpliciales exteriores, existe su igualador y coigualador.

Si $\emptyset$ representa el conjunto simplicial vacío, y $*$ el conjunto simplicial unipuntual, entonces $(\emptyset, \{\emptyset\})$ y $(*, \{*\})$ son los objetos inicial y final de esta categoría, respectivamente. Se deduce inmediatamente

Corolario 2.3.1 $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ *es una categoría completa y cocompleta.*

Como se anunciaba en la introducción de esta sección, otra propiedad interesante de esta categoría es que es simplicial. A continuación se dará las herramientas necesarias para demostrar este hecho. En primer lugar se introduce el tensor $X \otimes K$, cuando X es un conjunto simplicial exterior y K es un conjunto simplicial, noción que dará pie a la creación de un funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}$.

Definición 2.3.4 Sea (X, ε) un conjunto simplicial exterior, K conjunto simplicial. Se define el conjunto simplicial exterior $(X \otimes K, \varepsilon_{X \otimes K})$ como sigue: $X \otimes K = X \times K$, donde representa el producto cartesiano en conjuntos simpliciales, olvidándose de la estructura exterior de X. Los elementos de $\varepsilon_{X \otimes K}$ son los subconjuntos de $X \times K$, E, tales que para cada $p \geq 0$, y para cada $\sigma \in K_p$, existe $F^\sigma \in \varepsilon$ y existe $G^\sigma \subset K$ con $\sigma \in G^\sigma_p$ y $F^\sigma \times G^\sigma \subset E$.

Se comprueba que, efectivamente, es externología en $X \otimes K$, por lo que lo dota de estructura de conjunto simplicial exterior.

Proposición 2.3.1 *Para cada $f : (X, \varepsilon) \to (X', \varepsilon')$ aplicación simplicial exterior y $\lambda : K \to K'$ aplicación simplicial, $f \otimes \lambda : X \otimes K \to X' \otimes K'$, dada por $f \otimes \lambda = f \times \lambda$, considerando el producto en conjuntos simpliciales, es una aplicación simplicial exterior.*

Demostración:

Evidentemente es aplicación simplicial. Tan solo falta demostrar que es exterior. Sea $E \in \varepsilon_{X' \otimes K'}$, $p \geq 0$ y $\sigma \in K_p$, entonces $\lambda_p(\sigma) \in K'_p$, por lo que existe $F^{\lambda_p(\sigma)} \in \varepsilon'$ y $G^{\lambda_p(\sigma)} \subset K'$ con $\lambda_p(\sigma) \in G^{\lambda_p(\sigma)}_p$ tal que $F^{\lambda_p(\sigma)} \times G^{\lambda_p(\sigma)} \subset E$. Como f es exterior, $f^{-1}(F^{\lambda_p(\sigma)}) \in \varepsilon$, por otro lado se considera $\lambda^{-1}(G^{\lambda_p(\sigma)}) \subset K$. Obsérvese que $\sigma \in \lambda^{-1}(G^{\lambda_p(\sigma)})_p$ y que, además, $f^{-1}(F^{\lambda_p(\sigma)}) \times \lambda^{-1}(G^{\lambda_p(\sigma)}) \subset (f \times \lambda)^{-1}(E)$. □

Corolario 2.3.2 *Existe un funtor,*

$$\_ \otimes \_ : \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}} \times \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}} \to \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}.$$

En el caso que K sea un conjunto simplicial finito, la descripción de la externología de $X \otimes K$ se puede simplificar, como se podrá apreciar.

Proposición 2.3.2 *Si X es un conjunto simplicial exterior y K conjunto simplicial finito, entonces*

$$\varepsilon_{X \otimes K} = \{E \subset X \times K : \exists F \in \varepsilon, F \times K \subset E\}.$$

Demostración:

Unicamente el contenido "$\subset$" no es obvio. Sea $E \in \varepsilon_{X \otimes K}$, $p \geq 0$, $\sigma \in K_p$, con σ no degenerado; entonces existe $F^\sigma \in \varepsilon$ y existe $G^\sigma \subset K$, con $\sigma \in G^\sigma_p$ y $F^\sigma \times G^\sigma \subset E$. Si N denota el conjunto de todos los símplices no degenerados, sea

$$F = \cap_{\sigma \in N} F^\sigma.$$

Puesto que esta intersección es finita entonces F es exterior. Además, se tiene que $F \times K \subset E$ pues $K = \cup_{\sigma \in N} G^\sigma$. Así,

$$F \times K = F \times (\cup_{\sigma \in N} G^\sigma) = \cup_{\sigma \in N}(F \times G^\sigma) \subset \cup_{\sigma \in N}(F^\sigma \times G^\sigma) \subset E.$$

□

Proposición 2.3.3 *Sea X un conjunto simplicial exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos. Entonces*

$$(X \otimes K) \otimes L = X \otimes (K \times L).$$

Demostración:

Si $E \in \varepsilon_{X \otimes (K \times L)}$ entonces existe $F \in \varepsilon$ tal que $F \times (K \times L) \subset E$; así $F \times K \in \varepsilon_{X \otimes K}$ y $(F \times K) \times L = F \times (K \times L) \subset E$. Por otro lado, si $E \in \varepsilon_{(X \otimes K) \otimes L}$, existe $H \in E \in \varepsilon_{X \otimes K}$ tal que $H \times L \subset E$. Por ser H exterior existe $F \in \varepsilon$ con $F \times K \subset H$. Se deduce que

$$F \times (K \times L) = (F \times K) \times L \subset H \times L \subset E.$$

□

Definición 2.3.5 Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores. Se define el conjunto simplicial $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)$,

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)_p = Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X\otimes\Delta[p],Y),\ \ p\geq 0,$$
$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)(\varphi) = (id_X\otimes\varphi_*)^*,\ \ \varphi\in\Delta.$$

Por otro lado, si f, g son aplicaciones simpliciales exteriores se define la aplicación simplicial $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(f,g)$ como

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(f,g)_p = (f\otimes id_{\Delta[p]})^*g_*,$$

con lo cual se tiene un funtor

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}} : (\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{op}\times\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}\to\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}.$$

Ahora se crea la composición para la estructura simplicial.

Definición 2.3.6 Se define $g\circ_p f$ como la composición

$$X\otimes\Delta[p]\xrightarrow{id_X\otimes\Delta} X\otimes(\Delta[p]\times\Delta[p])\xrightarrow{f\otimes id_{\Delta[p]}} Y\otimes\Delta[p]\xrightarrow{g} Z,$$

para cada $f\in\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)_p$ y $g\in\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y,Z)_p$.

Obsérvese que $X\otimes(\Delta[p]\times\Delta[p]) = (X\otimes\Delta[p])\otimes\Delta[p])$.

Esto define una aplicación simplicial para cada terna de conjuntos simpliciales exteriores X, Y, Z :

$$\circ : \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)\times\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Y,Z)\to\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Z).$$

Una simple comprobación demuestra la asociatividad de $\circ$.

Lema 2.3.1 *Existe un isomorfismo natural,*

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)\overset{\cong}{\to}\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X,Y)_0.$$

Demostración:

Sea X un conjunto simplicial exterior. Se define $\alpha_X : X \otimes \Delta[0] \to X$, por $(\alpha_X)_p(x, \tau_p) = x$, donde τ_p es el único p-símplice $[p] \to [0]$ de $\Delta[0]$. α_X es isomorfismo simplicial, pero además, si $E \in \varepsilon_{X \otimes \Delta[0]}$, existe $F \in \varepsilon$ con $F \times \Delta[0] \subset E$, luego $F = \alpha_X(F \times \Delta[0]) \subset \alpha_X(E)$, con lo cual la imagen de todo exterior es exterior. Por otro lado, si $F \in \varepsilon$ entonces $(\alpha_X)^{-1}(F) = F \times \Delta[0] \in \varepsilon_{X \otimes \Delta[0]}$.

Si Y es un conjunto simplicial exterior, $(\alpha_X)^*$ es el isomorfismo buscado, $\tilde{u} = u\alpha_X$. El resto de la demostración es rutinario. □

No es difícil comprobar que

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(u, id_Z)_p(f) = f \circ_p s_0^p(\tilde{u}),$$

dados $u : X \to Y$ y $f : Y \otimes \Delta[p] \to Z$ aplicaciones simpliciales exteriores. Análogamente,

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(id_W, u)_p(g) = s_0^p(\tilde{u}) \circ_p g,$$

para $g : W \otimes \Delta[p] \to X$.

Como resumen de todos estos resultados,

Proposición 2.3.4 **E-Sets**$^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ *es una categoría simplicial.*

Queda pendiente comprobar que el tensor $X \otimes K$ es del sentido simplicial de Quillen. Para ello, ahora se da ahora la relación de dicho tensor con el funtor $Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}$.

Proposición 2.3.5 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y)).$$

Demostración:

Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores, K conjunto simplicial y $f : X \otimes K \to Y$ una aplicación simplicial exterior. Entonces se define $\tilde{f} : K \to \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y))$ como $((\tilde{f})_p(k))_q(x, \sigma) = f_q(x, K(\sigma)(k))$, $p, q \geq 0$, $k \in K_p$, $x \in X_q$ y $\sigma \in \Delta[p]_q$.

Si $p \geq 0$ y $k \in K_p$ entonces $(\tilde{f})_p(k) : X \otimes \Delta[p] \to Y$ es una aplicación simplicial exterior: no presenta problema comprobar que es una aplicación simplicial; ahora sea $E \in \varepsilon_Y$, entonces $f^{-1}(E) \in \varepsilon_{X \otimes K}$ y, como $k \in K_p$ existe $F^k \in \varepsilon_X$, y $G^k \subset K$, con $k \in G^k_p$ y tal que $F^k \times G^k \subset f^{-1}(E)$. Evidentemente, $F^k \times \Delta[p] \in \varepsilon_{X \otimes \Delta[p]}$; además, $F^k \times \Delta[p] \subset ((\tilde{f}_p(k))^{-1}(E)$ pues dado $q \geq 0$ y $(x, \sigma) \in F^k_q \times \Delta[p]_q$, entonces

$$((\tilde{f})_p(k))_q(x, \sigma) = f_q(x, K(\sigma)(k)) = f_q(x, G^k(\sigma)(k)) \in E_q.$$

Sea $g : K \to \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(X, Y))$ una aplicación simplicial. Se considera $\overline{g} : X \otimes K \to Y$ como $(\overline{g})_p(x, k) = (g_p(k))_p(x, id_{[p]})$. $\overline{g}$ es simplicial, pero además es exterior: si $E \in \varepsilon_Y$, $k_0 \in K_p$, ya que $g_p(k_0) : X \otimes \Delta[p] \to Y$ es una aplicación simplicial exterior entonces $(g_p(k_0))^{-1}(E) \in \varepsilon_{X \otimes \Delta[p]}$ y, por tanto, existe $F \in \varepsilon_X$ tal que $F \times \Delta[p] \subset (g_p(k_0))^{-1}(E)$. Se considera $L_n = \{k \in K_n : g_n(k)(F \times \Delta[n]) \subset E\} \subset K_n$, $n \geq 0$. Entonces L es un subconjunto simplicial. Evidentemente, $k_0 \in L_p$ y $\overline{g}(F \times L) \subset E$. □

Así, según Quillen, y por todo lo demostrado, si X es un conjunto simplicial exterior y K un conjunto simplicial finito entonces $X \otimes K$ es el objeto tensor en el sentido simplicial de Quillen. También existe la exponenciación.

Definición 2.3.7 Sea X un conjunto simplicial exterior, K un conjunto simplicial. Se define X^K como,

$$(X^K)_p = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(K \times \Delta[p], X), \; p \geq 0 \; (X \equiv U(X)),$$
$$(X^K)(\varphi) = (id_K \times \varphi_*)^*, \; \varphi \in \mathbf{\Delta},$$

donde $\varepsilon_{X^K} = \{E \subset X^K : \exists F \in \varepsilon_X \text{ tal que } F^K \subset E\}$.

Esta construcción dota a X^K de estructura de conjunto simplicial exterior. Nótese que $(F_1 \cap F_2)^K = F_1^K \cap F_2^K$.

Proposición 2.3.6 *Si $f : X \to X'$ es una aplicación simplicial exterior y $\lambda : K' \to K$ es aplicación simplicial entonces se induce $f^\lambda : X^K \to (X')^{K'}$, una aplicación simplicial exterior.*

Demostración:

Para cada $p \geq 0$, $(f^\lambda)_p = (\lambda \times id_{\Delta[p]})^* f_*$. Si $F \in \varepsilon_{X'}$ entonces se tiene que $f^{-1}(F) \in \varepsilon_X$. Así, $f^\lambda((f^{-1}(F))^K) \subset F^{K'}$. □

Corolario 2.3.3 *Existe un funtor,*

$$(.)^{(.)} : (\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}.$$

Los funtores $\_ \otimes \_$ y $(.)^{(.)}$ están relacionados mediante una biyección natural, hecho crucial para comprobar, en el posterior corolario, que X^K es la exponenciación del sentido simplicial de Quillen.

Proposición 2.3.7 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong Hom_{\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K),$$

donde X, Y recorren los conjuntos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

Demostración:

Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores, K conjunto simplicial finito y $f : X \otimes K \to Y$ una aplicación simplicial exterior. Entonces se define $\tilde{f} : X \to Y^K$ como $((\tilde{f})_p(x))_q(k, \sigma) = f_q(X(\sigma)(x), k)$, donde $p, q \geq 0$, $x \in X_p$, $k \in K_q$, $\sigma \in \Delta[p]_q$. Se comprueba sin dificultad que, para cada p, $x \in X_p$, la aplicación $(\tilde{f})_p(x) : K \times \Delta[p] \to Y$ es simplicial, así como también $\tilde{f} : X \to Y^K$. Queda por verificar que $\tilde{f}$ es exterior: se considera $F \in \varepsilon_Y$. Entonces $f^{-1}(F) \in \varepsilon_{X \otimes K}$, por lo que existe $G \in \varepsilon_X$ tal que $G \times K \subset f^{-1}(F)$. Además, $G \subset (\tilde{f})^{-1}(F^K)$.

Sea ahora $g : X \to Y^K$ una aplicación simplicial exterior. Se define $\overline{g} : X \otimes K \to Y$ como $(\overline{g})_p(x, k) = (g_p(x))_p(k, id_{[p]})$, para cada $p \geq 0$, $x \in X_p$, $k \in K_p$. $\overline{g}$ es simplicial, pero además, si $F \in \varepsilon_Y$, como $F^K \in \varepsilon_{Y^K}$ y g es exterior, se tiene $g^{-1}(F^K) \in \varepsilon_X$, y $g^{-1}(F^K) \times K \subset (\overline{g})^{-1}(F)$. □

Corolario 2.3.4 *Sean X, Y conjuntos simpliciales exteriores, K, L conjuntos simpliciales finitos. Entonces,*

(i) $Y^{K \times L} \cong (Y^K)^L$;

(ii) $Hom_{\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K) \cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y))$.

Demostración:

(i) Para cada conjunto simplicial exterior, Z,

$$\begin{aligned}Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Z, Y^{K\times L}) &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Z \otimes (L \times K), Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}((Z \otimes L) \otimes K, Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Z \otimes L, Y^K)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(Z, (Y^K)^L).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K) &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}})(X, Y)).\end{aligned}$$

□

La biyección natural de la proposición 2.3.7 tiene una generalización simplicial.

Proposición 2.3.8 *Existe una biyección natural,*

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y) \cong \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K),$$

donde X, Y recorren los conjuntos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos.

Demostración:

Si $p \geq 0$,

$$\begin{aligned}\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes K, Y)_p &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}((X \otimes K) \otimes \Delta[p]), Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes (\Delta[p] \times K), Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes \Delta[p]) \otimes K, Y)\\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X \otimes \Delta[p], Y^K)\\ &\cong \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(X, Y^K)_p.\end{aligned}$$

De la naturalidad en todas las variables se concluye el resultado. □

2.4 Los funtores E-Sing y E-|.|.

En el caso de espacios topológicos y conjuntos simpliciales existen unos funtores singular, $Sing$, y realización geométrica, $|.|$, de forma que $Sing$ es adjunto a derecha de $|.|$:

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \underset{Sing}{\overset{|.|}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top}.$$

Para X espacio topológico y $p \geq 0$, $Sing(X)_p = Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_p, X)$. Por otro lado, por el teorema de MacLane-Moerdijk, la construcción del funtor realización es:

$$|K| = colim\ (\int_{\mathbf{\Delta}} K \xrightarrow{\pi_K} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{B} \mathbf{Top}),$$

donde $B([n]) = \Delta_n$, $n \geq 0$. Esta realización geométrica de K tiene una construcción más explícita: primeramente se considera $\overline{K} = \coprod_{n \geq 0}(K_n \times \Delta_n)$, considerando en cada K_n la topología discreta. A continuación se establece una relación de equivalencia en $\overline{K}$. Sus relaciones elementales son del tipo $(K(\varphi)(x), u) \sim (x, \tilde{\varphi}(u))$, donde $\varphi : [m] \to [n]$ es un morfismo de $\mathbf{\Delta}$, $x \in X_n$, $u \in \Delta_m$, $\tilde{\varphi} : \Delta_m \to \Delta_n$ la inducida de φ. Entonces $|K| = \overline{K}/\sim$.

Ahora se pretende dar una definición de un funtor E-$Sing$, de la categoría de los espacios exteriores a la de conjuntos simpliciales exteriores.

Definición 2.4.1 Sea (X, ε_X) un espacio exterior, se define

$$(E\text{-}Sing)((X, \varepsilon_X)),$$

como el conjunto simplicial $Sing(X)$ junto con la externología que admite como base exterior los subconjuntos simpliciales de la forma $Sing(E)$, con $E \in \varepsilon_X$.

Obsérvese que $Sing(E) \subset Sing(X)$, para cada abierto exterior E y que $Sing(E_1) \cap Sing(E_2) = Sing(E_1 \cap E_2)$. Se denotará simplemente por $(E\text{-}Sing)(X)$, si no hay posibilidad de confusión.

Proposición 2.4.1 *Sea $f : X \to X'$ una aplicación exterior, entonces se induce $(E\text{-}Sing)(f) : (E\text{-}Sing)(X) \to (E\text{-}Sing)(X')$, una aplicación simplicial exterior.*

Demostración:

Se define $(E\text{-}Sing)(f) = Sing(f) : Sing(X) \to Sing(X')$. Evidentemente es una aplicación simplicial, pero además es exterior: si $E \in \varepsilon_{X'}$ entonces $f^{-1}(E) \in \varepsilon_X$ y $Sing(f)(Sing(f^{-1}(E))) \subset Sing(E)$. □

Corolario 2.4.1 *Existe un funtor E-$Sing$* : $\mathbf{E} \to \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$.

Definición 2.4.2 Sea (X, ε_X) un conjunto simplicial exterior. Se define E-$|(X, \varepsilon_X)|$, como el espacio exterior dado por el espacio topológico $|X|$, realización geométrica de X considerado como conjunto simplicial, junto con la externología formada por los abiertos de $|X|$ que contienen a la realización geométrica de algún subconjunto simplicial exterior de X.

Obsérvese que $|E_1 \cap E_2| = |E_1| \cap |E_2|$, dados E_1, E_2 abiertos exteriores, con lo cual, se prueba inmediatamente que es un espacio exterior. Se hace notar que si $E \subset X$, entonces $|E| = p(\coprod_{n\geq 0}(E_n \times \Delta_n))$, donde $p : \overline{X} \to |X|$ es la proyección canónica.

Si no hay lugar a confusión se podrá denotar como E-$|X|$.

Proposición 2.4.2 *Sea $f : X \to X'$ una aplicación simplicial exterior. Entonces se induce una aplicación exterior E-$|f| : E$-$|X| \to E$-$|X'|$.*

Demostración:

Se define E-$|f| = |f| : |X| \to |X'|$. Evidentemente es continua, además, si E es un subconjunto exterior de X', entonces $f^{-1}(E)$ lo es de X, y $|f^{-1}(E)| \subset (|f|)^{-1}(|E|)$. Nótese que $|f|([(x,u)]) = [(f_n(x), u)]$, para cada $(x,u) \in X_n \times \Delta_n$, $n \geq 0$. □

Corolario 2.4.2 *Existe un funtor E-$|.| : \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{E}$.*

Estos funtores construidos, E-$Sing$ y E-$|.|$, están relacionados por una adjunción.

Proposición 2.4.3 *Sea X un conjunto simplicial exterior, Y un espacio exterior y $f : E$-$|X| \to Y$ una aplicación exterior. Entonces se induce $\tilde{f} : X \to (E\text{-}Sing)(Y)$ una aplicación simplicial exterior.*

Demostración:

Se define $(\tilde{f})_n : X_n \to Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y)$ como $((\tilde{f})_n(x))(u) = f([(x,u)])$, como en el caso clásico. Evidentemente $\tilde{f}$ es una aplicación simplicial. Sea E un abierto exterior de Y, ya que f es exterior $f^{-1}(E)$ es abierto exterior, luego existe F subconjunto simplicial exterior de X tal que $|F| \subset f^{-1}(E)$. Además, $F \subset (\tilde{f})^{-1}(Sing(E))$. □

Proposición 2.4.4 *Sea X un conjunto simplicial exterior, Y espacio exterior y $g : X \to (E\text{-}Sing)(Y)$ una aplicación simplicial exterior. Entonces se induce $\overline{g} : E\text{-}|X| \to Y$ una aplicación exterior.*

Demostración:

Se define $\overline{g}([(x,u)]) = g_n(x)(u)$, para cada $(x,u) \in X_n \times \Delta_n$, $n \geq 0$. Evidentemente $\overline{g}$ es una aplicación continua. Además, si E es un abierto exterior de Y, entonces $Sing(E)$ es un subconjunto simplicial exterior de $Sing(Y)$, por lo que $g^{-1}(Sing(E))$ lo es de X y $|g^{-1}(Sing(E))| \subset (\overline{g})^{-1}(E)$. □

Corolario 2.4.3 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E}}(E\text{-}|X|, Y) \cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(X, (E\text{-}Sing)(Y)),$$

donde X recorre los conjuntos simpliciales exteriores, Y los expacios exteriores.

Siguiendo ideas paralelas a las de la categoría de los espacios exteriores, $\mathbf{E}$, y la categoría de los conjuntos simpliciales exteriores, $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$, surgen nuevas categorías. En concreto, *los conjuntos exteriores*, cuya categoría de objetos simpliciales asociada está relacionada con la de los conjuntos simpliciales exteriores a través de un funtor fiel. Además, este funtor conservará ciertos tensores.

Definición 2.4.3 Un *conjunto exterior* es un par (X, ε), donde X es un conjunto y ε es una familia no vacía de subconjuntos de X tal que

(i) Si E_1, $E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 2.4.4 Una *aplicación exterior* entre dos conjuntos exteriores (X, ε), (X', ε') consiste en una aplicación $f : X \to X'$ tal que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

De estas nociones surge la categoría de conjuntos exteriores **E-Sets**.

Esta categoría tiene propiedades buenas sobre límites y colímites.

Dada $\{(X_i,\varepsilon_i)\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos exteriores, si se denota por $j_k : X_k \to \coprod_{i\in I} X_i$ la inclusión k-ésima del coproducto en **Sets**, se considera en $\{(X_i,\varepsilon_i)\}_{i\in I}$ la externología constituida por aquellos subconjuntos, E, tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, para cada $k \in I$.

Por otro lado, si $p_k : \prod_{i\in I} X_i \to X_k$ representa la proyección k-ésima en **Sets**, se considera en $\prod_{i\in I} X_i$ la externología que admite como base exterior los subconjuntos de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$.

Es inmediato comprobar que son el producto y coproducto categórico en **E-Sets** de la familia considerada.

Dadas f, g aplicaciones exteriores de X a Y se considera

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\},$$

con la externología inducida por la de X, es decir, sus subconjuntos exteriores son de la forma $E \cap A$, con $E \in \varepsilon_X$. Entonces $i : A \hookrightarrow X$, la inclusión canónica, es el igualador de f y g. Si se considera en Y el conjunto cociente $Y/\sim$, con las relaciones elementales $f(x) \sim g(x)$, $x \in X$, y externología formada por aquellos subconjuntos E tales que $\pi^{-1}(E)$ es subconjunto exterior de Y, donde $\pi : Y \to Y/\sim$ es la proyección, entonces π es el coigualador de f y g. De esta manera,

Proposición 2.4.5 *La categoría de conjuntos exteriores,* **E-Sets***, es completa y cocompleta.*

Nótese que $(\emptyset, \{\emptyset\})$ y $(*, \{*\})$ son el objeto inicial y final respectivamente.

Al ser $(\textbf{E-Sets})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ una categoría de objetos simpliciales, entonces es una categoría simplicial. Como **E-Sets** es cerrada bajo coproductos dado un conjunto exterior simplicial $X : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \textbf{E-Sets}$, y K un conjunto simplicial, existe el conjunto exterior simplicial $X \otimes K$, que viene dado por

$$(X \otimes K)_n = \textstyle\coprod_{\tau\in K_n} X_n, \;\; n \geq 0.$$

Si $n \geq 0$ se define $l_\tau : X_n \to X_n \times K_n$ como $l_\tau(x) = (x,\tau)$, $\tau \in K_n$. En $X_n \times K_n$ se puede considerar la siguiente externología: $E \in \varepsilon_{X_n\times K_n}$ si y sólo si $l_\tau^{-1}(E) \in \varepsilon_{X_n}$, para cada $\tau \in K_n$. Por otro lado, si $\varphi : [q] \to [p]$ es un morfismo en $\mathbf{\Delta}$ se considera $X(\varphi) \times K(\varphi) : X_p \times K_p \to X_q \times K_q$, comprobándose que es exterior. Esta construcción da lugar a un conjunto exterior simplicial isomorfo a $X \otimes K$. De forma natural, si $f : X \to X'$ es una aplicación exterior simplicial y $\lambda : K \to K'$ es simplicial, $f_n \times \lambda_n$ es exterior y define una aplicación exterior simplicial isomorfa a $f \otimes \lambda$. Por otro lado, **E-Sets** es cerrada bajo límites por lo que existe el objeto X^K para $(\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$.

Proposición 2.4.6 *Existe un funtor fiel,*

$$W : \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to (\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}},$$

que conserva el tensor $\_ \otimes \_$ *restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símplices en cada dimensión.*

Demostración:

Sea (X, ε) un conjunto simplicial exterior. Se define $W((X,\varepsilon))$ como $W((X,\varepsilon))_n = (X_n, \varepsilon_n)$, donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$. Obsérvese que, como $E_n \cap E'_n = (E \cap E')_n$ está bien dada. Si $\varphi : [m] \to [n]$ es creciente, $W((X,\varepsilon))(\varphi) = X(\varphi) : X_n \to X_m$, que es exterior pues $E_n \subset X(\varphi)^{-1}(E_m)$, para cada $E \in \varepsilon$. Por otro lado, si $f : (X,\varepsilon) \to (X',\varepsilon')$ es una aplicación simplicial exterior, entonces se tiene que $W(f)_n = f_n : X_n \to X'_n$ es exterior puesto que $f_n^{-1}(E_n) = f^{-1}(E)_n$, $E \in \varepsilon$. Se demuestra fácilmente la funtorialidad y fidelidad de W.

Sea ahora (X,ε) un conjunto simplicial exterior y K un conjunto simplicial con un número finito de símplices en cada dimensión. Si $n \geq 0$, $W(X \otimes K)_n = X_n \times K_n = (W(X) \otimes K)_n$; en $W(X \otimes K)_n$ se tiene la externología que admite como base exterior los subconjuntos de la forma $E_n \times K_n$, $E \in \varepsilon$, mientras que en $(W(X) \otimes K)_n$ por los subconjuntos $F \subset X_n \times K_n$ tales que para cada $k \in K_n$, existe $E^k \in \varepsilon$ con $E_n^k \subset l_k^{-1}(F)$. Realmente estas externologías coinciden: si $E \in \varepsilon$ y $k \in K_n$, entonces $l_k^{-1}(E_n \times K_n) = E_n$; por otro lado, si $F \subset X_n \times K_n$ verificando la condición exterior de $(W(X) \otimes K)_n$, se considera para cada $k \in K_n$, $E^k \in \varepsilon$ con $E_n^k \subset l_k^{-1}(F)$, y $E = \cap_{k \in K_n} E^k \in \varepsilon$, entonces $E_n \times K_n \subset F$. Nótese que E está bien dado al ser K_n finito. Se deduce que $W(X \otimes K) = W(X) \otimes K$. □

Como consecuencia inmediata W preserva los cilindros, es decir,

$$W(X \otimes \Delta[1]) = W(X) \otimes \Delta[1].$$

2.5 Grupos abelianos simpliciales exteriores.

Como se habrá observado, la noción *exterior* se puede trasladar a otras categorías. En paralelismo a la sección anterior, en el apartado concerniente a los conjuntos simpliciales exteriores y conjuntos exteriores simpliciales, surgen los *grupos abelianos simpliciales exteriores* (noción exterior de grupo abeliano simplicial), y los *grupos abelianos exteriores simpliciales* (categoría de objetos simpliciales de la categoría exterior de grupos abelianos). Estas nuevas categorías servirán de puente para el próximo capítulo poder desarrollar un tipo de homología en espacios exteriores.

Se comienza con la presentación de la categoría de los *grupos abelianos simpliciales exteriores*. Dado un grupo abeliano simplicial, se tiene la noción de subgrupo simplicial de forma obvia, $H < G$. Las mismas propiedades sobre subconjuntos simpliciales, excepto la unión, se trasladan a este caso.

Definición 2.5.1 Un *grupo abeliano simplicial exterior* consiste en un par (G, ε), donde G es un grupo abeliano simplicial y ε es una familia no vacía de subgrupos simpliciales de G verificando:

(i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$ entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F < G$ y $E < F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 2.5.2 Un homomorfismo simplicial entre grupos abelianos simpliciales exteriores $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Se tiene entonces, una nueva categoría, la de los grupos abelianos simpliciales exteriores, $\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$.

También esta categoría es completa y cocompleta. Además es punteada.

Si A es un subgrupo simplicial de G, con G simplicial exterior, se induce en A la externología ε_A cuya base exterior está formada por los subgrupos de A de la forma $E \cap A$, $E \in \varepsilon$. Así, la inclusión $i : A \hookrightarrow G$ es homomorfismo simplicial exterior. Por otro lado se puede definir el grupo simplicial cociente G/A por $(G/A)_p = G_p/A_p$, $p \geq 0$; teniendo el homomorfismo simplicial proyección $\pi : G \to G/A$, se define

$$\varepsilon_{G/A} = \{E < G/A : \pi^{-1}(E) \in \varepsilon\},$$

haciendo a π simplicial exterior.

Si $\{(G^i, \varepsilon_i)\}_{i\in I}$ es una familia de grupos abelianos simpliciales exteriores, se considera $\oplus_{i\in I}G^i$, dada por $(\oplus_{i\in I}G^i)_p = \oplus_{i\in I}G^i_p$, $p \geq 0$; y la inyección $j_k : G^k \to \oplus_{i\in I}G^i$, para cada $k \in I$. Se consideran los subgrupos simpliciales $E < \oplus_{i\in I}G^i$ tales que $j_k^{-1}(E) \in \varepsilon_k$, $\forall k \in I$, dando lugar al coproducto categórico de la familia dada. Si se toma $\prod_{i\in I} G^i$ por $(\prod_{i\in I} G^i)_p = \prod_{i\in I} G^i_p$, y $p_k : \prod_{i\in I} G^i \to G^k$, se toma la subbase exterior formada por los subgrupos simpliciales de la forma $p_k^{-1}(E_k)$, $E_k \in \varepsilon_k$, $k \in I$, teniéndose el producto.

Con estas nociones y resultados se demuestra la completitud y cocompletitud de esta categoría. Si se considera el grupo abeliano simplicial $0 : \mathbf{\Delta^{op}} \to \mathbf{Ab}$ dado por $0_p = 0$, $p \geq 0$, y como externología $\{0\}$, se comprueba que $(0, \{0\})$ es el objeto cero.

Ahora se verificará que es una categoría simplicial. Las construcciones tanto del tensor como del funtor $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}}$ son análogas a las hechas para $\mathbf{E\text{-}Sets^{\Delta^{op}}}$.

Definición 2.5.3 Sea (G, ε) un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se considera $G \otimes K$ grupo abeliano simplicial exterior, olvidándose en G de la extructura exterior, junto con la familia de subgrupos simpliciales E, tales que, para cada $p \geq 0$, $\sigma \in K_p$, existe $F^\sigma \subset K$ y existe $H^\sigma \in \varepsilon$, con $\sigma \in H^\sigma_p$ tal que $H^\sigma \otimes F^\sigma < E$.

Proposición 2.5.1 *Sea $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ un morfismo en $\mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}$, y $\lambda : K \to K'$ aplicación simplicial. Entonces se induce una aplicación simplicial exterior, $f \otimes \lambda : G \otimes K \to G' \otimes K'$.*

Demostración:

Análoga a la hecha para $\mathbf{E\text{-}Sets^{\Delta^{op}}}$. □

Corolario 2.5.1 *Existe un funtor $\_\otimes\_ : \mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}} \times \mathbf{Sets^{\Delta^{op}}} \to \mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}$.*

Proposición 2.5.2 *Si (G, ε) es un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial finito,*

$$\varepsilon_{G\otimes K} = \{E < G \otimes K : \exists F \in \varepsilon, F \otimes K < E\}.$$

Demostración:

Análoga a la hecha para $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$. $\square$

Se pueden transcribir muchas nociones y resultados de $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ a $\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$. Así, $(G \otimes K) \otimes L \cong G \otimes (K \times L)$, para G grupo simplicial exterior y K, L conjuntos simpliciales finitos.

Definiendo el funtor

$$\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}} : (\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}})^{op} \times \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$$

como $\underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G, G')_p = Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G \otimes \Delta[p], G')$, $p \geq 0$ y construyendo una aplicación simplicial composición similar a la hecha en $\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$, se comprueba,

Proposición 2.5.3 $\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ *es una categoría simplicial.*

Además,

Proposición 2.5.4 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G \otimes K, H) \cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K, \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G, H)).$$

Demostración:

Dado $f : G \otimes K \to H$ se define $\tilde{f} : K \to \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G, H))$ como $((\tilde{f})_p(k))_q j_\sigma = f_q j_{K(\sigma)(k)}$, para cada $\sigma \in \Delta[p]_q$, $p, q \geq 0$, $k \in K_p$. Aquí, $j_\sigma : G_q \to \coprod_{\tau \in \Delta[q]_p} G_q$, y $j_{K(\sigma)(k)} : G_q \to \coprod_{\tau \in K_q} G_q$.

Por otro lado, si $g : K \to \underline{Hom}_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(G, H))$ es simplicial, se considera $\overline{g} : G \otimes K \to H$ como $(\overline{g})_p j_k = (g_p(k))_p j_{id_{[p]}}$, para cada $k \in K_p$, $p \geq 0$.

El resto de la demostración es similar al ya expuesto para conjuntos simpliciales exteriores. $\square$

Definición 2.5.4 Sea G un grupo abeliano simplicial exterior y K un conjunto simplicial. Se define G^K :

$$(G^K)_p = Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K \times \Delta[p], G),\ p \geq 0\ (G \equiv U(G)),$$
$$(G^K)(\varphi) = (id_K \times \varphi_*),\ \varphi \in \mathbf{\Delta}.$$

y con externología cuya base exterior está formada por los de la forma E^K, $E \in \varepsilon_G$.

Nótese que aunque en $Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(K\times\Delta[p], G)$ se olvida de la estructura algebraica de G así como de su externología, se induce una estructura de grupo abeliano simplicial exterior, de forma obvia: $(f + f')_q = f_q + f'_q$. Por otro lado, ya que $(E_1 \cap E_2)^K = E_1^K \cap E_2^K$, la externología está bien dada.

De forma natural, si $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ es un homomorfismo simplicial exterior y $\lambda : K' \to K$ es aplicación simplicial, se induce $f^\lambda : G^K \to (G')^{K'}$ un homomorfismo simplicial exterior, dado por $(f^\lambda)_p = (\lambda \times id_{\Delta[p]})^* f_*$, $p \geq 0$. Entonces se obtiene un funtor

$$(.)^{(.)} : (\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}})^{op} \times \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{op}} \to \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{op}}.$$

Existiendo también una biyección natural,

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(G \otimes K, H) \cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{op}}}(G, H^K),$$

donde G, H recorren los grupos abelianos simpliciales exteriores y K los conjuntos simpliciales finitos. Para su verificación su puede acudir, una vez más, a la demostración hecha en la categoría $\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$, de lo que se concluye que G^K es el objeto simplicial en el sentido de Quillen.

Otra categoría de interés es la de *los grupos abelianos exteriores*. Sus objetos son pares (G, ε), con G grupo abeliano y ε una familia no vacía de subgrupos de G, llamados *exteriores* verificando que la intersección de dos elementos de ε es de ε y que todo subgrupo de G que contenga a un elemento de ε vuelve a ser de ε. Por otro lado, sus morfismos son homomorfismos de grupos $f : G \to G'$ tales que $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$. Esta nueva categoría se denotará por **E-Ab**. De forma similar a **E-Sets**, esta categoría es completa y cocompleta con objeto cero $(0, \{0\})$. Además,

Proposición 2.5.5 **E-Ab** *es una categoría aditiva.*

Demostración:

Existe el objeto cero y tiene coproductos finitos al ser cocompleta. Ahora, sean (G, ε), $(G', \varepsilon)'$ grupos abelianos exteriores. Dados $f, g : G \to G'$ homomorfismos exteriores, se define de forma habitual $f + g : G \to G'$ como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $x \in G$. Evidentemente es homomorfismo de grupos, pero además es exterior puesto que si $E \in \varepsilon'$ se puede encontrar $E_1 \in \varepsilon$ con $f(E_1) < E$ y $E_2 \in \varepsilon$ con $g(E_2) < E$. Sea $E' = E_1 \cap E_2$, entonces es subgrupo exterior de G y $(f+g)(E') < E$, demostrando que $f+g$ es exterior. Por otro lado, si $f : G \to G'$ es exterior y se define $(-f)(x) = -f(x)$, $x \in G$ entonces también $-f$ es exterior pues si $f(E') < E$ entonces $(-f)(E') < E$. $\square$

Aunque **Ab** es una categoría abeliana no se puede decir lo mismo de **E-Ab**. Se denotará por $U : \mathbf{E\text{-}Ab} \to \mathbf{Ab}$ el funtor que olvida la estructura exterior.

Proposición 2.5.6 *Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo exterior. Entonces f es monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si $U(f)$ es monomorfismo (resp. epimorfismo.)*

Demostración:

Sea f monomorfismo y $h_1, h_2 : H \to G$ homomorfismos verificando que $U(f)h_1 = U(f)h_2$. Se consideran $\overline{h_1}, \overline{h_2} : (H, \mathcal{P}(H)) \to (G, \varepsilon_G)$, donde $\mathcal{P}(H)$ designa a la externología formada por todos los subgrupos de H. Entonces $\overline{h_1}, \overline{h_2}$ son exteriores y $f\overline{h_1} = f\overline{h_2}$, con lo cual $\overline{h_1} = \overline{h_2}$, luego $h_1 = h_2$.

Supóngase ahora que $U(f)$ es monomorfismo y $h_1, h_2 : (H, \varepsilon_H) \to (G, \varepsilon_G)$ son exteriores con $fh_1 = fh_2$ entonces $U(fh_1) = U(fh_2)$, es decir, que $U(f)U(h_1) = U(f)U(h_2)$, por lo que $U(h_1) = U(h_2)$ y $h_1 = h_2$.

De forma similar, si f es epimorfismo y $h_1, h_2 : G' \to H$ son homomorfismos con $h_1U(f) = h_2U(f)$, se consideran $\overline{h_1}, \overline{h_2} : (G', \varepsilon_{G'}) \to (H, \{H\})$, que son exteriores y $\overline{h_1}f = \overline{h_2}f$, luego $\overline{h_1} = \overline{h_2}$ y $h_1 = h_2$. Haciendo uso del mismo truco para monomorfismo se comprueba que si $U(f)$ es epimorfismo entonces f es epimorfismo. $\square$

Se tiene entonces que f es bimorfismo si y sólo si $U(f)$ es isomorfismo. Sin embargo en **E-Ab** los bimorfismo e isomorfismos no coinciden. Está claro que todo isomorfismo en **E-Ab** lo es en **Ab**, pero no se da lo contrario. Por ejemplo el homomorfismo identidad del grupo G, G no trivial, es isomorfismo, pero $id_G : (G, \mathcal{P}(G)) \to (G, \{G\})$ no lo es. Se desprende que en **E-Ab** no todo morfismo es núcleo de su conúcleo, por ejemplo, luego **E-Ab** no es una categoría abeliana.

$(\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ como categoría de objetos simpliciales es una categoría simplicial, además es completa y cocompleta, por lo que si G es un grupo abeliano exterior simplicial y K es un conjunto simplicial, entonces existe el grupo abeliano exterior simplicial $G \otimes K$, y viene dado por

$$(G \otimes K)_p = \coprod_{k \in K_p} G_p, \;\; p \geq 0.$$

Proposición 2.5.7 *Existe un funtor fiel,*

$$W' : \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}},$$

que conserva el tensor $\_ \otimes \_$, *restringido a conjuntos simpliciales con un número finito de símplices en cada dimensión.*

Demostración:

Sea (G, ε) un grupo abeliano simplicial exterior. Se define $W'((G, \varepsilon))$ como $W'((G, \varepsilon))_n = (G_n, \varepsilon_n)$ donde ε_n es la externología que admite como base exterior a $\{E_n : E \in \varepsilon\}$. Si $\varphi : [m] \to [n]$ es un morfismo en $\mathbf{\Delta}$ entonces $W'((G, \varepsilon))(\varphi) = G(\varphi) : G_n \to G_m$, que es exterior. Si $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ es exterior, entonces $W'(f)_n = f_n$ también es exterior, $n \geq 0$. La funtorialidad y fidelidad de W' son inmediatas.

Sean ahora (G, ε) un grupo abeliano simplicial exterior y K conjunto simplicial finito con un número finito de símplices en cada dimensión. Se tiene, por un lado, que $W'(G \otimes K)_n = (G \otimes K)_n = \coprod_{k \in K_n} G_n$, $n \geq 0$ y por otro, $(W'(G) \otimes K)_n = \coprod_{k \in K_n} W'(G)_n = \coprod_{k \in K_n} G_n$, $n \geq 0$. Se comprueba que las externologías coinciden, de forma similar al funtor W de la proposición 2.4.6. $\square$

Se obtiene también que W' conserva los cilindros, es decir,

$$W'(G \otimes \Delta[1]) = W'(G) \otimes \Delta[1].$$

Se verán ahora relaciones entre todas las categorías simpliciales definidas en las dos últimas secciones de este capítulo, esto es, conjuntos simpliciales exteriores, grupos abelianos simpliciales exteriores, conjuntos exteriores simpliciales y grupos abelianos exteriores simpliciales. Estas relaciones, funtoriales, se deducirán de la adjunción existente entre el funtor libre, de conjuntos a grupos abelianos, y el funtor olvido, de grupos abelianos a conjuntos.

Se denota por $L : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Ab}$ al funtor *libre*, que asigna a cada conjunto X el grupo abeliano libre generado por X, $L(X)$. Sus elementos son sumas formales finitas $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$. A cada aplicación $f : X \to X'$, el homomorfismo $L(f) : L(X) \to L(X')$, dado por $L(f)(x) = f(x)$, para cada $x \in X$, extendiéndose por linealidad. Por otro lado, existe un funtor de *olvido* U : **Ab** $\to$ **Sets**, que prescinde de la estructura algebraica del conjunto. L es un funtor adjunto a izquierda de U. Cabe preguntarse qué relación tienen las categorías **E-Sets** y **E-Ab**, si existe una adjunción similar. Los siguientes resultados darán una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Definición 2.5.5 Dado (X, ε) un conjunto exterior,

$$(E\text{-}L)((X, \varepsilon))$$

es el grupo abeliano exterior dado por el par $(L(X), \varepsilon_{(E\text{-}L)((X,\varepsilon))})$, donde $L(X)$ es el grupo abeliano libre generado por X y la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos de la forma $L(E)$, $E \in \varepsilon$.

Nótese que $L(E_1 \cap E_2) = L(E_1) \cap L(E_2)$, por lo que la externología está bien dada.

Dado $f : (X, \varepsilon) \to (X', \varepsilon')$ una aplicación exterior, se induce de forma natural un homomorfismo exterior $(E\text{-}L)(f) = L(f)$: dado $E \in \varepsilon'$ existe $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ tal que $L(f)(L(f^{-1}(E)) < L(E)$. Así se tiene el funtor

$$E\text{-}L : \textbf{E-Sets} \to \textbf{E-Ab}.$$

Definición 2.5.6 Si (G, ε) un grupo abeliano exterior, se considera

$$(E\text{-}U)((G, \varepsilon)),$$

el conjunto exterior formado por el par $(U(X), \varepsilon_{(E\text{-}U)((G,\varepsilon))})$ donde $U(G)$ es el olvido de G y la externología admite como base exterior los subconjuntos de la forma $U(E)$, $E \in \varepsilon$.

Evidentemente, si $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ es un homomorfismo exterior entonces $(E\text{-}U)(f) = U(f)$ es aplicación exterior dando lugar al funtor

$$E\text{-}U : \textbf{E-Ab} \to \textbf{E-Sets}.$$

Proposición 2.5.8 *E-L es adjunto a izquierda de E-U.*

Demostración:

Sea (X, ε_X) un conjunto exterior y (G, ε_G) un grupo abeliano exterior. Dado $f : (E\text{-}L)((X, \varepsilon_X)) \to (G, \varepsilon_G)$ homomorfismo exterior, entonces $\tilde{f} : (X, \varepsilon_X) \to (E\text{-}U)((G, \varepsilon_G))$ viene dado por $\tilde{f} = f|X$. Si $E \in \varepsilon_G$ entonces existe $E' \in \varepsilon_X$ tal que $L(E') < f^{-1}(U(E)) = f^{-1}(E)$, además $E' \subset (\tilde{f})^{-1}(U(E))$, luego $\tilde{f}$ es exterior.

Sea ahora $g : (X, \varepsilon_X) \to (E\text{-}U)((G, \varepsilon_G))$ una aplicación exterior. Se considera $\overline{g}$:

$$\overline{g}(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 g(x_1) + ... + \lambda_n g(x_n).$$

$\overline{g}$ es homomorfismo de grupos, además, si $E \in \varepsilon_G$, existe $E' \in \varepsilon_X$ tal que $E' \subset g^{-1}(U(E)) = g^{-1}(E)$. Entonces, teniendo en cuenta que $E < G$, $L(E') < (\overline{g})^{-1}(E)$.

La biyección y la naturalidad son obvias. $\square$

Corolario 2.5.2 *Existe una adjunción,*

$$(\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \underset{(E\text{-}U)^{\Delta^{op}}}{\overset{(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta^{op}}}.$$

(Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es un funtor e $\mathbf{I}$ es una categoría pequeña, se denota por $F^I : \mathbf{C}^\mathbf{I} \to \mathbf{D}^\mathbf{I}$ al funtor definido como $F^I(X)$ la composición FX, y $F^I(\alpha) = F(\alpha)$.)

Según Quillen [68], si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es un funtor que preserva coproductos (resp. finitos) entonces $F^{\Delta^{op}}(X \otimes K) \cong F^{\Delta^{op}} \otimes K$ naturalmente, para cada objeto simplicial de $\mathbf{C}$, X, y conjunto simplicial (resp. finito), K. Respectivamente con límites (finitos), $F^{\Delta^{op}}(X^K) \cong F^{\Delta^{op}}(X)^K$.

En este caso, E-L, al ser adjunto a izquierda, preserva los colímites, en particular los coproductos, luego $(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}(X \otimes K) \cong (E\text{-}L)^{\Delta^{op}}(X) \otimes K$, siendo el isomorfismo natural.

Otra adjunción a tener en cuenta es

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta^{op}}} \underset{U^{\Delta^{op}}}{\overset{L^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ab}^{\mathbf{\Delta^{op}}}.$$

Surgen, de forma natural, funtores $E\text{-}L^{\Delta^{op}}$ y $(E\text{-}U)^{\Delta^{op}}$. Aquí, el objeto $E\text{-}L^{\Delta^{op}}((X,\varepsilon))$ es el par $(L^{\Delta^{op}}(X), \varepsilon_{E\text{-}L^{\Delta^{op}}((X,\varepsilon))})$, donde la externología tiene como base exterior a los de la forma $L^{\Delta^{op}}(E)$, $E \in \varepsilon$. Análogamente para morfismos. De igual forma se define un funtor $E\text{-}U^{\Delta^{op}}$.

Proposición 2.5.9 *$E\text{-}L^{\Delta^{op}}$ es adjunto a izquierda de $E\text{-}U^{\Delta^{op}}$.*

Demostración:

Sea $f : (E\text{-}L^{\Delta^{op}})((X,\varepsilon_X)) \to (G,\varepsilon_G)$ en $\mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}$. Se define $\tilde{f}$ como $(\tilde{f})_p = f_p|X_p$, $p \geq 0$. Dado $E \in \varepsilon_G$ existe $E' \in \varepsilon_X$ tal que $L^{\Delta^{op}}(E')$ es subgrupo de $f^{-1}(E)$, así $E' < (\tilde{f})^{-1}(U^{\Delta^{op}}(E))$.

Si $g : (X,\varepsilon) \to (E\text{-}U^{\Delta^{op}})((G,\varepsilon_G))$ es un morfismo en $\mathbf{E\text{-}Sets^{\Delta^{op}}}$, se construye $\overline{g}$ como

$$(\overline{g})_p(\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_p(x_i).$$

Si $E \in \varepsilon_G$, existe $E' \in \varepsilon_X$ tal que $E' \subset g^{-1}(U^{\Delta^{op}}(E))$, luego se tiene que $L^{\Delta^{op}}(E') \subset (\overline{g})^{-1}(E)$. El resto de la demostración es rutina. □

Proposición 2.5.10 *El diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E\text{-}Sets^{\Delta^{op}}} \arrow[r, shift left, "E\text{-}L^{\Delta^{op}}"] \arrow[d, "W"'] & \mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}} \arrow[l, shift left, "E\text{-}U^{\Delta^{op}}"] \arrow[d, "W'"] \\
(\mathbf{E\text{-}Sets})^{\Delta^{op}} \arrow[r, shift left, "(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}"] & (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\Delta^{op}} \arrow[l, shift left, "(E\text{-}U)^{\Delta^{op}}"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración:

Si (X,ε) un conjunto simplicial exterior, $((E\text{-}L)^{\Delta^{op}})W((X,\varepsilon))$ es un grupo abeliano exterior simplicial de forma que para cada $n \geq 0$ su componente es $L(X_n)$ con base exterior los subconjuntos de la forma $L(E_n)$, $E \in \varepsilon$. Por otro lado, también $W'(E\text{-}L^{\Delta^{op}}((X,\varepsilon))$ tiene como componente $L(X_n)$, además su base exterior coincide. La otra conmutatividad se hace de forma análoga. □

Capítulo 3

Homología en espacios exteriores.

Se vieron en el primer capítulo de este memoria unos invariantes para la categoría de los espacios exteriores: los grupos de homotopía de tipo Brown y de tipo Steenrod, así como algunas de sus propiedades. Se estudiarán ahora otro tipo de invariantes, de naturaleza homológica. En la primera sección se hará, de modo preliminar, un estudio de las distintas categorías de complejos de cadenas. En la siguiente se hará un estudio detallado del anillo de las matrices localmente finitas con coeficientes enteros, $\mathfrak{R}$, así como la categoría de los $\mathfrak{R}$-módulos. Una matriz localmente finita no es más que una matriz con un número numerable de filas y columnas con un número finito de coeficientes no nulos en cada una, respectivamente. La importancia de este anillo radica en que describe fielmente la noción de "tender al infinito". En la otra homología, sin embargo, tendrá que ver el monoide M. Estas dos homologías se estudiarán a fondo en la última sección, comprobándose algunas de sus propiedades. Merece especial atención la llamada $\mathfrak{R}$-homología celular para gCW complejos, que dará un algoritmo de cálculo para una amplia clase de este tipo de espacios.

3.1 Categorías de complejos de cadenas.

Dada $\mathbf{A}$ una categoría abeliana se tiene una pareja de funtores,

$$\mathbf{A}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \underset{P}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ch}^{+}\mathbf{A},$$

entre la categoría de objetos simpliciales de $\mathbf{A}$ y la categoría de complejos de cadenas positivos en $\mathbf{A}$. El funtor N asigna a cada objeto simplicial, X, el complejo $N(X)$, llamado *complejo de Moore*, y dado por

$$N(X)_n = \cap_{i=0}^{n-1} ker\{X(\delta_i) : X_n \to X_{n-1}\}$$
$$d_n^{N(X)} = X(\delta_n)|N(X)_n : N(X)_n \to N(X)_{n-1},\ n \geq 1.$$

El funtor N junto con el funtor P, que describiremos explícitamente más adelante, por el Teorema de Dold-Puppe, da lugar a una equivalencia de categorías.

Por otro lado existe otro funtor, $K : \mathbf{A}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Ch}^{+}\mathbf{A}$, que a cada objeto simplicial de $\mathbf{A}$, X, lo transforma en el complejo $K(X)$:

$$K(X)_n = X_n$$
$$d_n^{K(X)} = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i X(\delta_i) : X_n \to X_{n-1}.$$

Este último funtor es mucho más usado en homología a pesar de que no sea una equivalencia de categorías. No obstante, los funtores N y K están relacionados pues existe una transformación natural $i : N \to K$, la inclusión canónica, tal que cada componente es una equivalencia de homotopía.

Se introducirá la categoría de los *complejos de cadenas exteriores positivos de grupos abelianos*, para después comprobar que esta categoría es equivalente a la de grupos abelianos simpliciales exteriores mediante una relación del tipo Dold-Puppe. También se verá una relación con la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos exteriores.

Dado un complejo de cadenas de grupos abelianos, (X, d^X), se puede hablar de intersección de subcomplejos. También, si $f : X \to Y$ es un morfismo de complejos, de la imagen y antiimagen de subcomplejos.

Se supondrá a partir de ahora que los complejos considerados son positivos y se denotará un contenido, $\subset$, cuando se haga referencia a subcomplejos.

Definición 3.1.1 Un *complejo de cadenas exterior de grupos abelianos* consiste en un par (X, ε), donde X es un complejo de cadenas de grupos abelianos y ε es una familia no vacía de subcomplejos de X verificando:

(i) Si $E_1, E_2 \in \varepsilon$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \varepsilon$;

(ii) Si $E \in \varepsilon$, $F \subset X$ y $E \subset F$ entonces $F \in \varepsilon$.

Definición 3.1.2 Dado $f : (X, \varepsilon) \to (X', \varepsilon')$, un morfismo de complejos entre complejos exteriores, se dice que es *exterior* si $f^{-1}(E) \in \varepsilon$, para cada $E \in \varepsilon'$.

Se denotará esta categoría como $\mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$, y se denominará *de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos.*

La siguiente construcción dará lugar a un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, para cada grupo abeliano simplicial exterior:

Definición 3.1.3 Si (G, ε) es un grupo abeliano simplicial exterior, se define el complejo exterior

$$(E\text{-}N)((G, \varepsilon))$$

como el par $(N(G), \varepsilon_{(E\text{-}N)((G,\varepsilon))})$, donde $N(G)$ es el complejo de Moore usual y la externología es la que admite como base exterior a los subcomplejos de la forma $N(E)$, $E \in \varepsilon$.

Se observa que $N(E_1) \cap N(E_2) = N(E_1 \cap E_2)$, por lo que la externología está bien dada.

Si $f : (G, \varepsilon) \to (G', \varepsilon')$ es un homomorfismo simplicial exterior, se induce de forma natural un morfismo de complejos exterior,

$$(E\text{-}N)(f) = N(f) : N(G) \to N(G').$$

Dado $E \in \varepsilon'$, $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ y $N(f)(N(f^{-1}(E))) \subset N(E)$, luego efectivamente, es exterior. Todo esto da lugar al funtor

$$E\text{-}N : \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}.$$

Para el caso clásico de los grupos abelianos, el funtor P de la equivalencia de categorías tiene la definición siguiente:

Para cada $q \geq 0$, se considera $K[q] = L^{\Delta^{op}}(\Delta[q])$, el grupo abeliano simplicial generado por $\Delta[q]$, esto es,

$$K[q]_n = L(\Delta[q]_n),$$
$$K[q](\varphi) = L(\Delta[q](\varphi)).$$

Entonces se considera el complejo de cadenas

$$N[q] = N(K[q]).$$

Si C es un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos, y $f : C \to C'$ es un morfismo de complejos,

$$P(C)_q = Hom_{\mathbf{Ch^+Ab}}(N[q], C),$$
$$P(C)(\varphi) = Hom_{\mathbf{Ch^+Ab}}(NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*), id_C) = (NL^{\Delta^{op}}(\varphi_*))^*,$$
$$P(f)_q = f_*.$$

Este funtor se puede generalizar al caso exterior.

Definición 3.1.4 Si (C, ε) es un complejo de cadenas exterior de grupos abelianos, se define el grupo abeliano simplicial exterior,

$$(E\text{-}P)((C, \varepsilon)),$$

al formado por el par $(P(C), \varepsilon_{(E\text{-}P)((C,\varepsilon))})$, donde la externología es aquella que admite como base exterior los subgrupos simpliciales de la forma $P(E)$, $E \in \varepsilon$.

De nuevo, aquí, $P(E_1) \cap P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$, por lo que la externología está bien definida.

Es bien conocido que la homotopía en complejos de cadenas se puede describir en función del complejo de cadenas $N[1]$, anteriormente descrito: Si la categoría abeliana, $\mathbf{A}$, es la de módulos sobre un anillo Λ, C^1, C^2 son complejos de cadenas de módulos, se tiene el producto tensorial $C^1 \otimes C^2$,

$$(C^1 \otimes C^2)_p = \oplus_{i+j=p}(C^1_i \otimes C^2_j),$$
$$d(c^1_i \otimes c^2_j) = d^1(c^1_i) \otimes c^2_j + (-1)^i c^1_i \otimes d^2(c^2_j), \;\; c^1_i \in C^1_i, c^2_j \in C^2_j.$$

Sean e_0, e_1 los generadores de $N[1]_0$, y sea e el generador de $N[1]_1$ con $d(e) = e_1 - e_0$. Una homotopía de complejos entre f^0 y f^1, homomorfismos de complejos $C \to C'$, es un morfismo de complejos $D : C \otimes N[1] \to C'$ con $D(e_i \otimes c) = f^i(c)$. Si existe tal homotopía, se dice que f^0 es homótopo a f^1. En realidad, las dos nociones de homotopía existentes coinciden (véase [18]).

Para módulos simpliciales K^1, K^2 se define $K^1 \times K^2$ como

$$(K^1 \times K^2)_q = K^1_q \otimes K^2_q,$$
$$(K^1 \times K^2)(\varphi) = K^1(\varphi) \times K^2(\varphi).$$

Se comprueba que, si M es un módulo simplicial y K es un conjunto simplicial finito, entonces

$$M \otimes L^{\Delta^{op}}(K) = M \times L^{\Delta^{op}}(K).$$

El funtor N preserva la homotopía.

Si $f : (C, \varepsilon) \to (C', \varepsilon')$ un morfismo en $\mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$ se induce otro en $\mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}$, $(E\text{-}P)(f) = P(f)$.

Nótese que si $E \in \varepsilon'$, $P(f)(P(f^{-1}(E))) \subset P(E)$, por lo que, efectivamente, es exterior. Se obtiene de aquí el funtor

$$E\text{-}P : \mathbf{E\text{-}Ch^+Ab} \to \mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}.$$

El Teorema de Dold-Puppe asegura que existen isomorfismos naturales $NP \cong id$, $id \cong PN$, haciendo que $\mathbf{Ch^+Ab}$ y $\mathbf{Ab^{\Delta^{op}}}$ sean equivalentes. Ocurre también esto con los funtores $E\text{-}N$ y $E\text{-}P$.

Proposición 3.1.1 *Las categorías* $\mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$, $\mathbf{E\text{-}Ab^{\Delta^{op}}}$ *son equivalentes.*

Demostración:

Se denotará por $\phi : NP \to id$ al isomorfismo natural existente. Si (C, ε) es un complejo exterior, una base para $P(C)$ es $\{P(E) : E \in \varepsilon\}$, y una base exterior para $NP(C)$ es, entonces, $\{NP(E) : E \in \varepsilon\}$.

Si se considera

$$E\text{-}\phi : (E\text{-}N)(E\text{-}P) \to id$$

como $(E\text{-}\phi)_{(C,\varepsilon)} = \phi_C : NP(C) \to C$, es isomorfismo en $\mathbf{Ch^+Ab}$. Además $E = \phi(NP(E))$, $E \in \varepsilon$, con lo cual $E\text{-}\phi$ es isomorfismo exterior. La naturalidad es obvia. De forma similar se construye el isomorfismo natural $id \overset{\cong}{\to} (E\text{-}P)(E\text{-}N)$. □

Definición 3.1.5 Se define el funtor $E\text{-}K : \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$ que a cada grupo abeliano simplicial (G,ε), le hace corresponder el complejo $K(G)$ junto con la externología generada por la base exterior $\{K(E) : E \in \varepsilon\}$. Para cada morfismo $f : (G,\varepsilon) \to (G',\varepsilon')$, $(E\text{-}K)(f)_n = f_n$, que, de forma natural, es exterior.

Por un lado, se ha definido la categoría de complejos de cadenas exteriores de grupos abelianos, y por otro, se tiene la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos exteriores. Cabe preguntarse la relación entre ambas categorías.

Proposición 3.1.2 *Existe un funtor fiel,*

$$W'' : \mathbf{E\text{-}Ch^+Ab} \to \mathbf{Ch^+(E\text{-}Ab)}.$$

Demostración:

Sea (C,ε) un complejo de cadenas exterior. Se define el complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores $W''((C,\varepsilon))$ dado por

$$W''((C,\varepsilon))_n = (C_n, \varepsilon_n),$$

donde ε_n es la externología en C_n cuya base exterior está formada por los subgrupos $\{E_n : E \in \varepsilon\}$; el operador diferencial,

$$d_n^{W''((C,\varepsilon))} = d_n^C : C_n \to C_{n-1},$$

es exterior ya que $d_n|E_n = d_n^E : E_n \to E_{n-1}$.

Por otro lado, si $f : (C,\varepsilon) \to (C',\varepsilon')$ es un morfismo de $\mathbf{E\text{-}Ch^+Ab}$ se define $W''(f)_n = f_n : C_n \to C'_n$. Cada f_n es exterior pues si $E \in \varepsilon'$ existe $f^{-1}(E) \in \varepsilon$ y $f_n(f^{-1}(E)_n) \subset E_n$. De la definición se deduce rápidamente la funtorialidad y fidelidad de W''. □

Obsérvese que, a pesar de que la categoría de los grupos abelianos exteriores no es abeliana se pueden construir los funtores

$$K, N : (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Ch}^{+}(\mathbf{E\text{-}Ab}),$$

sin ningún problema, gracias a su aditividad.

Proposición 3.1.3 *Los diagramas*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{E\text{-}K} & \mathbf{E\text{-}Ch^{+}Ab} \\ {\scriptstyle W'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W''} \\ (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow[K]{} & \mathbf{Ch}^{+}(\mathbf{E\text{-}Ab}), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{E\text{-}Ab}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow{E\text{-}N} & \mathbf{E\text{-}Ch^{+}Ab} \\ {\scriptstyle W'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W''} \\ (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} & \xrightarrow[N]{} & \mathbf{Ch}^{+}(\mathbf{E\text{-}Ab}), \end{array}$$

son conmutativos.

Demostración:

Sea (G,ε) un grupo abeliano simplicial exterior. Se considera primeramente $W'((G,\varepsilon))$. Entonces $NW'((G,\varepsilon))$ es un complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores dado por

$$NW'((G,\varepsilon))_p = \cap_{i=0}^{p-1} ker\{G(\delta_i) : (G_p,\varepsilon_p) \to (G_{p-1},\varepsilon_{p-1})\},$$
$$d_p = G(\delta_p)|N(G)_p.$$

Por otro lado se considera $(E\text{-}N)((G,\varepsilon)) = (N(G), \varepsilon_{(E\text{-}N)(G)}$ donde la externología está generada por la base exterior cuyos elementos son

$$\{N(E) : E \in \varepsilon\}.$$

Así, se tiene que $W''(E\text{-}N)((G,\varepsilon))$ es un complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores, con componente n-ésima $N(G)_n$ cuya externología está generada por la base exterior $\{N(E)_n : E \in \varepsilon\}$. Teniendo en cuenta que $\cap_{i=0}^{p-1} ker\{E(\delta_i)\} = E_p(\cap_{i=0}^{p-1} ker\{G(\delta_i)\})$, cuando $E \in \varepsilon$, se tiene la igualdad. Se procede de igual forma para morfismos, concluyendo la conmutatividad del segundo diagrama.

Considérese de nuevo (G,ε). $KW'((G,\varepsilon))$ es el complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores dado en cada componente n como (G_n,ε_n), $d_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i G(\delta_i)$. Obviamente coincide con el objeto $W''(E\text{-}K)((G,\varepsilon))$. Se procede de la misma manera con morfismos. $\square$

3.2 El anillo de las matrices localmente finitas.

En esta sección se introducirá el anillo $\mathfrak{R}$, de las matrices localmente finitas así como un funtor aditivo adjunto a derecha, $\mathcal{P} : \mathbf{E\text{-}Ab} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}$, de los grupos abelianos exteriores a los $\mathfrak{R}$-módulos a derecha, que dará lugar a una gran cantidad de relaciones y propiedades útiles para la homología.

Se considera $\mathbb{N}$ el conjunto exterior cuya externología es la de los complementos de sus subconjuntos finitos. Si $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, entonces $\{\mathbb{N}(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base exterior. Sea el grupo abeliano exterior $(E\text{-}L)(\mathbb{N})$, es decir, $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$ con la externología con base exterior $\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Denotando por e_i la sucesión de enteros $(0, 0, ..., 0, 1^{(i}, 0, 0, ...)$ entonces $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ genera, claramente, a $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$. Por simplificar, se denotará a este grupo abeliano exterior por $\mathfrak{Z}$.

Dar un homomorfismo exterior, $\alpha : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}$, es lo mismo que dar las imágenes $\{\alpha(e_i)\}_{i=0}^{\infty}$. Cada $\alpha(e_i)$ es una combinación lineal finita de elementos $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$, y por otro lado, como α es exterior, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(\oplus_{i=l}^{\infty}\mathbb{Z}) \subset \oplus_{i=k}^{\infty}\mathbb{Z}$. De esta manera, α se puede identificar con una matriz infinita de orden $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con coeficientes enteros tal que cada columna y cada fila tiene un número finito de enteros no nulos. Este tipo de matriz se denomina *localmente finita* sobre $\mathbb{Z}$.

Si $\alpha(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k^i e_i$, con $k = 0, 1, ...$, entonces se interpreta como

$$A_\alpha = (\alpha_j^i).$$

El conjunto de las matrices localmente finitas sobre $\mathbb{Z}$ se denotará como $lf(\mathbb{Z})$. En este conjunto se puede definir sin ningún problema la suma y producto matriciales dotándolo de estructura de anillo con unidad. Por otra parte se considera $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$ definiéndose $(\alpha+\beta)(k) = \alpha(k)+\beta(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$ con la suma y la composición tiene estructura de anillo con unidad. Además,

Proposición 3.2.1 *$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$ y $lf(\mathbb{Z})$ son anillos isomorfos.*

Demostración:

Sea $\varphi : Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z}) \to lf(\mathbb{Z})$ dado por $\varphi(\alpha) = A_\alpha$. Evidentemente es homomorfismo de anillos inyectivo. Tal como está definido $lf(\mathbb{Z})$ tampoco hay problemas en comprobar la suprayectividad. $\square$

Se llamará $\mathfrak{R}$ al anillo $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z},\mathfrak{Z})$ o $lf(\mathbb{Z})$, y $\mathfrak{R}$-**Mod** a la categoría de $\mathfrak{R}$-módulos por la derecha.

Lema 3.2.1 *Si G es un grupo abeliano exterior, entonces $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G)$ es un $\mathfrak{R}$-módulo a derecha.*

Demostración:

Se considera la acción siguiente: si $f \in Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G)$ y $\alpha \in \mathfrak{R}$ entonces $f \cdot_{\mathfrak{R}} \alpha = f\alpha$, la composición. Por otro lado, dados $f, f' : \mathfrak{Z} \to G$, entonces $f + f' : \mathfrak{Z} \to G$, definida como $(f+f')(e_k) = f(e_k) + f'(e_k)$, $k \in \mathbb{N}$, al extenderse linealmente, es homomorfismo exterior. El resto de la demostración es rutinario. $\square$

Corolario 3.2.1 *$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, \_)$ es un funtor de* **E-Ab** *a* $\mathfrak{R}$-**Mod**.

Demostración:

Sea $\gamma : G \to G'$ homomorfismo exterior, entonces, obviamente se verifica que $\gamma_*(f+g) = \gamma_*(f) + \gamma_*(g)$. Además, para cada $f \in Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G)$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, se tiene $\gamma_*(f \cdot_{\mathfrak{R}} \alpha) = \gamma(f\alpha) = (\gamma f)\alpha = \gamma_*(f) \cdot_{\mathfrak{R}} \alpha$. $\square$

Se denotará por $\mathcal{P}$ al funtor $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, \_)$ y se denominará *funtor de Brown.* En el siguiente lema $\mathfrak{S}$ representa un anillo unitario, no necesariamente el de las matrices localmente finitas.

Lema 3.2.2 *El funtor $Hom_{\mathfrak{S}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{S}, \_) : \mathfrak{S}$-**Mod** $\to \mathfrak{S}$-**Mod** es naturalmente isomorfo al funtor identidad.*

Demostración:

Sea M un $\mathfrak{S}$-módulo. Si $f : \mathfrak{S} \to M$ es un homomorfismo de $\mathfrak{S}$-módulos y $s \in \mathfrak{S}$, entonces se define $(f \cdot_{\mathfrak{S}} s)(s') = f(ss')$, $s' \in \mathfrak{S}$. Por otro lado $(f+f')(s) = f(s) + f'(s)$, $s \in \mathfrak{S}$, $f, f' \in Hom_{\mathfrak{S}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{s}, M)$. Con estas leyes $Hom_{\mathfrak{S}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{S}, M)$ es un $\mathfrak{S}$-módulo. Ahora se considera

$$\varphi_M : Hom_{\mathfrak{S}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{S}, M) \to M,$$

dado por $\varphi_M(f) = f(1)$. No hay dificultad en demostrar que φ_M es homomorfismo de $\mathfrak{S}$-módulos. Además, si $f, g : \mathfrak{S} \to M$ son tales que coinciden en 1, entonces coinciden en todo $\mathfrak{S}$. Dado $m \in M$, se considera $f_m : \mathfrak{S} \to M$ dado como $f_m(1) = m$, extendiéndose por linealidad. Esto hace que φ_M sea isomorfismo. $\square$

El funtor $\mathcal{P}$ no es ni fiel ni pleno. Sin embargo, como consecuencia del lema anterior, se tiene una propiedad interesante.

Corolario 3.2.2 *Existe un isomorfismo natural de $\mathfrak{R}$-módulos,*

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}), \mathcal{P}(G)),$$

cuando G recorre los grupos abelianos exteriores.

Demostración:

Sea G un grupo abeliano exterior. Entonces $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G)$ es $\mathcal{P}(G)$, pero $\mathcal{P}(G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{R}, \mathcal{P}(G))$ que es $Hom_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}), \mathcal{P}(G))$, siendo el isomorfismo, natural de $\mathfrak{R}$-módulos. $\square$

Obsérvese que el corolario no sólo dice que es biyección natural, sino que, además dice que es isomorfismo natural de $\mathfrak{R}$-módulos. A continuación se analizará el funtor $\mathcal{P}$ de Brown, a fin de poder determinar un funtor adjunto a izquierda suyo.

Definición 3.2.1 Se define $\mathbf{S}$ la categoría cuyos objetos son de la forma $\oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\alpha$, con $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}$, para cada $\alpha \in A$, y los morfismos son los homomorfismos de $\mathfrak{R}$-módulos entre estos objetos.

Si se denota por $j_{\mathfrak{Z}_\beta} : \mathfrak{Z}_\beta \to \oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{Z}_\alpha$ la inclusión β-ésima, $\beta \in A$, se puede considerar $\mathcal{P}(j_{\mathfrak{Z}_\beta}) : \mathfrak{R}_\beta \to \mathcal{P}(\oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{Z}_\alpha)$ para cada $\beta \in A$, luego se induce un homomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos $\oplus_{\alpha \in A} \mathcal{P}(j_{\mathfrak{Z}_\alpha}) : \oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\alpha \to \mathcal{P}(\oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{Z}_\alpha)$.

Proposición 3.2.2 *Existe un funtor $l : \mathbf{S} \to \mathbf{E\text{-}Ab}$ definido como*

$$l(\oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{R}_\alpha) = \oplus_{\alpha \in A} \mathfrak{Z}_\alpha$$

para objetos.

Demostración:

De forma obvia, si $u : \oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha \to \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{R}_\beta$ es un morfismo de $\mathbf{S}$, entonces $u = \oplus_{\alpha\in A}u_\alpha$ con $u_\alpha = uj_{\mathfrak{R}_\alpha} : \mathfrak{R}_\alpha \to \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{R}_\beta$. Para cada $\alpha \in A$ se considera

$$\mathcal{P}(\mathfrak{Z}_\alpha) = \mathfrak{R}_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{R}_\beta \xrightarrow{\oplus_{\beta\in B}\mathcal{P}(j_{\mathfrak{Z}_\beta})} \mathcal{P}(\oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta).$$

Teniendo en cuenta el isomorfismo,

$$Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}_\alpha, \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta) \cong Hom_{\mathfrak{R}\textbf{-Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}_\alpha), \mathcal{P}(\oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta)),$$

existe un único $\tilde{u_\alpha} : \mathfrak{Z}_\alpha \to \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta$ homomorfismo exterior que se aplica en $(\oplus_{\beta\in B}\mathcal{P}(j_{\mathfrak{Z}_\beta}))u_\alpha : \mathcal{P}(\mathfrak{Z}_\alpha) \to \mathcal{P}(\oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta)$.

Se define $l(u) = \oplus_{\alpha\in A}\tilde{u_\alpha} : \oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{Z}_\alpha \to \oplus_{\beta\in B}\mathfrak{Z}_\beta$.

A partir de la propiedad universal del coproducto y de la definición de l el resto de la demostración no entraña dificultad. $\square$

Proposición 3.2.3 *Existe una biyección natural,*

$$Hom_{\textbf{E-Ab}}(l(\oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha), G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\textbf{-Mod}}(\oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha, \mathcal{P}(G)).$$

Demostración:

Sea $f : l(\oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha) \to G$ homomorfismo exterior. Entonces $f = \oplus_{\alpha\in A}f_\alpha$, con $f_\alpha : \mathfrak{Z}_\alpha \to G$ homomorfismo exterior.

Se define $\tilde{f} = \oplus_{\alpha\in A}\mathcal{P}(f_\alpha) : \oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha \to \mathcal{P}(G)$. Por otro lado, dado $g : \oplus_{\alpha\in A}\mathfrak{R}_\alpha \to \mathcal{P}(G)$, $g = \oplus_{\alpha\in A}g_\alpha$, con $g_\alpha : \mathfrak{R}_\alpha \to \mathcal{P}(G)$, así, según la biyección

$$Hom_{\textbf{E-Ab}}(\mathfrak{Z}_\alpha, G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\textbf{-Mod}}(\mathcal{P}(\mathfrak{Z}_\alpha), \mathcal{P}(G)),$$

se considera $\overline{g_\alpha} = \mathfrak{Z}_\alpha \to G$ el homomorfismo exterior correspondiente. Finalmente $\overline{g} = \oplus_{\alpha\in A}\overline{g_\alpha}$. Según todas estas construcciones, no es difícil comprobar que $\overline{\tilde{f}} = f$ y que $\tilde{\overline{g}} = g$, así como la naturalidad. $\square$

Ahora se está en condiciones de construir un funtor adjunto a izquierda del funtor $\mathcal{P}$.

Proposición 3.2.4 *Existe un funtor adjunto a izquierda de $\mathcal{P}$,*

$$V : \mathfrak{R}\textbf{-Mod} \to \textbf{E-Ab}.$$

Demostración:

Se define el homomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos $p_M : \oplus_{x\in M}\mathfrak{R}_x \to M$ dado por $(p_M j_{\mathfrak{R}_x})(1) = x$, para cada $\mathfrak{R}$-módulo, M, y $x \in M$, donde $j_{\mathfrak{R}_x}$ es la inclusión x-ésima, $\mathfrak{R}_x \to \oplus_{x\in M}\mathfrak{R}_x$ $x \in M$.

Sea también $q_M : \oplus_{z\in ker(p_M)}\mathfrak{R}_z \to \oplus_{x\in M}\mathfrak{R}_x$. Se tiene un diagrama,

$$\oplus_{z\in ker(p_M)}\mathfrak{R}_z \xrightarrow{q_M} \oplus_{x\in M}\mathfrak{R}_x \xrightarrow{p_M} M.$$

Nótese que M es el conúcleo de q_M.

Si $F_0(M) = \oplus_{x\in M}\mathfrak{R}_x$, $F_1(M) = \oplus_{z\in ker(p_M)}\mathfrak{R}_z$, entonces F_0, F_1 son funtores de $\mathfrak{R}$-**Mod** en **S**, y $q_M : F_1(M) \to F_0(M)$ una transformación natural. Se define

$$V(M) = coker(lF_1(M) \xrightarrow{l(q_M)} lF_0(M)).$$

No hay problemas en demostrar la funtorialidad de V teniendo en cuenta que q es una transformación natural y que l, F_0, F_1 son funtores. Además,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(V(M), G) &= Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(coker(l(q_M))), G) \\ &\cong ker(Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(l(q_M), G)) \\ &\cong ker(Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(q_M, \mathcal{P}(G))) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(coker(q_M), \mathcal{P}(G)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(M, \mathcal{P}(G). \end{aligned}$$

□

Se deduce inmediatamente que $V(\mathfrak{R}) \cong \mathfrak{Z}$, puesto que para cada grupo abeliano exterior G,

$$Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(V(\mathfrak{R}), G) \cong Hom_{\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}}(\mathfrak{R}, \mathcal{P}(G)) \cong \mathcal{P}(G) = Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, G).$$

Proposición 3.2.5 $\mathcal{P} : \mathbf{E\text{-}Ab} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ *es un funtor aditivo.*

Demostración:

$\mathcal{P}(f+g)(\alpha)(e_k) = (f+g)\alpha(e_k) = f(\alpha(e_k)) + g(\alpha(e_k))$, pero este último sumando es $(\mathcal{P}(f)(\alpha) + \mathcal{P}(g)(\alpha))(e_k) = (\mathcal{P}(f) + \mathcal{P}(g))(\alpha)(e_k)$, para f, g homomorfismos exteriores, $\alpha \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Esto demuestra que

$$\mathcal{P}(f+g) = \mathcal{P}(f) + \mathcal{P}(g).$$

De forma similar, $\mathcal{P}(-f) = -\mathcal{P}(f)$. □

Existe de forma natural una adjunción,

$$(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \underset{\mathcal{P}^{\Delta^{op}}}{\overset{V^{\Delta^{op}}}{\rightleftarrows}} (\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}.$$

Además, como $\mathcal{P}$ preserva los límites al ser adjunto a derecha, entonces $\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X^K) = \mathcal{P}^{\Delta^{op}}(X)^K$, para X grupo abeliano exterior simplicial y K conjunto simplicial.

Dado $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor entre categorías punteadas, tal que preserva el objeto cero, se induce un funtor entre las respectivas categorías de complejos de cadenas, $Ch(F) : \mathbf{ChC} \to \mathbf{ChD}$,

$$Ch(F)(X)_n = F(X_n), \quad d_n^{Ch(F)(X)} = F(d_n^X),$$
$$Ch(F)(f)_n = F(f_n).$$

El siguiente lema es sencillo de verificar y se deja como ejercicio para el lector:

Lema 3.2.3 *Dada una pareja de funtores adjuntos, $F \dashv G$, entre categorías punteadas entonces se induce una adjunción $Ch(F) \dashv Ch(G)$.*

Teniendo en cuenta que el resultado es válido para complejos positivos, se tiene:

Corolario 3.2.3 *Existe una adjunción,*

$$\mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}) \underset{Ch^+(V)}{\overset{Ch^+(\mathcal{P})}{\rightleftarrows}} \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}),$$

$Ch^+(V) \dashv Ch^+(\mathcal{P})$.

Para finalizar esta sección, se dan las relaciones de este funtor $\mathcal{P}$ con los funtores N y K mediante diagramas conmutativos de funtores.

Proposición 3.2.6 *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\mathcal{P}^{\Delta^{op}}"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathbf{E}\text{-}\mathbf{Ab}) \arrow[d, "Ch^+(\mathcal{P})"] \\
(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \arrow[r, "N"'] & \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}).
\end{tikzcd}$$

Análogamente, existe otro diagrama conmutativo sustituyendo N por K.

Demostración:

Sea G un grupo abeliano exterior simplicial. Se considera, entonces, $N(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))$. Este complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos viene dado como

$$N(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))_n = \cap_{i=0}^{n-1} ker(\mathcal{P}(G(\delta_i))),$$
$$d_n^{N\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G)} = \mathcal{P}(G(\delta_n))|N(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))_n.$$

Como $\mathcal{P}$ es adjunto a derecha preserva límites, en particular núcleos e intersecciones, por lo que $\cap_{i=0}^{n-1} ker(\mathcal{P}(G(\delta_i))) = \mathcal{P}(\cap_{i=0}^{n-1} ker(G(\delta_i)))$, pero esto es exactamente $(Ch^+(\mathcal{P})N)(G)_n$. Observando que los operadores diferenciales coinciden se trata del mismo complejo. Para morfismos se razona similarmente.

Ahora se considera $K(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))$:

$$K(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))_n = \mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G)_n = \mathcal{P}(G_n),$$
$$d_n^{K(\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(G))} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathcal{P}(G(\delta_i)).$$

Por otro lado, $(Ch^+(\mathcal{P})K)(G)_n = \mathcal{P}(K(G)_n) = \mathcal{P}(G_n)$. Como $\mathcal{P}$ es un funtor aditivo, entonces el operador diferencial coincide con $\mathcal{P}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i (d_i^G))$, que es el operador diferencial de $(Ch^+(\mathcal{P})K)(G)$ de dimensión n. Para morfismos, se procede igual. $\square$

3.3 M-homología y $\mathfrak{R}$-homología en espacios exteriores.

Se verán en esta sección diferentes invariantes de tipo homológico siguiendo la línea de los modelos simpliciales creados y aprovechando todas las propiedades vistas en las anteriores secciones de este capítulo. Primeramente se hará un estudio de la homología que surge cuando existe la acción del monoide $M = Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, viéndose que coincide con la homología singular clásica de un determinado espacio de funciones. Este hecho hará que tenga propiedades tales como la existencia de una sucesión exacta larga de homología, la invarianza por homotopía exterior y un teorema de Hurewicz en el que estarán involucrados los grupos de homotopía de tipo Brown definidos en el primer capítulo.

En la otra homología intervendrá el mencionado anillo de las matrices localmente finitas. Entre sus propiedades más destacadas están la invarianza por homotopía exterior, un teorema de tipo escisivo, la aditividad finita y un algoritmo de cálculo para gCW complejos.

Definición 3.3.1 Sea X un espacio exterior. Un *M-n-símplice singular exterior* es una aplicación exterior $u : \mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n \to X$. La *$i$-cara* de u es el $(n-1)$-símplice singular exterior $u(id_{\mathbb{N}}\bar{\times}\tilde{\delta}_i)$, donde $\tilde{\delta}_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ es la inducida por $\delta_i : [n-1] \to [n]$, $0 \leq i \leq n$.

Si X es un espacio exterior se construye un complejo de cadenas de grupos abelianos con la acción del monoide M según el diagrama

$$\mathbf{E} \xrightarrow{Sing_e} (\mathbf{Sets}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \xrightarrow{(L^{M^{op}})^{\Delta^{op}}} (\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \xrightarrow{K} \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}}).$$

Nótese que M es una categoría pequeña y $\mathbf{Ab}$ es abeliana, por lo que $\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}}$ es una categoría abeliana. Así, se tiene una equivalencia de categorías,

$$(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \simeq \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}}),$$

mediante los funtores N y P. El funtor que se usará será, no obstante, K. La composición de todos estos funtores $\mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^+(\mathbf{Ab}^{\mathbf{M^{op}}})$ se denominará C^M, *complejo de cadenas de M-grupos abelianos*. Explícitamente, si X es un espacio exterior y f es una aplicación exterior, entonces

$$\begin{aligned} C^M(X)_n &= L(Hom_{\mathbf{E}}(\mathbb{N}\bar{\times}\Delta_n, X)), \\ d_n^{C^M(X)} &= \textstyle\sum_{i=0}^n (-1)^i L((id_{\mathbb{N}}\bar{\times}\tilde{\delta}_i)^*), \\ C^M(f)_n &= L(f_*). \end{aligned}$$

Definición 3.3.2 Una *pareja exterior*, (X, A), consiste en un espacio exterior X y un subespacio exterior $A \subset X$.

Como $C^M(A)$ es un subcomplejo de $C^M(X)$ se puede considerar el complejo cociente $C^M(X)/C^M(A)$, llamado *complejo de cadenas de M-grupos de X relativo a A*, y denotado por $C^M(X, A)$.

Un morfismo de parejas exteriores $(X,A) \to (Y,B)$ consiste en un par de aplicaciones exteriores, (f,g), $f : X \to Y$, $g : A \to B$ haciendo conmutativo a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

donde i, j son las inclusiones canónicas respectivas. Nótese que $g = f|A$, por lo que, de hecho, consiste en dar una aplicación exterior $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$. Se induce de forma natural un morfismo de complejos $\overline{C^M(f)} = C^M(f,g) : C^M(X,A) \to C^M(Y,B)$ dado por la inducida en los cocientes de $C^M(f) : C^M(X) \to C^M(Y)$.

Definición 3.3.3 Dado (X,A) una pareja exterior se define su *n-M-grupo de homología* como el del complejo de M-grupos $C^M(X,A)$.

Si se denota por H_n^M entonces $H_n^M(X,A) = H_n(C^M(X,A))$. Esta construcción da lugar, claramente, a un funtor para cada n,

$$H_n^M : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathbf{Ab^{M^{op}}}.$$

Para cada morfismo de parejas, f, se considera $H_n^M(f) = H_n(\overline{C^M(f)})$, comprobándose que conserva tanto la composición como la identidad. Aquí, $\mathbf{E^{(2)}}$ denota la categoría de parejas exteriores.

Si (X,A) es una pareja exterior entonces $(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$ es una pareja de espacios topológicos. Se puede considerar, así, la homología singular clásica, $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. Cabe preguntarse qué relación existe, para cada $n \geq 0$, entre $H_n^M(X,A)$ y $H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}})$. El siguiente resultado da una respuesta a esta cuestión:

Proposición 3.3.1 *Existe un isomorfismo natural,*

$$H_n^M(X,A) \cong H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}}),$$

donde (X,A) recorre las parejas exteriores.

Demostración:

Los funtores $Sing_e$ y $Sing(.)^{\mathbb{N}}$ son naturalmente isomorfos. Es sencillo verificar, también, el isomorfismo natural en parejas,

$$(Sing_e(X), Sing_e(A)) \cong (Sing(X^{\mathbb{N}}), Sing(A^{\mathbb{N}})),$$

y que, dando un paso más,

$$(C^M(X), C^M(A)) \cong (C(X^{\mathbb{N}}), C(A^{\mathbb{N}})),$$

donde C representa el complejo de cadenas singular clásico. Finalmente esto demuestra que $C^M(X)/C^M(A) \cong C(X^{\mathbb{N}})/C(A^{\mathbb{N}})$, por lo que, pasando a homologías se tiene el resultado. □

Si X es un espacio exterior se puede identificar con la pareja $(X, \emptyset)$, surgiendo la noción de homología exterior de X, $H_n^M(X) = H_n^M(X, \emptyset)$. Así, también toda aplicación exterior $f : X \to Y$ se puede considerar como $(f, \emptyset)$ pudiéndose definir su homología exterior. Uniendo lo anterior se tiene un isomorfismo natural $H_n^M(X) \cong H_n(X^{\mathbb{N}})$.

Otra propiedad interesante de esta homología es la existencia de una sucesión exacta larga asociada a cada pareja exterior (X, A).

Si (X, A) es una pareja exterior, entonces existe una sucesión exacta corta de complejos de M-grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow C^M(A) \xrightarrow{i} C^M(X) \xrightarrow{j} C^M(X)/C^M(A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j denotan la inclusión y proyección canónicas respectivamente. Como consecuencia:

Proposición 3.3.2 *Para cada pareja exterior (X, A) existe una sucesión exacta larga,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^M(A) \xrightarrow{i_*} H_n^M(X) \xrightarrow{j_*} H_n^M(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^M(A) \longrightarrow \cdots,$$

donde $i_* = H_n^M(i)$, $j_* = H_n^M(j)$ y δ_* es el M-homomorfismo de conexión. Además, esta sucesión es isomorfa a la correspondiente de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}}) \longrightarrow C(X^{\mathbb{N}})/C(A^{\mathbb{N}}) \longrightarrow 0.$$

Para cada pareja exterior (X, A) surge un cilindro, $(X\bar{\times}I, A\bar{\times}I)$ y morfismos de parejas $\delta_0, \delta_1 : (X, A) \to (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I)$, $p : (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I) \to (X, A)$.

Definición 3.3.4 Sean $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ dos morfismos de parejas exteriores. Se dirá que f es homótopo a g, $f \simeq g$, si existe un morfismo de parejas,

$$F : (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I) \to (Y, B),$$

tal que $F\delta_0 = f$, $F\delta_1 = g$.

Esta relación es de equivalencia y compatible con la composición.

Lema 3.3.1 *Sean f, g morfismos de parejas exteriores. Si $f \simeq g$ entonces $f^{\mathbb{N}} \simeq g^{\mathbb{N}}$.*

Demostración:

Si se denota la homotopía por $F : (X\bar{\times}I, A\bar{\times}I) \to (Y, B)$ entonces se considera $\tilde{F} : (X, A) \to (Y^I, B^I)$. Tomando la composición de la aplicación de parejas, $(\tilde{F})^{\mathbb{N}} : (X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}}) \to ((Y^I)^{\mathbb{N}}, (B^I)^{\mathbb{N}})$, con el isomorfismo en $\mathbf{Top^{(2)}}$, la categoría de parejas de espacios topológicos,

$$((Y^I)^{\mathbb{N}}, (B^I)^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\cong} ((Y^{\mathbb{N}})^I, (B^{\mathbb{N}})^I),$$

(véase 1.2.9), entonces define una homotopía entre $f^{\mathbb{N}}$ y $g^{\mathbb{N}}$.

□

Ya que en **Top** la homología singular es invariante por homotopía entre morfismos de parejas de espacios se tiene un resultado análogo para exteriores, es decir, la invarianza por homotopía entre morfismos de parejas exteriores.

Corolario 3.3.1 *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces $H_n^M(f) = H_n^M(g)$.*

Demostración:

Se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
H_n^M(X, A) \arrow[r, "{H_n^M(f), H_n^M(g)}"] \arrow[d, "\alpha_{(X,A)}"', "\cong"] & H_n^M(Y, B) \arrow[d, "\cong"', "\alpha_{(Y,B)}"] \\
H_n(X^{\mathbb{N}}, A^{\mathbb{N}}) \arrow[r, "H_n(f^{\mathbb{N}}) = H_n(g^{\mathbb{N}})"'] & H_n(Y^{\mathbb{N}}, B^{\mathbb{N}}).
\end{tikzcd}$$

Así, $H_n^M(f) = (\alpha_{(Y,B)})^{-1} H_n(f^{\mathbb{N}})\alpha_{(X,A)} = (\alpha_{(Y,B)})^{-1} H_n(g^{\mathbb{N}})\alpha_{(X,A)} = H_n^M(g)$. $\square$

Como consecuencia, si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía exterior entonces $H_n^M(f) : H_n^M(X, A) \to H_n^M(Y, B)$ es isomorfismo, para cada $n \geq 0$.

Aprovechando de nuevo el isomorfismo natural $\pi_n^B((X, a)) \cong \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a)$, existe también un teorema de tipo Hurewicz.

Definición 3.3.5 Sea X un espacio exterior y $a \in X^{\mathbb{N}}$, $n \geq 1$. Se define el *M-homomorfismo de Hurewicz*,

$$h_n^M : \pi_n^B(X, a) \to H_n^M(X),$$

como el que se induce en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^B((X,a)) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\cong"'] & H_n^M(X) \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \arrow[r, "h_n"'] & H_n(X^{\mathbb{N}}),
\end{tikzcd}$$

donde $h_n : \pi_n(X^{\mathbb{N}}, a) \to H_n(X^{\mathbb{N}})$ es el homomorfismo de Hurewicz clásico.

Para finalizar con la homología H^M :

Proposición 3.3.3 *Sea X un espacio exterior tal que*

$$\pi_0^B(X) = 0,\ \ \pi_k^B((X, a)) = 0,\ 1 \leq k < n,$$

para algún $a \in X^{\mathbb{N}}$, y por tanto para cualquiera, con $n \geq 2$. Entonces $h_n^M : \pi_n^B(X, a) \to H_n^M(X)$ es isomorfismo y $h_{n+1}^M : \pi_{n+1}^B(X, a) \to H_{n+1}^M(X)$ es epimorfismo.

Demostración:

$h_p \cong h_p^M$ y se aplica el Teorema de Hurewicz clásico a $X^{\mathbb{N}}$. $\square$

Si X es un espacio exterior se construye el complejo positivo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X)$, según la composición de funtores

$$C^{\mathfrak{R}} = K\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}W(E\text{-}Sing) : \mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}).$$

Explícitamente,

$$C^{\mathfrak{R}}(X)_n = Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))), \;\; n \geq 0,$$
$$d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i L(\tilde{\delta}_i^*)_*$$

donde $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))$ tiene la externología cuyos subgrupos exteriores son de la forma $L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, E))$, E e-abierto en X. Obsérvese también que $d_n^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(a)(e_k) = d_n^{C(X)}(a(e_k))$, para cada $a \in C^{\mathfrak{R}}(X)_n$, $e_k \in \mathfrak{Z}$.

Si (X, A) es una pareja exterior, $C^{\mathfrak{R}}(A)$ es un subcomplejo de $\mathfrak{R}$-módulos de $C^{\mathfrak{R}}(X)$. Así, se puede definir el complejo de $\mathfrak{R}$-módulos cociente, $C^{\mathfrak{R}}(X, A) = C^{\mathfrak{R}}(X)/C^{\mathfrak{R}}(A)$.

Definición 3.3.6 Dada (X, A) una pareja exterior se define su *n-$\mathfrak{R}$-módulo de homología* como el del complejo de $\mathfrak{R}$-módulos, $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Si se denota por $H_n^{\mathfrak{R}}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) = H_n(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Obviamente esta construcción da lugar a un funtor, para cada n,

$$H_n^{\mathfrak{R}} : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}.$$

Por otro lado, si $A = \emptyset$, se denota $H_n^{\mathfrak{R}}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X, \emptyset)$.

Se comprobará ahora la existencia de una sucesión exacta larga de homología $H^{\mathfrak{R}}$ asociada a cada pareja exterior, (X, A). Evidentemente, existe una sucesión exacta corta de complejos de $\mathfrak{R}$-módulos,

$$0 \longrightarrow C^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{\;i\;} C^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{\;j\;} C^{\mathfrak{R}}(X, A) \longrightarrow 0,$$

donde i, j son la inclusión y proyección canónicos respectivamente. Así, como consecuencia:

Proposición 3.3.4 *Si (X, A) es una pareja exterior entonces existe una sucesión exacta larga de homología,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(A) \xrightarrow{\;i_*\;} H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xrightarrow{\;j_*\;} H_n^{\mathfrak{R}}(X, A) \xrightarrow{\;\delta_*\;} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(A) \longrightarrow \cdots,$$

con $i_* = H_n^{\mathfrak{R}}(i)$, $j_* = H_n^{\mathfrak{R}}(j)$, y δ_* el homomorfismo de conexión.

Proposición 3.3.5 *Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones exteriores tales que $f \simeq g$. Entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(g)$.*

Demostración:

Por un lado, el funtor $E\text{-}Sing : \mathbf{E} \to \mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ preserva cocilindros: de forma general, si K es un conjunto simplicial finito y Z es un espacio exterior entonces $(E\text{-}Sing)(Z^K) \cong ((E\text{-}Sing)(Z))^K$ naturalmente. Nótese que

$$\begin{aligned} Sing(Z^K)_n &= Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Z^{|K|}) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Top}}(|K| \times \Delta_n, Z)) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Top}}(|K \times \Delta[n]|, Z) \\ &\cong Hom_{\mathbf{Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}}(K \times \Delta[n], Sing(Z)) \\ &\cong Sing(Z)_n^K, \end{aligned}$$

donde hace que para cada E e-abierto, $Sing(E^K)_n \cong Sing(E)_n^K$, $n \geq 0$. Así se tiene que preserva cocilindros.

Por otro lado, los funtores

$$\mathbf{E\text{-}Sets}^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \stackrel{W}{\to} (\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}, \quad (\mathbf{E\text{-}Sets})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \stackrel{(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}}{\longrightarrow} (\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$$

preservan cilindros y

$$(\mathbf{E\text{-}Ab})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}} \stackrel{\mathcal{P}^{\Delta^{op}}}{\longrightarrow} (\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}}$$

preserva cocilindros. Esto hace que $\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(E\text{-}L)^{\Delta^{op}}W(E\text{-}Sing)$ preserve la homotopía.

El funtor N también preserva las homotopías y la inclusión $i : N \to K$ es una equivalencia de homotopía en cada componente, con lo cual, se tiene que $C^{\mathfrak{R}}(f) \simeq C^{\mathfrak{R}}(g)$ en $\mathbf{Ch}^{+}(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$ y

$$H_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n(C^{\mathfrak{R}}(f)) = H_n(C^{\mathfrak{R}}(g)) = H_n^{\mathfrak{R}}(g).$$

□

De forma análoga se comprueba la invarianza de la homología por homotopía en morfismos de parejas exteriores. Se expone aquí el resultado dejando la demostración como un ejercicio al lector.

Proposición 3.3.6 *Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ son morfismos de parejas exteriores homótopos entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(f) = H_n^{\mathfrak{R}}(g)$.*

Se dará ahora una serie de resultados cuyo objetivo es demostrar un teorema de tipo escisivo.

Si X es un espacio exterior se puede considerar el complejo de cadenas de grupos abelianos exteriores según la composición de funtores,

$$D = K(E\text{-}L)^{\Delta^{op}} W(E\text{-}Sing) : \mathbf{E} \to \mathbf{Ch}^{+}(\mathbf{E\text{-}Ab}).$$

Obsérvese que, según las conmutatividades vistas, $Ch^{+}(\mathcal{P})D = C^{\mathfrak{R}}$.

Definición 3.3.7 Sea X un espacio exterior. Se dice que X es *primer contable exterior* o *E-C1*, si admite una base exterior contable $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Dado X espacio exterior E-C1 se puede considerar, sin pérdida de generalidad que

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$

Esta nueva noción se puede trasladar sin problemas a las categorías exteriores definidas.

Un hecho curioso en la categoría de grupos abelianos exteriores es que si $p : G \to H$ es un homomorfismo exterior sobre entonces p es cociente (sobre y la externología de H es la de aquellos subgrupos $E < H$ tales que $p^{-1}(E) \in \varepsilon_G$) si y sólo si p transforma subgrupos exteriores en subgrupos exteriores. Efectivamente, dado $E \in \varepsilon_G$, ya que $E < p^{-1}(p(E)) < G$ se tiene que $p^{-1}(p(E)) \in \varepsilon_G$. Por otro lado, si $E < H$ con $p^{-1}(E) \in \varepsilon_G$, como $p(p^{-1}(E)) = E$, se tiene que $E \in \varepsilon_H$.

Como consecuencia, si $p : G \to H$ es cociente entonces lleva cada base exterior de G en una base exterior de H, y si G es E-C1 entonces H también lo es. Además, se puede comprobar que en las categorías exteriores, ser E-C1 es una propiedad hereditaria.

Lema 3.3.2 *Sea $f : \mathfrak{Z} \to G$ un homomorfismo de grupos abelianos, donde G es grupo abeliano exterior E-C1, con base exterior $\beta = \{E_n\}_{n=0}^{\infty}$. Entonces, f es exterior si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$ y tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \varphi(l)$ entonces $f(e_k) \in E_l$.*

Demostración:

Su demostración es rutinaria y se deja al lector.

Lema 3.3.3 *Sean C grupo abeliano exterior E-C1, C' subgrupo abeliano exterior y C/C' el grupo abeliano exterior cociente. Entonces*

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}(C') \xrightarrow{\mathcal{P}(i)} \mathcal{P}(C) \xrightarrow{\mathcal{P}(p)} \mathcal{P}(C/C') \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de $\mathfrak{R}$-módulos.

($i : C' \hookrightarrow C$ y $p : C \to C/C'$ denotan la inclusión y proyección canónicas, respectivamente).

Demostración:

Sea $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ una base exterior de C. Ya que p es cociente entonces $\{p(E_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es base exterior de C/C'. Por otro lado $\{C' \cap E_n\}_{n=0}^{\infty}$ es base exterior de C'. Obviamente $\mathcal{P}(i) = i_* : Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C') \to Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C)$ es monomorfismo y no es difícil comprobar que $im(i_*) = ker(p_*)$. Solo falta comprobar que $\mathcal{P}(p) = p_* : Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C) \to Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C/C')$ es epimorfismo. Para simplificar se denotará $C/C' = C''$, $C' \cap E_n = E'_n$ y $p(E_n) = E''_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\sigma : \mathfrak{Z} \to C''$ un homomorfismo exterior. Se considera la sucesión $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty}$ del lema anterior. Si $\varphi(0) \leq k < \varphi(1)$ entonces $\sigma(e_k) \in E''_0 = C''$, luego existe $\tilde{\sigma}(e_k) \in E_0 = C$ tal que $p(\tilde{\sigma}(e_k)) = \sigma(e_k)$. De forma inductiva, si $\varphi(i) \leq k < \varphi(i+1)$, $\sigma(e_k) \in E''_i$, y existe $\tilde{\sigma}(e_k) \in E_i$ tal que $p(\tilde{\sigma}(e_k))$ es $\sigma(e_k)$. Esto define, extendiendo por linealidad, un homomorfismo $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Z} \to C$, que, por construcción, es exterior y $p\tilde{\sigma} = \sigma$. Por tanto $\mathcal{P}(p) = p_*$ es sobre.

□

Proposición 3.3.7 *Existe un isomorfismo natural,*

$$Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A)) \cong C^{\mathfrak{R}}(X, A),$$

donde (X, A) recorre las parejas exteriores E-C1.

Demostración:

Si (X, A) es una pareja exterior entonces, aplicando el lema anterior, dimensión a dimensión, se tiene que la sucesión

$$0 \to Ch^+(\mathcal{P})D(A) \to Ch^+(\mathcal{P})D(X) \to Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A)) \to 0$$

es exacta corta en $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$. Teniendo en cuenta que

$$Ch^+(\mathcal{P})D(X) = C^{\mathfrak{R}}(X) \ \text{ y } \ Ch^+(\mathcal{P})D(A) = C^{\mathfrak{R}}(A),$$

se tiene el resultado. El resto de la demostración se comprueba fácilmente.

$\square$

Así, para hallar los $\mathfrak{R}$-módulos de homología de una pareja exterior (X, A) se puede hacer a partir del complejo $Ch^+(\mathcal{P})(D(X)/D(A))$, hecho que se usará a continuación:

Teorema 3.3.1 *(Teorema de escisión)*

Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X tal que $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces la inclusión $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$ induce isomorfismo en $\mathfrak{R}$-homología, es decir,

$$H_n^{\mathfrak{R}}(i) : H_n^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$$

es isomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos, para cada n.

Demostración:

Para cada e-abierto E de X se tiene:

(i) $E \cap Cl_X(U) = Cl_E(E \cap U)$,

(ii) $E \cap Int_X(A) = Int_E(E \cap A)$.

$E \cap U$ es un abierto de E, con $Cl_E(E \cap U) \subset Int_E(E \cap A)$ por lo que la inclusión canónica $i_E : (E\text{-}(E \cap U), (E \cap A)\text{-}(E \cap U)) \to (E, E \cap A)$ induce isomorfismo en los grupos de homología singular usuales. Denotando por C al funtor complejo de cadenas singular usual, entonces $D(X)$ es el complejo $C(X)$ con externología para el nivel n cuya base exterior viene dada por los subgrupos $C(E)_n = L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, E))$, $E \in \varepsilon_X$.

Si $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la base exterior de X, se tiene un diagrama conmutativo de inclusiones, en la categoría $\mathbf{Ch^+Ab}$, siguiente:

$$\begin{tikzcd}
C(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[r, hook] & C(X, A) \\
C(E_1\text{-}(E_1 \cap U), (E_1 \cap A)\text{-}(E_1 \cap U)) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & C(E_1, E_1 \cap A) \arrow[u, hook] \\
C(E_2\text{-}(E_2 \cap U), (E_2 \cap A)\text{-}(E_2 \cap U)) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & C(E_2, E_2 \cap A) \arrow[u, hook] \\
C(E_3\text{-}(E_3 \cap U), (E_3 \cap A)\text{-}(E_3 \cap U)) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & C(E_3, E_3 \cap A) \arrow[u, hook] \\
\cdots \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, la inclusión correspondiente induce isomorfismo $H_n(E_k\text{-}(E_k \cap U), (E_k \cap A)\text{-}(E_k \cap U)) \to H_n(E_k, E_k \cap A)$. Ya que la base exterior en $C_n(X)$ es $\{C_n(E_k)\}_{k=0}^{\infty}$, entonces la base exterior de $C_n(X, A)$ es

$$\begin{aligned}
\{p_n(C_n(E_k))\}_{k=0}^{\infty} &= \{C_n(E_k)/(C_n(E_k) \cap C_n(A))\}_{k=0}^{\infty} \\
&= \{C_n(E_k)/C_n(E_k \cap A)\}_{k=0}^{\infty} \\
&= \{C_n(E_k, E_k \cap A)\}_{k=0}^{\infty},
\end{aligned}$$

donde $p_n : C_n(X) \to C_n(X, A)$ representa la proyección canónica respectiva.

Se comprobará primeramente la suprayectividad de $H_n^{\mathfrak{R}}(i)$:

Si $[\sigma] \in H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$ se toma el representante $\sigma : \mathfrak{Z} \to C_n(X, A)$. Sea $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ una sucesión con $\varphi(i) < \varphi(i+1)$, tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \varphi(l)$ entonces $\sigma(e_k) \in C_n(E_l, E_l \cap A)$. Entonces, si $\varphi(l) \leq k < \varphi(l+1)$, $\sigma(e_k) \in C_n(E_l, E_l \cap A)$; evidentemente $[\sigma(e_k)] \in H_n(E_l, E_l \cap A)$ puesto que $(d_n)_*(\sigma) = 0$ implica que $d_n(\sigma(e_k) = 0$, donde d_n denota el operador borde de dimensión n del complejo $C(X, A)$, pero, ya que se tiene el isomorfismo $H_n(i_{E_l})$, se toma

$$\tilde{\sigma}(e_k) \in C_n(E_l\text{-}(E_l \cap U), (E_l \cap A)\text{-}(E_l \cap U)),$$

representante de $[\tilde{\sigma}(e_k)] \in H_n(E_l\text{-}(E_l \cap U), (E_l \cap A)\text{-}(E_l \cap U))$ verificando que $H_n(i_{E_l})([\tilde{\sigma}(e_k)]) = [\sigma(e_k)]$. Se induce, extendiéndose por linealidad, un homomorfismo $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Z} \to C_n(X\text{-}U, A\text{-}U)$ que, por construcción, es exterior, $[\tilde{\sigma}]$ es un elemento de $H_n^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)$ y $H_n^{\mathfrak{R}}(i)([\tilde{\sigma}]) = [\sigma]$.

Sea ahora $[\sigma] \in H_n^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)$ tal que $H_n^{\mathfrak{R}}(i)(\sigma) = [0]$ en $H_n^{\mathfrak{R}}(X, A)$. Entonces $(d_n)_*(\sigma) = 0$ y existe $\bar{\sigma} : \mathfrak{Z} \to C_{n+1}(X, A)$ exterior tal que $(d_{n+1})_*(\bar{\sigma}) = C_n(i)\sigma$.

Por ser σ y $\bar{\sigma}$ exteriores, se encuentra una sucesión $\{\phi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $\phi(i) < \phi(i+1)$, tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \phi(l)$ se tiene que

$$\sigma(e_k) \in C_n(E_l\text{-}(E_l \cap U), (E_l \cap A)\text{-}(E_l \cap U) \text{ y } \bar{\sigma}(e_k) \in C_{n+1}(E_l, E_l \cap A).$$

Ahora, si $\phi(l) \leq k < \phi(l+1)$, existe el isomorfismo $H_n(i_{E_l})$ y, como $d_n(\sigma(e_k)) = 0$, se tiene que $[\sigma(e_k)] \in H_n((E_l\text{-}(E_l \cap U), (E_l \cap A)\text{-}(E_l \cap U))$ y $d_{n+1}(\bar{\sigma}(e_k)) = C_n(i_{E_l})(\sigma(e_k))$. Así, existe

$$\tilde{\sigma}(e_k) \in C_{n+1}(E_l\text{-}(E_l \cap U), (E_l \cap A)\text{-}(E_l \cap U))$$

con $d_{n+1}(\tilde{\sigma}(e_k)) = \sigma(e_k)$.

Se induce por construcción $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Z} \to C_{n+1}(X\text{-}U, A\text{-}U)$ exterior verificando que $(d_{n+1})_*(\tilde{\sigma}) = \sigma$, por lo que $[\sigma] = [0]$. □

La siguiente propiedad que se verá acerca de esta homología es la aditividad finita, es decir, dada una colección finita de espacios exteriores $\{X_i\}_{i=1}^m$, entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^{\mathfrak{R}}(X_i)$, $n \geq 0$, siendo el isomorfismo natural. Para probar este hecho se ha de utilizar algunos resultados previos. Se considera la notación $\coprod_{i=1}^m X_i = \cup_{i=1}^m (X_i \times \{i\})$, siendo la inyección k-ésima, $j_k(x) = (x, k)$, $x \in X_k$.

Si K es un espacio topológico conexo a $Hom_{\mathbf{Top}}(K, X_i)$ se le puede dotar de estructura de conjunto exterior con la externología que admite como base exterior los subconjuntos $Hom_{\mathbf{Top}}(K, E_i)$, E_i e-abierto en X_i. De igual forma en $Hom_{\mathbf{Top}}(K, \coprod_{i=1}^m X_i)$, donde se considera en $\coprod_{i=1}^m X_i$ la externología coproducto.

Lema 3.3.4 *Existe un isomorfismo natural en* **E-Sets***,*

$$\varphi : \coprod_{i=1}^m Hom_{\mathbf{Top}}(K, X_i) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathbf{Top}}(K, \coprod_{i=1}^m X_i),$$

donde K recorre los espacios topológicos conexos y $\{X_i\}_{i=1}^m$ los espacios exteriores.

Demostración:

Se define $\varphi((f,k))(x) = (f(x),k)$, $x \in K$, $k \in \{1,...,m\}$. La inyectividad de φ es obvia. Haciendo uso de que K es conexo es sencillo comprobar que es suprayectiva, luego es una biyección. Ya que, una base exterior de $\coprod_{i=1}^m Hom_{\mathbf{Top}}(K,X_i)$ es $\{\coprod_{i=1}^m Hom_{\mathbf{Top}}(K,E_i) : E_i \in \varepsilon_{X_i}\}$, en $Hom_{\mathbf{Top}}(K,\coprod_{i=1}^m X_i)$ es $\{Hom_{\mathbf{Top}}(K,\coprod_{i=1}^m E_i) : E_i \in \varepsilon_{X_i}\}$ y que tanto φ como φ^{-1} transforman subconjuntos exteriores básicos en exteriores básicos, se tiene el isomorfismo. El resto de la demostración es evidente. $\square$

Proposición 3.3.8 *Sea $\{X_i\}_{i=1}^m$ una familia finita de espacios exteriores. Entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^{\mathfrak{R}}(X_i)$, $n \geq 0$.*

Demostración:

El funtor $E\text{-}L : \mathbf{E\text{-}Sets} \to \mathbf{E\text{-}Ab}$ preserva coproductos pues es adjunto a izquierda, por otro lado, el funtor $\mathcal{P} = Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, \_) : \mathbf{E\text{-}Ab} \to \mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}$ es adjunto a derecha, por lo que preserva productos, pero en grupos abelianos exteriores el coproducto finito coincide con el producto, luego existe un isomorfismo natural,

$$\oplus_{i=1}^m \mathcal{P}(E\text{-}L)(Hom_{\mathbf{Top}}(K,X_i)) \cong \mathcal{P}(E\text{-}L)(Hom_{\mathbf{Top}}(K,\coprod_{i=1}^m X_i)).$$

Aplicando esto nivel a nivel, la composición de funtores,

$$\mathcal{P}^{\Delta^{op}}(E\text{-}L)^{\Delta^{op}} W(E\text{-}Sing),$$

preserva coproductos. Además, $K : (\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})^{\mathbf{\Delta^{op}}} \to \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$ también preserva coproductos, por lo que

$$C^{\mathfrak{R}}(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m C^{\mathfrak{R}}(X_i),$$

concluyendo el resultado. $\square$

Se estudiará ahora la $\mathfrak{R}$-homología del espacio exterior $\mathbb{N}$. Una base exterior está constituida por los de la forma $\mathbb{N}(k) = \{i \in \mathbb{N} : i \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Así, en $D(\mathbb{N})_n = L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}))$ la externología considerada será la que tiene como base exterior $\{L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, \mathbb{N}(i)))\}_{i=0}^{\infty}$. Si se denota por $D(\mathbb{N}) = C(\mathbb{N})$, entonces la base exterior se denotará por $\{C(\mathbb{N}(i))\}_{i=0}^{\infty}$.

Proposición 3.3.9

$$H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & n = 0 \\ \\ 0, & n > 0\ . \end{cases}$$

Demostración:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, al ser $\mathbb{N}(i)$ discreto, sus grupos de homología singular son

$$H_n(\mathbb{N}(i)) = \begin{cases} \oplus_{j=i}^{\infty}\mathbb{Z}, & n = 0 \\ \\ 0, & n > 0\ . \end{cases}$$

Si $n > 0$ y $[\sigma] \in H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$, se toma $\sigma : \mathfrak{Z} \to C_n(\mathbb{N})$ representante, teniéndose $(d_n)_*(\sigma) = 0$. Como σ es exterior, existe una sucesión $\{\varphi(i)\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $\varphi(i) < \varphi(i+1)$ y tal que para cada $l \in \mathbb{N}$ y $k \geq \varphi(l)$, $\sigma(e_k) \in C_n(\mathbb{N}(l))$.

Si $\varphi(l) \leq k < \varphi(l+1)$, $\sigma(e_k) \in C_n(\mathbb{N}(l))$ con $d_n(\sigma(e_k)) = 0$, por lo que $[\sigma(e_k)] \in H_n(\mathbb{N}(l)) = 0$. Existe $\tilde{\sigma}(e_k) \in C_{n+1}(\mathbb{N}(l))$ tal que $d_{n+1}(\tilde{\sigma}(e_k))$ es $\sigma(e_k)$. De esta forma se construye la aplicación exterior $\tilde{\sigma} : \mathfrak{Z} \to C_{n+1}(\mathbb{N})$, $\tilde{\sigma} \in C_{n+1}^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$ y $(d_{n+1})_*(\tilde{\sigma}) = \sigma$. Esto demuestra que $[\sigma] = [0]$, y, por lo tanto, $H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$.

Se analiza ahora $H_0^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$:

Nótese que $d_1 : C_1(\mathbb{N}) \to C_0(\mathbb{N})$ es, $L(\tilde{\delta_0}^*) - L(\tilde{\delta_1}^*) = 0$ por la conexidad de Δ_1, por lo que $H_0^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = Ch^+(\mathcal{P})(C(\mathbb{N}))_0 = Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C_0(\mathbb{N})$. Pero $C_0(\mathbb{N}) = (E\text{-}L)(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_0, \mathbb{N})) \cong (E\text{-}L)(\mathbb{N}) = \mathfrak{Z}$. □

Dado (X, τ) un espacio topológico se puede obtener un espacio exterior de dos maneras, una de ellas es considerar como externología la propia topología y otra es considerar el espacio total $\{X\}$. En ambos espacios exteriores la homología $H_n^{\mathfrak{R}}$ viene dada en función de la homología singular usual de X.

Proposición 3.3.10 *Sea (X, τ) espacio topológico.*

(i) Si $\varepsilon_X = \{X\}$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \prod_{i=0}^{\infty} H_n(X)$;

(ii) Si $\varepsilon_X = \tau_X$ entonces $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \oplus_{i=0}^{\infty} H_n(X)$,

siendo los isomorfismos naturales.

Demostración:

(i) En este caso en el complejo $C(X)$,

$$C(X)_n = L(Hom_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, X))$$

tiene como externología $\{C(X)_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C(X)_n) &= Hom_{\mathbf{Ab}}(\mathfrak{Z}, C(X)_n) \\ &= Hom_{\mathbf{Ab}}(\oplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}, C(X)_n) \\ &\cong \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} Hom_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, C(X)_n) \\ &\cong \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} C(X)_n. \end{aligned}$$

Se establece que el complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos,

$$C'(X)_n = \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} C(X)_n, \quad d'_n = \prod_{i=0}^{\infty} d_n,$$

es isomorfo a $C^{\mathfrak{R}}(X)$. Así,

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong H_n(C'(X)) = H_n(\textstyle\prod_{i=0}^{\infty} C(X)) \cong \prod_{i=0}^{\infty} H_n(C(X)) = \prod_{i=0}^{\infty} H_n(X).$$

(ii) En este caso la externología tiene como base exterior a $\{\emptyset\}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $C(X)_n$ tiene como base exterior a $\{0\}$, es decir, la externología es la de todos sus subgrupos. De este modo, dado $f : \mathfrak{Z} \to C(X)_n$ exterior, existe un natural k_f tal que $f(e_k) = 0$, para todo $k \geq k_f$, luego se comprueba que $Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, C(X)_n)$ es isomorfo a $\oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_n$ en $\mathfrak{R} - \mathbf{Mod}$. Si se considera el complejo de cadenas $\oplus_{i=0}^{\infty} C(X)$ dado por $(\oplus_{i=0}^{\infty} C(X))_n = \oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_n$, con operador frontera $\oplus_{i=0}^{\infty} d_n$ entonces éste es isomorfo al complejo $C^{\mathfrak{R}}(X)$. Se deduce, finalmente, que $H_n^{\mathfrak{R}}(X) \cong \oplus_{i=0}^{\infty} H_n(X)$.

La naturalidad se deja al lector. □

El siguiente objetivo es definir una versión de homología reducida. Para ello habrá que restringirse a una categoría especial de espacios exteriores, $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Esta categoría tiene como objetos triángulos conmutativos,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_X"'] & & \mathbb{N} \\ & X, \arrow[ur, "r_X"'] & \end{tikzcd}$$

que se denotarán por (i_X, X, r_X). Un morfismo $(i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ es una aplicación exterior $f : X \to Y$ tal que $fi_X = i_Y$, $r_Y f = r_X$.

Nótese que esta categoría es una subcategoría de $\mathbf{E}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, espacios exteriores bajo y sobre $\mathbb{N}$.

También, se observa que $H^{\mathfrak{R}}_n(r_X)H^{\mathfrak{R}}_n(i_X) = H^{\mathfrak{R}}_n(r_X i_X) = id_{H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N})}$ por lo que $(r_X)_* = H^{\mathfrak{R}}_n(r_X)$ es epimorfismo y $(i_X)_* = H^{\mathfrak{R}}_n(i_X)$ es monomorfismo.

Definición 3.3.8 Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Se define

$$\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X) = ker(H^{\mathfrak{R}}_n(X) \xrightarrow{(r_X)_*} H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N})).$$

Por la propiedad del núcleo, dada $f : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(f) : \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X) \to \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(Y)$.

En el caso que $n > 0$, entonces $H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X) = H^{\mathfrak{R}}_n(X)$.

Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, esto es, la inclusión $i : A \to X$ es un morfismo de dicha categoría, se define $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X, A) = H^{\mathfrak{R}}_n(X, A)$. Si $f : X \to Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(f) = H^{\mathfrak{R}}_n(f)$.

Proposición 3.3.11 *Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Existen morfismos i_*, j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

El cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r_A"'] & X \arrow[d, "r_X"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N}, \end{tikzcd}$$

con $i : A \hookrightarrow B$ la inclusión, da lugar al diagrama conmutativo cuyas filas son sucesiones exactas,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{\mathfrak{R}}_n(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(r_A)_*"] & H^{\mathfrak{R}}_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "(r_X)_*"] & H^{\mathfrak{R}}_n(X, A) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "0"] & H^{\mathfrak{R}}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "(r_A)_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}}"'] & H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N}) \arrow[r, "0"'] & H^{\mathfrak{R}}_n(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \arrow[r, "0"'] & H^{\mathfrak{R}}_{n-1}(\mathbb{N}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Tomando núcleos se obtiene la sucesión exacta larga en homología reducida. □

También se da la invarianza homotópica.

Proposición 3.3.12 *Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}_n^{\mathfrak{N}}(f) = \tilde{H}_n^{\mathfrak{N}}(g)$.*

Demostración:

Evidente teniendo en cuenta cómo se define $\tilde{H}_n^{\mathfrak{N}}$ para morfismos y el hecho de que $H_n^{\mathfrak{N}}(f) = H_n^{\mathfrak{N}}(g)$. □

Resaltar, finalmente, una relación natural entre la homología $H_*^{\mathfrak{N}}$ y la reducida, $\tilde{H}_*^{\mathfrak{N}}$. Se observa que existe una sucesión exacta corta,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tilde{H}_n^{\mathfrak{N}}(X) \arrow[r] & H_n^{\mathfrak{N}}(X) \arrow[r] & H_n^{\mathfrak{N}}(\mathbb{N}) \arrow[r] \arrow[l, dotted, bend right] & 0 \end{tikzcd} ,$$

que escinde, así $H_n^{\mathfrak{N}}(X) \cong \tilde{H}_n^{\mathfrak{N}}(X) \oplus H_n^{\mathfrak{N}}(\mathbb{N})$.

Se quiere ahora dar un algoritmo de cálculo de la $\mathfrak{N}$-homología para ciertos gCW complejos. Para ello se comienza viendo homología en celdas y esferas. Si S^n es la n-esfera, se denota por $\mathfrak{S}^n = \mathbb{N}\bar{\times}S^n$. Claramente es un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Efectivamente: sea $s_0 = (0, 0, ..., 0, -1) \in S^n$, entonces se define $i_{\mathfrak{S}^n}(k) = (k, s_0)$, y $r_{\mathfrak{S}^n}(k, x) = k$. Entonces $r_{\mathfrak{S}^n} i_{\mathfrak{S}^n} = id_{\mathbb{N}}$. Así, tiene sentido considerar su homología reducida. Otro objeto especial es $\mathbb{N}$, donde $i_{\mathbb{N}} = r_{\mathbb{N}} = id_{\mathbb{N}}$. Evidentemente, se tiene que $\tilde{H}_i^{\mathfrak{N}}(\mathbb{N}) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Como $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\} \subset \mathfrak{S}^n$, se considerará a $\mathbb{N}$ como un subespacio exterior de $\mathfrak{S}^n$. Además $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathfrak{S}^n$ es un morfismo de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$.

También, otro objeto a considerar es $\mathfrak{D}^n = \mathbb{N}\bar{\times}D^n$, $n \geq 0$, donde D^n es el n-disco. Aquí, $i_{\mathfrak{D}^n}(k) = (k, s_0)$ y $r_{\mathfrak{D}^n}(k, x) = k$. Es sencillo comprobar la existencia de morfismos en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, φ y ψ, tales que $\psi\varphi \simeq id_{\mathfrak{D}^n}$ y $\varphi\psi = id_{\mathbb{N}}$, por lo que se tiene que $\tilde{H}_i^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{D}^n) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{N}}(\mathbb{N}) = 0$, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

$\mathfrak{S}^n$ es un subespacio exterior de $\mathfrak{D}^{n+1}$, siendo $\mathfrak{S}^n \hookrightarrow \mathfrak{D}^{n+1}$ de $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Además,

Proposición 3.3.13

(i) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$,

(ii) $\tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{N}}(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Demostración:

(i) Sea la sucesión exacta del par $(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n)$:

$$\ldots\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{D}^{n+1})\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n)\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i}(\mathfrak{S}^n)\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i}(\mathfrak{D}^{n+1})\to\ldots$$

Ya que $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{D}^{n+1}) = 0 = \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i}(\mathfrak{D}^{n+1})$

se tiene el resultado.

(ii) Sea la sucesión exacta asociada al par $(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N})$:

$$\ldots\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathbb{N})\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1})\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N})\to\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i}(\mathbb{N})\to\ldots$$

Como $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathbb{N}) = 0 = \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i}(\mathbb{N})$ entonces $\tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N})$.

Si $S^n_- = \{x \in S^n : x_{n+1} \leq 0\}$, el hemisferio sur de S^n, entonces $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\}$ es un retracto por deformación exterior de $\mathfrak{S}^n_- = \mathbb{N}\bar{\times}S^n_-$. Efectivamente, se consideran las aplicaciones exteriores

$$i : \mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\} \to \mathfrak{S}^n,\ (k, s_0) \rightsquigarrow (k, s_0);\quad r : \mathfrak{S}^n_- \to \mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\},\ (k, x) \rightsquigarrow (k, s_0).$$

Entonces $ri = id$ y si $F : \mathfrak{S}^n_-\bar{\times}I \to \mathfrak{S}^n_-$ es tal que

$$F(k, x, t) = (k, \frac{(1-t)x + ts_0}{||(1-t)x + ts_0||}),\ (k, x, t) \in \mathfrak{S}^n_-\bar{\times}I,$$

entonces es exterior y hace $ir \simeq id$. Obsérvese que $\mathfrak{S}^n_-\bar{\times}I = \mathbb{N}\bar{\times}(S^n_- \times I)$.

Así, haciendo uso de las sucesiones exactas de homología asociadas a las parejas exteriores $(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N})$ y $(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathfrak{S}^{n+1}_-)$, por la invarianza por homotopía exterior de la $\mathfrak{R}$-homología y el lema de los cinco,

$$H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N}) \cong H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathfrak{S}^{n+1}_-).$$

Tomando el abierto $U = \mathbb{N}\bar{\times}\{x \in S^{n+1} : x_{n+2} < -\frac{1}{2}\}$ de $\mathfrak{S}^{n+1}$, su clausura está contenida en el interior de $\mathfrak{S}^{n+1}_-$, luego, por escisión, (teorema 3.3.1):

$$H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathfrak{S}^{n+1}_-) \cong H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}\text{-}U, \mathfrak{S}^{n+1}_-\text{-}U).$$

No es difícil comprobar que $A = \mathbb{N}\bar{\times}\{x \in S^{n+1} : x_{n+2} = -\frac{1}{2}\}$ es un retracto por deformación exterior de $\mathfrak{S}^{n+1}_-\text{-}U = \mathbb{N}\bar{\times}\{x \in S^{n+1} : -\frac{1}{2} \leq x_{n+2} \leq 0\}$, y, por el mismo razonamiento que el hecho para $\mathbb{N}\bar{\times}\{s_0\} \subset \mathfrak{S}^n_-$, se tiene que

$$H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}\text{-}U, \mathfrak{S}^{n+1}_-\text{-}U) \cong H^{\mathfrak{R}}_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}\text{-}U, A).$$

Pero $(\mathfrak{S}^{n+1}\text{-}U, A)$ es una pareja isomorfa exteriormente a $(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n)$, por lo que, de esta manera:

$$H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}\text{-}U, \mathfrak{S}_-^{n+1}\text{-}U) \cong H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n).$$

Por último,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}) &\cong \tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N}) \\ &\cong H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathbb{N}) \\ &\cong H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^{n+1}, \mathfrak{S}_-^{n+1}) \\ &\cong H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \\ &\cong \tilde{H}_{i+1}^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \\ &\cong \tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n). \end{aligned}$$

□

Como $\mathfrak{S}^0$ y $\mathbb{N}$ son isomorfos en $\mathbf{E}$, $\tilde{H}_n^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^0) = H_n^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^0) \cong H_n^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N}) = 0$, si $n \neq 0$. Por otro lado, es sencillo comprobar que

$$(r_{\mathfrak{S}^0})_* : H_0^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^0) \to H_0^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})$$

es isomorfo a $s : \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, \quad (a, b) \rightsquigarrow a + b$, con lo cual $\tilde{H}_0^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^0) \cong \mathfrak{R}$. Por este hecho, la proposición anterior y la relación con la homología reducida,

Corolario 3.3.2

$$\tilde{H}_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}, \qquad H_0^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}, & n = 0 \\ \mathfrak{R}, & n > 0 \,. \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathfrak{R}, & i = n \\ 0, & i \neq n \,. \end{cases}$$

□

Considerando las esferas S^{n-1}, $n \geq 1$, con topología como externología, así como para los discos, D^n, teniendo en cuenta el cálculo de la homología singular usual de S^n, entonces,

Si $i > 0$,

$$H_i^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n \,, \end{cases} \qquad H_0^{\mathfrak{R}}(S^n) = \begin{cases} (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}) \oplus (\oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}), & n = 0 \\ \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & n > 0 \,. \end{cases}$$

Y, si $n \geq 1$:

$$H_i^{\mathfrak{N}}(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \oplus_{j=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n\,. \end{cases}$$

Los gCW complejos son espacios que se crean pegando discos o $\mathbb{N}$-discos por su borde, proceso que se describe a través de push-outs. Por esto es adecuado estudiar la siguiente situación:

Sean X, X^* espacios exteriores Hausdorff, tal que X^* es E-$C1$ y se obtiene de X a partir de un push-out de la forma

$$\begin{tikzcd}
(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{S}_\lambda^{n-1})\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}S_\gamma^{n-1}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda}g_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}g_\gamma)"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook] \\
(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{D}_\lambda^{n})\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}D_\gamma^{n}) \arrow[r, "(\coprod_{\lambda\in\Lambda}f_\lambda)\coprod(\coprod_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma)"'] & X^*,
\end{tikzcd}$$

con Λ y Γ finitos. Como la flecha vertical del coproducto de esferas en el coproducto de discos es inyectiva, cerrada y e-cerrada, se tiene que $X \hookrightarrow X^*$ es inyectiva, cerrada y e-cerrada, luego un embebimiento. Se puede, entonces, suponer sin pérdida de generalidad, que X es un subespacio exterior cerrado de X^*. Así,

$$X^* = X \cup (\cup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\mathfrak{D}_\lambda^n)) \cup (\cup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(D_\gamma^n)).$$

Se consideran los centros de los discos,

$$A = (\cup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times}\{0\})) \cup (\cup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(\{0\})),$$

y se toma $X' = X^*\text{-}A = X \cup (\cup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times}\{D_\lambda^n\text{-}\{0\}\})) \cup (\cup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(D_\gamma^n\text{-}\{0\}))$. Entonces X es un retracto por deformación exterior de X'. La retracción $r : X' \to X$ viene dada como $r(x) = x$, si $x \in X$, $r(f_\lambda(k,x)) = g_\lambda(k, \frac{x}{||x||})$ y $r(f_\gamma(x)) = g_\gamma(\frac{x}{||x||})$. Una simple comprobación demuestra que $ri = id_X$ y que $ir \simeq id_{X'}$. Haciendo uso de las sucesiones exactas asociadas a los pares (X^*, X) y (X^*, X'), la invarianza por homotopía exterior de $H_*^{\mathfrak{N}}$ y el lema de los cinco,

$$H_i^{\mathfrak{N}}(X^*, X) \cong H_i^{\mathfrak{N}}(X^*, X').$$

Sean

$$Z_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} < ||x|| \leq 1\},\ U = X \cup (\cup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times} Z_n)) \cup (\cup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(Z_n)).$$

U es un abierto en X^* y su clausura está contenida en el interior de X' en X^*, luego $H_i^{\mathfrak{R}}(X^*, X') \cong H_i^{\mathfrak{R}}(X^*\text{-}U, X'\text{-}U)$, que es isomorfo a su vez a

$$H_i^{\mathfrak{R}}((\cup f_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times} M^n)) \cup (\cup f_\gamma(M^n)), ((\cup f_\lambda(\mathbb{N}\bar{\times}(M^n\text{-}\{0\}))) \cup (\cup f_\gamma(M^n\text{-}\{0\}))),$$

donde $M^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq \frac{1}{2}\}$.

Así, $H_i^{\mathfrak{R}}(X^*, X') \cong (\oplus_{\lambda \in \Lambda} H_i^{\mathfrak{R}}(\mathfrak{D}_\lambda^n, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1})) \oplus (\oplus_{\gamma \in \Gamma} H_i^{\mathfrak{R}}(D_\gamma^n, S_\gamma^{n-1}))$ teniendo en cuenta que $\mathbb{N}\bar{\times}\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = \frac{1}{2}\}$ es retracto por deformación exterior de $\mathbb{N}\bar{\times}(M^n\text{-}\{0\})$, que $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = \frac{1}{2}\}$ también lo es de $M^n\text{-}\{0\}$ y el lema de los cinco. Como resultado de todos estos razonamientos:

Proposición 3.3.14

$$H_i^{\mathfrak{R}}(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda \mathfrak{R}) \oplus (\oplus_\gamma (\oplus_{j=0}^{\infty} \mathbb{Z})), & i = n \\ 0, & i \neq n\ . \end{cases}$$

Lema 3.3.5 *Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión, entonces $H_i^{\mathfrak{R}}(X^n) = 0$, $\forall i > n$.*

Demostración:

Si $n = 0$, X^0 se obtiene a partir del push-out

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & \emptyset \arrow[d, hook] \\ (\coprod_{\lambda A_0} \mathfrak{D}_\lambda^0) \coprod (\coprod_{\gamma \in B_0} D_\gamma^0) \arrow[r, "f"'] & X^0. \end{tikzcd}$$

f es isomorfismo exterior y, como $\mathfrak{D}_\lambda^0 \cong \mathbb{N}$ y $D_\gamma^0 \cong *$ entonces $H_i^{\mathfrak{R}}(X^0)$ es isomorfo a $(\oplus_\lambda H_i^{\mathfrak{R}}(\mathbb{N})) \oplus (\oplus_\gamma H_i^{\mathfrak{R}}(*))$, por lo que si $i > 0$ entonces $H_i^{\mathfrak{R}}(X^0) = 0$.

Supóngase cierto para $n-1$, esto es, $H_i^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) = 0$, $\forall i > n-1$. Si $i > n$ se considera la sucesión exacta del par (X^n, X^{n-1}) :

$$\ldots \to H_i^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \to H_i^{\mathfrak{R}}(X^n) \to H_i^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \to H_{i-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \to \ldots$$

Como $i > n > n-1$ entonces $H_i^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) = 0 = H_{i-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1})$. Así, se tiene que $H_i^{\mathfrak{R}}(X^n) \cong H_i^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) = 0$ puesto que $i \neq n$. □

En el próximo lema $\alpha_k : X^k \to X$ es la inyección canónica del esqueleto k-dimensional de X en X (véase la definición de gCW complejo).

Lema 3.3.6 *Sea X un gCW-complejo como en el lema anterior, y sea a un elemento de $C_n^{\mathfrak{R}}(X)$. Entonces existe una factorización en* **E-Ab**,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z} \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & C_n(X) \\ & C_n(X^m), \arrow[ur, "C_n(\alpha_m)"'] & \end{tikzcd}$$

para m suficientemente grande.

Demostración:

Supóngase que $a \notin C_n^{\mathfrak{R}}(\alpha_m(X^m))$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$ tal que $x_i \in \alpha_{n_{i+1}}(X^{n_{i+1}})$-$\alpha_{n_i}(X^{n_i})$, $n_0 = 0$, $n_{i+1} > n_i$, siendo x_i un punto proveniente de algún símplice de $a_{n_{i+1}}$.

Se considera $f : \mathbb{N} \to X$, dado por $f(k) = x_k$. Evidentemente es continua pero, además, es exterior: si E es abierto exterior de X entonces $C_n(E)$ es exterior de $C_n(X)$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in C_n(E)$, $\forall k \geq n_0$. Entonces $f(k) = x_k \in E$, $\forall k \geq n_0$.

$\alpha_k^{-1}(f(\mathbb{N}))$ es e-cerrado en X^k, para cada k, al ser finito, por lo que $f(\mathbb{N})$ es e-cerrado en X. Así, $\mathbb{N} = f^{-1}(f(\mathbb{N}))$ es e-cerrado, es decir, compacto, lo cual es una contradicción. □

Definición 3.3.9 Se define el *complejo $\mathfrak{R}$-celular* de X como

$$C_n^{\mathfrak{R}cel}(X) = H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}),$$

con operador frontera la composición

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

donde δ_* es el homomorfismo de conexión y j_{n-1} el inducido por la inclusión.

Para simplificar se denotará por (C, d). (C, d) es un complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos. Si k_n, j_n denotan las inducidas en las inclusiones se considera el diagrama

$$H_n^{\mathfrak{R}}(X) \xleftarrow{k_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}).$$

Teorema 3.3.2 *Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Entonces*

(i) k_n es epimorfismo;

(ii) j_n es monomorfismo;

(iii) $im(j_n) = ker(d_n)$, $ker(k_n) = j_n^{-1}(im(d_{n+1}))$.

Demostración:

Si $n \geq 1$, la sucesión exacta (*) asociada al par (X^n, X^{n-1}) es

$$0 \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^n) \longrightarrow 0.$$

Si $i \neq n$, $i \neq n-1$, entonces $H_{i+1}^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) = 0 = H_i^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1})$ y así, de la sucesión exacta asociada al par (X^n, X^{n-1}) se deduce que $i_n : H_i^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \to H_i^{\mathfrak{R}}(X^n)$, la inducida por la inclusión correspondiente, es isomorfismo, en particular si $i < n-1$, es decir, $n > i+1$. Entonces, fijado $i \geq 0$ se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
H_i^{\mathfrak{R}}(X^{i+1}) \arrow[r, "i_{i+2}", "\cong"'] \arrow[dr, "k_{i+1}"'] & H_i^{\mathfrak{R}}(X^{i+2}) \arrow[r, "i_{i+3}", "\cong"'] \arrow[d, "k_{i+2}"] & \cdots \arrow[r, "i_m", "\cong"'] & H_i^{\mathfrak{R}}(X^m) \arrow[r, "i_{m+1}", "\cong"'] \arrow[dll, "k_m"] & \cdots \\
& H_i^{\mathfrak{R}}(X). & & &
\end{tikzcd}$$

En el caso que X sea de dimensión finita, $X = X^m$, para un cierto m, de lo que se sigue que $\forall \alpha > i$, $k_\alpha : H_i^{\mathfrak{R}}(X^\alpha) \to H_i^{\mathfrak{R}}(X)$ es isomorfismo y, por tanto, k_{i+1} lo es. Para la misma conclusión, en el caso general, se tiene en cuenta el lema anterior, los detalles se dejan para el lector.

De la exactitud (*) se tiene que j_n es monomorfismo y que i_n es epimorfismo, $n \geq 1$. Ya que $k_{n+1} i_{n+1} = k_n$ y k_{n+1} es isomorfismo se sigue que k_n es sobre. Además $ker(k_n) = ker(i_{n+1})$ por lo que su puede sustituir (*) por

$$0 \longrightarrow H_n^{\mathfrak{R}}(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n^{\mathfrak{R}}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X^{n-1}) \xrightarrow{k_{n-1}} H_{n-1}^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow 0.$$

Como $d_n = j_{n-1}\delta_*$ y j_{n-1} es monomorfismo entonces

$$ker(d_n) = ker(j_{n-1}\delta_*) = ker(\delta_*) = im(j_n),$$

además,

$$ker(k_{n-1}) = im(\delta_*) = j_{n-1}^{-1}(im(j_{n-1}\delta_*)) = j_{n-1}(im(d_n)).$$

□

Corolario 3.3.3 *$\theta_n = (j_n k_n^{-1}) : H_n^{\mathfrak{R}}(X) \to H_n(C)$ es un isomorfismo de $\mathfrak{R}$-módulos.*

Por tanto, para hallar los grupos de $\mathfrak{R}$-homología de X basta hallar los grupos de homología del complejo de cadenas de $\mathfrak{R}$-módulos, C.

Capítulo 4

Aplicaciones: Homologías tubulares.

Otros importantes invariantes de naturaleza homológica para los espacios exteriores se estudiarán en este capítulo: la homología tubular y la tubular cerrada. Se verán relaciones entre éstas y la homología singular clásica, así como que, para CW complejos localmente finitos y con un número contable de celdas en cada dimensión, K, su homología localmente finita coincidirá con la homología tubular cerrada de cierta estructura de gCW complejo para K, con lo cual, y como consecuencia inmediata, se podrá dar una relación de la homología reducida de Steenrod de un espacio métrico-compacto, X, con la homología tubular cerrada asociada a su complejo fundamental de Lefschetz.

4.1 Homología tubular.

Se considera la categoría $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos.

Definición 4.1.1 Dado X un objeto de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, se define su *cocilindro*, X^I, como,

$$(X^I)_n = X_n \oplus X_{n+1} \oplus X_n,$$
$$d_n^{X^I}(x, y, z) = (d_n^X(x), -d_{n+1}^X(y) + x - z, d_n^X(z)).$$

Es sencillo comprobar que es un objeto de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$. Tomando $(d_0)_n$ y $(d_1)_n$ las proyecciones en la primera y tercera componente respectivamente, definen homomorfismos de complejos,

$$d_0, d_1 : X^I \to X.$$

Por otro lado, se define $s : X \to X^I$ como $s_n(x) = (x, 0, x)$, dando un homomorfismo de complejos. Entonces se tiene un diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "{(id,id)}"] \arrow[dr, "s"'] & & X \times X \\ & X^I, \arrow[ur, "{(d_0,d_1)}"'] & \end{tikzcd}$$

con (d_0, d_1) fibración y s equivalencia débil en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, por lo que es un objeto cocilindro de X, en el sentido de categoría de modelos de Quillen (véase [13]). Dado $f : X \to Y$ un morfismo de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$ se define su cocilindro, f^I, como $(f^I)_n = f_n \oplus f_{n+1} \oplus f_n$. Surge así, un funtor cocilindro,

$$(.)^I : \mathbf{Ch_{ai}Ab} \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}.$$

Además, d_0, d_1 y s son transformaciones naturales. El funtor cocilindro transforma equivalencias débiles en equivalencias débiles.

Si X es un complejo de cadenas positivo de $\mathfrak{R}$-módulos, se puede considerar $(sh)^* : X \to X$, dado como $(sh)^*_n(x) = x \cdot sh$, donde sh es el operador shift definido en el capítulo 2. Es sencillo comprobar que es un homomorfismo de complejos de cadenas positivo de grupos abelianos. Teniendo en cuenta la existencia del funtor canónico

$$\mathbf{Ch^+(\mathfrak{R}\text{-}Mod)} \to \mathbf{Ch^+Ab} \subset \mathbf{Ch_{ai}Ab},$$

entonces tiene sentido la siguiente definición:

Definición 4.1.2 Sea X un objeto de $\mathbf{Ch^+(\mathfrak{R}\text{-}Mod)}$. Se define el *complejo de cadenas tubular* de X, $P(X)$, como el obtenido en el siguiente pull-back en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$:

$$\begin{tikzcd} P(X) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & X^I \arrow[d, "{(d_0,d_1)}"] \\ X \arrow[r, "{(id,(sh)^*)}"'] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Su descripción explícita es

$$P(X)_n = X_n \oplus X_{n+1},$$
$$d_n^{P(X)}(a, x) = (d_n^X(a), -d_{n+1}^X(x) + a - a \cdot sh).$$

Por otro lado, si $f : X \to Y$ es un morfismo de $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$, se induce, por la propiedad universal del pull-back, un morfismo de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$, $P(f) : P(X) \to P(Y)$, cuya expresión es $P(f)_n = f_n \oplus f_{n+1}$. Claramente define un funtor $P : \mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod}) \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}$.

Para cada pareja exterior (X, A), $C^{\mathfrak{R}}(X, A)$ es un complejo de cadenas positivo de $\mathfrak{R}$-módulos. Se denotará por $P(X, A)$ a $P(C^{\mathfrak{R}}(X, A))$.

Definición 4.1.3 Sea (X, A) una pareja exterior, se define el *n-grupo de homología tubular* de (X, A), y se denotará por $H_n^P(X, A)$, como el del complejo $P(X, A)$.

De modo natural, si $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un morfismo de parejas exteriores se define $H_n^P(f) : H_n^P(X, A) \to H_n^P(Y, B)$, dando lugar, para cada $n \in \mathbb{Z}$ un funtor $H_n^P : \mathbf{E^{(2)}} \to \mathbf{Ab}$.

Lema 4.1.1 *Sea W un subcomplejo de cadenas positivo de $\mathfrak{R}$-módulos de Z. Entonces existe un isomorfismo natural $P(Z/W) \cong P(Z)/P(W)$.*

Demostración:

Es sencillo comprobar que $\theta : P(Z/W) \to P(Z)/P(W)$, dado por

$$\theta_n([x], [y]) = [(x, y)],$$

es el isomorfismo natural. $\square$

Como consecuencia,

Proposición 4.1.1 *Sea (X, A) una pareja exterior, entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^P(A) \xrightarrow{i_*} H_n^P(X) \xrightarrow{j_*} H_n^P(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}^P(A) \longrightarrow \cdots,$$

donde i_*, j_* son las inducidas en las correspondientes inclusiones.

Demostración:

Teniendo en cuenta el lema anterior se tiene una sucesión exacta corta en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$,

$$0 \longrightarrow P(A) \xrightarrow{P(i)} P(X) \xrightarrow{P(j)} P(X, A) \longrightarrow 0,$$

concluyendo la demostración. $\square$

También, para la invarianza homotópica de la homología tubular, es necesario comprobar antes un resultado.

Lema 4.1.2 *Sean $f, g : X \to Y$ morfismos en $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$ tales que $f \simeq g$. Entonces $P(f) \simeq P(g)$.*

Demostración:

Sea $\{h_n : X_n \to Y_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la homotopía entre f y g. Una simple comprobación demuestra que

$$h_n \oplus (-h_{n+1}) : P(X)_n \to P(Y)_{n+1},\ (a, x) \rightsquigarrow (h_n(a), -h_{n+1}(x))$$

determina la homotopía entre $P(f)$ y $P(g)$. $\square$

Proposición 4.1.2 *Sean $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ morfismos en $\mathbf{E^{(2)}}$ homótopos exteriormente. Entonces $H_n^P(f) = H_n^P(g)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración:

Si $f \simeq g$ entonces $C^{\mathfrak{R}}(f), C^{\mathfrak{R}}(g) : C^{\mathfrak{R}}(X, A) \to C^{\mathfrak{R}}(Y, B)$ son homótopos en $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\text{-}\mathbf{Mod})$. El lema anterior concluye el resultado. $\square$

La homología tubular verifica también un teorema de tipo escisivo.

Teorema 4.1.1 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular, es decir,*

$$H_n^P(i) : H_n^P(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^P(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n.

Demostración:

Se hará uso de la estructura de categoría de modelos de $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$. Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[r, "{(id,(sh)^*)}"] \arrow[d, "C^{\mathfrak{R}}(i)"'] & C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)\times C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[d, "C^{\mathfrak{R}}(i)\times C^{\mathfrak{R}}(i)"'] & C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)^I \arrow[l, "{(d_0,d_1)}"'] \arrow[d, "C^{\mathfrak{R}}(i)^I"'] \\
C^{\mathfrak{R}}(X, A) \arrow[r, "{(id,(sh)^*)}"'] & C^{\mathfrak{R}}(X, A)\times C^{\mathfrak{R}}(X, A) & C^{\mathfrak{R}}(X, A)^I. \arrow[l, "{(d_0,d_1)}"]
\end{tikzcd}$$

Por el teorema 3.3.1, $C^{\mathfrak{R}}(i)$ es equivalencia débil y, por tanto, también lo son $C^{\mathfrak{R}}(i)\times C^{\mathfrak{R}}(i)$ y $C^{\mathfrak{R}}(i)^I$. Por otro lado,

$$(d_0, d_1) : C^{\mathfrak{R}}(X, A)^I \to C^{\mathfrak{R}}(X, A)\times C^{\mathfrak{R}}(X, A),$$
$$(d_0, d_1) : C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)^I \to C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)\times C^{\mathfrak{R}}(X\text{-}U, A\text{-}U)$$

son fibraciones, luego, por el resultado dual de la proposición 0.1.1 se tiene que

$$P(i) : P(X\text{-}U, A\text{-}U) \to P(X, A)$$

es equivalencia débil. □

Lema 4.1.3 *Sea $\{X^i\}_{i=1}^m$ una colección finita de complejos de cadenas positivos de $\mathfrak{R}$-módulos. Entonces existe un isomorfismo natural,*

$$P(\oplus_{i=1}^m X^i) \cong \oplus_{i=1}^m P(X^i).$$

Demostración:

Se considera $\alpha : P(\oplus_{i=1}^m X^i) \to \oplus_{i=1}^m P(X^i)$ dado por

$$\alpha_n((a^1, a^2, ..., a^m), (x^1, x^2, ..., x^m)) = ((a^1, x^1), (a^2, x^2), ..., (a^m, x^m)).$$

Es sencillo comprobar que define a α como un isomorfismo natural en $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{R}\textbf{-Mod})$. □

De este lema se sigue la aditividad finita para la homología tubular.

Proposición 4.1.3 *Sea $\{X^i\}_{i=1}^m$ una colección finita de espacios exteriores. Entonces existe un isomorfismo natural,*

$$H_n^P(\textstyle\coprod_{i=1}^m X^i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^P(X^i).$$

Demostración:

Por el lema anterior y ya que $C^{\mathfrak{R}}(\coprod_{i=1}^{m} X^i) \cong \oplus_{i=1}^{m} C^{\mathfrak{R}}(X^i)$, entonces

$$P(\coprod_{i=1}^{m} X^i) \cong \oplus_{i=1}^{m} P(X^i).$$

□

Para el próximo objetivo, es necesario describir el funtor derivado del funtor límite inverso.

Definición 4.1.4 Sea

$$G_0 \xleftarrow{p_0} G_1 \xleftarrow{p_1} G_2 \xleftarrow{p_2} G_3 \longleftarrow \cdots$$

un sistema inverso de grupos abelianos. Se considera el homomorfismo de grupos $d : \prod_{i=0}^{\infty} G_i \to \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ dado por

$$d(g_0, g_1, g_2, ...) = (g_0 - p_0(g_1), g_1 - p_1(g_2), g_2 - p_2(g_3), ...).$$

Entonces el *límite inverso* es $lim\,\{G_i, p_i\} = ker(d)$, y el *límite derivado*, $lim^1\,\{G_i, p_i\} = coker(d)$.

Para simplificar notación y siempre que no haya lugar a confusión, se omitirán los homomorfismos de transición, p_i.

De forma canónica se definen lim y lim^1 para morfismos de sistemas inversos de grupos abelianos. Dos importantes propiedades concernientes al funtor lim^1 son las siguientes:

(i) Si cada $p_i : G_{i+1} \to G_i$ es un epimorfismo, entonces $lim^1\,\{G_i\} = 0$;

(ii) Los límites inversos y derivados de una sucesión exacta corta de sistemas inversos de grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow \{G_i\} \longrightarrow \{H_i\} \longrightarrow \{K_i\} \longrightarrow 0,$$

están relacionados por una sucesión exacta larga de grupos abelianos,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow lim\,\{G_i\} \longrightarrow lim\,\{H_i\} \longrightarrow lim\,\{K_i\} \\ \longrightarrow lim^1\,\{G_i\} \longrightarrow lim^1\,\{H_i\} \longrightarrow lim^1\,\{K_i\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Supóngase X un espacio exterior E-C1, y

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

una base exterior. Sea $i_k : E_{k+1} \hookrightarrow E_k$ la inclusión canónica correspondiente y dado $q \in \mathbb{Z}$, $p_k : H_q(E_{k+1}) \to H_q(E_k)$ su inducida en los grupos de homología singular. Entonces se tiene, para cada q, un sistema inverso de grupos abelianos,

$$H_q(E_0) \xleftarrow{p_0} H_q(E_1) \xleftarrow{p_1} H_q(E_2) \xleftarrow{p_2} H_q(E_3) \longleftarrow \cdots$$

Teorema 4.1.2 *Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,*

$$0 \longrightarrow lim^1 \{H_{q+1}(E_i)\} \longrightarrow H_q^P(X) \longrightarrow lim \{H_q(E_i)\} \longrightarrow 0.$$

Demostración:

Primeramente se construirá un epimorfismo $H_q^P(X) \xrightarrow{\beta} lim \{H_q(E_i)\}$:

Sea (a, x) un q-ciclo de $P(X)$, entonces

$$(d_q^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(a), -d_{q+1}^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(x) + a - a \cdot sh) = (0, 0).$$

Ya que $a : \mathfrak{z} \to C_q(X)$ y $x : \mathfrak{z} \to C_{q+1}(X)$ son homomorfismos exteriores existe $\{n_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $n_0 = 0$ y $n_{i+1} > n_i$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $(a_k, x_k) \in C_q(E_i) \oplus C_{q+1}(E_i)$, $\forall k \geq n_i$. (a_k, x_k representan $a(e_k)$, $x(e_k)$ respectivamente.)

Se define $\beta([(a, x)]) = \{[a_{n_i}]\}_{i=0}^{\infty}$. Evidentemente, a_{n_i} es un q-ciclo de $C(E_i)$, por lo que $[a_{n_i}] \in H_q(E_i)$. Además, si se considera

$$w_i = x_{n_i} + x_{n_i+1} + x_{n_i+2} + ... + x_{n_{i+1}-1} \in C_{q+1}(E_i),$$

entonces $d_{q+1}^{C(X)}(w_i) = a_{n_i} - a_{n_{i+1}}$. Por tanto $p_i([a_{n_{i+1}}]) = [a_{n_i}]$ y

$$\{[a_{n_i}]\}_{i=0}^{\infty} \in lim \{H_q(E_i)\}.$$

β está bien definida: si (a, x), (b, y) son dos q-ciclos homólogos de $P(X)$ existe una (q+1)-cadena, (c, z), tal que

$$(d_{q+1}^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(c), -d_{q+2}^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(z) + c - c \cdot sh) = (a - b, x - y).$$

Sean $\{[a_{n_i}]\}_{i=0}^{\infty}$, $\{[b_{n'_i}]\}_{i=0}^{\infty}$ los elementos del límite inverso según la construcción descrita. Como $c : \mathfrak{z} \to C_{q+1}(X)$ es exterior, para cada i existe $n''_i > max\{n_i, n'_i\}$ tal que $c_k \in C_{q+1}(E_i)$, $\forall k \geq n''_i$. Sea

$$w_i = c_{n''_i} - (y_{n'_i} + y_{n'_i+1} + ... + y_{n''_i-1}) + (x_{n_i} + x_{n_i+1} + ... + x_{n''_i-1}) \in C_{q+1}(E_i).$$

Es fácil comprobar que $d_{q+1}^{C(E_i)}(w_i) = a_{n_i} - b_{n_i'}$ con lo cual $[a_{n_i}] = [b_{n_i'}]$. De su propia construcción es inmediato comprobar que β es homomorfismo de grupos.

Se considera $\{[a_i]\}_{i=0}^{\infty} \in lim\,\{H_q(E_i)\}$. Ya que a_i es un q-ciclo de $C(E_i)$ se define $a(e_i) = a_i$; evidentemente $a \in C_q^{\mathfrak{R}}(X)$ y, como $a_{i+1} \sim a_i$ en $C(E_i)$, existe $x_i \in C_{q+1}(E_i)$ con $d_{q+1}^{C(X)}(x_i) = a_i - a_{i+1}$. Esto da lugar a $x \in C_{q+1}^{\mathfrak{R}}(X)$ $(x(e_i) = x_i)$ con (a, x) q-ciclo de $P(X)$ y verificando que su imagen, vía β, es $\{[a_{n_i}]\}_{i=0}^{\infty}$, comprobándose la suprayectividad.

Para la construcción del monomorfismo $lim^1\,\{H_{q+1}(E_i)\} \xrightarrow{\alpha} H_q^P(X)$ se va a considerar

$$\varphi : \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i) \to H_q^P(X),$$

definida como $\varphi(\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty}) = [(0, x)]$, donde x viene dado por $x(e_i) = x_i$. φ está bien definida puesto que si $x_i \sim x_i'$ en $C(E_i)$ para cada i, existe $w_i \in C_{q+2}(E_i)$ con $d_{q+2}^{C(X)}(w_i) = x_i - x_i'$. Se tiene, así, $w \in C_{q+2}^{\mathfrak{R}}(X)$. Entonces $(0, w) \in P_{q+1}(X)$ y $d_{q+1}^{P(X)}(0, w) = (0, x') - (0, x)$. También en este caso, es directa la comprobación de que φ es homomorfismo. Sea

$$d : \textstyle\prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i) \to \prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i)$$

de la definición del límite derivado. Si $\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty}$ es un elemento del límite inverso entonces

$$\varphi d(\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty}) = \varphi(\{[x_i - x_{i+1}]\}_{i=0}^{\infty}) = [(0, x - x \cdot sh)] = [d_{q+1}^{P(X)}(x, 0)] = 0.$$

Denotando por π la proyección de $\prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i)$ en $lim^1\,\{H_{q+1}(E_i)\}$ entonces existe un único homomorfismo $\alpha : lim^1\,\{H_{q+1}(E_i)\} \to H_q^P(X)$ tal que $\alpha\pi = \varphi$.

α es inyectiva pues, si $\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty} \in \prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i)$ tal que $[(0, x)] = 0$ entonces existe una (q+1)-cadena (a, y) de $P(X)$ tal que

$$(d_{q+1}^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(a), -d_{q+2}^{C^{\mathfrak{R}}(X)}(y) + a - a \cdot sh) = (0, x).$$

Por otro lado, como a, y son exteriores, existe $\{n_i\}_{i=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $n_0 = 0$, $n_{i+1} > n_i$ y $(a_k, y_k) \in C_{q+1}(E_i) \oplus C_{q+2}(E_i)$, $\forall k \geq n_i$. Se considera

$$w_i = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{n_i - 1} + a_{n_i} \in C_{q+1}(E_i),$$

que es (q+1)-ciclo de $C(E_i)$, y sea también

$$z_i = y_{n_i} + y_{n_i+1} + ... + y_{n_{i+1}-1} \in C_{q+2}(E_i).$$

Entonces $d_{q+2}^{C(X)}(z_i) = (w_i - w_{i+1}) - x_i$, con lo cual, $d(\{[w_i]\}_{i=0}^{\infty}) = \{[x_i]\}_{i=0}^{\infty}$. Esto muestra que $\{[x_i]\}_{i=0}^{\infty} \in im(d)$ y la inyectividad de α.

Por construcción, $\beta\alpha = 0$, luego $im(\alpha) < ker(\beta)$. Sólo queda por comprobar que $ker(\beta) < im(\alpha)$:

Sea (a, x) un q-ciclo de $P(X)$ tal que $\beta([(a,x)]) = \{[a_{n_i}]\}_{i=0}^{\infty} = 0$, donde $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ es tal que $n_0 = 0$, $n_i > n_{i-1}$ y $(a_k, x_k) \in C_q(E_i) \oplus C_{q+1}(E_i)$, $\forall k \geq n_i$. Como $a_{n_i} \sim 0$ en $C(E_i)$, existe $y_i \in C_{q+1}(E_i)$ tal que $d_{q+1}^{C(X)}(y_i) = a_{n_i}$, para cada i. Sea

$$w_i = -y_i + y_{i+1} + x_{n_i} + x_{n_i+1} + ... + x_{n_{i+1}-1}.$$

Entonces $\{[w_i]\}_{i=0}^{\infty} \in \prod_{i=0}^{\infty} H_{q+1}(E_i)$ y $\varphi(\{[w_i]\}_{i=0}^{\infty}) = [(0, -y + y \cdot sh + x')]$, donde $y(e_i) = y_i, x'(e_i) = x_{n_i} + x_{n_i+1} + ... + x_{n_{i+1}-1}$. Sea

$$\gamma_i = y_i + x_i + x_{i+1} + ... + x_{n_i-1}.$$

Entonces define $\gamma \in C_{q+1}^{\mathfrak{R}}(X)$, $(\gamma, 0) \in P_{q+1}(X)$ y $d_{q+1}^{P(X)}((\gamma, 0))$ es, exactamente, $(a, x) - (0, -y + y \cdot sh + x')$, con lo cual $\varphi(\{[w_i]\}_{i=0}^{\infty}) = [(a, x)]$. $\square$

Siguiendo razonamientos análogos se obtiene el siguiente resultado para el caso no absoluto. Se dejan los detalles al lector.

Teorema 4.1.3 *Sea (X, A) una pareja exterior, X E-C1, y*

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

una base exterior de X. Entonces, si se denota por $E'_i = E_i \cap A$, existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1 \{H_{q+1}(E_i, E'_i)\} \longrightarrow H_q^P(X, A) \longrightarrow lim \{H_q(E_i, E'_i)\} \longrightarrow 0.$$

En la anterior sección, se había definido la $\mathfrak{R}$-homología. Esta homología y la homología tubular están relacionadas mediante una sucesión exacta larga.

Proposición 4.1.4 *Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga de la forma:*

$$\cdots \longrightarrow H^{\mathfrak{R}}_{q+1}(X) \longrightarrow H^{P}_{q}(X) \longrightarrow H^{\mathfrak{R}}_{q}(X) \longrightarrow H^{\mathfrak{R}}_{q}(X) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

Se considera la sucesión exacta corta en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$,

$$0 \longrightarrow C^{\mathfrak{R}}(X)^{+} \xrightarrow{\alpha} P(X) \xrightarrow{\beta} C^{\mathfrak{R}}(X) \longrightarrow 0,$$

donde $C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}$ es el complejo dado por

$$\begin{aligned} C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}_{n} &= C^{\mathfrak{R}}(X)_{n+1}, \\ d^{C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}}_{n} &= -d^{C^{\mathfrak{R}}(X)}_{n+1}, \end{aligned}$$

$\alpha_n(x) = (0, -x)$, $x \in C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}_{n}$, y $\beta_n(a, x) = a$, $(a, x) \in P(X)_n$. Como $H_q(C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}) = H^{\mathfrak{R}}_{q+1}(X)$, $q \in \mathbb{Z}$, se tiene el resultado. El homomorfismo de conexión $\delta_* : H_q(C^{\mathfrak{R}}(X)) \to H_{q-1}(C^{\mathfrak{R}}(X)^{+}) = H^{\mathfrak{R}}_{q}(X)$ viene definido como $\delta_* = (sh)^* - id$, $([x] \rightsquigarrow [x \cdot sh - x]$.) □

Obsérvese que con razonamientos similares se tiene el resultado para el caso relativo.

El teorema 4.1.2 anterior es útil para el cálculo de homología tubular. Se pretende ahora calcular la homología tubular del espacio exterior $\mathbb{N}$. Claramente, $\{\mathbb{N}(i)\}_{i=0}^{\infty}$ es una base exterior que está en las condiciones de dicho teorema.

Proposición 4.1.5

$$H^{P}_{q}(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z} / \oplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1 \,. \end{cases}$$

Demostración:

Se considera la sucesión exacta corta de grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow lim^1 \{H_{q+1}(\mathbb{N}(i))\} \longrightarrow H^{P}_{q}(\mathbb{N}) \longrightarrow lim \{H_q(\mathbb{N}(i))\} \longrightarrow 0.$$

Para $q \leq -2$ ó $q \geq 1$, $H_q^P(\mathbb{N}) = 0$, evidentemente. Si $q = 0$, como cada $H_1(\mathbb{N}(i)) = 0$, se tiene que

$$H_0^P(\mathbb{N}) \cong lim\,\{H_0(\mathbb{N}(i))\} \cong lim\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\},$$

donde $\oplus_{k=i+1}^{\infty}\mathbb{Z} \hookrightarrow \oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}$ es la inclusión canónica, para cada i. El límite inverso de este sistema inverso de grupos es 0.

Queda el caso $q = -1$:

Como $lim\,\{H_{-1}(\mathbb{N}(i))\} = 0$, entonces

$$H_{-1}^P(\mathbb{N}) \cong lim^1\,\{H_0(\mathbb{N}(i))\} \cong lim^1\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\}.$$

Tomando los conúcleos sucesivos de las inclusiones $\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z} \hookrightarrow \oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$ se obtiene la siguiente sucesión exacta corta de sistemas inversos de grupos:

$$0 \longrightarrow \{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow \{\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow \{\oplus_{k=0}^{i}\mathbb{Z}\} \longrightarrow 0,$$

donde el segundo sistema inverso es constantemente $\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$ con la identidad, y el último sistema es

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longleftarrow \cdots$$

con las proyecciones canónicas. Entonces hay una sucesión exacta,

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow lim\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow lim\,\{\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow lim\,\{\oplus_{k=0}^{i}\mathbb{Z}\} \\ &\longrightarrow lim^1\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow lim^1\,\{\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}\} \longrightarrow lim^1\,\{\oplus_{k=0}^{i}\mathbb{Z}\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Pero $lim\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\} \cong 0 \cong lim^1\,\{\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}\}$.

Por otro lado, $lim\,\{\oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}\} \cong \oplus_{k=0}^{\infty}\mathbb{Z}$, $\;lim\,\{\oplus_{k=0}^{i}\mathbb{Z}\} \cong \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}$. De estos cálculos y la sucesión exacta expuesta se deduce:

$$lim^1\,\{\oplus_{k=i}^{\infty}\mathbb{Z}\} \cong \textstyle\prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}/\oplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}.$$

□

Una propiedad curiosa de la homología tubular surge cuando la externología considerada es la propia topología.

Proposición 4.1.6 *Sea X un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$. Entonces*

$$H_n^P(X) \cong 0,\;\; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

Por la parte (ii) de la proposición 3.3.10 se puede suponer:

$$P(X)_n = (\oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_n) \oplus (\oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_{n+1}),$$
$$d_n^{P(X)}(\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{x_i\}_{i=0}^{\infty}) = (\{d_n^{C(X)}(a_i)\}, \{-d_{n+1}^{C(X)}(x_i) + a_i - a_{i+1}\}).$$

donde $C(X)$ es el complejo de cadenas singular usual.

Supóngase $(a, x) = (\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{x_i\}_{i=0}^{\infty})$ un n-ciclo de $P(X)$. Entonces

$$d_n^{C(X)}(a_i) = 0,$$
$$d_{n+1}^{C(X)}(x_i) = a_i - a_{i+1}.$$

Ya que $a = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} \in \oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_n$ y $x = \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in \oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_{n+1}$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = 0$ y $x_i = 0$, $\forall i > N$. Se considera

$$w_i = \begin{cases} \sum_{k=i}^{N} x_k, & \text{si } 0 \leq i \leq N \\ 0, & \text{si } i > N \end{cases}$$

y $w = \{w_i\}_{i=0}^{\infty} \in \oplus_{i=0}^{\infty} C(X)_{n+1}$.

Entonces $(w, 0) \in P(X)_{n+1}$ y $d_{n+1}^{P(X)}(w, 0) = (a, x)$. □

Se deduce que, si X es un espacio topológico compacto, entonces

$$H_n^P(X_e) \cong 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

De forma similar se tiene para el caso relativo, con parejas exteriores compactas.

4.2 Homología tubular cerrada.

Variando un poco el complejo de cadenas tubular de un espacio exterior, se obtiene un subcomplejo suyo, el complejo tubular cerrado, dando lugar a otro invariante homológico importante: la homología tubular cerrada. Se darán, primeramente, unas consideraciones algebraicas antes de dar su definición.

Definición 4.2.1 Sea X un complejo de cadenas positivo de grupos abelianos exteriores. El *complejo de cadenas tubular cerrado* de X, $Q(X)$, es el complejo de cadenas acotado inferiormente de grupos abelianos siguiente:

$$Q(X)_n = \{(a,x) \in Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, X_n) \oplus Hom_{\mathbf{E\text{-}Ab}}(\mathfrak{Z}, X_{n+1}) : a_0 = 0\},$$
$$d_n^{Q(X)}(a,x) = ((d_n^X)_*(a), -(d_{n+1}^X)_*(x) + a - a \cdot sh).$$

Obsérvese que, realmente

$$Q(X)_n = \{(a,x) \in P(Ch^+(\mathcal{P})(X))_n : a_0 = 0\},$$

siendo $d_n^{Q(X)}$ la restricción de $d_n^{P(Ch^+(\mathcal{P})(X))}$ a $Q(X)_n$.

Evidentemente, $Q(X)$ es subcomplejo de $P(X) \equiv P(Ch^+(\mathcal{P})(X))$, la inclusión $i : Q(X) \hookrightarrow P(X)$ es homomorfismo de complejos de cadenas acotados inferiormente de grupos abelianos.

Si $f : X \to Y$ es un morfismo de complejos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(f) : Q(X) \to Q(Y)$ dada por

$$Q(f)_n = ((f_n)_*(a), (f_{n+1})_*(x)),$$

es decir, $P(f)_n | Q(X)_n$.

Si (X, A) es una pareja de complejos de cadenas positivos de grupos abelianos exteriores se considera $Q(X,A) = Q(X/A) \subset P(X,A)$. De forma natural se define para $f : (X,A) \to (Y,B)$ morfismo de parejas correspondiente, dando lugar a un funtor,

$$Q : \mathbf{Ch^+(E\text{-}Ab)^{(2)}} \to \mathbf{Ch_{ai}Ab}.$$

Si (X, A) es una pareja de espacios exteriores, se denotará por $Q(X, A)$ a $Q(D(X), D(A)) = Q(D(X)/D(A))$. Aquí $D(X)$ es el complejo singular $C(X)$ de forma que en cada nivel $C(X)_n$, tiene la externología generada por $\{C(E)_n : E \in \varepsilon_X\}$. Si no hay lugar lugar a ambigüedad, a veces se denotará $D(X) = C(X)$ y $D(X,A) = C(X,A)$. Se define de forma natural $Q(f) : Q(X,A) \to Q(Y,B)$ para parejas.

Definición 4.2.2 Sea (X, A) una pareja de espacios exteriores. Se define su *n-grupo de homología tubular cerrada*, $H_n^Q(X,A)$, como el del complejo $Q(X,A)$.

Si $f:(X,A)\to(Y,B)$ es un morfismo de parejas de espacios exteriores se define de forma canónica $H_n^Q(f):H_n^Q(X,A)\to H_n^Q(Y,B)$, originando un funtor para cada $n\in\mathbb{Z}$, $H_n^Q:\mathbf{E^{(2)}}\to\mathbf{Ab}$.

Lema 4.2.1 *Sea (X,A) una pareja exterior. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$Q(X,A)\cong Q(X)/Q(A).$$

Demostración:

No es difícil comprobar, y se deja para el lector, que la transformación $\alpha:Q(X)/Q(A)\to Q(X,A)$ dado como

$$\alpha_n([(a,x)])=(p_n(a),p_{n+1}(x)),$$

donde $p_k:C(X)_k\to C(X,A)_k$ es la proyección canónica, es un isomorfismo natural. □

Proposición 4.2.1 *Sea (X,A) una pareja exterior. Entonces existe una sucesión exacta larga en homología tubular cerrada,*

$$\cdots\longrightarrow H_n^Q(A)\xrightarrow{i_*}H_n^Q(X)\xrightarrow{j_*}H_n^Q(X,A)\xrightarrow{\delta_*}H_{n-1}^Q(A)\longrightarrow\cdots$$

Demostración:

Evidente, teniendo en cuenta el lema anterior.

Proposición 4.2.2 *Sean $f,g:X\to Y$ aplicaciones exteriores homótopas. Entonces*

$$H_n^Q(f)=H_n^Q(g),\ \ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Demostración:

Sea $F:f\simeq g$ la homotopía exterior, y sea $\Gamma_n^X:C(X)_n\to C(X\bar{\times}I)_{n+1}$ el operador prisma. Si $L_n=C(F)_{n+1}\Gamma_n^X:C(X)_n\to C(Y)_{n+1}$, entonces es conocido que $d_{n+1}^{C(X)}L_n+L_{n+1}d_n^{C(X)}=C(g)_n-C(f)_n$.

L_n es exterior: sea $E\in\varepsilon_Y$, entonces existe $E'\in\varepsilon_X$ tal que $F(E'\times I)$ está contenido en E. Por la naturalidad del operador prisma, $\Gamma_n^{E'}=\Gamma_n^X|C(E')_n$; así,

$$L_n(C(E')_n)=C(F)_{n+1}\Gamma_n^X(C(E')_n)\subset C(F)_{n+1}(C(E'\times I)_{n+1})\subset C(E)_{n+1},$$

demostrando que L_n es homomorfismo exterior. Entonces $h_n = \mathcal{P}(L_n)$, que es $(L_n)_* : C^{\mathfrak{R}}(X)_n \to C^{\mathfrak{R}}(Y)_{n+1}$, da lugar a la homotopía entre $C^{\mathfrak{R}}(f)$ y $C^{\mathfrak{R}}(g)$.

Es sencillo, entonces, comprobar que $\alpha_n : Q(X)_n \to Q(Y)_{n+1}$, dada por $\alpha_n(a,x) = (h_n(a), -h_{n+1}(x))$ está bien definida y que determina una homotopía entre $Q(f)$ y $Q(g)$. □

Existe una versión relativa de este último resultado, que se demuestra con razonamientos análogos.

Proposición 4.2.3 *Sea X un espacio exterior. Existe una sucesión exacta larga,*

$$\cdots \longrightarrow H_n^Q(X) \longrightarrow H_n^P(X) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}^Q(X) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

Se considera la sucesión en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$,

$$0 \longrightarrow Q(X) \xrightarrow{i} P(X) \xrightarrow{j} C(X) \longrightarrow 0,$$

donde $C(X)$ es el complejo de cadenas de grupos abelianos singular de X, i es la inclusión canónica y j viene dado como $j_n(a,x) = a_0$. Es sencillo comprobar que esta sucesión es exacta corta. □

Corolario 4.2.1 *Sea X un espacio exterior tal que $\varepsilon_X = \tau_X$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$H_n^Q(X) \cong H_{n+1}(X).$$

Demostración:

De la proposición anterior y la proposición 4.1.6, combinados, se deduce el resultado. □

En particular, si X es un espacio topológico compacto,

$$H_n^Q(X_e) \cong H_{n+1}(X), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Estos razonamientos se extienden, además, al caso relativo con razonamientos análogos.

También la homología tubular cerrada verifica un teorema de tipo escisivo.

Teorema 4.2.1 *Sea (X, A) una pareja exterior, con X E-C1, y sea U un abierto de X con $Cl_X(U) \subset Int_X(A)$. Entonces $i : (X\text{-}U, A\text{-}U) \hookrightarrow (X, A)$, la inclusión, induce isomorfismo en homología tubular cerrada, es decir,*

$$H_n^Q(i) : H_n^Q(X\text{-}U, A\text{-}U) \to H_n^Q(X, A)$$

es isomorfismo de grupos, para cada n.

Demostración:

El siguiente diagrama en $\mathbf{Ch_{ai}Ab}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[r] \arrow[d, "Q(i)"'] & P(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[r] \arrow[d, "P(i)"'] & C(X\text{-}U, A\text{-}U) \arrow[r] \arrow[d, "C(i)"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q(X, A) \arrow[r] & P(X, A) \arrow[r] & C(X, A) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas cortas. Considerando las sucesiones exactas largas en homología respectivas se tiene un diagrama conmutativo de grupos abelianos. Teniendo en cuenta que, fijado $n \in \mathbb{Z}$, $H_{n+1}^P(i)$ y $H_n^P(i)$ son isomorfismos por el teorema 4.1.1, que $H_{n+1}(i)$ y $H_n(i)$ son isomorfismos por el teorema de escisión clásico para homología singular, y haciendo uso del lema de los cinco, se deduce que $H_n^Q(i)$ es isomorfismo. $\square$

Lema 4.2.2 *Sea $\{X^i\}_{i=1}^m$ una colección de complejos de cadenas positivos de grupos abelianos exteriores. Entonces*

$$Q(\oplus_{i=1}^m X^i) \cong \oplus_{i=1}^m Q(X^i).$$

Demostración:

El isomorfismo $\alpha : Q(\oplus_{i=1}^m X^i) \to \oplus_{i=1}^m Q(X^i)$ viene definido por

$$\alpha_n((a^1, ..., a^m), (x^1, ..., x^m)) = ((a^1, x^1), (a^2, x^2), ..., (a^m, x^m)).$$

Nótese que $a = (a^1, ..., a^m) : \mathfrak{Z} \to \oplus_{i=1}^m X_n^i$ siendo cada $a^i : \mathfrak{Z} \to X_n^i$ exterior. Como $a_0 = 0$ entonces $a_0^i = 0$ para cada i, por lo que α está bien dado. Se comprueba que es isomorfismo de complejos. $\square$

Proposición 4.2.4 *Si $\{X^i\}_{i=1}^m$ es una colección de espacios exteriores, entonces*

$$H_n^Q(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m H_n^Q(X_i).$$

Demostración:

Evidente teniendo en cuenta el lema anterior y que, en $\mathbf{Ch}^+(\mathbf{E\text{-}Ab})$,

$$C(\coprod_{i=1}^m X_i) \cong \oplus_{i=1}^m C(X_i).$$

□

Se tiene por razonamientos similares el resultado para el caso relativo.

Como en la homología tubular, existe un teorema similar útil para cálculos.

Teorema 4.2.2 *Sea X un espacio exterio E-C1, y sea*

$$X = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$$

una base exterior. Existe, para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1\{H_{q+1}(X, E_i)\} \longrightarrow H_{q-1}^Q(X) \longrightarrow lim\{H_q(X, E_i)\} \longrightarrow 0.$$

Demostración:

Definición de $\beta : H_{q-1}^Q(X) \to lim\{H_q(X, E_i)\}$:

Sea (a, x) un (q-1)-ciclo de $Q(X)$. Entonces existe $\{n_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{N}$ sucesión, con $n_0 = 0$, $n_i > n_{i-1}$ y tal que $(a_k, x_k) \in C_{q-1}(E_i) \oplus C_q(E_i)$, $\forall k \geq n_i$. Se considera $z_i = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{n_i-1} \in C_q(X)$.

Denotando por $\overline{z_i} \in C_q(X, E_i)$ la clase en el cociente, entonces

$$\beta([(a, x)]) = \{[\overline{z_i}]\}_{i=0}^\infty \in lim\{H_q(X, E_i)\}.$$

Definición de $\alpha : lim^1\{H_{q+1}(X, E_i)\} \to H_{q-1}^Q(X)$:

Sea $\varphi : \prod_{i=0}^\infty H_{q+1}(X, E_i) \to H_{q-1}^Q(X)$ dado por:

si $\{[\overline{z_i}]\}_{i=0}^\infty \in \prod_{i=0}^\infty H_{q+1}(X, E_i)$ se considera $x \in C_q^{\mathfrak{R}}(C)$ definido como $x(e_i) = x_i = d_{q+1}^{C(X)}(z_i) \in C_q(E_i)$. Entonces $\varphi(\{[\overline{z_i}]\}_{i=0}^\infty = [(0, x)]$.

Si $d : \prod_{i=0}^\infty H_{q+1}(X, E_i) \to \prod_{i=0}^\infty H_{q+1}(X, E_i)$ es el homomorfismo de definición del límite derivado y π es la proyección sobre dicho límite, ya que

$\varphi d = 0$ existe un único homomorfismo de grupos α de $lim^1\{H_{q+1}(X, E_i)\}$ a $H^Q_{q-1}(X)$ tal que $\alpha\pi = \varphi$.

Se deja para el lector demostrar que están bien definidos y que determinan la sucesión exacta. Las técnicas a seguir para la verificación de estos hechos son las mismas que se han utilizado para la demostración del teorema 4.1.2. $\square$

En el teorema para el caso relativo se omite su demostración pues su técnica es la misma. Si (X, A) es una pareja exterior, X E-C1 y $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ una base exterior tal que $E_0 = X$ y $E_n \supset E_{n+1}$, para cada n, si se denota por $\tilde{E}_i = A \cup E_i$, entonces existe para cada $q \in \mathbb{Z}$, una sucesión exacta corta,

$$0 \longrightarrow lim^1\{H_{q+1}(X, \tilde{E}_i)\} \longrightarrow H^Q_{q-1}(X, A) \longrightarrow lim\{H_q(X, \tilde{E}_i)\} \longrightarrow 0.$$

Proposición 4.2.5

$$H^Q_q(\mathbb{N}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}, & q = -1 \\ 0, & q \neq -1 \end{cases}$$

Demostración:

Se considera la sucesión exacta corta de grupos abelianos,

$$0 \longrightarrow lim^1\{H_{q+2}(\mathbb{N}, \mathbb{N}(i))\} \longrightarrow H^Q_q(\mathbb{N}) \longrightarrow lim\{H_{q+1}(\mathbb{N}, \mathbb{N}(i))\} \longrightarrow 0.$$

Nótese que $H_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}(i)) \cong H_0(\mathbb{N} - \mathbb{N}(i)) \cong \oplus_{k=0}^{i-1}\mathbb{Z}$, siendo los homomorfismos de transición las proyecciones canónicas. Los únicos casos no triviales son $q = -2$ y $q = -1$. Si $q = -2$, entonces

$$H^Q_{-2}(\mathbb{N}) \cong lim^1\{H_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}(i))\} \cong lim^1\{\oplus_{k=0}^{i-1}\mathbb{Z}\} \cong 0,$$

al ser las proyecciones epimorfismos. Y si $q = -1$, se comprueba fácilmente que

$$H^Q_{-1}(\mathbb{N}) \cong lim\{H_0(\mathbb{N}, \mathbb{N}(i))\} \cong lim\{\oplus_{k=0}^{i-1}\mathbb{Z}\} \cong \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}.$$

$\square$

Proposición 4.2.6 *Sea $\{(X_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección contable de parejas de espacios compactos. Si en los coproductos,*

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \ \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$

se consideran las externologías de los complementos de sus compacto-cerrados, entonces

$$H_n^Q(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} H_{n+1}(X_\lambda, A_\lambda),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración:

En el caso finito, se considera en cada compacto su topología como externología, coincidente con la externología de los complementos de sus compacto-cerrados, así como en el coproducto. Por la versión relativa de la proposición 4.2.4 y el corolario 4.2.1 se tiene el resultado.

Supóngase que $\Lambda = \mathbb{N}$. Obsérvese que $\coprod_{\lambda=0}^{\infty} X_\lambda$ es E-C1. Una base exterior $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ viene dada como $E_i = \coprod_{\lambda=i}^{\infty} X_\lambda$. Como

$$H_k(\coprod_{\lambda=0}^{\infty} X_\lambda, \tilde{E}_i) \cong H_k(\coprod_{\lambda=0}^{i-1} X_\lambda, \coprod_{\lambda=0}^{i-1} A_\lambda) \cong \oplus_{\lambda=0}^{i-1} H_k(X_\lambda, A_\lambda),$$

por argumentos de escisión, con $U = \coprod_{\lambda=i}^{\infty} X_\lambda$, haciendo uso de la sucesión exacta 4.2.2 en su versión relativa, entonces

$$H_n^Q(\coprod_{\lambda=0}^{\infty} X_\lambda, \coprod_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda) \cong lim\,\{\oplus_{\lambda=0}^{i-1} H_{n+1}(X_\lambda, A_\lambda)\} \cong \prod_{\lambda=0}^{\infty} H_{n+1}(X_\lambda, A_\lambda),$$

puesto que el límite derivado es cero al ser los homomorfismos de transición, epimorfismos. □

4.3 Homología celular tubular cerrada y homología de Steenrod.

Se comprobará la importancia de la homología tubular cerrada viéndose una relación directa con la homología de Steenrod de los espacios métrico-compactos.

Las homologías tubular y tubular cerrada tienen las propiedades necesarias para repetir los argumentos hechos en los gCW complejos con un número finito de celdas en cada dimensión para la $\mathfrak{R}$-homología. Unicamente varían los grupos de coeficientes y en unos casos un salto de dimensión. Por ello, se omitirán varias demostraciones en los próximos comentarios. Para verlas tan solo es suficiente volver al capítulo anterior y repetir sus argumentos.

Se introducirá ahora, a semejanza de la $\mathfrak{R}$-homología reducida, la homología tubular cerrada reducida.

Definición 4.3.1 Sea (i_X, X, r_X) un objeto de $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Se define

$$\tilde{H}^Q_n(X) = ker(H^Q_n(X) \overset{(r_X)_*}{\longrightarrow} H^Q_n(\mathbb{N})).$$

Dada $f : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$, se induce un homomorfismo de grupos $\tilde{H}^Q_n(f) : \tilde{H}^Q_n(X) \to \tilde{H}^Q_n(Y)$.

Para $n > 0$, entonces $H^Q_n(\mathbb{N}) = 0$, por lo que $\tilde{H}^Q_n(X) = H^Q_n(X)$.

Si (X, A) es una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, se define $\tilde{H}^Q_n(X, A) = H^Q_n(X, A)$. Si $f : X \to Y$ es exterior, en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$, con $f(A) \subset B$ se define $\tilde{H}^Q_n(f) = H^Q_n(f)$.

Proposición 4.3.1 *Sea (X, A) una pareja en $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathbb{N}}_{\mathbb{N}}$. Entonces existen morfismos i_*, j_* y δ_* tales que la siguiente sucesión es exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}^Q_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}^Q_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}^Q_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}^Q_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Proposición 4.3.2 *Sean $f, g : (i_X, X, r_X) \to (i_Y, Y, r_Y)$ homótopas exteriormente. Entonces $\tilde{H}^Q_n(f) = \tilde{H}^Q_n(g)$, $n \geq 0$.*

Proposición 4.3.3

(i) $\tilde{H}^Q_{i+1}(\mathfrak{D}^{n+1}, \mathfrak{S}^n) \cong \tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$;

(ii) $\tilde{H}^Q_{i+1}(\mathfrak{S}^{n+1}) \cong \tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Corolario 4.3.1

$$\tilde{H}^Q_i(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1, \end{cases} \quad H^Q_{-1}(\mathfrak{S}^n) = \begin{cases} (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}) \oplus (\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}), & n = 0 \\ \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & n > 0. \end{cases}$$

Si $n \geq 1$:

$$H^Q_i(\mathfrak{D}^n, \mathfrak{S}^{n-1}) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1\,. \end{cases}$$

Por el cálculo de la homología singular usual de S^n y (D^n, S^{n-1}) y el corolario 4.2.1:

Si $i > 0$,

$$H_i^Q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1\ , \end{cases} \qquad H_{-1}^Q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n > 0\ . \end{cases}$$

Y, si $n \geq 1$:

$$H_i^Q(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1\ . \end{cases}$$

Dados X^* y X espacios exteriores como en la proposición 3.3.14, entonces

$$H_i^Q(X^*, X') \cong (\oplus_{\lambda\in\Lambda} H_i^Q(\mathfrak{D}_\lambda^n, \mathfrak{S}_\lambda^{n-1})) \oplus (\oplus_{\gamma\in\Gamma} H_i^Q(D_\gamma^n, S_\gamma^{n-1})),$$

por lo que

$$H_i^Q(X^*, X) \cong \begin{cases} (\oplus_\lambda(\prod_{i=0}^\infty \mathbb{Z}) \oplus (\oplus_\gamma \mathbb{Z})), & i = n-1 \\ 0, & i \neq n-1\ . \end{cases}$$

Definición 4.3.2 Sea X un gCW complejo con un número finito de celdas en cada dimensión. Se define el complejo celular tubular cerrado, $C^{Q\,cel}(X)$, como

$$C_n^{Q\,cel}(X) = H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}),$$

con operador borde, $d_n^{C^{Q\,cel}(X)}$, la composición

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-2}^Q(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-2}^Q(X^{n-1}, X^{n-2}).$$

Entonces el n-grupo de homología de dicho complejo es isomorfo al grupo de homología tubular cerrada de X de dimensión n-1.

Supóngase ahora un CW complejo, X, localmente finito y con un número contable de celdas en cada dimensión. Se considera en cada objeto del diagrama push-out en **Top** la externología de los complementos de sus compacto-cerrados,

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda\in A_n} S_\lambda^{n-1} \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in A_n} g_\lambda^n"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook, "i_n"] \\ \coprod_{\lambda\in A_n} D_\lambda^n \arrow[r, "\coprod_{\lambda\in A_n} f_\lambda^n"'] & X^n. \end{tikzcd}$$

Entonces es un push-out en **E**, véase el capítulo 1 de la memoria. Así, si X tiene dimensión finita, X_e es un gCW complejo (nótese que si hay un número numerable de n-celdas entonces se puede considerar como una sola $\mathbb{N}$-celda de dimensión n.) Para el caso general, la externología considerada en X será la del colímite. Se denotará este gCW complejo por $\hat{X}$.

Obsérvese que

$$H_{n-1}^Q(X^n, X^{n-1}) \cong \prod_{\lambda\in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong \prod_{\lambda\in A_n} H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n),$$

donde $e_\lambda^n = f_\lambda^n(Int(D_\lambda^n))$, $\overline{e}_\lambda^n = f_\lambda^n(D_\lambda^n)$ y $\dot{e}_\lambda^n = \overline{e}_\lambda^n$-$e_\lambda^n$.

Como es conocido, la homología celular localmente finita de X, orientado, es la homología del complejo $C^{lfcel}(X)$, definido como

$$C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda\in A_n} H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n),$$

con operador borde

$$d_n^{lfcel}(\{c_\lambda^n\}_{\lambda\in A_n}) = \{(\textstyle\sum_{\lambda\in A_n}[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}]w_\lambda^n)a_\mu^{n-1}\}_{\mu\in A_{n-1}},$$

donde a_λ^n es el generador del grupo cíclico infinito $H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, es decir, la orientación de e_λ^n (véase capítulo 4 de [56]), $c_\lambda^n = w_\lambda^n a_\lambda^n$, $w_\lambda^n \in \mathbb{Z}$ y $[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}]$ denota el número de incidencia de la n-celda e_λ^n respecto de la (n-1)-celda e_μ^{n-1}.

Nótese que, por el isomorfismo $H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \cong H_n(\overline{e}_\lambda^n, \dot{e}_\lambda^n)$, se puede dar una definición alternativa de la homología celular localmente finita de X :

$$C_n^{lfcel}(X) = \prod_{\lambda\in A_n} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}),$$

siendo el operador borde,

$$d_n^{lfcel}(\{(c')_\lambda^n\}_{\lambda\in A_n}) = \{(\textstyle\sum_{\lambda\in A_n}[e_\lambda^n : e_\mu^{n-1}](w')_\lambda^n)(a')_\mu^{n-1}\}_{\mu\in A_{n-1}},$$

donde $(a')^n_\lambda$ es el generador de $H_n(D^n_\lambda, S^{n-1}_\lambda)$, que se corresponde con a^n_λ y $(c')^n_\lambda = (w')^n_\lambda (a')^n_\lambda$, $(w')^n_\lambda \in \mathbb{Z}$.

Además, se comprueba la existencia de un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^Q_{n-1}(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "d^{Qcel}_n"'] & \prod_{\lambda \in A_n} H_n(D^n_\lambda, S^{n-1}_\lambda) \arrow[d, "-d^{lfcel}_n"] \\
H^Q_{n-2}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[r, "\cong"'] & \prod_{\mu \in A_{n-1}} H_{n-1}(D^{n-1}_\mu, S^{n-2}_\mu).
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta todos estos razonamientos:

Teorema 4.3.1 *Si X es un CW complejo localmente finito, con un número contable de celdas en cada dimensión, entonces*

$$H^Q_{n-1}(\hat{X}) \cong H_n(C^{lfcel}(X)), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Y, como corolario:

Corolario 4.3.2 *Sea X es un espacio métrico compacto. Entonces*

$$H^Q_n(\widehat{OFC(X)}) \cong \tilde{H}^{st}_n(X), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, la homología reducida de Steenrod de X ([75]) es isomorfa a la homología tubular cerrada de $\widehat{OFC(X)}$ donde $OFC(X)$ denota el complejo fundamental de Lefschetz de X ([34]).

Bibliografía

[1] S. Ardanza and L.J. Hernández. Fundamental pro-grupoid and bundles with a structural category. *Top. and its Appl.* **90** (1998), 1-15.

[2] M. Artin and B. Mazur. *Etale Homotopy.* Lect. Notes in Math. **100** (1969).

[3] R. Ayala, E. Dominguez and A. Quintero. A theoretical framework for Proper Homotopy Theory. *Math. Proc. Camb. Philos. Camb. Soc.* **107** (1990), 475-482.

[4] H.J. Baues. *Algebraic homotopy.* Cambridge Univ. Press, 1988.

[5] H.J. Baues. *Foundations of proper homotopy theory.* Preprint 1992.

[6] D. Bassendoski. *Whitehead and Hurewicz theorems in proper homotopy theorey.* Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1977.

[7] M. Beattie. About Moore spaces. *Proc. Workshop on Proper Homotopy Theory., Universidad de La Rioja*, 1991.

[8] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra.* Encyclopedia of Math. and its applications. Cambridge University Press. Vol. **50**,**51** (1994).

[9] Bousfield and D.M. Kan. *Homotopy limits, Completions and Localizations.* Lect. Notes in Math. **304** (Springer-Verlag), 1972.

[10] E.M. Brown. *On the proper homotopy type of simplicial complexes.* Lect. Notes in Math. **375**, (1975).

[11] K.S. Brown. Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 419-458.

[12] J.G. Cabello and A.R. Garzón. Closed model structures for algebraic models of n-types. *J. Pure Appl. Algebra* **103** (1995), 287-302.

[13] J. Cabeza. Homologías y cohomologías propias y de la forma. *Universidad de Zaragoza.* Tesis (1995).

[14] J. Cabeza, M.C. Elvira and L.J. Hernández. Una categoría cofibrada para las aplicaciones propias. *Actas XIV Jor. Hispano-Lusas, Vol. II, Univ. de La Laguna,* (1989), 595-590.

[15] P. Carrasco and A.M Cegarra. Group theoretic algebraic models for homotopy types. *J. Pure Appl. Algebra* **75** (1991), 195-235.

[16] C. Casacuberta, L.J. Hernández and J.L. Rodríguez. Models for torsion spaces. *Israel J. of Math.,* (1998).

[17] Z. Čerin. On various relative proper homotopy groups. *Tsukuba J. Math.* **4** (1980), 177-202.

[18] A. Dold. Homology of symmetric products and other functors of complexes. *Annal of Math*, **68** (1958), 54-80.

[19] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology.* Springer-Verlag, 1972.

[20] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier.* **11** (1961), 201-312.

[21] D. Edwards and H. Hastings. Čech *and Steenrod homotopy theories with applications to Geometric Topology.* Lect. Notes Math. **542** (Springer, 1976).

[22] S. Eilenberg and S. Mac Lane. On the groups $H(\prod, n)$, I. *Ann. of Math.* **58** (1953), 55-106.

[23] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton Univ. Press, 1952.

[24] C. Elvira. N-tipos y cohomotopía. *Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 2,* **51** (1995).

[25] C. Elvira and L.J. Hernández. Closed model categories for the n-type of spaces and simplicial sets. *Math. Proc. Camb. Phi. Soc.* **118** (1995), 93-103.

[26] J.I. Extremiana. Una teoría de obstrucción para la extensión y clasificación de aplicaciones propias. *Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 2,* **18** (1987).

[27] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. Proper CW complexes: A category for the estudy of proper homotopy. *Collectanea Math.* **39** (1988), 149-179.

[28] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. An isomorphism theorem of the Hurewicz type in the proper homotopy category. *Fund. Math.* **132** (1989), 195-214.

[29] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. A closed model category for $(n-1)$-connected spaces. *Math. Proc. of the A.M.S.* **124**, nº11, (1996), 3545-3553.

[30] J.I. Extremiana, L.J. Hernández and M.T. Rivas. Closed model categories for [n,m]-types. *Theory Appl. Categ.* **3**, nº10, (1997), 250-268.

[31] F.T. Farrell, L.R. Taylor and J.B. Wagoner. The Whitehead theorem in the proper category. *Compositio Math.* **27** (1973), 1-23.

[32] F.T. Farrel and J. Wagoner. Infinite matrices in algebraic K-theory and topology. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 474-501.

[33] F.T. Farrel and J. Wagoner. Algebraic torsion for infinite simple homotopy types. *Comm. Math. Helv.* **47** (1972), 502-513.

[34] S.C. Ferry. Remarks on Steenrod homology. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, and Index Theorems and Rigidity.* Vol 2, L.M.S. Lecture Notes **227**, 148-166, Cambridge (1995).

[35] H. Freudenthal. Über die Enden topologisher Räume und Gruppen. *Math. Zeith.* **53**, 692-713, (1931).

[36] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory.* Springer, Berlin (1966).

[37] J. García-Calcines, M. García-Pinillos and L. J. Hernández. A closed simplicial model category for proper homotopy and shape theories. *Bull. Austr. Math. Soc.* **57**, 221-242, (1998).

[38] M. García-Pinillos. El estudio del infinito a través del espacio exterior. *Univ. de La Rioja.* Tesis (1998).

[39] A.R. Garzón and J.G. Miranda. Homotopy theory for truncated weak equivalences of simplicial groups. *Math. Proc. Camb. Ph. Soc.* **121** nº1 (1997), 51-74.

[40] M. Golasiński and G. Gromadzki. The homotopy category of chain complexes is a homotopy category. *Coll. Math.* **XLVII** (1982), 173-178.

[41] J.W. Grossman. A homotopy theory of pro-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **201** (1975), 161-170.

[42] J.W. Grossman. Homotopy Groups of Pro-spaces. *Illinois J. Math.* **20** (1976), 622-625.

[43] A. Grothendieck. *Tecnique De Decente Et Theorems D'Existence En Geometrie Algebrique I-IV*, Seminar Bourbaki, Exp. 190, 195, 212, 221, 1959-60, 1960-61.

[44] L.J. Hernández. Applications of simplicial M-Sets to proper and strong shape theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347** (1995), 363-409.

[45] L.J. Hernández. Functorial and algebraic properties of Brown's $\mathcal{P}$ functor. *Theory and Applications of Categories.* Vol **1** (1995), 1-44.

[46] L.J. Hernández. Fundamental pro-grupoid and covering projections. *Fund. Math.* **156** (1998), 1-31.

[47] L.J. Hernández and T. Porter. Global analogues of the Brown-Grossman proper homotopy groups. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **104** (1988), 483-496.

[48] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra.* Springer GTM 4, New York, (1971).

[49] B. Hughes and A. Ranicki. *Ends of complexes.* Cambridge Univ. Press, 1996.

[50] D.M. Kan. A combinatorial definition of homotopy groups. *Ann. of Math.* **67** (1958), 282-312.

[51] D. M. Kan. On homotopy theory and C.S.S. groups. *Ann. of Math.* **68** (1958), 38-53.

[52] B. Kerékjárto. *Vorlesungen uber Topologie.* vol. 1, Springer-Verlag (1923).

[53] S. Lefschetz. *Topology.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. New York, 1930.

[54] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* (Springer-Verlag, 1971).

[55] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* (Springer-Verlag, 1991).

[56] W.S. Massey. *Singular homology theory.* GTM 70 Springer (1980).

[57] C.R.F. Maunder. *Algebraic Topology.* Van Nostrand (1970).

[58] J.P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology.* Van Nostrand, 1967.

[59] J. Milnor. On the Steenrod homology theory. *Proc. 1993 Oberwolfach Conf. on the Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity.* Vol 1, L.M.S. Lecture Notes **226**, 79-96, Cambridge (1995).

[60] J. Milnor. The geometric realization of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.* **65** (1957), 357-362.

[61] J.G. Miranda. Estructuras de modelos y teoría de homotopía en categorías de grupos y grupoides simpliciales. *Univ. de Granada.* Tesis (1995).

[62] J.C. Moore. *Seminar on algebraic homotopy theory.* Princeton (1956).

[63] E. Padrón and S. Rodríguez-Machín. Model-Additive categories. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, serie II,* **24** (1990), 465-474.

[64] B. Pareigis. *Categories and functors.* Academic Press, 1970.

[65] T. Porter. Stability Results for Topological spaces. *Math. Z.* **140** (1974), 1-21.

[66] T. Porter. Abstract homotopy theory in procategories. *Cahiers de topologie et geometrie differentielle*, vol. **17** (1976), 113-124.

[67] T. Porter. Proper homotopy theory. *Handbook of Algebraic Topology* (ch. 3) (1995), 127-167.

[68] D. Quillen. *Homotopical Algebra.* Lect. Notes in Math. **43** (Springer, 1967).

[69] D. Quillen. Rational Homotopy Theory. *Ann. of Math.* **90** (1969), 205-295.

[70] M.T. Rivas. Sobre invariantes de homotopía propia y sus relaciones. *Publ. del Sem. Mat. García de Galdeano, serie II, sección 2,* **17** (1987).

[71] S. Rodríguez-Machín. Homotopy theories in additive categories are homotopy of Δ-groups. *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, serie II,* **34** (1990), 47-57.

[72] L.C. Siebenmann. The obstruction of finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five. Thesis, 1965.

[73] L.C. Siebenmann. Infinite simple homotopy types. *Indag. Math.* **32** (1970), 479-495.

[74] E. Spanier. *Algebraic Topology.* Mc. Graw-Hill, 1966.

[75] N.E. Steenrod. Regular cycles of compact metric spaces. *Ann. of Maths.* **41** (1940), 833-851 .

[76] A. STRφM. The homotopy category is a homotopy category. *Arch. Math. (Basel)*. **23** (1972), 435-441.

[77] R.M. SWITZER. *Algebraic Topology, Homotopy and Homology*. Die Grundlehren der Matematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 212 (1971).

[78] S. WILLARD. *General Topology*. Addison-Wesley (1970).