Curso 1995/96

CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

TERESA DE JESÚS BERMÚDEZ DE LEÓN

Cálculos funcionales y teoría espectral local

Directores

MANUEL GONZÁLEZ ORTIZ

ANTONIO MARTINÓN CEJAS

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS

Serie Tesis Doctorales

La presente Memoria, para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas, ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, bajo la dirección del Dr. D. Manuel González Ortiz y Dr. D. Antonio Martinón Cejas.

A mis padres

Cuando entré en el Departamento de Análisis Matemático, tuve la fortuna de tener un ambiente agradable. Gracias a todos, en particular a Isabel.

Gracias Manuel González y Antonio Martinón. Siempre estaré en deuda con vosotros, por vuestra ayuda constante, buenas ideas y, sobre todo, por vuestra infinita paciencia. Si al final he conseguido que se me *pegue* algo de vuestro talante y vuestros métodos, todo este trabajo juntos habrá merecido más que la pena.

Gracias a toda la gente que ha hecho posible que funcione tan bien el correo electrónico, que ha sido una herramienta fundamental en este trabajo. Gracias a Antonio y Carlitos por haberme soportado con tanto garbo. Espero, en el futuro, no darles tanto la lata, con las funciones analíticas. Gracias Susana y Dachiana por vuestra hospitalidad en la Universidad de Cantabria. Gracias Angel, por la paciencia, comprensión y la ayuda en todo momento.

Gracias a mi familia, en particular a mi hermana que me metió en este lío de las Matemáticas.

Contenido

Introducción

La teoría espectral clásica aborda el estudio de las propiedades de los operadores lineales caracterizando su espectro y analizando el comportamiento del operador resolvente en los entornos del espectro. Una herramienta fundamental en esta teoría es el cálculo funcional holomorfo. Siguiendo a Dunford [17] y Taylor [50] el origen histórico se remonta al año 1896 con los trabajos pioneros de Frobenius [27]. El proceso de formalización y sistematización rigurosa arranca casi simultáneamente con el trabajo de Poincaré [41] en el que se define el cálculo funcional holomorfo para matrices de dimensión finita.

Dados un operador lineal y continuo T definido sobre un espacio de Banach complejo y f una función analítica compleja en un entorno del espectro del operador T, se define el operador $f(T)$ de este cálculo funcional, mediante la "fórmula integral de Cauchy"

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda$$

donde Γ es la frontera orientada de un dominio de Cauchy que contiene al espectro y está contenido en el dominio de la función f.

Uno de los problemas que frena inicialmente el desarrollo del cálculo funcional holomorfo es el significado de la analiticidad para las funciones con valores vectoriales. La clave para la solución de este problema la proporciona Wiener [54] en 1923, probando el Teorema de Cauchy para tales funciones. Sin embargo, el empleo de sus ideas no comenzó a generalizarse en la teoría espectral hasta 1937 cuando Stone [47] establece algunas propiedades sobre la analiticidad del operador resolvente en espacios de Hilbert y demuestra, aplicando el Teorema de Liouville, que el espectro de un operador lineal continuo no puede ser vacío. En trabajos posteriores, Taylor [48] extiende estos resultados a los espacios de Banach y Lorch [34] obtiene los primeros resultados sobre proyecciones espectrales. Finalmente, Taylor [49] clasifica en 1943 los diferentes tipos de singularidades aisladas de las funciones analíticas con valores en un espacio de Banach. En ese mismo año, Dunford [17], [18] caracteriza los polos del operador resolvente, aplicando resultados relacionados con el trabajo de Lorch anteriormente mencionado. De tal forma, en la primera mitad del presente siglo el cálculo funcional holomorfo de operadores continuos queda prácticamente establecido.

Siguiendo un curso de evolución natural comienza la generalización y extensión del trabajo inicial de Poincaré [41] concerniente al cálculo funcional holomorfo. Dos son las líneas de desarrollo seguidas: La primera consiste en ampliar la clase de operadores a los que se aplica el cálculo. En este sentido, Taylor [49], en 1951, desarrolla el cálculo funcional holomorfo para operadores lineales cerrados. La segunda forma consiste en ampliar la clase de funciones admisibles para el cálculo. En esta línea, Gindler [28], en 1966, define un cálculo funcional para operadores lineales continuos (incluso para operadores lineales cerrados) y funciones meromorfas en un entorno del espectro sin polos en el espectro puntual. Este cálculo funcional, denominado *cálculo funcional meromorfo*, fue desarrollado posteriormente por Nagy [40]. Su idea esencial se basa en la separación la parte analítica de la parte singular (la que contiene los polos de f en el espectro de T). Esto es, dado un operador lineal y continuo T definido sobre un espacio de Banach complejo y f una función del cálculo funcional meromorfo, se define el operador $f\{T\} := g(T)p(T)^{-1}$, siendo $f = g/p$, donde g es la parte analítica de la función y p es el polinomio de los polos.

Posteriormente Apostol [1], en 1968, define un cálculo funcional local para operadores lineales continuos que verifican la propiedad de extensión univaluada (abreviadamente SVEP) sobre un espacio de Banach complejo y para funciones analíticas en un entorno de algún subconjunto compacto del plano complejo. Dados T, una función analítica f en K (subconjunto compacto) y x un vector del espacio de Banach tal que

$\sigma(x,T)$ (el espectro local de T en x) esté contenido en K, Apostol [1] define el *cálculo funcional local* mediante

$$f[T]x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda,$$

donde $\widehat{x}_T$ es la función resolvente local de T en x y Γ es la frontera de un dominio de Cauchy que contiene al espectro local y está contenido en el dominio de la función f.

Radjabalipour [42], en 1978, prueba algunas propiedades de $f[T]x$. McGuire [38], en 1986, estudia propiedades relacionadas con la estabilidad del espectro local de $f[T]x$ para una clase bastante restringida de operadores: la de los lineales continuos con espectro puntual vacío, actuando en un espacio de Hilbert.

La definición de este cálculo funcional local se basa en la teoría espectral local, que tiene sus orígenes con los trabajos de Dunford [19] y [20]. A finales de los años 50 y en la década de los 60 algunos autores (Dollinger, Sine, Dunford, Colojoara, Foias, Vasilescu, Meyer-Nieberg, entre otros) desarrollan esta teoría. En años recientes la teoría espectral local ha sido estudiada principalmente por Bartle, Erdelyi, Kariotis, Lange, Laursen, Mbekhta, Neumann y Wang.

En esta tesis hemos obtenido algunos resultados sobre los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo relacionados con el espectro local que se encuentran recogidos en [5] y [6]. Además definimos de forma natural el operador $f[T]$ del cálculo funcional local, a partir de la definición de $f[T]x$, y demostramos en muchos casos que es precerrado (admite extensión cerrada). También vemos que $f[T]$ coincide con el operador asociado al cálculo funcional holomorfo $f(T)$ y es una restricción del operador asociado al cálculo funcional meromorfo $f\{T\}$ para las funciones f admisibles de estos cálculos. Los resultados obtenidos en esta memoria sobre el cálculo funcional local se encuentran recogidos en [6], [8] y [9]. Y por último estudiamos ciertos aspectos de la teoría espectral local recogidas en [6] , [7] y [9].

En el resto de esta Introducción, T es un operador lineal continuo sobre un espacio de Banach complejo.

La tesis consta de cuatro capítulos, cuyo contenido resumimos a continuación.

El **Capítulo primero** contiene resultados básicos y definiciones que se emplearán más adelante.

En el **Capítulo segundo** se recogen algunas propiedades del cálculo funcional holomorfo y se estudia el cálculo funcional meromorfo en relación con la teoría espectral local. Los resultados principales que se obtienen son:

1. El *Teorema de la aplicación espectral local* para el cálculo funcional meromorfo, es decir para T, $x \in X$ y f una función admisible para dicho cálculo, tenemos

$$f(\sigma(x,T)) = \sigma_\infty(x, f\{T\}),$$

donde $\sigma_\infty(x,T)$ es el espectro extendido local de T en x.

2. El *Teorema de estabilidad de la SVEP* para el cálculo funcional meromorfo: si f es admisible para el cálculo funcional meromorfo y T verifica la SVEP, entonces $f\{T\}$ verifica la SVEP. Y recíprocamente, si f es admisible para el cálculo funcional meromorfo y no es idénticamente nula en ninguna componente de su dominio que corte al espectro de T y $f\{T\}$ verifica la SVEP, entonces T también la verifica.

En el **Capítulo tercero** se introduce el cálculo funcional local, que denotamos por $f[T]$, para f una función cualquiera. Se dan algunas propiedades básicas. De forma diferente a lo que ocurre con los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo, este cálculo no genera (en general) operadores continuos, ni tan siquiera cerrados. Un punto aún abierto es la determinación de si $f[T]$ es siempre precerrado; es decir si posee una extensión cerrada. Se establecen algunas *condiciones suficientes para que $f[T]$ verifique* *ciertas propiedades* como ser continuo, cerrado, precerrado, de dominio cerrado, etc. El resultado más destacable de este capítulo es el *Teorema de la aplicación espectral local* para el cálculo funcional local: dados T y f una función analítica en $\triangle(f) \subset \mathbb{C}$, tenemos

$$f(\sigma(x,T)) = \sigma(x, f[T]),$$

para todo $x \in X$ tal que $\sigma(x,T) \subset \triangle(f)$.

En el **Capítulo cuarto** se establecen algunas propiedades del espectro local y de la función resolvente local, entre las que destacamos por su importancia las siguientes:

1. *La estabilidad del espectro local*: dados T y $x \in X$ se dan familias de vectores $y \in X$ tales que $\sigma(x,T) = \sigma(y,T)$, donde $y = f(T)x$, $y = f\{T\}x$ ó $y = f[T]x$, para ciertas funciones f y ciertos $x \in X$.

2. *La descomposición el espectro local*: dados T y $x \in X$, con $\sigma(x,T) = F_1 \cup F_2$, siendo F_i cerrados y disjuntos, entonces $x = x_1 + x_2$ tal que $\sigma(x_i,T) = F_i$ para $i = 1, 2$. Esta descomposición nos permite dar demostraciones diferentes de ciertos resultados sobre descomposición del espacio X.

3. *Algunas caracterizaciones de los polos de la función resolvente local.* Utilizando como herramienta principal las propiedades obtenidas sobre la estabilidad y descomposición del espectro local, se obtiene una caracterización de los polos de la función resolvente local, bastante similar a la conocida en el caso clásico. Motivados por la caracterización de los polos del operador resolvente relacionada con los operadores de cadena finita, se define operador *localmente de cadena finita*, obteniéndose algunos resultados interesantes.

4. *Las ecuaciones de la resolvente local.* Dichas ecuaciones plantean un primer problema sobre el significado del producto de vectores. Por ejemplo, la "primera ecuación de la resolvente" para el operador resolvente dice lo siguiente

$$(\lambda - T)^{-1} - (\mu - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - T)^{-1}(\mu - T)^{-1}.$$

Si intentamos reescribir dicha ecuación con la función resolvente local de T en x, que denotamos por $\widehat{x}_T$, resulta

$$\widehat{x}_T(\lambda) - \widehat{x}_T(\mu) = (\mu - \lambda)\widehat{x}_T(\lambda)\widehat{x}_(\mu),$$

pero ocurre que no tiene sentido la segunda parte de esta igualdad. Para poder dar las "ecuaciones de la función resolvente local" necesitamos tener una expresión diferente de la función resolvente local. Dicha expresión se obtiene por medio del cálculo funcional local definido en el Capítulo tercero.

5. *Los operadores de Neumann y el espectro local.* Damos algunas *relaciones de las series de Neumann con la teoría espectral local.* Para ello se define operador *localmente de Neumann* y se prueban resultados parecidos a los obtenidos con la teoría espectral clásica. Es decir, si 1 está en el conjunto resolvente local de T en x, o bien si 1 es un polo de la función resolvente local, entonces se tiene que T es un operador localmente de Neumann en x.

Finalmente incluimos la bibliografía, una tabla de símbolos y un índice analítico.

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo presentamos la notación y las definiciones básicas que se emplearán a lo largo de la memoria. Asímismo recogemos algunos resultados importantes que tienen puntos de contacto con nuestro trabajo posterior.

En la redacción de este capítulo se han tenido en cuenta los textos [14], [21], [23], [24], [29] y [51], entre otros.

I.1 Operadores en espacios de Banach

A lo largo de esta memoria X designará siempre un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y X^* su espacio dual. Como es habitual, $\|x\|$ designará la norma del vector $x \in X$. Siempre que hablemos de operadores nos referimos a operadores lineales.

Asociados a un operador $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$, donde $D(T)$ denota el *dominio de* T, se consideran los siguientes subespacios lineales:

$$N(T) := \{x \in D(T) \quad : \quad Tx = 0\} \subset X,$$

que es el *núcleo* de T,

$$R(T) := \{Tx \quad : \quad x \in D(T)\} \subset X,$$

que es el *rango* de T, y

$$G(T) = \{(x, Tx) \quad : \quad x \in D(T)\} \subset X \times X,$$

que es el *grafo de* T.

Denotaremos por $C(X)$ la clase de operadores $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ cerrados (es decir, con grafo cerrado).

Dado un operador T con dominio denso, se define el *operador adjunto* $T^* : D(T^*) \subset X^* \longrightarrow X^*$ mediante $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$ para $x \in D(T)$ e $y^* \in D(T^*)$, donde el dominio del operador T^* está definido por

$$D(T^*) := \{y^* \in X^* \ \ : \ \ y^* \circ T \text{ es continuo en } D(T)\}.$$

Dados los operadores T y S, si $D(T) \subset D(S)$ y Ty S coinciden para cualquier vector de $D(T)$, entonces se dice que el operador T es una *restricción* de S, y lo denotaremos por $T \subset S$.

El operador I es la identidad sobre X $\ (Ix = x)$ y 0 es el operador nulo $(0x = 0)$.

Dado un operador T y un número complejo λ, para aligerar la notación escribiremos $\lambda - T$ en lugar de $\lambda I - T$.

Si un operador cerrado tiene dominio cerrado, entonces el operador es continuo (por el Teorema del grafo cerrado). A la clase de los operadores continuos definidos en todo X la denotaremos por $L(X)$. Es bien conocido que $L(X)$ tiene estructura de álgebra de Banach con las operaciones usuales. La norma del operador $T \in L(X)$ se simbolizará por $\|T\|$ y está definida de la siguiente forma

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad .$$

Denotaremos por H un espacio de Hilbert complejo y lo identificaremos con su dual H^*.

Definición I.1.1 Diremos que un operador $T \in L(H)$ es:

1. *normal* si $\|Tx\| = \|T^*x\|$, para todo $x \in H$.

2. *hiponormal* si $\|Tx\| \leq \|T^*x\|$, para todo $x \in H$.

Obviamente los operadores normales son hiponormales.

I.2 El operador resolvente y la función resolvente local

A continuación presentamos algunas definiciones fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Definición I.2.1 Sea $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal. El *conjunto resolvente* de T es el conjunto $\rho(T)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda - T$ tiene el rango denso en X y tiene inverso continuo. Para $\lambda \in \rho(T)$, al operador $(\lambda - T)^{-1}$ que denotaremos por $R(\lambda, T)$, lo llamaremos *operador resolvente.*

El *espectro* de T es el conjunto $\sigma(T)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ que no se encuentran en $\rho(T)$, es decir $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Si el operador T es cerrado entonces, el hecho de que $\lambda - T$ tenga inverso continuo es equivalente a que $R(\lambda - T)$ sea cerrado. En particular, si $\lambda \in \rho(T)$ tenemos $R(\lambda, T) \in L(X)$. Además el conjunto resolvente de T es abierto, y por tanto el espectro es cerrado.

Definición I.2.2 El *espectro puntual* de T es el conjunto $\sigma_p(T)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda - T$ no es inyectivo. Los escalares de este conjunto se denominan *autovalores de* T. Los vectores $x \in X \setminus \{0\}$ tales que $(\lambda - T)x = 0$, se denominan *autovectores de* T asociados al autovalor λ.

Un punto fundamental para la definición de los cálculos funcionales es la analiticidad del operador $R(., T) : \rho(T) \longrightarrow L(X)$ en el caso en que T es cerrado, se deduce inmediatamente de la primera ecuación de la resolvente

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

En el caso de $T \in L(X)$, se cumple que $\sigma(T) \neq \varnothing$ (por el Teorema de Liouville). Además $\sigma(T)$ está acotado ya que el operador resolvente es analítico en un entorno del infinito, luego el espectro es compacto.

De lo anterior se sigue que fijados $T \in C(X)$ y $x \in X$, se cumple que la función vectorial definida por

$$R(.,T)x : \rho(T) \longrightarrow D(T)$$

es analítica y verifica

$$(\lambda - T)R(\lambda, T)x = x,$$

para todo $\lambda \in \rho(T)$. La posibilidad de extender analíticamente la función $R(.,T)x$ da lugar a la definición de la función resolvente local de un operador T en el vector x, de la siguiente forma.

Definición I.2.3 Sea T un operador lineal y $x \in X$. El *conjunto resolvente local de T en x*, que denotamos $\rho(x,T)$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que existe una función analítica $u_x : U_\lambda \longrightarrow D(T)$, definida en un entorno U_λ de λ, que verifica

$$(\mu - T)u_x(\mu) = x, \text{ para todo } \mu \in U_\lambda. \tag{I.2.1}$$

Cualquier función u_x se denomina *función T-asociada con x (en λ)* o simplemente *función resolvente local de T en x (en λ)* .

El *espectro local de T en x* es el conjunto $\sigma(x,T)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que no se encuentran en $\rho(x,T)$, es decir $\sigma(x,T) := \mathbb{C} \setminus \rho(x,T)$.

Claramente el conjunto $\rho(x,T)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y por tanto $\sigma(x,T)$ es cerrado. Y para T cerrado, $\rho(T)$ es un subconjunto de $\rho(x,T)$. Luego $\sigma(x,T) \subset \sigma(T)$, para todo $x \in X$.

No siempre existe una extensión analítica de la función $R(.,T)x$ para valores del espectro.

Recordemos que un operador continuo, se dice que es *cuasinilpotente* si el espectro está formado sólo por el cero.

Ejemplo I.2.1 *Operador $T \in L(X)$ tal que $\sigma(x,T) = \sigma(T)$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$.*

Cualquier operador cuasinilpotente, verifica que $\sigma(x,T) = \sigma(T) = \{0\}$ para todo $x \in X$ distinto de cero (ver Sección I.4 y I.5).

Es lógico plantearse, si existen operadores $T \in L(X)$ tal que $\sigma(T) \neq \sigma(x,T)$ para todo $x \in X$. La siguiente proposición da una respuesta negativa.

Proposición I.2.1 *[53, Theorem 1.5] Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Entonces el conjunto*

$$\{x \in X \;\; : \;\; \sigma(x,T) = \sigma(T)\}$$

es un conjunto de segunda categoría en X.

Pueden existir varias funciones analíticas que verifiquen (I.2.1). Incluso puede ocurrir que el espectro local de T en x, para T continuo, sea vacío (ver [26]). Para resolver estas situaciones se define una propiedad adicional.

Definición I.2.4 Dado $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, se dice que el operador T verifica *la propiedad de extensión univaluada en* λ_0 si para todo entorno U de λ_0 la única función analítica $u : U \longrightarrow X$ tal que

$$(\lambda - T)u(\lambda) = 0, \quad \text{para todo } \lambda \in U,$$

es $u = 0$. Se dice que T verifica *la propiedad de extensión univaluada* (abreviadamente T verifica la SVEP, "Single Valued Extension Property") si verifica esta propiedad en todo punto $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Observación I.2.1 Obviamente, para $\lambda \in \rho(T)$ el operador T verifica la SVEP en λ_0.

La siguiente proposición garantiza que la SVEP equivale a la unicidad de la función resolvente local, cuya demostración es inmediata.

Proposición I.2.2 *Una condición necesaria y suficiente para que T verifique la SVEP es que para todo $x \in X$ la función resolvente local sea única.*

Si el operador T verifica la SVEP, entonces a la función resolvente local de T en x la denotaremos por $\widehat{x}_T$.

I.3 Subespacios invariantes

Sean $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ un operador cerrado. Se dice que Y es un *subespacio invariante de* T si $Ty \in Y$, para todo $y \in Y \cap D(T)$. A dicha clase de subespacios la denotaremos por $Inv(T)$.

Dado $Y \in Inv(T)$, se definen los siguientes operadores

$$\begin{array}{rcl} T|Y : D(T) \cap Y \subset Y & \longrightarrow & Y \\ y & \longrightarrow & Ty, \end{array}$$

denominado *operador restricción de* T *a* Y, y

$$\begin{array}{rcl} T/Y : D(T/Y) \subset \dfrac{X}{Y} & \longrightarrow & \dfrac{X}{Y} \\ x+Y & \longrightarrow & Tx+Y, \end{array}$$

denominado *operador cociente de* T *a* Y, donde

$$D(T/Y) = \{x+Y \ : \ (x+Y) \cap D(T) \neq \varnothing\}.$$

Para un subespacio $Y \in Inv(T)$, en general no se verifican relaciones de inclusión entre los espectros de los operadores T y $T|Y$, ni tampoco entre T y T/Y. Una cuestión de interés es conocer bajo qué condiciones existen tales relaciones, así como entre los espectros locales. A continuación veremos algunas propiedades de ciertos subespacios invariantes, que serán necesarias posteriormente para estudiar algunas cuestiones de los cálculos funcionales meromorfo y local.

Definición I.3.1 Sea T un operador cerrado. Se dice que un subespacio $Y \in Inv(T)$ es un *ν-espacio de* T si

$$\sigma(T|Y) \subset \sigma(T). \tag{I.3.2}$$

El siguiente ejemplo demuestra que no todos los subespacios invariantes son ν-espacios.

Ejemplo I.3.1 *Subespacio invariante que no es un ν-espacio.*

Sea T definido de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{Z}) \\ e_n & \longrightarrow & e_{n+1} \end{array}$$

donde $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ denota la base canónica de $\ell_2(\mathbb{Z})$, y sea $Y = \ell_2(\mathbb{N})$. Por [16, Example 1.32] se cumple que

$$\sigma(T) = \partial\mathbb{D} \text{ y } \sigma(T|\ell_2(\mathbb{N})) = \overline{\mathbb{D}},$$

donde $\mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}$, y $\partial\mathbb{D}$ y $\overline{\mathbb{D}}$ son la frontera y la clausura de $\mathbb{D}$ respectivamente. Con lo que $\ell_2(\mathbb{N})$ es un subespacio invariante de T que no es un ν-espacio. $\square$

Se cumple que si T es un operador cerrado que verifica la SVEP e $Y \in Inv(T)$, entonces

$$\sigma(y, T) \subset \sigma(y, T|Y), \tag{I.3.3}$$

para todo $y \in Y$ [24, Proposition 4.6]. Sin embargo la inclusión contraria no es siempre cierta. A continuación se define una clase de subespacios invariantes para los que se obtiene la igualdad.

Definición I.3.2 Sea T un operador cerrado que verifica la SVEP. Se dice que $Y \in Inv(T)$ es un *μ-espacio de T* si

$$\sigma(y, T) = \sigma(y, T|Y)$$

para todo $y \in Y$.

Proposición I.3.1 *[24, Proposition 4.8] Sean $T \in C(X)$ un operador que verifica la SVEP e $Y \in Inv(T)$. Entonces Y es un μ-espacio de T si y sólo si se verifica la siguiente inclusión*

$$\{\widehat{y}_T(\lambda) : \ \lambda \in \rho(y, T), \ y \in Y\} \subset Y.$$

Definición I.3.3 Sean T un operador cerrado e $Y \in Inv(T)$. Se dice que Y es un subespacio *analíticamente invariante por T* (abreviadamente $Y \in AI(T)$), si para cualquier función analítica $u : \triangle(u) \longrightarrow D(T)$ la condición $(\lambda - T)u(\lambda) \in Y$ para todo $\lambda \in \triangle(u)$, implica que $u(\lambda) \in Y$ para todo $\lambda \in \triangle(u)$.

Proposición I.3.2 *[24, Proposition 4.14] Sean $T \in C(X)$ e $Y \in Inv(T)$ tal que $Y \subset D(T)$. Entonces*

$$Y \in AI(T) \Longleftrightarrow T/Y \text{ verifica la SVEP.}$$

Definición I.3.4 Sean $T \in C(X)$ e $Y \in Inv(T)$. Se dice que Y es T-*absorbente* si dados $y \in Y$ y $\lambda \in \sigma(T|Y)$, la ecuación

$$(\lambda - T)x = y$$

tiene todas las soluciones x en Y.

Utilizando las definiciones de las diferentes clases de subespacios, se obtienen las siguientes implicaciones.

Proposición I.3.3 *Sea $T \in C(X)$ un operador que verifica la SVEP. Entonces*

$$Y\ T\text{-absorbente} \Rightarrow Y \in AI(T) \Rightarrow Y\ \mu-\text{espacio} \Rightarrow Y\ \nu-\text{espacio} \Rightarrow Y \in Inv\ (T).$$

En la siguiente proposición se muestra la relación entre $\sigma(T)$, $\sigma(T|Y)$ y $\sigma(T/Y)$, para $T \in L(X)$ y cualquier subespacio $Y \in Inv(T)$.

Proposición I.3.4 *[23, Proposition 1.14] Sean $T \in L(X)$ e $Y \in Inv(T)$. Entonces*

$$\sigma(T) \subset \sigma(T|Y) \cup \sigma(T/Y) \tag{I.3.4}$$

$$\sigma(T|Y) \subset \sigma(T) \cup \sigma(T/Y) \tag{I.3.5}$$

$$\sigma(T/Y) \subset \sigma(T|Y) \cup \sigma(T). \tag{I.3.6}$$

I.4 La SVEP

En los últimos años han aparecido diversos trabajos que estudian condiciones necesarias y suficientes para que ciertas clases de operadores verifiquen la SVEP: [13], [23], [24], [25]. A continuación recopilamos algunos de estos resultados.

Proposición I.4.1 *Sea $T : D(T) \longrightarrow X$ un operador cerrado. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) [25, Theorem 2] Si T es un operador sobre y no inyectivo, entonces T no verifica la SVEP (concretamente no la verifica en $\lambda = 0$).

(ii) Si el interior de $\sigma_p(T)$ es vacío, entonces T verifica la SVEP.

El recíproco de la parte (ii) de la proposición anterior no es cierto en general como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.4.1 *Operador que verifica la SVEP y que el interior del espectro puntual es no vacío.*

Sea $B(\overline{\mathbb{D}})$ el espacio de Banach de las funciones complejas acotadas en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ y sea T el operador multiplicación definido en $B(\overline{\mathbb{D}})$ por $Tx = hx$, donde $h(\lambda) = \lambda$. Es claro que $\sigma_p(T) = \overline{\mathbb{D}}$. Sea $v : \triangle(v) \subset \mathbb{C} \longrightarrow B(\overline{\mathbb{D}})$ una función analítica que verifica

$$(\mu - T)v(\mu) = 0,$$

para todo $\mu \in \triangle(v)$. Entonces

$$(\mu - \lambda)v(\mu)(\lambda) = 0,$$

para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$. Luego

$$v(\mu)(\lambda) = \begin{cases} 0 & \mu \neq \lambda \\ C_\mu & \mu = \lambda. \end{cases}$$

Si algún $C_\mu \neq 0$, entonces la aplicación $\mu \longrightarrow v(\mu)(\lambda)$ no es continua en la variable μ, por lo tanto no es analítica. Luego $v = 0$, con lo que se demuestra que T verifica la SVEP. $\square$

Ejemplos de operadores con y sin la SVEP

Por la parte (ii) de la Proposición I.4.1 se cumple que todo operador cerrado con interior del espectro puntual vacío, verifica la SVEP. En particular, los operadores compactos, cuasinilpotentes, etc.

Ejemplo I.4.2 *Operador que no verifica la SVEP.*

Sea T definido en $\ell_2(\mathbb{N})$ por:

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) & \longrightarrow & (x_2, x_3, x_4, \ldots). \end{array}$$

Es claro que T es sobre y no inyectivo, por lo tanto aplicando la Proposición I.4.1 se obtiene que T no verifica la SVEP (en particular en $\lambda = 0$). Veamos la expresión de una función resolvente local de T en 0, que denotaremos por u_0. Si definimos u_0 por $u_0(\lambda) := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$, se cumple que u_0 es analítica para $|\lambda| < 1$, $u_0(\lambda) \neq 0$ y además $(\lambda - T)u_0(\lambda) = 0$. $\square$

Observación I.4.1 De [26] se sigue que los operadores que no verifican la SVEP, actúan de forma parecida al operador del ejemplo anterior.

Estabilidad de la SVEP

El conjunto de los operadores lineales cerrados que verifican la SVEP no tiene buenas propiedades algebraicas. Concretamente:

- La suma de operadores que verifican la SVEP no verifica necesariamente la SVEP [15].

- Sean T y S operadores cerrados que verifican la SVEP. Esto no implica que ST verifique necesariamente la SVEP, como prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo I.4.3 *Operadores T y S que verifican la SVEP y ST no la verifica.*

Sean T y S los operadores definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) &\longrightarrow (x_2, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{3}, \ldots), \\ S : D(S) \subset \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) &\longrightarrow (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots), \end{aligned}$$

donde el dominio del operador S viene dado por

$$D(S) = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N}) \quad : \quad (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots) \in \ell_2(\mathbb{N})\}.$$

El operador T es compacto, luego verifica la SVEP. Por otra parte $\sigma_p(S) = \mathbb{N}$. Con lo que se deduce que S verifica la SVEP. Sin embargo, ST, que es el operador traslación a la izquierda, no verifica la SVEP. $\Box$

Observación I.4.2 Si T y S conmutan y verifican la SVEP, entonces TS no puede ser no inyectivo y sobre. Ya que si TS fuese no inyectivo y sobre, entonces T ó S no es inyectivo. Supongamos que T no es inyectivo. Luego como TS es sobre se tiene que T es sobre, por tanto T no verifica la SVEP.

En relación con las propiedades topológicas del conjunto de operadores continuos que satisfacen la SVEP, se tiene que es cerrado con una topología denominada “topología de perturbación” (para más detalles ver [1]). Sin embargo, dicho conjunto no es necesariamente cerrado con la norma de $L(X)$ [15, Example 3].

Relación entre la SVEP de los operadores T, $T|Y$, T/Y

Sean $T \in C(X)$ e Y un subespacio invariante por T. El hecho de que el operador T verifique la SVEP se encuentra íntimamente relacionado con que los operadores $T|Y$ y T/Y verifiquen la SVEP para cierta clase de subespacios Y, tal y como garantiza la siguiente proposición.

Proposición I.4.2 *Sean $T \in C(X)$ e $Y \in Inv(T)$. Entonces* *(i)* T *verifica la SVEP* $\Rightarrow T|Y$ *verifica la SVEP.*

(ii) [24, Proposition 4.14] Sea $Y \subset D(T)$*. Entonces*

$$T/Y \text{ verifica la SVEP} \Longleftrightarrow Y \in AI(T).$$

(iii) $\left.\begin{array}{c} T|Y \text{ verifica la SVEP} \\ \\ T/Y \text{ verifica la SVEP} \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ verifica la SVEP}$

Demostración:

(iii) Sea $u : \triangle(u) \subset \mathbb{C} \longrightarrow D(T)$ analítica tal que

$$(\lambda - T)u(\lambda) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \triangle(u),$$

luego

$$(\lambda - T/Y)(u(\lambda) + Y) = Y \text{ para todo } \lambda \in \triangle(u).$$

Por tanto, ya que $u(.) + Y$ es analítica y T/Y verifica la SVEP, resulta que $u(\lambda) + Y = Y$ para todo $\lambda \in \triangle(u)$; esto es, $u(\lambda) \in Y$. Además, se verifica que

$$(\lambda - T)u(\lambda) = (\lambda - T|Y)u(\lambda) = 0.$$

Consecuentemente $u(\lambda) = 0$, ya que $T|Y$ verifica la SVEP. □

El recíproco de (i) no se cumple en general, ya que si tomamos por T el operador del Ejemplo I.4.2 e Y es el subespacio generado por e_1, entonces es claro que $T|Y = 0$, que verifica la SVEP, y sin embargo T no la verifica.

Analizando la relación entre la SVEP de los operadores T y T/Y se tiene que en general son independientes, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.4.4 *Operador* T *que verifica la SVEP y* T/Y *no verifica la SVEP.*

Sean T el operador definido de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{Z}) \\ e_n & \longrightarrow & e_{n+1} \end{array}$$

e Y el subespacio generado por el vector de la base canónica e_2. Teniendo en cuenta que $\sigma(T) = \partial\mathbb{D}$ (Ejemplo I.3.1) y la parte (ii) de la Proposición I.4.1 resulta que T verifica la SVEP. Si definimos

$$u(\mu) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mu^{n-1}} e_n,$$

entonces u es una función analítica para $|\mu| > 1$ tal que $u(\mu) \in \ell_2(\mathbb{Z}) \setminus Y$ y

$$(\mu - T)u(\mu) = e_2 \in Y.$$

Por tanto Y no es un subespacio analíticamente invariante, es decir T/Y no verifica la SVEP. $\square$

Observación I.4.3 El operador adjunto, en general, no hereda la SVEP; esto es:

$$T \text{ verifica la SVEP} \nRightarrow T^* \text{ verifica la SVEP.}$$

Por ejemplo, el operador T definido de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) & \longrightarrow & (0, x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$

verifica la SVEP, ya que $\lambda - T$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sin embargo, su adjunto, definido por

$$\begin{array}{rcl} T^* : \ell_2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) & \longrightarrow & (x_2, x_3, x_4, \ldots) \end{array}$$

no verifica la SVEP (ver el Ejemplo I.4.2). Tampoco se cumple, en general, la implicación recíproca, esto es:

$$S^* \text{ verifica la SVEP } \nRightarrow S \text{ verifica la SVEP.}$$

Para ello basta tomar $S = T^*$ y $S^* = T$, siendo T el definido más arriba.

La propiedad (C)

Se define, para todo conjunto $G \subset \mathbb{C}$, *la variedad espectral de T asociada a G* de la siguiente forma

$$X(T, G) := \{x \in X \quad : \quad \sigma(x, T) \subset G\}.$$

Es fácil ver que $X(T, G)$ es un subespacio vectorial para todo conjunto $G \subset \mathbb{C}$ (véanse las partes (ii) y (iii) de la Proposición I.5.1).

En general, para un operador T continuo y F un conjunto cerrado del plano complejo, la variedad espectral $X(T, F)$ no es necesariamente cerrada [14, Example 3.9].

Definición I.4.1 Un operador cerrado $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ se dice que verifica la *propiedad (C)* si para todo conjunto F cerrado de $\mathbb{C}$ se verifica que $X(T, F)$ es cerrado en X.

Se han considerado otras propiedades, tales como 1-SDP y β, que son suficientes para que se cumpla la propiedad (C) [24, Corollary 5.9, Proposition 5.6], aunque aquí no las estudiaremos.

En el siguiente teorema se garantiza que la propiedad (C) es suficiente para que se verifique la SVEP, para operadores continuos.

Teorema I.4.1 *[42, Theorem 2.13] Sea $T \in L(X)$. Si T verifica la propiedad (C), entonces T verifica la SVEP.*

Colojoara y Foias [14, Example 3.9] muestran con un ejemplo que el recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir la propiedad (C) no es necesaria para la SVEP.

Todo operador normal T en un espacio de Hilbert tiene asociada una única *medida espectral E*, también denominada *resolución de la identidad* [22, Corollary X.2.4], que asigna a cada subconjunto U de Borel de $\sigma(T)$ una proyección $E(U) \in L(H)$. Dados U, V conjuntos de Borel, entonces E tiene las siguientes propiedades:

1. $E(U \cap V) = E(U)E(V)$.

2. $E(U \cup V) = E(U) + E(V) - E(U)E(V)$.

3. $E(\sigma(T)) = I$.

4. $E(\varnothing) = 0$.

5. $E(U)T = TE(U)$.

6. $\sigma(T|R(E(U))) \subset \overline{U}$.

7. E es contablemente aditiva, es decir para toda sucesión $\{U_n\}$ de conjuntos de Borel disjuntos dos a dos se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(U_n)x = E(\cup_{n=1}^{\infty} U_n)x, \quad \text{para } x \in H.$$

En la siguiente proposición se recogen dos propiedades que serán de utilidad más adelante.

Proposición I.4.3 *(i) [11, Theorem 2] Todo operador hiponormal (en particular, todo operador normal) verifica la propiedad (C). Por tanto también la SVEP.*

(ii) [12, Theorem 3.3] Si $T \in L(H)$ es normal y $\delta \subset \mathbb{C}$ es cerrado, entonces

$$H(T, \delta) = \cap_{\lambda \notin \delta} R(\lambda - T) = R(E(\delta \cap \sigma(T))),$$

donde E es la resolución de la identidad de T.

Veamos las relaciones entre la propiedad (C) de los operadores T y $T|Y$.

Proposición I.4.4 *Sean $T \in L(X)$ e Y un μ-espacio del operador T. Si T satisface la propiedad (C), entonces $T|Y$ también la satisface.*

Demostración:

Sea F un conjunto cerrado arbitrario de $\mathbb{C}$. Por ser Y un μ-espacio tenemos

$$Y(T|Y,F) = Y \cap X(T,F).$$

Luego $X(T,F)$ cerrado en X implica que $Y(T|Y,F)$ es cerrado en Y. □

I.5 Propiedades del espectro local

Dollinger y Oberai presentan en [15, Lemma 1.3, Lemma 1.4] algunas propiedades del espectro local para operadores continuos, que pueden ser extendidas fácilmente para operadores cerrados [24]. A continuación exponemos una selección de estas propiedades que se utilizarán a lo largo de esta tesis.

Proposición I.5.1 *Sean $T \in C(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x, y \in X$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\sigma(x,T) = \varnothing \Longleftrightarrow x = 0$;

(ii) $\sigma(\lambda x,T) = \sigma(x,T)$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(iii) $\sigma(x+y,T) \subset \sigma(x,T) \cup \sigma(y,T)$;

(iv) si existe $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $(\lambda - T)^n x = 0$ *con* $x \neq 0$, *entonces* $\sigma(x,T) = \{\lambda\}$;

(v) $\sigma(\widehat{x}_T(\lambda),T) = \sigma(x,T)$ *para todo* $\lambda \in \rho(x,T)$;

(vi) $\sigma(T) = \bigcup_{x \in X} \sigma(x,T)$;

(vii) si $A \in L(X)$ *conmuta con* T, *entonces* $\sigma(Ax,T) \subset \sigma(x,T)$, *para todo* $x \in X$;

(viii) sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *autovectores de* T *correspondientes a autovalores distintos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *respectivamente. Si* $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n$ *con* $\lambda_i \neq 0$, *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces* $\sigma(x,T) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Observación I.5.1 En general, el recíproco del apartado (iv) es falso. Por ejemplo, cualquier operador cuasinilpotente inyectivo. Afortunadamente, para ciertas clases de operadores que serán de utilidad en el Capítulo IV, se cumple el recíproco.

Mbekhta prueba [35, Lemme 3.1.5] que el recíproco es cierto para operadores hiponormales. Posteriormente, K. Laursen [33, Corollary 4.8] prueba que los operadores totalmente paranormales verifican también el recíproco de (iv).

Recordemos que un operador $T \in L(X)$ se dice *totalmente paranormal* si

$$\|(\lambda - T)x\|^2 \leq \|(\lambda - T)^2 x\| \|x\| \text{ para todo } x \in X \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}.$$

En los apartado (ii) y (v) de la proposición anterior se recogen algunos resultados sobre la estabilidad del espectro local. Es decir, dado x encontramos vectores y tales que $\sigma(x, T) = \sigma(y, T)$. En este sentido Bartle [2, Remark 1.5] prueba la siguiente propiedad.

Proposición I.5.2 *Sean $T \in L(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in X$. Entonces*

$$\sigma((\alpha - T)x, T) \subset \sigma(x, T) \subset \sigma((\alpha - T)x, T) \cup \{\alpha\}.$$

Las variedades espectrales cerradas tienen buenas propiedades, como se recoge en la siguiente Proposición.

Proposición I.5.3 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $F \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado. Si $X(T, F)$ es cerrado, entonces $X(T, F)$ es un μ-espacio de T.*

Demostración:

Resulta claro que $X(T, F)$ es invariante de T. El resultado es consecuencia inmediata de la parte (v) de la Proposición I.5.1 y la Proposición I.3.1. $\square$

En la siguiente proposición se recoge una caracterización de los escalares que se encuentran en el conjunto resolvente local.

Proposición I.5.4 *[24, Theorem 2.2] Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, $x \in X \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha \in \rho(x,T)$ si y sólo si existe un número $R > 0$ y una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$ tal que*

(i) $(\alpha - T)x_0 = x$;

(ii) $(\alpha - T)x_k = x_{k-1},$ *para* $k \geq 1$ *;*

(iii) $\|x_k\| \leq R^k$, *para* $k \geq 0$.

Además si $\alpha \in \rho(x,T)$, entonces $\widehat{x}_T(\lambda) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k(\alpha - \lambda)^k$.

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior, es el siguiente resultado.

Corolario I.5.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X \setminus \{0\}$. Si $\alpha \in \rho(x,T)$, entonces $x \in R(\alpha - T)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Dados $T \in L(X)$ y $x \in X$, entonces $\sigma(T)$ y $\sigma(x,T)$ son conjuntos acotados del plano complejo. Sin embargo, si el operador T es cerrado con $D(T) \neq X$, entonces se define el *espectro extendido* como $\sigma_\infty(T) := \sigma(T) \cup \{\infty\}$. A continuación damos una definición de $\rho_\infty(x,T)$.

Definición I.5.1 *[52]* Sea T un operador lineal. Se define el *conjunto resolvente local extendido de T en x* como el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal que existe un entorno U_λ de λ y una función $u_x : U_\lambda \to D(T)$ analítica tal que verifica

$$(\mu - T)u_x(\mu) = x, \text{ para todo } \mu \in U_\lambda \cap \mathbb{C}.$$

A dicho conjunto lo denotamos por $\rho_\infty(x,T)$ y el conjunto $\sigma_\infty(x,T) := \mathbb{C}_\infty \setminus \rho_\infty(x,T)$ se denomina el *espectro local extendido de T en x.*

En la siguiente proposición se estudia el comportamiento de la función resolvente local en el ∞.

Proposición I.5.5 *Sea T un operador cerrado que verifica la SVEP, con $\rho(T)$ distinto de vacío. Si $\infty \notin \sigma_\infty(x,T)$, entonces $\widehat{x}_T$ tiene un cero de orden uno en ∞.*

Demostración:

Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$. En [52, Proposition 2.2] se demuestra que si $\infty \notin \sigma_\infty(x,T)$, entonces

$$w(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n (\lambda_0 - T)^{n+1} x$$

es una función analítica en $\lambda = 0$. Además

$$(\lambda + (\lambda_0 - T)^{-1}) w(\lambda) = x.$$

Luego

$$(\lambda(\lambda_0 - T) + I)(\lambda_0 - T)^{-1} w(\lambda) = x,$$

y haciendo el cambio de variable $\lambda := (\mu - \lambda_0)^{-1}$, resulta que

$$\left(\frac{1}{\mu - \lambda_0} (\lambda_0 - T) + I \right) (\lambda_0 - T)^{-1} w \left(\frac{1}{\mu - \lambda_0} \right) = x,$$

luego

$$(\mu - T)(\lambda_0 - T)^{-1} \frac{1}{\mu - \lambda_0}\, w \left(\frac{1}{\mu - \lambda_0} \right) = x.$$

Con lo que resulta que

$$\widehat{x}_T(\mu) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_0 - \mu} \right)^{n+1} (\lambda_0 - T)^n x,$$

y por tanto es claro que $\widehat{x}_T$ tiene un cero de orden 1 en el infinito. □

Capítulo II

Los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo

En este capítulo recogemos algunos resultados conocidos de los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo. Además presentamos propiedades nuevas del cálculo funcional meromorfo, análogas a propiedades ya conocidas para el cálculo funcional holomorfo, obteniendo algunos resultados nuevos tales como el Teorema de la aplicación espectral local, la estabilidad de la SVEP y ciertas relaciones entre $f\{T\}$ **,** $f\{T|Y\}$ **y** $f\{T/Y\}$**.**

II.1 El cálculo funcional holomorfo

Sean X un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$. Denotaremos por $A(T)$ la clase de las funciones complejas $f : \triangle(f) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifican las siguientes condiciones:

(a) $\triangle(f)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $\sigma(T) \subset \triangle(f)$.

(b) f es analítica en $\triangle(f)$.

Si $f \in A(T)$ diremos que f es *analítica sobre* $\sigma(T)$.

Definición II.1.1 Un conjunto D del plano complejo se llama *dominio de Cauchy* si :

1. D es un abierto,

2. tiene un número finito de componentes y
3. la frontera de D está formada por un número finito de curvas rectificables cerradas simples, que no se intersectan dos a dos.

Dados $T \in L(X)$ y $f \in A(T)$, se define el operador $f(T) : X \longrightarrow X$ de la siguiente forma:

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda \ , \tag{II.1.1}$$

donde Γ es la frontera positivamente orientada de cualquier dominio de Cauchy acotado D, tal que

$$\sigma(T) \subset D \subset \overline{D} \subset \triangle(f).$$

Se tiene que $f(T) \in L(X)$, es decir $f(T)$ es un operador continuo y definido en todo X. Además está bien definido, es decir no depende de la elección del dominio D. Una descripción más detallado puede encontrarse en [51, pág. 310 y ss.].

Dos funciones $f, g \in A(T)$ que coinciden en un entorno de $\sigma(T)$ se dice que son *equivalentes respecto a* T. Se obtiene así una relación de equivalencia en $A(T)$ cuyo conjunto cociente denotaremos por $\mathcal{A}\ (T)$. Resulta claro que si f y g son equivalentes respecto a T, entonces $f(T) = g(T)$.

La anterior definición nos permite obtener un homomorfismo del álgebra $\mathcal{A}(T)$ (en la que se definen las operaciones de forma natural) en el álgebra $L(X)$:

$$f \in \mathcal{A}(T) \longrightarrow f(T) \in L(X).$$

Nos referiremos a este homomorfismo llamándolo *cálculo funcional holomorfo*. Algunos autores, como Radjabalipour [42] y Taylor [51], lo denominan *cálculo funcional de Dunford-Riesz*.

Este cálculo funcional ha sido ampliamente estudiado y en particular se puede encontrar en [16], [21] y [51]. A continuación recopilamos una serie de resultados que serán de utilidad posteriormente.

Proposición II.1.1 *Sean $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{A}(T)$. Entonces*

1. *[51, V.8, pág 311] Si $S \in L(X)$ conmuta con T, entonces S también conmuta con $f(T)$.*

2. *[16, Theorem 1.19] Si f tiene una expresión en serie de potencias de la forma $f(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$, válida en un entorno de $\sigma(T)$, entonces $f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$.*

3. *[16, Theorem 1.27] Sea $N \in L(X)$ un operador cuasinilpotente que conmuta con T. Entonces $\sigma(T+N) = \sigma(T)$. Además*
$$f(T+N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\lambda^n} \right) (T).$$

El cálculo funcional holomorfo se puede generalizar a operadores cerrados, escogiendo funciones analíticas en un entorno del espectro y acotadas en el infinito. En este caso el cálculo funcional holomorfo viene dado por

$$f(T) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, T) d\lambda, \tag{II.1.2}$$

donde Γ es la frontera de un dominio de Cauchy no acotado D tal que $\sigma(T) \subset D \subset \overline{D} \subset \triangle(f)$. El operador así definido es continuo y definido en todo X.

Teoremas principales

A continuación recogemos propiedades que relacionan el cálculo funcional holomorfo con las teorías espectrales clásica y local.

Teorema II.1.1 *Sean $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{A}(T)$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *[16, Theorem 1.20]*(Teorema de la aplicación espectral*)*
$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)).$$

2. *[23, 1.6 Theorem]*(Teorema de la aplicación espectral local*). Si T es un operador que verifica la SVEP, entonces*

$$\sigma(x, f(T)) = f(\sigma(x,T)), \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema II.1.2 *[13, Theorem 1.5](Teorema de estabilidad de la SVEP) Sean $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{A}(T)$. Si T verifica la SVEP, entonces $f(T)$ verifica la SVEP. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{A}(T)$ no es constante en ninguna componente de su dominio y $f(T)$ verifica la SVEP, entonces T verifica la SVEP .*

Los dos teoremas anteriores son válidos también para operadores cerrados. El Teorema de la aplicación espectral se puede encontrar en [22, VII.94], el Teorema de la aplicación espectral local se debe a Vasilescu [52, Theorem 2.1], y el Teorema de estabilidad de la SVEP fue demostrado por Colojoara y Foias [13, Theorem 1.5].

Antes de demostrar la estabilidad de la propiedad (C) hemos de tener en cuenta la siguiente propiedad.

Lema II.1.1 *[23, Corollary 1.7] Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si $f \in \mathcal{A}(T)$ no es constante en ninguna componente de su dominio, entonces para todo F cerrado se cumple*

$$X(f(T), F) = X(T, f^{-1}(F)).$$

Proposición II.1.2 (Teorema de estabilidad de la propiedad (C)) *Sean T un operador lineal continuo y $f \in \mathcal{A}(T)$ no constante en cada componente de su dominio. Si T verifica la propiedad (C), entonces $f(T)$ verifica la propiedad (C). Si f es inyectiva y el operador $f(T)$ verifica la propiedad (C), entonces T verifica la propiedad (C).*

Demostración:

Tengamos en cuenta a lo largo de esta demostración que $X(T,F) = X(T, F \cap \sigma(T))$.

Sea F un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Por el lema anterior se verifica que

$$X(f(T), F) = X(T, f^{-1}(F)).$$

Como f es continua se obtiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado. Si T verifica la propiedad (C), se concluye que $f(T)$ verifica la propiedad (C). La segunda parte es clara, ya que si f es inyectiva y analítica, entonces es abierta [43, Teorema 10.5.5]. Por tanto es suficiente con aplicar el Lema II.1.1 al conjunto cerrado $f(F)$. $\square$

Relaciones entre $f(T)$, $f(T|Y)$, $f(T/Y)$ y $f(T^*)$

Sea Y un subespacio cerrado invariante por el operador $T \in L(X)$. Una cuestión de interés es la relación entre $f(T)$, $f(T^*)$, $f(T|Y)$ y $f(T/Y)$. En [16, Theorem 1.19] se garantiza que $f(T^*) = f(T)^*$. Queda por analizar qué relación hay entre los operadores $f(T)$, $f(T|Y)$ y $f(T/Y)$.

Bartle y Kariotis en [3] estudiaron las relaciones entre $f(T)$, $f(T|Y)$ y $f(T/Y)$, para Y ν-espacio, que recogemos en la siguiente proposición.

Proposición II.1.3 *Sean $T \in L(X)$, $f \in \mathcal{A}(T)$ e Y un ν-espacio de T. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(i) [3, Proposition 2.4] $Y \in Inv(f(T))$.

(ii) [3, Theorem 2.9]

(a) Y es un ν-espacio para $f(T)$.

(b) $f(T)|Y = f(T|Y)$.

(c) $f(\sigma(T|Y)) = \sigma(f(T|Y)) = \sigma(f(T)|Y)$.

(iii) [3, Theorem 4.4]

(a) $f(T)/Y = f(T/Y)$.

(b) $f(\sigma(T/Y)) = \sigma(f(T/Y)) = \sigma(f(T)/Y)$.

II.2 El cálculo funcional meromorfo

La definición del cálculo funcional holomorfo puede ser extendido al menos de dos formas distintas. Una forma consiste en ampliar la clase de los operadores a los cuales se les aplica el cálculo. Y la otra consiste en extender la clase de funciones. En esta sección, estudiaremos esta última.

Se define $\mathcal{M}(T)$ como el conjunto de las funciones holomorfas $f : \triangle(f) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y meromorfas en

$$\Omega_T(f) := \triangle(f) \cup \{ \text{ polos de } f \text{ en } \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)\},$$

que es un entorno del espectro del operador T. Ya que $\sigma(T)$ es un conjunto compacto, el número de polos de f en $\sigma(T)$ es finito. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, los polos de f en $\sigma(T)$, con orden de multiplicidad $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respectivamente. Entonces $f(\lambda)$ puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)^{-1},$$

donde g es una función analítica en un entorno del espectro y p es el polinomio de los polos de f en $\sigma(T)$ con su multiplicidad correspondiente, esto es

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} (\alpha_j - \lambda)^{n_j}.$$

Gindler define en [28] el operador del *cálculo funcional meromorfo* $f\{T\}$, como

$$f\{T\} := g(T)p(T)^{-1},$$

donde $g(T)$ está definido por el cálculo funcional holomorfo y $p(T)^{-1}$ es el operador inverso de $p(T)$ (que existe, ya que los ceros de p no se encuentran en $\sigma_p(T)$). El operador $f\{T\}$ que resulta es cerrado.

Si $T \in C(X)$, con resolvente no vacío, y f es una función meromorfa en un entorno del espectro de T unido con el punto del infinito, verificando que los polos no pertenezcan a $\sigma_p(T)$, entonces se define el operador del cálculo funcional meromorfo de la siguiente forma

$$f\{T\} := g_\alpha(T)(\alpha - T)^n p(T)^{-1},$$

para $\alpha \in \rho(T)$ fijo y arbitrario, y donde g_α y p están definidos mediante

$$g_\alpha(\lambda) = f(\lambda)p(\lambda)(\alpha-\lambda)^{-n} \quad , \quad p(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\alpha_j-\lambda)^{n_j} \ ,$$

siendo $\alpha_0 = \infty, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ los polos de f, con multiplicidad $n_0 \geq 0, n_1, \ldots, n_k$, respectivamente y $n := n_0 + n_1 + \ldots + n_k$. Para más detalles véase [31].

En esta memoria, nos centraremos en el caso de operadores continuos.

En la siguiente proposición recordamos algunas propiedades generales del cálculo funcional meromorfo.

Proposición II.2.1 *[31, Theorem 2.2] Sea $T \in L(X)$. Si $f \in \mathcal{M}(T)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $f\{T\}$ *es un operador lineal y cerrado.*

(ii) $D(f\{T\}) = R(p(T)) = \bigcap_{j=1}^{k} R((\alpha_j - T)^{n_j})$.

(iii) $R(f\{T\}) = R(g(T))$ *y* $N(f\{T\}) = N(g(T)) = \oplus_{i=1}^{p} N((\beta_i - T)^{n_i})$, *donde* β_i *denota los ceros de* g *en* $\sigma(T)$ *con multiplicidad* n_i *y* $\oplus$ *denota suma directa.*

(iv) $f\{T\} = p(T)^{-1}g(T) = g(T)p(T)^{-1}$.

Nagy prueba en [40] que la clase de funciones de $\mathcal{M}(T)$ es un espacio lineal. Sin embargo el cálculo funcional meromorfo no va tan bien como el cálculo funcional holomorfo, ya que para $f, g \in \mathcal{M}(T)$ y $c \neq 0$, se tiene que

(a) $c(f+g)\{T\} = (cf+cg)\{T\} \supset cf\{T\} + cg\{T\}$, siendo

$$D(f\{T\} + g\{T\}) = D((f+g)\{T\}) \cap D(g\{T\}).$$

(b) $fg \in \mathcal{M}(T)$ y $f\{T\}g\{T\} \subset (fg)\{T\}$, siendo

$$D(f\{T\}g\{T\}) = D((fg)\{T\}) \cap D(g\{T\}).$$

La siguiente proposición establece condiciones suficientes para que se verifique la igualdad en la parte (b).

Proposición II.2.2 *Sean $T \in L(X)$ y $f, g \in \mathcal{M}(T)$ funciones tales que f es distinta de cero en los polos de g y g es distinta de cero en los polos de f. Entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$f\{T\}g\{T\} = g\{T\}f\{T\} = (fg)\{T\}. \tag{II.2.3}$$

Demostración:

Como $f,\ g \in \mathcal{M}(T)$, entonces $h := fg \in \mathcal{M}(T)$ y además cada una tiene un número finito de polos en $\sigma(T)$. Sean $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ ,\ \alpha_n$, los polos de f con órdenes de multiplicidad $c_1,\ c_2,\ \dots\ ,\ c_n$; $\beta_1,\ \beta_2,\ \dots\ ,\ \beta_m$ los polos de g con órdenes de multiplicidad $d_1,\ d_2,\ \dots\ ,\ d_m$, y $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots\ ,\ \gamma_l$, los polos de h con órdenes de multiplicidad $n_1,\ n_2,\ \dots\ ,\ n_l$ respectivamente. Definamos los siguientes polinomios

$$p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \lambda)^{c_i} \ ; \ q(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\beta_i - \lambda)^{d_i} \ ; \ s(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\gamma_i - \lambda)^{n_i}.$$

Por (b) se obtiene

$$\begin{aligned} D(f\{T\}g\{T\}) &= D(h\{T\}) \cap D(g\{T\}) \\ &= R(s(T)) \cap R(q(T)) \\ &= R\left((\gamma_1 - T)^{n_1}\right) \cap \ldots \cap R\left((\gamma_l - T)^{n_l}\right) \\ &\quad \cap R\left((\beta_1 - T)^{d_1}\right) \cap \ldots \cap R\left((\beta_1 - T)^{d_m}\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene a partir de la Proposición II.2.1. Por hipótesis, el polinomio s tiene como mínimo los ceros del polinomio q, por tanto, resulta que:

$$D(f\{T\}g\{T\}) = R\left((\gamma_1 - T)^{n_1}\right) \cap \ldots \cap R\left((\gamma_l - T)^{n_l}\right)$$

$$= D(h\{T\}) = D\left((fg)\{T\}\right).$$

Haciendo un razonamiento análogo se obtiene:

$$D(f\{T\}g\{T\}) = D(g\{T\}f\{T\}) = D((gf)\{T\}).$$

Con lo que se prueba la igualdad (II.2.3). □

Corolario II.2.1 *[31, Lemma 3.4] Sean* $T \in L(X)$ *y* $f(\lambda) = 1/(\alpha - \lambda)^n$ *tal que* $\alpha \notin \sigma_p(T)$*. Entonces*

$$f\{T\} = f_1\{T\}^n,$$

donde $f_1(\lambda) = \dfrac{1}{\alpha - \lambda}$.

Teorema II.2.1 *[28, Theorem 1]* (Teorema de la aplicación espectral) *Sean* $T \in L(X)$ *y* $f \in \mathcal{M}(T)$*. Entonces*

$$\sigma_\infty(f\{T\}) = f(\sigma(T)).$$

Relaciones entre $f\{T\}$, $f\{T|Y\}$, $f\{T/Y\}$ y $f\{T^*\}$

En [31, Theorem 3.14] se garantiza que para $T \in L(X)$ y $f \in \mathcal{M}(T)$ tal que $D(f\{T\})$ es denso, entonces

$$f\{T^*\} = f\{T\}^*.$$

En la siguiente proposición relacionamos los operadores $f\{T\}$ y $f\{T|Y\}$ para subespacios T-absorbentes Y.

Proposición II.2.3 *Sean* $T \in L(X)$ *un operador que verifica la SVEP y* $f \in \mathcal{M}(T)$*. Si* Y *es un subespacio* T*-absorbente, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $Y \in Inv(f\{T\})$.

(ii) $f\{T\}|Y = f\{T|Y\}$.

(iii) Y *es un* ν*-espacio de* $f\{T\}$.

(iv) $f(\sigma(T|Y)) = \sigma_\infty(f\{T\}|Y)$.

Demostración:

(i) Si $y \in Y \cap D(f\{T\})$, entonces por definición del cálculo funcional meromorfo se tiene que

$$f\{T\}y = g(T)p(T)^{-1}y = p(T)^{-1}g(T)y,$$

donde p es el polinomio de los polos de f con su multiplicidad correspondiente y g es una función del cálculo funcional holomorfo. Por la Proposición I.3.3 se tiene que Y es un ν-espacio y por la parte (ii) de la Proposición II.1.3, es claro que $g(T)y \in Y$ para $y \in D(f\{T\}) \cap Y$. Luego como

$$p(T)f\{T\}y = g(T)y \in Y$$

y ya que Y es T-absorbente, entonces $f\{T\}y \in Y$.

(ii) Por la Proposición I.3.3, se tiene que $\sigma(T|Y) \subset \sigma(T)$, por tanto $f \in \mathcal{M}(T|Y)$.

Además si α es un polo de f en $\sigma(T|Y)$, entonces α es un polo de f en $\sigma(T)$. Supongamos que $f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)^{-1}$, donde g es una función analítica en $\sigma(T)$ y p es el polinomio de los polos en $\sigma(T)$ dado por

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j - \lambda)^{n_j}.$$

Por otra parte, se tiene $f(\lambda) = h(\lambda)q(\lambda)^{-1}$, donde h es una función analítica en $\sigma(T|Y)$ y q es el polinomio de los polos en $\sigma(T|Y)$ dado por

$$q(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_{k_i} - \lambda)^{n_{k_i}}$$

con $n \geq m$. Luego

$$D(f\{T\}) \cap Y = \bigcap_{j=1}^{n} R(\alpha_j - T)^{n_j} \cap Y = \bigcap_{i=1}^{m} R(\alpha_{k_i} - T|Y)^{n_{k_i}} = D(f\{T|Y\}).$$

Las igualdades anteriores resultan claras por la parte (i) de la Proposición II.2.1 y aplicando que si α es cero de p y no lo es de q, se tiene que $\alpha \in \sigma(T) \cap \rho(T|Y)$ con lo que resulta que $R(\alpha - T) = Y$.

Para $y \in D(f\{T|Y\})$, obtenemos

$$f\{T|Y\}y = h(T|Y)q(T|Y)^{-1}y = g(T)p(T)^{-1}y.$$

Para demostrar (iii) y (iv) es suficiente con (ii) y aplicar el Teorema II.2.1. □

Lema II.2.1 *Sean $T \in L(X)$ e Y un subespacio T-absorbente. Entonces $Y \in Inv(p(T)) \cap Inv(p(T)^{-1})$ y*

$$p(T)^{-1}/Y = (p(T)/Y)^{-1}$$

donde p es un polinomio tal que sus ceros no se encuentran en el espectro puntual del operador T.

Demostración:

Ya que Y es un subespacio T-absorbente, se tiene que $Y \in Inv(p(T)) \cap Inv(p(T)^{-1})$. Por otra parte, resulta que

$$(p(T)^{-1}/Y)(p(T)x + Y) = x + Y = (p(T)/Y)^{-1}(p(T)x + Y).$$

□

Proposición II.2.4 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f \in \mathcal{M}(T)$. Si Y es un subespacio T-absorbente, entonces se verifican las siguientes propiedades*

(i) $f\{T\}/Y = f\{T/Y\}$.

(ii) $f(\sigma(T/Y)) = \sigma_\infty(f\{T\}/Y)$.

Demostración:

Por la Proposición I.3.4 se tiene la siguiente inclusión de espectros

$$\sigma(T/Y) \subset \sigma(T) \cup \sigma(T|Y),$$

por tanto como Y es T-absorbente es un ν-espacio de T, luego se tiene que $\sigma(T|Y) \subset \sigma(T)$, por tanto $\sigma(T/Y) \subset \sigma(T)$. Además los polos de f no pertenecen a $\sigma_p(T/Y)$. En efecto, si existiese $\alpha \in \sigma_p(T/Y)$, entonces existe $x + Y \in X \setminus Y$ tal que

$$(\alpha - T/Y)(x + Y) = 0$$

luego, $(\alpha - T)x \in Y$. Por tanto como Y es T-absorbente se deduce que $x \in Y$, consecuentemente $\alpha \notin \sigma_p(T/Y)$ luego $f \in \mathcal{M}(T/Y)$.
La igualdad en (i) resulta clara por el lema anterior y por la parte (ii) de la Proposición II.1.3, ya que $g(T/Y) = g(T)/Y$, luego consecuentemente

$$f\{T/Y\} = p(T/Y)^{-1}g(T/Y) = (p(T)^{-1}g(T))/Y = f\{T\}/Y.$$

Con lo que concluye la demostración de (i).

Para la demostración de (ii), es suficiente la igualdad demostrada en (i) y el Teorema II.2.1. □

El Teorema de la aplicación espectral local

Antes de establecer el teorema de la aplicación espectral local para el cálculo funcional meromorfo, veamos algunos resultados previos sobre las relaciones entre los espectros locales.

Lema II.2.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y p un polinomio tal que sus ceros no se encuentran en $\sigma_p(T)$. Entonces*

$$\sigma(p(T)x, T) = \sigma(x, T), \tag{II.2.4}$$

para todo $x \in X$.

<u>Demostración</u>:

Es suficiente con probar (II.2.4) para $p(T) = \alpha - T$, con $\alpha \notin \sigma_p(T)$, ya que el caso general, se demuestra por iteración de este resultado.

Por la Proposición I.5.2 se tiene que

$$\sigma((\alpha - T)x, T) \subset \sigma(x, T) \subset \sigma((\alpha - T)x, T) \cup \{\alpha\}.$$

Por tanto, demostrar (II.2.4) para $(\alpha - T)x$ es equivalente a demostrar que si $\alpha \in \sigma(x, T) \setminus \sigma_p(T)$, entonces $\alpha \in \sigma((\alpha - T)x, T)$.

En efecto, denotemos $y := (\alpha - T)x$ y supongamos que $\alpha \in \rho(y, T)$, luego por la Proposición I.5.4, existe $R > 0$ y $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$ tal que $(\alpha - T)y_0 = y$, $(\alpha - T)y_k = y_{k-1}$ para $k \geq 1$ y $\|y_k\| \leq R^k$ para $k \geq 0$, y además $\widehat{y}_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\alpha - \lambda)^k$. Luego $(\alpha - T)^{-1}y_{k-1} = y_k$ para $k \geq 1$ y $y_0 = x$. Por tanto resulta claro que

$$\widehat{x}_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}(\alpha - \lambda)^k$$

es una función analítica en un entorno de α, que verifica la siguiente igualdad

$$(\lambda - T)\widehat{x}_T(\lambda) = x.$$

Luego $\alpha \in \rho(x, T)$. □

Observación II.2.1 Del lema anterior es inmediato deducir que si $T \in L(X)$ es un operador que verifica la SVEP y p es un polinomio sin ceros en $\sigma_p(T)$, entonces

$$\sigma(p(T)^{-1}y, T) = \sigma(y, T),$$

para $y \in D(p(T)^{-1}) = R(p(T))$. Ya que es suficiente aplicar la igualdad (II.2.4) a los vectores $x \in X$ de la forma $y = p(T)x$.

Proposición II.2.5 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f \in \mathcal{A}(T)$ una función no idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Entonces*

$$\sigma(x, T) \subset \sigma(f(T)x, T) \cup \{\alpha \in \sigma_p(T) \ : \ f(\alpha) = 0\}. \tag{II.2.5}$$

<u>Demostración</u>:

Como f no es nula en ninguna componente de $\triangle(f)$ que corte a $\sigma(T)$, se tiene que

$$f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)$$

donde $g \neq 0$ en $\sigma(T)$ y p es el polinomio de los ceros de f en $\sigma(T)$. Por la parte (vii) de la Proposición I.5.1, la Proposición I.5.2 y el Lema II.2.2 se tiene

$$\sigma(x,T) = \sigma(g(T)x,T) \subset \sigma(p(T)g(T)x,T) \cup \{\alpha \in \sigma_p(T) \quad : \quad p(\alpha) = 0\}.$$

$\square$

Observación II.2.2 El Lema II.2.2 y la Observación II.2.1 serán demostrados en condiciones más débiles en la Sección IV.1

Proposición II.2.6 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f \in \mathcal{M}(T)$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(i) Si $S \in L(X)$ conmuta con T, entonces S conmuta con el operador $f\{T\}$.

(ii) Si $x \in D(f\{T\})$, entonces $\sigma(f\{T\}x,T) \subset \sigma(x,T)$.

(iii) Si f no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$ y $x \in D(f\{T\})$, entonces $\sigma(x,T) \subset \sigma(f\{T\}x,T) \cup \{\alpha \in \sigma_p(T) : f(\alpha) = 0\}$.

Demostración:

(i) Por la parte (vii) de la Proposición I.5.1 resulta que el operador $g(T)$ del cálculo funcional holomorfo conmuta con S y como además $p(T)^{-1}$ también conmuta, se obtiene el resultado.

(ii) Si $x \in D(f\{T\}) = R(p(T))$, entonces $x = p(T)y$. Luego por la parte (vii) de la Proposición I.5.1 se tiene que

$$\sigma(f\{T\}x,T) = \sigma(g(T)p(T)^{-1}x,T) = \sigma(g(T)y,T) \subset \sigma(y,T).$$

Por el Lema II.2.2 se obtiene que

$$\sigma(x,T) = \sigma(p(T)y,T) = \sigma(y,T).$$

Por tanto, $\sigma(f\{T\}x,T) \subset \sigma(x,T)$.

(iii) Utilizando la definición del cálculo funcional meromorfo y la Observación II.2.1

$$\sigma(x,T) = \sigma(p(T)^{-1}x,T) = \sigma(y,T).$$

Aplicando la Proposición II.2.5 al vector $g(T)y$ resulta que

$$\sigma(y,T) \subset \sigma(g(T)y,T) \cup \{\alpha \in \sigma_p(T) \ : \ f(\alpha) = 0\}.$$

Por tanto como $\sigma(y,T) = \sigma(x,T)$ y $\sigma(f\{T\}x,T) = \sigma(g(T)y,T)$ se concluye la demostración. □

A continuación enunciamos y demostramos el Teorema de la aplicación espectral local para el cálculo funcional meromorfo. Puede ser demostrado de igual forma a como se hizo en [52] para operadores cerrados con el cálculo funcional holomorfo, pero no lo haremos. Aquí damos una demostración distinta, utilizando como herramienta fundamental la Proposición II.2.6, aunque dicha demostración sólo es válida para operadores con la propiedad (C).

Teorema II.2.2 (Teorema de la aplicación espectral local) *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C) y $f \in \mathcal{M}(T)$ tal que $f\{T\}$ verifica la SVEP. Si $x \in X$, entonces*

$$\sigma_\infty(x, f\{T\}) = f(\sigma(x,T)).$$

Demostración:

La demostración de este teorema consta de tres etapas.

Etapa I: $f(\sigma(x,T)) \subset \sigma_\infty(x, f\{T\})$ *para* $x \in X$.

Supongamos que $f(\lambda) \in \rho_\infty(x, f\{T\})$ para cierto $\lambda \in \Omega_T(f)$. Sea U entorno de λ tal que $f(U) \subset V \subset \rho_\infty(x, f\{T\})$ para cierto entorno V de $f(\lambda)$. Entonces se verifica

$$(f(\mu) - f\{T\})\widehat{x}_{f\{T\}}(f(\mu)) = x, \text{ para } \mu \in U.$$

Sea $\mu \in U$. Definimos $g_\mu : \Omega_T(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$g_\mu(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\mu) - f(\xi)}{\mu - \xi} & \xi \neq \mu \\ f'(\xi) & \xi = \mu \end{cases}$$

para $\mu \in U$ y $\xi \in \Omega_T(f)$. Además, $g_\mu(\xi) = h_\mu(\xi) q_\mu(\xi)^{-1}$, donde h_μ es analítica en $\sigma(T)$ y q_μ es el polinomio de los polos de g_μ, que coincide con los polos de f. Entonces

$$(\mu - \xi) g_\mu(\xi) = f(\mu) - f(\xi)$$

para $\mu \in U$, $\xi \in \Omega_T(f)$ y $\xi \neq \mu$. Aplicando las reglas operacionales para el cálculo funcional meromorfo se tiene

$$(\mu - T) g_\mu\{T\} = f(\mu) - f\{T\}.$$

Por tanto

$$(\mu - T) g_\mu\{T\}\, \widehat{x}_{f\{T\}}(f(\mu)) = (f(\mu) - f\{T\})\, \widehat{x}_{f\{T\}}(f(\mu)) = x.$$

Entonces

$$(\mu - T) p(T) g_\mu\{T\} \widehat{x}_{f\{T\}}(f(\mu)) = p(T)x,$$

donde $p(T) g_\mu\{T\} \widehat{x}_T(f(\mu))$ es analítica en un entorno de λ. Luego $\lambda \in \rho(p(T)x, T)$. Aplicando el Lema II.2.2 se tiene que $\lambda \in \rho(x, T)$.

Etapa II. *$\sigma(x, f\{T\}) = f(\sigma(x, T))$ para $x \in X$ tal que $\sigma(x, T) \subset \triangle(f)$.*

Veamos primeramente que $Y := X(T, \sigma(x, T))$ es un subespacio T-absorbente. En efecto, dados $z \in X$ y $\lambda \in \sigma(T|Y)$ tales que $(\lambda - T)z = y \in Y$, por la Proposición I.5.2 se tiene que

$$\sigma(z, T) \subset \sigma((\lambda - T)z, T) \cup \{\lambda\} = \sigma(y, T) \cup \{\lambda\} \subset \sigma(x, T) \cup \{\lambda\}.$$

Aplicando la parte (vi) de la Proposición I.5.1 y que Y es un μ-espacio se deduce que $\sigma(T|Y) \subset \sigma(x, T)$. Luego $\lambda \in \sigma(x, T)$ y por tanto $z \in Y$. Como Y es un subespacio T-absorbente, la Proposición II.2.4 garantiza que

$$f\{T\}|Y = f\{T|Y\}.$$

Como $\sigma(T|Y) \subset \sigma(x, T) \subset \triangle(f)$, se tiene que $f \in \mathcal{A}(T|Y)$. Luego, aplicando la parte (2) del Teorema II.1.1 se obtiene que

$$\sigma(x, f\{T\}|Y) = \sigma(x, f(T|Y)) = f(\sigma(x, T|Y)) = f(\sigma(x, T)), \tag{II.2.6}$$

ya que Y es un μ-espacio por la Proposición I.3.3.

Faltaría por ver que $\sigma(x, f\{T\}|Y) = \sigma(x, f\{T\})$, para $x \in Y$. Por una parte se tiene que

$$\sigma(x, f\{T\}) \subset \sigma(x, f\{T\}|Y), \tag{II.2.7}$$

ya que por la parte (ii) de la Proposición II.2.6 se obtiene que $Y \in Inv(f\{T\})$. Por tanto utilizando la Etapa I y el contenido (II.2.7) se tiene que

$$f(\sigma(x,T)) \subset \sigma(x, f\{T\}) \subset \sigma(x, f\{T\}|Y)$$

y teniendo en cuenta la igualdades (II.2.6) se concluye que

$$f(\sigma(x,T)) = \sigma(x, f\{T\})$$

para todo $x \in X$ tal que $\sigma(x,T) \subset \triangle(f)$.

Etapa III: $\infty \in \sigma(x, f\{T\}) \Longleftrightarrow$ *existe* $\alpha \in \sigma(x,T)$ *tal que* $f(\alpha) = \infty$

Para demostrar la equivalencia anterior es suficiente probarla para f con un sólo polo α.

" $\Rightarrow$" Supongamos que $\alpha \notin \sigma(x,T)$, entonces quedaría demostrado, por la Etapa II.

" $\Leftarrow$" Supongamos que $\infty \notin \sigma(x, f\{T\})$, entonces por la Etapa I se obtiene que $\infty \notin f(\sigma(x,T))$, luego $\alpha \notin \sigma(x,T)$. $\square$

Corolario II.2.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C) y $f \in \mathcal{M}(T)$ tal que el operador $f\{T\}$ verifica la SVEP. Si Y es un subespacio T-absorbente, entonces*

$$(i) \quad \sigma(y, f\{T\}|Y) = \sigma(y, f\{T\}).$$

$$(ii) \quad \sigma(x+Y, f\{T\}/Y) \subset \sigma(x, f\{T\}).$$

<u>Demostración</u>:

(i) Resulta claro por las Proposiciones I.3.3 y II.2.3.

(ii) Por la Proposición II.2.4 se tiene que $f\{T\}/Y = f\{T/Y\}$, por tanto utilizando el Teorema II.2.2 se obtiene que

$$\sigma(x+Y, f\{T/Y\}) = \sigma(x+Y, f\{T/Y\}) = f(\sigma(x+Y, T/Y)) \subset f(\sigma(x,T)).$$

□

Observación II.2.3 Una condición suficiente para que $f\{T\}$ verifique la SVEP es que el operador T la verifique, como se demuestra en el Teorema II.2.3.

Proposición II.2.7 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C), F un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{M}(T)$ no constante en ninguna componente de su dominio que corte a $\sigma(T)$. Entonces*

$$X(f\{T\}, F) = X(T, f^{-1}(F)).$$

Demostración:

Si $x \in X(f\{T\}, F)$, entonces $\sigma(x, f\{T\}) = f(\sigma(x, T)) \subset F$, por el Teorema II.2.2, luego $x \in X(T, f^{-1}(F))$. El otro contenido es análogo. □

La estabilidad de la SVEP y de la propiedad (C)

A continuación damos el Teorema sobre la estabilidad de la SVEP por el cálculo funcional meromorfo, usando ideas de [13] y [42]. Para ello necesitamos la siguiente proposición.

Proposición II.2.8 *[42, Proposition 2.5] Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $(F_\alpha)_\alpha$ una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$. Entonces*

$$X(T, \cap_\alpha F_\alpha) = \cap_\alpha X(T, F_\alpha).$$

Teorema II.2.3 (Teorema de estabilidad de la SVEP) *Sea $T \in L(X)$. Si T verifica la SVEP, entonces para toda $f \in \mathcal{M}(T)$ se tiene que el operador $f\{T\}$ verifica la SVEP. Recíprocamente, si f es una función del cálculo funcional meromorfo que no es constante en ninguna componente de su dominio que corte a $\sigma(T)$ y $f\{T\}$ verifica la SVEP, entonces T verifica la SVEP.*

Demostración:

Supongamos que $f\{T\}$ verifica la SVEP y T no verifica la SVEP. Entonces existe una función analítica $w : D \longrightarrow X$ tal que

$$(\lambda - T)w(\lambda) = 0 \text{ para todo } \lambda \in D, \text{ con } w \neq 0.$$

Luego $D \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ y es claro que f es analítica en D. Por otra parte, para $\mu \in D$ (fijo) y $\lambda \in \triangle(f)$ se define la siguiente función

$$g_\mu(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} & \lambda \neq \mu \\ f'(\mu) & \lambda = \mu \end{cases}$$

resultando que g_μ es una función meromorfa en $\Omega_T(f)$ y analítica en D. Por las reglas operacionales para el cálculo funcional meromorfo se obtiene que

$$f(\mu) - f\{T\} = (\mu - T)g_\mu\{T\},$$

luego

$$(f(\mu) - f\{T\})w(\mu) = (\mu - T)g_\mu\{T\}w(\mu).$$

Ya que $g_\mu\{T\}$ conmuta con T por la parte (i) de la Proposición II.2.6, entonces

$$(f(\mu) - f\{T\})w(\mu) = g_\mu\{T\}(\mu - T)w(\mu) = 0.$$

Por otra parte, se tiene que $f \neq Cte$, luego existe $\lambda_0 \in D$ tal que $f'(\lambda_0) \neq 0$. Entonces existe un r suficientemente pequeño tal que f^{-1} existe sobre $f(D_0)$ donde D_0 viene definido como

$$D_0 := \{\mu \in \mathbb{C} \;:\; |\mu - \lambda_0| < r\}.$$

Sea $v(\lambda) := w(f^{-1}(\lambda))$ sobre $f(D_0)$. Entonces

$$(\lambda - f\{T\})v(\lambda) = 0,$$

en consecuencia $v(\lambda) = 0$ para $\lambda \in f(D_0)$. Y por tanto $w(\mu) = 0$ para $\mu \in D_0$.

Recíprocamente, supongamos que T verifica la SVEP y $f\{T\}$ no verifica la SVEP. Sea $h : \triangle(h) \longrightarrow D(f\{T\}) \subset X$ una función analítica tal que $h \neq 0$ y

$$(\mu - f\{T\})h(\mu) = 0, \quad \mu \in \triangle(h).$$

Veamos que $h(\mu) \in X(f\{T\}, \{\mu\}) \cap X(f\{T\}, \mathbb{C} \setminus \triangle(h))$. Si $\lambda \neq \mu$, entonces $h(\mu)/(\lambda - \mu)$ es analítica y verifica

$$(\lambda - f\{T\}) \frac{h(\mu)}{\lambda - \mu} = (\lambda - \mu) \frac{h(\mu)}{\lambda - \mu} = h(\mu),$$

luego $\sigma(h(\mu), f\{T\}) \subset \{\mu\}$ para $\mu \in \triangle(h)$. Además, $\sigma(h(\mu), f\{T\}) \subset \mathbb{C} \setminus \triangle(h)$ para todo $\mu \in \triangle(h)$. En efecto, si $\lambda \in \triangle(h)$, entonces $(\lambda - f\{T\})h(\lambda) = 0$, por lo que

$$(\lambda - f\{T\}) \left(\frac{h(\mu) - h(\lambda)}{\lambda - \mu} \right) = h(\mu).$$

Como $(h(\mu) - h(\lambda))/(\lambda - \mu)$ converge a $-h'(\mu)$ cuando λ tiende a μ, y $(\mu - f\{T\})(h(\mu) - h(\lambda))/(\lambda - \mu) = h(\lambda)$ converge a $h(\mu)$ cuando λ tiende a μ, utilizando que $\mu - f\{T\}$ es un operador cerrado se deduce que $\mu \in \rho(h(\mu), f\{T\})$. Por tanto $h(\mu) \in X(f\{T\}, \mathbb{C} \setminus \triangle(h)) \cap X(f\{T\}, \{\mu\})$. Utilizando la Proposición II.2.7 y la Proposición II.2.8 se obtiene que $h(\mu) \in X(T, f^{-1}\{\mu\} \cap f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \triangle(h))) = X(T, \varnothing) = \{0\}$. Con lo que se concluye que $h(\mu) \equiv 0$. $\square$

Capítulo III

El cálculo funcional local

En este capítulo definimos un cálculo funcional local para operadores continuos que verifican la SVEP y cualquier función analítica, con independencia de la relación de su dominio con el espectro del operador. Su definición es similar a la del cálculo funcional holomorfo sustituyendo el operador resolvente por la función resolvente local.

La primera diferencia con respecto a los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo es que se define localmente, es decir para cada x de su dominio. Una segunda diferencia es que el operador obtenido no es en general continuo, ni cerrado y además desconocemos si es precerrado. Sobre estas cuestiones presentamos algunos resultados parciales, y probamos el teorema de la aplicación espectral local para dicho cálculo. Finalmente, hacemos un estudio del cálculo funcional local para operadores normales en espacios de Hilbert.

III.1 Introducción

Para definir el *cálculo funcional local*, consideraremos una clase de funciones más amplia que $\mathcal{A}(T)$ e incluso que $\mathcal{M}(T)$. Como contrapartida nos limitaremos a operadores que verifican la SVEP y no siempre obtendremos operadores cuyo dominio sea todo el espacio X.

Definición III.1.1 Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Para cada función analítica $f : \triangle(f) \to \mathbb{C}$ se define el operador del *cálculo funcional local*

$$f[T] : \ D(f[T]) \subset X \longrightarrow X,$$

donde

$$D(f[T]) := \{x \in X \ : \ \sigma(x,T) \subset \triangle(f)\},$$

de la siguiente forma:

$$f[T]x := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda, \tag{III.1.1}$$

donde $\widehat{x}_T$ es la función resolvente local de T en x y Γ la frontera positivamente orientada de cualquier dominio de Cauchy acotado D tal que verifica

$$\sigma(x,T) \subset D \subset \overline{D} \subset \triangle(f).$$

Obsérvese que el dominio de $f[T]$ coincide con la variedad espectral de T asociada al conjunto $\triangle(f) \subset \mathbb{C}$:

$$D(f[T]) = X(T, \triangle(f)).$$

Observación III.1.1 Si se desea que el dominio del operador $f[T]$ sea lo mayor posible, será conveniente tomar f una función analítica maximal.

Con el fin de establecer la coherencia de la definición anterior y mostrar que se trata de una generalización del cálculo funcional holomorfo, hacemos las siguientes observaciones:

1. $D(f[T])$ es no vacío, pues $\sigma(0,T) = \varnothing \subset \triangle(f)$, por la parte (i) de la Proposición I.5.1.

2. Para $x \in D(f[T])$, existe un dominio de Cauchy D que verifica

   $$\sigma(x,T) \subset D \subset \overline{D} \subset \triangle(f).$$

   Razonando de igual forma que para el cálculo funcional holomorfo: se define $d(\lambda)$ como la distancia de $\lambda \in \mathbb{C}$ a la frontera de $\triangle(f)$; la función tiene un mínimo $\delta > 0$ sobre el compacto $\sigma(x,T)$. Se recubre el plano complejo con hexágonos cerrados de apotema $\frac{\delta}{8}$ y se toma como dominio de Cauchy el interior de la unión de esos hexágonos que contienen puntos de $\sigma(x,T)$. Si $\triangle(f)$ tuviera frontera vacía, sería $\triangle(f) = \mathbb{C}$ y entonces es clara la existencia de D.

3. La integral no depende del dominio de Cauchy escogido. Sean D_1 y D_2 dos dominios de Cauchy que verifican

$$\sigma(x,T) \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset \triangle(f),$$

$$\sigma(x,T) \subset D_2 \subset \overline{D_2} \subset \triangle(f),$$

luego $\sigma(x,T) \subset D_1 \cap D_2$. Entonces existe un dominio de Cauchy acotado D tal que

$$\sigma(x,T) \subset D \subset \overline{D} \subset D_1 \cap D_2.$$

Por una parte, $D_1 \setminus \overline{D}$ es un dominio de Cauchy en el que la función $f\widehat{x}_T$ no tiene singularidades, por tanto el Teorema de Cauchy implica que

$$\int_{+\partial(D_1 \setminus \overline{D})} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda = 0,$$

luego

$$\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda = \int_{+\partial D} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda.$$

Análogamente, $D_2 \setminus \overline{D}$ es un dominio de Cauchy que verifica

$$\int_{+\partial D_2} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda = \int_{+\partial D} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda.$$

Por tanto

$$\int_{+\partial D_1} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda = \int_{+\partial D_2} f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda.$$

4. Sea f una función analítica sobre $\sigma(T)$. Teniendo en cuenta que para todo $x \in X$ se verifica $\sigma(x,T) \subset \sigma(T)$ y que

$$R(\lambda,T)x = \widehat{x}_T(\lambda),$$

para $\lambda \in \rho(T)$, entonces es claro que $D(f[T]) = X$ y $f(T) = f[T]$.

5. Para $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica en $\triangle(f)$, hemos definido el operador del cálculo funcional local según (III.1.1). Es lógico plantearse si es necesario que T verifique la SVEP para que $f[T]$ esté bien definido. La respuesta es afirmativa, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo III.1.1 *Operador $f[T]$ que no está bien definido, con T un operador que no verifica la SVEP.*

Sean T definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) &\longrightarrow (x_2, x_3, \ldots), \end{aligned}$$

$f(\lambda) = 1/\lambda$ e $y = e_2 \in \ell_2(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$. Es claro que T no verifica la SVEP por el estudio hecho en el Ejemplo I.4.2. Además por [26, Theorem 2] se tiene que $\sigma(e_2, T) = \varnothing$. Si llamamos

$$u(\lambda) := (0, 0, -1, -\lambda, -\lambda^2, \ldots).$$

Entonces $u(\lambda)$ define una función analítica del disco unitario abierto $\mathbb{D}$ en $\ell_2(\mathbb{N})$, tal que verifica que $(\lambda - T)u(\lambda) = e_2$ en $\mathbb{D}$. Definimos

$$u_1(\lambda) := \begin{cases} u(\lambda) & |\lambda| < 1 \\ R(\lambda, T)e_2 & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Además, tomando

$$\omega(\lambda) := \begin{cases} 0 & |\lambda| > 1 \\ (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) & |\lambda| < 1, \end{cases}$$

y $u_2(\lambda) := u_1(\lambda) + t\omega(\lambda)$, para $t \in \mathbb{C}$ se obtiene que

$$(\lambda - T)u_2(\lambda) \equiv e_2$$

sobre $\mathbb{D}$, para cada $t \in \mathbb{C}$. Aplicando la definición del cálculo funcional local se tiene que

$$\begin{aligned} f[T]_2 e_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} f(\lambda)\,(u(\lambda) + t\omega(\lambda))\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(\lambda) R(\lambda, T) e_2 d\lambda \\ &\neq \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} \frac{u(\lambda)}{\lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{R(\lambda, T)e_2}{\lambda} d\lambda - te_1 = f[T]_1 e_2 \end{aligned}$$

donde Γ_i es la frontera del disco $D(0, r_i)$ siendo $0 < r_1 < 1$ y $r_2 = 1 + r_1$. $\square$

El siguiente resultado garantiza que el operador $f[T]$ es lineal.

Proposición III.1.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $D(f[T])$ es un subespacio vectorial de X.

(ii) $f[T]$ es lineal.

Demostración:

(i) Es claro por los apartados (ii) y (iii) de la Proposición I.5.1.

(ii) Sean $x, y \in D(f[T])$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Teniendo en cuenta que $\alpha\widehat{x}_T + \beta\widehat{y}_T = (\widehat{\alpha x + \beta y})_T$ se deduce el resultado. □

Si fijamos $x \in X$ y $T \in L(X)$, entonces podemos considerar la clase de las funciones analíticas f, cuyos dominios $\triangle(f)$ contienen al espectro local $\sigma(x, T)$:

$$A(x, T) := \{f : \triangle(f) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ analítica } : \sigma(x, T) \subset \triangle(f)\}.$$

Decimos que dos funciones $f, g \in A(x, T)$ son *equivalentes respecto a T en x* si coinciden en un cierto entorno de $\sigma(x, T)$. Queda así definida una relación de equivalencia, cuyo conjunto cociente lo denotararemos por $\mathcal{A}(x, T)$. Nótese que si f y g son equivalentes respecto a T en x, entonces $f[T]x = g[T]x$.

III.2 Propiedades

Estudiamos a continuación algunas propiedades del operador $f[T]$.

La siguiente proposición resulta inmediata.

Proposición III.2.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathcal{A}(x, T)$, entonces*

$$(\alpha f + \beta g)[T]x = \alpha f[T]x + \beta g[T]x.$$

En el cálculo funcional holomorfo se tiene que si $T, S \in L(X)$ conmutan, entonces S conmuta con $f(T)$ y además

$$\sigma(f(T)x, T) \subset \sigma(x, T), \tag{III.2.2}$$

para todo $x \in X$. En la siguiente proposición derivamos resultados similares para el cálculo funcional local. Tengamos en cuenta que la ecuación (III.2.2) es cierta por la parte (vii) de la Proposición I.5.1, ya que $f(T) \in L(X)$ y conmuta con T. Sin embargo, para el nuevo cálculo funcional no podemos aplicar la Proposición I.5.1, ya que todavía no hemos estudiado si el operador del cálculo funcional local es continuo.

Proposición III.2.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y supongamos que $S \in L(X)$ conmuta con T. Si f es una función analítica, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) S conmuta con $f[T]$; es decir, $SD(f[T]) \subset D(f[T])$ y $Sf[T]x = f[T]Sx$ para todo $x \in D(f[T])$.

(ii) Sean $x \in D(f[T])$ e $y := f[T]x$. Entonces $f[T]\widehat{x}_T = \widehat{y}_T$ en $\rho(x, T)$, por tanto $\sigma(f[T]x, T) \subset \sigma(x, T)$. Luego $D(f[T])$ es invariante por $f[T]$.

<u>Demostración</u>:

(i) Sea $x \in D(f[T])$. Por la parte (vii) de la Proposición I.5.1 tenemos que $\sigma(Sx, T) \subset \sigma(x, T)$, y por tanto $Sx \in D(f[T])$. Además, $S\widehat{x}_T$ es una restricción de la función resolvente local de T en Sx. Entonces

$$\begin{aligned} Sf[T]x &= S\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)S\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda \\ &= f[T]Sx. \end{aligned}$$

(ii) Probaremos que $f[T]\widehat{x}_T$ es analítica en $\rho(x,T)$. Utilizando la expresión de la función resolvente local de T en $\widehat{x}_T(\lambda)$ es decir

$$\widehat{\widehat{x}_T(\lambda)}_T(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\widehat{x}_T(\mu) - \widehat{x}_T(\lambda)}{\lambda - \mu} & \text{si } \mu \neq \lambda \\ -\widehat{x}'_T(\lambda) & \text{si } \mu = \lambda \end{cases}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} f[T]\widehat{x}_T(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\mu)\left(\frac{\widehat{x}_T(\mu) - \widehat{x}_T(\lambda)}{\lambda - \mu}\right)d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\mu)\widehat{x}_T(\mu)}{\lambda - \mu}d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\mu)\widehat{x}_T(\lambda)}{\lambda - \mu}d\mu. \end{aligned}$$

Para todo $x^* \in X^*$, la primera integral verifica que

$$x^*\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\mu)\widehat{x}_T(\mu)}{\lambda - \mu}d\mu\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\mu)}{\lambda - \mu}x^*(\widehat{x}_T(\mu))d\mu,$$

y por tanto es analítica por [43, Theorem 10.7], y la segunda integral es analítica por el Teorema de Cauchy. Consecuentemente $f[T]\widehat{x}_T$ es analítica en $\rho(x,T)$. Es inmediato que $(\mu - T)f[T]\widehat{x}_T(\mu) = y$. □

En la siguiente proposición se dan condiciones suficientes para que se dé la igualdad entre los vectores $(fg)[T]x$ y $f[T]g[T]x$. En este sentido, McGuire en [38] prueba dicha igualdad para operadores continuos definidos en espacios de Hilbert, con espectro puntual vacío.

Proposición III.2.3 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Si $f, g \in \mathcal{A}(x,T)$, entonces se tiene las siguientes igualdades*

$$(fg)[T]x = f[T]g[T]x = g[T]f[T]x. \tag{III.2.3}$$

Demostración:

La demostración es similar al resultado correspondiente para el cálculo funcional holomorfo [16, Theorem 1.19].

Primeramente, teniendo en cuenta la parte (ii) de la Proposición III.2.2, obtenemos que $\sigma(f[T]x,T)\subset\sigma(x,T)\subset\triangle(g)$, por tanto $f[T]x\in D(g[T])$, y análogamente $g[T]x\in D(f[T])$. Además $\widehat{g[T]x}_T=g[T]\widehat{x}_T$.

Sean D_1, D_2 dos dominios de Cauchy tales que $\sigma(x,T)\subset D_1$, $\overline{D_1}\subset D_2$ y $\overline{D_2}\subset\triangle(f)\cap\triangle(g)$ y $\Gamma_i=\partial D_i$ para $i=1,2$. Entonces podemos expresar $f[T](g[T]x)$ como una integral con respecto a λ sobre Γ_1,

$$f[T]g[T]x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)\widehat{g[T]x}_T(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)g[T]\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda.$$

Expresando $g[T]\widehat{x}_T(\lambda)$ como una integral con respecto a μ sobre Γ_2 y usando la expresión para la función resolvente local de $\widehat{x}_T(\lambda)$ (utilizada en la demostración de parte (ii) de la Proposición III.2.2) se tiene que

$$f[T]g[T]x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}g(\eta)\left(\frac{\widehat{x}_T(\lambda)-\widehat{x}_T(\eta)}{\eta-\lambda}\right)d\eta\right\}d\lambda$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)\int_{\Gamma_2}\frac{g(\eta)}{\eta-\lambda}d\eta d\lambda+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)\int_{\Gamma_2}\frac{\widehat{x}_T(\eta)g(\eta)}{\eta-\lambda}d\eta d\lambda.$$

Ya que $\lambda\in D_2$ y $\eta\notin\overline{D_1}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g(\eta)}{\eta-\lambda}d\eta=g(\lambda),\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\eta-\lambda}d\lambda=0.$$

Por tanto se obtiene la igualdad de la ecuación (III.2.3), es decir

$$f[T]g[T]x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}f(\lambda)g(\lambda)\widehat{x}_T(\lambda)d\lambda=(fg)[T]x.$$

□

Algunas veces el resultado de evaluar $f[T]g[T]x$ y $(fg)[T]x$ es diferente, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo III.2.1 *Operadores tales que no es cierta la igualdad* $f[T]g[T]x=(fg)[T]x$.

Sea T el operador definido en el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ por

$$\begin{aligned} T:\ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})\\ (x_1,x_2,x_3,\ldots) &\longrightarrow (x_1,\tfrac{x_2}{2},\tfrac{x_3}{3},\ldots).\end{aligned}$$

Es claro que T verifica la SVEP, ya que T es un operador compacto. Si $x := (1, 1, 0, \ldots)$, $f(\lambda) := \frac{1}{1-\lambda}$ y $g(\lambda) := 1 - \lambda$, entonces se obtiene que $f[T](I - T)x = 1/2e_2$, $\sigma(e_2, T) = \{1/2\}$ y además

$$\frac{1}{2} f[T]e_2 = \frac{1}{4\pi i} \int_\Gamma \frac{e_2}{(\lambda - 1)(\lambda - 1/2)} d\lambda = e_2.$$

Por otra parte se tiene que $(fg)[T]x = (1, 1, 0, \ldots) \neq e_2$.

Nótese que $f \notin \mathcal{A}(x, T)$, es decir $x \notin D(f[T])$, por lo tanto no podemos definir $g[T]f[T]x$. $\square$

De aquí en adelante denotaremos $\sigma^f(T)$ al siguiente subconjunto de $\mathbb{C}$

$$\sigma^f(T) := \bigcup_{x \in D(f[T])} \sigma(x, T).$$

Teorema III.2.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f : \triangle(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f(\lambda) \neq 0$ para $\lambda \in \sigma^f(T)$, entonces $f[T]$ es inyectivo. Además $f[T] : D(f[T]) \longrightarrow D(f[T])$ es biyectivo y el inverso viene dado por $g[T]|D(f[T])$, donde $g(\lambda) = \dfrac{1}{f(\lambda)}$ para todo $\lambda \in \sigma^f(T)$.*

Demostración:
Resulta claro que $\sigma^f(T) \subset \triangle(f) \cap \triangle(g)$. Consecuentemente, por la Proposición III.2.3, se cumple que

$$(fg)[T]x = f[T]g[T]x = g[T]f[T]x = x,$$

para todo $x \in D(f[T])$. Luego, existe el operador inverso $f[T]^{-1} = g[T]|D(f[T])$, ya que

$$f[T]g[T]|D(f[T]) = I|D(f[T])$$

y

$$g[T]f[T]|D(f[T]) = I|D(f[T]).$$

$\square$

En el siguiente lema se da una expresión de la función resolvente local utilizando como herramienta el cálculo funcional local.

Consideremos la función $f_\lambda : \mathbb{C} \setminus \{\lambda\} \to \mathbb{C}$ definida por $f_\lambda(\mu) := (\lambda - \mu)^{-1}$.

Lema III.2.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Si $\lambda \in \rho(x, T)$, entonces*

$$\widehat{x}_T(\lambda) = f_\lambda[T]x.$$

<u>Demostración</u>:

Sea $\lambda \in \rho(x, T)$. Aplicando el Teorema de Cauchy, obtenemos

$$\begin{aligned} f_\lambda[T]x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_\lambda(\mu)\widehat{x}_T(\mu)d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widehat{x}_T(\mu)}{\lambda - \mu}d\mu = \widehat{x}_T(\lambda), \end{aligned}$$

siendo Γ la frontera positivamente orientada de cualquier dominio de Cauchy acotado D tal que

$$\sigma(x, T) \subset D \subset \overline{D} \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}.$$

□

Algunas relaciones entre $f[T]$, $f[T|M]$, y $f[T/M]$

Dado un subespacio cerrado Y de X, denotaremos por Q_Y la *aplicación cociente*, es decir:

$$\begin{aligned} Q_Y : X &\longrightarrow X/Y \\ x &\longrightarrow x + Y \end{aligned}$$

que es lineal y continua.

Proposición III.2.4 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, $Y \in Inv(T)$ y $f : \triangle(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $D(f[T|Y]) \subset D(f[T]) \cap Y$. *Además* $D(f[T|Y]) = D(f[T]) \cap Y$ *si* Y *es un* μ-*espacio.*

(ii) $D(f[T/Y]) \subset Q_Y(D(f[T]))$.

Demostración:

(i) Por definición, se tienen las siguientes igualdades

$$D(f[T|Y]) := \{y \in Y \ : \ \sigma(y, T|Y) \subset \triangle(f)\}$$

$$Y \cap D(f[T]) =: \{y \in Y \ : \ \sigma(y, T) \subset \triangle(f)\}.$$

Luego por la ecuación (I.3.3)

$$\sigma(y, T) \subset \sigma(y, T|Y) \quad \text{para todo } y \in Y,$$

consecuentemente $D(f[T|Y]) \subset D(f[T]) \cap Y$. Si Y es μ-espacio, entonces para todo $y \in Y$, se tiene que $\sigma(y, T) = \sigma(y, T|Y)$, lo que garantiza la igualdad.

(ii) Dado $\mu \in \rho(x, T)$, existe un entorno V_μ de μ, tal que $(\lambda - T)\widehat{x}_T(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in V_\mu$. Entonces se cumple que

$$(\lambda - T/Y)(\widehat{x}_T(\lambda) + Y) = x + Y \tag{III.2.4}$$

Luego $\mu \in \rho(x + Y, T/Y)$ y por tanto $D(f[T/Y]) \subset Q_Y(D(f[T]))$. □

Observación III.2.1 Motivados por la proposición anterior, nos planteamos si dado un operador $T \in L(X)$ que verifica la SVEP, podemos encontrar siempre un subespacio mínimo $Z \in Inv(T)$, tal que verifique la siguiente igualdad

$$f[T|Z] = f[T]. \tag{III.2.5}$$

En la Proposición III.2.6 damos una respuesta afirmativa, para la cual necesitamos algunos resultados previos.

En el Capítulo primero, introdujimos algunos tipos de subespacios cerrados invariantes. En el próximo lema se caracteriza una condición análoga a la de ser μ-espacio pero para un subespacio invariante no necesariamente cerrado.

Lema III.2.2 *Sean $T \in C(X)$ un operador que verifica la SVEP e Y un subespacio no necesariamente cerrado tal que $Ty \in Y$ para todo $y \in Y$. Entonces $\sigma(y,T) = \sigma(y,T|Y)$ para todo $y \in Y$ si y sólo si*

$$\{\widehat{y}_T(\lambda) \quad : \quad \lambda \in \rho(y,T), \quad y \in Y\} \subset Y.$$

Demostración:

La demostración es análoga a [24, Proposition 4.8]. □

Proposición III.2.5 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica. Entonces $\sigma(y,T) = \sigma(y,T|D(f[T]))$ para todo $y \in D(f[T])$.*

Demostración:

Por el Lema III.2.2, bastará con probar que

$$\{\widehat{y}_T(\lambda) \quad : \quad \lambda \in \rho(y,T) \quad y \in D(f[T])\} \subset D(f[T]).$$

Dado $y \in X$, por el apartado (v) de la Proposición I.5.1 se tiene que

$$\sigma(\widehat{y}_T(\lambda),T) = \sigma(y,T), \quad \forall \lambda \in \rho(y,T),$$

entonces si $y \in D(f[T])$, se cumple que $\sigma(\widehat{y}_T(\lambda),T) = \sigma(y,T) \subset \triangle(f)$, es decir, $\widehat{y}_T(\lambda) \in D(f[T])$. □

Proposición III.2.6 *Sean T un operador lineal continuo que verifica la SVEP y $f : \triangle(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces*

$$f[T] = f[T|\overline{D(f[T])}]. \tag{III.2.6}$$

Demostración:

Denotemos $Y := D(f[T])$. Es claro que $\overline{Y}$ es un subespacio cerrado invariante por T, luego por (I.3.3),

$$\sigma(y,T) \subset \sigma(y,T|\overline{Y}),$$

para todo $y \in \overline{Y}$. Por la Proposición anterior se tiene que

$$\sigma(y, T|Y) = \sigma(y, T)$$

para todo $y \in Y$. Utilizando que $\sigma(y, T|\overline{Y}) \subset \sigma(y, T|Y)$ se obtiene que $\sigma(y, T|\overline{Y}) \subset \sigma(y, T)$, para todo $y \in Y$. Consecuentemente, se tiene que $D(f[T]) = D(f[T|\overline{Y}])$. Falta ver que para $y \in Y$ se tiene que $f[T]y = f[T|\overline{Y}]y$, lo que resulta claro ya que $\widehat{y}_T = \widehat{y}_{T|\overline{Y}}$ para $y \in Y$. □

Condiciones suficientes para que el operador $f[T]$ sea continuo o cerrado

El operador que resulta del cálculo funcional holomorfo es continuo, sin embargo el Ejemplo III.2.3 demuestra que el operador que resulta del cálculo funcional local, en general no es continuo, ni tan siquiera cerrado. En el siguiente teorema establecemos una condición suficiente para que sea continuo.

Teorema III.2.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica. Si $D(f[T])$ es cerrado, entonces el operador $f[T]$ es continuo. Además $f[T] = f(T|D(f[T]))$.*

<u>Demostración</u>:

Es suficiente demostrar la siguiente igualdad

$$f[T] = f[T|D(f[T])] = f(T|D(f[T])). \tag{III.2.7}$$

La primera parte de la igualdad se sigue claramente de la Proposición III.2.6, ya que $D(f[T])$ es cerrado. Por la Proposición III.2.5 se tiene que $D(f[T])$ es un μ-espacio, y por la Proposición I.4.2 el operador $T|D(f[T])$ verifica la SVEP. Luego utilizando la parte (vi) de la Proposición I.5.1 se obtiene que

$$\sigma^f(T) = \bigcup_{x \in D(f[T])} \sigma(x, T|D(f[T])) = \sigma(T|D(f[T])) \subset \triangle(f).$$

Por tanto, $f(T|D(f[T])) = f[T|D(f[T])]$, ya que f es analítica en un entorno de $\sigma(T|D(f[T]))$. $\square$

En el siguiente ejemplo se prueba que la condición suficiente dada en el Teorema III.2.2 no es en general necesaria, ni tan siquiera para operadores autoadjuntos en $\ell_2(\mathbb{N})$.

Ejemplo III.2.2 *Operador $f[T]$ continuo con dominio no cerrado.*

Sean T el operador definido en el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ por

$$\begin{array}{rcl} T : \ell_2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) & \longrightarrow & (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots), \end{array}$$

y $f(\lambda) = \operatorname{sen}\frac{1}{\lambda}$. Es claro que T es un operador autoadjunto; luego verifica la propiedad (C). Tomando $x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{N})$, para todo $\lambda \in \rho(x,T)$ tenemos

$$\widehat{x}_T(\lambda) = \left(\frac{x_n}{\lambda - \frac{1}{n}} \right),$$

luego

$$\sigma(x,T) := \overline{\{\frac{1}{n} \quad ; \quad \text{si } x_n \neq 0\}}.$$

Por tanto

$$D(f[T]) \quad = \quad \{x = (x_n) \in \ell_2(\mathbb{N}) \ : \ \exists n_0, \quad \forall n > n_0, \ \ x_n = 0\},$$

que no es cerrado. Además, si $x \in D(f[T])$, entonces $f[T]x = (x_n \operatorname{sen} n)$. Consecuentemente $\|f[T]\| \leq 1$. $\square$

Recordemos que un conjunto $\sigma \subset \sigma(T)$ es un *conjunto espectral de* T si es abierto y cerrado en la topología relativa de $\sigma(T)$. Obviamente, un punto aislado de $\sigma(T)$ es un conjunto espectral.

Sean $T \in L(X)$ y σ un conjunto espectral de T. Denotamos por $E(\sigma)$ a la proyección asociada al conjunto σ, definida por $E(\sigma) = f(T)$, donde $f(\lambda) = 1$ en un entorno de σ y $f(\lambda) = 0$ en un entorno de $\sigma(T) \setminus \sigma$.

Proposición III.2.7 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_1, σ_2 son conjuntos espectrales disjuntos de T y $f : \triangle(f) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, tal que $\sigma_1 \cap \triangle(f) = \varnothing$ y $\sigma_2 \cap \triangle(f) = \sigma_2$, entonces el operador $f[T]$ es un operador continuo y además*

$$f[T] = f[T_{\sigma_2}] = f(T_{\sigma_2}), \tag{III.2.8}$$

donde T_{σ_2} denota la restricción del operador T al rango de la proyección $E(\sigma_2)$.

Demostración:

Veamos que $D(f[T]) = D(f[T_{\sigma_2}])$. Utilizando [51, Theorem V.9.1] se tiene que $X = R(E(\sigma_1)) \oplus R(E(\sigma_2))$ y $T = T_{\sigma_1} \oplus T_{\sigma_2}$ donde $\sigma(T_{\sigma_i}) = \sigma_i$ para $i = 1, 2$. Sea $x \in D(f[T])$. Aplicando [13, Lemma 1.3] que asegura la siguiente descomposición del espectro local

$$\sigma(x, T) = \sigma(x_1 \oplus x_2, T_{\sigma_1} \oplus T_{\sigma_2}) = \sigma(x_1, T_{\sigma_1}) \cup \sigma(x_2, T_{\sigma_2}) \subset \triangle(f),$$

se tiene que si $\sigma(x, T) \subset \triangle(f)$, entonces $x_1 = 0$. Luego resulta claro que $x \in D(f[T_{\sigma_2}])$. Recíprocamente dado $x \in D(f[T_{\sigma_2}])$, se obtiene que

$$\sigma(x, T) \subset \sigma(x, T_{\sigma_2}) \subset \triangle(f)$$

luego $x \in D(f[T])$. De donde se deduce que $f[T] = f[T_{\sigma_2}]$ ya que las funciones resolventes locales de T y T_{σ_2} en x coinciden para $x \in D(f[T])$. La segunda igualdad es inmediata, ya que el rango de $E(\sigma_2)$ es cerrado por [51, Theorem V.9.2] y f es analítica en un entorno de $\sigma(T_{\sigma_2}) = \sigma_2 \subset \triangle(f)$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior se obtiene el siguiente corolario para operadores compactos.

Corolario III.2.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador compacto y f una función analítica tal que 0 pertenece al dominio de f. Entonces $f[T]$ es un operador continuo.*

Demostración:

Ya que f es analítica en un entorno del 0, existen dos conjuntos espectrales de T, σ_i

i=1,2 de modo que $\sigma_1 \cap \triangle(f) = \varnothing$, $\sigma_2 \cap \triangle(f) = \sigma_2$ y $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Luego el resultado se obtiene aplicando la proposición anterior. $\square$

Al estudiar las propiedades del operador $f[T]$ surge de forma natural la pregunta de si hay casos en los que el operador $f[T]$ sea cerrado y no continuo. La siguiente proposición nos da una respuesta parcial negativa.

Proposición III.2.8 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C) y f una función analítica. Si $f[T]$ es un operador cerrado, entonces $D(f[T])$ es cerrado, consecuentemente $f[T]$ es continuo.*

Demostración:

Como $f[T]$ es un operador cerrado, el grafo de $f[T]$ es cerrado. Sea $\{K_n\}$ una sucesión de conjuntos compactos tal que $K_n \subset int(K_{n+1})$ y $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \triangle(f)$, donde $int(K_n)$ denota el interior de K_n. Tenemos

$$D(f[T]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(T, K_n). \tag{III.2.9}$$

Demostremos entonces la siguiente igualdad

$$G(f[T]|D(f[T])) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(f[T]|X(T, K_n)). \tag{III.2.10}$$

En efecto, dado $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X(T, K_n)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x, T) \subset K_m$, por tanto el par $(x, f[T]x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G(f[T]|X(T, K_n))$. Y recíprocamente dado $(x, f[T]x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} G(f[T]|X(T, K_n))$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x, f[T]x) \in G(f[T]|X(T, K_m))$, por tanto $x \in X(T, K_m)$. Consecuentemente $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X(T, K_n)$; esto es, $(x, f[T]x) \in G(f[T])$. Con lo que se concluye la igualdad (III.2.10).

Por otra parte $X(T, K_n)$ es cerrado, ya que el operador T verifica la propiedad (C), luego $f[T]|X(T, K_n)$ es un operador cerrado, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene que

$$G(f[T]|X(T, K_n))$$

son subespacios cerrados para todo $n \in \mathbb{N}$. Además por (III.2.10) y por el Teorema de la Categoría de Baire, resulta que existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que

$$G(f[T]) = G(f[T]|X(T, K_m)),$$

luego $f[T] = f[T]|X(T, K_m) = f(T|X(T, K_m))$. Con lo que se deduce que $f[T]$ es un operador cerrado con dominio cerrado. Finalmente por el Teorema del Grafo Cerrado se concluye que es continuo. □

Desconocemos si la tesis de la proposición anterior es válida para operadores que verifican la SVEP y no satisfacen la propiedad (C).

Algunas condiciones necesarias y suficientes para que el dominio sea cerrado

En la siguiente proposición se caracteriza el caso en que el dominio del operador $f[T]$ sea cerrado, para T un operador que verifica la propiedad (C).

Proposición III.2.9 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C) y f una función analítica. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) $D(f[T])$ es un subespacio cerrado de X;

(ii) $D(f[T])$ es un subespacio de segunda categoría en sí mismo;

(iii) $\sigma^f(T)$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Demostración:

(i)⇒(ii) Consecuencia inmediata del Teorema de la Categoría de Baire.

(ii)⇒(iii) Sea $\{K_n\}$ una sucesión de compactos tal que $K_n \subset int(K_{n+1})$ y $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \triangle(f)$. Entonces

$$D(f[T]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(T, K_n).$$

Además T verifica la propiedad (C), por lo que $X(T, K_n)$ es cerrado para todo n. Por el Teorema de la Categoría de Baire se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D(f[T]) = X(T, K_{n_0})$, consecuentemente $D(f[T])$ es cerrado, y como $\sigma(x, T|D(f[T])) = \sigma(x, T)$ para todo $x \in D(f[T])$, (Proposición III.2.5) se cumple que

$$\sigma^f(T) = \bigcup_{x \in D(f[T])} \sigma(x, T|D(f[T])) = \sigma(T|D(f[T])).$$

Con lo que se concluye que $\sigma^f(T)$ es cerrado.

(iii)⇒(i) Como $\sigma^f(T)$ es cerrado, $X(T, \sigma^f(T))$ es cerrado, por lo que basta notar que $X(T, \sigma^f(T)) = D(f[T])$, por la definición de $\sigma^f(T)$. □

El dominio del operador $f[T]$ no es cerrado en general, ni siquiera para operadores con la propiedad (C), como se prueba en el siguiente ejemplo.

Ejemplo III.2.3 *Operador $f[T]$ no continuo, no cerrado y con dominio no cerrado.*

Sea T el operador multiplicación sobre el espacio de Hilbert $L_2[0, 1]$ definido por

$$\begin{array}{rcl} T : L_2([0,1]) & \longrightarrow & L_2([0,1]) \\ x(t) & \longrightarrow & tx(t). \end{array}$$

Tenemos que

$$\sigma(x, T) = \{\lambda \in [0, 1] \quad : \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \chi_{D(\lambda,\varepsilon)} x \neq 0\},$$

donde $\chi_{D(\lambda,\varepsilon)}$ denota la función característica del disco abierto de centro λ y radio ε.

Sea $f(\lambda) = 1/\lambda \in \mathcal{M}(T)$. Entonces es claro que $f[T]$ está definido por:

$$\begin{array}{rcl} f[T] : D(f[T]) & \longrightarrow & D(f[T]) \\ x(t) & \longrightarrow & \dfrac{x(t)}{t} \end{array}$$

para $t \neq 0$, donde

$$D(f[T]) = \{x(t) \in L_2([0, 1]) \ : \ \exists V_0 \text{ (entorno del cero) } x(V_0) \equiv 0\}.$$

Por tanto, $f[T]$ no es continuo, ya que si definimos $x_n(t)$ por

$$x_n(t) := \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

tenemos que $\|x_n\| = 1$ y $f[T]x_n(t)$, dado por

$$f[T]x_n(t) := \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{n}{n-1}} & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

cumple que $\|f[T]x_n\| = n$. Luego por el Teorema III.2.2 se tiene que $D(f[T])$ no es cerrado y por la Proposición III.2.8 que $f[T]$ no es cerrado, ya que T verifica la propiedad (C) por ser un operador normal. □

Algunas propiedades del $N(f[T])$ y $R(f[T])$

Antes de comenzar a dar condiciones para que $f[T]$ sea inyectivo, es necesario caracterizar el núcleo del operador $f[T]$.

Proposición III.2.10 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica que no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Entonces*

$$N(f[T]) = \oplus_{n=1}^{\infty} N((\alpha_i - T)^{n_i})$$

donde $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f con multiplicidad $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ respectivamente en $\triangle(f) \cap \sigma(T)$, y denotamos por $\oplus_{n=1}^{\infty} N((\alpha_i - T)^{n_i})$ las combinaciones lineales finitas de elementos de $\cup_{n=1}^{\infty} N((\alpha_i - T)^{n_i})$.

Demostración:

Sean $x \in N(f[T])$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, los ceros de f en $\sigma(x,T)$ con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_p$ respectivamente. Definimos el siguiente polinomio

$$p(\lambda) := \prod_{i=1}^{p} (\alpha_i - \lambda)^{n_i},$$

luego $f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)$, donde $g(\lambda) \neq 0$ en $\sigma(x,T)$. Entonces

$$f[T]x = g[T](\alpha_1 - T)^{n_1} \ldots (\alpha_p - T)^{n_p} x = 0.$$

Luego $x \in N(p(T)) = \oplus_{i=1}^{p} N((\alpha_i - T)^{n_i})$. Con lo que se tiene que

$$x \in N(p(T)) = \oplus_{i=1}^{p} N((\alpha_i - T)^{n_i}) \subset \oplus_{n=1}^{\infty} N((\alpha_i - T)^{n_i}).$$

Recíprocamente sea $x \in N((\alpha_i - T)^{n_i})$ para algún α_i cero de f. Entonces por el apartado (iv) de la Proposición I.5.1, $\sigma(x, T) = \{\alpha_i\}$, luego $x \in N(f[T])$. $\square$

Observación III.2.2 En las condiciones de la proposición anterior f puede tener un número infinito de ceros en $\triangle(f) \cap \sigma(T)$. Véase el Ejemplo III.2.5

Se define la *nulidad* de un operador T, como la dimensión de $N(T)$.

Corolario III.2.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica que no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$.*

(i) Una condición necesaria y suficiente para que el operador $f[T]$ sea inyectivo es que f no tenga ceros en $\sigma_p(T) \cap \sigma(x, T)$, para todo $x \in D(f[T])$.

(ii) Si $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ son los ceros de f en $\triangle(f) \cap \sigma_p(T)$, con multiplicidades $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ tal que la nulidad del operador $(\alpha_i - T)^{m_i}$ es finita para todos los α_i, entonces el operador $f[T]$ tiene nulidad finita.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de la Proposición III.2.10. $\square$

Observación III.2.3 El apartado (i) del corolario anterior se demostrará de forma distinta en el Corolario IV.1.5, utilizando algunos resultados sobre estabilidad del espectro local.

A continuación incluimos dos ejemplos de operadores, uno de ellos con nulidad finita y otro con nulidad infinita.

Ejemplo III.2.4 *Operador $f[T]$ con nulidad finita.*

Sea T el operador sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ definido por:

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) &\longrightarrow (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots). \end{aligned}$$

Si definimos $f(\lambda) := \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, entonces $f[T]$ está dado por

$$f[T] = (I - T)T^{-1}|D(f[T]),$$

donde

$$D(f[T]) = \{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sigma(x, T) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

coincide con el subespacio de las sucesiones finitamente no nulas. Además

$$f[T](x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = (0, -x_2, -2x_3, \ldots, -(n-1)x_n, 0, 0, \ldots).$$

Así el $N(f[T])$ coincide con el subespacio generado por e_1, tal que $f[T]x = 0$, luego la nulidad de $f[T]$ es 1. □

Ejemplo III.2.5 *Operador $f[T]$ con nulidad infinita.*

Sea T el operador sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ definido por:

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, \ldots) &\longrightarrow 2(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots) \end{aligned}$$

Sea $f(\alpha) = sen\frac{\pi}{\alpha}$. Tenemos $(\xi - T)e_n = (\xi - 2/n)e_n$; luego $\widehat{e_{nT}}(\xi) = (\xi - 2/n)^{-1}$, con lo que

$$f[T]e_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\xi - 2/n)^{-1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi} e_n d\xi = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} e_n.$$

Entonces, $e_{2n} \in N(f[T])$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con lo que se concluye que la nulidad de $f[T]$ es infinita. □

Se define el *ascendente* de un operador T como el mínimo entero $p \geq 0$ tal que se verifica

$$N(T^p) = N(T^{p+1}). \tag{III.2.11}$$

Lo denotaremos por $a(T)$. Si no existe un entero positivo que verifique (III.2.11) se dice que el ascendente es infinito.

Una consecuencia de la Proposición III.2.10 es el siguiente corolario.

Corolario III.2.3 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica que no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Si $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f en $\sigma(T)$ con multiplicidades $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ respectivamente, entonces el operador $f[T]$ tiene ascendente finito si $\sup_{i\in\mathbb{N}}\{p_i\} < \infty$, donde p_i es el ascendente del operador $\alpha_i - T$.*

<u>Demostración</u>:

Nótese que por la parte (ii) de la Proposición III.2.2, $D(f[T]^q) = D(f[T])$, para todo $q \in \mathbb{N}$. Luego aplicando la Proposición III.2.10, se deduce que

$$N(f[T]^p) = \oplus_{i=1}^{\infty} N((\alpha_i - T)^{pn_i}),$$

de donde se sigue claramente el resultado. $\square$

A continuación estudiamos el rango del operador $f[T]$ realizando un tratamiento parecido al del núcleo.

Proposición III.2.11 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica que no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Entonces*

$$R(f[T]) = (\cap_{i=1}^{\infty} R(\alpha_i - T)^{n_i}) \cap D(f[T]),$$

donde $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f en $\triangle(f) \cap \sigma(T)$ con multiplicidades $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ respectivamente.

<u>Demostración</u>:

Si $x \in R(f[T])$, entonces $x \in D(f[T])$ y además existe $y \in D(f[T])$ tal que $x = f[T]y$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, los ceros de f en $\sigma(y,T)$ con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_p$, respectivamente. Luego $f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)$, donde $g(\lambda) \neq 0$ para $\lambda \in \sigma(y,T)$ y p es el polinomio de los ceros de f en $\sigma(y,T)$. Por tanto

$$x = f[T]y = g[T]p(T)y = p(T)g[T]y,$$

por tanto resulta claro que $x \in R(p(T)) = \cap_{j=1}^{p} R(\alpha_j - T)^{n_j}$ por la Proposición II.2.1. Sea α_k cero de f en $\sigma(T) \cap \triangle(f)$, tal que $\alpha_k \neq \alpha_i$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,p\}$. Es claro que $\alpha_k \notin \sigma(x,T)$, ya que por la Proposición III.2.2 se tiene que $\sigma(x,T) = \sigma(f[T]y,T) \subset \sigma(y,T)$, por tanto por el Corolario I.5.1 se obtiene que $x \in R(\alpha_k - T)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, sea $x \in \cap_{i=1}^{\infty} R(\alpha_i - T)^{n_i} \cap D(f[T])$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son los ceros de f en $\sigma(x,T)$ con multipicidades $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Luego f puede ser expresada en un entorno de $\sigma(x,T)$ de la siguiente forma

$$f(\lambda) = g(\lambda)p(\lambda)$$

donde p es el polinomio de los ceros de f en $\sigma(x,T)$ y g es analítica en $\triangle(f)$ y distinta de cero en $\sigma(x,T)$. Por hipótesis se tiene que $x \in R(p(T)) = \cap_{i=1}^{k} R(\alpha_i - T)^{n_i}$, luego existe $y \in X$ tal que $x = p(T)y$. Ya que $x \in D(f[T])$, utilizando la Proposición I.5.2, se tiene que

$$\sigma(y,T) \subset \sigma(p(T)y,T) \cup \{\alpha \in \sigma(T) \ : \quad p(\alpha) = 0\} = \sigma(x,T),$$

ya que los ceros de p están en $\sigma(x,T)$. Consecuentemente $y \in D(g^{-1}[T])$, tomando $z = g^{-1}[T]y$ obtenemos $z \in D(g[T]) = D(f[T])$. Además $y = g[T]z$, con lo que $x = g[T]p(T)z = f[T]z \in R(f[T])$. □

Se define el *defecto*, de un operador T como la dimensión de $X/R(T)$.

Corolario III.2.4 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica. Si $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ son los ceros de f en $\triangle(f) \cap \sigma(T)$, con multiplicidad $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ tal que el defecto del operador $(\alpha_i - T)^{m_i}$ es finito para todos los α_i entonces el operador $f[T]$ tiene defecto finito.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata de la Proposición III.2.11. □

Se define el *descendente* de un operador T como el mínimo entero $q \geq 0$, tal que se verifica

$$R(T^q) = R(T^{q+1}). \tag{III.2.12}$$

Lo denotaremos por $d(T)$. Si no existe un entero positivo que verifique (III.2.12) se dice que el descendente es infinito.

Corolario III.2.5 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y f una función analítica, que no es idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Si $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son los ceros de f en $\sigma(T)$ con multiplicidades $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ respectivamente, entonces el operador $f[T]$ tiene descendente finito si $\sup_{i\in\mathbb{N}}\{q_i\} < \infty$, donde q_i es el descendente del operador $\alpha_i - T$.*

Demostración:

Como en el Corolario III.2.3, tenemos $D(f[T]^q) = D(f[T])$ para todo $q \in \mathbb{N}$. Por la Proposición III.2.11, se cumple que

$$R(f[T]^q) = \cap_{i=1}^{\infty} R((\alpha_i - T)^{qn_i}) \cap D(f[T]),$$

de donde se sigue claramente el resultado. □

III.3 Teorema de la aplicación espectral local

Uno de los resultados más importantes en la teoría espectral es el Teorema de la aplicación espectral, que demostramos en el próximo teorema para el espectro local y el cálculo funcional local.

Teorema III.3.1 (Teorema de la aplicación espectral local) *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la propiedad (C) y f una función analítica. Entonces*

$$f(\sigma(x,T)) = \sigma(x, f[T])$$

para todo $x \in D(f[T])$.

Demostración:

Veamos que $f(\sigma(x,T)) \subset \sigma(x, f[T])$. Sean $\lambda_0 \in \triangle(f)$ con $f(\lambda_0) \in \rho(x, f[T])$ y G un entorno abierto de λ_0 tal que $f(G) \subset \rho(x, f[T])$. Si denotamos por u la función resolvente local de $f[T]$ en x, entonces

$$(f(\lambda) - f[T])u(f(\lambda)) = x,$$

para todo $\lambda \in G$. Luego la función $g : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g_\lambda(\mu) = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} & \text{si } \mu \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } \mu = \lambda \end{cases}$$

es analítica en $\lambda \in G$ y $\mu \in \triangle(f)$. Usando el cálculo funcional local se obtiene que

$$(f(\lambda) - f[T])u(f(\lambda)) = (\lambda - T)g_\lambda[T]u(f(\lambda)) = x.$$

Haciendo la misma demostración hecha en la Proposición III.2.2 se tiene que $g_\lambda[T]u(f(\lambda))$ es una función analítica en G, por tanto $\lambda_0 \in \rho(x,T)$.

Para demostrar la inclusión contraria, sea $F := \sigma(x,T)$. Luego $X(T,F)$ es un subespacio cerrado ya que T verifica la propiedad (C). Además si denotamos $S := T|X(T,F)$, entonces $\sigma(S) \subset \triangle(f)$. Por tanto usando que $\sigma(x,S) = \sigma(x,T)$ y que $f(S) = f[T]|X(T,F)$, obtenemos

$$\sigma(x, f[T]) \subset \sigma(x, f(S)) = f(\sigma(x,S)) = f(\sigma(x,T)).$$

$\square$

III.4 Comparación con el cálculo funcional meromorfo

Dado un operador A se dice que es *precerrado* si existe un operador B tal que $G(B) = \overline{G(A)}$. Esto es, si existe una extensión cerrada del operador A. Una caracterización de operador precerrado interesante es la que se recoge en [29, II. 2.11 Theorem]: si la sucesión $(x_n) \subset D(A)$ es tal que $x_n \to 0$ y $Ax_n \to y$, entonces $y = 0$.

El cálculo meromorfo como extensión del cálculo local

Nuestro objetivo ahora es determinar condiciones que debe verificar el operador T, o bien la función analítica f, de modo que el operador del cálculo funcional local $f[T]$ sea precerrado. Recordemos que $\mathcal{M}(T)$ es la clase de funciones admisibles para el cálculo funcional meromorfo.

Lema III.4.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f \in \mathcal{M}(T)$. Si $x \in D(f[T])$, entonces existe $y \in D(f[T])$ tal que $x = p(T)y$, donde p es el polinomio de los polos de f en $\sigma(x,T)$.*

Demostración:
Si $x \in D(f[T])$, entonces los ceros de p no pertenecen a $\sigma(x,T)$, por tanto aplicando el Corolario I.5.1 se obtiene que $x \in R(p(T))$. Luego existe $y \in X$ tal que $x = p(T)y$. Teniendo en cuenta el Lema II.2.2, tenemos que

$$\sigma(x,T) = \sigma(p(T)y,T) = \sigma(y,T) \subset \triangle(f).$$

Consecuentemente $y \in D(f[T])$. □

Teorema III.4.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si $f \in \mathcal{M}(T)$, entonces el operador $f\{T\}$ es una extensión cerrada de $f[T]$.*

Demostración:
Consideremos el polinomio p de los polos de f dado por $p(\lambda) := \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i - \lambda)^{n_i}$, y

escribimos $f(\lambda) = \dfrac{g(\lambda)}{p(\lambda)}$ donde g es analítica en $\sigma(T)$. Si $x \in D(f[T])$, entonces $\alpha_i \in \rho(x, T)$ y por el Corolario I.5.1 se tiene que $x \in R(\alpha_i - T)^{n_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por la Proposición II.2.1 tenemos $D(f\{T\}) = R(p(T)) = \cap_{i=1}^{k} R(\alpha_i - T)^{n_i}$. Y así $D(f[T]) \subset D(f\{T\})$.

Usando el lema anterior, para $x \in D(f[T])$ existe $y \in D(f[T])$ tal que $x = p(T)y$. Por tanto, aplicando la Proposición III.2.3, se tiene que

$$\begin{aligned} f[T]x &= f[T]p[T]y = (fp)[T]y = g[T]y \\ &= g(T)y = g(T)p(T)^{-1}x = f\{T\}x. \end{aligned}$$

□

Corolario III.4.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si $f \in \mathcal{M}(T)$, entonces el operador $f[T]$ es precerrado.*

En el siguiente ejemplo se prueba que en general

$$D(f[T]) \neq D(f\{T\}).$$

Ejemplo III.4.1 *Operador T y función f tales que $D(f[T]) \subsetneq D(f\{T\})$.*

Sean T el operador sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ definido por

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\longrightarrow (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \ldots), \end{aligned}$$

y $f(\lambda) = 1/\lambda$. Tenemos $\sigma(T) = \{\frac{1}{n} \ : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, siendo $0 \notin \sigma_p(T)$, por tanto $f \in \mathcal{M}(T)$. Por la definición del cálculo funcional meromorfo se tiene que $f\{T\} = T^{-1}$ con $D(f\{T\}) = R(T)$. Luego $x = (\dfrac{1}{n^2}) \in R(T)$, aunque $0 \in \sigma(x, T)$, por lo que $x \notin D(f[T])$.

Cuestión III.4.1 Una cuestión pendiente de estudio es determinar si el operador que resulta del cálculo funcional local es siempre precerrado.

Condiciones suficientes para la igualdad $\overline{f[T]} = f\{T\}$

Para cierta clase de operadores T podemos asegurar que la mínina extensión cerrada del operador $f[T]$ es la que define el operador del cálculo funcional meromorfo.

Proposición III.4.1 *Sean T un operador normal sobre un espacio de Hilbert H y $f \in \mathcal{M}(T)$. Entonces $\overline{G(f[T])} = G(f\{T\})$.*

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, basta con probar el resultado para f con un sólo polo $\alpha_0 \in \sigma(T)\backslash\sigma_p(T)$. Por el Teorema III.4.1, tenemos que $\overline{G(f[T])} \subset G(f\{T\})$. Denotemos por E la proyección espectral asociada al operador T. Sea $x \in D(f\{T\})$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, los siguientes conjuntos

$$F_n := \sigma(T) \setminus \{\lambda : \quad |\lambda - \alpha_0| < \frac{1}{n}\}.$$

y

$$\begin{aligned} G_1 &:= F_1 \\ G_n &:= F_n \setminus F_{n-1}. \end{aligned}$$

Por la parte (ii) de la Proposición I.4.3 se tiene que

$$H(T, G_k) = R(E(G_k)),$$

luego $x_n := \sum_{k=1}^n E(G_k)x \in D(f[T])$. Y como la resolución de la identidad es contablemente aditiva resulta que $\sum\limits_{k=1}^n E(G_k)x$ converge a $E(\sigma(T) \setminus \{\alpha_0\})x$. Veamos que $E(\alpha_0)x = 0$. En efecto, por la Proposición I.4.3 se obtiene que $\sigma(E(\alpha_0)x, T) \subset \{\alpha_0\}$, luego si $E(\alpha_0)x \neq 0$, entonces $\sigma(E(\alpha_0)x, T) = \{\alpha_0\}$. Y utilizando [35, Lemme 3.15] (Observación I.5.1) se obtiene que $\alpha_0 \in \sigma_p(T)$, lo que no puede ser ya que α_0 es un polo de f. Luego $\sum_{k=1}^n E(G_k)x$ converge a x. Además

$$\begin{aligned} f[T]x_n &= f[T]\left(\sum_{k=1}^n E(G_k)x\right) = \sum_{k=1}^n f[T]E(G_k)x \\ &= \sum_{k=1}^n f\{T\}E(G_k)x = \sum_{k=1}^n E(G_k)f\{T\}x. \end{aligned}$$

Luego $f[T]x_n$ converge a $(I - E(\{\alpha_0\}))f\{T\}x = f\{T\}x$, por tanto

$$G(f\{T\}) \subset \overline{G(f[T])}.$$

$\square$

III.5 El cálculo funcional local para operadores normales

En esta sección se presenta una expresión del cálculo funcional local para cualquier función analítica f con dominio $\triangle(f)$ y cualquier operador normal T sobre un espacio de Hilbert separable H. Nuestra aproximación a dicho problema consiste, en primer lugar, en el estudio del operador multiplicación sobre el espacio $L_2(\mu)$, que es normal, donde μ es una medida positiva finita, para posteriormente generalizar dichos resultados a los operadores normales sobre espacios de Hilbert separables. Con el objetivo de trasladar las propiedades del cálculo funcional local del operador multiplicación a un operador normal arbitrario, utilizaremos como herramienta fundamental el resultado [51, Theorem VII.7.4], que nos asegura que un operador T normal en un espacio de Hilbert separable puede ser expresado de la siguiente forma

$$T = U^{-1}MU,$$

donde U es un operador unitario ($UU^* = I$) definido de H en $L_2(\mu)$ para cierta medida μ positiva y finita en $\sigma(M)$, y M es el operador multiplicación definido en $L_2(\mu)$.

Se define el operador multiplicación M sobre el espacio de Hilbert $L_2(\mu)$ para cualquier medida μ positiva finita, por $Mx(\lambda) := \lambda x(\lambda)$. Entonces el soporte de la medida μ es el espectro del operador M.

Proposición III.5.1 *Sea M el operador multiplicación en $L_2(\mu)$ y $x \in L_2(\mu)$. Entonces*

$$\sigma(x, M) = \{\lambda \in \sigma(M) \ : \ \forall \varepsilon > 0, \quad \chi_{D(\lambda,\varepsilon)}x \neq 0\},$$

donde $\chi_{D(\lambda,\varepsilon)}$ denota la función característica del disco abierto de centro λ y radio ε.

Demostración:

Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\chi_{D(\lambda,\varepsilon)}x = 0$ para casi todo punto. Por tanto eligiendo $\widehat{x}_M(\lambda)(\xi) = \dfrac{x(\xi)}{\lambda - \xi}$, tenemos que $\widehat{x}_M(\lambda)$ es analítica, pertenece a $L_2(\mu)$ y verifica que $(\lambda - M)\widehat{x}_M(\lambda) = x$ en un entorno de λ, por tanto $\lambda \in \rho(x, M)$. Recíprocamente, si $\lambda \in \rho(x, M)$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $D(\lambda, \varepsilon) \subset \rho(x, M)$, obtenemos que $x \in R(\delta - M)$ para cada $\delta \in D(\lambda, \varepsilon)$. Por tanto

$$\frac{x(\xi)}{\delta - \xi} \in L_2(\mu),$$

para todo $\delta \in D(\lambda, \varepsilon)$, y concluimos que $\chi_{D(\lambda,\varepsilon)}x = 0$ en casi todo punto. $\square$

Teorema III.5.1 *Sea $M \in L(L_2(\mu))$ el operador multiplicación y f una función analítica en $\triangle(f)$. Se verifican las siguientes propiedades*

(i) Si $x \in D(f[M])$, entonces $f[M]x = fx$.

(ii) $f[M]$ es inyectivo si y sólo si f no es idénticamente nula en ninguna componente de $\triangle(f)$ que corte a $\sigma(M)$ y no tiene ceros en $\sigma_p(M)$.

(iii) Si f es una función analítica en $\sigma(M) \setminus \{\alpha_0\}$ y α_0 no es un punto aislado de $\sigma(M)$, entonces $f[M]$ es continuo si y sólo si $f \in L_\infty(\mu)$. Además $f[M]$ es siempre precerrado.

(iv) El dominio del operador $f[M]$ es denso si y sólo si $\mu(\sigma(M) \setminus \triangle(f)) = 0$.

Demostración:

(i) Si $x \in D(f[M])$, entonces $x(\xi) = 0$ en casi todo punto de $\triangle(f) \setminus \sigma(M)$. Por tanto

$$\begin{aligned} f[M]x(\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\widehat{x}_M(\lambda)(\xi)d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)\frac{x(\xi)}{\lambda - \xi}d\lambda = f(\xi)x(\xi) \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \triangle(f) \cap \sigma(M)$ y 0 en el resto de $\sigma(M)$.

(ii) Es claro usando la definición de $f[T]$.

(iii) La primera parte es fácil utilizando la definición de $f[T]$.

Con el fin de probar que $f[M]$ es precerrado, tomamos $\{x_n\} \subset D(f[M])$ convergiendo a 0 tal que $\{f[M]x_n\}$ converge a y, y tenemos que probar que $y = 0$. Escogemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converja a 0 en casi todo punto. Luego $\{f(z)x_{n_k}(z)\}$ converge a 0 en casi todo punto, por tanto $y = 0$. Así queda demostrado que $f[M]$ es precerrado.

(iv) Supongamos que $\mu(\sigma(M) \setminus \triangle(f)) = 0$ y consideremos los conjuntos compactos

$$K_n := \{\alpha \ : \ |\alpha| \leq n\} \cap \{\alpha \ : \ d(\alpha, \mathbb{C} \setminus \triangle(f)) \geq n^{-1}\},$$

que verifican $\triangle(f) = \cup_{n=0}^{\infty} K_n$. Dado $x \in L_2(\mu)$, definimos $x_n := \chi_{F_n} x$, donde $F_n := \cup_{i=0}^{n} K_i \cap \sigma(M)$. Tenemos que $x_n \in D(f[T])$, ya que $\sigma(x_n, M) \subset F_n \subset \triangle(f)$. Además por el Teorema de la Convergencia Dominada se concluye que x_n converge a x cuando n tiende a infinito.

En el caso $\mu(\sigma(M) \setminus \triangle(f)) \neq 0$, claramente $\overline{D(f[M])} \neq L_2(\mu)$. $\square$

Teniendo en cuenta las propiedades del operador multiplicación en $L_2(\mu)$, derivamos algunas propiedades del cálculo funcional local para un operador normal sobre un espacio de Hilbert.

Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert separable H. Por [51, Theorem VII.7.4], existe un espacio $L_2(\mu)$ y un operador unitario $U : H \longrightarrow L_2(\mu)$ de modo que

$$T = U^{-1} M U, \tag{III.5.13}$$

donde M es el operador multiplicación por λ. Entonces es inmediato aplicando [55], que

$$\sigma(x, T) = \sigma(Ux, M) \tag{III.5.14}$$

para todo $x \in H$, y es fácil probar que $U(D(f[T])) = D(f[M])$ y $f[T]x = U^{-1} f[M] U x$, para todo $x \in D(f[T])$.

El siguiente corolario es inmediato considerando la definición de $f[T]$ y el Teorema III.5.1.

Corolario III.5.1 *Sean T un operador normal en un espacio de Hilbert separable H y f una función analítica en $\triangle(f)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$f[T]$ es inyectivo si y sólo si f no es idénticamente nula en ninguna componente de $\triangle(f)$ que corte a $\sigma(T)$ y no tiene ceros en el espectro puntual de T.*

(ii) *Si f es una función analítica en $\sigma(T) \setminus \{\alpha_0\}$ de modo que α_0 no es aislado de $\sigma(T)$, entonces $f \in L_\infty(\mu)$ si y sólo si $f[T]$ es continuo. Además $f[T]$ es siempre precerrado.*

(iii) *El dominio de $f[T]$ es denso si y sólo si $\mu(\sigma(T) \setminus \triangle(f)) = 0$.*

Capítulo IV

Propiedades del espectro local y de la función resolvente local

En este capítulo abordamos cinco tipos de cuestiones de la teoría espectral local que detallamos brevemente a continuación. Además damos algunas aplicaciones del cálculo funcional local a la teoría espectral local.

En la sección IV.1 establecemos algunas condiciones que implican la igualdad entre los espectros locales

$$\sigma(x, T) = \sigma(f[T]x, T), \tag{IV.1}$$

donde $T \in L(X)$ **y** $f[T]x$ **está definido por el cálculo funcional local. Además damos condiciones suficientes para la estabilidad del espectro local en el sentido de la ecuación (IV.1) para los cálculos funcionales holomorfo y meromorfo.**

En la sección IV.2 probamos un Teorema sobre la descomposición del espectro local, similar a [51, Theorem V.9.1]. Obtenemos los resultados de Schmoeger [44, Theorem 4] y Mbekhta [36, Theorem 1.6] como casos particulares, cuando el operador verifica la propiedad (C).

En la sección IV.3 proporcionamos dos caracterizaciones de las singularidades aisladas de la función resolvente local de un operador $T \in L(X)$ **en un punto** $x \in X$**: en términos de una descomposición adecuada de** x **y en términos de la existencia de una sucesión en** X **relacionada con la serie de Laurent de la función resolvente local. Además, introducimos los operadores localmente de cadena finita en un punto** $x \in X$**, probando que** T **es de cadena finita si y sólo si** T **es localmente de cadena finita en todo** $x \in X$**.**

En la sección IV.4 obtenemos las ecuaciones de la función resolvente local. Como aplicación de dichas ecuaciones damos una expresión de la función resolvente local y un resultado de perturbación del cálculo funcional local con operadores cuasinilpotentes.

En la sección IV.5 estudiamos relaciones del espectro local con las series de Neumann, semejantes a resultados ya conocidos de la teoría espectral clásica.

IV.1 La estabilidad del espectro local

Fijados $T \in L(X)$ y $x \in X$, en esta sección buscamos familias de vectores $y \in X$ que tengan el mismo espectro local que x, es decir

$$\sigma(y,T) = \sigma(x,T). \tag{IV.1.2}$$

Este problema ha recibido la atención de varios autores. Erdelyi y Lange [23] demuestran que si T verifica la SVEP, entonces

$$\sigma(\widehat{x}_T(\lambda),T) = \sigma(x,T)$$

para todo $\lambda \in \rho(x,T)$. Además, si $A \in L(X)$ conmuta con T, entonces se verifica la siguiente inclusión

$$\sigma(Ax,T) \subset \sigma(x,T). \tag{IV.1.3}$$

En particular, si existe $A^{-1} \in L(X)$, entonces

$$\sigma(Ax,T) = \sigma(x,T). \tag{IV.1.4}$$

De (IV.1.3) y la Proposición I.5.2 se sigue que, dados $\lambda \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma((\lambda - T)^n x,T) \subset \sigma(x,T) \subset \sigma((\lambda - T)^n x,T) \cup \{\lambda\}. \tag{IV.1.5}$$

Por lo tanto, si $\lambda \notin \sigma(x,T)$, se obtiene que

$$\sigma((\lambda - T)^n x,T) = \sigma(x,T).$$

Finalmente, McGuire [38, Theorem 1.5] prueba que si H es un espacio de Hilbert separable, $T \in L(H)$ tiene espectro puntual vacío y $f \in \mathcal{A}(x,T)$ es una función no idénticamente nula en ninguna componente de su dominio, entonces

$$\sigma(f[T]x,T) = \sigma(x,T). \tag{IV.1.6}$$

En esta sección establecemos condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la igualdad

$$\sigma(Ax,T) = \sigma(x,T),$$

donde A es un operador que es imagen de T por alguno de los cálculos funcionales que consideramos en esta tesis (holomorfo, meromorfo y local).

La estabilidad por la acción de polinomios

En el Lema II.2.2 se dio una condición suficiente para la igualdad (IV.1.2) con $y = p(T)x$, donde p es un polinomio tal que las raíces de p no se encuentran en $\sigma_p(T)$. A continuación damos condiciones necesarias y suficientes para dicha igualdad.

Teorema IV.1.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Sean $x \in X$ y*

$$p(\lambda) := (\alpha_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\alpha_p - \lambda)^{n_p}$$

un polinomio con $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$. Entonces

$$\sigma(p(T)x, T) = \sigma(x, T)$$

si y sólo si no existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que α_i es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden $\leq n_i$.

En particular, si ningún α_i es un punto aislado de $\sigma(x, T)$, entonces $\sigma(p(T)x, T) = \sigma(x, T)$.

Demostración:

Supongamos primeramente que $p(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$. Probaremos que

$$\sigma((\alpha - T)^n x, T) \neq \sigma(x, T) \tag{IV.1.7}$$

si y sólo si α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden $\leq n$. El caso general, se demuestra por iteración de este resultado.

Teniendo en cuenta las siguientes inclusiones

$$\sigma((\alpha - T)^n x, T) \subset \sigma(x, T) \subset \sigma((\alpha - T)^n x, T) \cup \{\alpha\},$$

la ecuación (IV.1.7) es equivalente a que $\alpha \in \sigma(x, T) \cap \rho((\alpha - T)^n x, T)$, e implica que α es un punto aislado de $\sigma(x, T)$. Tenemos que $\alpha \in \rho((\alpha - T)^n x, T))$ si y sólo si la función $(\alpha - T)^n \widehat{x}_T$ es continua en α, ya que $(\alpha - T)^n \widehat{x}_T$ es la función resolvente local de T en $(\alpha - T)^n x$ en un entorno de α.

Considerando la expresión del Binomio de Newton resulta que

$$(\alpha - T)^n = (\alpha - \mu + \mu - T)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha - \mu)^r (\mu - T)^{n-r},$$

y denotando

$$A(\mu, \alpha) := \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} (\alpha - \mu)^r (\mu - T)^{n-r},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \to \alpha} (\alpha - T)^n \widehat{x}_T(\mu) &= \lim_{\mu \to \alpha} [(\alpha - \mu)^n \widehat{x}_T(\mu) + A(\mu, \alpha) \widehat{x}_T(\mu) + (\mu - T)^n \widehat{x}_T(\mu)] \\ &= \lim_{\mu \to \alpha} (\alpha - \mu)^n \widehat{x}_T(\mu) + (\alpha - T)^{n-1} x. \end{aligned}$$

Usando esta igualdad es claro que la función $(\alpha - T)^n \widehat{x}_T$ es continua en α si y sólo si $\widehat{x}_T$ tiene un polo en α de orden $\leq n$. $\square$

De las relaciones de inclusión (IV.1.5) se sigue la siguiente cadena de inclusiones de los espectro locales

$$\sigma(x, T) \supset \sigma((\alpha - T)x, T) \supset \ldots \supset \sigma((\alpha - T)^{n-1} x, T) \supset \sigma((\alpha - T)^n x, T) \supset \ldots \quad \text{(IV.1.8)}$$

donde el único escalar en que pueden diferir estos conjuntos es α. Por tanto, si $\alpha \in \sigma((\alpha - T)^{n-1} x, T) \setminus \sigma((\alpha - T)^n x, T)$, entonces la cadena (IV.1.8) se convierten en a la siguiente

$$\sigma(x, T) = \sigma((\alpha - T)x, T) = \ldots = \sigma((\alpha - T)^{n-1} x, T) \neq \sigma((\alpha - T)^n x, T) = \ldots.$$

De aquí utilizando la parte (i) del Corolario IV.1.1, se sigue que una condición necesaria y suficiente para que α sea polo de la función resolvente local de T en x es que la cadena de igualdades "se rompa" entre los vectores $(\alpha - T)^{n-1} x$ y $(\alpha - T)^n x$.

Corolario IV.1.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n si y sólo si $\alpha \in \sigma((\alpha - T)^{n-1}x, T) \setminus \sigma((\alpha - T)^n x, T)$.*

(ii) *Si $\widehat{x}_T$ tiene un polo en α, entonces $\alpha \in \sigma_p(T)$.*

(iii) *Si $\lambda \in \rho(x, T)$ y denotamos por $y := \widehat{x}_T(\lambda)$, entonces $\widehat{x}_T$ tiene un polo de orden n en α si y sólo si $\widehat{y}_T$ tiene un polo de orden n en α.*

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata del Teorema IV.1.1.

(ii) Supongamos que α es un polo de orden n de $\widehat{x}_T$. Entonces $y := \lim_{\mu \to \alpha}(\mu - \alpha)^n \widehat{x}_T(\mu) \neq 0$. Además $y \in N(\alpha - T)$. En efecto,

$$(\alpha - T)y = \lim_{\mu \to \alpha} \Big[-(\mu - \alpha)^{n+1} \widehat{x}_T(\mu) + (\mu - \alpha)^n x \Big] = 0.$$

(iii) Nótese que $\sigma(x, T) = \sigma(\widehat{x}_T(\lambda), T)$ y que la función resolvente local de T en $(\alpha - T)^k x$ coincide con $(\alpha - T)^k \widehat{x}_T(\mu)$ para cualquier $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Luego basta aplicar la parte (i). $\square$

Corolario IV.1.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP , $x \in X$ y p un polinomio. Entonces*

$$\sigma(x, T) = \sigma(p(T)x, T) \cup \{\alpha \in \sigma(x, T) \cap \sigma_p(T) \;\; : \;\; p(\alpha) = 0\}. \tag{IV.1.9}$$

Demostración:

Para demostrar (IV.1.9) es suficiente con ver que si $\alpha \notin \sigma(x, T) \cap \sigma_p(T)$, entonces

$$\sigma(x, T) \subset \sigma((\alpha - T)x, T). \tag{IV.1.10}$$

Si $\alpha \notin \sigma(x, T)$ el resultado es claro. Y si $\alpha \in \sigma(x, T) \setminus \sigma_p(T)$, α no es un polo de $\widehat{x}_T$ por la parte (ii) del Corolario IV.1.1. Luego aplicando el Teorema IV.1.1 obtenemos la igualdad buscada. $\square$

Observación IV.1.1 Del corolario anterior se sigue lo siguiente:

(a) si p no tiene ceros en $\sigma(x, T) \cap \sigma_p(T)$, entonces

$$\sigma(p(T)x, T) = \sigma(x, T).$$

(b) si p es un polinomio sin ceros en $\sigma_p(T)$, y $z \in D(p(T)^{-1}) = R(p(T))$, entonces

$$\sigma(p(T)^{-1}z, T) = \sigma(z, T).$$

Para la segunda parte es suficiente aplicar la primera a $x \in X$ tal que $z = p(T)x$.

En general el recíproco de la parte (a) de la Observación IV.1.1 no es cierto como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.1.1 *Operador T tal que $\sigma(p(T)x, T) = \sigma(x, T)$ con $\alpha \in \sigma_p(T) \cap \sigma(x, T)$ y α cero de p.*

Sean $B([0, 1])$ el espacio de Banach de todas las funciones acotadas de [0,1] en $\mathbb{C}$, con la norma del supremo, y T el operador en $B([0, 1])$ definido por $(Tx)(t) = tx(t)$ para $t \in [0, 1]$. Si $x \in B([0, 1])$, entonces $\widehat{x}_T(\mu)(t) = x(t)/(\mu - t)$. Por tanto, si $x(t)$ se define como

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

entonces $\sigma(x, T) = [\frac{1}{2}, 1]$, con lo que se deduce que $1 \in \sigma(x, T) \cap \sigma_p(T)$. Consideramos $p(\lambda) := 1 - \lambda$, luego

$$(I - T)x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - t & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

por tanto $\sigma((I - T)x, T) = [\frac{1}{2}, 1] = \sigma(x, T)$. □

La estabilidad por la acción de los cálculos funcionales

A continuación estudiamos la estabilidad del espectro local para la familia de vectores dados por los diferentes cálculos funcionales (holomorfo, meromorfo y local).

En la siguiente proposición establecemos una condición suficiente para que se verifique la siguiente igualdad

$$\sigma(f[T]x, T) = \sigma(x, T),$$

donde $f \in \mathcal{A}(x, T)$.

Proposición IV.1.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, $x \in X$ y $f \in \mathcal{A}(x, T)$. Si f no tiene ceros en $\sigma(x, T)$, entonces*

$$\sigma(f[T]x, T) = \sigma(x, T).$$

Demostración:

Por la parte (ii) de la Proposición III.2.2, se cumple que $\rho(x, T) \subset \rho(f[T]x, T)$, con lo que es suficiente probar que $\rho(f[T]x, T) \subset \rho(x, T)$. Denotemos $y := f[T]x$ y $h(\lambda) := 1/f(\lambda)$. Por la parte (ii) de la Proposición III.2.2, se obtiene que $h[T]\widehat{y}_T(\lambda)$ es una función analítica en $\rho(y, T)$, y usando la Proposición III.2.3 se tiene la siguiente igualdad

$$(\mu - T)h[T]\widehat{y}_T(\mu) = h[T]y = x,$$

para todo $\mu \in \rho(y, T)$, ya que $\widehat{y}_T(\mu) \in D(h[T])$, de donde se deduce que $\rho(f[T]x, T) \subset \rho(x, T)$. □

Teorema IV.1.2 (Teorema de estabilidad del espectro local) *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, $x \in X$ y $f \in \mathcal{A}(x, T)$. Sean $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ los ceros de la función f en $\sigma(x, T)$ con multiplicidades $n_1, \ldots, n_p$, respectivamente. Entonces se tiene*

$$\sigma(f[T]x, T) = \sigma(x, T)$$

si y sólo si ningún α_i es polo de $\widehat{x}_T$ de orden $\leq n_i$.

Demostración:

Escribimos $f(\lambda) = p(\lambda)g(\lambda)$, donde $g \neq 0$ en $\sigma(x, T)$ y $p(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \lambda)^{n_i}$. Por la parte (vii) de la Proposición I.5.1, se obtiene que $\sigma(p(T)x, T) \subset \sigma(x, T)$, y como g

no tiene ceros en $\sigma(x,T)$, tampoco los tiene en $\sigma(p(T)x,T)$. Aplicando la Proposición IV.1.1 a la función g y al vector $p(T)x$ obtenemos

$$\sigma(f[T]x,T) = \sigma(g[T]p(T)x,T) = \sigma(p(T)x,T),$$

y aplicando el Teorema IV.1.1 concluye la demostración. $\square$

La igualdad (IV.1.6), dada por McGuire, se obtiene como consecuencia inmediata del siguiente Corolario.

Corolario IV.1.3 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, $x \in X$ y $f \in \mathcal{A}(x,T)$ no idénticamente nula en ninguna componente que corte a $\sigma(T)$. Entonces*

$$\sigma(x,T) = \sigma(f[T]x,T) \cup \{\alpha \in \sigma_p(T) \cap \sigma(x,T) \quad : \quad f(\alpha) = 0\}.$$

Demostración:

Es clara por la Proposición IV.1.1 y el Corolario IV.1.2. $\square$

Corolario IV.1.4 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $f \in \mathcal{A}(T)$. Entonces*

$$\sigma(x,T) = \sigma(f(T)x,T) \cup \{\alpha \in \sigma(x,T) \cap \sigma_p(T) \quad : \quad f(\alpha) = 0\}.$$

Del siguiente corolario se deriva una caracterización para que una función f verifique la igualdad

$$\sigma(f[T]x,T) = \sigma(x,T), \text{ para todo } x \in D(f[T]).$$

Corolario IV.1.5 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si f es una función analítica que no es idénticamente nula en ninguna componente de su dominio que corte a $\sigma(T)$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) f no tiene ceros en $\sigma_p(T) \cap \sigma(x,T)$, para todo $x \in D(f[T])$.

(ii) $\sigma(f[T]x,T) = \sigma(x,T)$, para todo $x \in D(f[T])$.

(iii) $f[T]$ es inyectivo.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Es clara por el Corolario IV.1.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es claro por la parte (i) de la Proposición I.5.1.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que $\alpha \in \sigma_p(T) \cap \sigma(x,T)$ es un cero de f con multiplicidad k. Podemos escribir $f(\lambda) = g(\lambda)(\alpha - \lambda)^k$, con $\triangle(f) = \triangle(g)$. Como $\alpha \in \sigma_p(T)$, existe un vector no nulo $y \in X$ que verifica $(\alpha - T)y = 0$ y por el apartado (iv) de la Proposición I.5.1 se tiene que $\sigma(y,T) = \{\alpha\}$. Luego $y \in D(f[T])$ y además $f[T]y = g[T](\alpha - T)^k y = 0$. Con lo que queda demostrado. $\square$

En el siguiente corolario damos una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del espectro local por el cálculo funcional meromorfo.

Corolario IV.1.6 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Sea $f \in \mathcal{M}(T)$ no idénticamente nula en ninguna componente de su dominio que corte a $\sigma(T)$. Entonces $\sigma(f\{T\}x,T) = \sigma(x,T)$ para todo $x \in D(f\{T\})$ si y sólo si f no tiene ceros en $\sigma_p(T)$.*

Demostración:

Supongamos que f no tiene ceros en $\sigma_p(T)$. Usando la definición del cálculo funcional meromorfo, se tiene que $f\{T\} = g(T)p(T)^{-1}$, donde g es una función analítica en $\sigma(T)$ y p es el polinomio de los polos de f. Por la Proposición IV.1.1 tenemos que

$$\sigma(g(T)p(T)^{-1}x,T) = \sigma(p(T)^{-1}x,T).$$

Por el Corolario IV.1.2

$$\sigma(p(T)^{-1}x,T) = \sigma(x,T),$$

por tanto $\sigma(f\{T\}x,T) = \sigma(x,T)$.

Para el recíproco, es suficiente tener en cuenta que si $f(\alpha) = 0$ para $\alpha \in \sigma_p(T)$, entonces existe un vector no nulo $x \in X$ tal que $(\alpha - T)x = 0$, luego $f\{T\}x = 0$. □

Otra demostración directa del resultado anterior se obtiene aplicando el apartado (iii) de la Proposición II.2.6.

IV.2 La descomposición del espectro local

Nuestro propósito en esta sección es probar algunos resultados relacionados con la descomposición del espectro local. Primeramente, vamos a recordar algunas propiedades de la descomposición del espectro clásico de un operador $T \in L(X)$, para proceder posteriormente a dar resultados similares para el espectro local.

Supongamos que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_i $(i = 1, 2)$ son conjuntos espectrales disjuntos. Sea M_i el rango de la proyección $E(\sigma_i)$ asociada al conjunto espectral σ_i. Se tiene que M_i es un subespacio invariante por el operador T para $i = 1, 2$, $X = M_1 \oplus M_2$, $T = T_1 \oplus T_2$ y $\sigma(T_i) = \sigma_i$ siendo $T_i = T|M_i$ para $i = 1, 2$ [51, Theorem V.9.1].

Un primer resultado de descomposición del espectro local se debe a Colojoara y Foias [13, Lemma 1.3] que prueban que si $T_i \in L(X)$ $(i = 1, 2)$ son operadores que verifican la SVEP, entonces

$$\sigma(x_1 \oplus x_2, T_1 \oplus T_2) = \sigma(x_1, T_1) \cup \sigma(x_2, T_2).$$

A continuación introducimos la definición de los conjuntos espectrales locales.

Definición IV.2.1 Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Un subconjunto σ de $\sigma(x, T)$ se dice que es un *conjunto espectral local de T en x* si es abierto y cerrado en la topología relativa de $\sigma(x, T)$.

Obviamente, un punto aislado de $\sigma(x, T)$ es un conjunto espectral de $\sigma(x, T)$.

Planteamos la siguiente cuestión: Si $\sigma(x,T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, siendo σ_i conjuntos espectrales disjuntos de $\sigma(x,T)$, ¿puede entonces escribirse $x = x_1 + x_2$ tal que $\sigma(x_i,T) = \sigma_i$? ¿Dicha descomposición es única?

En este sentido, M. Radjabalipour demuestra el siguiente teorema sobre la descomposición del espectro local, también denominado *Teorema de Descomposición Local de Riesz.*

Teorema IV.2.1 *[42, Theorem 2.3] Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Supongamos que $\sigma(x,T)$ está contenido en un conjunto cerrado F, que es unión disjunta de dos subconjuntos cerrados F_1 y F_2. Entonces $x = x_1 + x_2$, donde $\sigma(x_i,T) \subset F_i$ $(i = 1,2)$. Además, si T verifica la SVEP en $\mathbb{C} \setminus F$, entonces la descomposición $x = x_1 + x_2$ es única.*

En el siguiente teorema damos una condición para descomponer el espectro local en conjuntos espectrales locales, que incluye el teorema anterior.

Teorema IV.2.2 (Teorema de descomposición del espectro local) *Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Supongamos que $\sigma(x,T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_i son conjuntos espectrales disjuntos de $\sigma(x,T)$. Entonces $x = x_1 + x_2$ donde $\sigma_j = \sigma(x_j,T)$, para $j = 1,2$. Además, si T verifica la SVEP en $\mathbb{C} \setminus \sigma(x,T)$, entonces la descomposición $x = x_1 + x_2$ es única.*

Demostración:
La demostración de la primera parte está realizada usando las mismas ideas que en [42, Theorem 2.3], que incluimos aquí para mayor comodidad del lector.

Definimos x_j como

$$x_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} \widehat{x}_T(\xi)d\xi \tag{IV.2.11}$$

donde Γ_j es la frontera de algún dominio acotado de Cauchy D_j tal que $\sigma_j \subset D_j$ y $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Por tanto, la ecuación (IV.2.11) implica que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \widehat{x}_T(\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \widehat{x}_T(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \widehat{x}_T(\xi)d\xi = x, \end{aligned}$$

donde Γ es la frontera de algún dominio acotado de Cauchy D, tal que $\sigma(x,T) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \subset D$.

Veamos a continuación que $\sigma(x_j,T) \subset \sigma_j$. Definimos la función $u : \mathbb{C} \setminus \sigma_j \to X$

$$u(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{\mu - \xi} \widehat{x}_T(\xi) d\xi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(\mu - T)u(\mu) &= (\mu - T)\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\widehat{x}_T(\xi)}{\mu - \xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (\mu - \xi + \xi - T) \frac{\widehat{x}_T(\xi)}{\mu - \xi} d\xi \\
&= x_j + \int_{\Gamma_j} \frac{x}{\mu - \xi} d\xi = x_j,
\end{aligned}$$

ya que el índice de la curva Γ_j en $\mu \in \mathbb{C} \setminus \sigma_j$ es cero. Por tanto $\sigma(x_j,T) \subset \sigma_j$ con $(j = 1, 2)$.

El otro contenido del espectro local es claro ya que

$$\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(x,T) = \sigma(x_1 + x_2, T) \subset \sigma(x_1,T) \cup \sigma(x_2,T) \subset \sigma_1 \cup \sigma_2,$$

y teniendo en cuenta que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$, obtenemos que $\sigma_j \subset \sigma(x_j,T)$ para $(j = 1, 2)$.

Finalmente, es fácil establecer la unicidad. Supongamos que existen y_1 y y_2 tales que $x = y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ y verifican $\sigma(x_i,T) = \sigma(y_i,T) = \sigma_i$ $(i = 1, 2)$. Consecuentemente

$$\sigma(x_1 - y_1, T) = \sigma(y_2 - x_2, T) \subset \sigma_1 \cap \sigma_2,$$

y como $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing$, se concluye que $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$. $\square$

El teorema anterior se puede generalizar de la siguiente forma.

Teorema IV.2.3 *Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Supongamos que $\sigma(x,T) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_n$, donde $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ y σ_n son conjuntos espectrales disjuntos dos a dos. Entonces $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ donde $\sigma(x_i,T) = \sigma_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, si T verifica la SVEP en $\mathbb{C} \setminus \sigma(x,T)$, entonces la descomposición $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ es única.*

El próximo objetivo es obtener los resultados de Schmoeger [44, Theorem 4] y Mbekhta [36, Theorem 1.6] como casos particulares del Teorema IV.2.3, para cierta clase de operadores. Para ello necesitamos algunas notaciones previas.

Sean $T \in L(X)$. Se definen los siguientes conjuntos

$$H_0(T) := \{x \in X : \quad \lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} = 0\}$$

y

$$K(T) := \{x \in X : \quad \exists M > 0, \;\; R > 0, \;\; \forall n \geq 0, \;\; \exists v_n \in H, \quad v_0 = x, \;\; Tv_{n+1} = v_n$$
$$\text{y } \|v_n\| \leq MR^n \;\; \}.$$

Si $T \in L(X)$ verifica la SVEP, aplicando [37, Proposition 1.3], los conjuntos $H_0(\alpha - T)$ y $K(\alpha - T)$ se pueden escribir de la siguiente forma

$$H_0(\alpha - T) = \{x \in X : \quad \sigma(x,T) = \{\alpha\}\} \cup \{0\} = X(T, \{\alpha\})$$

y

$$K(\alpha - T) = \{x \in X : \quad \alpha \in \rho(x,T)\} = X(T, \sigma(T) \setminus \{\alpha\})$$

Corolario IV.2.1 *[44, Theorem 4] Si $T \in L(X)$ verifica la propiedad (C), las siguientes propiedades son equivalentes.*

(i) α es un punto aislado de $\sigma(T)$.

(ii) $H_0(\alpha - T) \neq \{0\}$ y $X = K(\alpha - T) \oplus H_0(\alpha - T)$ (suma directa topológica).

<u>Demostración</u>:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sea α un punto aislado de $\sigma(T)$. Por el Teorema I.4.1 se tiene que T verifica la SVEP, y $H_0(\alpha - T) = X(T, \{\alpha\})$ y $K(\alpha - T) = X(T, \sigma(T) \setminus \{\alpha\})$ son conjuntos cerrados disjuntos. Por otra parte, sea $x \in X$. Si $\alpha \in \sigma(x,T)$, entonces α es un punto aislado de $\sigma(x,T)$. Consecuentemente por el Teorema IV.2.2, existen $y, z \in X$ tal que $x = y + z$, donde $\sigma(y,T) = \{\alpha\}$ y $\sigma(z,T) = \sigma(x,T) \setminus \{\alpha\}$, lo que $y \in H_0(\alpha - T)$ y

$z \in K(\alpha - T)$. Y si $\alpha \notin \sigma(x, T)$, entonces $x \in K(\alpha - T)$. Con esto queda probado que $X = H_0(\alpha - T) \oplus K(\alpha - T)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Es suficiente demostrar que existe $z \in X$ tal que $\sigma(z, T) = \sigma(T) \setminus \{\alpha\}$. En efecto, por la Proposición I.2.1 se tiene que existe $x \in X$ tal que $\sigma(x, T) = \sigma(T)$. Además $x = y + z$, donde $\sigma(y, T) = \{\alpha\}$ y $\sigma(z, T) = \sigma(T) \setminus \{\alpha\}$. Con lo que concluye la demostración. $\square$

Para ciertas clases de operadores, el espectro local tiene una descripción simple, como se prueba en la siguiente proposición.

Proposición IV.2.1 *Sea $T \in L(H)$ un operador normal sobre un espacio de Hilbert separable H, con espectro numerable $\sigma(T)$. Supongamos que $\sigma(T) = \overline{\{\mu_n \; : \; n \in \mathbb{N}\}}$, donde los μ_n son los puntos aislados de $\sigma(T)$. Entonces*

$$\sigma(x, T) = \overline{\{\mu \in \sigma(T) : \quad E(\mu)x \neq 0\}} \tag{IV.2.12}$$

donde E es la resolución de la identidad del operador T.

Demostración:

La demostración la realizaremos en tres etapas.

Etapa I. $\overline{\{\lambda \in \sigma(T) \; : \; E(\lambda)x \neq 0\}} \subset \sigma(x, T)$

Sea $\lambda \in \sigma(T)$ tal que $E(\lambda)x \neq 0$. Por la parte (ii) de la Proposición I.4.3 se tiene que

$$H(T, \{\lambda\}) = E(\lambda)H.$$

Luego $\sigma(E(\lambda)x, T) = \{\lambda\}$, ya que $E(\lambda)x \neq 0$. Aplicando la Proposición I.5.1 resulta que $\sigma(E(\lambda)x, T) \subset \sigma(x, T)$, por tanto $\lambda \in \sigma(x, T)$.

Etapa II. $\mu_m \in \sigma(x, T) \Longleftrightarrow E(\mu_m)x \neq 0$

Si $E(\mu_m)x = 0$, entonces $E(\sigma(T) \setminus \{\mu_m\})x = x$. Por tanto $x \in E(\sigma(T) \setminus \{\mu_m\})$ por la parte (ii) de la Proposición I.4.3, es decir $\mu_m \in \rho(x, T)$. El recíproco es consecuencia de la Etapa I.

Etapa III. $\sigma(x, T) \subset \overline{\{\lambda \in \sigma(T) \; : \; E(\lambda)x \neq 0\}}$.

Si $\lambda \in \sigma(x,T)$ es un punto de acumulación de $\sigma(x,T)$, entonces existe una subsucesión $\{\mu_{n_k}\} \subset \{\mu_n\}$ tal que μ_{n_k} converge a λ. Luego es suficiente utilizar la Etapa II, con lo que resulta clara la tesis. Y si $\lambda \in \sigma(x,T)$ es un punto aislado de $\sigma(x,T)$, por el Teorema IV.2.2 se tiene que $x = x_1 + x_2$ donde $\sigma(x_1,T) = \{\lambda\}$ y $\sigma(x_2,T) = \sigma(x,T) \setminus \{\lambda\}$. Luego $E(\lambda)x_2 = 0$, ya que si $E(\lambda)x_2 \neq 0$, entonces por la Etapa II se tiene que $\lambda \in \sigma(x_2,T)$ lo que conduce a un absurdo. Además $E(\lambda)x = E(\lambda)x_1 \neq 0$. En efecto, $x_1 \in R(E(\lambda))$ ya que $x_1 \in H(T,\{\lambda\}) = E(\lambda)H$, por tanto $E(\lambda)x = E(\lambda)x_1 \neq 0$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior obtenemos la descripción del espectro local de un operador normal compacto.

Corolario IV.2.2 *Sean T un operador normal compacto en un espacio de Hilbert separable H y $x \in H$. Entonces el espectro local de T en x viene dado por:*

$$\sigma(x,T) = \overline{\{\lambda \in \sigma(T) : \quad E(\lambda)x \neq 0\}},$$

siendo E la resolución de la identidad del operador T.

IV.3 Los polos de la función resolvente local

En la teoría espectral clásica, es bien conocida la siguiente caracterización de los polos del operador resolvente:

$$\alpha \text{ es polo de } R(.,T) \text{ de orden } \leq k \Longleftrightarrow X = N(\alpha - T)^k \oplus R(\alpha - T)^k,$$

siendo k un entero positivo.

Recordemos que $T \in L(X)$ se llama operador de *cadena finita* si $a(T) < \infty$ y $d(T) < \infty$, donde $a(T)$ y $d(T)$ son el ascenso y descenso del operador T, respectivamente (definidos en el Capítulo III). En el caso de que $a(T) < \infty$ y $d(T) < \infty$, entonces $a(T) = d(T)$ (ver [51, Theorem V.6.2]).

Además por [51, Theorem V.10.2] se tiene que T es un operador de cadena finita si y sólo si el 0 es un polo del operador resolvente, es decir $X = N(T)^k \oplus R(T)^k$ para cierto k entero no negativo.

En esta sección damos algunas caracterizaciones de los polos de la función resolvente local relacionando dichas caracterizaciones con un nuevo concepto de operador localmente de cadena finita.

Caracterizaciones de los polos de la función resolvente local

Usando el Teorema IV.2.2 y el Corolario IV.1.1 obtenemos una primera caracterización de los polos de la función resolvente local.

Teorema IV.3.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) *α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n.*

(ii) *Existe una única descomposición $x = y + z$ tal que $y \in N((\alpha - T)^n) \setminus N((\alpha - T)^{n-1})$ y $\sigma(z, T) = \sigma(x, T) \setminus \{\alpha\}$.*

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Por el Teorema IV.2.2, tenemos que $x = y + z$, donde $\sigma(y, T) = \{\alpha\}$ y $\sigma(z, T) = \sigma(x, T) \setminus \{\alpha\}$. Además, por el Corolario IV.1.1 obtenemos que $\alpha \in \rho((\alpha - T)^n x, T)$. Usando (IV.1.5) y (IV.1.8) tenemos que $\sigma((\alpha - T)^n y, T)$ es el conjunto vacío, por tanto $(\alpha - T)^n y = 0$, luego $y \in N(\alpha - T)^n$. Nótese que $y \notin N(\alpha - T)^{n-1}$, ya que $\sigma((\alpha - T)^{n-1} z, T) \neq \sigma((\alpha - T)^{n-1} x, T)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Tenemos que $y \in N(\alpha - T)^n$, luego $(\alpha - T)^n x = (\alpha - T)^n z$; por tanto $\alpha \in \rho((\alpha - T)^n z, T) = \rho((\alpha - T)^n x, T)$. Además $\alpha \in \sigma((\alpha - T)^{n-1} x, T)$, ya que $\alpha \in \rho((\alpha - T)^{n-1} z, T)$ y $\sigma((\alpha - T)^{n-1} y, T) = \{\alpha\}$, por tanto es suficiente aplicar el Corolario IV.1.1 para concluir la demostración. $\square$

Nótese que el Teorema IV.3.1 implica que si α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n para algún $x \in X$, entonces el operador $\alpha - T$ no puede ser de cadena finita de orden $n-1$.

Corolario IV.3.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Supongamos que $X = R(T^n) \oplus N(T^n)$. Dado $x \in X$ tenemos que $0 \in \rho(x,T)$ si y sólo si $x \in R(T^n)$.*

Demostración:

Es claro que si $0 \in \rho(x,T)$, entonces $x \in R(T^n)$ por el Corolario I.5.1. Recíprocamente, supongamos que $x \in R(T^n)$ y que $0 \in \sigma(x,T)$. Por hipótesis se tiene que 0 es un polo del operador resolvente de orden menor o igual que n. Entonces si $0 \in \sigma(x,T)$, resulta que 0 es polo de la función resolvente local de orden $k \leq n$. Entonces, por el teorema anterior, $x = x_1 + x_2$ siendo $x_1 \in N(T^k) \subset N(T^n)$ y $\sigma(x_2,T) = \sigma(x,T) \setminus \{0\}$ luego $x_2 \in R(T^n)$ y por tanto $x_1 \in R(T^n) \cap N(T^n)$. Luego se obtiene que $x_1 = 0$, con lo que se llega a un absurdo. $\square$

Obsérvese que la condición $\alpha \in \rho(z,T)$ implica que $z \in R(\alpha - T)^k$ para todo k. Sin embargo, $z \in R(\alpha - T)^k$ no implica que $\alpha \in \rho(z,T)$, ni tan siquiera que α sea polo de $\widehat{x}_T$ de orden k, como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.3.1 *Operador $T \in L(X)$ y $x \in R(T)$ tal que 0 es una singularidad esencial de la función resolvente local.*

Sea T el operador sobre el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ definido por

$$\begin{aligned} T : \ell_2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{N}) \\ (x_1, x_2, x_3, \ldots) &\longrightarrow (0, 0, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \ldots). \end{aligned}$$

Es claro que $\sigma(T) = \{0\}$, por tanto T verifica la SVEP. Tomando $x := (0,0,1,0,\ldots)$, tenemos $\sigma(T^n x, T) = \{0\}$ ya que $T^n x \neq 0$ para todo n. Por tanto 0 es una singularidad esencial de $\widehat{x}_T$ por el Corolario IV.1.1. Sin embargo $x \in R(T)$. $\square$

Algunas aplicaciones interesantes del Teorema IV.3.1 requieren introducir clases especiales de operadores, como la de los que verifican la implicación

$$\sigma(x,T) = \{\alpha\} \Rightarrow x \in N(\alpha - T).$$

En general no es cierta; por ejemplo, si T es un operador inyectivo cuasinilpotente.

Corolario IV.3.2 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y supongamos que $N(\alpha - T) = \{x \in X : \sigma(x,T) \subset \{\alpha\}\}$. Si $x \in X \setminus \{0\}$ y α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n, entonces $n = 1$.*

Demostración:

Por el Teorema IV.2.2, se tiene la descomposición $x = y + z$, con $\sigma(y,T) = \{\alpha\}$ y $\sigma(z,T) = \sigma(x,T) \setminus \{\alpha\}$. Por hipótesis tenemos que $y \in N(\alpha - T)$ y aplicando el Teorema IV.3.1, se tiene que $n = 1$. $\square$

Los operadores totalmente paranormales (definidos en la Sección I.5) verifican las hipótesis del Corolario IV.3.2 [33, Corollary 4.8]. Por tanto los polos de la función resolvente local son de orden ≤ 1. En particular, también es cierto para los operadores hiponormales y normales en espacios de Hilbert.

Proposición IV.3.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Supongamos que existe un entero positivo k tal que $X = N(\alpha - T)^k \oplus M$, donde M es un μ-espacio de T. Si $x \in X$ y α es un polo de $\hat{x}_T$ de orden n, entonces $n \leq k$.*

Demostración:

Considerando la descomposición $x = y+z$, con $y \in N(\alpha-T)^k$ y $z \in M$, por el Teorema IV.3.1, es suficiente probar que $\alpha \in \rho(z,T)$.

Denotando $T_2 := T|M$, tenemos que $\alpha \notin \sigma_p(T_2)$. Supongamos que $\alpha \in \sigma(z,T|M) = \sigma(z,T)$. Por la parte (i) del Corolario IV.1.1, α no es un polo de $\widehat{z}_T$, por tanto $\alpha \in$

$\sigma((\alpha - T)^j z, T)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pero si escogemos $m := max\{k, n\}$, entonces $(\alpha - T)^m x = (\alpha - T)^m z$, y $\alpha \in \rho((\alpha - T)^m x, T) = \rho((\alpha - T)^m z, T)$. Con lo que hemos llegamos a una contradicción, consecuentemente $\alpha \in \rho(z, T)$. $\square$

A continuación derivamos una caracterización de los polos de la función resolvente local, similar a la caracterización de los puntos del conjunto resolvente local dada en la Proposición I.5.4

Teorema IV.3.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Entonces $\alpha \in \mathbb{C}$ es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n si y sólo si existe un número $R > 0$ y una sucesión $\{x_k\}_{k=-n}^{\infty} \subset X$ tal que*

(i) $(\alpha - T)x_0 = x_{-1} - x$;

(ii) $(\alpha - T)x_k = x_{k-1}$, *para* $k > -n$ *y* $k \neq 0$; $(\alpha - T)x_{-n} = 0$ *y* $x_{-n} \neq 0$;

(iii) $\|x_k\| \leq R^k$, *para* $k \geq 0$.

Demostración:

"$\Rightarrow$ " Supongamos que α es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden n. Entonces existe un entorno U_α de α, tal que

$$(\lambda - T)\widehat{x}_T(\lambda) = x,$$

para todo $\lambda \in U_\alpha \setminus \{\alpha\}$. Además, existe $r > 0$ tal que para $0 < |\lambda - \alpha| < r$ se puede escribir

$$\widehat{x}_T(\lambda) = \sum_{k=-n}^{\infty} x_k(\alpha - \lambda)^k,$$

con $\{x_k\}_{-n}^{\infty} \subset X$ y $x_{-n} \neq 0$. Tenemos que $\limsup \|x_k\|^{1/k} \leq 1/r$, por tanto se puede encontrar $R \geq 1/r$ tal que se verifica (iii). Si Γ es $\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda - \alpha| = r/2\}$, entonces para $k > -n$ se obtiene que

$$x_k = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widehat{x}_T(\lambda)}{(\alpha - \lambda)^{k+1}} d\lambda.$$

Además

$$
\begin{aligned}
(\alpha - T)\widehat{x}_T(\lambda) &= (\alpha-\lambda)\widehat{x}_T(\lambda) + (\lambda - T)\widehat{x}_T(\lambda) \\
&= (\alpha-\lambda)\widehat{x}_T(\lambda) + x.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(\alpha - T)x_k &= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\alpha-T)\widehat{x}_T(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^{k+1}}d\lambda \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\widehat{x}_T(\lambda)}{(\alpha-\lambda)^{k}}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x d\lambda}{(\alpha-\lambda)^{k+1}} \\
&= x_{k-1} - C(k),
\end{aligned}
$$

donde $C(k) = 0$ para $k \neq 0$ y $C(0) = x$.

De igual forma se obtiene $(\alpha - T)x_{-n} = 0$.

"$\Leftarrow$" Sea $\Omega = \{\lambda : \quad |\lambda - \alpha| < 1/R\}$. Ya que $\limsup \|x_k\|^{1/k} \leq R$, la expresión

$$
f(\lambda) := \sum_{k=-n}^{\infty} x_k(\alpha-\lambda)^k
$$

define una función meromorfa en Ω. Además, para $\lambda \in \Omega$ se tiene que

$$
(\lambda - T)f(\lambda) = \sum_{k=-n}^{\infty}\Big(x_{k-1}(\alpha-\lambda)^k - x_k(\alpha-\lambda)^{k+1}\Big) + x = x.
$$

Por tanto $\widehat{x}_T(\lambda) = f(\lambda)$ es la función resolvente local de T en x y tiene un polo en α de orden n. $\square$

Observación IV.3.1 (1) Si en el teorema anterior admitimos el caso $n = 0$ y entendemos por polo de orden 0 de $\widehat{x}_T$ un punto de $\rho(x, T)$, obtenemos la caracterización de los puntos de $\rho(x, T)$ dada en la Proposición I.5.4.

(2) Nótese que el teorema anterior también es cierto cuando T no verifica la SVEP. Basta con que exista una función resolvente que tenga un polo, para la existencia de la sucesión que verifica (i), (ii) y (iii) del teorema anterior.

Operadores localmente de cadena finita

En [51, Theorem V.10.1 y V.10.2] se prueba que α es un polo del operador resolvente si y sólo si $\alpha \in \sigma_p(T)$ y existe un entero positivo k tal que

$$X = N(\alpha - T)^k \oplus R(\alpha - T)^k.$$

Nótese que el Corolario IV.1.1 es similar al resultado anterior, usando la siguiente definición.

Definición IV.3.1 Sean $T \in L(X)$ y $x \in X$. Diremos que T es *localmente de cadena finita en* x si existe un entero positivo n tal que $\sigma(T^{n-1}x, T) \neq \sigma(T^n x, T)$ ó $0 \notin \sigma(x, T)$.

Obsérvese que T es localmente de cadena finita en x si y sólo si existe un entero no negativo n tal que $0 \notin \sigma(T^n x, T)$.

En el siguiente teorema probamos que existe una relación entre operadores de cadena finita y localmente de cadena finita.

Teorema IV.3.3 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Entonces T es un operador de cadena finita si y sólo si es localmente de cadena finita en x, para todo $x \in X$.*

Demostración:

Si T es un operador de cadena finita de orden $n > 0$, entonces 0 es un polo del operador resolvente por [51, Theorem V.10.2]. Por tanto es claro que 0 es un polo de $\widehat{x}_T$ de orden $\leq n$, ó $0 \in \rho(x, T)$.

Recíprocamente, si T es un operador localmente de cadena finita para todo $x \in X$, entonces para cada $x \in X$, se tiene que $0 \notin \sigma(x, T)$ ó 0 es una singularidad aislada de $\sigma(x, T)$. Por la Proposición I.2.1 existe algún $x \in X$ tal que $\sigma(x, T)$ coincide con el espectro de T. Entonces T es invertible (con lo que se habría terminado) ó 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$. En este último caso, por [51, Theorem V.9.2], podemos encontrar dos subespacios invariantes X_1 y X_2 de T tal que $X = X_1 \oplus X_2$, $\sigma(T_1) = \{0\}$ y $\sigma(T_2) = \sigma(T) \setminus \{0\}$, donde T_i denota el operador T actuando sobre X_i .

Para cada $0 \neq x_1 \in X_1$ se tiene que $\sigma(x_1, T) = \{0\}$. Como T es localmente de cadena finita en x_1, existe un entero n tal que $\sigma(T^n x_1, T) = \varnothing$ y por tanto $T^n x_1 = 0$, ya que T verifica la SVEP. Definimos

$$K_n := \{x \in X_1 \ : \ T^n x = 0\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, es un subespacio cerrado de X_1 y además $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = X_1$. Luego el Teorema de la Categoría de Baire implica que $T|X_1$ es nilpotente, por tanto 0 es polo de $R(\lambda, T)$. $\square$

Corolario IV.3.3 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP. Si α es un polo de $\widehat{x}_T$ para todo $x \in X$, entonces existe un natural n, tal que el orden del polo en α de la función $\widehat{x}_T$ es menor o igual que n, para todo $x \in X$.*

<u>Demostración</u>:

Por el teorema anterior, α es un polo del operador resolvente de orden n. Entonces los polos de $\widehat{x}_T$ son siempre de orden menor o igual que n, para todo $x \in X$. $\square$

IV.4 Las ecuaciones de la resolvente local. Aplicaciones

Las ecuaciones de la resolvente local

Las ecuaciones del operador resolvente son bien conocidas, tanto para operadores continuos como para operadores que verifican ciertas condiciones. Aquí nos centraremos en el caso de operadores lineales continuos.

Sea $T \in L(X)$. Si $\lambda, \mu \in \rho(T)$, la *primera ecuación de la resolvente* establece que

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T). \qquad \text{(IV.4.13)}$$

Si $S \in L(X)$ y $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$, la *segunda ecuación de la resolvente* establece que

$$R(\lambda, S) - R(\lambda, T) = R(\lambda, S)(S - T)R(\lambda, T). \tag{IV.4.14}$$

Nuestro propósito es derivar expresiones similares a estas ecuaciones para la función resolvente local.

Se define el *radio espectral local de T en x* como

$$r_T(x) = \lim\ \sup \|T^n x\|^{1/n}.$$

En este sentido, Meyer-Nieberg en [39, Corollary 2] prueba que para $T \in L(X)$, $x \in X$ y $|\lambda|, |\mu| > r_T(x)$, se tiene que

$$R(\mu)x - R(\lambda)x = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)x,$$

donde $R(\xi)x = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-n-1} T^n x$.

Tengamos en cuenta que si $R(\mu)x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n-1} T^n x$ converge, con $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP, entonces $R(\mu)x = \widehat{x}_T(\mu)$. Sin embargo el recíproco no es cierto, ya que si $\mu \in \rho(x, T)$, entonces $R(\mu)x$ no existe necesariamente. Por ello parece necesario definir el significado de las ecuaciones de la resolvente local de una forma más general.

Para lograr este objetivo es preciso dar sentido a la expresión "$\widehat{x}_T(\lambda)\widehat{x}_T(\mu)$", para $\lambda, \mu \in \rho(x, T)$, ya que el producto de vectores de X no está definido.

Para solucionar dicho problema usaremos el Lema III.2.1, en el que se da una expresión de la resolvente local usando como herramienta fundamental el cálculo funcional local. De este modo, para $T \in L(X)$, $x \in X$ y $\lambda \in \rho(x, T)$, se tiene que

$$\widehat{x}_T(\lambda) = f_\lambda[T]x$$

siendo $f_\lambda(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}$.

Teorema IV.4.1 *Sean $x \in X$ y $T, S \in L(X)$ operadores que verifican la SVEP.*

(i) (Primera ecuación de la resolvente local). *Si* $\lambda, \mu \in \rho(x,T)$, *entonces*

$$\widehat{x}_T(\lambda) - \widehat{x}_T(\mu) = (\mu - \lambda)\widehat{\widehat{x}_T(\lambda)}_T(\mu) \tag{IV.4.15}$$

(ii) (Segunda ecuación de la resolvente local). *Si* $\lambda \in \rho(x,T) \cap \rho(x,S)$, *entonces*

$$\widehat{x}_S(\lambda) - \widehat{x}_T(\lambda) = \widehat{(S - T)\widehat{x}_T(\lambda)}_S(\lambda) \tag{IV.4.16}$$

<u>Demostración</u>:

(i) Las funciones f_λ y f_μ son analíticas en $\sigma(x,T)$. Por el Lema III.2.1, obtenemos que $f_\lambda[T]x = \widehat{x}_T(\lambda)$ y $f_\mu[T]x = \widehat{x}_T(\mu)$. Además $f_\mu[T]x = \widehat{x}_T(\mu) \in D(f_\lambda[T])$, ya que $\lambda \notin \sigma(x,T) = \sigma(\widehat{x}_T(\lambda), T)$, para todo $\mu \in \rho(x,T)$. De igual forma $\widehat{x}_T(\lambda) \in D(f_\mu[T])$. Por tanto, por la Proposición III.2.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mu - \lambda) f_\lambda[T] f_\mu[T]x &= (\mu - T + T - \lambda) f_\lambda[T] f_\mu[T]x \\
&= f_\lambda[T](\mu - T) f_\mu[T]x - f_\mu[T](\lambda - T) f_\lambda[T]x \\
&= f_\lambda[T]x - f_\mu[T]x.
\end{aligned}$$

Con lo que se tiene la ecuación.

(ii) Considerando la expresión de $\widehat{x}_T$ y $\widehat{x}_S$ y la Proposición III.2.2, obtenemos que

$$\begin{aligned}
f_\lambda[T](S - T) f_\lambda[T]x &= f_\lambda[S](S - \lambda + \lambda - T) f_\lambda[T]x \\
&= f_\lambda[S](\lambda - T) f_\lambda[T]x - f_\lambda[T](\lambda - S) f_\lambda[S]x \\
&= f_\lambda[S]x - f_\lambda[T]x.
\end{aligned}$$

□

Observación IV.4.1 Las ecuaciones (IV.4.15) y (IV.4.16) pueden ser escritas de la siguiente forma

$$f_\lambda[T]x - f_\mu[T]x = (\mu - \lambda) f_\lambda[T] f_\mu[T]x,$$

$$f_\lambda[S]x - f_\lambda[T]x = f_\lambda[S](S - T) f_\lambda[T]x.$$

Aplicaciones

A continuación derivamos algunas propiedades similares a las del operador resolvente para la función resolvente local, aplicando la primera ecuación de la resolvente local.

Denotamos $f_\lambda^n(\mu) := (\lambda - \mu)^{-n}$.

Proposición IV.4.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Para $\lambda \in \rho(x, T)$, se tiene que*

$$\frac{d^n \hat{x}_T(\lambda)}{d\lambda^n} = (-1)^n n! f_\lambda^{n+1}[T]x.$$

Además, si $|\lambda - \mu| < dist(\lambda, \sigma(x, T))$, entonces $\mu \in \rho(x, T)$ y

$$\widehat{x}_T(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n f_\lambda^{n+1}[T]x.$$

Demostración:

Considerando el Teorema de Cauchy y la expresión integral del cálculo funcional local, se obtiene que

$$\frac{d^n \widehat{x}_T(\lambda)}{d\lambda^n} = -\frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widehat{x}_T(\mu)}{(\mu - \lambda)^{n+1}} d\mu = \frac{(-1)^n}{n!} f_\lambda^{n+1}[T]x,$$

donde Γ es la frontera de algún dominio de Cauchy D tal que $\sigma(x, T) \subset D$ y $\lambda \notin \overline{D}$.

La última parte es clara teniendo en cuenta la igualdad

$$\widehat{x}_T(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \widehat{x}_T(\lambda)}{d\lambda^n} (\mu - \lambda)^n.$$

□

Es bien conocido que si $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\lambda \in \rho(T)$. Sin embargo, esta propiedad no es válida para el espectro local; esto es, $|\lambda| > \|Tx\|$ no implica que $\lambda \in \rho(x, T)$. Basta notar que $\sigma(tx, T) = \sigma(x, T)$ para todo $t > 0$.

Finalmente, damos un resultado de perturbación similar a la parte (3) de la Proposición II.1.1 para el cálculo funcional local.

Teorema IV.4.2 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y N un operador cuasinilpotente que conmuta con T. Si f es una función analítica, entonces*

$$i) \quad D(f[T+N]) = D(f[T]).$$

$$ii) \quad f[T+N] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\lambda^n} \right) [T].$$

Demostración:

(i) Es suficiente notar que $\sigma(x,T) = \sigma(x,T+N)$ para todo $x \in X$ [14, Theorem I.2.4].

(ii) Por [14, Theorem I.2.4] se tiene que

$$\widehat{x}_{T+N}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{N^n}{n!} \frac{d^n \widehat{x}_T(\lambda)}{d\lambda^n}. \qquad \text{(IV.4.17)}$$

Además la convergencia de (IV.4.17) es uniforme en compactos $K \subset \rho(x,T+N) = \rho(x,T)$. Por tanto para $x \in D(f[T+N])$ se obtiene que

$$f[T+N]x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} f(\lambda) \widehat{x}_{T+N}(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} f(\lambda) \frac{d^n \widehat{x}_T(\lambda)}{d^n \lambda} d\lambda,$$

donde Γ_x es la frontera de un dominio de Cauchy adecuado. Usando la Proposición IV.4.1, se tiene que

$$\begin{aligned} f[T+N]x &= \sum_{n=0}^{\infty} N^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} f(\lambda) f_\lambda^{n+1}[T] x d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} N^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} \frac{\widehat{x}_T(\mu)}{(\lambda-\mu)^{n+1}} d\mu \right) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \frac{d^n f}{d\lambda^n} [T] x. \end{aligned}$$

□

IV.5 Los operadores de Neumann y el espectro local

Sea $T \in L(X)$. Consideremos los subespacios vectoriales de X

$$S_T = \left\{ x \in X \quad : \quad \sum_{n=0}^{\infty} T^n x \text{ converge} \right\}$$

y

$$C_T = \{ x \in X \quad : \quad T^n x \to 0 \} .$$

Es obvio que $S_T \subset C_T$, ya que

$$\sum T^n x \text{ converge } \Rightarrow T^n x \to 0.$$

En [10] y [56] se estudian condiciones que permitan obtener la siguiente inclusión $C_T \subset S_T$, es decir la equivalencia

$$\sum T^n x \text{ converge } \iff T^n x \to 0.$$

Los operadores T que verifican $S_T = C_T$ se denominan *operadores de Neumann* (ver [10], [56]).

De forma similar, decimos que T es un *operador localmente de Neumann en x* si $x \notin C_T \setminus S_T$; es decir, o bien $x \notin C_T$ o bien $x \in S_T$.

Resulta evidente que T es un operador de Neumann si y sólo si T es un operador localmente de Neumann, para todo $x \in X$.

En la siguiente proposición, recogemos algunas propiedades bien conocidas sobre los operadores de Neumann.

Proposición IV.5.1 *Sea $T \in L(X)$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $1 \in \rho(T) \Rightarrow S_T = C_T$

(ii) 1 *es un polo de* $R(.,T) \Rightarrow S_T = C_T$.

Un resultado conocido para todo $T \in L(X)$ de norma $\|T\| < 1$ es que la serie $\sum T^n x$ converge para todo $x \in X$, luego se sigue fácilmente la existencia del operador inverso de $I - T$, es decir, $1 \in \rho(T)$.

Nuestro objetivo es intentar debilitar la condición anterior por medio de la teoría espectral local.

Supongamos que $T \in L(X)$ verifica la SVEP. Veamos que en general no es cierta la siguiente implicación

$$1 \in \rho(x,T) \Rightarrow \sum T^n x \text{ converge .}$$

Para ello, consideramos el operador $T := 2I$, sobre un espacio de Banach X. Claramente $1 \in \rho(T)$, luego $1 \in \rho(x,T)$ para todo $x \in X$. Sin embargo, $\sum T^n x$ no converge para todo $x \neq 0$.

Además, el Ejemplo IV.5.1 prueba que $\sum T^n x$ convergente no implica en general que $1 \in \rho(x,T)$.

La idea en los siguientes resultados es dar propiedades similares a las dadas en la Proposición IV.5.1 utilizando el espectro local. Antes de ello necesitamos recordar el *Teorema de Fatou*.

Proposición IV.5.2 *[4] Sea f una función analítica en el disco unidad abierto con un desarrollo de Taylor $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$. Si a_n converge a cero cuando n tiende a infinito, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = f(\xi)$ para todos los puntos regulares ξ de la frontera del círculo unidad.*

Teorema IV.5.1 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Si $x \in C_T$ y $1 \in \rho(x,T)$, entonces $x \in S_T$.*

Demostración:

Para $x \in C_T$ se tiene que $r_T(x) = \lim\ \sup \|T^n x\|^{1/n} \leq 1$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n x$ es convergente e igual a $\widehat{x}_T(\lambda)$ para $|\lambda| > 1$ (ya que el operador T verifica la SVEP). Por tanto, usando una versión vectorial de la Proposición IV.5.2, se tiene que el desarrollo es convergente para cualquier punto regular de la frontera del disco unidad ya que $T^n x \to 0$. Como $1 \in \rho(x,T)$, 1 es un punto regular, por tanto $\sum T^n x$ es convergente. $\square$

El siguiente paso será intentar dar una versión local de la parte (ii) de la Proposición IV.5.1. Antes de ello es necesario un lema previo.

Lema IV.5.1 *Sean X un espacio de Banach y f una función con valores en X, analítica en $|\lambda| < 1$ y con desarrollo centrado en 0 de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, con $a_n \in X$. Si $a_n \to 0$, entonces $f(\lambda)$ no puede tener un polo en la frontera del disco unidad.*

<u>Demostración</u>:

La demostración es igual a la hecha en [46, VI.I.I Theorem] para funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Sea $\lambda = e^{is}$ perteneciente a la frontera del disco unidad. Si f tiene un polo en e^{is}, entonces

$$\lim_{\lambda \to e^{is}} (\lambda - e^{is}) f(\lambda) = L \neq 0.$$

Si L es finito, entonces f tiene un polo de orden 1. Si $L = \infty$, entonces tiene un polo de orden mayor que 1.

Para $0 < r < 1$ se tiene que $\sum a_n r^n$ es convergente. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > n$ tenemos $\|a_k\| < \varepsilon$. Por tanto se obtiene que

$$\begin{aligned} \|f(re^{is})\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{nis}\| \\ &\leq \|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{iks}\| + \|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k r^k e^{iks}\| \\ &\leq M + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = M + \varepsilon \frac{r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

luego

$$(1-r)\|f(re^{is})\| \leq (1-r)M + \varepsilon r^{n+1} < (1-r)M + \varepsilon.$$

Consecuentemente $f(re^{is})$ converge a cero cuando $r \longrightarrow 1-$ más lentamente que $\frac{1}{1-r}$, lo que no lleva a que f no puede tener un polo en $\lambda = e^{is}$. $\square$

Proposición IV.5.3 *Sean $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Si 1 es un polo de $\widehat{x}_T$, entonces $x \notin C_T$.*

Demostración:

Es inmediata utilizando el Lema anterior. $\square$

Luego del Teorema IV.5.1 y la proposición anterior se obtiene el siguiente resultado similar a la Proposición IV.5.1.

Corolario IV.5.1 *Sea $T \in L(X)$ un operador que verifica la SVEP y $x \in X$. Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) Si $1 \in \rho(x,T)$, entonces T es un operador localmente de Neumann en x.

(ii) Si 1 es polo de $\widehat{x}_T$, entonces T es un operador localmente de Neumann en x.

En general, el hecho de que $1 \in \sigma(x,T)$ sea una singularidad esencial de la función resolvente local o un punto de acumulación de $\sigma(x,T)$ no implica que $x \in S_T$, como prueban los siguientes ejemplos.

Ejemplo IV.5.1 Sea T el operador multiplicación $Tx(t) = tx(t)$ definido en el espacio $C([0,1])$ de las funciones continuas en [0,1], con la norma del supremo. Es claro que $\sigma(T) = [0,1]$, y que el espectro puntual es vacío. Tenemos que $x(t) := (1-t)^2 = (I-T)(1-t) \in S_T$, ya que $(I-T)C_T = S_T$ por [32] y por tanto $y(t) = 1-t \in C_T$. Además como $x(t) \notin R(I-T)^3$, entonces $1 \in \sigma(x,T)$. $\square$

Ejemplo IV.5.2 Sea T el operador del ejemplo anterior. Tenemos que $x(t) = 1-t \in C_T$, pero sin embargo $x(t) \notin S_T$. Además $x(t) \notin R(I-T)^2$, por tanto $1 \in \sigma(x,T)$. $\square$

Cuestión IV.5.1 ¿Qué condición habría que añadir para que de $x \in C_T$ y $1 \in \sigma(x, T)$ resulte que $x \in S_T$?

Bibliografía

[1] C. Apostol, *Spectral decompositions and functional calculus*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 13 (1968) 1481-1528.

[2] R. G. Bartle, *Spectral decomposition of operators in Banach spaces*, Proc. London Math. Soc. 20 (1970) 438-450.

[3] R. G. Bartle, C. A. Kariotis, *Some localizations of the spectral mapping theorem*, Duke Math. J. 40 (1973) 651-660.

[4] C. J. K. Batty, *Tauberian theorems for the Laplace-Stieltjes transform*, Trans. Amer. Math. Soc. 322 (1990) 783-804.

[5] T. Bermúdez, *Meromorphic functional calculus and local spectral theory,* (preprint)

[6] T. Bermúdez, M. González, A. Martinón, *Stability of the local spectrum*, (aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.)

[7] T. Bermúdez, M. González, A. Martinón, *On the poles of the local resolvent,* (aparecerá en Math. Nachr.)

[8] T. Bermúdez, M. González, A. Martinón, *Un cálculo funcional local*, 25 aos de Matemáticas en la Universidad de La Laguna, 201-210.

[9] T. Bermúdez, M. González, A. Martinón, *Properties and applications of the local functional calculus,* (preprint)

[10] T. Bermúdez, A. Martinón, *On Neumann Operators,* J. Math. Anal. Appl., 200 (1996) 698-707.

[11] K. F. Clancey, *On the local spectra of seminormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978) 473-479.

[12] K. F. Clancey, Seminormal Operators, Lectures Notes in Mathematics 742, Springer-Verlag, 1979.

[13] I. Colojoara, C. Foias, *The Riesz-Dunford functional calculus with descomposable operators*. Rev. Roum. Math. Pures Appl. 12 (1967) 627-641.

[14] I. Colojoara, C. Foias, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, 1968.

[15] M. B. Dollinger, K. K. Oberai, *Variation of local spectra*, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972) 324-337.

[16] H. R. Dowson, Spectral theory of linear operators, Academic Press, 1978.

[17] N. Dunford, *Spectral theory*, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943) 637-651.

[18] N. Dunford, *Spectral theory I. Convergence to projections*, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943) 185-217.

[19] N. Dunford, *Spectral Theory II. Resolutions of the identity*, Pacific J. Math., 2 (1952) 559-614.

[20] N. Dunford, *Spectral operators*, Pacific J. Math., 4 (1954) 321-354.

[21] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York, 1958.

[22] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators, Part II: Spectral Theory, Interscience, New York, 1963.

[23] I. Erdelyi, R. Lange, Spectral decompositions on Banach spaces, Springer, 1977.

[24] I. Erdelyi, Wang Shengwang, A local spectral theory for closed operators, Cambridge Univ. Press, 1985.

[25] J. A. Finch, *The single valued extension property on a Banach space* , Pacific J. Math., 58 (1975) 61-69.

[26] J. A. Finch, *On the local spectrum and the adjoint*, Pacific J. Math., 94 (1981) 297-302.

[27] G. Frobenius, *Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen*, S.-B. der K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1896) 7-16.

[28] H. Gindler, *An operational calculus for meromorphic functions*, Nagoya Math. J., 26 (1966) 31-38.

[29] S. Goldberg, Unbounded Linear Operators, Theory and Applications, McGraw-Hill, 1966.

[30] M. González, V. M. Onieva, *On the spectral mapping theorem for essential spectra*, Publ. Mat. U.A.B., 29 (1985) 105-110.

[31] M. González, V. M. Onieva, *On the meromorphic and Schechter-Shapiro operational calculi*, J. Math. Anal. Appl., 116 (1986) 363-377.

[32] M. González, V.M. Onieva, *On the convergence of Neumann series in Banach spaces* , Actas XII Jornadas Luso-Espanholas Mat.; Univ. Minho, Braga, 1987, Vol.II, 335-338.

[33] K. B. Laursen, *Operators with finite ascent,* Pacific J. Math., 152 (1992) 323-335.

[34] E. R. Lorch, *The spectrum of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942) 238-248.

[35] M. Mbekhta, Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, Thèse de 3ème cycle, Universitè de Nice, 1984.

[36] M. Mbekhta, *Generalisation de la decomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*, Glasgow Math. J., 29 (1987) 159-175.

[37] M. Mbekhta, *Sur la theorie spectrale locale et limite des nilpotents*, Proc. Amer. Math. Soc., 110 (1990) 621-631.

[38] P. McGuire, *A local functional calculus*, Integr. Equat. Oper. Th., 9 (1986) 218-236.

[39] P. Meyer-Nieberg, *On the local spectral theory and non-positive operators*, Indag. Math., 2 (1991) 319-325.

[40] B. Nagy, *On an operational calculus for meromorphic functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 33 (1979) 379-390.

[41] H. Poincaré, *Sur les groupes continus*, Trans. Camb. Phil. Soc., 18 (1899) 220-255.

[42] M. Radjabalipour, *Decomposable operator*, Bull. Iranian Math. Soc., 9 (1978) 1L-49L.

[43] W. Rudin, Análisis Real y Complejo. (Tercera edición), McGraw-Hill, 1987.

[44] C. Schmoeger, *On isolated points of the spectrum of a bounded linear operator*, Proc. Amer. Math. Soc., 117 (1993) 715-719.

[45] C. Schmoeger, *Relatively regular operators and a spectral mapping theorem*, J. Math. Anal. Appl., 175 (1993) 315-320.

[46] S. L. Segal, Nine Introductions in Complex Analysis, North-Holland Mathematics Studies. 53, 1981.

[47] M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, Amer. Math. Soc., 1932.

[48] A. E. Taylor, *Analysis in complex Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943) 652-669.

[49] A. E Taylor, *Spectral theory of closed distributive operators*, Acta Math., 84 (1951) 189-224.

[50] A. E. Taylor, *Notes on the history of the uses of analyticity in operator theory*, Amer. Math. Monthly, 78 (1971) 331-342.

[51] A. C. Taylor, D. C. Lay, Introduction to functional analysis, (2nd Ed.) Wiley, 1980.

[52] F.-H. Vasilescu, *Spectral mapping theorem for the local spectrum*, Czech. Math. J., 30 (1980) 28-35.

[53] P. Vrbova, *On local spectral properties of operators in Banach spaces*, Czech. Math. J., 23 (1973) 483-492.

[54] N. Wiener, *Note on a paper of M. Banach*, Fund. Math., 4 (1923) 136-143.

[55] L.R. Williams, *The local spectra of pure quasinormal operators*, J. Math. Anal. Appl., 187 (1994) 842-850.

[56] P.P. Zabreiko, *The domain of convergence of the method of successive aproximations for linear equations* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk. BSSR, 29(1985) 201-204.

Tabla de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales o enteros positivos
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos
χ_A	función característica asociada al conjunto A

X	espacio de Banach
X^*	espacio dual asociado al espacio de Banach X
H	espacio de Hilbert
$B([0,1])$	espacio de funciones acotadas en [0,1]
$C([0,1])$	espacio de funciones continuas en [0,1]
$\ell_2(\mathbb{N})$	espacio de sucesiones $\{x_n\}_1^\infty$ dotado con la norma $\|\{x_n\}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2\right)^{1/2}$
$\ell_2(\mathbb{Z})$	espacio de sucesiones $\{x_n\}_{-\infty}^\infty$ dotado con la norma $\|\{x_n\}\|_2 = \left(\sum_{-\infty}^\infty \|x_n\|^2\right)^{1/2}$
$L_2[0,1]$	espacio de Hilbert de las funciones medibles $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con cuadrado integrable
$L_\infty(\mu)$	espacio de las funciones medibles acotadas con la medida μ
$Inv(T)$	el conjunto de los subespacios cerrados invariantes
$AI(T)$	la clase de subespacios analíticamente invariantes

$dim(Y)$ dimensión algebraica del espacio Y
$dist(.,.)$ distancia en un espacio métrico
$\mathbb{D}(0,1)$ disco unidad
$\overline{K}$ clausura del conjunto K
∂K frontera del conjunto K
$int(K)$ interior del conjunto K
$\oplus$ suma directa topológica
e_n vectores de la base canónica de $\ell_2(\mathbb{N})$ o $\ell_2(\mathbb{Z})$
$SVEP$
(C)
Propiedad de extensión univaluada
Propiedad (C)
$L(X)$

$C(X)$ conjunto de todos los operadores lineales y continuos de X en X
$D(T)$ conjunto de todos los operadores lineales y cerrados con do-
$N(T)$ minio y rango en X
$R(T)$ dominio del operador T
$G(T)$ dominio del operador T
$T|Y$ rango del operador T
T/Y grafo del operador T
Q_Y restricción del operador T al espacio Y
I_X cociente del operador T al espacio Y
$E(.)$ aplicación cociente asociada al espacio Y
$T \subset S$ operador identidad asociado al espacio X
medida espectral asociada a un operador
el operador T es una restricción del operador S
$\triangle(f)$
$\Omega_T(f)$
$\rho(T)$ dominio de analiticidad de la función f
$\rho_i(T)$ $\triangle(f) \cup \{$ los polos de $f\}$ en $\sigma(T)$
$\sigma(T)$ conjunto resolvente del operador T
$\sigma_p(T)$ conjunto resolvente esencial
$\sigma_i(T)$ espectro del operador T
$\sigma_\infty(T)$ espectro puntual del operador T
$\rho(x,T)$ espectro esencial
$\sigma(x,T)$ espectro extendido del operador T
$\sigma_\infty(x,T)$ conjunto resolvente local de T en x
$r_T(x)$ espectro local de T en x
espectro local extendido de T en x
radio espectral local de T en x
$A(T)$

$\mathcal{A}(T)$ el conjunto de las funciones analíticas en un entorno del espectro de T
el álgebra de las funciones analíticas en un entorno del es-
$\mathcal{M}(T)$ pectro del operador T
el conjunto de funciones admisibles del cálculo funcional
$\mathcal{A}(x,T)$ meromorfo

$\alpha(T)$	nulidad del operador T
$\beta(T)$	defecto del operador T
$a(T)$	ascendente del operador T
$d(T)$	descendente del operador T
$i(T)$	índice del operador T

$f(T)$	operador del cálculo funcional holomorfo
$f\{T\}$	operador del cálculo funcional meromorfo
$f[T]$	operador del cálculo funcional local
$R(\lambda, T)$	operador resolvente del operador T
$\widehat{x}_T(\lambda)$	función resolvente local de T en x

$$C_T := \{x \in X \quad : \quad T^n x \text{ converge a } 0\}$$

$$S_T := \{x \in X \quad : \quad \sum_{n=0}^{\infty} T^n x \text{ converge } \}$$

$$X(T, F) := \{x \in X \quad : \ \sigma(x, T) \subset F\}$$

$$\sigma^f(T) := \cup_{x \in D(f[T])} \sigma(x, T)$$

Indice Analítico