UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

«Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos»

Autor: Inés del Carmen Plasencia Cruz
Director: Dr. D. José Angel Dorta Díaz

Departamento de Análisis Matemático

D. JOSÉ ANGEL DORTA DÍAZ, CATEDRÁTICO DE E. U. DE ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA,

DÑA. MARIA CANDELARIA ESPINEL FEBLES, PROFESORA TITULAR DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, y

DÑA. ROSA MARÍA GÜEMES ARTILES, CATEDRÁTICA DE E. U. DE DIDÁCTICA Y ORGANIZACIÓN ESCOLAR DE LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA,

CERTIFICAN:

Que la presente Memoria titulada ANÁLISIS DEL PAPEL DE LAS IMÁGENES EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA. UN ESTUDIO DE CASOS, ha sido realizada bajo nuestra dirección por la Licenciada en Ciencias Matemáticas Dña. Inés del Carmen Plasencia Cruz y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Y para que conste a los efectos oportunos firmamos el presente en La Laguna, 29 de Marzo de 2000

Fdo. José Angel Dorta Díaz

Fdo. María Candelaria Espinel Febles

Fdo. Rosa María Güemes Artiles

A mis padres, Otilia y Francisco, en presencia y en ausencia.

C O N T E N I D O

NOTA PREVIA

Este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de mi familia, maestros y amigos que en todo momento han estado conmigo apoyándome con su afecto, información, aliento…

Nombrar a unos primeros y otros después me resultaría difícil porque todos ellos han sido importantes y necesarios con sus aportaciones. Sus nombres irán apareciendo, en esta nota previa, siguiendo el orden cronológico en el que me ofrecieron su ayuda.

Quiero expresar mi gratitud:

A mis hijos Raúl y Jonás que me acompañaron a Tallahassee (USA) donde tuvo lugar gran parte de mi formación. Posiblemente sin su compañía yo no hubiera hecho ese viaje.

A la Dra. Presmeg por su invitación a trabajar con ella e iniciar mi formación sobre las imágenes mentales.

Al Dr. Wheatley que fue para mi un ejemplo didáctico como profesor y como investigador.

Al Dr. Solano y a la Dra. Díaz por el calor humano que me manifestaron como amigos y por las reflexiones y discusiones científicas como compañeros.

A la maestra “Rocío” y los/as niños/as de este estudio, especialmente a Kevin, Raúl y Noel. Obviamente sin ellos no hubiese podido realizar el mismo.

A Loreto Rodríguez por su ayuda técnica en las grabaciones de video.

A mi hijo Raúl que mecanografió gran parte de las transcripciones de las entrevistas y las observaciones de aula.

A mis compañeros, del área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático, por sus preguntas y sugerencias en los seminarios que impartí. Ellas me ayudaron a profundizar y consolidar mis ideas sobre el tema. En particular a Dña Mercedes Palarea y Don Santiago Luis que estuvieron siempre dispuestos a corregir la gramática de este trabajo.

A Dña. Aurelia Noda que solucionó mis preguntas y dudas sobre el Word.

A mis compañeros de Lengua Española de la escuela “Normal”: Don Benigno León, Dña Antonia Mª Nelsi, Don Manuel Abril y Don Ubaldo Padrón por su inestimable y desinteresada colaboración.

También quiero manifestar mi agradecimiento:

A Dña. Rosa Mª Güemes Artiles, codirectora de este trabajo, por su ayuda en la parte metodológica.

A Dña. Candelaria Espinel Febles por aceptar formar parte de la dirección de este trabajo y por su eficacia en el mismo.

Y, por último, a Don José Ángel Dorta Díaz. Su continuo apoyo y atinadas sugerencias fueron un gran estímulo para la realización y conclusión de este trabajo.

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

> ¿Quién hay tan neciamente curioso que envíe a sus hijos a la escuela para que aprendan qué piensa el maestro? Más una vez que los maestros han explicado las disciplinas que profesan enseñar, las leyes de la virtud y de la sabiduría, entonces los alumnos consideran consigo mismo si han dicho cosas verdaderas, examinando según sus fuerzas aquella verdad interior. Entonces es cuando aprenden...
>
> SAN AGUSTÍN

Uno de los mayores objetivos en el ámbito de la Educación Matemática es que los niños (aprendices) “vean” las relaciones y conexiones entre las ideas matemáticas y que puedan aplicar este aprendizaje en la construcción de nuevos conceptos y en la solución de problemas (Fuson, 1992; Hiebert, 1992; NCTM, 1989, 1991; English, 1997).

El trabajo de un estudiante de Matemáticas es construir en su mente un conjunto de ideas matemáticas. Pero, ¿de dónde vienen estas ideas? Hace mucho tiempo se pensaba que la mente del estudiante era como una pizarra en blanco que el profesor tenía que ir llenando. Transmitir, con claridad y precisión, los conceptos matemáticos era el objetivo de la enseñanza; memorizarlos, el del estudiante. Los estudiantes aprendían leyendo los libros de texto y escuchando atentamente la explicación del profesor. Decía Freire (1973: 45):

> La educación padece la enfermedad de la narración. La narración convierte a los alumnos en “contenedores” … que han de ser llenados por el profesor. Cuanto más llene los receptáculos, mejor será el docente. Cuanto mayor sea la docilidad de los receptáculos para permitir su llenado, mejores alumnos serán.

En años recientes ha surgido una forma alternativa de enseñanza, conocida como enseñanza constructivista. Ésta parte de la idea central de que el alumno es quién, en último término, construye, modifica, y coordina sus esquemas mentales, en un proceso de naturaleza básicamente interna; proceso de construcción que se basa en reconocer semejanzas entre las ideas nuevas y las que ya existen (Baroody y Ginsburg, 1990; Davis, Maher y Noddings, 1990; Duilt, 1991; Davis y Maher, 1997; English, 1997). La labor del profesor es reconocer y ser consciente de las representaciones mentales que el alumno está construyendo internamente, y ayudarle, proporcionándole las actividades y experiencias adecuadas que le permitan desarrollar o revisar las estructuras mentales que está procesando.

Entender cómo las personas construyen las ideas, cómo piensan cuando resuelven problemas o cómo construyen los conceptos ha sido materia de estudio de muchas personas desde hace mucho tiempo.

El trabajo de investigación que presentamos tiene como finalidad contribuir con nuestra modesta aportación a la tarea de clarificar algo más cómo se realizan el aprendizaje y la enseñanza de las ideas matemáticas, cómo se construyen los conceptos matemáticos, y cuál es el uso que hacemos de estas construcciones en la actividad matemática.

En concreto, nuestra investigación está dedicada al estudio y análisis del papel que tienen las imágenes mentales, la visualización y las imágenes "metafóricas" en el razonamiento matemático, centrando nuestra atención en el papel de éstas en la enseñanza-aprendizaje en Matemáticas.

Al reflexionar sobre ellas, algunas de las cuestiones que nos surgen de manera natural, son las relacionadas con su significado y con su utilidad en el terreno matemático: ¿Qué son las imágenes mentales?, ¿en qué consiste la visualización?, ¿qué son las metáforas?, ¿qué son las imágenes metafóricas?, ¿son importantes cuando se construye el pensamiento?, ¿qué papel juegan en la consolidación de los conceptos?, ¿qué relación tienen con la actividad matemática?

Queremos matizar que nuestra intención en este trabajo no es analizar la naturaleza de las imágenes mentales, aspecto que consideramos muy interesante pero que se aleja de los objetivos de nuestro estudio. En consecuencia, no investigaremos si las imágenes son una forma de representación mental con propiedades funcionales específicas, ni si son representaciones analógicas que muestran similitud estructural con lo que representan, ni si, por el contrario, son sólo experiencias subjetivas cuyo sustrato corresponde a un código abstracto e inaccesible a la conciencia.

Nuestro estudio pretende ser más didáctico. Lo que nos interesa analizar es el papel, positivo o negativo, que las imágenes mentales y la visualización juegan en la actividad matemática. Para ayudarnos en nuestra tarea, tomaremos algunas reflexiones y resultados de los psicólogos cognitivos, que han enriquecido nuestra comprensión del tema. Aquéllas nos ayudarán a formular nuestra terminología y a clarificar lo mejor que podamos qué tipo de estructuras conceptuales tenemos *in mente* cuando nos referimos a las imágenes mentales y al proceso de visualización, y siempre tomando como referencia el ámbito de la Educación Matemática.

Esta memoria la hemos estructurado en cinco capítulos.

Capítulo 1: *Fundamentos teóricos.*

Capítulo 2: *Metodología.*

Capítulo 3: *Los escolares: Kevin, Noel y Raúl.*

Capítulo 4: *Rocío, maestra de primaria.*

Capítulo 5: *Aportaciones e implicaciones educativas.*

En el primero presentamos los *fundamentos teóricos* en los que se ha basado esta memoria. Desde una perspectiva de la Educación Matemática, exponemos algunas de las ideas e investigaciones que nos han hecho reflexionar, y que suponen la base sobre la que hemos germinado las respuestas que constituyen nuestro trabajo. Lo hemos dividido en seis partes:

-las cuatro primeras, enumeradas con 1, 2, 3 y 4, hacen referencia a las imágenes mentales y a la visualización,

-la quinta, 5, describe las bases teóricas relativas a las metáforas, particularizando nuestro desarrollo en “las imágenes metafóricas”,

-y en el apartado 6 se exponen los planteamientos y objetivos de este estudio.

En el segundo capítulo se describen las razones que nos llevaron a elegir el “estudio de casos” como *metodología* en este trabajo. Los objetivos del mismo son:

-ordenar con precisión y rigor los instrumentos utilizados en la recogida de la información, y

-dar explicaciones de cómo se han llevado a cabo los análisis.

En el tercer capítulo titulado *Los escolares: Kevin, Noel* y *Raúl* se presenta un estudio pormenorizado de cada uno de estos casos, y se analizan las actuaciones matemáticas y las creencias pedagógicas de los estudiantes entrevistados.

El cuarto capítulo: *Rocío, maestra de primaria,* analiza y profundiza en la práctica educativa y en las creencias pedagógicas de la maestra de este estudio.

Por último, en el quinto capítulo presentamos las conclusiones sobre los resultados obtenidos en la investigación. Asimismo reflexionamos en torno a las posibles líneas de investigación futuras y sobre las repercusiones y recomendaciones que, a modo de sugerencia, ofrecemos para mejorar de la realidad escolar.

CAPÍTULO 1:

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Meaningful mathematics learning is frequently imaged-based.[1]

GRAYSON WHEATLEY

1.1. IMÁGENES MENTALES Y VISUALIZACIÓN

En este apartado se describen algunas ideas previas que sitúan las imágenes mentales dentro del contexto de las representaciones mentales. Introduciremos y reflexionaremos brevemente en el tema, desde el ámbito de la Psicología Cognitiva ya que fueron los psicólogos, a finales del siglo XIX, los primeros en efectuar investigaciones sistemáticas en las imágenes mentales.

1.1.1. Nociones preliminares

Nuestra experiencia intuitiva nos revela que las imágenes mentales aparecen cuando pensamos. Preguntarnos por el significado de algo, ya sea una experiencia, una teoría, una palabra o un problema matemático, equivale a profundizar y reflexionar en la comprensión que de ello tenemos. Cada individuo retiene en su memoria un cúmulo de contenidos semánticos (significado de las palabras, conceptos sobre el mundo en el que vive, conocimientos especializados, etc), habilidades y destrezas (conducir, montar en bicicleta, resolver problemas, etc).

---

[1] Cita extraída de Wheatley (1996: 9)

Esta ingente cantidad de información permanece normalmente en estado latente hasta que se activa y recupera desde la memoria operativa. Una parte de la información procesada y acumulada se representa, probablemente, en un formato espacial de imágenes mentales. Estas son, junto a las palabras, las formas que toman las intuiciones y las conceptualizaciones durante el proceso de construcción del pensamiento. Pensar sobre ideas matemáticas nos lleva a representarlas internamente, y esta representación tiene que ser tal que permita a la mente operar sobre y con ellas (Hiebert y Carpenter, 1992).

De esta manera, no es extraño que en las investigaciones actuales sobre la resolución de problemas o sobre la formación de los conceptos matemáticos aparezcan con frecuencia expresiones en las que interviene la palabra “representación”, que tiene diferentes acepciones. Por ello, y dado que nuestro trabajo está relacionado con el término, se hace necesario clarificar lo mejor que podamos el tipo de estructuras conceptuales que tenemos en la mente cuando decimos “representación”; pues la utilización de los vocablos sin reflexión puede crear confusiones conceptuales.

1.1.2. Las representaciones mentales. Terminología y epistemología

En el idioma castellano el término “representar” tiene diferentes significados: a) Evocar, hacer presente a alguien o algo en la imaginación; b) hacer un determinado papel en una obra de teatro o cinematográfica; c) ser imagen, imitación o símbolo de una cosa; d) actuar en nombre o por cuenta de otro, hacer las veces de otra persona o colectividad (Diccionario de la Real Academia Española, 1992; Gran Enciclopedia Larousse, 1991).

Tanto en el idioma castellano como en inglés es el contexto en el que se utiliza la palabra “representar” el que determina la acepción de la misma en cada momento.

A diferencia del castellano, en el que una sola palabra “representar” se utiliza con distintas acepciones, el idioma alemán mantiene diferenciados los significados y utiliza diferentes palabras, que analizaremos con la finalidad de separar, tanto como nos sea posible, las distintas estructuras conceptuales que se “esconden” tras el término “representar”.

Ernst Von Glaserlfeld, en su trabajo "*Preliminaries to Any Theory of Representation*" (Janvier, 1987), describe, si bien expresa que puede haber más, cuatro palabras que en el idioma alemán delimitan sin confusión el significado de representar. Son: *Darstellen, Vorstellen, Vertreten y Bedeuten.*

Los ejemplos, que nosotros hemos traducido al castellano, utilizados por Von Glaserlfeld en su exposición son:

El dibujo *representa* a una azucena (*Darstellen*)

Juana - mentalmente - se *representa* algo a sí misma (*Vorstellen)*

El señor Bush *representa* al presidente (*Vertreten)*

"x" *representa* una cantidad desconocida (*Bedeuten).*

Nuestra lectura e interpretación de las ideas de Von Glaserlfeld nos llevan a lo siguiente:

A) *Darstellen* podría corresponder en castellano a la representación como figuración o exposición de un objeto real o de un concepto, siendo siempre el resultado de una actividad humana.

B) *Vorstellen* podría corresponder en castellano a la representación en la que una imagen mental sustituye a algo real o imaginario.

C) *Vertreten* que se corresponde en castellano a la acción de sustituir a alguien o hacer sus veces, desempeñar su función (el vicepresidente de la nación representa al presidente, el portavoz del gobierno representa la opinión del mismo, etc.).

D) *Bedeuten* que se corresponde en castellano a ser símbolo de un concepto o una idea.

Pensamos que son tres vocablos los que nos interesan en la investigación matemática: *Vorstellen, Darstellen y Bedeuten.*

Siguiendo las ideas de Von Glaserlfeld una diferencia básica entre las dos primeras estaría en que, mientras que en la primera (*vorstellen*) la representación no es una réplica exacta de un original externo, sino que tiene que ser construida e interiorizada mentalmente, en la segunda (*darstellen*) se comienza con un objeto que tiene que ser representado externamente.

Vorstellung sustantivo de *vorstellen,* es para Von Glaserfeld sinónimo de "representación mental" y se entiende tanto como la actividad mental (el proceso) como el resultado o producto final de esa actividad. En ambos casos, se refiere a una creación primaria, a un acto de construcción interna en el que no hay un objeto *a priori* que sirva como original a ser replicado o re-presentado, ya que ningún organismo cognitivo puede tener acceso completo a las cosas en sí mismas. Nuestra capacidad representativa se ve limitada desde el momento de la percepción del objeto que no se percibe en su totalidad, en su exacto detalle, a la vez que la persona añade o complementa esta percepción con sus propios criterios, mecanismos o procesos cognitivos. Ello llevaría directamente a la concepción individual de las ideas matemáticas. Para acentuar su carácter de construcción interna Von Glaserlfeld se refiere a ellas con el nombre de *conceptions*.

Bedeuten, la tercera palabra que el idioma alemán utiliza para referirse al término "representar", se usa cuando se quiere expresar acciones como "significar", "querer decir", "ser símbolo" y "denotar"; también se utiliza este término cuando se pregunta por ejemplo por el significado de una palabra.

Ante un concepto matemático empieza inicialmente a jugar la imaginación, creándose una primera aproximación interna del mismo; piénsese, por ejemplo, en el concepto de límite de una función f(x) cuando $x \rightarrow a$.

La idea matemática de aproximación es una construcción interna e individual (*vorstellen*) diferente para cada persona; este sería el primer paso para la construcción del concepto.

Con la simbología correspondiente $\forall$ (cuantificador universal), ε (número real positivo pequeño), R (conjunto de todos los números reales), f (función considerada), ... enunciamos formalmente y con rigor la idea matemática. Cada uno de estos símbolos, representa una cosa; en este caso, un objeto matemático (*bedeuten*).

Un apoyo externo, como un boceto, un diagrama o una forma icónica (*darstellen)* hará más tangible, comunicable y manejable la idea inicial.

El boceto o el diagrama, que en efecto encierra una idea (*darstellen*), complementarán y reforzarán la imagen o representación mental (*vorstellen)* del concepto de límite.

La diferencia entre el diagrama (*darstellen*) y la representación interna (*vorstellen*), por simplificar la situación, radica en que el primero contiene ciertas características o se perciben en él algunas propiedades reales del concepto, mientras que la segunda se fundamenta en la actividad mental del individuo en el que se inicia la idea.

1.1.3. Representaciones en un contexto matemático

En el ámbito educativo, y desde las Matemáticas, una idea básica es entender el modo, o los modos, en que las personas entienden y transmiten los conceptos y las ideas matemáticas. El “cómo” las personas los entienden, la manera en que les dan significados es una cuestión de la comprensión humana. Asumimos que el conocimiento se representa internamente, y es a través de estas representaciones y en las conexiones y relaciones que se establecen entre ellas donde las personas van construyendo sus ideas.

Las investigaciones sobre la visualización en Matemáticas, y el papel de las imágenes mentales, han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos.

Los objetos de las Matemáticas se presentan bajo un aparente dilema con dos estatus diferente: el operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Sin embargo, mientras el estatus conceptual del objeto matemático se presenta organizado en diferentes redes conceptuales y es plenamente aceptado, los Sistemas de Representación Semióticos (SRS) que caracterizan el estatus operacional (representaciones numéricas, códigos, gráficas, diagramas, etc.) en los que los objetos son expresados y comunicados, han recibido menor atención por parte de los matemáticos y el sistema educativo. No obstante, las Matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación.

Con la finalidad de comprender los mecanismos que ocurren dentro del proceso de construcción y comprensión del conocimiento, investigadores como Janvier (1987); Kaput (1987, 1989a, 1991); Duval (1993, 1995); Palarea y Socas (1994a, 1994b) y Palarea (1999), entre otros, han realizado estudios experimentales y teóricos en los que analizan el papel de las representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas.

Janvier (1987) proporciona algunos resultados que muestran la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar “un proceso de traducción” entre representaciones, concibiéndolo como una etapa importante en la construcción del concepto. Tomando como ejemplo el concepto de función, usa una figura en forma de estrella de cinco puntas, en cada una de las cuales exhibe una representación de la función (descripción verbal, objeto, tabla, gráfica y fórmula).

Kaput (1987), por su parte, desarrolla un acercamiento teórico para explicar el uso de símbolos matemáticos y señala que "cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Hay, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirá: 1) el mundo representado; 2) el mundo representante; 3) qué aspectos del mundo representado han sido representados; 4) qué aspectos del mundo representante hacen la representación y 5) la correspondencia entre los dos mundos". Kaput (1989 a) afirma que los sistemas de representación (o sistemas simbólicos, artefactos lingüísticos o culturales, materialmente realizables), cuando se aprenden, son utilizados por los individuos para estructurar la creación y elaboración de sus representaciones mentales -medio por el cual un individuo organiza y maneja el flujo de su experiencia-. Ha intentado establecer relaciones entre una "notación A (escrita, dibujada, etc.) y el referente B" donde cada uno (y quizá su correspondencia) es expresable en forma material, pero donde la relación referencial existe sólo en términos de operaciones mentales de los miembros de un dominio consensual particular. Es claro que Kaput subraya la presencia de operaciones mentales y que las transformaciones (acciones) de una representación a otra juegan un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos.

Duval (1993, 1995) realiza un trabajo teórico, coherente y unificador, y caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación siempre y cuando permita tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis (o sea, aprehensión o producción de una representación semiótica que se puede generar con una sola representación): 1) La presencia de una representación identificable; 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada y 3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993) mantiene que: “toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa” y, por tanto: “la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva”.

Palarea y Socas (1994a, 1994b), en sus estudios experimentales sobre el lenguaje algebraico, constatan la necesidad de ampliar las fuentes de significados para éste a SRS de procedencia visual (registros geométricos), y proponen una interacción entre las diferentes representaciones semióticas que se articulan en estrategias de enseñanza.

Palarea (1999) realiza una aplicación del planteamiento teórico anterior en su investigación relacionada con expresiones algebraicas y ecuaciones.

En los párrafos anteriores, hemos señalado que distintos investigadores, ya sea tanto en el ámbito teórico como desde la experimentación, han resaltado la importancia de las representaciones para la formación adecuada de los conceptos matemáticos.

Sintetizando, y desde nuestra reflexión en el tema, diferenciaremos las representaciones “internas” (formas que toman las estructuras cognitivas de una persona) y las “externas” (utilizadas para comunicar las ideas).

Las internas las construye la mente de la persona, pertenecen al campo de lo cognitivo y a través de ellas el individuo da sentido a los fenómenos explicando los conceptos e ideas matemáticos. Son lo que Von Glaserlfeld (1987) llama “concepciones”; son modelos cognitivos o mentales con los que asimilamos y estructuramos nuestra experiencia. En nuestro estudio, la “imagen mental” es una representación mental interna.

Por su parte, las representaciones externas aparecen en escena cuando queremos comunicar las ideas matemáticas que hemos construido o estamos construyendo. La comunicación requiere que la representación de las ideas sea externa; aparecen entonces el lenguaje hablado, el escrito, los dibujos, los modelos físicos, etc., objetos que tienen como objetivo representar externamente una idea, concepto o problema matemático (Hiebert y Carpenter, 1992). Las representaciones externas serían todos aquellos “objetos” de conocimiento (tablas, diagramas, símbolos, dibujos, gráficos en el ordenador, etc.) que actúan como estímulos en el aprendizaje, y cuya presencia puede representar una idea o un concepto matemáticos. Podemos considerarlas como “concretizaciones” de ideas o conceptos matemáticos; por ejemplo con relación al concepto de función, el grafo, la tabla de valores y la ecuación (ya sea en forma paramétrica, continua o vectorial) son diferentes representaciones que usamos para comunicar dicho concepto. Las representaciones externas serían “icónicas” (término utilizado por Von Glaserlfeld) si la representación se parece a lo que representa, esto es, al original. Valga como ejemplo el dibujo que hacemos de la construcción mental que llamamos triángulo.

Las representaciones mentales y las representaciones externas están fuertemente relacionadas en Matemáticas, de manera que muchas veces, a menos que reflexionemos y profundicemos en ello, nos movemos de manera inconsciente de unas a otras. Por ejemplo, en el acto de resolver un problema matemático se hace uso de un diagrama. Esta representación externa permite a la persona que resuelve el problema tener más espacio mental para construir nuevas imágenes y relaciones (Wheatley, 1997). Se crea un proceso recursivo de la siguiente manera:

1. Frente a un problema, se construye una imagen (representación interna).
2. Se hace un dibujo (representación externa).
3. Se vuelve a razonar, tomando base en el dibujo y se construye una imagen más sofisticada.
4. Se construye un dibujo más elaborado.
5. Se repite el proceso.

Es esta relación entre las representaciones externas e internas la que nos permitirá analizar e interpretar nuestros datos. Suponemos que cuando un estudiante utiliza una representación externa para comunicar una de sus ideas, ésta revela algo de cómo el estudiante está construyendo esa idea en su mente. Esto nos permitirá explicar sus procesos de pensamiento y el modo en que da sentido a los conceptos matemáticos. Teniendo en cuenta que las representaciones mentales no son observables directamente, debido a que ocurren en la mente de cada individuo, las discusiones acerca de cómo las ideas se representan internamente en la mente de las personas están basadas en alto grado de inferencias.

1.1.4. Imágenes mentales. Ideas previas

En este apartado haremos un recorrido por el tema de las "imágenes mentales", que es uno de los objetivos de nuestra investigación, y que desde sus inicios nos ha resultado apasionante, difícil, polémico e interesante. Recogeremos algunas aportaciones que nos han ayudado a construir nuestras ideas. A través de la literatura nos hemos encontrado, con trabajos que abordan el tema desde la Psicología Cognitiva. Algunas de las cuestiones que han preocupado a los psicólogos cognitivos han sido:
¿Las imágenes son una forma de representación mental con propiedades funcionales específicas?, ¿Son construcciones analógicas semejantes a lo que representan?

Entendemos que hay dos concepciones diferentes sobre las imágenes mentales. Una de ellas asume que estas imágenes constituyen un formato cuasi-perceptivo que preserva las propiedades espaciales de la información. Los partidarios de esta idea admiten la existencia de un formato más abstracto, quizá proposicional, junto al formado por las imágenes mentales. La segunda concepción parte de la idea de que el formato mental es proposicional, las imágenes mentales no constituyen un verdadero constructo científico pues se pueden tratar como simples proposiciones (De Vega, 1984).

No entraremos en la polémica que han suscitado en la Psicología Cognitiva estas dos posiciones tan nítidamente diferenciadas. Al ser nuestro trabajo de corte didáctico, y estar situado en el ámbito de la Educación Matemática, abordaremos las imágenes desde su funcionalidad, es decir, estudiaremos su uso en la práctica; concretamente en la actividad matemática, en el razonamiento matemático, en la resolución de problemas y en la creatividad matemática.

1.1.5. Imágenes desde un contexto histórico. Algunos estudios pioneros

Las imágenes mentales constituyen un fenómeno que apareció tempranamente en la historia y su estudio ha sido realizado por diferentes personas a lo largo de los tiempos. Pensadores, filósofos, poetas, oradores, frailes, psicólogos y educadores matemáticos, han sido algunos de los que se han dedicado a su estudio e investigación. En los primeros escritos griegos ya aparecen referencias a las imágenes en el estudio de fenómenos como la memoria, en las situaciones donde se quiere hacer uso del recuerdo, o en fenómenos donde se trata de encontrar significado y sentido a los problemas que ocurren a nuestro alrededor. Históricamente, Aristóteles fue uno de los primeros pensadores para el que las imágenes mentales realizaban un papel importante en el pensamiento; sostuvo que "el pensamiento es imposible sin una imagen" (citado en Kosslyn, 1983). Otros pensadores, algunos citados en el siguiente apartado, también vieron la importancia que tienen las imágenes en el fomento de la memoria.

1.1.5.A. Imágenes y memoria

Oradores griegos y romanos y, más tarde, frailes y sacerdotes durante la Edad Media, emplearon las imágenes como un medio para recordar sus sermones y mítines (citado en Sommer, 1978).

La primera evidencia histórica se sitúa hace unos 2500 años, época en que Simónides elaboró un procedimiento para que los oradores recordasen los discursos. Consistía en construir una imagen de un trayecto familiar y generar imágenes de las cosas que se querían recordar, situándolas en determinados lugares del "trayecto". Para recuperar la información volverían a recorrer mentalmente el trayecto "viendo" los objetos que pusieron en cada lugar (Paivio, 1971).

Luria (1968) describe el caso de un mnemonista[2], Shereshevskii, para el que las imágenes tenían un importante papel en el recuerdo. Parece que su capacidad para recordar con gran precisión matrices de decenas de dígitos se basaba en la construcción de imágenes *eidéticas*, imágenes donde la persona "ve" con gran nitidez lo que tiene que recordar como si estuviese escrito en un libro que lee, como si fuese una percepción objetiva (citado en De Vega, 1984).

Actualmente, debido a la utilización generalizada de la escritura, el uso de las imágenes como ayuda mnemónica en los discursos ha perdido cierta efectividad; sin

[2] Persona que desarrolla y pone en práctica sus grandes dotes para la memorización.

embargo existen oradores, profesores, etc., que utilizan esas imágenes en el recuerdo para construir y dar forma a sus discursos o explicaciones.

1.1.5.B. Imágenes desde la Psicología

Los psicólogos fueron los primeros en emprender investigaciones sistemáticas en imágenes mentales a finales del siglo XIX. Éstas se desarrollaron de modo bastante tardío, ya que existía un fuerte prejuicio teórico sobre el escaso interés de las imágenes (De Vega, 1984).

Uno de los primeros estudios en imágenes mentales fue hecho en 1883 por Sir Francis Galton, antropólogo y explorador inglés, quien estaba interesado en investigar las diferencias individuales que mostraban las personas en su inteligencia con el fin de desarrollar un programa de eugenesia para mejorar la raza. Utilizando como instrumento de investigación un sencillo cuestionario, pedía a un grupo de universitarios y científicos que formasen una imagen de su mesa de desayuno y la describiesen. Galton detectó que la mayoría de los encuestados fracasaba en la tarea. En estudios posteriores, incluyó a personas de otras profesiones y de diferentes niveles sociales. Encontró que muchas de esas personas también confesaron ausencia de imágenes y otras dijeron haber "visto" imágenes muy vivas. Galton analizó sus datos eligiendo 100 respuestas, al azar, de entre los cuestionarios realizados, y los ordenó teniendo en cuenta la fuerza y claridad de las imágenes reportadas. Algunas personas tenían una gran tendencia a pensar en imágenes, empleando todo tipo de "dibujos" en la mente; sin embargo, para otras no era así, pues manifestaron que pensaban principalmente con las palabras (Brown, 1993; Skemp, 1980).

Las personas muestran diferencias en cuanto a su habilidad para usar imágenes en su pensamiento. Para algunas, las imágenes tienen un papel moderado o regular, pueden valerse de ellas pero no suele ser una característica importante de su personalidad o estilo cognitivo. Otras suelen decir que no usan imágenes y que piensan y razonan utilizando palabras. Y, por último, hay personas cuya facultad para usar imágenes está bien desarrollada y pueden abordar los problemas a través de la construcción de imágenes, ya que son ricas en detalles, textura, movimiento, colores. Se suele decir que son buenos visualizadores.

A lo largo de la Historia el interés de los investigadores en las representaciones mentales de las ideas, como materia de investigación, no ha sido el mismo. Sin ir más lejos, a lo largo del siglo XX ha habido importantes discrepancias. Las primeras décadas del siglo que vivimos estuvieron dominadas por el paradigma conductual representado principalmente por Thorndike, Pavlov, Watson y Skinner, quienes postulaban análisis asociacionistas de la conducta según el modelo proceso-producto; básicamente, en este modelo, se establece una conducta deseada en términos observables y medibles. Estos autores negaban o minimizaban el valor funcional de los procesos mentales; las representaciones mentales fueron excluidas del estudio y de la investigación debido a que no podían ser observables y cuantificables directamente.

Ante la inoperancia del paradigma conductual, en la década de los setenta numerosos psicólogos y didactas se dedicaron a la investigación y búsqueda de un paradigma alternativo centrado en los procesos de pensamiento. Bruner, Piaget, Ausubel y Vygotsky, fueron algunos de los que creyeron que es la mente la que dirige la persona y no los estímulos externos. La inteligencia, la creatividad, el pensamiento reflexivo y crítico son temas constantes en este paradigma. Así, los trabajos en Ciencia Cognitiva, a partir de los años setenta, restablecieron el estudio de las representaciones mentales como materia de investigación.

En síntesis, las investigaciones en imágenes mentales continuaron durante los primeros años de la Psicología Experimental, pero disminuyeron durante el apogeo del Conductismo. Ya hemos dicho que psicólogos como Pavlov, Watson y Skinner desconfiaron de todo lo que no podía ser observado y medible directamente. Imágenes, junto a sueños y emociones, fueron desterradas de gran parte de la Psicología académica durante muchos años, sobre todo en USA. En su detrimento, surgió un auge en procesos verbales, los cuales dominaron las investigaciones teóricas y empíricas en fenómenos como aprendizaje, memoria y lenguaje.

Sin embargo, durante la década de los setenta, el estudio de las imágenes mentales empezó a resurgir. Merecen destacarse, entre otros, los trabajos de Allan Paivio, Jean

Piaget, Barber Inhelder y Stephen Michael Kosslyn. Recogemos a continuación algunas de sus ideas.

Paivio (1971) proporcionó informes sobre imágenes mentales que tuvieron una gran influencia en los años posteriores. Su hipótesis dual (“*dual coding theory”*) es el marco de referencia conceptual que se ha estado empleando en las últimas décadas para abordar el estudio de las imágenes. Esta hipótesis sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, sistemas estrechamente conectados y que actúan conjuntamente, pero con propiedades estructurales y funcionales diferentes. De Vega (1984) hace una descripción detallada de los postulados básicos de la hipótesis dual.

Gracias a los trabajos de Paivio, los procesos mentales que utilizan las imágenes han adquirido la misma importancia que los procesos verbales o que utilizan palabras. Paivio dio a los estudios sobre imágenes su conocida reputación en el mundo de la investigación.

Jean Piaget ha sido una de los investigadores más importantes de este siglo. Su obra y sus investigaciones son famosas y conocidas en el mundo entero. Junto a sus colaboradores de la escuela de Ginebra desarrolló la Psicología Genética, que puede considerarse un paradigma cognitivo por derecho propio. Ésta tiene como meta prioritaria averiguar los mecanismos que determinan el desarrollo cognitivo desde el nacimiento hasta la adolescencia.

Con relación a las imágenes mentales, Piaget, junto a su colaboradora Barber Inhelder, hizo algunas importantes aportaciones.

En su libro *Mental Imagery and the Child,* Piaget e Inhelder (1971), diferenciaron las imágenes en dos categorías que llamaron *reproductive* y *anticipatory*. Las primeras representan mentalmente sucesos y objetos ya conocidos por las personas, mientras que las segundas suceden cuando una persona representa objetos o sucesos que no ha percibido previamente.

La clasificación de Piaget e Inhelder la tendremos *in mente* cuando interpretemos el trabajo de nuestros estudiantes. Con el fin de facilitar la lectura de este documento, hemos decidimos posponer el desarrollo más exhaustivo de esta clasificación al apartado 1.4.2.1 donde trataremos los diferentes tipos de imágenes en la actividad matemática.

Por otro lado, Piaget e Inhelder sostienen que los niños no son capaces de formar imágenes mentales hasta que pasan la etapa en que los objetos pueden ser representados a través de acciones sobre los mismos. Mantienen que la naturaleza de las imágenes cambia con la edad; así, en la "etapa de las operaciones concretas" pueden formar imágenes *anticipatories,* algo que no ocurre en la etapa "preoperatoria", donde sólo pueden construir imágenes *reproductives*, además de que las imágenes no derivan de la percepción (el conocimiento de los objetos surge del contacto directo con ellos) sino de una "imitación internalizada". Para formarnos una idea de lo que esto significa y de cómo los niños construyen las imágenes, utilizamos la descripción que hacen Piaget e Inhelder de la actuación de los niños en la siguiente tarea (citada en Holloway, 1969): la tarea consiste en reconocer formas por el sentido del tacto con ausencia de estímulo visual (percepción háptica) y nombrarlas, dibujarlas o señalarlas. Los problemas a los que se enfrenta el niño, en la realización de esta tarea, son: por una parte trasladar sus percepciones cinestésicas táctiles a visuales, y, por otra, la construcción de una imagen visual que incorpore la información táctil y los resultados de sus movimientos exploratorios. Resumimos, a continuación, algunos de los encuentros en las distintas etapas evolutivas:

ETAPA I (2-4 años) puede reconocer objetos familiares pero es incapaz de reconocer formas no familiares a causa de una exploración insuficiente. No puede dibujar las formas, ni siquiera las más simples, porque la actividad perceptual es la fuente de la imitación.

ETAPA II (4-7 años) la exploración es mas activa aunque todavía arbitraria. Es capaz de distinguir formas curvas de las que tienen ángulos y líneas rectas. Los dibujos ya no son garabatos, se parecen al modelo. No expresa tanto el modelo percibido de manera táctil, sino más bien la actividad táctil misma. Carece de una guía operacional, avanza y no vuelve para determinar un punto de referencia (análisis empírico no basado en razonamiento). La imagen que extrae de un objeto la construye desde sus propias acciones sobre el objeto.

ETAPA III (7-8 años) aparece la coordinación operacional. Una operación como un acto que puede volver a su punto de partida y que puede integrarse con otras acciones que también poseen este rasgo de reversibilidad. La exploración es dirigida por un método operacional que consiste en agrupar los elementos percibidos en términos de un plan general y partir desde un punto fijo de referencia hasta el cual el niño puede siempre volver. Cada forma percibida se asimila al esquema de acciones coordinadas necesarias para reconstruirla. Por eso el elemento pictórico se corresponde en forma tan estrecha con este proceso reconstructivo.

Resumiendo**:** en cada uno de los tres estadios descritos los niños son capaces de reconocer, y especialmente de representar, sólo aquellas formas que puedan reconstruir efectivamente a partir de sus propias acciones. La abstracción de forma se logra sobre la base de la coordinación de las acciones del niño y no, o al menos no sólo, directamente a partir del objeto**.** La representación mental de una figura, "su imagen", se entiende como una imitación interna de acciones (imitación internalizada).

En consonancia con las ideas de Piaget, y desde una perspectiva constructivista, Wheatley y Cobb (1990) mantienen que las personas dan significado y estructura a los modelos espaciales basándose en sus propias experiencias, estructuras conceptuales, intenciones y continua interacción social. Cada niño construye a través de sus acciones, físicas o perceptuales, conscientes o inconscientes, una imagen del modelo que puede más tarde re-presentar y transformar. No es una captura "visual" de algo exterior que guarda "tal cual es" en su cabeza.

Piaget e Inhelder (1971) diferencian cuatro posibles procedimientos en la investigación que nos hagan pensar en la utilización de imágenes por una persona: una descripción verbal de que se está usando una imagen; un dibujo hecho; la elección de un dibujo que se adapte mejor a la imagen mental, entre varios mostrados por el investigador; y una reproducción utilizando gestos. Reconocen la dificultad de los métodos verbales en los niños pequeños.

En nuestra investigación asumiremos la posición de Presmeg (1997a), quien acepta la idea de Piaget de que las imágenes están implicadas cuando las personas dibujan un diagrama o una figura. Expondremos con más detalle, en el Capítulo 2, sobre metodología, los procedimientos que hemos utilizado en el análisis del trabajo de los estudiantes.

Kosslyn (citado en Clements, 1981) señala que Piaget e Inhelder no formularon claramente su teoría sobre las imágenes mentales, es decir, que no especificaron el formato o contenido de la imagen, no explicaron de una manera precisa lo que entendían por "imitaciones interiorizadas" ni de qué manera operan estas imitaciones interiorizadas

De Vega (1984) explica que Kosslyn se basó en los resultados de una gran cantidad de investigaciones, muchas de las cuales realizadas por él y sus colaboradores, para elaborar un protomodelo que sirva de base a los modelos de simulación de las imágenes mentales utilizando el ordenador. Básicamente el protomodelo se apoya en las siguientes ideas:

> 1. las imágenes no son epifenómenos o eventos marginales, sino plenos de funcionalidad, como demuestran muchos experimentos cronométricos;
> 2. las imágenes no se recuperan globalmente o "in toto", sino que se generan poco a poco, añadiendo detalles; prueba de ello es que se tarda más en elaborar una imagen grande (más detalles) que una pequeña;
> 3. se construyen en unidades gestálticas significativas o coherentes, no en trozos sin significado;
> 4. las imágenes se construyen no sólo a partir de información perceptiva, sino también semántica o descriptiva; prueba de ello es que podemos elaborar combinaciones novedosas de imágenes a partir de descripciones verbales (citado en De Vega, 1984: 242).

Para concluir diremos que las investigaciones expuestas previamente muestran cómo una parte de la información mental procesada y almacenada se ajusta seguramente a un formato espacial de imágenes mentales.

Partiendo de que las imágenes existen, analizaremos en el siguiente apartado la relación de las imágenes mentales con las Matemáticas.

1.2. IMÁGENES, VISUALIZACIÓN Y MATEMÁTICAS

En este apartado definiremos los constructos: imagen mental y visualización, desde el ámbito de la educación Matemática. Además analizaremos, por una parte, la interrelación entre las imágenes y la creatividad en el pensamiento y la actividad matemática, y por otra, estudiaremos la función que desempeña la imagen y los procesos de visualización en la resolución de problemas matemáticos.

1.2.1. Definiendo las imágenes mentales

La definición de "imagen mental" es un asunto polémico. Investigadores y educadores definen la imagen mental de formas diferentes, incluso muchos utilizan el término en sus estudios sin hacer explícita una definición. Pensamos que es importante intentar precisar el término con la finalidad de que se entienda qué tenemos en la mente cuando hacemos referencia al mismo.

La opinión más elemental es que las imágenes son réplicas fieles de los objetos físicos que reemplazan (Arnheim, 1986). En un nivel más académico, podemos decir que las imágenes mentales constituyen un formato representacional de nuestro sistema cognitivo (formato que es analógico, en el sentido, por ejemplo, de que la imagen mental de un objeto se parece al mismo en ciertos parámetros como la forma, el tamaño, la orientación).

Las imágenes pueden ocurrir en una o varias de entre estas seis modalidades diferentes: visual, auditiva, gustativa, táctil, olfativa y cinéstesica. Aunque todas las imágenes mentales son "internas" las cinco primeras modalidades las podemos conectar con los sentidos externos (vista, oído, olfato, gusto y tacto) mientras que la modalidad cinestésica hace referencia a una síntesis de sensaciones simultáneas, consecuencia de relaciones entre las otras modalidades.

Ilustremos con un ejemplo las distintas modalidades. Imaginemos un paseo en la playa; este paseo puede haber sido realizado o no, es decir, podemos construir ese paseo mentalmente o recordar un paseo realizado. Imaginando el paseo, podemos:

- Sentir la arena en nuestros pies, el frescor del aire en la cara (modalidad táctil).
- Oír el sonido del mar, (modalidad auditiva).
- Oler una violeta, (modalidad olfativa).
- Ver la playa, las montañas, el paisaje, (modalidad visual).
- Saborear el pescado de un determinado bar, (modalidad gustativa).
- El sabor y el olor de la imagen visual de una comida sabrosa que produce un movimiento muscular interno o respuesta vegetativa, (modalidad cinestésica).

Las modalidades que se usan en Matemáticas son la auditiva, la cinestésica y, básicamente, la visual (Presmeg, 1997a).

Las imágenes visuales, imágenes mentales que tienen una fuerte componente visual, son las que consideraremos de manera fundamental en este trabajo, y a ellas nos referiremos posteriormente.

En los párrafos sucesivos recogemos la contribución de algunos investigadores que tratan cuestiones relacionados con la definición de “imagen”.

Los primeros estudios conceptualizaron las imágenes como “dibujos en la mente”[3] Clements (1982) no encuentra ningún argumento con peso suficiente para descartar esa definición relativamente simple como punto de partida en la Educación Matemática. No obstante, según apunta Presmeg (1997a), Clements incluye, en su categoría de fotografías mentales, las teorías de investigadores como Kosslyn y Paivio, para quienes la formulación del término “imagen” se aparta un paso de la idea tradicional. Esta idea se remonta a Aristóteles y aparece en escritos de filósofos como Aquino, Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke, Berkeley y Hume, entre otros.

[3]“*Pictures in the mind*", en terminología inglesa.

Kosslyn (1983), por su parte, señala que la analogía “dibujos en la mente” para referirse a la imagen mental resulta inadecuada para explicar la naturaleza y las propiedades de las imágenes. Observando y analizando las respuestas que diferentes personas daban a determinadas preguntas, se dio cuenta de que las personas pueden hacer con las imágenes procesos dinámicos (como rotarlas, desplazarlas, transformarlas), los cuales serían difíciles de hacer si las imágenes fuesen igual que fotografías o dibujos en la mente. Kosslyn (1990b) define una imagen visual como una representación en la mente que (en ausencia de la apropiada estimulación sensorial a través de la vista) da la experiencia de "ver". Recopiló una gran cantidad de información, la mayoría encontrada en investigaciones que realizaron él y sus colaboradores, y concluyó una serie de premisas básicas, entre las que figura la de que las imágenes se construyen no sólo a partir de información perceptiva, sino también semántica y descriptiva, como lo demuestra el hecho de que podamos construir imágenes a partir de descripciones verbales.

La metáfora que concibe las imágenes como “dibujos en la mente” no es aceptada por los investigadores actuales en el ámbito de la Educación Matemática.

Presmeg (1986, 1997a) considera la imagen visual como un constructo mental que describe información visual o espacial.

Wheatley (1997) se refiere a la imagen como una construcción mental. Para él, las imágenes son construidas a partir del “flujo” de la actividad experimental de una persona y pueden ser re-presentadas mentalmente sin la presencia de un estímulo sensorial. Podemos hacer uso de ellas desde la memoria, y transformarlas.

Entendemos que Wheatley se refiere al proceso, a la calidad, al “fluir” de la experiencia más que a la cantidad. El papel de la experiencia física, de la acción, como un elemento que favorece la construcción de las imágenes ha sido una idea desarrollada, con anterioridad, en los escritos de Piaget e Inhelder (1971) que comentaremos posteriormente.

A partir de estudios cronométricos desarrollados por distintos psicólogos cognitivos, se concluye que los individuos elaboran imágenes mentales y que son capaces de someterlas a una transformación mental, estructural y funcionalmente análoga a la rotación física de un objeto, carácter ausente en la percepción visual. De Vega (1984: 231) escribe:

> Resulta extraordinario este carácter transformacional de las imágenes, totalmente ausente en la percepción visual. En ésta, los aspectos dinámicos de la información son propiedades objetivas del ambiente, es decir, eventos relativamente independientes del sistema perceptivo. Sin embargo, en la imagen mental, las transformaciones son generadas por el propio sistema cognitivo. Esto nos revela una importante cualidad funcional de las imágenes. Se trata de un sistema de "simulación" analógico de ciertos parámetros y relaciones observados o potenciales de nuestro ambiente visual.

En nuestro trabajo llamaremos *"imagen mental"* a un constructo que la mente crea y que constituye un formato representacional de nuestro sistema cognitivo. Puede, una vez construida, volver a ser re-presentada en la "pantalla mental" y también ser transformada.

La naturaleza de la imagen depende de construcciones mentales previas y de los propósitos de la persona que construye la imagen, además de la situación para la que se necesita la construcción.

1.2.2. Sobre la visualización

En el ámbito de la Educación Matemática, Bishop (1989) establece una diferenciación a tener en cuenta en el término "visualización" y es su consideración de "sustantivo" o "verbo". El primero dirige la atención hacia el producto, el objeto, el "qué" de la visualización, las imágenes visuales. El segundo nos conduce al proceso, a la actividad, a la habilidad, al "cómo" visualizar.

En una investigación anterior, Bishop (1983) había propuesto considerar dos habilidades diferentes:

1.- La habilidad para interpretar información figurativa, IFI (*interpretation of figural information*). Esta habilidad Bishop (1983: 184) la define como:

> The ability involves understanding the visual representations and spatial vocabulary used in geometric work, graphs, charts, and diagrams of all types. Mathematics abounds with such forms and IFI concerns the reading, understanding, and interpretation of such information. It is an ability of content and of context, and relates particularly to the form of the stimulus material. [4]

---

[4] Involucra comprender las representaciones visuales y el vocabulario espacial que se usa en el trabajo geométrico, grafos, tablas y diagramas de todo tipo. En Matemáticas abundan esas formas e IFI tiene que ver con la lectura, comprensión e interpretación de ese tipo de información. Es una habilidad de contenido y de contexto y está particularmente relacionada con la forma del estímulo material.

2.- La habilidad para el procesamiento visual VP (*visual processing*) que para Bishop (1983: 184) tiene que ver con:

> Visualization and the translation of abstract relationships and no figural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented. [5]

La importancia de la habilidad VP está en que, a través de ella, Bishop enfatiza los procesos realizados independientemente de la forma del estímulo presentado. En este sentido, llama la atención sobre el hecho de que si se quiere examinar o estudiar la visualización en Matemáticas, se deberían usar pruebas que incluyan tanto elementos figurativos como no. Pensamos que tener en cuenta lo anterior es importante en estudios experimentales, como lo es el nuestro, ya que creemos que la visualización puede darse no solamente en Geometría sino en Álgebra o Aritmética, como mostraremos en el capítulo 3 dedicado al análisis del pensamiento matemático de los escolares.

Bishop (1983) relaciona la dicotomía VP e IFI con dos tipos de habilidades espaciales puestas de manifiesto a finales de los años 70 por McGee (1979): “visualización espacial” (Vz) y “relación y orientación espacial” (SR-O).

La “visualización espacial” involucra la habilidad para manipular, rotar, girar, o invertir mentalmente un objeto presentado pictóricamente *y* la “relación y orientación espacial” se corresponde con la comprensión de la colocación de los elementos dentro de un modelo visual y la aptitud para permanecer sin confundirse si la configuración presentada se cambia de orientación.

Vz y SR-O pueden considerarse como dos clases caracterizadas por varias subhabilidades. McGee (1979) presenta un resumen de cuatro estudios realizados por Guilford y Lacey; Thurstone; French; y Ekstrom, French y Harman en el que describe los símbolos y descripciones que los investigadores citados hacen de los factores

---

[5] Visualización y traducción de relaciones abstractas y no figurativas en términos visuales. También incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales y de imágenes visuales. Es una habilidad de proceso y no se relaciona con la forma del estímulo material presentado.

“visualización espacial” y “orientación espacial”. Señala que, aunque difieran los símbolos y los nombres, las descripciones son sumamente semejantes.

IFI complementa a SR-O al incluir convenciones geométricas y gráficas no empleadas generalmente en los tests SR-O y enfatizando la interpretación que se pide para estas representaciones.

Bishop argumenta que VP tiene mucho en común con Vz. No obstante, destaca más el proceso que la forma del estímulo presentado, lo que tiene soporte en la teoría de Piaget, según la cual, el desarrollo de las imágenes en el niño parece depender más de la internalización de la acción que del objeto.

La valoración de VP hace necesaria la utilización de entrevistas individuales en contraste a IFI, cuya evaluación puede hacerse en grupo. Desde el punto de vista docente, parece que es más fácil la enseñanza y desarrollo de IFI que VP, básicamente debido a la naturaleza pública y comunicable de IFI frente a la naturaleza privada, personal, de VP.

Gutiérrez (1996) piensa que las habilidades VP e IFI descritas por Bishop encajan mejor como procesos que como habilidades, en el sentido de que “la descripción de un proceso incluiría información sobre la acción a realizar, y ello es independiente de la forma en que se realice en un caso cualquiera”. Cita como ejemplo la rotación mental de una imagen, parte de IFI, donde una imagen se transforma en otra que presenta al mismo objeto en una posición distinta. La manera de hacerlo varía si la rotación se hace en dos o tres dimensiones, con el eje interior o exterior al objeto, etc, lo que da lugar a la utilización de diferentes habilidades.

Las habilidades VP e IFI las tendremos *in mente* en este trabajo. Sin embargo, como sugieren McKim (1982) y Presmeg (1985), VP se utiliza en el acto de percibir un estímulo visual; siendo prácticamente imposible separar los dos tipos de habilidades en el pensamiento de los estudiantes mientras resuelven problemas de Matemáticas “en voz alta”; algo que constatamos en este trabajo.

En nuestra investigación bajo el término “visualizar” consideramos los procesos que están involucrados cuando las personas construyen, transforman y relacionan imágenes mentales visuales, y en los que la mente tiene un papel activo, por ejemplo, rotando, trasladando o trasformando la imagen, además de los usados al dibujar figuras o diagramas o construir y manipular figuras en el ordenador.

El término "visualización" se refiere al hecho de poder visualizar. En nuestro estudio utilizaremos indistintamente los términos "imagen visual" y "visualización".

Con anterioridad hemos señalado que para nosotros las representaciones internas (por ejemplo las imágenes mentales) y las externas (dibujos o diagramas) están estrechamente conectadas. Esta conexión será la que nos permitirá interpretar el trabajo de nuestros estudiantes, y "ver" la utilización que hacen de la visualización en sus procesos de pensamiento.

1.2.3. Imágenes, visualización y matemáticas

En nuestro trabajo de investigación entendemos el uso de imágenes, en el desarrollo del pensamiento matemático, asociado básicamente a dos aspectos que consideramos importantes. El primero, hace mención a la interrelación visualización-creatividad en el pensamiento y actividad matemática, y el segundo, a la función que desempeña la visualización como herramienta en la resolución de problemas y en la construcción de conceptos matemáticos. En los siguientes apartados expondremos, con más detenimiento, estos dos aspectos.

1.2.3.1. Imágenes y creatividad

En este apartado reflexionaremos sobre la conexión que pensamos existe entre las imágenes mentales y la creatividad. No es nuestra intención desarrollar de una manera exhaustiva un tratado sobre creatividad, tema realmente apasionante, pero de tal amplitud que merecería un trabajo monográfico. Pretendemos solamente poner de manifiesto, a través de distintos ejemplos, el papel que las imágenes mentales han tenido y tienen dentro del proceso creativo.

En el proceso creativo es preciso distinguir entre creatividad primaria y secundaria. La primera, o fase de inspiración de la creación, debe separarse de la segunda, que es en la que se da el proceso de elaboración y de desarrollo de la misma. Esta segunda fase, la creatividad secundaria, se basa en el trabajo arduo y en la dedicación de la persona que emplea el tiempo necesario para conocer los recursos, los medios y los materiales de una disciplina, hasta ser capaz de poder expresar lo que "ve" en sus momentos de inspiración. Las cualidades que acompañan a la creatividad secundaria (la que tiene por resultados productos reales como un nuevo teorema matemático, nuevos inventos, obras de arte, etc) se apoyan tanto en la creatividad como en otras dotes personales: capacidad de trabajo, paciencia, obstinación, etc.

Pensamos que, en algunos casos, las imágenes tienen una contribución relevante en la primera fase de inspiración, en ese primer destello del proceso creativo.

En los siguientes párrafos, cuando mencionemos el término "creatividad", nos referiremos exclusivamente a la primera fase del proceso creativo. Sin embargo, somos muy conscientes de la importancia de la segunda fase, la creatividad secundaria, sin la que muchas inspiraciones se malogran y no conducen a ningún resultado.

Además de favorecer el recuerdo, las imágenes mentales parecen desempeñar un papel importante en el pensamiento de las personas creativas. Desde distintos campos del conocimiento (música, ciencia, literatura) existen informes introspectivos de personas que coinciden en enfatizar el valor de las imágenes mentales en su proceso creativo. Las imágenes auditivas de Wolfgang Amadeus Mozart, por ejemplo, le permitieron "oír" una sinfonía completa que aún no había escrito (citado en Miller, 1984). Ello muestra el papel que la imagen mental tuvo en el pensamiento creativo de Mozart. El matemático y físico Douglas R. Hofstadter, hijo del premio Nobel de Física Robert Hofstadter, y autor del libro *Gödel, Escher y Bach: Un eterno y grácil bucle,* con el que obtuvo el premio Pulitzer en 1980, expresa lo siguiente en la introducción al capítulo XX del mismo:

> Mi interés es transmitir algunas de las imágenes que más me ayudaron a visualizar la forma en que la conciencia brota de la jungla de neuronas; transmitir un conjunto de intuiciones intangibles, en la esperanza de que sean válidas y puedan así contribuir, en alguna medida, a que otros lleguen a afinar la formulación de sus propias imágenes acerca de lo que hace funcionar a la mente (pág. 765).

Y en un ámbito distinto, reproducimos un fragmento de la entrevista en la que el cantautor canario Pedro Guerra, hablando sobre sus canciones, dice lo siguiente:

> Soy joven y los títulos de mis canciones responden un poco a eso: intentar decir algo, y lo quiero hacer de una manera original... "Peter Pan" es una canción que habla sobre los hombres que van buscando la mujer ideal... yo utilizo imágenes infantiles para hablar de eso. Cuando tengo claro lo que quiero decir me cuesta escribirlo, pero enseguida lo visualizo... " (Diario de Avisos, 22/4/96).

En ambas citas, científico y cantante confiesan la construcción mental interna que hacen de una situación. Para crear una canción, el cantautor acude a una imagen mental de su niñez y visualiza la canción que luego va a escribir.

Posiblemente la creatividad opera de forma muy diferente en situaciones distintas y quizá sea imposible unificar bajo un mismo criterio la creatividad en la ciencia y las matemáticas, y la creatividad en el arte.

Se ha mencionado varias veces, en la literatura relacionada con el tema, que la mayoría de los matemáticos no parecen interesados en analizar sus procesos de pensamiento y no describen de qué manera conciben, crean, investigan, adquieren y trasmiten sus teorías o conocimientos. La mayoría presentan la obra acabada, los frutos de su investigación, sin explicar cuál fue el proceso completo que dio lugar a los nuevos resultados. En esta comunicación de los resultados se han omitido las presentaciones visuales en las que se ha hecho uso de algún tipo de imagen mental. Una anécdota muy conocida tuvo como protagonista al famoso matemático Norbert Wiener, quien se quedó atascado en el desarrollo de una complicada demostración y, rápidamente, se dirigió a una esquina de la pizarra donde dibujó unas figuras que nadie vio, pues quedaban ocultas por su espalda, y que le permitieron continuar la demostración sin problema hasta el final (citado en Guzmán, 1996).

Pero aunque ésa ha sido la tónica general, afortunadamente ha habido magníficas excepciones como Poincaré, Einstein, Hadamard y algún otro. Es muy representativo, por ejemplo, el testimonio de Henri Poincaré -una de las mejores mentes matemáticas de todos los tiempos-, que mostró un claro interés por comprender la naturaleza tanto del trabajo científico como de su proceso de pensamiento:

> Durante quince días me esforcé por demostrar que no podían existir funciones como las que luego llamé fuchsianas. Entonces era muy ignorante. Me ponía cada día a trabajar en mi mesa, probaba un gran número de combinaciones durante un par de horas y no lograba nada. Una tarde bebí una taza de café, cosa que no solía hacer, y no pude dormir por la noche. Las ideas surgieron a borbotones. Las sentía chocar unas con otras, por así decirlo,

> hasta que se engarzaron entre sí formando una combinación estable. A la mañana siguiente, ya había determinado la existencia de una clase de funciones fuchsianas: las derivadas de la serie hipergeométrica. Sólo me faltaba poner por escrito los resultados, lo que hice en pocas palabras (Poincaré, 1995: 2).

También los escritos de Albert Einstein proporcionan un buen documento ilustrativo sobre sus procesos de pensamiento al mismo tiempo que hacen referencia al papel de las imágenes en el descubrimiento científico. En una carta a Hadamard, Albert Einstein escribió:

> The words or the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role, in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain signs and more or less clear images which can be "voluntarily" reproduced and combined. This combinatory play seems to be the essential feature in productive thought, before there is any connnection with logical construction in words or other kinds of signs which can be communicated to others[6] (Hadamard, 1945:142).

Las imágenes mentales permitieron a Einstein realizar experimentos mentales que sirvieron como modelos de simulación de sus teorías físicas. El desarrollo matemático de la teoría de la relatividad lo realizó después del correspondiente proceso de comprensión visual. El famoso experimento que dio lugar a su teoría consistió en que Einstein se imaginaba a sí mismo viajando a la velocidad de la luz y observaba mentalmente el comportamiento de un rayo de luz.

Shepard (1978) y Hadamard (1945) han analizado la utilización que han hecho otros científicos de las imágenes en su trabajo. Shepard consideró informes de famosos científicos como James Clerk Maxwell, Michael Faraday, Sir Francis Galton, Nicola Tesla, James Watson, René Thom, los cuales dijeron aplicar imágenes mentales en sus descubrimientos científicos. Quizá algunos informes puedan parecer anecdóticos, como el de Kekulé, descubridor de la estructura de la cadena molecular del benceno y que

---

[6] "Las palabras o el lenguaje como son escritos o hablados no parecen jugar ningún papel en mi forma de pensamiento. Las entidades físicas que parecen servir como elementos en el pensamiento son ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas. Estas combinaciones parecen ser la característica esencial en el pensamiento productivo, antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros".

contaba que esta idea se le presentó en un sueño cuando vio a una serpiente sosteniendo su propia cola.

Shepard concluye que un gran número de creaciones de la mente humana fueron realizadas por un modo de pensamiento que era esencialmente no verbal y que incluía representaciones internas que podían ser descritas como imágenes de carácter espacial y, a menudo, visual.

Jacques Hadamard es uno de los científicos que ha insistido en la importancia del pensamiento visual. Se consideraba a sí mismo como un matemático que pensaba básicamente utilizando imágenes. Según él decía, las palabras y las sentencias algebraicas ocupaban un lugar secundario, es decir, que estaban ausentes de su mente y permanecían ausentes hasta que llegaba el momento de comunicar los resultados a otras personas, ya fuera en forma oral o escrita (Hadamard, 1945).

Por supuesto Hadamard es solamente uno de los grandes matemáticos que han testimoniado la importancia que tiene en ellos el pensamiento visual. Clements (1981) cita otros ejemplos como los de J. F. Petrie y Alice Boole Scott, hija del matemático George Boole. Petrie descubridor de las propiedades de los polígonos y poliedros oblicuos que llevan su nombre, manifestó que para responder a preguntas complicadas sobre figuras tetra-dimensionales, tenía que "visualizarlas". A Boole Scott sus reflexiones inspiradas en un conjunto de cubos de madera la llevaron a determinar por métodos puramente sintéticos las secciones de los politopos tetra-dimensionales, mucho antes de que se publicasen otras descripciones utilizando métodos diferentes.

A través de los párrafos anteriores, hemos pretendido insistir en que las imágenes, o si se quiere, el pensamiento visual, tiene su espacio natural en el acto creativo, en particular en la creatividad matemática. Creaciones muy originales y significativas en Matemáticas han sido obra de representaciones mentales no verbales (principalmente imágenes visuales). Esta idea es compartida, en cierta manera, por Miguel de Guzmán cuando escribe:

> La visualización ha sido tónica general en el trabajo creativo de los matemáticos de todos los tiempos. Uno u otro tipo de imagen acompaña constantemente sus especulaciones, probablemente aun las más abstractas, aunque la naturaleza de esta

> imagen presenta una variedad de individuo a individuo mucho mayor de lo que sospechamos (Guzmán, 1996: 29).

Los ejemplos anteriores nos animan a reflexionar sobre el proceso creativo relacionado con las Matemáticas y a decir que éste no toma una forma intencionadamente deliberada: concibiendo primero y ejecutando después; quizás el proceso de crear comienza por: “estar formados para...”, “estar predispuestos a...”, “estar estimulados, motivados, animados, ...”.

Estas predisposiciones permiten construir nuevas asociaciones de ideas (pensamiento matemático), en las cuales las imágenes pueden jugar un papel relevante en el pensamiento.

Sorprende en las explicaciones autobiográficas de Poincaré, Hadamard y Einstein el alto grado de automatismo que atribuyen al acto creativo en sí mismo en el momento de hacerlo (de crear). Esta idea, Raymon Chandler la expresa, sintéticamente, así:

> Cuanto más razonas, menos creas.[7]

Por otra parte, dentro del proceso creativo, es importante la discriminación. Una persona creativa distingue las buenas ideas de las malas y reconoce cuándo algo es prometedor, de manera que puede desarrollar y refinar las ideas que merecen la pena. Ha de estar especialmente dotada para reconocer el núcleo de la cuestión, ya sea la solución de un problema o la construcción de un argumento. En este mismo sentido Poincaré, argumentando sobre el proceso creativo, afirma:

> La creación matemática no consiste en organizar nuevas combinaciones de entidades matemáticas ya conocidas. Esto es algo que cualquiera puede hacer, si bien tales combinaciones son innumerables y la mayor parte de ellas carece por completo de interés. Crear consiste precisamente en no hacer combinaciones inútiles y sí, en cambio, aquellas que son útiles, que son muy pocas. La invención es discernimiento, elección. (Poincaré, 1995: 2).

La persona creativa ha de estar en grado de reconocer lo que merece la pena y lo que no sin actuar como lo hace un ordenador, que es muy bueno combinando al azar y produciendo mucho pero cuyas combinaciones están desprovistas de interés en una gran mayoría.

---

[7] Cita extraída de Rosenberg (1996: 8)

A nuestro juicio podríamos concluir que la creatividad, en la ciencia y en las Matemáticas, participa de tres aspectos:

a) Requiere ser una persona iniciada o experta en el tema.

b) Tener capacidad para establecer asociaciones o relaciones.

c) Ser capaz de seleccionar, de escoger, de sintetizar, ...

Para finalizar este apartado, queremos exponer dos cuestiones:

1.-Desde un ámbito educativo y como educadores matemáticos, creemos que, más que conseguir productos o resultados creativos, es primordial formar personas creativas, y esto más desde un punto de vista holista que atomista.

En consonancia con las ideas de Maslow (1983), pensamos que puede haber cientos y, casi literalmente, miles de factores determinantes de la creatividad; en realidad, todos los que ayuden a una persona a avanzar en dirección a una mayor salud psicológica y a formar parte de una humanidad más plena y auténtica. Es expresión suya: “Esa persona más plenamente humana, más sana, generaría como epifenómenos, docenas, cientos, millones de diferencias, en su conducta, experiencia, percepción, comunicación, enseñanza, trabajo, etc., todo lo cual sería más “creativo” (pag. 101).

2.-Presmeg (1985, 1991) escribió que las características manifestadas por el grupo de profesores visuales podrían considerarse relacionadas con un tipo de mente que incluye aspectos de personalidad asociados con la creatividad. En esta investigación, los profesores visuales establecían, la mayoría de las veces, conexiones entre el concepto a explicar y otras áreas de pensamiento (como otros conceptos del curso, otras materias, trabajo hecho previamente, etc.), es decir, utilizaron diferentes formas para presentar los conceptos y estuvieron más inclinados a lograr diferentes métodos de solución de los problemas por parte de los alumnos; diversidad de soluciones de la que eran conscientes.

En contraste, los profesores no visuales fueron más propensos a presentar la materia desde el principio de una forma más rigurosa y lógica (Presmeg, 1991).

Cabría hacernos la siguiente pregunta: ¿Son los profesores visuales más creativos que el resto?

Algunos ejemplos de actuación matemática de profesores visuales han sido descritos por Plasencia, Espinel y Dorta (1998). En este estudio se presenta un ejemplo en el que se enseña las inecuaciones a través de un método que denominan “visualizador” y que se caracteriza porque no predominan en él únicamente herramientas algebraicas sino que se conjugan varios procedimientos matemáticos al mismo tiempo. Es en esta combinación de ideas donde los autores piensan, en consonancia con las reflexiones ya mencionadas de Poincaré, Einstein, que se da el acto creativo.

Queremos puntualizar que no es nuestra intención emitir ningún juicio de valor sobre la valía profesional de los profesores. Somos conscientes de que existen excelentes profesores preocupados seriamente por su profesión que no pertenecen al “grupo visual”.

En lo referente a los alumnos, una persona visual sería aquélla que prefiere usar métodos visuales en el proceso de resolver problemas matemáticos. De acuerdo con las ideas de Presmeg, entendemos por método visual aquél que utiliza imágenes visuales, con o sin diagramas, como parte esencial del método de solución aunque se empleen razonamientos o métodos algebraicos (Presmeg, 1985).

Volviendo a la pregunta inicial, se nos plantea una duda: ¿el hecho de que un alumno o un profesor actúen matemáticamente de una forma no-estandar implica que sean más creativos? No cabe duda de que el sistema educativo no potencia ni estimula suficientemente los razonamientos y exposiciones visuales. Entonces, en este tipo de sistema, ¿es lo visual lo creativo? Por el contrario, en un sistema académico en el que predominara lo visual, ¿sería lo algebraico lo creativo?

En el capítulo 3 dedicado a los escolares volveremos sobre estas cuestiones con la luz que nos aporten nuestros datos empíricos.

1.2.3.2. La imagen como herramienta en la resolución de problemas matemáticos

Además de su papel en el pensamiento creativo, el uso de imágenes mentales puede ser una buena estrategia tanto para resolver problemas matemáticos como para construir y consolidar conceptos matemáticos a distintos niveles de dificultad.

Investigaciones de autores como Wheatley (1990, 1991, 1997), Brown (1993), Brown y Wheatley (1989, 1990, 1991), han puesto de manifiesto que existe relación entre la utilización de imágenes y "tener éxito" en la resolución de problemas matemáticos. En sus estudios, básicamente de corte cualitativo, encontraron que los estudiantes que frente a problemas "no rutinarios" usaron imágenes en sus razonamientos tuvieron más "éxito" que los estudiantes que abordaron las tareas de forma procedimental.

Coincidiendo con los autores señalados anteriormente, creemos en la importancia que las imágenes tienen en el razonamiento matemático y en que hacen más fácil encontrar la solución de muchos problemas. De la misma forma que es útil tener un mapa mental de las calles con el fin de planificar la ruta mejor para viajar a lo largo de la ciudad, podría ser beneficioso también tener almacenadas en memoria la mayor variedad posible de imágenes mentales que representen relaciones y modelos matemáticos.

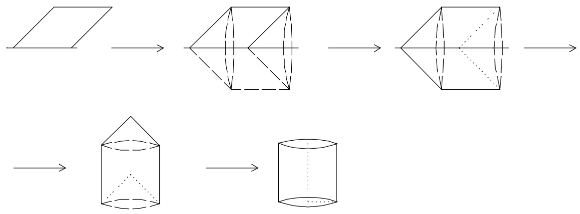
Imaginemos el siguiente problema:

> Un romboide de lados 10 y 4 cm, cuyo ángulo agudo mide 30 grados, gira en torno al lado mayor. Comprobar que el volumen del cuerpo engendrado es 40 π cm^3.

Para poder afrontar este problema es primordial "construir" una imagen del cuerpo engendrado. Este proceso de construcción es muy personal y algunos estudiantes[8] han dicho que han recurrido a imágenes concretas como las de cohetes espaciales, cohetes de ferias, cucuruchos de helados, puntas de lápices, plomadas, etc, que les han ayudado a dar sentido al problema.

Una vez construida la imagen, ésta se puede "transformar" en un cilindro para encontrar la solución de una manera rápida. La siguiente figura ilustra el proceso:

[8]Los estudiantes referidos son alumnos del Centro Superior de Educación de la Universidad de La Laguna (Tenerife).



Algunos estudiantes se han dado cuenta de que si “la punta de arriba es lo que se quita por debajo, sólo hay que calcular el volumen de un cilindro".

En la búsqueda de la solución han aparecido diferentes procesos como construir, re-presentar y transformar, procesos formulados por Wheatley y Brown (1994), de acuerdo al modelo de Kosslyn y que nosotros compartimos.

Si un estudiante ha construido, basándose en imágenes, los conceptos e ideas matemáticos, enlazándolos significativamente en una red conceptual, las soluciones a problemas “no rutinarios” podrían encontrarse más fácilmente.

En años recientes se ha insistido en que la imagen es central en el razonamiento matemático (Brown y Wheatley, 1991; Dörfler, 1991; Lakoff, 1987; Wheatley, 1991a, 1997).

Muchas veces la construcción de una imagen puede ayudar a representar la esencia de un concepto matemático, y también a que surja una solución inmediata en la resolución de un problema. Los individuos “expertos” frecuentemente emplean la visualización y analogías visuales, a menudo metafóricamente, cuando resuelven problemas complicados (Kosslyn, 1983; Sfard, 1994b).

Lakoff sostiene que las estructuras abstractas se comprenden en función del “esquema de la imagen” (citado en Wheatley, 1997). El “esquema de la imagen” se puede comparar a las imágenes patrones definidas por Presmeg (1985) que comentaremos en apartados posteriores.

Ya sea en contextos aritméticos o geométricos, si los estudiantes se centran en la búsqueda de relaciones entre los conceptos e ideas matemáticos, con la finalidad de realizar un aprendizaje significativo más que de memorizar fórmulas y algoritmos de cálculo, es bastante probable que estén usando algún tipo de imágenes.

Hay una evidencia de que las imágenes tienen un papel significativo en el razonamiento matemático. Por ejemplo, cuando un niño utiliza una estrategia de compensación para sumar 7+5 moviendo 1 de 7 a 5 para obtener 6+6, un hecho conocido, y dice “ver” una relación entre 7+5 y 6+6, la relación es abstracta y no puede verse en un sentido visual, el “ver” no es un acto perceptual sino cognitivo; Wheatley y Bebout (1990) sostienen que cuando se dice que “se ve una relación” lo que se “ve” es una imagen autoconstruida de la relación.

Además, las imágenes y la visualización permiten “predecir” lo que sucedería en situaciones imposibles de observar, como es el caso de muchos problemas matemáticos y físicos. Ilustrativos, entre otros, son los casos de Einstein y Tesla (citados en Kosslyn, 1983), quienes usaron simulaciones para elaborar o validar sus ideas. El primero, en la elaboración de la teoría de la relatividad, se imaginó a sí mismo viajando a la velocidad de la luz, y el segundo dijo que cuando trabajaba en un nuevo invento podía imaginar con todo detalle cada parte de la máquina; sus imágenes eran más vívidas que cualquier anteproyecto y podía probar las partes de la máquina, poniéndolas mentalmente en movimiento para juzgar su funcionamiento.

Razonar frente a determinadas situaciones (imaginar posibles rutas, decorar una habitación, construir una nueva máquina, etc.), simulando lo que podría suceder con una u otra alternativa permite evitar esfuerzos, desperfectos y gastos inútiles.

1.2.3.3. Limitaciones en el uso de imágenes en matemáticas

Hasta ahora hemos expuesto distintos casos donde la imagen juega un papel primordial para la resolución de un problema. Pero hay situaciones en las que la representación externa de la imagen puede causar confusiones a los estudiantes.

Las construcciones mentales que una persona realiza están mediatizadas por las imágenes mentales formadas en experiencias anteriores; lo que constituye, si no están bien formuladas, un serio obstáculo en el aprendizaje. Por ejemplo, si un niño tiene como única imagen de un triángulo isósceles uno con base horizontal y el ángulo desigual opuesto a la misma, su concepto de triángulo será bastante limitado. Tendrá un concepto más rico cuando pueda transformar su imagen de triángulo isósceles y darse cuenta de que la orientación es irrelevante.

Por otra parte, un dibujo o un diagrama son concretos por naturaleza y esa concreción puede ser un obstáculo en el aprendizaje de las Matemáticas, donde el pensamiento se caracteriza por su abstracción y generalización.

Para que las imágenes sean útiles en la resolución de problemas tienen que poder ser controlables (Richardson, 1969; Presmeg, 1997). Las imágenes no controlables son las que surgen en la mente de las personas, y lejos de ser una ayuda, constituyen un obstáculo en el razonamiento. Son imágenes que aparecen espontáneamente en el pensamiento como consecuencia de ideas previas. Persisten incluso aunque se presente alguna evidencia que las contradiga. Presmeg (1992a), entre otros, describió el caso de Paul, para quien su prototipo de parábola simétrica respecto al eje Y constituyó un obstáculo en su aprendizaje matemático, impidiéndole razonar con una parábola que no se ajustase a su imagen prototipo.

Hershkowitz (1989), Aspinwall y otros (1995) y Plasencia y otros (1998) exponen distintos ejemplos (la primera, desde la Geometría Elemental, y los restantes, desde el Análisis Matemático), que muestran cómo la imagen prototípica de un concepto (triángulo rectángulo con el ángulo recto en la posición vertical-horizontal) o una “mal entendida” representación gráfica (bien de una función discontinua y su derivada, bien de la diferencial de una función de una variable), pueden crear obstáculos y confusión en los estudiantes.

1.2.3.4. Síntesis

Pensamos que las imágenes y la visualización, entendida como el proceso a través del que se relacionan imágenes mentales, tienen un papel destacado en la actividad matemática.

A veces una solución basada en una imagen puede ser más comprensible y “elegante” (Wheatley, 1997). Son ilustrativas las demostraciones sin palabras de varios teoremas algebraicos y geométricos propuestos por Roger B. Nelsen (1993); formas a veces sencillas y elegantes de demostrar un teorema. Nuestra experiencia docente confirma que algunos estudiantes entienden “mejor” el teorema de Pitágoras cuando se les presentan algunas de estas demostraciones “visuales”. No queremos dejar de señalar la dificultad de las demostraciones “visuales”; valga como ejemplo la demostración de

Bhaskara (Nelsen, 1993) del mismo teorema, donde se hace bastante difícil “ver” la demostración sin ayuda.

Para finalizar, destacamos que la naturaleza de la imagen depende de las construcciones mentales hechas con anterioridad, de la intención con que se construye y de la situación bajo la que es construida la imagen. Cuando se piensa, por ejemplo, en un rombo, algunas personas pueden imaginar la figura como un todo indiferenciado -lo que Van Hiele (1986) sitúa en el nivel 1 de su modelo geométrico-, otras pueden imaginar las características del rombo, como lados iguales, paralelos dos a dos, diagonales perpendiculares -nivel II de Van Hiele-; y otras, el rombo en diferentes posiciones espaciales, etc.

Frente a un mismo problema o una misma situación las personas elaboran imágenes diferentes (Presmeg, 1997a; Bishop, 1989; Wheatley, 1997), interviniendo en esta elaboración los esquemas matemáticos que cada individuo posea junto a la experiencia que tenga, su preferencia por utilizar imágenes, su memoria de imágenes o su habilidad para recordar o generar visualizaciones apropiadas, elegir las adecuadas y poder actuar u operar con las visualizaciones elegidas.

Resumiendo, la utilización de las imágenes y la visualización en Matemáticas es algo personal; los profesores tienen que contar con que los estudiantes elaboren imágenes diferentes como consecuencia de ese proceso personal.

Es recomendable fomentar y animar la diversidad de alternativas en los procesos de visualización y no olvidar que las personas necesitan tiempo para desarrollar sus imágenes mentales.

1.3. INVESTIGACIONES PREVIAS ACERCA DEL TEMA

En este apartado presentamos algunas contribuciones acerca de las imágenes mentales y sobre el proceso de visualización que han sido importantes en la Educación Matemática.

1.3.1. Habilidad espacial, imágenes y visualización en las matemáticas

En la bibliografía hemos encontrado las imágenes mentales unidas a temas como visualización o habilidad espacial, sobre todo en los primeros trabajos realizados acerca de este tema.

De todas estas contribuciones emerge la complejidad del proceso de visualización y la dificultad para estudiar los caminos en los que las personas llevan a cabo estos procesos. En los párrafos que siguen expondremos los trabajos de algunos investigadores del tema.

Con el fin de facilitar la lectura, agrupamos a los autores según hemos interpretado el contenido de sus escritos, integrando en el mismo apartado los que, según nuestras ideas, están mas relacionados.

1.3.2. Revisiones e investigaciones que sitúan el tema

Hemos comentado, con anterioridad, cómo algunos científicos como Hadamard o Einstein identifican las imágenes en la construcción de sus ideas. También matemáticos y educadores matemáticos como Bishop o Wheatley han sugerido que la habilidad espacial y las imágenes visuales tienen un papel importante en la construcción del pensamiento matemático. Esto nos lleva a reconocer que en Matemáticas existen maneras diferentes de procesar la información.

Krutetskii (1976) se refiere a dos modos de pensamiento en Matemáticas: verbal/lógico y visual/pictórico. El equilibrio entre estos dos modos permite establecer diferentes “temperamentos” que determinan cómo una persona procesa sus ideas matemáticas. Krutetskii establece una distinción entre el “nivel” de las habilidades matemáticas determinado en su mayor parte por una componente verbal/lógica del pensamiento y el “tipo” determinado por una componente visual/pictórica. El “tipo” matemático al que pertenece una persona se caracteriza porque, además de la habilidad para usar la componente visual/pictórica, tiene en cuenta la preferencia para hacer uso de esa habilidad. El propio Krutetskii distinguió cuatro “tipos” diferentes en las personas de su estudio, y cuyas características expresamos a continuación:

Analítico: componente verbal/lógica muy fuerte frente a una componente visual/pictórica débil; conceptos espaciales débiles; no pueden y no sienten necesidad de usar soportes visuales en la resolución de problemas.

Geométrico: componente visual/pictórica muy fuerte frente a una componente verbal/lógica, que se encuentra por encima de la media; conceptos espaciales muy buenos; pueden usar soportes visuales en la resolución de problemas y sienten necesidad de hacerlo.

Armónico: componentes verbal/lógica y visual/pictórica fuertes y equilibradas; conceptos espaciales buenos. Se divide en dos subtipos:

Subtipo a, a*rmónico abstracto,* que puede usar soportes visuales en la resolución de problemas pero prefiere no hacerlo.

Subtipo b, a*rmónico pictórico,* que puede usar soportes visuales en la resolución de problemas y prefiere hacerlo.

Aunque Krutetskii estableció la clasificación estudiando a alumnos “buenos” en Matemáticas, en los que la componente verbal/lógica era muy fuerte, por encima de la media, y, fuerte, sugiere que la clasificación podría extenderse a otros niveles de habilidad, donde la fuerza de la componente verbal/lógica determinaría el nivel.

Bishop (1980a, b, 1983, 1989) desarrolló importantes trabajos, desde la perspectiva de la Educación Matemática, que han sido relevantes para la investigación en el área que nos ocupa.

En el primer artículo (1980a), Bishop introduce las ideas de las habilidades VP y IFI (*visual processing* e *interpretation figural information*[9]) tomadas de las distinciones de McGee y que han sido punto de referencia de otros investigadores (Gutiérrez, 1996, Gorgorió, 1996, 1998) y de nuestra investigación.

En el segundo trabajo (1980b), Bishop analiza la interconexión entre el campo visual/espacial (orientado desde la Psicología) y la Educación Matemática en cuatro líneas de investigación: diferencias individuales, experimentos de enseñanza, Psicología Evolutiva y análisis de factores. Los investigadores que han trabajado sobre diferencias individuales pueden aportar muchas ideas acerca de por qué existen estas diferencias y

[9] En el apartado 1.2.2. se hizo un desarrollo de estos conceptos.

de cómo pueden relacionarse con las condiciones en que suceden el aprendizaje y el desarrollo. Los experimentos de enseñanza pueden ayudar a clarificar cuáles son estas condiciones y cómo pueden ser explotadas por los profesores para mejorar la enseñanza/aprendizaje. La Psicología Evolutiva puede sugerir ideas sobre lo que se puede esperar de los niños en diferentes edades y sobre las etapas que los niños pasarán en el aprendizaje; lo que servirá para comprender las características del mundo infantil. Los analistas de factores pueden ofrecer a los educadores matemáticos tests que sirven tanto como ejemplos de tareas espaciales para clasificar a las personas, como para elaborar y realizar estudios teóricos sobre el desarrollo de habilidades espaciales.

El tercero (1983), es un capítulo en el libro *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes,* en el que elabora con más extensión su idea de VP e IFI. Manifiesta cómo pueden ser estudiados y señala que IFI logra enseñarse a través de una instrucción adecuada ya que ha sido demostrado, en varias ocasiones, que se consigue enseñar a los niños diferentes tipos de figuras e imágenes, mostrar los convenios usados, practicar distintas representaciones de acuerdo a estos convenios y desarrollar su vocabulario visual, tareas todas muy importantes en la Educación Matemática; sin embargo, no hay evidencia de que muestren el éxito de instruir en VP.

En la última publicación que hemos citado (1989), Bishop hace una revisión de parte de la literatura disponible en Educación Matemática, sobre la visualización. No es una revisión histórica sino que analiza los puntos de vista y posiciones de distintos investigadores en el área.

Coincidimos con Bishop en que la necesidad de animar y fomentar el uso de imágenes mentales, además de que el profesorado sea consciente de los procesos de visualización, son objetivos que resultan muy posibles en la enseñanza. Si bien es verdad que los estudios analizados muestran que no hay suficiente evidencia acerca de progreso en la formación de las imágenes mentales, tanto en el ámbito teórico como pedagógico. Este hecho no sorprenderá si tenemos en cuenta la naturaleza personal e individual de la visualización que se ha encontrado, además de la dificultad al realizar el análisis. La utilización de imágenes es una actividad mental. Cualquier evidencia sobre cómo se manifiesta tiene que ser indirecta, ya que no podemos “entrar en la cabeza” de las personas y ver lo que está sucediendo en su “pantalla mental”.

Clements (1982) proporcionó uno de los mejores escritos históricos de que se dispone sobre las imágenes y la Educación Matemática. A partir de estudios cognitivos realizados, expuso distintas formulaciones teóricas de las imágenes mentales y analizó los problemas inherentes en la externalización de las imágenes desde el punto de vista metodológico. También intentó mostrar la relación entre la habilidad espacial y las imágenes visuales, explicando que, aunque éstas se han estudiado independientemente, es posible unificar ambos conceptos. Para ello se apoya en los resultados de otros investigadores como Liben (1981) y Lohman (1979); éste último, después de revisar la literatura existente sobre habilidad espacial, concluyó que ésta puede ser definida como la habilidad para generar, retener y manipular imágenes espaciales abstractas, idea que de alguna manera unifica los dos conceptos.

1.3.3. Habilidad espacial y matemáticas

Moses realizó dos estudios pioneros (1977, 1980) en los que analiza la relación entre habilidad espacial y Matemáticas.

Su primer estudio (1977), cuantitativo, lo realizó con 145 estudiantes de 5º grado en Newburgh, Indiana (USA), a los que pasó una batería de 6 tests, 5 de ellos eran tests espaciales y el otro incluía 10 problemas "no rutinarios". Para cada persona obtuvo una puntuación que medía la habilidad espacial y otra que llamó grado de visualidad (*degree of visuality)*, que se basaba en el número de dibujos, diagramas, listas o tablas que se encontraban en las soluciones escritas que los estudiantes daban a los problemas. Observó que las correlaciones de la habilidad espacial con la actuación en la resolución de problemas y el grado de visualidad eran significadamente diferentes de cero pero la correlación entre la resolución de problemas y el grado de visualidad no era significadamente diferente de cero. Concluyó que la habilidad espacial es un buen predictor de la actuación en la resolución de problemas, y que, aunque las personas con una alta habilidad espacial habían resuelto bien los problemas, sus soluciones escritas no siempre reflejan en su totalidad, los procesos visuales utilizados.

En su segundo estudio (1980), cuantitativo también, Moses investigó las diferencias en visualización espacial y razonamiento teniendo en cuenta las variables edad y sexo, y los efectos que una instrucción había tenido en estas diferencias utilizando ejercicios de pensamiento visual. Para llevar a cabo la investigación, utilizó dos grupos, uno experimental y otro de control, a los que les administró un pretest y un postest. Concluyó que la instrucción no había afectado al grado de visualidad o a la forma de actuación en la resolución de problemas, y sí había tenido influencia en las habilidades espacial y de razonamiento.

A los estudios de Moses se le han hecho algunas críticas (Lean y Clements, 1981; Presmeg, 1997a); una de ellas tiene relación con el hecho de que Moses midió el grado de "visualidad" utilizando las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas. La dificultad de este procedimiento estriba en que algunos estudiantes pueden no haber reflejado en sus respuestas las imágenes visuales que utilizaron cuando resolvían los problemas (hay personas que tienen habilidad para usar métodos espaciales que involucran imágenes y prefieran no utilizarla cuando resuelven problemas de Matemáticas). Otra de las críticas tiene relación con el hecho de que los problemas planteados fueron difíciles para casi todos los estudiantes, y esto significa que lo más probable es que las soluciones hayan sido sólo suposiciones (conjeturas).

Los estudios de Moses llaman la atención sobre la necesidad de que, si se quiere reconocer la utilización que las personas hacen de las imágenes visuales cuando resuelven problemas matemáticos, es importante tener en cuenta, en futuras investigaciones, que las soluciones escritas no siempre reflejan el uso de imágenes. Harían falta estudios de corte cualitativo que profundizaran en las actuaciones matemáticas de los estudiantes.

Hershkowitz (1989) muestra que el papel de la visualización, que ella identifica con habilidad espacial dentro del proceso de formación de los conceptos geométricos, es muy complejo. Por una parte, es una herramienta necesaria para la formación de los mismos ya que no se puede formar la imagen de un concepto y de sus ejemplos sin visualizar sus elementos. Pero por otra, los elementos visuales pueden limitar la habilidad para formar conceptos abstractos, debido a que algunos aprendices los identifican con un caso concreto (ejemplo prototípico). Como ejemplos prototípico, cita los casos: "cualquier altura es interior a la figura", y "el triángulo rectángulo se sitúa en la posición vertical-horizontal". Como una posible solución, propone que desde la instrucción se le proporcionen al estudiante materiales y métodos que enriquezcan su experiencia visual (más ejemplos, distintas orientaciones, contraejemplos, etc.).

Tartre (1990) exploró la relación entre la habilidad de orientación espacial y la resolución de problemas matemáticos. Administró un test de orientación espacial (*Gestalt Completion Test*) a estudiantes de grado 10 (14-15 años de edad) y seleccionó 57 estudiantes, 27 con alta orientación espacial y 30 con baja, a los que posteriormente entrevistó. La entrevista consistía en resolver 10 problemas matemáticos con contenido geométrico (7) y no geométrico (3). Todos los problemas admitían más de una forma para encontrar la solución. Encontró un tipo de comportamiento específico en el entorno geométrico que podría ser consecuencia de la habilidad de orientación espacial. Ésta parecía estar involucrada también en problemas no geométricos, tanto en la comprensión del problema como en la posibilidad de relacionar el problema nuevo con otros problemas, hechos previamente.

1.3.4. Preferencia visual y matemáticas

Suwarzono (1982) realizó una investigación con estudiantes de Secundaria (edad aproximada 12 - 13 años) en Australia. Elaboró un test que tenía como finalidad medir la preferencia de los estudiantes para usar métodos analíticos o visuales en la resolución de problemas matemáticos. El test constaba de dos partes: la primera la formaban 30 problemas verbales mientras que en la segunda se describían para cada problema varios posibles métodos de solución (de 3 a 5). A los estudiantes, después de haber resuelto cada problema, se les pedía indicaran el método que usaron para resolverlo, recurriendo para ello a la segunda parte del test. Las respuestas de los estudiantes se codificaron y se obtuvo una puntuación que medía la preferencia analítica o visual de los estudiantes en la solución de los problemas. El instrumento de investigación, desarrollado por Suwarzono, parece proporcionar un método efectivo para medir la preferencia de las personas en el procesamiento de la información.

Lean y Clements (1981) usaron el instrumento de Suwarzono en estudiantes universitarios en los primeros años de ingeniería, en Papua, Nueva Guinea. Utilizando técnicas estadísticas de regresión múltiple encontraron que la habilidad espacial y el conocimiento de convenios espaciales no tuvo mucha influencia en la actuación matemática de los estudiantes de la muestra. Los estudiantes que prefirieron procesar la información matemática por medios verbales/lógicos obtuvieron mejores puntuaciones en los tests matemáticos y espaciales que los estudiantes que usaron métodos netamente visuales. Este resultado estaría en contradicción con los estudios que sugieren que sería aconsejable el empleo de procesos visuales en la resolución de problemas matemáticos; sin embargo, los autores de este estudio apuntan como una posible explicación el hecho de que ellos utilizaron, para evaluar la competencia matemática, sencillas tareas rutinarias, mientras que los otros estudios recurrieron a problemas "no rutinarios” de mayor dificultad.

Un resultado común de las dos investigaciones anteriores es que la preferencia para usar imágenes en la resolución de problemas no está asociada con la actuación en Matemáticas o en tests espaciales (Clements, 1981).

Turner (1982) encontró que la habilidad para transformar imágenes mentalmente, estaba altamente relacionada con el éxito del estudiante en cálculo integral. El estudio que efectúo fue cuantitativo.

Fennema (1975) realizó en USA uno de los primeros trabajos de corte cuantitativo, que tuvo en cuenta la visualización espacial. Estaba interesada en la relación entre el sexo y la competencia en Matemáticas. ¿Son los hombres más competentes en Matemáticas que las mujeres, o al contrario? La visualización espacial era una de las variables en la que hombres y mujeres mostraban diferencias, razón por la que ella la incluyó en su estudio junto a otras variables cognitivas y afectivas. Fennema y sus colaboradores observaron una correlación positiva entre la habilidad espacial y el éxito en Matemáticas, y no encontraron que la diferencia entre sexos fuese significativa, al menos en cuanto a habilidad espacial se refiere (citado en de Brown, 1993).

Fennema y Tartre (1985) estudiaron cómo 33 chicos y 36 chicas de Primaria, discrepantes en sus habilidades de visualización espacial y verbal (los grupos elegidos tenían baja habilidad verbal y alta espacial o viceversa), utilizaban las habilidades de visualización espacial en la resolución de problemas verbales. Para ello pidieron a cada estudiante que leyera un problema, hiciera un dibujo para ayudarse a resolverlo, lo resolviese, y explicase cómo usó el dibujo en la solución. Concluyeron que aunque los estudiantes discrepantes en sus habilidades espaciales y verbales difieren en los procesos que usan a la hora de resolver los problemas, no difieren en su habilidad para resolverlos. En relación a la variable sexo, escribieron que las diferencias encontradas entre los chicos y las chicas fueron pequeñas, siendo mayores dentro de un mismo sexo que entre ambos sexos. Puntualizan la idea de que no se puede decir que todas las chicas son menos capaces que los chicos para usar sus habilidades de visualización de una manera apropiada en Matemáticas, algo absolutamente obvio pero que muchos investigadores no han especificado claramente. De esta manera muchas personas piensan que existen más diferencias entre las respuestas de los distintos sexos de las que realmente hay.

El libro *Visualization in teaching and learning and mathematic* (Zimmermann, Cunningham, 1991) proporciona una perspectiva de investigación, análisis, experiencia práctica y opiniones sobre la visualización y su papel en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas, especialmente a nivel universitario. Diversos autores muestran sus experiencias en relación con la visualización mediante ordenador con temas de geometría, fractales, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, análisis complejo, análisis numérico, procesos estocásticos y otros fenómenos aleatorios. Los editores del texto, Zimmermann y Cunningham, afirman tener la convicción de que el pensamiento visual y el desarrollo de herramientas visuales, a través de los gráficos por ordenador, puede suponer una gran contribución a la Educación Matemática.

Acerca de ¿qué es la visualización matemática?, los editores manifiestan lo siguiente:

La visualización matemática no es “la Matemática percibida a través de dibujos”. La intuición que la visualización matemática pretende no es una forma vaga de intuición, una sustitución superficial del conocimiento, sino la clase de intuición que penetra en el núcleo de la idea. Da profundidad y significado al conocimiento, sirve como guía segura para resolver problemas, e inspira descubrimientos creativos. Para alcanzar esta clase de conocimiento, la visualización no puede ser aislada del resto de las Matemáticas. El pensamiento visual y las representaciones gráficas deben estar unidos a otros modos de pensamiento matemático y a otras formas de representación. Debemos aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica y gráficamente, y moverse atrás y adelante entre estos modos. Podemos desarrollar la habilidad para elegir el método más apropiado para un problema particular y para conocer las limitaciones de estos tres dialectos del lenguaje de las Matemáticas.

Sobre "computación y visualización" dejan abiertas varias cuestiones:
¿De qué manera el poder de los ordenadores en general, y los gráficos de computador interactivos en particular, pueden ser utilizados de la forma más efectiva para promover la intuición y el conocimiento matemáticos? ¿Cuáles son las características de un buen software educativo? ¿Cuál es el papel de las demostraciones en clase, de los ejercicios estructurados en un laboratorio de computación, y de la exploración libre de ideas matemáticas? ¿Cuál será el impacto de los ordenadores en el currículum de Matemáticas?

En otras palabras, ¿cómo pueden los ordenadores ayudar a enseñar lo que ahora enseñamos, de una forma más efectiva, y qué nuevos problemas, temas o campos de las Matemáticas se plantean con las nuevas tecnologías?

1.4. UN MARCO TEÓRICO PARA ESTE ESTUDIO

En este apartado describiremos algunos estudios directamente relacionados con nuestra investigación. De ellos extraeremos la clasificación de las imágenes mentales que utilizaremos en este trabajo.

1.4.1. Estudios realizados en Educación Matemática más relevantes en nuestra investigación

Los estudios de los investigadores Presmeg y Wheatley, que comentaremos en el siguiente apartado, podrían situarse en alguno de los grupos anteriores, hemos preferido referenciarlos posteriormente por haber influido de manera más concreta en la base de nuestras reflexiones, como puede observarse a lo largo de todo este trabajo. Sus ideas y respuestas a algunas de nuestras preguntas fundamentan el núcleo de esta investigación.

Presmeg (1985), como parte de su tesis doctoral, elaboró el instrumento MPI (*Mathematical Processing Instrument*) que medía la "visualidad matemática" en profesores y alumnos en su último año de Secundaria (edad aproximada 16 – 17 años). El instrumento estaba inspirado en el desarrollado por Suwarzono y medía la preferencia, más que la habilidad de los estudiantes, para utilizar imágenes en problemas matemáticos. El motivo de utilizar un instrumento que midiera la preferencia estaba, según Presmeg, en que hay personas que tienen habilidad para utilizar métodos espaciales que involucran imágenes y que, sin embargo, prefieren no utilizar esa habilidad en la resolución de problemas matemáticos.

Igual que el instrumento usado por Suwarzono, el MPI desarrollado por Presmeg constaba de dos partes. La primera estaba dividida en tres secciones A, B y C, formadas por una colección de problemas verbales de los que A y B se propusieron a los estudiantes y B y C a los profesores.[10] La segunda mostraba, para cada problema propuesto, distintos métodos de solución. La persona que resolvía el problema tenía que especificar si el método que utilizó en la solución coincidía o no con alguno de los propuestos. Con los datos se obtenía una puntuación para cada persona que la Dra. Presmeg llamó MV (*mathematical visuality*) y que utilizó para clasificar a las personas investigadas. A diferencia de Suwarzono, Presmeg entrevistó también a 54 estudiantes visualizadores (individuos que prefieren, cuando hacen Matemáticas, pensar visualmente), criterio que obtuvo a través del MPI.

Algunos de los hallazgos de la investigación fueron:

1. La identificación de cinco diferentes tipos de imágenes utilizadas en las personas entrevistadas.[11]
2. Los análisis de las entrevistas sugirieron que los estudiantes entrevistados hicieron un amplio uso de imágenes mientras resolvían problemas matemáticos de álgebra, geometría, trigonometría y vectores, aunque algunas veces no fueran conscientes de la presencia y papel de las imágenes en su razonamiento.
3. Los 13 profesores que participaron en la investigación fueron clasificados desde “visuales” a “muy no visuales” utilizando el MPI. Sus creencias sobre la Matemática y

[10] Algunos de los problemas utilizados en nuestra investigación proceden de las secciones A y B del MPI.
[11] Una descripción detallada de los distintos tipos de imágenes figura en el apartado 1.4.2.

sus opiniones sobre el uso en las clases de métodos visuales fueron varias. Merece la pena destacar que sólo pocos profesores dicen necesitar “soportes visuales” cuando resuelven problemas matemáticos, aunque los utilizan y fomentan en las clases ya que se dan cuenta de que muchos de sus alumnos los necesitan. Por otra parte los profesores que tuvieron más éxito en la instrucción matemática de los alumnos visualizadores fueron los que no usaron solamente métodos visuales (diagramas, colores, etc.), sino que enfatizaron y estimularon en los estudiantes la generalización.

4. A lo largo de la investigación se les pidió a los 13 profesores que nombrasen a los alumnos que ellos consideraban “estrellas”. Se encontró que los alumnos elegidos (7 de un total de 277) eran casi siempre “no visualizadores”. Incluso usando un criterio menos estricto, los alumnos visualizadores eran menos de la quinta parte. De los 27 alumnos elegidos como “muy buenos” sólo 5 formaron parte del grupo de estudio (visualizadores) al que se entrevistó. Presmeg describe y analiza algunos factores que pueden ser la causa de este suceso. Entre los factores internos está el hecho de que una imagen o un diagrama es por naturaleza un caso concreto, lo que impide la generalización si no se sabe cómo superarla y es el caso de muchos visualizadores. Por otra parte, el uso de métodos no visuales es reforzado por el currículum escolar, exámenes y métodos de enseñanza, con lo que los visualizadores no tienen necesidad de superar el obstáculo de una visualización concreta. Entre los factores externos destaca el hecho de que el currículum de Matemáticas favorece al pensador no visual ya que normalmente la evaluación en Matemáticas suele realizarse a través de tests y exámenes en un tiempo determinado, y el uso de métodos visuales necesita más tiempo. Otro de los factores externos hace referencia a que los métodos de enseñanza, en la mayoría de las clases de Matemáticas, no son visuales, y que los métodos visuales, utilizados por algunos estudiantes, no son valorados por los profesores.

Los trabajos de Wheatley han sido, junto a los de Presmeg, los que más han influido en nuestro trabajo. Defiende que la construcción de imágenes tiene un papel muy importante en la resolución de problemas.

Wheatley y sus colaboradores Brown y Solano utilizando los resultados de tres estudios (Brown y Wheatley, 1989, 1990; Wheatley, Brown y Solano, 1994), afirman que existe una fuerte relación entre el uso de imágenes y el éxito en la resolución de problemas. La metodología que emplearon fue básicamente cualitativa, entrevistas a los estudiantes, y el test WSAT[12] (*Wheatley Spatial Ability Test*) fue el instrumento utilizado para seleccionar a los mismos. Encontraron que los estudiantes que puntuaron alto en el test tuvieron más éxito frente a problemas matemáticos "no rutinarios".

Este resultado puede estar en contradicción con algunos estudios como el de Friedman (1995) para quien la habilidad espacial (medida a través de un test espacial) y el razonar "bien" en Matemáticas no están exactamente relacionados. Wheatley (1997) sostiene que es importante analizar varios aspectos antes de aceptar conclusiones como las de Friedman. En el estudio de Friedman, por una parte, la habilidad espacial se midió aplicando tests espaciales, dos de los cuales se pueden realizar recurriendo tanto a métodos analíticos como espaciales. Parece dudoso pensar, por tanto, que estos tests midan la habilidad para construir y transformar imágenes. Por otra parte, para valorar el "hacer bien" en Matemáticas, Friedman utilizó tests con preguntas que pueden resolverse utilizando procedimientos rutinarios de cálculo.

Nuestra posición, que coincide con la de Wheatley, es que hacer Matemáticas va más allá de realizar cálculos y memorizar fórmulas. La actividad matemática tiene que ser significativa, tener sentido para la persona que la realiza, y no puede ser "evaluada" por medio de tests rutinarios donde lo único que haya que hacer es aplicar una fórmula sin más reflexión. Compartimos con Wheatley la idea de que si el aprendizaje de las Matemáticas se enfoca como una actividad instrumental (Skemp, 1980) es improbable que se encuentre relación entre la utilización de imágenes y el éxito en Matemáticas.

Sus investigaciones insisten también en la importancia de los entornos de aprendizaje. La Matemática y la Ciencia pueden ser enseñadas desde una perspectiva, centrada en problemas, que podría ofrecer considerables beneficios a los estudiantes. Wheatley (1992b) propone un modelo de instrucción, en Matemáticas, basado en el Constructivismo. En lugar de usar el paradigma explicación-práctica, el profesor establece y coordina ambientes de aprendizaje en los que se fomente que los estudiantes construyan las ideas significativamente, aprendan a "pensar" y tomar decisiones más que a memorizar y reproducir conceptos enseñados, y organiza actividades para los

---

[12] En el capítulo segundo que habla de metodología se hará una descripción detallada del test WSAT ya que será uno de los instrumentos utilizados para seleccionar a nuestros casos de estudio.

estudiantes que les fuercen a reestructurar sus ideas a un nivel cognitivo más elevado que el que poseen. El aprendizaje centrado en problemas con grupos cooperativos y discusión en clase se convierte en un ambiente "rico" para que los estudiantes creen significado.

1.4.2. Diferentes tipos de imágenes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Es importante partir de alguna clasificación sobre los diferentes tipos de imágenes, ya sea para realizar con detenimiento un análisis de cómo los estudiantes hacen uso de las imágenes en su actividad matemática o para presentar los resultados de investigaciones en el tema.

Las clasificaciones hechas por Piaget e Inhelder (1971) y Presmeg (1985) han sido nuestro punto de partida inicial. En los párrafos que siguen comentaremos, en primer lugar, cada una de estas clasificaciones y, posteriormente, expondremos cómo interpretaremos en nuestro trabajo los diferentes tipos de imágenes que pueden utilizarse en la actividad matemática.

1.4.2.1. Clasificación formulada por Piaget e Inhelder

Piaget e Inhelder diferenciaron las imágenes en dos categorías que llamaron *reproductive* y *anticipatory***.** Las primeras representan mentalmente sucesos y objetos ya conocidos por las personas, mientras que las segundas se dan cuando una persona representa objetos o sucesos que no ha percibido previamente.

Las imágenes "reproductivas" pueden, además, ser clasificadas en:

-"estáticas" o RS (*reproductive static*); aquéllas que representan objetos estáticos o configuraciones inmóviles (una mesa, un hexágono o una línea recta)

-"cinéticas" o RK (*reproductive kinetic*); aquéllas que evocan, en sentido figurado, movimiento (el balanceo de un péndulo o el movimiento de dos móviles que se cruzan a velocidad constante)

-"transformadas" o RT (*reproductive transformational*); aquéllas que representan cuerpos que, por el movimiento, cambian su forma y no únicamente su posición (transformación de un arco en una línea recta o la división de un cuadrado en dos rectángulos).

Las imágenes “anticipatorias” son aquéllas en las que una persona es capaz de anticipar transformaciones que son nuevas para ella, por ejemplo cuando al doblar mentalmente dos veces una hoja de papel en dos partes iguales y cortar el punto de intersección de los dobleces, se da cuenta de que “verá” un agujero al desdoblar la hoja, mientras que si la hoja se dobla tres veces en dos partes iguales “verá” dos agujeros. Estas imágenes fueron subdivididas también en:

-“cinéticas” o AK (*anticipatory kinetic*),

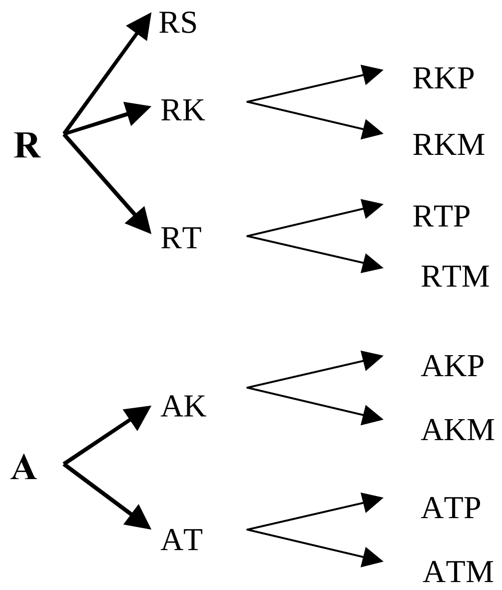
-“transformadas” o AT (*anticipatory transformational*),

según la imagen “anticipatoria” suponga cambio en la posición o en la forma.

Piaget e Inhelder no consideraron dentro de las imágenes “anticipatorias” las “estáticas”, ya que si se quiere anticipar, por medio de una imagen, una posición estática desconocida, se tendrá que tener en cuenta el movimiento o las transformaciones que llevan a esta posición. Esto ocurre, por ejemplo, cuando un niño quiere imaginar la posición estática final de un tubo que se gira 180 grados de manera que sus extremos rojo y azul se inviertan, es decir que si el extremo rojo está a la derecha del niño antes de la rotación lo esté a la izquierda después de la misma.

Tanto las imágenes “cinéticas” como las “transformadas”, ya sean “reproductivas” o “anticipatorias”, pueden subdividirse, a su vez, teniendo en cuenta el resultado de la actividad mental (P) o el proceso de la modificación (M). Aunque el niño para “reproducir” o “anticipar” el resultado tiene que tener en cuenta este proceso de modificación, esto no significa que tenga que imaginarlo en detalle.

La clasificación puede resumirse en el siguiente esquema:



En la práctica, esta clasificación resultó demasiado sutil. Presmeg (1985) expresa que Piaget e Inhelder no encontraron, en la mayoría de los casos, diferencias esenciales entre:

(1) RK y AK
(2) RK y RT
(3) AK y AT.

La distinción mayor que encontraron fue entre las imágenes "estáticas" y las "anticipatorias", ya sean éstas "cinéticas" o "transformadas".

Mantendremos *in mente* la clasificación de Piaget e Inhelder en el presente estudio.

1.4.2.2. Clasificación formulada por Presmeg

Presmeg (1985), en la investigación que realizó con estudiantes y profesores de Secundaria, identificó cinco diferentes tipos de imágenes cuando éstos hacían Matemáticas: imágenes "concretas", imágenes "patrón", imágenes de "memoria de fórmulas", imágenes "cinestésicas" e imágenes "dinámicas". A continuación describiremos cada tipo de imagen.

Las "imágenes concretas" son identificadas por Presmeg como *pictures in the mind*. La característica más esencial de este tipo de imágenes es que consisten en una única fotografía, sin movimiento pero con muchos detalles. Fueron el tipo de imágenes predominantemente utilizado por los estudiantes de su estudio. Cita como ejemplos de este tipo de imágenes las de triángulos especiales, los cuadrantes en Trigonometría, los diagramas relacionados con teoremas, las imágenes de grafos, etc, además de las imágenes idiosincrásicas peculiares y personales construidas por algunos de sus estudiantes.

Las "imágenes patrón" han sido definidas por la profesora Presmeg como aquéllas donde se desatienden detalles concretos y se representan relaciones en un esquema visual-espacial. Pueden ser tenues o vívidas, aunque su característica esencial es que son como patrones, en los que emergen relaciones y faltan detalles concretos. Puede ser el tipo de imagen usado por los maestros de ajedrez, quienes pueden no necesitar visualizar el tablero con todos sus detalles. El juego de ajedrez es extremadamente complejo, cada movimiento se hace teniendo en cuenta un número increíble de jugadas alternativas y de contrajugadas. Un jugador experto no puede permitir que su pensamiento se distraiga en detalles irrelevantes. McKim (1972) cita al maestro de ajedrez Alekhine, quien dijo que visualizó las piezas como "líneas de fuerza", y a Pillsbury, que habló de una "visión sin forma de las posiciones".

Algunos ejemplos de "imágenes patrón" encontrados por Presmeg fueron: esquemas para representar la magnitud y la dirección de un vector, modelos de tablas donde aparecen regularidades que permiten encontrar las razones trigonométricas de determinados ángulos, e imágenes de fórmulas trigonométricas para ángulos compuestos. Presmeg escribe también sobre la dificultad de identificar en la práctica este tipo de imágenes, ya que resulta complicado, en ciertas situaciones, diferenciar dónde acaba la imagen concreta y dónde empieza la imagen patrón.

Las “imágenes de memoria de fórmulas” son explicadas por la Dra. Presmeg como las imágenes utilizadas por los estudiantes que dijeron “ver” una fórmula en sus mentes, imaginándola escrita en la pizarra o en el cuaderno. Son utilizadas en Matemáticas, probablemente, por la mayoría de las personas visualizadoras, siendo quizá más accesibles que las imágenes patrón.

Además de las ventajas mnemotécnicas asociadas a las imágenes en general, las imágenes de memorias de fórmulas proporcionan un poderoso medio de hacer a una imagen concreta portadora de una información abstracta. Algunas fórmulas que tuvieron un gran impacto visual entre los estudiantes entrevistados por la Dra. Presmeg fueron las del módulo de un vector y la que da las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Las “imágenes cinestésicas” son imágenes que involucran actividad muscular. Esta actividad, normalmente, se manifiesta en el trazado de una curva, ya sea en el aire o sobre la superficie de una mesa, o haciendo movimientos “caminando” con dos dedos. Algunos estudiantes dibujaron en el aire, con sus dedos, la gráfica de una parábola o de una hipérbola, sobre todo cuando no se podían acordar del nombre (Presmeg, 1985).

Las “imágenes dinámicas” son las que involucran habilidad para mover y transformar, mentalmente, imágenes concretas. Presmeg encontró solamente dos ejemplos de estas imágenes en el estudio que constituyó su tesis doctoral. Cita el ejemplo de Paul R., quien frente al problema: *sabiendo que el área del cuadrado ABCD es cuatro unidades cuadradas y que E y F son los puntos medios de los segmentos AB y CD, encontrar el área del paralelogramo AECF,* sostuvo que el paralelogramo tenía área dos. Paul R explicó su solución diciendo que después de percatarse de que el rectángulo AEFD tenía área dos, al ser la mitad del cuadrado original, también el paralelogramo AECF tenía área dos. Para darse cuenta de ello, hizo coincidir al paralelogramo AECF con el rectángulo AEFD moviendo mentalmente el triángulo ECF a la posición del triángulo AFD.

1.4.2.3. Clasificación utilizada en este estudio

Emplearemos una clasificación estructurada básicamente en la propuesta por la Presmeg, a la que hemos añadido algunas matizaciones, fruto de nuestras reflexiones en el tema, lecturas de investigaciones posteriores y conversaciones personales con esta profesora.

Interpretamos las "imágenes concretas" en la misma línea que Presmeg. Pensamos que es el tipo de imágenes más fácil de identificar, son como fotografías mentales que presentan muchos detalles. Por ejemplo, podríamos formar la imagen de un rostro humano pletórico de detalles: puede tener los ojos desmesuradamente abiertos y una pupila más grande que la otra, una cicatriz que pasa por debajo del ojo izquierdo, un lunar en el lado izquierdo y debajo de la comisura derecha de la boca, y así, sucesivamente, un detalle tras otro. Son imágenes "ricas" en información (Johnson, 1987). Podemos compararlas a las que Piaget e Inhelder (1971) llaman imágenes "estáticas"**.**

Muchos problemas matemáticos se pueden resolver utilizando una imagen concreta, ayuda visual, como apoyo al pensamiento abstracto. En algunos ejemplos, la imagen de un objeto o de un suceso se usa para representar el suceso o el objeto real. Simulamos mentalmente una situación utilizando una imagen como una forma de anticipar lo que sucederá en la realidad.

En relación con las "imágenes patrón" encontradas por Presmeg pensamos que son imágenes más abstractas. Brown y Presmeg (1993) piensan que la "imagen patrón" podría ser el tipo de imagen usado por Einstein, quien, en una carta a Hadamard, escribió que en la forma de su pensamiento aparecían "ciertos signos y más o menos claras imágenes que pueden ser voluntariamente reproducidas y combinadas, […] antes de que haya cualquier conexión con construcciones lógicas en palabras u otros tipos de signos que puedan ser comunicados a otros".

Johnson (1987) utiliza indistintamente los términos "esquema de la imagen" y "esquema corporeizado" (*image-schemata*, es el término original) para referirse a lo que podría tener relación con la imagen patrón encontrada por Presmeg. Johnson expone que el "esquema de la imagen" no es una imagen rica o concreta sino un conjunto de estructuras que organizan nuestras representaciones mentales a un nivel más general y abstracto que el correspondiente a imágenes mentales particulares. En contraposición a lo específico de éstas, el "esquema de la imagen" presenta una mayor universalidad. Un ejemplo sería el esquema de un rostro en el que sólo se consideran algunos rasgos básicos: líneas para los ojos, la nariz, la boca, etc. Este esquema permite ejemplarizar una gran cantidad de imágenes distintas de rostros.

Dörfler (199l) sugiere que la manipulación en el ámbito cognitivo de los conceptos matemáticos se facilita, en gran medida, por la construcción y disponibilidad de adecuados "esquemas de la imagen". La construcción de significado para una idea matemática depende de la construcción de las anteriores imágenes. Éstas, muchas veces, se abstraen de imágenes concretas y se experimentan a través de nuestra acción mental sobre los objetos.

El siguiente problema, obra de McKim (citado en Kosslyn, 1983), ilustra cómo una imagen "concreta" o una imagen "patrón" pueden simular y dar respuesta a una situación problemática:

> *Un monje comienza a subir a una montaña a las 8:03, un lunes por la mañana. El camino es difícil y el monje, a veces, necesita descansar. Llega a la cima de la montaña a las 4:30, después de haber parado quince minutos para almorzar. Pasa toda la noche meditando en la cima de la montaña. Al día siguiente, a las 8:03, comienza a descender la montaña por el mismo camino que subió el día anterior. Vigorizado por la meditación, llegó a la base de la montaña a la 1:05 del mediodía.*
> El problema pregunta: *¿Hubo alguna hora (no se necesita decir cuál) en la que el monje pasó exactamente por el mismo punto del camino, el lunes y el martes?*

Este problema es sencillo de resolver si se utiliza una imagen "concreta" (terminología de Presmeg) y al mismo tiempo "anticipatoria cinética" (terminología de Piaget) que simule y anticipe la situación. Podemos imaginar la montaña y dos monjes, uno en la cima y otro en la base, que comiencen a caminar el mismo día y a la misma hora, uno subiendo el camino y otro bajándolo. Es fácil darse cuenta de que los monjes se encontrarán en algún punto del camino. Ese momento es la solución al problema.

El mencionado "problema del monje" podía haber sido resuelto a través de unos ejes cartesianos en los que en el eje horizontal se represente el tiempo y en el vertical la altura de la montaña. Una línea ascendente representará la subida y una descendente la bajada del monje. El punto donde se cruzan ambas líneas indicará la hora en la que las dos alturas son idénticas.

Siguiendo las ideas de Johnson podemos pensar en los ejes cartesianos como un esquema de la imagen en el sentido que operan a un nivel de generalidad y abstracción superior al de las imágenes “ricas” y concretas. Un esquema se compone de una reducida cantidad de partes y relaciones, en virtud de las cuales se pueden estructurar indefinidamente muchas percepciones, imágenes y acontecimientos.

En su estudio inicial Presmeg (1985) identificó las “imágenes de memoria de fórmulas” en algunos visualizadores que recordaban una fórmula visualizándola escrita en la pizarra o en su cuaderno. No obstante, como Brown y Presmeg (1993) reconocen esta clasificación parece restringida. Los niños hacen, con frecuencia, uso de fórmulas en las Matemáticas escolares y puede que usen métodos visuales para recordar la información. Parece más viable hablar en general de “imágenes desde la memoria”, aquéllas que los estudiantes pueden usar para recordar la información desde sus clases de Matemáticas. Son las imágenes que Piaget e Inhelder denominaron “reproductivas”, ya comentadas anteriormente. Son imágenes que cuando se manifiestan son concretas y pueden ser muy precisas y detalladas, pero también en algunos casos no contribuyen a la comprensión matemática de los estudiantes. Este hecho lo constatamos en nuestro estudio como explicaremos en capítulos posteriores.

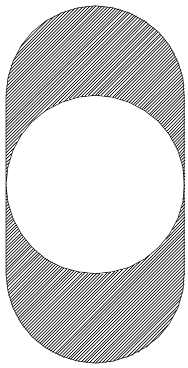
Un ejemplo anecdótico de la utilización de este tipo de imagen lo proporciona el premio Nobel (Año 1965) en Física Richard Feynman, que escribe:

> Procuro acordarme de esto, sobre todo, cuando estoy enseñando alguna técnica esotérica, como la integración de las funciones de Bessel. Cuando veo ecuaciones, veo las letras de colores; no sé por qué. Al tiempo que hablo, veo imágenes vagas de las funciones de Bessel tomadas del libro Jahnke y Emde, con jotas de color sepia, enes levemente azul-violáceas y equis marrón oscuro volando por allí. Y me pregunto qué infiernos de aspectos tienen que ofrecerles a los estudiantes (Feynman, 1988: 69).

Las “imágenes dinámicas” no las entendemos solamente como imágenes no estáticas, sino como susceptibles de moverse y transformarse. Podemos considerarlas, de alguna manera, como una combinación de las imágenes “cinéticas” y “transformadas” de Piaget, ya sean “reproductivas” o “anticipatorias”. Por otra parte no encontramos diferencias esenciales con las formuladas por Presmeg. Ilustramos con el siguiente ejemplo nuestra concepción de las mismas.

Supongamos el siguiente problema:

Se quiere decorar con vidrieras parte de la ventana del altar mayor de una iglesia. La ventana tiene la siguiente forma:



Las tangentes al círculo tienen igual longitud que el diámetro del mismo. Los dos semicírculos de la parte superior e inferior de la figura son de igual diámetro.
La parte que se quiere decorar con vidrieras es la parte sombreada del dibujo. ¿Cuál será el área a decorar?

Una manera de resolver este problema sería construir una imagen de la ventana y darse cuenta de que si trasladamos los semicírculos externos y los colocamos dentro del círculo interior ocuparían la misma superficie que éste. Es decir, la superficie que nos pide el problema coincide con la de un cuadrado de lado el diámetro del círculo, superficie de fácil cálculo.

El ejemplo nos muestra el uso de imágenes dinámicas en la resolución de un problema matemático. Aunque no suele ser habitual su uso en los estudiantes, la construcción de imágenes dinámicas es una herramienta poderosa que facilita la resolución de los problemas matemáticos a los estudiantes que las utilizan (Presmeg, 1986; Brown y Presmeg, 1993).

1.4.3. Etapas y procesos en el uso de imágenes en Matemática

Kosslyn (1983) encontró cuatro diferentes procesos implicados en el uso de las imágenes visuales. Los llamó: “generar”, “inspeccionar”, “transformar” y “mantener” una imagen. Para este autor, los dos primeros procesos intervienen en todo uso de una imagen.

La construcción de una imagen no es un proceso simple. En determinados casos, como en los problemas que surgen en la Geometría Tridimensional, generar una imagen en tres dimensiones puede ser necesario para entender un problema; sin embargo, esta habilidad no suele ser común, y muchas personas muestran incapacidad para visualizar objetos en tres dimensiones, lo que les lleva a fracasar en la solución de determinados problemas.

Inspeccionar, mantener y transformar son aquellos procesos que nos llevan a interpretar la imagen, manteniéndola en conciencia durante el tiempo necesario y realizando en determinados casos transformaciones como rotación, acercamiento o alejamiento de la imagen, exploración y análisis de un aspecto particular sobre el que basar nuestra observación.

Cuando resolvemos determinados problemas en Matemáticas, muchas veces es difícil mantener una imagen construida, y necesitamos hacer un dibujo o un esquema que nos ayude en nuestra reflexión. Se crea "un diálogo" entre la imagen construida en nuestra mente y nuestra acción física, por ejemplo, un dibujo sobre un papel, un esquema u otra construcción. Este diálogo nos hace profundizar y analizar nuestro pensamiento.

Wheatley (1990), educador matemático, ha incorporado las ideas de Kosslyn a las Matemáticas y habla de construcción, re-presentación y transformación. En esencia, sus ideas de construcción y transformación coinciden con lo que Kosslyn llamó generación y transformación. Sin embargo, Wheatley señala que, cuando se construye una imagen, ésta no permanece en conciencia sino que tenemos que hacerla surgir cuando la necesitemos. Por eso habla de re-presentación de la imagen, esto es, volver a presentar. Esta imagen re-presentada puede coincidir con la imagen original o puede haber sido modificada con nuestra experiencia.

1.5. IMÁGENES METAFÓRICAS EN LA MATEMÁTICA

1.5.1. Introducción

El lenguaje lógico, que es el ideal para la exposición científica, permite enunciar juicios y razonamientos de una manera objetiva, donde lo que importa es la claridad, la precisión y la exactitud de lo tratado. No se deberá dejar sobreentendido nada y cada término será empleado en su significación justa y permanente. En relación con la Matemática, en el informe Cockroft (1985: 4) se puede leer:

> Las Matemáticas proporcionan un medio de comunicación de la información conciso y sin ambigüedades porque hacen un uso amplio de la notación simbólica. Sin embargo, es la necesidad de usar e interpretar esta notación y de entender las ideas y conceptos abstractos que le sirven de base lo que resulta un escollo para mucha gente. En efecto, la notación simbólica que capacita a las Matemáticas para que se usen como medio de comunicación, ayudando así a hacerlas "útiles", puede también hacer las Matemáticas difíciles de entender y usar.

Los profesionales reflexivos involucrados en los procesos de enseñanza de la Matemática saben que en la práctica no se pueden limitar al uso del lenguaje matemático formal cuando se comunican con los estudiantes, debido a que éstos desconocen muchas veces ese lenguaje, además de la dificultad que presenta su comprensión, ya resaltada en el párrafo anterior.

Queremos, en este punto, mencionar brevemente que la comunicación entre profesor y estudiante es un proceso complejo. Podemos imaginar que es un proceso de envío y recepción de mensajes. Sin embargo, no es una especie de telégrafo en el que las señales portadoras de significado se transmiten directamente de un interlocutor a otro. Cada participante debe construir por sí mismo significado para los mensajes que recibe y tiene que diseñar mensajes cuyo significado pueda descifrar otra persona.

En este proceso de "guiar" al estudiante en lo que necesita saber, el profesor recurre al uso de lo que en Literatura se conoce como "lenguaje figurado", donde las construcciones gramaticales se desordenan; las palabras y giros convenientes desde un punto de vista lógico y matemático son reemplazadas por otros que experimentan un cambio accidental de significación, usándose en sentido figurado.

Aparecen los tropos, figuras de carácter semántico -metáfora, metonimia- mediante las cuales se hace tomar a una palabra una significación que no es la significación propia de esa palabra.

En consonancia con la influencia de los procesos de visualización en la construcción del pensamiento, analizaremos la importancia de las metáforas y metonimias como elementos base en la representación que hacen las personas de constructos matemáticos. Las metáforas y metonimias, acompañadas de imágenes y simbolismo, ayudan a las personas a ver y entender por sí mismas las relaciones y conceptos matemáticos en medio de las ambigüedades inherentes a su representación (Presmeg, 1998).

Antes de investigar el papel que juegan las metáforas y las metonimias en el contexto matemático, escribiremos unas palabras para clarificar la terminología utilizada.

1.5.2. Metáforas

La "metáfora" es una figura de carácter semántico mediante la cual se hace tomar a una palabra un significado que no es el propio y habitual de la misma. Una explicación aparece en la obra *El cartero de Neruda* de Antonio Skarmeta, en una conversación entre los personajes de Neruda y Mario Jiménez:

> *Mario Jiménez. Es indigno que me sometas a todo tipo de comparaciones y metáforas.*
> *¿Don Pablo?*
> *¡Metáforas, hombre!*
> *¿Qué son esas cosas?*
> *Para aclarártelo más o menos imprecisamente, son modos de decir una cosa comparándola con otra.*
> *Déme un ejemplo.*
>
> Neruda miró su reloj y suspiró.
>
> *Bueno; cuando tú dices que el cielo está llorando. ¿Qué es lo que quieres decir?*
> *¡Qué fácil! Que está lloviendo.*
> *Bueno, eso es una metáfora.*
> *Y ¿por qué si es una cosa tan fácil se llama tan complicado?*
> *Porque los nombres no tienen nada que ver con la simplicidad o complejidad de las cosas.*

La palabra viene del griego, *metaphora*, que significa "transporte". Ha sido considerada tradicionalmente como una comparación o analogía abreviada (Marchese y Forradellas, 1986). La palabra "analogía" no era, en principio, un término gramatical o lingüístico, sino que tenía el significado matemático de proporción. Szabo nos dice: "los gramáticos griegos del helenismo tomaron, sin lugar a dudas, su término "analogía" del lenguaje de las Matemáticas. Así, en última instancia, debemos a los matemáticos griegos nuestra palabra "analogía"[13]

[13] Cita extraída de Pimm (1990: 149)

Las metáforas son un medio por el que establecemos conexiones y organizaciones entre distintos dominios. Operan con relaciones de semejanza entre dos entes o fenómenos. Los dos entes, dominios o fenómenos vinculados eran los que, en la literatura tradicional, recibían el nombre de "tenor" y "vehículo" de la metáfora (Marchese y Forradellas, 1986).

En la metáfora "la Matemática es un lenguaje", por ejemplo, hay un dominio común a los dos entes que permite enlazarlos; el "tenor", en este caso, sería la Matemática, y el "vehículo", el lenguaje. El vehículo contribuye a estructurar las creencias acerca del tenor, así la esencia de la metáfora consiste en contemplar una cosa en términos de otra.

En relación con la anterior metáfora, Usiskin (1996) hace una interesante reflexión a través de la cual intenta convencer de que la Matemática es un lenguaje en el mismo sentido que el español, el inglés o el japonés, ya que presentan una y otros características comunes. Por ejemplo, al igual que la mayoría de todas las lenguas modernas, el lenguaje matemático puede ser oral o escrito, formal o informal; como en casi todas las lenguas, la comunicación es uno de sus mayores propósitos, y no solamente describe conceptos sino que ayuda a formarlos en la mente del hablante.

Low considera la metáfora una reclasificación que supone discutir sobre X como si fuese en algunos aspectos Y, donde X e Y son descritos como los sujetos primario y secundario de la metáfora. La elección de Y se basa en uno o varios puntos de parecido entre X e Y, aunque la expresión formada, si se toma literalmente, no tenga sentido (citado en Nolder, 1991).

Nosotros entendemos la metáfora, dentro del contexto de la comunicación matemática, como una herramienta que nos ayuda a expresar -oralmente o por escrito-, nuestras ideas matemáticas. Su importancia ha sido subrayada por Pimm (1990: 36): "creo que la metáfora constituye un aspecto central para la expresión del significado matemático, de igual modo que para la expresión del significado en el lenguaje cotidiano".

Reproducimos algunos ejemplos de metáforas en Educación Matemática:

1. Una ecuación es una balanza.
2. Una función es una máquina.
3. El temario es una carrera de coches.
   (El recorrido de la pista es el programa. Los coches son los alumnos).
4. Aprender Matemáticas es como construir un edificio.
5. La Matemática es un lenguaje.
6. Un profesor es un policía.

En ellos diferenciamos el "tenor" y el "vehículo"; respectivamente serían:

TENOR	VEHÍCULO
Ecuación	Balanza
Función	Máquina
Temario	Carrera de coches
Aprender Matemáticas	Construir un edificio
Matemática	Lenguaje
Profesor	Policía

En estos ejemplos se puede establecer una diferenciación; en unos casos la metáfora se utiliza para clarificar un concepto matemático, como en 1 y en 2, y en otros la metáfora aparece para expresar una idea o creencia. Profundizaremos posteriormente sobre estas cuestiones.

En los ejemplos anteriores, los conceptos gramaticales de metáfora y de comparación o símil se entremezclan de alguna manera.

- Gramaticalmente, un "símil" o "comparación" sería una expresión del tipo: "A es como B", por ejemplo:

"*el cielo es como un mar negro*",

- y la "metáfora" sería una expresión del tipo "A es B"; algunos ejemplos serían

"*Juan es un león*"

"las perlas de tu boca"

en este segundo ejemplo “B se pone en lugar de A” .

Leino y Drakenberg (1993), en un informe que hicieron sobre las teorías de metáforas relevantes en educación, señalaron que la “metáfora” puede considerarse como una forma implícita de analogía, mientras que el “símil” es una forma explícita (citado en Presmeg, 1997).

Tanto en el símil como en la metáfora, se entiende que la analogía se refiere solamente a algunas partes de los dos dominios enlazados. Las partes semejantes o similares constituyen el “terreno” de la comparación mientras que los elementos diferentes constituyen la “tensión”.

Adoptaremos un enfoque de la metáfora más práctico y funcional que gramatical, utilizando indistintamente los términos gramaticales “metáfora” y/o “símil”, como justificaremos posteriormente.

1.5.3. Metáforas y Matemáticas

Entendemos la contribución de la metáfora a la Matemática en dos vertientes diferentes:

1.- Como herramienta que puede facilitar la construcción y la comprensión de los conceptos matemáticos, y

2.- Como forma de describir las creencias o concepciones pedagógicas.

En el primer sentido, las metáforas son elementos importantes en la representación y comunicación de las ideas, y su fuerza está en permitir “construir nuevos conceptos” a partir de otros ya existentes. Este punto lo desarrollaremos en el apartado que llamamos Metáforas en la enseñanza de las Matemáticas.

A la segunda vertiente le dedicaremos el apartado que llamamos Metáforas que describen creencias pedagógicas.

1.5.3.1. Metáforas en la enseñanza de las Matemáticas

Para construir las ideas matemáticas y transmitirlas en un proceso de enseñanza, pensamos que debemos relacionar, comparar y buscar analogías, y, por ello, las metáforas nos colocan en el camino para comprender y, si se quiere, para clarificar, los conceptos (Dormolen, 1991; Chapman, 1997, Lakoff y Johnson, 1980). Es en este sentido en el que las metáforas estructuran, al menos en parte, lo que hacemos y cómo lo entendemos. Como expresa (Pimm, 1990: 278): "La metáfora no es sólo, ni en primer lugar, un instrumento decorativo de la poesía, sino una de las principales estrategias lingüísticas a nuestra disposición para dar sentido a nuestro mundo".

Pensamos que las metáforas constituyen un recurso, una herramienta que puede ayudar a desarrollar el discurso sobre las ideas, los objetos y los procesos matemáticos.

Algunos conceptos matemáticos aparentemente simples están sujetos a definiciones que son, en general, complejas; pensemos en los conceptos de recta, dirección, derivada, gradiente, superficie, grafo, etc.

En el libro I de los Elementos de Euclides (1956) se lee que una recta es: "*Longitud sin anchura*"

¿Es ésta una definición clarificadora de lo que es una recta? En los Elementos, Euclides define recta haciendo uso de conceptos más complicados que aquél que deseaba exponer.

En la siguiente definición: "una dirección es una clase de equivalencia de rectas del plano relacionadas entre sí mediante una relación de paralelismo" (Roanes, 1976), aparecen otros conceptos nada clarificadores, en principio, de lo que es una dirección. Por ello, en Matemáticas, para dar una primera idea del concepto, muchas veces, recurrimos a la metáfora; algunos ejemplos serían:

recta ≡ horizonte, líneas de luz,

dirección ≡ autopista recta con varios carriles,

derivada ≡ cambio, variación,

superficie ≡ montaña, valle,

gradiente ≡ brújula (dirección de máxima variación),

grafo ≡ red de carreteras.

Muchos profesores de Matemáticas pueden no ser conscientes de que están utilizando metáforas en sus clases y puede que incluso consideren la utilización de metáforas como algo irrelevante en una ciencia donde todo es exactamente lo que se dice que es. Sin embargo, la metáfora aparece con bastante frecuencia en clases de Matemáticas de distintos niveles, y es un recurso utilizado por muchos profesores. Éstos, consciente o inconscientemente, ofrecen a los estudiantes algo concreto y familiar para ayudarles a entender una idea abstracta y no sencilla. Veamos un ejemplo en el que el uso de la metáfora está justificado de una forma "natural":

En los primeros cursos de Universidad (Facultades, Centros Superiores, etc), cuando queremos introducir el concepto de gradiente de una función escalar

¦:R×R→R

(x, y) →¦(x, y) = z

y su interpretación física, algunos profesores suelen recurrir al símil siguiente:

"Imaginemos que ¦(x, y) = z representa una montaña; el vector gradiente de ***f*** en cada punto *(a,b)* del plano OXY,

Ñ¦*(a,b)* = ***grad(¦)****(a,b)* = *(¶¦/¶x)* ***i*** + *(¶¦/¶y)* ***j***

señala la dirección en la que la inclinación de la montaña es máxima" (las derivadas parciales de la función ***f*** deben ser computadas en el punto *(a,b)*).

Formalmente, los profesores decimos que el gradiente de ¦**,** en cada punto, indica la dirección en que *la derivada direccional* es máxima, y esa dirección es perpendicular a las curvas de nivel, ¦(x, y)=k, de la superficie, ¦(x, y)=z, en cada punto.

Así pues, el gradiente de ¦ en cada punto nos señala, a modo de brújula que nos guía, el camino que tendríamos que seguir para subir una montaña haciendo el recorrido más corto.

De igual forma, si nos situamos en *la cima* de una montaña un día muy lluvioso, el agua se desplazará montaña abajo siguiendo la dirección del vector

-*Ñ*¦*(a,b)* = -***grad*(¦)***(a,b)* = -(∂¦/∂x) **i** - (∂¦/∂y) **j**

Por tanto, la naturaleza, con su “lógica-sabiduría”, ha formado los cauces de los ríos y los barrancos[14] siguiendo el camino que señala el opuesto al vector gradiente de ¦ en cada punto.

Obsérvese que en estas ideas matemáticas hay implicadas tres metáforas:

montaña o barranco	≡	superficie
desniveles o inclinaciones	≡	derivadas direccionales
brújula	≡	vector gradiente

El concepto matemático de gradiente queda reforzado cuando el alumno ha construido la imagen mental de la montaña (la superficie) y observa las inclinaciones de sus laderas (derivadas direccionales) y hace uso de la brújula (vector gradiente) que le señala la dirección de máximo desnivel. Finalmente, el alumno encontrará el valor de “esta máxima derivada direccional” calculando la norma (o longitud) del vector gradiente.

Difícilmente se encuentran ejemplos como el descrito en los textos universitarios. Sí son frecuentes las analogías en los textos de Primaria. Y cada vez con más frecuencia también se pueden encontrar en textos de Bachillerato. Por ejemplo, Guzmán y Colera (1989), en un esfuerzo encomiable por divulgar la Matemática Aplicada, recurren a una hormiga que ha de escalar las aristas de un poliedro para justificar cómo funciona el algoritmo del símplex.

En pocas palabras, este método se apoya en la siguiente idea. Imaginemos que sobre una mesa tenemos el esqueleto formado por las aristas de un complicado poliedro convexo. Viene una hormiga por la mesa y se le antoja subir al vértice situado en la parte más alta del mismo, ¿cómo procederá para subir cuanto antes? Comienza a subir por una arista hasta llegar al final de ella. Desde ese vértice tiene varias opciones, varias aristas que podría recorrer para seguir escalando ¿cuál debe escoger? Parece razonable elegir aquella por la que suba más rápidamente, es decir por la de mayor pendiente hasta llegar al próximo vértice; desde ese vértice escogerá de nuevo la arista de mayor pendiente y así sucesivamente hasta llegar a la cima. Esta es la idea en la que se basa el

[14] Los barrancos son angostas y profundas cortaduras en el terreno que, desde la cumbre hasta el mar, sirven de cauce a las posibles aguas torrenciales.

algoritmo del símplex que nos indica paso a paso como se elige el pivote de un problema clásico en programación lineal.

Otros ejemplos de metáforas en la enseñanza universitaria y en otros campos de la Matemática pueden encontrarse en Plasencia, Güemes, Dorta y Espinel (1999).

A. METÁFORAS EXTRAMATEMÁTICAS Y METÁFORAS ESTRUCTURALES

Las metáforas pueden estar implícitas en todas las áreas de la comprensión humana, incluso en el mismo razonamiento (Johnson, 1987; Lakoff, 1987; Lakoff y Johnson, 1980; Presmeg, 1997).

No es extraño encontrar profesores de Matemáticas que utilizan conexiones con otros dominios, matemáticos y no matemáticos, para ayudarse en el proceso de transmitir los conceptos a los estudiantes, y tampoco sorprende encontrar estudiantes que recurren a las metáforas como un medio de dar sentido y recordar ideas o situaciones matemáticas.

Las “metáforas extramatemáticas” (Pimm, 1990) son aquéllas que relacionan dos ámbitos diferentes, siendo uno de ellos el matemático. Ejemplos como:

Ecuación ≡ Balanza

Superficie ≡ Montaña

Grafo ≡ Red de carreteras

son fiel reflejo de este tipo de metáforas.

Un ejemplo llamativo de metáfora en la historia que contribuyó al desarrollo de la Matemática fue protagonizado por Leibniz, quien, tratando de abordar el problema relativo a la existencia o no de raíces cuadradas de los números negativos, dio sentido a esta ambigüedad por medio de una metáfora. Vio estos objetos matemáticos como “anfibios entre ser o no ser”. El vehículo de la metáfora es un anfibio que se mueve libremente de la tierra al agua, y el tenor, un concepto matemático: la raíz cuadrada de menos uno; un número imaginario, que en la época de Leibniz se movía entre ser y no ser (citado en Presmeg, 1998).

En el ámbito de enseñanza, la conexión metafórica de un concepto matemático como el número complejo con la imagen de una rana, que es al mismo tiempo una criatura de tierra y de agua, puede ayudar a los estudiantes a comprender estos números que tienen parte real y parte imaginaria (tierra y agua).

Conviene resaltar el poder de la metáfora en este último ejemplo, ya que permite “construir” nuevos conceptos en función de los ya existentes.

Las “metáforas estructurales” son aquéllas que comparan dos ámbitos matemáticos, es decir, los términos análogos pertenecen, ambos, a las Matemáticas.

Dos ejemplos significativos entresacados del libro *El lenguaje matemático en el aula* (Pimm, 1990: 155)), son:

vector ≡ número complejo

triángulo ≡ triángulo esférico

este segundo ejemplo, basado en la analogía siguiente:

línea recta es a plano como circunferencias máximas es a esfera,

relaciona los triángulos de la Geometría euclídea con los de la Geometría de Riemann.

Queremos destacar que las metáforas estructurales deben ser tratadas con exquisita cautela, ya que existe la tendencia por parte de muchos alumnos a trasladar todas las propiedades en torno a un concepto al campo análogo, lo que conlleva, en ocasiones, a situaciones que no son comparables; un ejemplo lo encontramos cuando utilizamos la metáfora estructural en la que “identificamos” vector con número complejo. Al recurrir a esta metáfora los alumnos suelen transportar las características inherentes a un vector al campo de los complejos; en efecto:

1.- módulo de un vector → módulo de un número complejo
(traslación válida)

2.- dirección de un vector → dirección de un número complejo
(traslación no válida)

3.- sentido de un vector → sentido de un número complejo
(traslación no válida)

4.- suma de vectores → suma de números complejos
(traslación válida)

5.- producto de un vector por un escalar → producto de un número complejo por un escalar
(traslación válida)

6.- producto de vectores → producto de números complejos
(traslación no válida)

Como es conocido, los conceptos de dirección y sentido tienen coherencia en el campo de los vectores y no están definidos para los números complejos que, como se sabe, son pares ordenados de números reales; de igual forma, el producto de vectores tiene diferentes significados (producto escalar, producto vectorial, producto mixto, triple producto vectorial,…), mientras que el producto de números complejos está perfectamente definido como ley de composición interna.

B. IMÁGENES Y METÁFORAS

La metáfora es un instrumento básico de la comunicación humana. Hemos expuesto en las párrafos anteriores cómo la utilización que se da a la metáfora en la enseñanza de las Matemáticas es esencialmente hacer comparaciones. Ello permite a quien expone describir una nueva idea o un concepto en términos de algo ya familiar, bien desde las mismas Matemáticas (metáforas estructurales) o desde un ámbito exterior (metáforas extramatemáticas).

Las metáforas trabajan algunas veces evocando imágenes, por lo que es difícil distinguir entre la imagen y la metáfora al describir el papel que tienen en una frase o una descripción.

Un ejemplo aceptado generalmente, en el que se dispone de una imagen como ayuda en la transmisión de los conocimientos matemáticos, es el de la balanza al tratar de resolver ecuaciones algebraicas.

Otte (1986: 200) señala:

> The phrase “an equation is a balance” is not a statement to be literally understood which reduces the seemingly abstract and general (that is, the algebraic equation) to the seemingly concrete and empirical (the balance) in a process of reduction and visual illustration, but it is the other way around. The balance stands for the highly general metaphor of “interaction” “symmetry and dissymmetry”. In this phrase the general or, if you like, the universal serves to explain the particular, the dynamic to explain the static.[15]

[15] la frase “una ecuación es una balanza” no es una sentencia que pueda ser entendida en sentido literal, que reduce lo que aparentemente es general y abstracto (la ecuación algebraica) a lo aparentemente concreto y empírico (la balanza) en un proceso de reducción e ilustración visual, sino que es al revés. La balanza representa la metáfora muy general de “interacción” o “simetría o no-simetría”. En esta frase lo general, o lo universal, sirven para explicar lo particular; lo dinámico, para explicar lo estático.

Esta interacción entre los términos de la metáfora descrito por Otte es lo que caracteriza positivamente la funcionalidad de la metáfora.

En el contexto de la metáfora, llamaremos a imágenes como la de la balanza "imágenes metafóricas", porque es la imagen (en este caso la balanza) la que da forma a la metáfora; en la instrucción son herramientas que ayudan a transmitir los conceptos matemáticos a los estudiantes.

Pensamos, desde el punto de vista de la enseñanza, que los profesores, al establecer lazos de unión entre un concepto nuevo y uno que ya está asimilado, incluso si no es matemático, pretenden ayudar a los estudiantes en la construcción del nuevo conocimiento. La metáfora "pedagógica", por su originalidad, puede facilitar el recuerdo.

Presmeg (1997) cita unos ejemplos donde clarifica el uso de lo que hemos llamado imágenes metafóricas. En una investigación que realizó con estudiantes de Secundaria, una de las tareas era encontrar la suma de los 30 primeros términos de la secuencia 5, 8, 11, ... Un estudiante que participó en la investigación resolvió el problema correctamente sumando el 1º término y el 30º, el 2º y el 29º, y así sucesivamente hasta que se dio cuenta de que había 15 sumandos iguales. De este modo, obtuvo la respuesta final multiplicando el valor de cualquiera de ellos por 15. Al explicar su respuesta, el estudiante dijo que había visto como una bóveda, y dibujó arcos concéntricos que uniesen el 1º y 30º términos, el 2º y 29º, etc, hasta que llegó a los dos números que ocupaban el centro. Otro estudiante imaginó en el mismo problema un arco iris.

En ambos casos, la bóveda o el arco iris fueron el vehículo de una metáfora donde el tenor era el proceso de encontrar la suma de términos de una progresión aritmética. Estos ejemplos, extraídos de la investigación de la Dra. Presmeg, ayudan a entender el papel que puede tener una imagen (bóveda, arco iris) dentro de una metáfora. Aunque la imagen acompaña a una metáfora, no es la metáfora.

Las imágenes parecen no sólo dar fuerza sino que ayudan a recordar la comparación de los dominios que constituyen la metáfora. Algunas veces, estas imágenes son personales e idiosincrásicas, como en el caso de Alison[16], que utilizó la metáfora de un barco navegando en un nivel de agua (eje x) para acordarse de emplear 180º ó 360º, en lugar de 90º ó 270º, para calcular el ángulo agudo que necesitaba para las razones trigonométricas.

La construcción de imágenes metafóricas, ya sea una imagen concreta (bóveda, arco iris) o una imagen dinámica (barco, balanza) (Presmeg, 1986), puede ayudar a esclarecer los conceptos matemáticos. Así pues, las imágenes consideradas en este sentido son un camino para comprender y encontrar significado a los conceptos e ideas matemáticos.

Presmeg (1985, 1986a) identificó cinco diferentes tipos de imágenes[17] en la investigación que constituyó su tesis doctoral. En ella, afirma que las dificultades que los estudiantes experimentaron para resolver problemas fueron mayores cuando se valieron de imágenes concretas. Una imagen concreta, por naturaleza, es un caso particular, y este hecho puede impedir la abstracción y la generalización si no se pueden separar las características esenciales de las que no lo son. Sin embargo, algunos de los estudiantes que recurrieron a imágenes en formas prototípicas, que incluían metáforas y metonimias, pudieron superar algunas de las dificultades.

Para Lakoff (1987), un "prototipo" es una representación mental cuya esencia es la de ser un buen ejemplo de una categoría. En su teoría de categorización describió una estructura radial en la que el prototipo descansa en el centro de la categoría. Las metáforas, que identifican elementos comunes en dominios diferentes, pueden usarse para extender esta estructura o para enlazar con otras categorías. Por su parte, las metonimias son elementos valiosos de las categorías, sean o no ejemplos prototípicos. Cada vez que se usa una imagen o un diagrama en Matemáticas se emplea una metonimia.

Profundizaremos en el concepto de metonimia en párrafos posteriores.

Las metáforas, consideradas como recursos que ayudan a comprender las Matemáticas, tienen algunas ventajas cognitivas, como son:

a) proporcionar un camino para hacer una situación, aparentemente compleja, comprensiva y manejable facilitando la labor al estudiante,

---

[16] Extraído de Presmeg (1985).
[17] En el apartado 1.4.2.2. se hace una descripción más exhaustiva de las diferentes imágenes.

b) permitir al profesor enseñar más “naturalmente”, pero de manera fundamental,

c) las metáforas ayudan a esquematizar o geometrizar el conocimiento.

Sin embargo, el empleo de metáforas durante la instrucción puede acarrear ciertos riesgos relacionados con el rigor matemático. El emisor que emplea la metáfora espera que el receptor traslade unas características, y no otras, desde uno de los ámbitos en el que ésta actúa al otro. La metáfora ejerce como una especie de “isomorfismo” entre dos ámbitos mediante el cual no todas las propiedades son transmisibles; el papel del profesor será delimitar y clarificar qué características pueden ser trasladadas.

1.5.3.2. Metáforas que describen creencias pedagógicas

En este apartado hablaremos sobre el papel que tienen las metáforas que describen las creencias pedagógicas de los profesores, y la influencia que poseen éstas en las decisiones y actuaciones de los mismos.

No se trata aquí de pensar en la metáfora como si consistiera en un fenómeno exclusivamente verbal, un rasgo sólo de lenguaje, cosa de palabras más que de pensamiento o de acción. Hablamos del efecto producido por la expresión metafórica, esto es, que ciertas acciones apropiadas en un contexto sean transferidas a otro a causa de la percepción engendrada por dicho uso metafórico.

Lakoff y Johnson (1986: 39) escriben:

> Nuestro sistema conceptual ordinario, en términos del cual pensamos y actuamos, es fundamentalmente de naturaleza metafórica […], nuestros conceptos estructuran lo que percibimos, cómo nos movemos en el mundo, la manera en que nos relacionamos con otras personas. Así que nuestro sistema conceptual desempeña un papel central en la definición de nuestras realidades cotidianas, […], la manera en que pensamos, lo que experimentamos y lo que hacemos cada día es en gran medida cosa de metáforas.

Dos han sido, básicamente, los estudios en los que hemos basado la construcción de nuestras ideas en este apartado. Uno de ellos lo realizó la Doctora Jakubowski (citado en Presmeg, 1997) para analizar las creencias que tenían, en relación con la enseñanza de las Matemáticas, los profesores que participaron en la investigación. Algunas de las metáforas implícitas en sus creencias sobre el papel que tendría el profesor en sus clases fueron:

- un/a profesor/a es un/a policía
- un/a profesor/a es un/a padre/madre
- un/a profesor/a es un/a actor/actriz
- un/a profesor/a es un/a jardinero/a

Estas metáforas, que sintetizan la idea que los profesores tenían sobre su función en las aulas, crearon un marco que influyó en sus decisiones y actuaciones posteriores en clase, y eso es lo que a nosotros nos parece relevante.

Desde nuestro punto de vista, si un profesor piensa que su papel con los estudiantes tiene que ser el de “un amigo”, sus acciones y su comportamiento en el aula estarán de acuerdo con esta idea, permitiendo que ocurran en clase situaciones y sucesos que no pasarían con un profesor que cree que su papel tiene que ser como el del “policía”, alguien que tiene que controlar y vigilar para que no se pierda el orden en el aula, lugar donde todo tiene que estar perfectamente controlado.

Cuando un profesor piensa que su papel es el de policía, de alguna forma está reflejando su afán por “controlar” todo lo que sucede en el aula; por lo tanto, manifiesta su perspectiva técnica sobre el currículum (Grundy, 1991). Su afán será, fundamentalmente, impartir el currículum que se prescribe, quedando el aprendizaje relegado, en este caso, a un segundo plano.

Con relación al papel maternal o fraternal, existe una idea paternalista del proceso de enseñanza; el nivel de exigencias será paralelo a las propias exigencias del alumnado, primando siempre el que el alumno esté a gusto y comportándose benévolamente con ellos, pudiendo no existir un nivel adecuado de exigencias cognitivas.

El segundo estudio que nos sirvió como punto de referencia es el realizado por Chapman (1997). Este estudio se centró en analizar cómo tres profesores de Matemáticas entendían la resolución de problemas matemáticos y de qué manera esta concepción pedagógica influía en su toma de decisiones en el aula. La investigación fue hecha siguiendo una metodología cualitativa que utilizó entrevistas a los profesores y observaciones de aula. Observaron que los participantes en el estudio construyeron, inconscientemente y de una manera personal, metáforas que fueron la base de su conceptualización de los problemas y que les sirvieron para dar sentido a su enseñanza. Además se constató que las metáforas que los profesores utilizaban expresaban sus creencias, ya fuera sobre la enseñanza en general o sobre la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en particular.

Por otra parte, la línea de investigación sobre "el pensamiento del profesor" contiene la idea de que las metáforas señalan el camino en el que los profesores piensan y actúan cuando enseñan (Chapman, 1997; Presmeg, 1997).

Investigar, explorar y reflexionar sobre las cuestiones que relacionan las metáforas con la enseñanza de la Matemática y con el pensamiento del profesor y su labor en el aula, podría ayudar a entender muchas de las acciones educativas y contribuir a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, que en definitiva, es nuestro objetivo final.

En el siguiente apartado desarrollaremos algunas cuestiones relacionadas con las metonimias; aunque éstas no han sido objeto explícito de esta investigación, hemos optado por incluirlas en nuestro marco teórico por su vinculación con la estructura del pensamiento matemático en conexión con las metáforas.

1.5.4. Metonimias

Otra figura literaria en la que se sustituye un término por otro y que puede contribuir en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es la metonimia. En Literatura, dos ejemplos familiares de metonimias son: *"las canas por la vejez*" o "*el laurel por la gloria*".

La palabra procede del griego *metonymia*, que significa "cambio de nombre". El *Diccionario de la Lengua Española* (Real Academia Española, 1992) define la metonimia como "tropo que consiste en designar una cosa con el nombre de otra tomando el efecto por la causa o viceversa, el autor por sus obras, el signo por la cosa significada, etc".

Lakoff (1987) define la metonimia como "una situación en la que alguna subcategoría o miembro o submodelo se usa (a menudo con un propósito limitado e inmediato) para comprender la categoría como un todo".

Siguiendo a Jakobson (citado en Marchese y Forradellas, 1986), podemos decir que la metonimia es la sustitución de un término por otro que presenta con el primero una relación de contigüidad. El tipo de contigüidad queda expresado a través de diferentes maneras: lo concreto por lo abstracto, el autor en lugar de la obra, el instrumento por la persona que lo utiliza.

Marchese y Forradellas (1986) ilustran con ejemplos, desde la Literatura, las distintas relaciones de contigüidad. Johnson llamó a estas metonimias "metonimia propia" (citado en Presmeg, 1997); en ellas, un atributo sobresaliente en una entidad representa a la otra entidad.

Un segundo tipo de metonimia es el que se conoce como "sinécdoque", figura semántica que consiste en la transferencia de significado de una palabra a otra, apoyándose en una relación de contigüidad. A diferencia de la "metonimia propia", donde la contigüidad es de tipo espacial, temporal o casual, en la "sinécdoque", la relación es de inclusión, es decir, uno de los miembros es de mayor o menor extensión (o forma parte del conjunto) que el otro. Por lo tanto, a través de la "sinécdoque" se representa:

- la parte por el todo
- el género por la especie
- el singular por el plural

En Matemáticas abundan los ejemplos de sinécdoque: el dibujo de un triángulo representa cualquier triángulo; una variable n representa cualquiera de los elementos de un conjunto de números, por ejemplo los naturales. Aunque en estos ejemplos, y dentro del contexto de la teoría del significado, coincidimos con Presmeg (1997) en que el significante (el dibujo de un triángulo o una letra del alfabeto tal como n) no es un elemento del conjunto que representa: sino que los elementos de los conjuntos son construcciones mentales (significados) y hace falta interpretarlos.

La metonimia está en el simbolismo matemático. Cualquier sentencia matemática donde un símbolo represente una clase, un principio o un concepto matemático es una sentencia que emplea la metonimia.

Jakobson (citado en Walkerdine, 1982; Presmeg, 1997) afirma la existencia de dos ejes básicos que caracterizan el lenguaje. Uno de ellos es el "eje metonímico" que comprende los procesos de combinación, contextualización, simbología y contigüidad (propios de la metonimia); el segundo es el "eje metáforico" que incluye los procesos de selección, sustitución y semejanza (propios de la metáfora).

Como ya hemos dicho, cualquier sentencia matemática donde un símbolo represente una clase o un concepto pertenece obviamente al eje metonímico, y, por tanto, existe una relación directa con la acepción, *bedeuten,* y que nos lleva directamente a la simbología.

Por otra parte, el eje metafórico facilita la construcción y comprensión de los conceptos y vendría a estar relacionada con la acepción *vorstellen* que alude a la imagen mental que interioriza las ideas.

Presmeg (1997) añade que estos dos ejes también son esenciales para comprender la estructura y el contexto de las Matemáticas. La combinación de un símbolo y su referente (el numeral 7 y la idea abstracta del número siete) pertenecen al eje metonímico. El eje metafórico se usa cuando se quiere dar significado a un concepto, idea o estructura matemáticos, y se recurre a un "vehículo" que pueda ser comparado a la estructura, idea o concepto matemáticos.

La imagen de una montaña o de un barranco son el vehículo de una metáfora que nos ayuda a dar sentido al concepto matemático de superficie, tenor de la misma, y en el que el símbolo del concepto: f`(x, y) = z, pertenece al eje metonímico.

De igual forma, los desniveles o inclinaciones de una montaña constituyen el vehículo de la metáfora que clarifican el concepto matemático de derivada direccional (de la función *f* en el punto (a,b), en la dirección del vector u), tenor de la metáfora, cuyo símbolo $D_u f[(a, b)]$, norma de u igual a 1, pertenece al eje metonímico y responde a la definición simbólica siguiente:

$$D_u f[(a,b)] = \lim_{l \to 0} \frac{f[(a,b) + l\,(u_1, u_2)] - f[(a,b)]}{l}$$

siempre que este límite exista.

Quizá la metáfora más clarificadora de esta situación sea la analogía entre gradiente y brújula; la brújula sería el vehículo y el tenor el gradiente, donde el símbolo: ***Ñ¦ = grad(¦)***, pertenece al eje metonímico.

1.5.5. A modo de síntesis

En las anteriores páginas hemos descrito y analizado cómo las metáforas, al igual que las metonimias, las imágenes y los simbolismos que las acompañan, son componentes esenciales en la representación de las construcciones matemáticas hechas por un individuo, ya que le ayudan a dar sentido a su construcción.

Hemos visto distintos ejemplos basados en la investigación de la Dra. Presmeg, en otros investigadores, y en nuestras propias reflexiones, en los que las metáforas y las metonimias se utilizan en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Es evidente que no se puede prever el uso que los estudiantes y profesores/as de Matemáticas harán de estas formas que se encuentran en áreas no literarias. Las metáforas y las metonimias son, la mayoría de las veces, de naturaleza muy privada y personal y, a menudo, únicamente tienen sentido para la persona que las construye. Sin embargo, cuando se utilizan en contextos académicos, como el aula, es necesario negociar el significado para facilitar la comunicación matemática.

Toda la Matemática está “llena” de metonimias ya que no existe ninguna rama de ella que prescinda de símbolos, y todo simbolismo matemático trabaja con significante y significado a través de diferentes relaciones en las que los símbolos o signos forman cadenas en niveles progresivos de abstracción.

Nos podemos preguntar: ¿qué beneficios pedagógicos resultarían si los profesores fueran conscientes de la existencia de las metáforas y metonimias en Matemáticas?

Uno de ellos sería el tener conciencia de algunos de los procesos que aparecen al aprender y enseñar Matemáticas. Además, los profesores pueden aumentar su comprensión de las dificultades que experimentan sus estudiantes en estos procesos. Muchas dificultades pueden surgir debido a la ambigüedad inherente en toda metáfora y toda metonimia, ya que la relación entre el vehículo y el tenor de la metáfora puede ser construida de manera desigual por diferentes personas.

Surge la necesidad de comunicar y negociar el significado de los conceptos e ideas matemáticos en ambientes de clase que incumban a todas las personas que forman parte de la comunidad escolar, empezando por el aula donde conviven un/a profesor/a y sus alumnos.

1.6. PLANTEAMIENTO DE NUESTRO ESTUDIO

1.6.1. Propósito y objetivos de este estudio

Aunque las imágenes no son una invención reciente y su estudio se ha realizado desde hace muchos años, su investigación en relación con el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática y por investigadores matemáticos está tomando nuevos empujes actualmente.

Florida State University (USA) es una de las universidades en el mundo que cuenta con un grupo de investigadores matemáticos dedicados al estudio de las imágenes y la relación de las mismas con la competencia en Matemáticas. Norma Presmeg, Grayson Wheatley, Down Brown, Anne Reynolds y Alejandro Solano, son algunos profesores que han estado y están produciendo trabajos sobre el tema.

Sus investigaciones coinciden en afirmar que existe una estrecha relación entre las imágenes mentales desarrolladas por los estudiantes y su competencia para resolver problemas matemáticos "no rutinarios".

Problemas matemáticos "no rutinarios" son problemas diferentes a los que se encuentran al final de cada capítulo en libros de texto usuales de Matemáticas, en la mayoría de los cuales, y con el fin de encontrar la solución, sólo se tiene que aplicar un procedimiento, ya sea enseñado por el profesor o aprendido a través de los libros; los problemas "no rutinarios" son aquéllos que proporcionan oportunidades para que el estudiante realice tareas reflexivas que lleven a construir ideas matemáticas comprensivas y con significado, en entornos de aula donde el aprender no se limita a la aplicación rutinaria de un algoritmo, en los que se estimulan diferentes formas de resolver problemas planteados, y donde el resultado correcto o incorrecto no es el único centro de atención.

En la búsqueda por mejorar y promover estrategias que sean efectivas en un aprendizaje matemático significativo es imperativo conocer con detenimiento lo que sucede en una clase de Matemáticas.

Algunas investigaciones en Educación Matemática tienen como propósito realizar estudios intensivos de estudiantes y profesores, localizando la atención en los medios por los cuales ambos construyen y transmiten conocimiento.

El propósito de nuestra investigación es construir explicaciones sobre el uso que los estudiantes hacen de las imágenes mentales cuando resuelven y dan sentido a problemas matemáticos, y analizar si el papel del profesor tiene proyección en esta actividad matemática de los alumnos.

Nuestra idea fue centrarnos en el aprendizaje de los estudiantes, más especificamente, en el estudio de sus imágenes mentales, pero añadimos la variable profesor; básicamente, porque queríamos averiguar si su papel puede contribuir o afectar al pensamiento de los estudiantes, si su método de enseñanza puede favorecer o no la construcción y utilización de imágenes en el estudiantado. Por otra parte, queremos revalidar una conclusión de los trabajos realizados en Florida State University (Tallahassee, USA) en la que se afirma que los alumnos que son buenos visualizadores o que tienen habilidad para transformar imágenes mentalmente son buenos resolutores frente a problemas matemáticos "no rutinarios".

Hemos señalado en páginas anteriores que nuestro propósito en este trabajo no es extender los encuentros hechos por la Ciencia Cognitiva en el ámbito de las representaciones internas, razón por la que el interés no estará en hacer un estudio con detenimiento de los sistemas de representación, sino en utilizar sus encuentros para responder a nuestras preguntas relacionadas fundamentalmente con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Es importante decir que este trabajo es de corte didáctico, más que cognitivo.

Nos hemos acercado a la cuestión tomando, fundamentalmente, los trabajos de Presmeg y de Wheatley, ya comentados en el apartado 1.4., como nuestro punto de partida.

Más específicamente, nuestra investigación se realizará de acuerdo con los siguientes interrogantes o cuestiones de estudio:

- *¿Cuáles son las creencias y concepciones que el profesorado tiene sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas?*
- *¿Qué tipo de tareas se llevan a cabo en clase que fomenten el uso de las imágenes mentales y de la visualización?*
- *¿Qué conciencia tienen los profesores de la diversidad de los alumnos y de la existencia de alumnos visualizadores?*
- *¿Cuál es el uso de las imágenes mentales que los estudiantes realizan cuando construyen Matemáticas? ¿ Qué tipo de imágenes suelen desarrollar?*
- *¿Qué relación existe entre su habilidad para construir imágenes y su competencia en Matemáticas?*
- *¿Qué relación existe entre el test WSAT (Wheatley Spatial Ability Test) y el "ser competente" en Matemáticas?*
- *¿Cuáles son las creencias pedagógicas que los estudiantes tienen sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas?*

1.6.2. Importancia del estudio

La principal finalidad de investigar en Educación Matemática es contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, ya sea en las escuelas o en las universidades. Entender cómo los estudiantes construyen las ideas matemáticas y cómo los profesores llevan a cabo el proceso de enseñanza es tan importante para los investigadores y educadores matemáticos como para los diseñadores del currículum.

Cuando el estudiante hace Matemáticas en el aula utiliza sus conocimientos previos, conjunto de experiencias, conocimientos y habilidades que le ayudan en el proceso de aprendizaje, y que le sirven como base para su acción.

Las Matemáticas no las entendemos como un conjunto de hechos y procedimientos aislados que el profesor transmite a los estudiantes durante la clase, sino como la actividad de construir relaciones, que sean significativas para la persona que está moviéndose en el ámbito matemático. Muchas de estas relaciones están basadas en imágenes visuales (Wheatley y Cobb, 1990). Adquiere sentido investigar las imágenes visuales y su papel en el pensamiento cuando las personas construyen las ideas matemáticas, o cuando resuelven problemas.

Skemp (1987) diferencia entre comprensión instrumental y relacional. En la comprensión instrumental, los estudiantes aprenden, de profesores para los que las Matemáticas son obvias, “reglas” que les son enseñadas sin darles un porqué, mientras que, en la comprensión relacional, los estudiantes cuando trabajan matemáticamente saben qué es lo qué están haciendo y por qué. Este trabajo tiene que ver principalmente con la comprensión relacional de las Matemáticas y con cómo las imágenes y la visualización se utilizan en esa comprensión.

Presmeg (1992) mantiene que pocos educadores matemáticos son conscientes de la existencia e importancia de diferentes tipos de imágenes en el razonamiento matemático.

Dreyfus (1991), en la conferencia plenaria que impartió en la reunión internacional anual sobre Educación Matemática (PME XV), llamó la atención sobre la necesidad de que los matemáticos y educadores matemáticos incrementen la importancia del razonamiento visual el cual tiene que estar al mismo nivel que el razonamiento analítico.

Hay en la actualidad un consenso en que la búsqueda de patrones y relaciones matemáticas por los estudiantes debe ser tratada como una acción matemática, en que la visualización sea considerada de igual rango que el cálculo y la simbolización (NCTM, 1989; Senechal, 1990); sin embargo, la educación visual es a menudo un área olvidada en la práctica educativa, con relación a la fuerza que tienen los contenidos numéricos y algebraicos.

En la propuesta de los Estándares Curriculares Americanos (NCTM, 1998) para el año 2000 se incentiva la visualización como parte fundamental de la comprensión de las relaciones en Geometría en dos y tres dimensiones, sobre todo, para estudiantes de grado medio.

Los anteriores, o muchos otros que han sido citados con anterioridad, son algunos investigadores y grupos que defienden la importancia de las imágenes y la visualización en la actividad matemática.

Hace falta realizar estudios de corte cualitativo, que profundicen en la actividad matemática, estudios que no pretendan generalizar, sino explicar con profundidad y amplitud distintas situaciones. Estos estudios ayudarán a entender mejor los procesos de pensamiento en los estudiantes y profesores, lo cual servirá en última instancia a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Nuestra investigación pretende enriquecer el estudio en nuestro país de las imágenes mentales y su relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y al mismo tiempo quiere establecer comparaciones con los estudios realizados en Florida State University citados anteriormente.

Nuestro deseo con este trabajo es colaborar con todas aquellas personas y grupos que, han desarrollado o están realizando un esfuerzo por mejorar la enseñanza y por consiguiente el aprendizaje de la Matemática en nuestras escuelas.

CAPÍTULO 2:

METODOLOGÍA

2. METODOLOGÍA

> Básicamente, el objeto de la investigación en el ámbito educativo, se centra en descubrir lo que acontece cotidianamente en las aulas, aportando datos lo más significativos posible, los cuales, después de ser interpretados, sirvan para comprender e intervenir lo más adecuadamente posible en las clases y siempre con el fin de contribuir a la mejora de su enseñanza y aprendizaje.[1]
>
> GOETZ Y LECOMPTE

2.1. INTRODUCCIÓN

Toda investigación, en términos generales, constituye un proceso de indagación de un hecho o conjunto de hechos, en el cual, mediante la utilización de técnicas y procedimientos específicos se persigue el conocimiento. Parece sencillo, pero es lógico pensar que la particularidad de cada caso conduce a explicar cuáles son las técnicas y procedimientos adecuados para que dicha investigación conduzca a plantear las categorías, concepciones y relaciones que creemos nos pueden permitir, en el proceso de conocimiento, alcanzar un determinado "saber".

Es preciso darse cuenta de que la obtención de un determinado conocimiento guarda relación con la metodología utilizada. Su elección para este estudio ha estado condicionada por sus objetivos, porque somos conscientes de que los métodos de investigación deben estar en relación con los objetivos que se quieren alcanzar y no a la inversa. Nuestra meta era observar, conocer y analizar la interpretación que los protagonistas de este trabajo - profesorado y alumnado - daban a los conocimientos matemáticos, centralizando nuestra investigación en el uso que hacían de las imágenes visuales y de la visualización en su actividad matemática.

[1] Cita extraída de Goetz y LeCompte (1988: 14).

Nuestra idea era, en primer lugar, recoger la información a través de la observación directa de las clases de Matemáticas y de las entrevistas; en segundo lugar, siguiendo a Ruiz Olabuénaga (1996), no queríamos partir de una teoría y unas hipótesis perfectamente elaboradas y precisas, ya que para nosotros era importante abordar el problema desde la realidad escolar, más que desde nuestras nociones preconcebidas; preferíamos utilizar los datos para reconstruir un mundo cuya sistematización y teorización resultaba difícil. En tercer lugar, nuestra investigación utilizaría prioritariamente el lenguaje de los conceptos y las metáforas más que el de los números y el de los tests estadísticos; las narraciones y descripciones, antes que los algoritmos, las tablas y las fórmulas estadísticas. Y, finalmente, nuestra investigación pretendía captar todo el contenido de experiencias y significados que aparecen en un número reducido de casos, en lugar de intentar generalizar, a partir de una pequeña muestra cualquier elemento particular de la sociedad, a un colectivo más extenso.

Las razones que acabamos de exponer nos llevaron a elegir el estudio de casos para nuestro trabajo: analizar y reflexionar acerca de cómo el alumnado usa el pensamiento visual en sus construcciones matemáticas; creímos conveniente servirnos de una metodología cualitativa que nos proporcionase información y, al mismo tiempo, nos hiciera comprender, con profundidad, la práctica de una maestra y de cómo esta práctica influye en el aprendizaje de su alumnado.

Aunque uno de los focos de nuestra investigación, fundamentalmente, tiene que ver con las imágenes mentales (construcciones internas), serán la observación y el análisis del trabajo de los estudiantes (las representaciones externas que hacen cuando un alumno habla y escribe mientras resuelve un problema), lo que nos permitirá dar razón e interpretar los procesos de pensamiento y los caminos en que "nuestro" alumnado da sentido a los conceptos e ideas matemáticas, siguiendo nuestra propia manera de dar sentido a esas acciones.

Se ha de suponer, para la comprensión de los procesos cognitivos, que existe relación entre las representaciones externas y las internas, de manera que, cuando un estudiante utiliza una representación externa para comunicar una de sus ideas, esta representación externa revela algo de cómo el estudiante está construyendo esa idea en su mente; en definitiva, de cómo está aprendiendo. Ya que las construcciones mentales no son observables directamente, las discusiones y conclusiones acerca de cómo las ideas se representan internamente en la mente de las personas, estarán basadas en altos grados de inferencias.

En el proceso de nuestra investigación se desarrolló una estrecha relación con cada participante en el estudio con el propósito de saber, por un lado, cómo el profesorado hace su trabajo, cómo relaciona sus pensamientos con sus acciones, qué importancia da al pensamiento visual; y, por otro, cómo su alumnado hace uso de estrategias visuales en las tareas matemáticas.

Para poder llevar a cabo lo anteriormente descrito, optamos por ser parte del "mundo escolar", vivir durante las horas del horario académico con las personas protagonistas de nuestro estudio, experimentando, a su lado, el fruto de sus actividades matemáticas. Nuestra idea era que al integrarnos en el mundo escolar, empezaríamos a vislumbrar aspectos de este ámbito que no se nos ocurrirían "a priori" y que podrían ser importantes.

La elección de una metodología cualitativa fue crucial en nuestro estudio, ya que nos permitió introducir nuevas estrategias, modificando, redefiniendo y ampliando algunas de las inicialmente adoptadas a medida que nuestra investigación iba avanzando, con el fin de reportar información acerca de las acciones, percepciones y creencias matemáticas de nuestros casos de estudio, en un determinado entorno escolar y sociocultural.

El análisis fue esencialmente hecho desde un paradigma interpretativo, bajo el cual el objetivo de una investigación es indagar cómo los distintos actores humanos construyen y reconstruyen la realidad social mediante la interacción con los restantes miembros de su comunidad; y, para ello, será indispensable tener en cuenta la interpretación que ellos mismos realizan de los porqués y paraqués de sus acciones y de la situación en general, idea que coincidía con nuestras aspiraciones, sin olvidar que las percepciones de un individuo resultan de su propia interpretación de la experiencia, objeto de nuestro estudio.

> Básicamente, el objeto de la investigación en el ámbito educativo, se centra en descubrir lo que acontece cotidianamente en las aulas, aportando datos lo más significativos posible, los cuales, después de ser interpretados, sirvan para comprender e intervenir lo más adecuadamente posible en las clases y siempre con el fin de contribuir a la mejora de su enseñanza y aprendizaje (Goetz y LeCompte, 1988: 14).

2.2. ELECCIÓN DE LOS CASOS

2.2.1. La maestra

La maestra fue seleccionada de la siguiente manera: Durante el curso académico 1992-93 se impartió un seminario de Didáctica de las Matemáticas, dirigido a los maestros de escuelas unitarias de la zona norte de la isla de Tenerife. Fue organizado por la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias y tuvo una duración de 32 horas. Durante el mismo se ofreció la oportunidad de contactar con un grupo de profesores que estaba interesado en mejorar la enseñanza / aprendizaje de las matemáticas en sus clases. Cuando terminó el curso se siguió manteniendo contactos profesionales con algunos de estos profesores.

Uno de ellos, concretamente la coordinadora del curso, nos pareció una persona interesante por su preocupación por la enseñanza / aprendizaje de las Matemáticas y su disposición a la innovación curricular en la fase interactiva en el aula, o, lo que es lo mismo, en la práctica. Pensamos que lo que sucediese en sus clases podía ser relevante para nuestro estudio.

Una vez que contactamos con ella, le informamos de nuestro proyecto y se le explicó que, con el fin de llevarlo a cabo, la investigadora de este trabajo asistiría a sus clases como observadora, tomaría notas durante el desarrollo de las mismas y le haría algunas entrevistas para recoger información acerca de sus ideas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje matemático. Desde el primer momento la maestra se mostró dispuesta a colaborar en todo lo que fuese necesario y no ofreció resistencia a que una persona extraña entrase en su clase, lo que es de valorar positivamente en una cultura académica como la nuestra, donde existe cierto recelo a que otras personas observen y juzguen el trabajo que diariamente realizamos.

2.2.2. El colegio y el barrio

Como es lógico la elección del centro estuvo condicionada por la de la maestra. El centro, en el que trabajaba la maestra en el momento de la investigación, se encuentra situado en una zona rural muy deprimida, desde un punto de vista social y cultural: La Corujera, uno de los núcleos de vecindad del municipio de Santa Úrsula, que se encuentra situado en la vertiente septentrional de la isla de Tenerife.

Las actividades desarrolladas por la población de Santa Úrsula, se basan fundamentalmente en la agricultura, la construcción y el turismo. Un gran porcentaje de la población, tanto masculina como femenina, de este municipio trabaja en el sector hotelero del Puerto de la Cruz.

Estos breves datos nos pueden dar una idea del nivel sociocultural de la mayoría de los alumnos que asisten a este colegio, quienes, normalmente, sólo terminan los estudios primarios, necesarios para incorporarse al mundo laboral.

El centro escolar consta de dos edificios separados por la carretera general. En uno de ellos están las aulas donde se imparten las enseñanzas relativas al antiguo Preescolar; en el otro, las de primera y segunda etapa de EGB, actualmente Primaria y Secundaria Obligatoria. Debido a la fuerte pendiente del terreno, el edificio se adapta a éste, mediante escalonamientos sucesivos que configuran su volumetría. Se accede al mismo mediante dos pasarelas superpuestas que se acomodan a los niveles existentes y que desembocan en un patio central, alrededor del cual se encuentran situadas las aulas de la segunda etapa (actualmente, enseñanza secundaria obligatoria).

En el momento de la investigación cada profesor tenía su aula, siendo los alumnos los que se desplazaban entre clase y clase. El aula donde impartía las clases de matemáticas la maestra elegida tenía los pupitres distribuidos en forma de "U", alrededor de la mesa de la maestra, distribución que nos parece pedagógicamente acertada, ya que permite a los estudiantes verse entre ellos cuando hablan. Era un aula sencilla, con una gran luminosidad, destacando una gran pizarra y un enorme armario donde la maestra guardaba el material y los trabajos de los estudiantes.

2.2.3. Los estudiantes

Es obvio, asimismo, que una vez seleccionada la maestra, deberíamos inevitablemente elegir a algunos de sus alumnos, concretamente optamos por los de octavo de E.G.B., ya que queríamos aproximarnos a las edades estudiadas por algunos de los investigadores de Florida State University, con los que quien suscribe este trabajo tuvo contacto durante su estancia en USA. Nuestra idea era tomar sus resultados como referencia y hacer un estudio comparativo, si fuese posible.

El grupo de octavo de EGB estaba compuesto de 6 niños y 12 niñas, de edades comprendidas entre los 13 y los 16 años. De entre ellos se realizó una selección a partir del test WSAT (Wheatley Spatial Ability Test), que permitió elegir a los estudiantes con los que trabajaríamos más concretamente y a los que les realizaríamos las entrevistas clínicas. Describiremos y analizaremos dicho test posteriormente (apartado 2.5.1).

2.3. INTERACCIÓN SOCIAL EN EL PROCESO DE RECOGIDA DE LA INFORMACIÓN

La recogida de información para esta investigación, básicamente cualitativa, ocurrió en un contexto social determinado, donde la presencia de la investigadora tuvo un determinado efecto en la recogida de los datos, que consideramos interesante relatar.

Este efecto fue particularmente significativo en las entrevistas clínicas con los estudiantes, realizadas en el Centro de estudios habitual. Cada estudiante acudió a las entrevistas con un conjunto particular de ideas, creencias, experiencias, conocimientos y vivencias, no sólo hacia las matemáticas sino hacia el aprendizaje, la enseñanza y la vida en general. A lo largo de las entrevistas las creencias de la investigadora, acerca de la visualización integrada en las tareas matemáticas, fueron cambiando. Los estudiantes, frecuentemente, encontraron soluciones a las tareas, que la investigadora no había visto antes. Tal situación, sin embargo, no enturbió sino que realzó el proceso de las entrevistas. Dieron una nueva perspectiva de la construcción de relaciones matemáticas y es importante tenerla en cuenta a la hora de dar explicaciones del comportamiento de los estudiantes.

Del mismo modo, las entrevistas con la maestra y los contactos con otros profesores dieron algunas ideas que, de otra manera, no se hubiesen conseguido, a pesar de que, muchas veces, lo principal para ellos era complacer o hablar de lo que pensaban que el investigador quería oír. Estos contactos nos ayudaron a entender algunas de las preocupaciones de los profesores, que, aunque académicas, con frecuencia no están relacionadas directamente con la instrucción, pero influyen en su actuación en el aula. Nos referimos, concretamente, a las consecuencias de la implantación de la LOGSE en las aulas, que en esos días era la preocupación general. Queremos destacar, en general, la colaboración de muchos profesores, quienes en todo momento facilitaron nuestro trabajo. También la presencia en las clases de la investigadora, durante las observaciones, tuvo algunas repercusiones. Los estudiantes eran conscientes de ello y, en algunos casos, pedían ayuda en las tareas. Ayudar a estos estudiantes nos permitió construir ideas acerca de cómo ellos "aprenden" y cómo ven la matemática de la escuela.

2.4. INSTRUMENTOS UTILIZADOS EN LA RECOGIDA DE INFORMACIÓN

La siguiente tabla muestra los instrumentos que fueron utilizados en esta investigación así como la realización o desarrollo de los mismos:

INSTRUMENTOS	DESARROLLO
Test WSAT	-pasado el primer día de contacto con los alumnos
Observaciones del desarrollo de las clases de Matemáticas	- registradas en un cuaderno de campo durante el desarrollo de las mismas; transcripción inmediata
Documentos de planificación de la instrucción	- entregados por la maestra durante la recogida de información
Entrevistas formales a la maestra	- planificadas - grabadas en casete; transcripción inmediata
Entrevistas informales a la maestra	- no planificadas - registradas en un cuaderno de campo en el momento de realizarse o más tarde
Observaciones durante la asistencia a reuniones de evaluación y otras reuniones de profesores	- registradas en un cuaderno de campo después de las observaciones
Entrevistas clínicas a los estudiantes	- planificadas - grabadas en casete y en vídeo; transcripción inmediata
Exámenes	- entregados por la maestra
Cuadernos de los estudiantes	- entregados por los estudiantes

2.5. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS

Describiremos y analizaremos, ahora con más extensión, cada uno de los instrumentos usados con el fin de explicar, con más detalle, el proceso total que se siguió para obtener los datos.

Hay que resaltar que el análisis de los datos recogidos a través de los diferentes instrumentos se realizó, en general, en dos momentos diferentes:

Un primer análisis, que llamaríamos "informal", surgió durante la recogida de la información. Como fruto de las reflexiones diarias de la investigadora, se elaboró un primer listado de ideas, conjeturas, intuiciones y preguntas sobre lo que se estaba produciendo en la escuela. El análisis más "formal" se hizo una vez que se terminó el trabajo de campo y se transcribieron las observaciones y las entrevistas, momento en que se profundizó y estudió con detenimiento la información.

Hemos utilizado el método de triangulación en el que se reúnen observaciones e informes sobre una misma situación (o sobre algunos aspectos de la misma) efectuados desde diversos ángulos o perspectivas para compararlos y contrastarlos.

2.5.1. Test WSAT

El instrumento para seleccionar a los estudiantes que serían los casos de estudio, fue el test WSAT. Este test se eligió de entre los diferentes que existen para medir la habilidad espacial de los estudiantes porque era uno de los tests utilizados en los estudios realizados en Florida State University (U.S.A.) que queríamos tomar como referencia (Wheatley, Brown y Solano, 1994; Brown y Wheatley, 1989, 1990; Brown y Presmeg, 1993; Brown, 1993; Solano y Presmeg, 1995).

El test WSAT diseñado por el profesor Grayson Wheatley (1978), es un test de papel y lápiz que consta de 100 ítems y cuyo fin es medir la habilidad espacial de los estudiantes para rotar figuras en dos dimensiones. Para su realización se da a los estudiantes una figura que aparece en la parte izquierda de la propia página del test. Ellos deben decidir, entonces, si esta figura coincidirá con cada una de las otras cinco que aparecen en la página, después de haberla girado en el plano.

2.5.2. Administración del test WSAT

El test se aplicó al grupo de octavo de E.G.B. elegido el primer día que la investigadora asistió al colegio. Unos días antes la maestra había comentado a los estudiantes que una profesora de la Universidad iba a hacer una investigación en la clase y les explicó brevemente el objetivo de la misma: básicamente ayudar a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de una asignatura, tan difícil para ellos, como las matemáticas.

Se entregó a cada uno de los estudiantes un ejemplar del test, y se les pidió que no empezaran a hacerlo hasta que se les indicase. Se leyó a toda la clase la primera hoja del test, que contenía las instrucciones, y se les solicitó que resolvieran los ejemplos que aparecían en la misma hoja. Después de que se tuvo la certeza de que todos los estudiantes contestaban adecuadamente a los ejemplos, se les indicó que pasasen a la hoja siguiente y empezasen a hacerlo.

La duración de realización del test fue de 8 minutos estrictos. Se limitó el tiempo con la finalidad de que los estudiantes utilizasen estrategias visuales más que analíticas. Después de los 8 minutos se les pidió a los estudiantes que volviesen a la hoja de instrucciones y se recogieron los tests lo más rápidamente posible. Estas son las instrucciones de administración standard de este test.

2.5.3. Análisis del WSAT

Los test realizados se analizaron a mano, ya que eran solamente 18 estudiantes, utilizando la fórmula:

puntuación obtenida = nº de respuestas correctas-(1/2) nº de respuestas incorrectas

Dado que sólo hay dos posibles respuestas para cada ítem, este procedimiento de puntuación contiene la correspondiente sanción para corregir la “adivinación”. La puntuación obtenida por esta fórmula está en función de las respuestas correctas, y los ítems no contestados no figuran directamente en su resultado.

La siguiente tabla muestra las puntuaciones obtenidas en el WSAT por toda la clase, siguiendo el análisis anterior:

Nombre	Preguntas resueltas	Preguntas correctas	Preguntas incorrectas	Puntuación WSAT	Orden según el análisis
Alumno/a 1	100	95	5	92.5	1º
Alumno/a 2	95	93	2	92	2º
Alumno/a 3	100	86	14	79	3º
Alumno/a 4	77	73	4	71	4º
Alumno/a 5	65	60	5	57.5	5º
Alumno/a 6	79	63	16	55	6º
Alumno/a 7	59	54	5	51.5	7º
Alumno/a 8	60	54	6	51	8º
Alumno/a 9	56	52	4	50	9º
Alumno/a 10	75	58	17	49.5	10º
Alumno/a 11	65	53	12	47	11º
Alumno/a 12	65	50	15	42.5	12º
Alumno/a 13	69	51	18	42	13º
Alumno/a 14	68	48	20	38	14º
Alumno/a 15	67	47	20	37	15º
Alumno/a 16	46	37	9	32.5	16º
Alumno/a 17	70	44	26	31	17º
Alumno/a 18	65	24	41	3.5	18º

Una vez que se pasó el test y los datos fueron analizados, elegimos seis estudiantes para hacer el "estudio de casos", estudio cualitativo en el que examinamos con detenimiento si hacían uso o no de sus imágenes en la actividad matemática, y la relación de las imágenes con su competencia en Matemáticas.

Se siguieron dos criterios para seleccionar a los estudiantes: uno de ellos estuvo basado en las puntuaciones del test, y el otro en el hecho de que hubiera el mismo número de chicas que de chicos, con el fin de examinar si el género tenía alguna influencia en nuestras preguntas de investigación.

Los resultados fueron los siguientes:

- un estudiante obtuvo la mejor puntuación en el test y lo realizó en menos tiempo de lo estipulado: Alumno 1, primero en el "ranking", y al que llamaremos Noel.

- dos estudiantes obtuvieron buenos resultados: alumno 2 y alumna 3, segundo y tercera, respectivamente, y que, en nuestra investigación, se llamaran Kevin y Laura.

- tres obtuvieron bajos resultados: alumna 16, alumna 17 y alumno 18, quienes ocuparon los lugares dieciséis, diecisiete y dieciocho, últimos del ranking y a quienes llamaremos Noemí, Ani y Darío.

Introdujimos, a sugerencia de la maestra, un alumno más que sería nuestro caso número siete, ya que, según la maestra, “su mejor alumno” no podía estar excluido del estudio, propuesta que fue acertada, como analizaremos posteriormente, pues este alumno (Raúl, número trece según el ranking) aportó una gran riqueza a nuestra investigación.

Después de hablar con los alumnos seleccionados (quienes en todo momento estuvieron “encantados” con la idea de participar en la investigación) y, con el fin de hacer las cosas según los requisitos legales, se mantuvo una entrevista con sus padres, para la cual se aprovechó un acto social efectuado con el fin de recaudar fondos para el viaje de fin de curso de “nuestros” alumnos, donde se les explicó brevemente el objetivo de la investigación, y se les pidió permiso para realizarla con sus hijos, permiso que se les solicitó por escrito, según el modelo que figura en el anexo.

Después de tres entrevistas, decidimos eliminar del estudio a cuatro estudiantes (tres chicas y un chico). La razón de excluir a una de las chicas fue, a pesar de ser una persona extrovertida y elocuente lo que facilitó el hacerle las entrevistas, su poca preparación y formación en Matemáticas, además de otros problemas que la catalogaban como alumna de Educación Especial, pues tales causas, aparte de dificultar la averiguación del papel de las imágenes en su quehacer matemático, nos impidió obtener información relevante que nos pudiese enriquecer en nuestro trabajo.

Otra de las alumnas fue eliminada porque estaba en un momento de su vida en que no le interesaban los estudios, y porque en las entrevistas no mostraba el mínimo interés.

Los otros dos estudiantes eran personas muy introvertidas y fue difícil y, en algunos casos, imposible, hacerles una entrevista por más que se intentó.

Consideramos que quizá en otro tipo de estudios, donde primen aspectos sociológicos y psicológicos más que los matemáticos, podrían haber sido estudiantes interesantes. En el nuestro pareció inadecuado seguir adelante con ellos, por lo que tuvieron que ser eliminados. Queremos resaltar que en estos estudiantes eliminados se produjo una evolución después de las entrevistas. La maestra nos comentó, en la entrevista que le hicimos a final de curso, refiriéndose a uno de ellos:

> *"Noemí es el prototipo de una niña que ha cambiado[...], era una persona que no intervenía, [...] le costaba muchísimo comprender cualquier tipo de explicación [...] el curso pasado ya tenía una mejoría pero no era tan apreciable como este curso, yo creo que a ella le ha influido bastante lo de las entrevistas, se le nota un cambio tremendo, ya es capaz de razonar un problema, de utilizar conocimientos anteriores, antes no sabía distinguir entre lo que el problema le daba, los datos del problema y lo que el problema pedía".*

Resumiendo, la investigación se realizó con cuatro casos de estudio:

- La maestra Rocío
- Tres estudiantes:
  - Noel, obtuvo la mejor puntuación en el WSAT.
  - Kevin, segunda puntuación más alta en el WSAT.
  - Raúl, el "mejor alumno", según la maestra.

2.6. OBSERVACIONES DEL DESARROLLO DE LAS CLASES DE MATEMÁTICAS

2.6.1. Introducción

> El trabajo de campo en la enseñanza, a través de su inherente carácter reflexivo, ayuda a los investigadores y a los docentes a hacer que lo familiar se vuelva extraño e interesante nuevamente. Lo común se vuelve problemático. Lo que está sucediendo puede hacerse visible y se puede documentar sistemáticamente" (Wittrock, 1989: 200).

Las observaciones se llevaron a cabo durante el curso escolar académico 1994-1995, después de hablar con la maestra, quien se lo comunicó a los alumnos, y con el permiso de la directora del colegio. Se comenzaron las observaciones del desarrollo de las clases de Matemáticas durante el mes de noviembre de 1994.

De noviembre a febrero la investigadora asistió a las clases de Matemáticas, cuatro veces a la semana. A partir de marzo tomó contacto con el colegio dos veces a la semana, cada quince días: una vez para observar las clases de Matemáticas y otro para realizar las entrevistas a los estudiantes seleccionados.

Conviene indicar que la mayoría de los días la investigadora realizó la jornada escolar completa (desde las 9 hasta las 16 horas), compartiendo con los maestros y los estudiantes muchos momentos, lo que hizo que llegara a ser "una más" del Centro. Esto favoreció el trabajo, ya que le permitió "moverse" con naturalidad y recoger información en un clima realmente cordial.

Un compromiso prolongado del investigador con los participantes en el estudio es un aspecto que realza la credibilidad del análisis (Cobb y Whitenack, 1996). Creemos que la estancia continuada en el Centro ha sido importante en nuestra investigación, ya que nos ha ayudado a entender algunas de las acciones de la maestra y de los estudiantes entrevistados**.**

Comentaremos que el interés manifestado por todos los estudiantes de la clase en participar y colaborar en la investigación movió a la investigadora a diseñar algunas actividades matemáticas que puso en práctica con todo el grupo.

Conviene expresar que cuando la investigadora entró en la clase hubo una cierta expectación por parte del alumnado, y un poco de nerviosismo por parte de la maestra, situación explicable, por la presencia de una persona externa al centro en sus clases de matemáticas. Sin embargo, poco a poco, y a medida que las observaciones progresaban, su presencia fue notándose menos, hasta llegar a un momento en que su presencia era la de un sujeto "invisible". Las clases se desarrollaron normalmente y sólo en contadas ocasiones la maestra requirió la participación de la investigadora, pidiendo su opinión sobre algún contenido de la clase, o un alumno próximo le pidió ayuda para resolver algún problema.

Los registros de las observaciones se realizaron en un cuaderno de campo en el momento de las clases. Se procuraba prestar atención a los siguientes aspectos:

1. Qué se enseña: Contenidos que se trabajan; habilidades que se desarrollan; actitudes que se promueven.
2. Temporalización: Criterios de distribución del tiempo.
3. Actividades realizadas: Objetivos de las mismas.
4. Recursos utilizados: Tipos de material; quién los aporta; objetivos.
5. Actuación del alumnado: Autonomía e implicación en la tarea.
6. Actuación del profesor: Organización de la tarea.
7. Utilización de gráficos, diagramas, dibujos, referencias a conceptos anteriormente construidos.

Todos los acontecimientos ocurridos en cada sesión de clase y que habían sido anotados el mismo día, se transcribían inmediatamente, procurando relatar los hechos con el mayor grado de fidelidad posible.

Aunque no era objetivo primordial de la investigación, las observaciones de clase permitieron a la investigadora, entre otras cosas, familiarizarse con el contexto, entendiendo lo que se hacía en clase; observar la metodología utilizada, la participación y reacciones de los estudiantes; reconocer factores que estaban relacionados con la instrucción, y ser consciente de las creencias y actitudes de los alumnos y la maestra, en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

> Observar las aulas, mientras en ella trabajan profesores y alumnos permite comprobar que constituyen un contexto sumamente complejo donde suceden muchos acontecimientos al mismo tiempo, a veces imprevisibles, y a un ritmo tal, que el profesorado se enfrenta a ellos casi sin reflexionar (Güemes, 1994: 90).

2.6.2. Análisis de las observaciones de aula

Las investigaciones sobre lo que sucede en las aulas no podrían realizarse si no contásemos con un modelo sustentado en una estructura de trabajo sistemático. Por eso hemos seguido los trabajos realizados por Doyle y Carter (1984), los cuales ofrecen un modelo de análisis que permite abordar el trabajo con cierto rigor.

El modelo trata de examinar *"la estructura del trabajo académico"* en las sesiones de clase desarrolladas por la maestra y sus alumnos, cuya componente central es el término de "tarea", concepto que se usa para designar estructuras situacionales que organizan y dirigen el pensamiento y la acción de los participantes en el aula, y que pueden ser diferenciadas en términos de categorías generales, según las operaciones cognitivas que se les proponga a los/as alumnos/as para que puedan cumplirlas:

1.- <u>tareas de memoria</u>: en las que al alumnado se le exige reconocer o reproducir información previamente presentada, (por ejemplo, memorizar las tablas de multiplicar).

2.- <u>tareas de rutinas o de procedimientos</u>: en las que se demanda la aplicación de una fórmula o un algoritmo, para generar respuestas.

3.- <u>tareas de comprensión o entendimiento:</u> en las que se espera que los/as alumnos/as transformen versiones de información previamente presentadas y apliquen procedimientos a nuevos problemas, o decidan sobre algunos procedimientos que se pueden aplicar a un problema en particular.

4.- <u>tareas de opinión:</u> en las que el alumnado establece preferencias sobre algo.

Es importante tener en cuenta la distinción entre las distintas tareas por la demanda que exige su cumplimentación; la forma de pensar de un alumno acerca de una cierta asignatura está condicionada por las tareas que se le pide que realice en dicha asignatura: si se le manda reproducir la información que ha recibido durante la instrucción producirá resultados diferentes que si se le requiere comprender la información y sacar conclusiones.

Los conocimientos previos que el alumno tiene del concepto, la experiencia, la motivación y actitud hacia el contenido, el medio social y cultural al que el alumno pertenece son algunos de los factores que influyen en el aprendizaje.

Sin embargo, en el contexto de clase, lo que determina cómo los alumnos piensan, entienden y encuentran sentido a los conceptos matemáticos, es el trabajo que los estudiantes realizan, que en gran medida está en función de las tareas que el profesor propone. El tipo de trabajo "valorado" por el profesor, en cierta manera, comunica al estudiante en qué deberían "gastar" ellos su tiempo y energías intelectuales. Por esta razón, creemos interesante comprender los factores de clase que dan forma al trabajo del estudiante; un análisis y estudio de las tareas que se realizan enriquecerá nuestra comprensión acerca de cómo los estudiantes y los profesores piensan y entienden la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El análisis de las observaciones se basó en:

a) Identificación de las tareas y sucesos en el desarrollo de las clases.

b) Descripción de las tareas

b.1) Temporalización: tiempo invertido en la organización, desarrollo y finalización de la tarea.

b.2) Ayudas y recursos: orientaciones que el profesorado ofrece al alumnado para el desarrollo de la tarea. Medios y materiales utilizados.

b.3) Evaluación: dificultad de la tarea. Estrategias, técnicas, o instrumentos utilizados para la evaluación. Papel del profesorado y del alumnado en la evaluación de la tarea.

b.4) Relación educativa: relaciones profesorado-alumnado y entre el alumnado.

c) Patrón general del desarrollo de la enseñanza: macroestrategía o modelo que el profesorado utiliza para la enseñanza de un tema, tópico, lección, etc., completos.

2.7. ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS A LA MAESTRA

Con el fin de, por una parte, contrastar la observación obtenida mediante las observaciones de aula, y, por otra, elaborar, enriquecer y completar una información más "rica" sobre las creencias y concepciones de la maestra creímos conveniente realizar entrevistas semi-estructuradas.

> "La entrevista semi-estructurada es una forma o modalidad de realizar entrevistas en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación" (Güemes, 1994: 71).

A la maestra se le realizaron dos entrevistas, de aproximadamente una hora de duración, que se llevaron a cabo en el centro escolar, concretamente en el "aula" de la maestra y una vez que finalizaron las clases con los estudiantes. Este hecho influyó positivamente en la obtención de la información, ya que se disponía de un lugar que favorecía la privacidad de la entrevista y además, la maestra se encontraba tranquila y sin prisas al no tener obligaciones docentes.

El objetivo de las entrevistas era describir el pensamiento de la maestra, para lo que era necesario encontrar información sobre los siguientes aspectos, que constituirán nuestras categorías de análisis:

1º.- Visión general sobre la enseñanza y el aprendizaje

2º.- Concepción de las Matemáticas

3º.- Desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas en el aula

4º.- Desarrollo profesional

5º.- Contexto de trabajo

6º.- Planificación de la instrucción

7º.- Creencias sobre el papel de las imágenes mentales en la actividad matemática

8º.- Concepción de la maestra sobre el aprendizaje matemático; en particular, su opinión sobre la actuación matemática de los estudiantes entrevistados.

2.7.1. El guión de las entrevistas

El guión es un elemento esencial en el diseño de las entrevistas. Podríamos definirlo como un esquema formado por los puntos a tratar, los cuales se elaboraron teniendo en cuenta los objetivos de nuestra investigación que se concretaron en el capítulo anterior.

Cabe decir que el guión de nuestras entrevistas no fue cerrado ya que en el transcurso de las mismas incorporamos algunas preguntas, no previstas de antemano, que surgieron en el desarrollo y ejecución de la investigación. Tampoco seguimos rigurosamente el orden previsto en las preguntas que siempre se ajustaron a la dinámica de la conversación.

El guión que elaboramos lo dividimos en cinco partes diferenciadas que desarrollaremos a continuación:

2.7.1.A. Trayectoria profesional

1.- ¿Qué te hizo estudiar Magisterio?

2.- ¿Me podrías hablar sobre tus años de experiencia, centros y niveles en los que has trabajado, niveles en los que has impartido matemáticas?

3.- Coméntame sobre tu paso por la Educación Compensatoria ¿Por qué la dejaste? ¿Te costó volver?

4.- ¿En qué niveles has disfrutado más? ¿Dónde te has sentido mejor?

5.- Te he oído que te gusta trabajar en 2ª Etapa, ¿Por qué?, ¿Qué asignaturas de 2ª Etapa?

6.- Si tú pudieses elegir una carrera de nuevo ¿qué escogerías?

2.7.1.B. Creencias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

1.- Muchos profesores creen que enseñar Matemáticas es difícil, ¿tú qué opinas?

2.- ¿Es para ti difícil enseñar Matemáticas?

3.- ¿En qué contexto crees que es más difícil?

4.- ¿La experiencia te ha hecho cambiar las ideas que tenías sobre la enseñanza de las Matemáticas o te ha hecho reafirmarte en ellas?

5.- Para muchos alumnos las Matemáticas es una asignatura difícil, ¿en qué crees que pueda radicar esa dificultad?

6.- ¿Has pensado alguna vez en cómo pueden aprender "mejor" los alumnos?

7.- ¿Qué experiencias, qué evidencias más sobresalientes pueden avalar tus ideas?

2.7.1.C. Sobre el curso octavo

1.- Háblame de este curso, de tu planificación ¿Tienes planificación? ¿Con quién la haces? ¿En qué te basas para planificar? ¿Cómo concibes la planificación realizada con otros compañeros?

2.- ¿Cómo entiendes la colaboración entre los compañeros?

3.- ¿Cómo entiendes el trabajo en grupo?

3.- ¿Qué opinas del trabajo en grupo entre los alumnos?

4.- ¿Cómo entiendes que debería ser la evaluación en Matemáticas? ¿La haces así?

5.- ¿Tú crees que la preparación de los niños de octavo que luego irán al instituto debe ser la misma que la de los que no irán?

6.- Si tuvieses que enseñar de nuevo Matemáticas a octavo, ¿qué cambios harías? ¿Por qué?

7.- ¿Te sientes bien aquí?

2.7.1.D. Acerca de las imágenes

1.- He observado que te gusta "potenciar" el lenguaje matemático, a través del álgebra, ¿podrías comentarme algo sobre esto?

2.- ¿Qué importancia le darías a las imágenes mentales, como medio para la resolución de problemas? ¿Podrías ponerme algún ejemplo?

3.- ¿Qué tienes "in mente" cuando les pones problemas a los estudiantes? ¿Qué esperas del alumno?

4.- Si un alumno te resuelve un problema de una manera diferente a la forma en la que tú lo resolverías, ¿Qué harías? ¿Qué te parecería este proceso del estudiante?

5.- ¿Crees que es importante "fomentar" la diversidad de soluciones frente a un problema?

6.- ¿Qué papel das a la creatividad?

7.- Imagínate el caso de un alumno que adopta dos papeles: por una parte trata de "complacer" al profesor, para ello hace las tareas de la manera que el profesor enseña; su única idea es aprobar la asignatura. Y, por otro, hace matemáticas con el deseo de aprender; resuelve los problemas dándole sentido de acuerdo a su experiencia; no tiene que dar explicaciones a nadie, salvo a sí mismo. ¿Cuál es tu comentario a esta situación?

2.7.1.E. Sobre cada estudiante

1.- Como tutora de estos estudiantes de octavo, ¿podrías hacerme un juicio sobre cada uno de ellos, resaltando aquellos cambios o aspectos que te hayan resultado más relevantes, a lo largo de estos años?

2.- ¿Crees que los maestros podrían haber hecho algo más, de lo que hicieron con cada uno de ellos?

2.7.2.- Análisis de las entrevistas

A través de las entrevistas el profesorado manifiesta o da forma, por medio de la palabra, a su pensamiento, no sólo su pensamiento matemático, sino también su pensamiento escolar y social: "pensemos que las representaciones abstractas o concretas del mundo profesional del profesorado cobra importancia, porque a través del lenguaje el individuo conforma la realidad y estructura su pensamiento" (Güemes, 1994: 71).

Según esta autora desde el campo de la lingüística (Sapir, 1977), la psicología y la psicolingüística (Hjelmslev, 1971; Liria, 1980; Luria y Yudovich, 1979), y la sociolingúistica (Bernstein, 1993; Bruner, 1984), "el lenguaje está íntimamente ligado a nuestros hábitos de pensamiento (Güemes, 1994: 71)".

A través del lenguaje, la maestra puede comunicarnos qué piensa acerca de la enseñanza, del aprendizaje, de las matemáticas, de los contenidos curriculares que los alumnos deben comprender o conocer, de la actuación matemática de los alumnos, del valor que tienen las estrategias visuales, de las imágenes, la visualización, y de la importancia y fomento que se dan en las escuelas.

Una vez que se transcribieron las entrevistas, el proceso de tratamiento analítico siguió, en la práctica, estos cuatro pasos:

1.- Lectura de las transcripciones, delimitando o subrayando los fragmentos textuales que se referían a cada una de las cinco secciones especificadas anteriormente en el guión de las entrevistas. Al margen se iban haciendo anotaciones (códigos), para indicar a cuál de los aspectos correspondía cada fragmento transcrito.

2.- Una vez hecha la codificación en cada una de las transcripciones, se procedió a juntar todos los fragmentos que se referían a una misma categoría: por ejemplo, enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

3.- Con el material reunido se procedió a reclasificarlo e interpretarlo, abriendo subsecciones en aquellos casos que fuese necesario, elaborando para ello nuevas categorías relacionadas con la cuestión. A este proceso analítico lo conocen algunos autores como "Integración Local", pues el análisis e interpretación se centra en el material acumulado en una sección, bajo categorías descriptivas relacionadas con una cuestión (Weiss, 1994; Vallés, 1997).

4.- Hecha la integración local, sección a sección, el último paso consistió en la organización de todas las secciones, de manera coherente, siguiendo una línea interpretativa y narrativa; proceso que culminó en la elaboración del informe final que presentará la información en los siguientes capítulos.

2.8. ASISTENCIA A REUNIONES

Con el fin de conocer mejor la dinámica del centro, el grado de participación e integración escolar de la maestra, nos dispusimos a recoger información de cuantas reuniones, a las que se nos permitía asistir, se realizaron.

En concreto, la investigadora asistió a varias reuniones: encuentros con los dos profesores que impartían en octavo curso, las juntas de evaluación de octavo; un claustro con todo el colegio, y algunas actividades extraescolares, como cenas organizadas para recaudar dinero para el fin de curso de "nuestros" alumnos.

La asistencia a estas reuniones sirvió a la investigadora para conocer los temas centrales de discusión en las mismas. Destacamos, como ya se dijo anteriormente, dos ejes centrales en las mismas: por un lado el problema de la L.O.G.S.E. y su puesta en práctica y, por otro, el de la disciplina.

2.9. ENTREVISTAS CLÍNICAS CON LOS ESTUDIANTES

El fin de utilizar entrevistas clínicas con los estudiantes era averiguar, por una parte, sus creencias sobre su aprendizaje y, por otra, la más importante para nosotros, conseguir información sobre el nivel de comprensión matemática de los estudiantes y sobre la utilización de estrategias visuales en el proceso de solución de los problemas que le fueron planteados.

Empezamos las entrevistas a los estudiantes seleccionados en el mes de marzo, una vez cada quince días, en el colegio, los viernes, aprovechando que los alumnos, ese día, tenían tutoría de Matemáticas y no había grandes problemas en que faltasen a otras asignaturas. Por supuesto que contamos con la autorización de los otros profesores, quiénes, en todo momento facilitaron nuestro trabajo en el Centro.

En principio cada entrevista fue planificada para alrededor de media hora, pero este tiempo varió según el tipo de problemas planteados y la habilidad matemática del estudiante entrevistado.

Todas fueron grabadas en vídeo y en cinta magnetofónica (por si la videocámara fallase o el sonido no fuese comprensible). Además de estos procedimientos para recoger los datos, el entrevistador anotaba las impresiones generales de la entrevista y cualquier situación que sucediese antes, durante y después de la misma.

2.9.1. Tipos de entrevistas

Se realizaron dos tipos de entrevistas:

I.- Primer tipo. Constó de dos partes:

a) la primera parte pretendía obtener información sobre las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas, del profesorado, sus asignaturas favoritas, su integración en el colegio y sobre su propio aprendizaje.

b) la segunda parte pretendía recoger información acerca de las estrategias utilizadas al realizar el test WSAT.

Esta entrevista fue grabada en cassette.

II.- El segundo tipo de entrevistas, del cual se realizaron siete, fue el que sirvió como fuente amplia de datos, en relación con las imágenes de los estudiantes y su relación con su actividad matemática.

Cada una de estas entrevistas fue diseñada para analizar diferentes áreas sobre las imágenes y la comprensión matemática de los estudiantes. Para la realización de las mismas se les proponía a los estudiantes diferentes problemas y se les pedía que los leyesen y pensasen en voz alta mientras los estaban resolviendo. Como los cálculos numéricos en los problemas planteados eran bastante sencillos, no se les proporcionó calculadora.

Se plantearon 16 problemas que se repartieron en dos grupos: uno formado por lo que llamaremos “problemas para evaluar la “calidad” de las imágenes”, y otro que lo constituyen los problemas “no rutinarios”. Cada entrevista constaba de dos o tres problemas que el estudiante debía resolver.

Describimos, a continuación, los problemas y la finalidad de los mismos en las entrevistas.

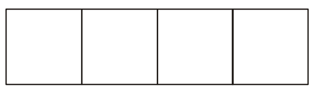
2.9.1. A. Entrevistas para evaluar las imágenes

De las siete entrevistas del segundo tipo, las dos primeras, fueron diseñadas para medir la “calidad” de las imágenes de los estudiantes.

Primera entrevista.- La primera entrevista estuvo basada en la construcción de modelos tridimensionales. En lo que sigue haremos referencia a ella como PROBLEMA DEL DESARROLLO DEL CUBO.

El protocolo para la entrevista tuvo tres partes:

a) Se les enseñó la siguiente figura hecha en cartulina:



y se les dijo: Intenta imaginar qué figura te resultará si doblas y unes esos cuatro cuadrados.

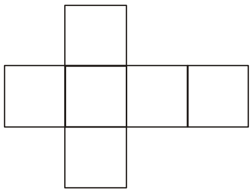
Si fuese necesario, se le permite al estudiante que doble el papel, con el fin de que se dé cuenta que puede formar cuatro de las caras de un cubo.

A continuación se le preguntó:

¿Qué debes añadir a los cuatro cuadrados, y dónde, para formar un cubo completo?

Si el alumno lo necesita, se le pueden dar tijeras para que recorte y piense sobre el material.

b) Primeramente se les enseñó y explicó el siguiente desarrollo de un cubo:



y luego se les preguntó si podían encontrar otros desarrollos y que los dibujasen. Si el alumno no podía encontrar otros desarrollos, se les mostraba algunos de los modelos que la entrevistadora llevaba preparados.

c) Se les enseñó distintos desarrollos hechos en cartulina, pero sólo con el contorno exterior y se les preguntó para cada uno de ellos:

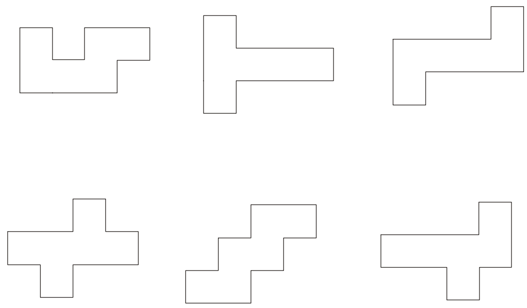
¿Podrías formar un cubo con este desarrollo? ¿Cómo lo construirías? Señala en el dibujo dónde pondrías la base y dónde la tapa.

Siempre que el alumno lo necesitase o lo pidiese, se le dejaba manipular el material y formar el cubo, para que comprobase sus ideas. Si el alumno no podía resolver el problema con el contorno exterior, se le enseñaba el desarrollo completo, y si aún así no podía imaginar, se le dejaba que formase el posible cubo, doblando y uniendo la cartulina.

Básicamente, nuestro objetivo con esta entrevista era analizar y evaluar la habilidad del estudiante para construir, mantener y transformar la imagen de un cubo, en su mente, a través de la visualización del contorno dado.

Nuestra idea era diferenciar, a través de la verbalización de sus pensamientos, entre los estudiantes que estaban visualizando y los que hacían la tarea con estrategias de ensayo y error.

Estos fueron algunos de los desarrollos utilizados en esta entrevista.

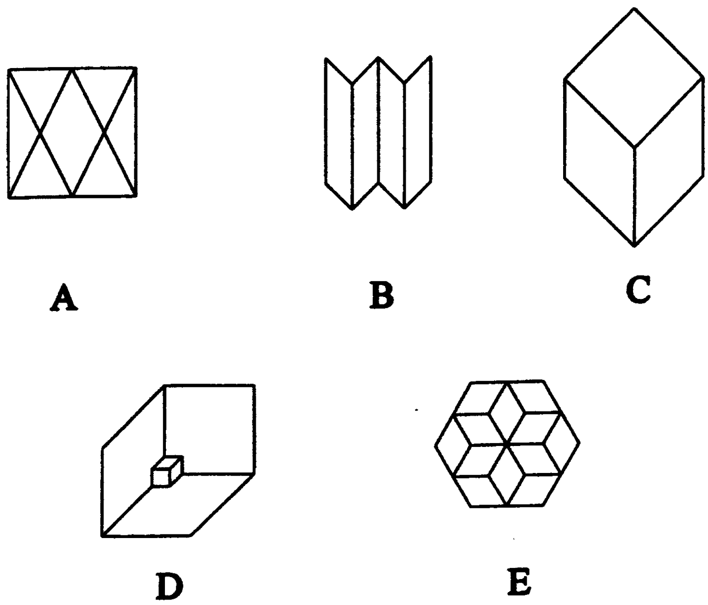


Segunda entrevista.- La segunda entrevista consistió de dos tareas que se ha constatado son útiles para medir la calidad de las imágenes de los estudiantes (Brown y Wheatley, 1990).

La primera tarea la llamamos de “DIBUJO RÁPIDO”. En ella se le mostraba al estudiante una figura, por un corto espacio de tiempo. A continuación se le pedía que dibujase lo que vio, en un papel. Después de haberlo dibujado se le preguntaba si estaba satisfecho con el dibujo. Si contestaba que no, se la daba la oportunidad de volverlo a mirar y dibujar de nuevo.

Una vez que los estudiantes estaban satisfechos del dibujo se les preguntaba qué vieron y cómo hicieron el dibujo. La idea consiste en animar a los estudiantes a reflexionar en sus estrategias para imaginar, ver cómo interpretan cada forma y hasta qué punto se fían de su imagen mental.

Lo básico en esta tarea fue evaluar la capacidad del estudiante para construir una imagen de un modelo, además de la capacidad para mantener la imagen y poder copiar desde la memoria. Las figuras que se utilizaron en esta actividad son las que aparecen a continuación.

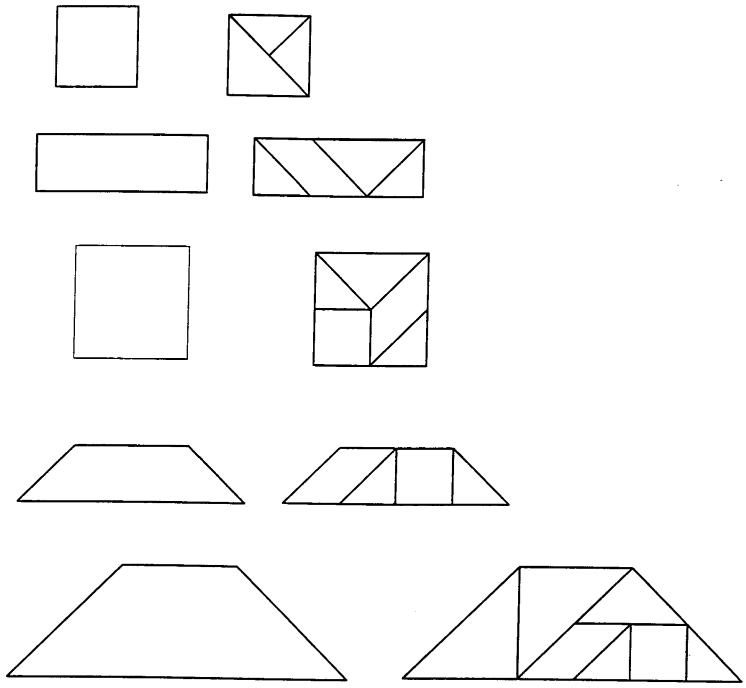


La segunda tarea la llamamos de "REPRODUCCIÓN DE UN MODELO".

Esta tarea ha sido calificada por los investigadores americanos Brown y Wheatley (1990) como excelente para averiguar la "calidad" de las imágenes de los alumnos.

Para la realización de la misma se les proporcionó a los estudiantes las siete piezas del Tangram Chino (material no familiar en el aula y que consta de dos triángulos grandes -Tg-, dos triángulos pequeños -Tp-, un triángulo mediano -Tm-, un cuadrado -C- y un paralelogramo o romboide -R-).

La investigadora les mostró, brevemente, y de uno en uno, los modelos que aparecen en la parte derecha de la figura siguiente y, a continuación, les pedía que los reprodujesen utilizando el contorno proporcionado (parte izquierda de la figura) y las piezas del Tangram. Les permitió mirar el modelo tantas veces como lo necesitaron.



La idea básica en esta actividad es construir una imagen desde la memoria y su transformación dinámica, mientras que la tarea del dibujo rápido demanda la construcción de una "imagen estática" y su reproducción a través de un dibujo.

2.9.1.B. Entrevistas utilizando problemas no rutinarios

El resto de las entrevistas que se hicieron a los estudiantes, en total cinco, consistieron en la resolución de problemas no rutinarios, que el alumno debía resolver en voz alta.

Los problemas no rutinarios son diferentes a los estándar o rutinarios, que pueden ser resueltos de una manera sencilla, por medio de una o dos operaciones aritméticas, utilizando los números dados en el mismo. En ellos, la solución matemática no es ni obvia ni incuestionable, al menos si se toma en cuenta el contexto evocado por el problema (Verschaffel y De Corte, 1996). Son aquellos que proporcionan oportunidades para que el estudiante realice tareas reflexionando, que le lleven a construir las ideas matemáticas con comprensión y con significado, y donde la solución no se limita a la aplicación rutinaria de un algoritmo. Se propusieron en total trece problemas, cuyos enunciados expondremos a continuación.

Los problemas 1, 2 y 3, que redactaremos a continuación, son problemas no-rutinarios que no requieren habilidades específicas algebraicas para su solución aunque sí visualización y razonamiento (lógica) matemático.

Los números 1 y 3 fueron utilizados por las doctoras Brown y Presmeg (1993), el número 2 lo diseñamos para esta investigación.

Problema 1.- TIGRES Y JAULAS:

En un zoológico hay 15 tigres y 4 jaulas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los tigres, de forma que en cada jaula haya como mínimo un tigre, y que no haya el mismo número de tigres en 2 jaulas?

Problema 2.- CUBOS PINTADOS:

Disponemos de 216 cubitos pequeños de 1x1x1 cm^3 *con los que formamos un cubo de 6x6x6 cm*^{3}*. Pintamos de blanco todo el exterior del cubo grande.*

.- ¿Cuántos cubitos pequeños no tienen ninguna cara pintada de blanco?

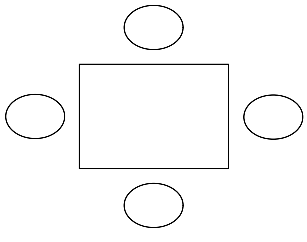
.- ¿Cuántos tienen sólo una cara?

.- ¿Cuántos tienen dos caras pintadas?

.- ¿Cuántos tres? ¿Y cuatro?

Problema 3.- MESAS CUADRADAS:

Tenemos 12 mesas cuadradas, en las que puede sentarse una persona a cada lado.



a) Si las ponemos juntas de manera que formen una mesa alargada, ¿Cuántas personas pueden sentarse?

b) ¿ Puedes colocarlas de diferente forma, de manera que se puedan sentar un número diferente de personas? ¿ De cuántas formas diferentes puedes colocarlas?

En los problemas 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se tuvo en cuenta que admitiesen estrategias visuales, entre otras, como método de solución, además de no incluir, dibujo o apoyo gráfico alguno en su enunciado, lo cual pudiese inducir al alumno a seguir un método visual.

Fueron utilizados por Presmeg (1985, 1993) en sus investigaciones. Merece la pena destacar que los problemas 4, 5, 6 y 7 formaron parte de lo que ella llamó: Mathematical Processing Instrument, instrumento que utilizó en su tesis doctoral, con los estudiantes de secundaria (16-17 años) y sus profesores. Presmeg agrupó los problemas utilizados en el anterior instrumento en tres secciones A, B y C que variaban en su orden de dificultad. Las secciones A y B eran para los estudiantes, y las secciones B y C para los profesores. Los problemas que nosotros utilizamos pertenecían a la secciones A y B.

Problema 4.-MESAS Y PATAS:

Hay 8 mesas en una casa. Algunas tienen 4 patas y otras tienen 3 patas. En total hay 27 patas. ¿Cuántas mesas hay con 4 patas?

Problema 5.- BIBLIOTECA:

Cierto día Juan y Ana fueron juntos a la biblioteca. Después de ese día, Juan fue regularmente a la biblioteca cada dos días al mediodía y Ana fue cada tres días, también al mediodía. ¿Cuántos días pasaron hasta que se volvieron a encontrar en la biblioteca por segunda vez?

Problema 6.- PISTA DE ATLETISMO:

Una pista de atletismo está dividida en tres partes desiguales, la longitud de la pista es de 450 m, la longitud de la primera y la segunda parte juntas es de 350 metros, la longitud de la segunda y tercera parte juntas es de 250 m. ¿Cuál es la longitud de cada parte?

Problema 7.- PASAJERO:

Un pasajero que había viajado la mitad del viaje se queda dormido. Cuando se despertó todavía tenía que viajar la mitad de lo que viajó mientras dormía. ¿Qué parte del trayecto total estuvo dormido?

Problema 8.- PERRO Y ZORRO:

Un perro quiere cazar a un zorro que se encuentra a 30 metros de distancia. El salto del perro es igual a 2 metros y el salto del zorro es igual a 1 metro. Mientras el zorro hace 3 saltos, el perro hace 2. ¿Cuánto tiene que correr el perro para alcanzar al zorro?

Problema 9.- CONEJOS Y GALLINAS:

En un corral había conejos y gallinas. Cuando Jonás miró a través de la valla vio 7 cabezas y 20 patas. ¿Cuántos conejos había?¿Cuántas gallinas?

El siguiente problema fue diseñado para medir la utilización que hacen los estudiantes de su conocimiento del entorno, su habilidad para utilizar “lo conocido” en la solución de los problemas.

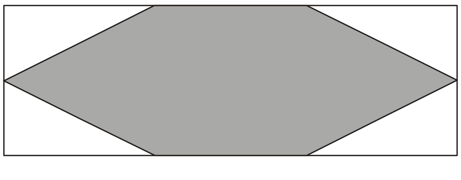
Problema 10.- DISTANCIA:

La distancia de La Matanza a Santa Úrsula es un tercio de la distancia que hay de La Matanza al Puerto de la Cruz. La distancia de Santa Úrsula a Los Realejos es cuatro veces la distancia de La Matanza a Santa Úrsula. Si la distancia de La Matanza al Puerto de la Cruz es 12 Km ¿Cuál es la distancia del Puerto de la Cruz a Los Realejos? ¿Cuál es la distancia de La Matanza a Santa Ursula?

En los tres últimos problemas se utilizaron dibujos en sus enunciados. El problema número 12 fue utilizado por Solano y Presmeg (1995) y los números 11 y 13 están inspirados en los trabajos de la profesora Emma Castelnuovo (1981).

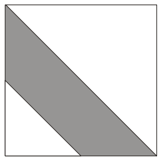
Problema 11.- HEXÁGONO:

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



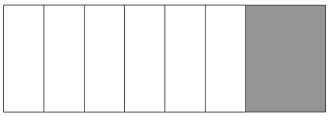
Problema 12.- TRAPECIO:

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:

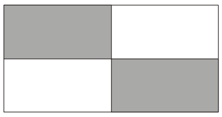


Problema 13.- FRACCIONES:

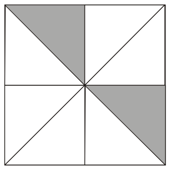
¿Qué fracción de la figura entera representa la parte sombreada de las siguientes figuras?:



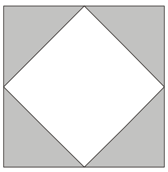
A



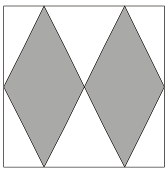
B



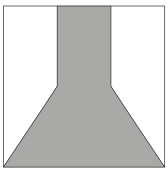
C



D



E



F

2.9.2. Análisis de las tareas presentadas en las entrevistas clínicas a los estudiantes

Para analizar cada tarea se identificaron varias características basadas en las respuestas de los estudiantes que parecían reflejar el pensamiento de los mismos.

En ningún caso se utilizaron códigos numéricos para evaluar y cuantificar las respuestas de los estudiantes. Se percibía que la introducción de métodos numéricos no ilustraba la actividad del estudiante y los caminos por los que ellos piensan cuando hacen matemáticas. Pensamos que si la investigación se centra en el estudio de pocos estudiantes, es posible construir explicaciones detalladas de su actividad.

<u>2.9.2.A.Criterios usados para evaluar las tareas de imágenes</u>

Los criterios utilizados fueron:

1º.-El tiempo total que los estudiantes utilizaban en la realización de las tareas fue un factor que nos pareció importante.

Los estudiantes que tenían buena capacidad para visualizar fueron capaces de resolver las tareas en unos pocos segundos, mientras que los que tenían débil capacidad para visualizar las realizaron en varios minutos o no las hicieron.

El tiempo que los estudiantes utilizaron en resolver el ejercicio del tangram parecía un buen indicador de la capacidad de visualización de los estudiantes. A los "buenos" les bastaba una sola mirada al modelo y en muchos casos lo resolvían rápidamente. En contraste, los "menos buenos", con baja visualización, no podían realizar la tarea sino después de varias miradas, y a alguno se le tuvo que poner el modelo delante para poder copiarlo y ejecutarlo. Se tuvo en cuenta si el estudiante lo resolvía utilizando el modelo girado o el simétrico.

2º.- El número de veces que el estudiante nos pedía que le mostrásemos el modelo.

Como en la tarea del tangram, el tiempo y el número de las miradas utilizadas fue también indicativo de la visualización en la tarea del dibujo rápido. La velocidad a la hora de dibujar los modelos no fue importante, sino la cantidad de veces que borraba lo que hacía.

3º.- La forma de colocar las piezas del tangram en el modelo.

Hubo casos en que un estudiante colocaba las piezas de manera que resultaba el modelo simétrico del propuesto.

2.9.2.B. Criterios de análisis en los problemas no rutinarios

En la evaluación de la resolución de los problemas era importante, en general, más que ver si los estudiantes encontraban o no la respuesta, observar los caminos en que los resolvían y podían explicar sus respuestas, además de tener en cuenta la cantidad de "ayuda" solicitada del investigador.

Ya que el objetivo básico de esta tesis es encontrar el papel que tienen las imágenes mentales y la visualización en la actividad matemática, fue necesario desarrollar una lista de criterios que nos permitiesen determinar si un estudiante estaba usando sus imágenes en la solución de una tarea matemática. Entre ellos indicamos:

I.- Considerar si el estudiante utilizó una estrategia visual es quizá un buen indicador del uso de las imágenes, entendiendo por estrategia visual aquella que utiliza para la solución: dibujos, diagramas, tablas o grafos (Presmeg, 1985; Mosés, 1977).

II.- Muchos estudiantes con una gran capacidad de visualización, no necesitan dibujar ningún diagrama, sino que pueden resolver el problema contando únicamente con sus imágenes mentales, sin necesitar ningún apoyo externo que les ayude en el proceso de resolver el problema.

Teniendo en cuenta esto, se decidió aceptar también otros factores, como indicativos de que el estudiante estaba utilizando imágenes:

a) El informe verbal del estudiante de que tenía una "imagen mental" cuando resolvía el problema. Sin embargo, hay casos donde el estudiante no es consciente o no puede expresar si tiene o no una imagen en su cabeza, cuando está resolviendo la tarea.

b) Se aceptó también como evidencia de que un estudiante estaba utilizando sus imágenes el que hiciera movimientos con sus manos mientras resolvía una tarea. Presmeg (1985) llamó a este tipo de imágenes: imágenes cinestésicas, es decir, aquéllas que envuelven actividad muscular (normalmente, el uso de manos y dedos).

c) Asimismo, se consideró el hecho de que el estudiante relacionase o conectase su solución con otras soluciones u otros tipos de actividad matemática. Las relaciones se establecen en la mente de las personas, no son actos perceptuales, sino cognitivos. La relación es abstracta y no puede "verse" en el sentido visual. Wheatley y Bebout (1990) piensan que cuando se dice que se "ve una relación" lo que se ve es una imagen autoconstruida de la relación.

Siguiendo las sugerencias de la profesora Presmeg[2] para quien la utilización de imágenes como estrategia para resolver un problema conlleva un cierto tiempo, no se tuvo en cuenta el tiempo que los estudiantes utilizaban en la solución de los problemas.

2.10. EXÁMENES Y ANÁLISIS DE LOS MISMOS

Nuestra intención, en principio, era no participar en los exámenes, pero a lo largo de la investigación tuvimos la oportunidad no sólo de observar este hecho sino, además, de participar en su elaboración. Con la asistencia se nos permitía conocer cuál era el nivel de exigencia de la maestra y si ese nivel guardaba concordancia con sus creencias y explicaciones en el aula. La relación existente entre lo que pensaba matemáticamente hablando y lo realizado en la práctica ¿Qué tipo de preguntas o problemas planteaba? ¿Cómo eran planteados los problemas? ¿Cuál era el tipo de respuesta exigida al alumno?

En la prueba que se pasó a los estudiantes la maestra utilizó, además de algunos problemas rutinarios, un problema que consideramos interesante exponer aquí, ya que admite estrategias visuales en su solución y sería interesante ver y analizar los caminos utilizados por los estudiantes en la búsqueda de la solución.

Este fue el problema:

Problema de los PATOS Y CONEJOS:

En un corral hay patos y conejos, siendo un total de 39 cabezas y 126 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

[2] Comunicación personal a la doctorando.

Como hemos indicado, tampoco teníamos previsto participar en la confección de algún examen, pero ya que la maestra solicitó nuestra colaboración, decidimos añadir dos problemas al examen que ella tenía previsto para la segunda evaluación. Fueron estos:

Problema de LA BALANZA:

Si colocas un queso en un platillo de una balanza y tres cuartas partes del queso más un peso de tres cuartos de kilo en el otro platillo, la balanza se equilibra. ¿Cuánto pesa el queso?

Problema de LA MADRE Y LA HIJA:

Una madre es siete veces más vieja que su hija. Si la diferencia de sus edades es 24 años ¿cuál es la edad de cada una?

Estos problemas pertenecen a la sección B del Mathematical Processing Instrument, diseñado por la Presmeg (1985), y del que hemos hablado en páginas anteriores.

Después de que la maestra corrigiera los exámenes, que gentilmente nos facilitó, pudimos averiguar la importancia y la valoración que ella hacía de la utilización de estrategias visuales (escritas) por los estudiantes.

En el capítulo siguiente, relacionado con los estudiantes, expondremos nuestra interpretación y conclusiones de los datos obtenidos.

CAPÍTULO III:

LOS ESCOLARES: KEVIN, NOEL Y RAÚL

3. LOS ESCOLARES: KEVIN, NOEL Y RAÚL

> "Quien ha reconocido que las percepciones y las observaciones no caen como copos de nieve formados previamente sobre un sujeto pasivo, sino que son el resultado de un actividad realizada por un sujeto activo, debe plantearse la cuestión de cómo se producen esas actividades".[1]
>
> ERNST VON GLASERSFELD

3. 1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de toda investigación, en la esfera de la educación, es aportar ideas que puedan aclarar el complejo mundo de la enseñanza y del aprendizaje. El conocimiento sobre ese mundo y, en nuestro caso, el mundo matemático no está separado de las personas inmersas en él. Por esta razón, debemos conocer dentro de lo posible cuál ha sido la trayectoria seguida por los alumnos que han participado en esta investigación, en su contexto familiar, social y escolar.

Antes de presentar las conclusiones generales sobre el uso que los estudiantes hicieron de las imágenes y la visualización en la actividad matemática, describiremos su actuación frente a los problemas matemáticos que les planteamos y sus percepciones sobre los procesos de enseñanza / aprendizaje (concepciones pedagógicas).

Los procedimientos de selección de los estudiantes se hicieron teniendo en cuenta la puntuación en el WSAT y el género descritos con detenimiento en el Capítulo II. En él explicamos las razones que nos llevaron a seleccionar a tres de los siete inicialmente escogidos para el desarrollo de la investigación.

---

[1] Cita extraída de von Glaserlfeld (1994: 20).

Los datos en los que nos apoyamos para las descripciones e interpretaciones que realizamos en este capítulo fueron obtenidos fundamentalmente a través de entrevistas a los alumnos y por medio de exámenes. (Obviamente, junto a estas referencias básicas aprovechamos otras informaciones extraídas de las observaciones de aula, entrevistas a la maestra, cuaderno de clase de los estudiantes, ...)

Para cada estudiante se reunió la información procedente de los distintos instrumentos y se analizó y reagrupó de forma que pudiésemos encontrar el perfil de cada uno de ellos.

La investigación con los estudiantes tenía como finalidad conseguir información sobre su nivel de comprensión matemática y sobre la utilización o no que hacían de los procesos de visualización en la resolución de los problemas planteados. Estos procesos de visualización fueron identificados a través de las explicaciones y reflexiones que los estudiantes hacían al resolver los problemas.

Para ello, una vez que se planteaba la tarea, se animaba al estudiante a que verbalizase lo que pensaba, explicando y reflexionando sobre lo que estaba realizando. La entrevistadora procuró en todo momento no indicar al estudiante si el proceso o la solución al problema estaba o no equivocado, sino que le estimulaba a que explicase su pensamiento y tomase sus propias decisiones acerca de la “viabilidad” de sus respuestas.

Para analizar las actuaciones de los estudiantes nos centramos fundamentalmente en la actividad cognitiva, aunque a la hora de interpretar los resultados tuvimos en cuenta que el quehacer matemático es, en definitiva, una actividad humana. Con el fin de darle sentido a la actuación cognitiva del estudiante, algunas veces fue necesario recurrir a la información que teníamos sobre su medio social o sus experiencias de clase.

En el Capítulo II se explicaron con detalle los criterios utilizados para determinar el uso de las imágenes y la visualización en la solución de las tareas matemáticas.

En nuestra investigación aceptamos la posición de Piaget e Inhelder (1971) y Presmeg (1997) que señalan que las imágenes están involucradas cuando los estudiantes dibujan un diagrama o una figura.

Bajo el término *visualizar* consideramos los procesos que están involucrados cuando las personas construyen, transforman y relacionan imágenes mentales**,** además de los procesos usados al dibujar figuras o diagramas, o construir y manipular figuras en el ordenador.

El término *visualización* se refiere al hecho de poder visualizar.

Nos referimos a *método o estrategia visual* cuando nos encontremos ante una actuación en la que se utiliza, como parte esencial para resolver un problema, procesos de visualización.

Consideramos *visualizadores* a aquellas personas que *prefieren* usar métodos visuales cuando están ante un problema matemático.

En los siguientes apartados describimos individualmente la actuación matemática y pedagógica de los tres estudiantes elegidos. Para cada estudiante hemos seleccionado, siguiendo el orden expuesto en el Capítulo II, aquellos problemas en los que su actuación matemática es relevante para esta investigación.

El orden en que presentamos las actuaciones de los estudiantes es: Kevin, Noel y Raúl. En primer lugar, para cada uno, se describirán e interpretarán las estrategias que emplearon al resolver los problemas planteados y, en segundo, se analizarán conjuntamente sus creencias pedagógicas.

3. 2. KEVIN[2]

Nuestro objetivo es describir y analizar una situación no habitual. Kevin es un estudiante que, de acuerdo con otros estudios (Presmeg, 1985; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) y con nuestra propia investigación, se le puede considerar "buen visualizador". Su habilidad para construir y su facilidad para relacionar imágenes le permite resolver los problemas matemáticos planteados en las entrevistas de una forma original y creativa.

Fue elegido para esta investigación por su puntuación en el test WSAT (Wheatley, 1978). Este test, descrito con detalle en el Capítulo II, tiene como objetivo medir la

[2] Nombre supuesto (la investigadora lo elige en inglés por sugerencia del estudiante).

habilidad espacial de los estudiantes para rotar figuras en dos dimensiones. Para su realización se le proporciona a los estudiantes una figura que aparece en la parte izquierda de la página del test y deben decidir si esta figura, después de haberla girado en el plano, coincide con cada una de las otras cinco que aparecen en la página.

Kevin obtuvo una puntuación de 90.5. De las 100 cuestiones planteadas en el test, contestó 95 en el tiempo establecido, resolviendo correctamente 92. En relación con el WSAT es un estudiante con una puntuación "alta" (Wheatley, 1978).

3. 2. 1. La actuación de Kevin frente a los problemas matemáticos

En este apartado describimos e interpretamos cómo Kevin resolvió los problemas propuestos en las entrevistas. El origen y las razones de por qué se incluyeron esos problemas en este estudio han sido expuestos en el Capítulo II.

Planteamos dos tipos de problemas bien diferenciados:

A) El primero fue diseñado para evaluar la "calidad" de las imágenes de los estudiantes.

B) El segundo para analizar la competencia de los alumnos frente a problemas matemáticos no rutinarios.

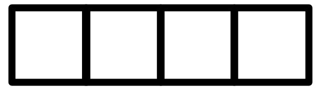
3. 2. 1. 1. Análisis de los problemas del tipo A

Comenzamos este apartado con la actuación de Kevin frente a los problemas que etiquetamos como: desarrollo del cubo, tarea del dibujo rápido y reproducción de un modelo geométrico, y que denotaremos respectivamente como A.1), A.2) y A.3). Para facilitar la lectura hemos redactado los enunciados de cada problema.

A. 1) PROBLEMA DEL DESARROLLO DEL CUBO

Este problema estuvo basado en la construcción de modelos tridimensionales. El protocolo para la entrevista tuvo tres partes:

a) Se le enseñó al alumno la siguiente figura hecha en cartulina:

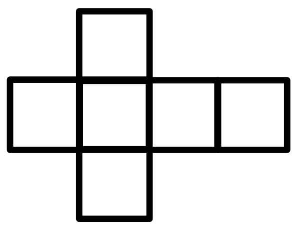


y se le pidió que intentara imaginar qué figura resultaría si doblara y uniera esos cuatro cuadrados.

A continuación se le preguntó:

¿Qué debes añadir a los cuatro cuadrados, y dónde, para formar un cubo completo?

b) Seguidamente se le mostró y explicó el siguiente desarrollo del cubo:

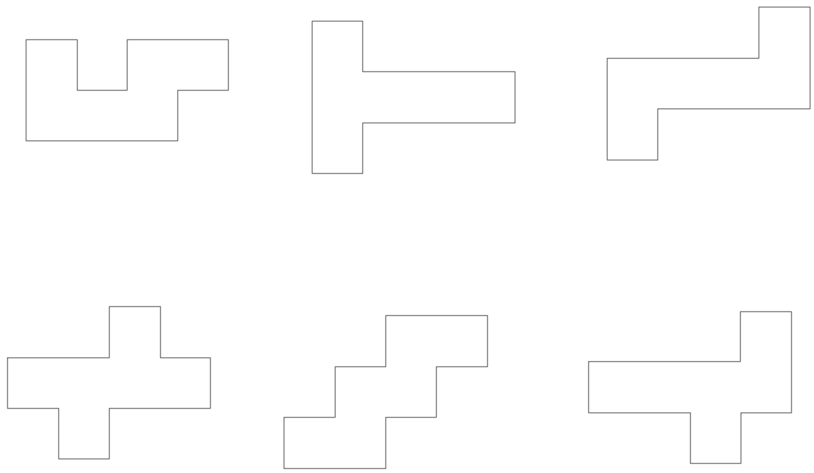


para posteriormente preguntarle si podía encontrar otros desarrollos y que los dibujase.

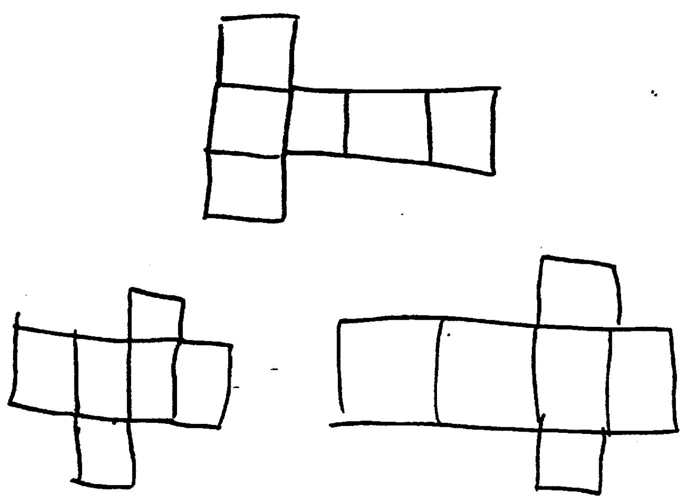
c) Se le presentaron distintos desarrollos hechos en cartulina, pero sólo con el contorno exterior y se le preguntó para cada uno de ellos:

¿Podrías formar un cubo con este desarrollo? ¿Cómo lo construirías? Señala en el dibujo dónde pondrías la base y dónde la tapa.

Los desarrollos utilizados fueron los siguientes:

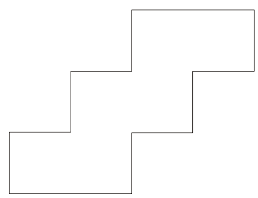


Kevin realizó, sin dificultad, el apartado a) de esta tarea. Se le observaba tranquilo y seguro en sus respuestas. En la segunda parte encontró tres desarrollos diferentes al modelo proporcionado y, según sus palabras, fue muy fácil.



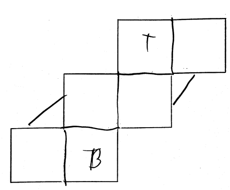
En lo referente al apartado c), después de mostrarle el desarrollo, ágilmente decía si podía formarse un cubo y donde situaría la base y la tapa, señalándonos dos maneras de hacerlo. Merece destacar que, en un determinado momento, comentó que cualquier cara del cubo podía ser la base dependiendo de cómo se colocara el mismo.

El desarrollo en el que tuvo más dificultad para decidir si formaba o no cubo fue el siguiente:



Necesitó pararse a pensar e inferimos que estaba visualizando, porque al resolverlo hacía continuo uso de sus manos; por el movimiento de éstas intuimos que estaba construyendo el cubo en su mente. Este es un ejemplo en el que un alumno hace uso de imágenes *cinestésicas* (ayudándose del movimiento de sus manos) para resolver el problema.

Cuando Kevin finalizó la tarea, que concluyó correctamente, la entrevistadora le preguntó si necesitaba comprobarlo y contestó afirmativamente. Al hacerlo con un desarrollo recortado, tomó como base la que él había señalado en el dibujo que se muestra a continuación y a partir de ahí no procedió por ensayo y error sino que realizó la construcción manteniendo una imagen en su mente.



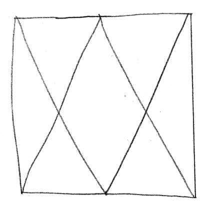
Constatamos que Kevin hace uso, por primera vez, de imágenes *dinámicas* (puede girar el cubo sin mayor dificultad en su mente) y *cinestésicas***.** Fue en este momento cuando empezamos a tomar conciencia de la posible capacidad de visualización de Kevin.

A. 2) TAREA DEL DIBUJO RÁPIDO

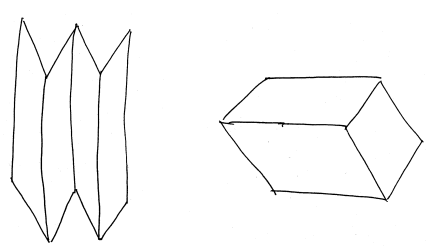
En esta tarea se le mostraba al estudiante un dibujo durante un corto espacio de tiempo. A continuación se le pedía que representase en un papel, lo que vio. Después de haberlo dibujado se le preguntaba si estaba satisfecho con su diseño. Si contestaba que no, se la daba la oportunidad de volverlo a mirar y dibujar de nuevo.

Las figuras que se utilizaron en esta actividad son las que aparecen en el Capítulo II en la tarea de dibujo rápido.

En la primera presentación Kevin se percata que su dibujo no es similar al mostrado por la investigadora y solicita que se le enseñe de nuevo. En este segundo intento dibujó correctamente el modelo A, como puede observarse en la siguiente figura escaneada, a tamaño reducido, del trabajo original de Kevin.

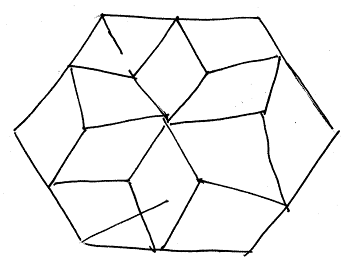


En su segundo y tercer dibujo, correspondientes a los modelos B y C, que realiza después de una breve mirada, todos los detalles son correctos. El segundo lo hace invertido pero al enseñárselo a la entrevistadora lo coloca en la posición correcta. Expresa que para construir su imagen en estos modelos “vio” un biombo y un cubo, lo que nos hace pensar que los imaginó holísticamente (globalmente). A continuación mostramos sus dibujos:



En el cuarto modelo tiene alguna dificultad, pero mantiene su imagen en la que ve el fondo de una habitación y un cubo, y dibuja sin pedir que se le vuelva a mostrar.

En el modelo que mostró más inconvenientes para retener la imagen fue en el quinto; comenzó dibujando el hexágono y comentó que había visto un hexágono y una estrella. Solicita mirarlo de nuevo y realiza bien el dibujo; explica que ahora "vio" seis rombos y un hexágono. Su manera de dar significado a estos modelos hace pensar que Kevin para construir una imagen de la situación, descompuso la figura en varias partes: una habitación y un cubo, un hexágono y una estrella, o un hexágono y seis rombos. Estas partes luego las recompuso en un todo para poder dibujar los modelos. La siguiente figura muestra el dibujo de Kevin:



Entre las características de cómo las personas construyen y "manipulan" mentalmente las imágenes figuran tanto la habilidad para descomponerlas y combinarlas en caminos útiles y significativos, como la de considerarlas globalmente o de forma holística (Brown y Wheatley, 1997; Kosslyn, 1983).

La actuación de Kevin en estos problemas es similar a la de otros estudiantes que puntuaron "alto" en el test WSAT (Brown y Wheatley, 1990; Brown, 1993). Su facilidad para retener la imagen y dibujarla con todos los detalles es el mejor indicador de la calidad de la misma.

A. 3) REPRODUCCIÓN DE UN MODELO GEOMÉTRICO

Para la realización de esta tarea se le proporcionó al estudiante las siete piezas del Tangram Chino (material no familiar en el aula y que consta de dos triángulos grandes -Tg-, dos triángulos pequeños -Tp-, un triángulo mediano -Tm-, un cuadrado -C- y un paralelogramo o romboide -R-).

La investigadora le mostró brevemente, y de uno en uno, los modelos geométricos de la parte derecha de la figura que aparece en la tarea de reproducción de un modelo del Capítulo II, y a continuación le pidió que los reprodujese utilizando el contorno proporcionado (parte izquierda de la figura) y las piezas del Tangram. Le permitió mirar el modelo tantas veces como lo necesitara.

Kevin no tuvo problemas para resolver con éxito esta actividad. A continuación, presentamos cómo resolvió la tarea.

<u>Modelo A del cuadrado pequeño</u>

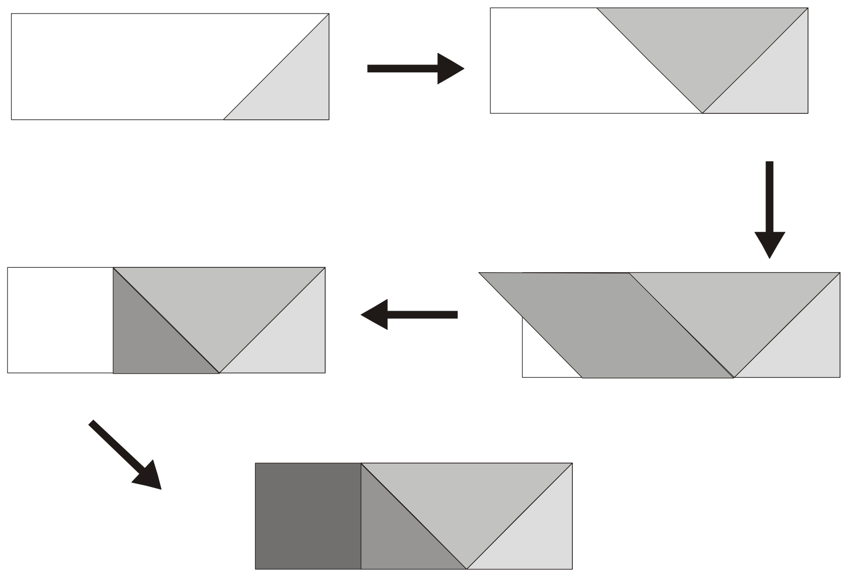
La entrevistadora muestra a Kevin, durante un segundo, el modelo A) y le solicita que lo reproduzca con las piezas del tangram. El alumno, sin hablar, toma las tres piezas adecuadas y con mucha seguridad las coloca correctamente empleando un tiempo empleado fue de 20 segundos.

<u>Modelo B del rectángulo</u>

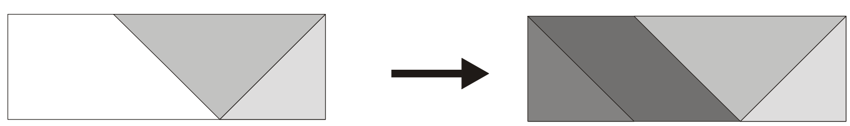
Para la realización del segundo modelo Kevin, en primer lugar, coloca un Tp

A continuación el Tm y el R

Retira el R y elige un Tp y el C



La investigadora le pregunta sobre la seguridad de su construcción. Kevin entonces, sin volver a mirar el modelo, retira el C y un Tp, y coloca correctamente el R y un Tp.



Modelo C del cuadrado grande

Una vez que Kevin ha observado unos segundos este modelo, comienza dudando y pide a la entrevistadora que se lo vuelva a enseñar. Elige las piezas adecuadas y construye el puzzle correctamente en pocos segundos, pero las partes derecha e izquierda invertidas como muestra la siguiente figura.

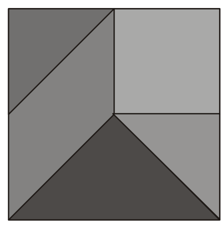
A continuación transcribimos parte del diálogo que mantuvimos con el estudiante:

I: *¿Es ésa la imagen que tienes en la cabeza?*
K*: Sí, es la misma.*

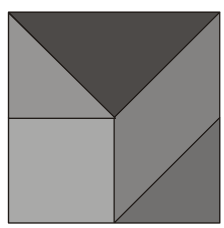
I: *¿Por qué crees que es la misma? ¿Crees que es la misma o tienes alguna duda?*
K*: Tengo dudas.*
I: *¿Crees que hay alguna diferencia entre lo que tú hiciste y lo que yo te enseñé?*
K*: Sí.*
I: *¿Cuál crees que es la diferencia?*
K*: Sé que hay diferencias, pero no sé qué diferencia es. Enséñamelo de nuevo.*

La entrevistadora se lo muestra un instante y el estudiante le expresa que su modelo es correcto pero que está en otra posición.

Kevin coloca un papel encima de su construcción para que no se le desplacen las piezas y realiza primero un giro de 180º en el espacio y, a continuación, otro de 180º en el plano quedándole de la siguiente forma:



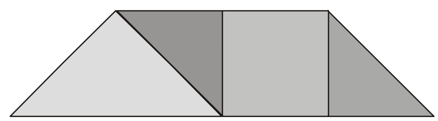
El alumno se da cuenta, de alguna manera, que lo tiene al revés, pero argumenta que las imágenes son las mismas; toma la hoja, y la gira 180º en el plano obteniendo la posición correcta, tal y como muestra la siguiente figura:



En la realización de este modelo percibimos, ya definitivamente, el uso que Kevin hace tanto de imágenes dinámicas como cinestésicas. Es obvia su facilidad para construir y mantener una imagen en su mente, transformarla haciendo rotaciones en el plano y el espacio, y establecer una comparación con el modelo que ha construido. Esta habilidad ha sido identificada por Bishop (1983: 184) como VP (*visual processing*), habilidad que incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales y de imágenes visuales y que hemos comentado en el Capítulo I con más detalle.

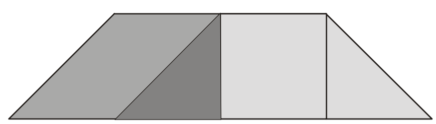
Modelo D del trapecio pequeño.

En el este modelo Kevin realiza con cierta presteza lo siguiente: elige el Tm, el C y los coloca, completando el modelo con los dos Tp-



I: *¿Estás seguro?*
K*: Coloqué las mismas piezas, pero. . .*

La investigadora vuelve a mostrar, un segundo, el modelo D y Kevin rápidamente retira el Tm y un Tp, toma el R y un Tp y construye correctamente el modelo en un tiempo de 60 segundos.

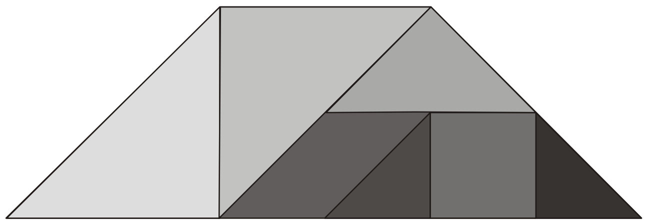


I: *¿Estás seguro ahora?*
K*: Sí.*

Modelo E del trapecio grande

I: *Vamos con la última tarea. Tienes que construir esta figura. ¿Sabes qué figura es?*
K*: Un trapecio.*
I: *Ahora vas a tener que utilizar las siete piezas, luego puede que el ejemplo sea más difícil. Si necesitas mirarlo varias veces, me lo dices, ¿eh?*

Kevin toma un Tp y lo coloca en la parte inferior derecha del trapecio. Luego duda entre tomar el R o el C. Finalmente, coloca el C. De la misma manera sitúa en lugar correcto los dos Tg y el Tm, y finaliza el puzzle sin dificultad.



En la realización global de esta tarea con el Tangram Chino observamos la facilidad que tuvo Kevin para *construir* y *transformar* mentalmente sus imágenes (Kosslyn, 1983; Wheatley, 1990). Pudo completar fácil y rápidamente todos los modelos proporcionados. Evidentemente, esta actuación nos permitía pensar que estábamos ante un estudiante "buen visualizador", algo que no nos ocurrió con Raúl y Noel, que realizaron actuaciones matemáticas "más pobres".

Como ya hemos dicho, las imágenes mentales que Kevin utiliza son dinámicas y cinestésicas (Presmeg, 1985) por el continuo desplazamiento que suponemos que se está produciendo en la mente del alumno y por el movimiento de sus manos al tratar de explicar la situación. Las imágenes mentales desempeñan un papel destacado en esta tarea donde Kevin tiene que anticipar mentalmente la rotación de las piezas antes de colocarlas para formar el modelo proporcionado (Wheatley y Bebout, 1990).

3. 2. 1. 2. Análisis de los problemas no rutinarios o de tipo B.

La diferencia entre los problemas que se plantean en esta sección con los del tipo A es que ante un problema "no rutinario" el alumno tiene la alternativa de "inventarse" o "utilizar" una imagen como una estrategia para resolver el problema planteado, lo que nos podría ayudar a conocer sus preferencias en el empleo de las mismas; sin embargo, en aquellos tiene que construir necesariamente una imagen como parte de la tarea.

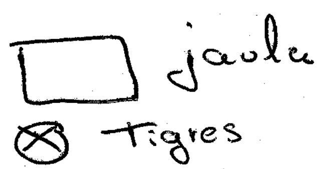
A continuación expondremos las soluciones que Kevin dio a algunos problemas, no sin antes resaltar que resolvió con éxito todos los que la entrevistadora le propuso, salvo el del *perro y el zorro*, en el que inició algunas estrategias que podían haberle llevado a una solución, pero su complejidad y su agotamiento (se le planteó después del problema de *los cubos pintados*) pudieron influir en el proceso.

Al redactar el análisis y nuestra interpretación del pensamiento matemático de Kevin, hemos optado por exponer, en algunos casos, las representaciones gráficas que realizó junto a fragmentos del diálogo que mantuvimos durante la entrevista; y en otros, en los que interpretamos que la estrategia seguida era similar a las anteriores, decidimos exponer brevemente nuestro análisis sin una exposición detallada.

B. 1) PROBLEMA DE LOS TIGRES Y LAS JAULAS
En un zoológico hay 15 tigres y 4 jaulas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los tigres, de forma que en cada jaula haya como mínimo un tigre, y que no haya el mismo número de tigres en 2 jaulas?

[!*No hay más combinaciones!*[3]]

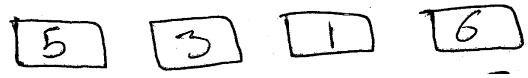
Kevin comienza a resolver el problema empleando símbolos para representar las jaulas y los tigres.



Utilizando una estrategia de adición (para encontrar cuatro números cuya suma sea quince) inmediatamente soluciona el problema.

[3] En adelante, la frase que aparece debajo del enunciado de cada problema caracteriza, según nuestro criterio, la singularidad de cada estudiante.

K*: Esto significa tigres y los cuadrados jaulas. Empezamos por aquí, ¿cuántos tigres eran? 15, […], 5 y 3 igual a 8, 8 y 1 igual 9 y 6 igual a 15. Tenemos el primero.*



A partir de esta solución: (5, 3, 1, 6) pensamos que Kevin no procede al azar sino que establece mentalmente relaciones numéricas lo que nos hace creer que intenta dar sentido a lo que está descubriendo. Todo su razonamiento es mental, sólo escribe las soluciones encontradas.

Fundándonos en lo que expresa en voz alta, creemos que trata de hacer uso de estrategias de:

a) "compensación"[4].

K*: 7 y 3 igual a 10. Hasta aquí está bien, tiene que ser 2 y 3, pero como estos dos no, 1 y 4.*

Comienza arbitrariamente eligiendo los números 7 y 3; como su suma es 10 necesita encontrar dos números que sumen 5 para completar la cuaterna. Toma el 2 y el 3, observa que repite el 3, y en ese momento utiliza la estrategia de compensación, es decir, a 2 le quita una unidad y se la suma al 3, obteniendo la serie (7, 3, 1, 4).

b) "búsqueda de un modelo o patrón"[5].

Kevin establece un patrón o modelo para proseguir en el razonamiento: toma un número natural, por ejemplo 7, y a partir de ahí, establece relaciones de tres números que sumados den como resultado lo que le falta a 7 para obtener 15. Así descubre que en estas cuaternas numéricas no puede haber ningún número igual o superior a 10. El siguiente extracto confirma esta idea:

I: *¿10 imposible?*
K*: Sí.*
I: *¿Por qué?*
K*: Vale 10, 3 y 2 igual a 15 y como tiene que haber como mínimo uno en cada jaula, otro 10, 1, 2 y 2, pero como no puede estar repetido.*
I: *¿cuando tú dijiste 10 imposible, viste todo eso en tu cabeza?.*

---

[4] Una estrategia de compensación es aquella, en la que para resolver mentalmente la suma de *a + b* (a y b números enteros) se "mueve" una unidad de *a* a *b* para obtener: *(a + 1) + (b - 1).*

[5] La búsqueda de un modelo o patrón es una estrategia que repite un camino que se ha utilizado anteriormente con éxito.

K*: Sí. Lo voy a intentar con, 11 imposible, 10 imposible.*
I: *¿10 imposible?, ¿11 imposible por qué?.*
K*: Porque no me da. Mira 11, 1, 2, ya son 14 y 1 pero que están repetidos.*
I: *¿Y 12?*
K*: Menos todavía. De 10 para arriba nada. De 9 para abajo. Espere, espere, son 4 combinaciones, con 4 números, !no hay mas combinaciones!.*

De las seis soluciones del problema Kevin aporta estas cinco:

(5, 3, 1, 6); (9, 3, 2, 1); (8, 2, 1, 4); (7, 3, 4, 1); (7, 5, 2, 1).

Tener imágenes mentales de relaciones entre números es de utilidad para construir modelos y encontrar soluciones a los problemas de una manera significativa.

B. 2) PROBLEMA DE LOS CUBOS PINTADOS

Disponemos de 216 cubitos pequeños de 1x1x1 cm^3 con los que formamos un cubo de 6x6x6 cm^3. Pintamos de blanco todo el exterior del cubo grande.
¿Cuántos cubitos pequeños no tienen ninguna cara pintada de blanco?
¿Cuántos tienen sólo una cara?
¿Cuántos tienen dos caras pintadas?
¿Cuántos tres? ¿Y cuatro?

[*¡ Espere, yo creo que usted es la que se está confundiendo!*]

El alumno utilizó la pizarra para resolver el problema con el fin de que en la grabación se recogiera una visión global de su actuación, lo que nos permite ver todos sus movimientos, lo que escribía, el entorno, etc.

A continuación transcribimos parte de las explicaciones de Kevin:

K*: Lo que tengo que saber es cuántos hay exteriores, y restarle a 216 cubos lo exterior, y me da el interior, ¡pero es que, ahora, no me acuerdo de la fórmula!*
I: *Quizá no tienes por qué poner fórmulas.*

Continúa con el problema

I: *Esta cara tiene 6 x 6 = 36, esta cara tiene 36 pero si está unida a ésta, le tenemos que restar. Si ésta equivale a dos, le tenemos que quitar ésta, [...]. Aquí tenemos ya 36 cubitos [...], empezamos: 36 – 6 = 30, a 36 quitamos 20 y da 16, 16 de base y aquí, como éste no es igual a éste, le tenemos que quitar otros 6 más, dan 24. Ahora sumamos todo el resultado que sería:*
36 + 30 = 66; 66 y 24 igual a 90; 90 + 30 = 120; 120 + 16 + 16 = 142 cubos pintados.
Eso lo tengo que restar a 216 y me da un resultado de 74.

Creemos que Kevin aporta una solución "singular" al problema. La estrategia que utiliza la presenta en dos dimensiones manteniendo continuamente en su mente las imágenes que el planteamiento le sugiere, incluso haciendo mentalmente los cálculos.

En primer lugar dibuja el cubo (6x6x6), en la pizarra, con las correspondientes divisiones en cada cara (malla). Dibuja en el plano, una por una, las 6 caras laterales (que se suponen pintadas de blanco) y las cuadricula. A partir de aquí la secuencia que siguió fue la siguiente:

1º paso: Cuenta los cuadraditos en la primera cara dibujada (supuestamente la cara frontal) y escribe debajo 36.

2º paso: En la segunda cara (cara lateral unida a la anterior), marca los 6 cuadraditos de la izquierda y escribe debajo 30.

3º paso: Suprime los cuadraditos exteriores de una de las bases (la superior), diciendo 36-20 y escribe debajo 16.

4º paso: Señala en la pizarra la supuesta cara posterior y marca en el dibujo los seis cuadraditos de la izquierda, escribiendo debajo 30.

5º paso: Pasa a la cara lateral que le queda, marcando los seis cuadraditos de la izquierda y los seis de la derecha, diciendo "aquí, como éste no es igual a éste y le tenemos que quitar otros seis más da 24".

6º paso: Debajo de la base inferior escribe 16.

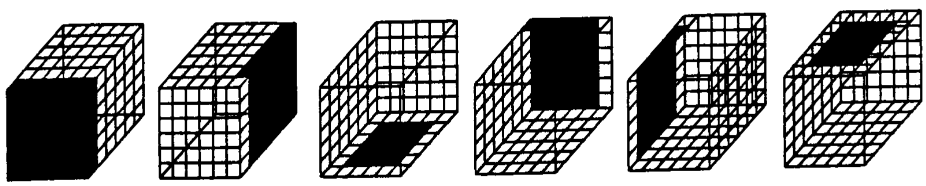
Por último, recuenta mentalmente:

36 + 30 + 16 + 30 + 24 + 16 = 142 (nótese que se equivoca al sumar), y esta cantidad se la resta a los 216 cubitos iniciales, quedándole 74.

Esquemáticamente, la secuencia que suponemos que sigue es la siguiente:

36	cara frontal (F)
36-6=30	cara lateral (L)
36-20=16	base (B)
36-6=30	cara posterior (P)
30-6= 24	cara lateral (L)
36-20=16	base (B)

La siguiente figura representa, en tres dimensiones, la secuencia anterior:



Es importante destacar que en el tercer paso ya Kevin tuvo que pensar en el final del recorrido para restar 20.

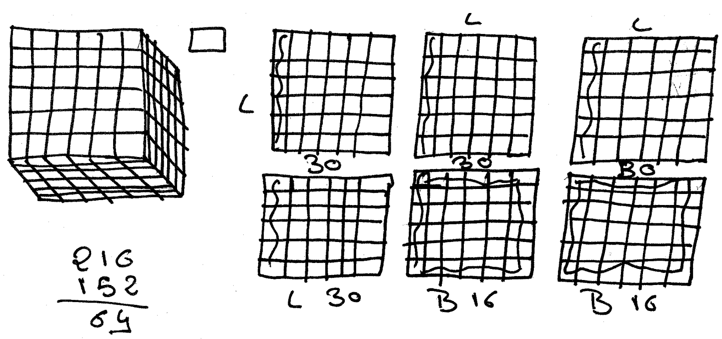
Su imagen del cubo está suficientemente elaborada, esto es, se da cuenta de que algunos cubos pertenecen a dos o más caras, y cuantifica su número, en cada una por separado: establece una partición de la superficie total del cubo (en conjuntos disjuntos) para propósitos de cómputo.

Como ya hemos dicho, Kevin hace el recuento anterior de memoria cometiendo un error de cálculo; este hecho lo utiliza la entrevistadora para hacerle la pregunta siguiente:

> I: *Imagínate ahora que las caras pintadas de blanco las quitamos todas ¿Qué te queda dentro?*
> K*: Un cubo, pero más pequeño.*
> I: *¿Cuáles serían sus dimensiones?*
> K*: El lado sería: 1, 2, 3, 4. ¡Cuatro!*
> I: *¿Cuántos no tienen ninguna cara pintada de blanco?*

A lo largo del dialogo Kevin va contestando correctamente las cuestiones del problema, formuladas de nuevo por la entrevistadora, y es, entonces, cuando se percata de que la solución a la primera de las preguntas planteadas en el enunciado del problema es 64 y no 74 como había calculado inicialmente, lo que está en consonancia con su afirmación de que el cubo interior que queda después de quitar las caras pintadas tiene de arista 4.

Al finalizar la entrevista, se le pide a Kevin que pase el dibujo de la pizarra a un papel, como se recoge en la siguiente figura escaneada:



Lo sorprendente es que esta representación no coincide con la realizada en la pizarra. La secuencia que ahora presenta, en la que el 30 y el 16 indican número de cubitos y la L y la B hacen referencia a caras laterales y bases del cubo, es:

30 L - 30 L - 30 L - 30 L - 16 B - 16 B.

Pensamos que al presentar esta segunda secuencia, Kevin hace un recuento en su mente y sintetiza o esquematiza la situación para mostrarla más simétrica u ordenada. Nótese que en la primera no sigue un patrón natural, pues es bastante desordenada, quizá por esa razón, simplifica y presenta la segunda con objeto de explicarlo a la investigadora.

Podemos inferir que la estrategia seguida fue la siguiente: imaginó las seis caras del cubo grande y las dibujó en el papel. Percibe que una “arista de cubitos” pertenece a dos caras al mismo tiempo y marca en las cuatro caras laterales lo que no debe cuantificar, ya que, en caso contrario, lo sumaría dos veces, como se observa en la figura escaneada anterior.

Así pues las dos secuencias que Kevin presenta son:

1ª secuencia: 36 F - 30 L - 16 B - 30 P - 24 L - 16 B

2ª secuencia: 30 L - 30 L - 30 L - 30 L - 16 B - 16 B

En estos procesos podemos comprobar la calidad y el poder de las imágenes que el alumno utiliza; apoyándose en ellas desde el primer momento domina el contexto del problema en todas sus vertientes. Como se constata en la primera secuencia, al escribir el primer 16 ha tenido que imaginar la situación globalmente haciendo "un recorrido" a través de las caras. En la segunda secuencia, antes de expresar el primer 30 ha tenido que imaginarse el final del "camino" de las caras laterales, lo que indica su fuerte capacidad de visualización (relacionando las imágenes que el problema le sugiere).

Kevin contesta sin dificultad alguna el resto de las preguntas formuladas en este problema.

A modo de síntesis, podemos afirmar que imaginó el cubo descomponiéndolo en forma versátil: construye imágenes significativas de la situación planteada que le ayudan a dar sentido a su estrategia y a encontrar soluciones viables.

Kevin manifiesta una seguridad total en sus razonamientos: este hecho queda reflejado en el problema que nos ocupa. Por una parte, tiene claro que el número de cubitos que no tienen ninguna cara pintada de blanco es 74, y por otra, manifiesta que el cubo interior (obtenido al sustraer al cubo inicial todos los cubitos que tienen alguna cara pintada), tiene arista cuatro. Para él es obvio (confía plenamente) en que el número de cubitos del cubo interior es 74.

La investigadora le pide que calcule el volumen del cubo interior; Kevin sabe que tiene que multiplicar 4 por 4 por 4 y contesta automáticamente (sin reflexionar) 74.

La investigadora insiste en que realice el producto anterior y esta vez obtiene 64.

> I: *¿por qué en un lado 74 y en otro 64?, ¿hay algún tipo de error?*
> K*: Espere, yo creo que usted es la que se está confundiendo. ¿Usted que me preguntó?*

En este momento Kevin duda, se queda indeciso por unos segundos y se da cuenta de su error. Está convencido de que su equivocación está en los cálculos y no es su planteamiento, lo que evidentemente es cierto. Este hecho nos expone una vez más la seguridad que manifiesta en sus propias imágenes y la firmeza con que defiende sus planteamientos.

B.3) PROBLEMA PISTA DE ATLETISMO

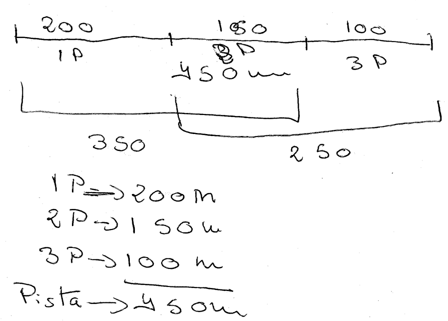
Una pista de atletismo está dividida en tres partes desiguales, la longitud de la pista es de 450 m, la longitud de la primera y la segunda parte juntas es de 350 metros, la longitud de la segunda y tercera parte juntas es de 250 m. ¿Cuál es la longitud de cada parte?

[*!Esto está hecho!*]

Kevin, después de leer el problema dice "esto está hecho" lo que denota que dispone en su mente de una estrategia visual, ya que imagina la pista que representa mediante un diagrama, (sobre el que sitúa los datos del problema) y encuentra fácilmente la solución.

A continuación transcribimos la argumentación del alumno y presentamos el diagrama (escaneado) donde justifica su razonamiento.

K*: ¿Cuál es la longitud de cada parte? A ver, si la pista es de 450 metros, y está dividida en 3. Si la primera y la segunda parte es de 350 metros. Lo ponemos por aquí más o menos, esto son 350 metros y esto son 100 metros, es decir que 100 metros es lo que da la tercera pista, es decir, la segunda y la tercera es de 250 metros. Es decir que si ésta vale 100, a 250 metros le resto 100 que es lo que vale la tercera pista y de 150 metros que mide la segunda pista, es decir, que ésta mide 200 metros, 150, 200 metros, primera, segunda, tercera, 200 metros, la suma 450 metros. Hecho.*

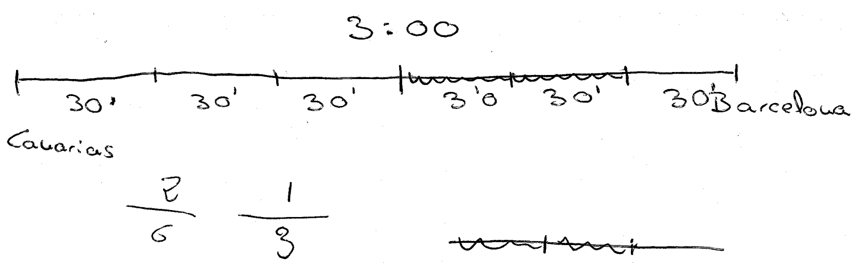


B. 4) PROBLEMA DEL PASAJERO

Un pasajero que había viajado la mitad del viaje se queda dormido. Cuando se despertó todavía tenía que viajar la mitad de lo que viajo mientras dormía. ¿Qué parte del trayecto total estuvo dormido?

[*“!Ya está. Vamos a dividirlo todo!”*]

Kevin lee el problema y, simultáneamente, realiza el siguiente diagrama que representa la distancia recorrida.



K*: Un pasajero que ya había viajado la mitad de un viaje. Lo que está así es lo que está dormido, y lo que está liso es lo que está despierto. Cuando se despertó, todavía tenía que viajar la mitad de lo que viajó mientras dormía, si estaba despierto esto, y dice aquí: cuando se despertó todavía tenía que viajar la mitad de lo que había viajado mientras dormía, lo que estaba dormido. . . La mitad es esto. Ya está. Vamos a dividirlo todo, esto está dividido, 2/6.*
I: *¿2/6?*
K*: Es decir 1/3, ¿no? 1/3 lo que quedó dormido.*
I: *¡1/3 lo que se quedó dormido!*
K*: Sí, es decir, que si el viaje dura, vamos a ponerle, de aquí a Barcelona podría durar 3 horas, 3 horas, había estado despierto 3 medias horas, es decir, una hora y media, había dormido una hora.*

Una vez más hace uso de una estrategia visual adecuada (emplea un diagrama), análoga a la utilizada en el problema anterior.

B. 5) PROBLEMA DEL PERRO Y EL ZORRO

Un perro quiere cazar a un zorro que se encuentra a 30 metros de distancia. El salto del perro es igual a 2 metros y el salto del zorro es igual a 1 metro. Mientras el zorro hace 3 saltos, el perro hace 2. ¿Cuánto tiene que correr el perro para alcanzar al zorro?.

[*!... el zorro va saltando de tres en tres...!]*

Este problema se le formula a Kevin después del de los cubos pintados y a última hora de la mañana. Dicho problema no lo resolvió ninguno de los estudiantes entrevistados. Kevin, a pesar del cansancio, intenta encontrar la solución con empeño. Aborda el problema con diferentes estrategias.

1. Mediante arcos simula los saltos del perro y del zorro. No obtiene el resultado correcto, pero creemos que esta estrategia sobre papel cuadriculado le habría proporcionado la solución.

2. Construye una tabla e intenta buscar una regularidad o pauta en los números, pero no lo consigue

perro	zorro
2 saltos	3 metros
4 metros	3 saltos
4 saltos	6 metros
8 metros	6 saltos
6 saltos	9 metros
12	9
16	12
8	12
20	15
10	15

3. Realiza un diagrama lineal indicando la posición del perro a 30 metros. Dibuja el zorro y encuentra que el perro tiene que realizar 15 saltos para llegar a la posición inicial del zorro; como éste también se mueve, intenta encontrar una relación entre los saltos dados por el perro y los dados por el zorro; no alcanza la solución correcta.

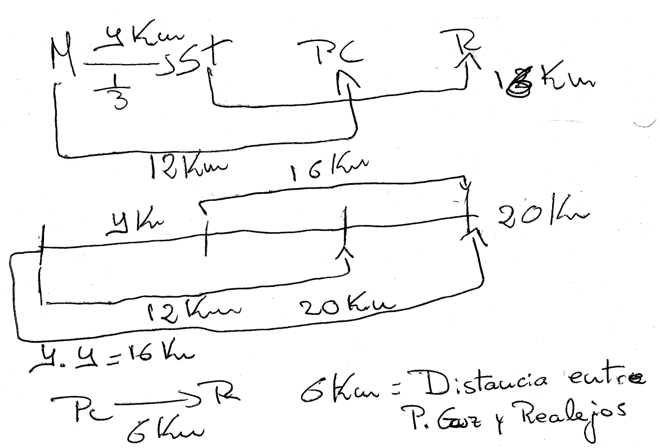
4. Recurre a una analogía de pensar en el zorro y en el perro como dos coches que van a distinta velocidad. Simula el movimiento con las manos indicando que si un coche va a 90 y el otro a 60, la distancia entre ellos se va acortando y afirma que se alcanzan.

Aunque el alumno utiliza distintas representaciones semióticas, al ser producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen al sistema de representación de las magnitudes, no fue capaz de resolver el problema.

B. 6) PROBLEMA DE LAS DISTANCIAS
La distancia de La Matanza a Santa Úrsula es un tercio de la distancia que hay de La Matanza al Puerto de la Cruz. La distancia de Santa Úrsula a Los Realejos es cuatro veces la distancia de La Matanza a Santa Úrsula. Si la distancia de La Matanza al Puerto de la Cruz es 12 Km ¿Cuál es la distancia del Puerto de la Cruz a Los Realejos? ¿Cuál es la distancia de La Matanza a Santa Úrsula?

[*!Tengo que dividir 1/3. Ahora no me acuerdo!]*

Kevin aborda el problema construyendo un dibujo, una especie de croquis que reproducimos a continuación y en el que representa, simbólicamente, los lugares a los que hace referencia el problema:



Su razonamiento lo expresó de la siguiente forma:

> *K*: *Si la distancia de aquí a aquí es 1/3 de la que hay de aquí a aquí, y la diferencia que hay entre la distancia de la Matanza al Puerto de la Cruz es de 12 Kms. Si esto es 1/3 tengo que dividir 1/3. !Ahora no me acuerdo!.*

No fue la primera vez que Kevin, a lo largo de las entrevistas, hizo uso de la expresión "no me acuerdo", lo que nos hace pensar en su inseguridad frente a los contenidos escolares procedimentales. No obstante, en este caso concreto, la investigadora le preguntó:

> I: *¿Qué significa un tercio?*

Kevin, rápidamente, continuó resolviendo el problema de la siguiente forma:

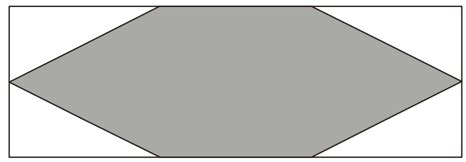
> K*: De 3 partes 1. Entonces 4 Kms, 1/3 es de aquí a aquí, 4 Km Ya tenemos los datos. Hay que conseguir otro. La distancia de Santa Úrsula a Los Realejos es 4 veces la distancia de La Matanza a Santa Úrsula. 4 x 4 = 16, 16 Km Ya tenemos todas las distancias que hay entre pueblo y pueblo.*
> *¿Cuál es la distancia del Puerto a Los Realejos?*
> *Vamos con la segunda; ¿Cuál es la distancia de La Matanza a Santa Úrsula?.*
> *¡Si ya la tenemos!, 4 Km*
> *¿Cuál es la distancia del Puerto de la Cruz a Los Realejos?*
> *La Matanza, Santa Úrsula, el Puerto y los Realejos. De aquí a aquí hay 4 Km Y de aquí a aquí hay 12 Km Y de Santa Úrsula a Los Realejos hay 16 Km Y ahora lo que tengo que hallar es la distancia del Puerto de la Cruz a Los Realejos, !fácil!.*
> *Si de aquí a aquí hay 4 Km, le sumo a 16 que es la diferencia entre Santa Úrsula y los Realejos, le sumo 4 Km que es la diferencia entre La Matanza y Santa Úrsula, hacen 20 Km que es esta raya, 20 Km y le resto los 12 Km que hay entre la Matanza y el Puerto de la Cruz, y tenemos 6 Km que es la diferencia entre el Puerto de la Cruz y los Realejos.*

El proceso realizado por Kevin es correcto, aunque su solución no es exacta ya que la diferencia entre 20 y 12 es 8, y no 6 como él señala. Es interesante comprobar cómo utiliza su conocimiento del entorno físico y geográfico para enfocar el problema, hecho que se constata cuando se le solicita que explique por qué había utilizado el orden, La Matanza, Santa Úrsula, El Puerto de la Cruz y Los Realejos:

> K*: El Realejo es el pueblo que está más lejos, La Matanza para allá, entre el medio está el Puerto de la Cruz y Santa Úrsula, y estos son los dos: el exterior y el interior.*

B. 7) PROBLEMA DEL HEXÁGONO

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:

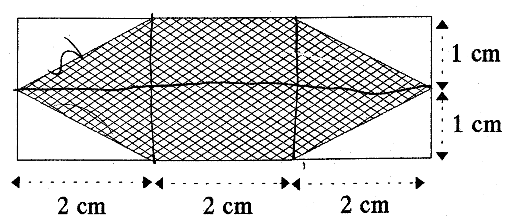


[*!Tengo otra forma de hacerlo!*]

Al plantearle este problema, Kevin rápidamente argumenta:

> K*: La base mide 6 centímetros, la altura mide 2 centímetros. Está dividido en tres partes iguales, yo lo dividiré en seis partes iguales […].*

Dibuja una línea en la mitad del hexágono, como muestra la siguiente figura escaneada y continúa diciendo:



> K: *Ya tengo seis partes iguales, ahora de las cuatro que están, las exteriores, voy a coger una cualquiera[…].*

Kevin sonríe, pensamos que en estos momentos ya se ha dado cuenta de cómo encontrar la solución. Continúa diciendo:

> K*: Ya lo más difícil lo hice. […] sólo me queda descubrir una cosa y suma, que sería !mi madre!, no me acuerdo ahora del área.*

A pesar de su comentario, continúa con el problema y expone:

K*: El área del rectángulo era base por altura.*

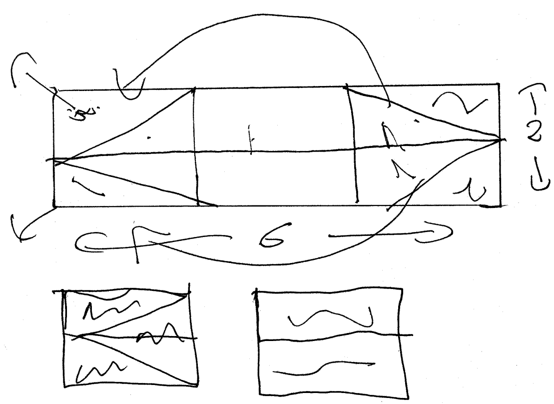
Se refiere a los rectángulos exteriores.

K*: Si el rectángulo mide dos centímetros cuadrados, naturalmente el triángulo medirá un centímetro cuadrado. Sumo las cuatro zonas sombreadas de las zonas exteriores, que serían uno, dos, tres, cuatro darían un cuadrado, ese cuadrado mide cuatro centímetros. ¡Vale! cuatro centímetros más cuatro centímetros cuadrados del cuadrado interior son ocho centímetros cuadrados.*

Cuando termina el razonamiento, manifiesta:

K*: Tengo otra forma de hacerlo.*

Sin hacer dibujo alguno y realizando movimiento con sus dedos explicó a la entrevistadora el segundo método. Esta le pide que exprese por escrito sus pensamientos y Kevin dibuja esto:



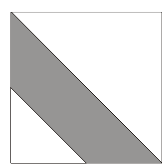
El proceso que siguió fue el siguiente: separó los dos triángulos exteriores de la parte izquierda de la figura y colocó en su lugar lo que llamó “uno”, así obtuvo el cuadrado que representó debajo y a la izquierda de la figura original, el cuadrado de la derecha corresponde al cuadrado interior de la figura.

La capacidad de visualización de Kevin le ayuda a dar sentido a este problema y resolverlo de dos maneras diferentes. De hecho, emplea imágenes dinámicas (Presmeg, 1986) en sus planteamientos.

Para los otros estudiantes, Raúl y Noel, como veremos posteriormente, lo más importante era saber si la figura sombreada se trataba de un rombo o un hexágono, con el fin de encontrar qué formula utilizar. En contraste, Kevin no parece preocuparse por la forma de la figura y resuelve con convicción el problema a pesar de su inseguridad ante las fórmulas enseñadas en el aula. Su comprensión de lo que significa el área y de cómo medirla es clara, según puede comprobarse en los párrafos anteriores.

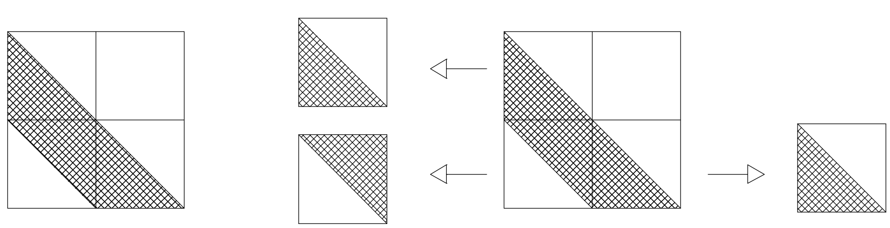
B. 8) PROBLEMA DEL TRAPECIO.

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



[*!Entonces 0.125 lo multiplico por 3!*]

Kevin dividió el cuadrado en cuatro partes y observó que tres de ellas eran exactamente iguales, salvo algún tipo de rotación como se observa en las figuras:

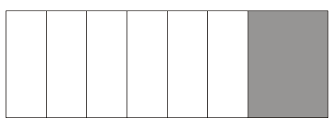


Una vez realizada esta construcción, rápidamente se dio cuenta de la solución argumentando que bastaría calcular el área de cada una de las partes (la cuarta parte del área del cuadrado, 0.25 cm^2), dividir por dos (0.125 cm^2) y sumar tres veces esa cantidad (0.375 cm^2).

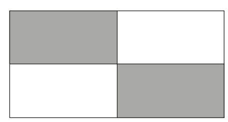
De nuevo, la construcción de una imagen del problema y su habilidad para visualizar, utilizando imágenes dinámicas, le permiten a Kevin resolver el problema con éxito.

B. 9. PROBLEMA DE LAS FRACCIONES

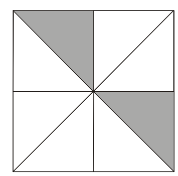
¿Qué fracción de la figura entera representa la parte sombreada de las siguientes figuras?:



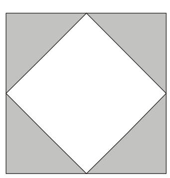
A



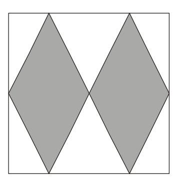
B



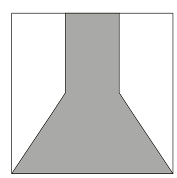
C



D



E



F

[*“!Todas las partes son iguales, ésta es equivalente a ésta!”]*

Kevin una vez más, no tiene dificultad para resolver este problema. Es evidente la utilización que hace de imágenes dinámicas, utilizando estrategias de descomposición /

composición de las mismas en la solución de los modelos D, E y F, como mostraremos a continuación.

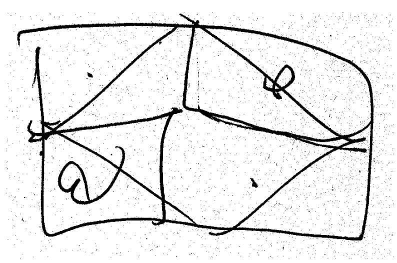
Como se observa, el modelo D está compuesto de un cuadrado blanco y cuatro triángulos negros. Kevin resuelve mentalmente el problema y da la solución. La entrevistadora le pregunta cómo lo resolvió y contesta:

> K: *Imaginando, unimos éste con éste, entonces quedaría éste y dos más, sería 1, 2, 2/4*

De nuevo le solicita que explique el razonamiento. De sus palabras inferimos que, por una parte y después de dividir el cuadrado blanco interior en cuatro triángulos, se da cuenta de que hay el mismo número de triángulos blancos que negros, lo que le lleva a la respuesta dos cuartos, y, por otra, dada su preferencia por usar imágenes dinámicas, sigue un camino alternativo para encontrar la solución: separa los triángulos, une, de dos en dos los triángulos del mismo color y los vuelve a colocar en el modelo, como él expone:

> K*: Éste lo uno a éste y a esto blanco. Esto lo uno con esto y esto negro. Quedaría blanco, blanco, ¡la mitad!. O al revés, para que quede más bonito, se hace así, éste así, uno éste con éste y éste con éste, quedaría una cosita así: negro, negro y blanco, blanco, el ajedrez.*

El siguiente dibujo escaneado representa lo que Kevin dibujó:

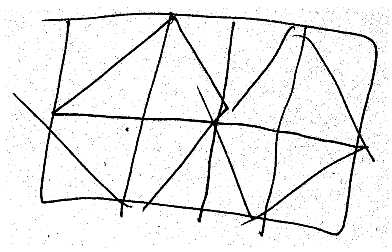


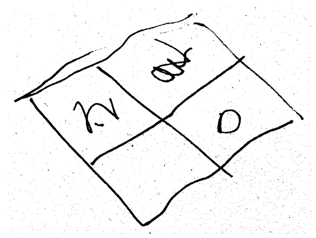
En el modelo E utiliza la misma estrategia de descomponer /componer sus imágenes mentales. La siguiente transcripción ilustra el proceso:

> K*: Son 2 rombos y un cuadrado. Pero, vamos a hacer una cosa, esto, lo que ve usted, es una cosita así, zas, zas, zas. Si yo divido aquí, y divido aquí, y divido aquí, y divido aquí, todas las partes son iguales, […], un rombo, dos rombos, de aquí a aquí sería un rombo, y de aquí a aquí sería otro, parte. Todas las partes son iguales, ésta es equivalente a ésta, ésta a ésta Esto es equivalente para mí, es una mitad, la mitad, vale, si yo este lo paso aquí, vamos a ponerle que esto está así, el*

rombo está así. Esto lo quito y lo pongo aquí, queda un cuadrado, y esto lo paso aquí y queda un cuadrado, y esto lo paso a aquí, y esto a aquí, quedaría más bien. [...] esto lo uno con esto así, y esto con esto, formaría otros dos rombos, los dos rombos unidos daría una cosita así, [...], con los blancos forma un rombo y con los negros forma otro rombo. Se unen y este y este de negro, o este y este de negro, y estos dos de blanco serían una mitad.

Separa los triángulos blancos laterales y los une en un rombo. Realiza un proceso similar con los triángulos interiores blancos. En los dibujos siguientes, Kevin sintetiza el proceso seguido.





En el último modelo, Kevin aplica igual estrategia: descomponer y componer su imagen mental.

Este hecho puede enlazar con lo que Bishop (1983: 184) identificó como la habilidad espacial VP (*visual processing*), habilidad que incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales y de imágenes visuales.

3.2.2. Resolviendo tres problemas matemáticos en un control

Como parte de la evaluación, Kevin tuvo que realizar una prueba que constaba de dos partes, propuesta conjuntamente por la investigadora y la maestra. En la primera parte de la prueba los alumnos tenían que resolver tres sistemas de ecuaciones por los métodos de sustitución, igualación y reducción. En la segunda, plantear y resolver tres problemas verbales sobre sistemas de ecuaciones. Estos últimos tienen un doble objetivo:

a) sirven para valorar los conocimientos de álgebra después de una instrucción en esta materia y

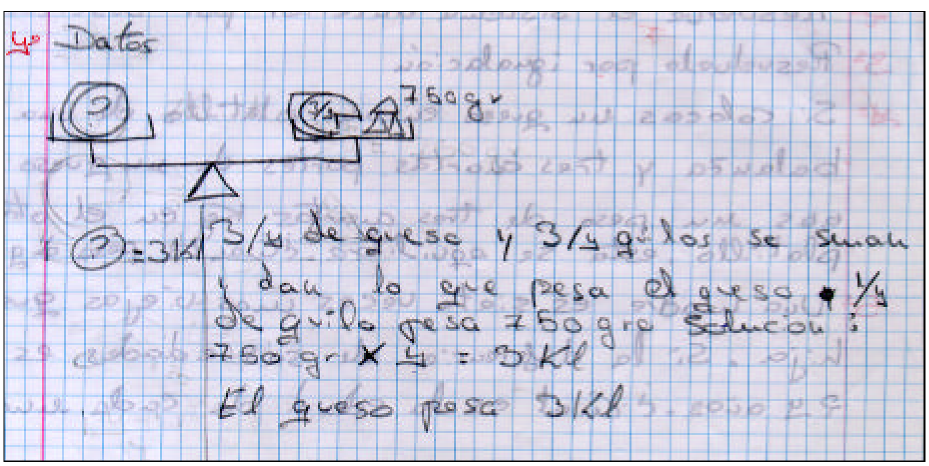
b) son de aquella gama que proporciona oportunidades para que los estudiantes los resuelvan por métodos visuales que les lleven a construir las ideas matemáticas con comprensión y con significado, y que la solución no sea la aplicación rutinaria de un algoritmo.

Para interpretar los resultados de los tres problemas aquí considerados, nos apoyamos en el conocimiento que disponemos de Kevin, ya que participó en 16 problemas planteados en las entrevistas.

Destaquemos que desconoce las herramientas algebraicas enseñadas en la escuela, como lo corrobora el hecho de que dejara en blanco la primera parte del examen, esto es, los sistemas de ecuaciones propuestos.

Presentamos ahora el enunciado, la solución escaneada y nuestro análisis de los tres problemas realizados por Kevin.

PROBLEMA DE LA BALANZA
Si colocas un queso en un platillo de una balanza y ¾ partes del queso más un peso de ¾ kilos en el otro platillo, la balanza se equilibra. ¿Cuánto pesa el queso?



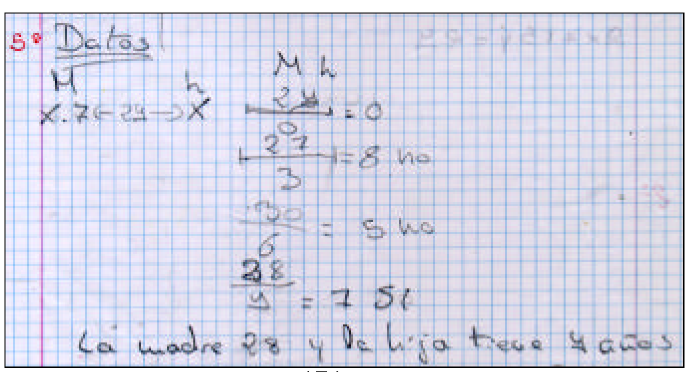
Podemos decir que Kevin sigue un pensamiento lógico en este problema. Al no disponer de las herramientas algebraicas, tiene dificultad para comunicar sus estrategias. La forma en que exterioriza sus imágenes y representaciones mentales es haciendo un dibujo, que apenas nos es accesible a los demás. Sin embargo, Kevin expresa todos los conceptos e ideas y la solución en ese dibujo. Es la profesora la que no valora las reglas de interpretación de su representación, por lo que no le puntuó.

Pensamos que Kevin utiliza un método visual (Presmeg, 1986); se apoya en el dibujo que el enunciado del problema le sugiere. Esta imagen figurativa se corresponde con las imágenes concretas a que alude Norma Presmeg (1985).

También destacamos cómo Kevin utiliza la equivalencia 3/4 = 750 gr, dato éste, que posiblemente no lo haya aprendido en la escuela, sino que probablemente lo ha adquirido por su experiencia en la vida cotidiana. Esta forma autodidacta se manifiesta, además, en el hecho de que escribe de una manera natural 3 kl en lugar de 3 kg, expresando correctamente 750 gr, lo cual no da lugar a error porque mantiene el vocabulario común.

Al hacer el dibujo, pensamos que Kevin ya ha resuelto el problema: tiene la imagen visual de la solución. Su estrategia para resolverlo concuerda con el método visual (Presmeg, 1986). La explicación que utiliza del dibujo es sólo un intento de justificar el resultado ya visualizado.

PROBLEMA DE LA MADRE Y LA HIJA
Una madre es siete veces más vieja que su hija. Si la diferencia de sus edades es 24 años. ¿Cuál es la edad de cada una?



En primer lugar, Kevin intenta plantear el problema algebraicamente y lo hace utilizando sólo la incógnita x que asocia con la edad de la hija, escribiendo:

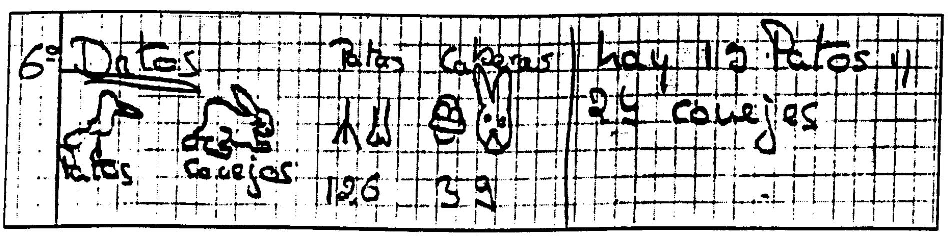
$$\begin{array}{cc} M & H \\ x \cdot 7 - 24 & = x \end{array}$$

Nótese que no refleja en el papel una segunda incógnita y = x . 7 (edad de la madre), sino que mantiene en su mente esa relación, lo que nos permite, en cierto modo, afirmar que recurre a una imagen mental. Por otra parte, hay que destacar que en su planteamiento no expone la diferencia de las edades, que sería lo cómodo y que es la estrategia de la mayoría de las personas (y - x = 24), sino que apunta x . 7 - 24 = x, lo que indica que entiende y da significado al enunciado del problema.

Hay que señalar que no resuelve el problema por la sencilla ecuación que ha planteado (6 x = 24), algo usual para muchos estudiantes, sino que recurre al método de ensayo y de error mediante una "tabla de doble entrada" donde las variables son las edades de madre e hija (numerador y denominador) y el objetivo es encontrar un siete, lo que descubre al cuarto intento, en cuyo proceso los ensayos fueron realizados con edades lógicas para la madre.

PROBLEMA DE LOS PATOS Y LOS CONEJOS

En un corral hay patos y conejos siendo un total de 39 cabezas y 126 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?



Como se observa en la figura anterior, Kevin apunta correctamente el resultado, 15 patos y 24 conejos sin aportar estrategia alguna de solución.

¿A qué profesor no le ha sucedido pasar por alto un resultado y no valorarlo al no encontrar escrito ningún método de solución?

Nosotros creemos que Kevin resolvió el problema haciendo uso de una estrategia: mentalmente usa imágenes y no necesita apoyo concreto que le ayude en la búsqueda de la solución.

Esta afirmación se basa en que Kevin, de los 16 problemas planteados en las entrevistas clínicas, resolvió dos, de enunciados muy parecidos al que analizamos aquí, utilizando el mismo método. Uno de ellos se enuncia de la siguiente forma: en un corral había conejos y gallinas. Cuando Jonás miró a través de la valla, vio 7 cabezas y 20 patas. ¿Cuántos conejos había? ¿Cuántas gallinas? (Adaptado de Brown, 1993).

Transcribimos a continuación parte de la entrevista donde Kevin resolvió el problema anterior.

> K*: Siete y veinte patas, ¿pero siete cabezas?*
> I: *En total.*
> K*: En total. Voy a resolver primero cuántos conejos había. Sería siete cabezas y veinte patas. Vamos a resolver primero las cabezas.*
> I: *¿Resolver las cabezas? ¿A qué te refieres?.*
> K*: Cuántas cabezas de conejo había.*
> I: *¿Y cómo lo vas a hacer?*
> K*: Vamos a poner tres de conejo y después tres de gallina, […] los conejos tienen cuatro patas, tres por cuatro igual a doce. Doce, cuatro por dos, !ya está resuelto!.*

Kevin abordó el problema por ensayo y error, donde como primer ensayo tomó el número tres, que no eligió al azar (como nos explicó en la parte posterior de la entrevista), sino que recordó a su vez la solución de un problema resuelto días anteriores:

> K*: "[…] tres porque es como la mitad de siete"*

En el problema que nos ocupa, de los patos y los conejos, pudo haber actuado de la misma forma que lo hizo en el de los conejos y las gallinas, pues tomó un número cerca de la mitad del total de cabezas, 20 en este caso, y supone que hay 20 conejos. Haciendo la codificación, cabezas : c; patas: p, procedió según nuestra opinión así:

$20\ c \times 4p = 80\ p$ (80 patas);

$126\ p - 80\ p = 46\ p$ (46 patas);

$46\ p : 2 = 23\ p$ (23 patos);

20 conejos + 23 patos = 43 cabezas;

Como no le da 39 cabezas, que es el dato del problema, en otros intentos obtiene la solución exacta: 24 conejos y 15 patos que es lo único que Kevin refleja en el papel, como se observa en la figura anterior.

En síntesis, Kevin estableció una relación conectando mentalmente la solución de este problema con otras anteriores, lo que denota un acto cognitivo. La imagen de un problema resuelto anteriormente le ayuda a dar solución a una situación análoga (Presmeg, 1997).

A pesar de que Kevin resolvió correcta y creativamente, utilizando un método visual, los tres problemas planteados, no aprobó el examen. La explicación está en que la maestra no valoró estas estrategias porque lo que quería evaluar era si los alumnos sabían o no álgebra; si sabían resolver los sistemas de ecuaciones por los métodos estándares, algo que Kevin no demostró.

Partiendo de la base de que la evaluación debe formar parte del proceso de enseñanza, nos surge una duda razonable sobre la actuación de la maestra en relación con la calificación a Kevin.

Dejando bien sentado que el momento de la evaluación (cuando recibe la nota) es muy importante para el alumno, un profesor no puede limitarse a poner una “cruz”, o un “no”, o “esto está mal”, o pasar por alto una cuestión, sino que debe reflexionar más sobre lo que ha escrito el alumno y lo que ello entraña… Somos conscientes de la dificultad que, en la práctica, el tratamiento individualizado conlleva, debido a múltiples razones (número de alumnos por aula, excesiva cantidad de materia, falta de actualización del profesorado, ...).

Entendemos que la actuación de la maestra, coincide con la de muchos profesionales que consideran más importantes cumplir las reglas institucionales, que tener en cuenta las situaciones y realidades particulares.

Sin embargo, no se valoró el pensamiento visual en este caso concreto y, probablemente, no se valoran muchos otros, por el desconocimiento de que hay personas visualizadoras. Por ello, consideramos importante desde la investigación, trabajar con profesores, analizando sus prácticas educativas, con el fin de mejorarlas. Serían deseables investigaciones que ayuden a los profesores a reflexionar y darse cuenta de que sus creencias y prácticas afectan al desarrollo de sus alumnos.

La situación planteada en los párrafos anteriores y la existencia de alumnos similares a Kevin (visualizadores, observadores, imaginativos, creativos, autodidactas) que no son valorados académicamente, no es nueva y ocurre con cierta frecuencia en las aulas de muchos países, donde:

- se descuida la educación visual,

- el sistema de enseñanza en general y los métodos de evaluación no permiten detectar a estos alumnos.

- el sistema educativo considera que son alumnos inteligentes (saben razonar, actúan de diferente forma ante situaciones nuevas, etc) pero los suspende posiblemente por no utilizar las herramientas estándar.

- se tiende a no tomar en cuenta, ni valorar los conocimientos adquiridos fuera del aula.

Hay en la actualidad un consenso en que la búsqueda de patrones y relaciones matemáticas por los estudiantes debe ser tratada como una acción matemática, en que la visualización sea estimada con igual rango que el cálculo y la simbolización (NCTM, 1989; Senechal, 1990); sin embargo, la educación visual es a menudo un área olvidada en la práctica educativa, en relación con la fuerza que tienen los contenidos numéricos y algebraicos.

En la propuesta para el año 2000 de los Estándares Curriculares americanos (NCTM, 1998) se incentiva la visualización como parte fundamental del entendimiento para las relaciones en geometría, en dos y tres dimensiones, sobre todo, para estudiantes de grado medio.

Ya que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas, sería deseable que en el cambio gradual, desde el punto de vista de la educación matemática, se tuviera en cuenta entre las actividades, una atención sistemática a la visualización y las nuevas tecnologías, lo cual comprometería activamente a los estudiantes en la situación de aprendizaje.

3.2.3. En síntesis

A través de las acciones matemáticas y de las expresiones verbales efectuadas por Kevin, inferimos que la visualización y las imágenes mentales desempeñan un papel importante en sus procesos de pensamiento cuando resuelve problemas de matemáticas; este hecho no es extraño, ya que algunos estudiantes se aproximan a las soluciones de los problemas empleando sus imágenes (Kruteskii, 1976; Presmeg, 1985, 1997; Wheatley, 1997, 1999).

En su actuación, ante los problemas planteados, Kevin se manifiesta como una persona observadora y creativa. Los resuelve recurriendo a su experiencia y aportando sus estrategias. Como hemos comentado en los problemas expuestos, las estrategias que Kevin emplea, involucran básicamente imágenes *concretas*, *cinestésicas* y *dinámicas*. Ellas le ayudan a dar sentido a los problemas y a resolverlos; en algunos (área del hexágono, cubos pintados) aporta más de una solución. A menudo puede "ver" y visualizar la respuesta a los problemas sin utilizar, salvo fórmulas de fácil recuerdo (área del rectángulo, volumen del cubo,...), conocimientos teóricos aprendidos en la escuela.

Kevin se sentía más relajado y confiado en sus razonamientos cuando empleaba la visualización. Como hemos señalado en problemas anteriores, manifiesta inseguridad cuando piensa que tiene que emplear contenidos y procedimientos escolares. En ocasiones, necesita alguna frase de la entrevistadora que le recuerde que hay distintas vías para afrontar un problema. Después de superar este primer estadio, e iniciado su razonamiento, la seguridad que manifiesta es total.

3. 3. NOEL[1]

Noel fue elegido para esta investigación por su puntuación en el test WSAT. Obtuvo una puntuación de 92.5; contestó correctamente en siete minutos (un minuto menos del tiempo establecido para su ejecución) 95 de los 100 items planteados. Con relación al WSAT es un estudiante con una puntuación "muy alta" (Wheatley, 1978).

Durante el desarrollo de la investigación constatamos que la competencia de Noel ante los problemas matemáticos "no rutinarios" no estaba en consonancia con las investigaciones realizadas en USA por Brown y Wheatley (1989, 1990) y Wheatley, Brown y Solano (1994), en las que una de las conclusiones es:

"Obtener una alta puntuación en el test WSAT"

equivale a

"ser competente en resolver problemas no rutinarios",

tesis que se confirma en el caso de Kevin y no en el de Noel.

Ante el hecho de la alta puntuación de Noel en el test, quisimos profundizar en sus estrategias al aplicarlo.

A continuación exponemos parte del dialogo que mantuvimos con él en relación a este tema:

> 1 Investigadora: *¿Te acuerdas del test que hiciste? Lo hicimos hace unos cuantos meses. ¿Te acuerdas? ¿Cómo era el test? ¿Te acuerdas de lo que se pedía?*
> 2 Noel*: Sí, que las figuras que sean iguales dándole vueltas, girando a la izquierda o a la derecha, se pusieran de la misma forma que la primera. Si era igual se ponía S y si nó N.*
> 3 I: *¿Cuándo era no? ¿Cuándo ponías N?*
> 4 N*: Cuando la figura al girarla a la derecha o a la izquierda no coincidía.*
> *5* I: *¿Te resultó fácil?*
> 6 N: *Sí.*
> 7 I: *¿Cómo lo hacías?*
> 8 N*: Iba " mirando", en la mente, yo dibujaba la figura*[2] *y le daba como vueltas a ver si coincidía, con las que pedían. Concentrado en los dibujos, pero no todos los dibujaba en mi mente, por ejemplo: este se ve que tiene la parte mayor de abajo, si se gira a la izquierda va a coincidir con el original.*
> 9 I: *Entonces no lo ponías en tu mente.*
> 10 N*: No, al girarlas ya sabía que coincidía con el original.*
> 11 I: *¿Y en las otras?*

[1] Nombre supuesto
[2] Se refiere a la figura de referencia.

12 N*: Si esta la parte mayor está para la izquierda, por abajo, y a la derecha por arriba es que si, y está en la parte de arriba para la izquierda y en la parte de abajo para la derecha es que es no.*
13 I: *¡Siempre lo haces así!*
14 N*: Se puede decir que la mayoría tenia las figuras en la cabeza*

Del extracto anterior inferimos que Noel utiliza varios aspectos en su estrategia para realizar el test. En su mayor parte emplea imágenes mentales que gira y transforma (párrafos 8 y 14); además realiza un análisis geométrico de las figuras de la parte derecha del test (párrafo 12).

Creemos que Noel hace uso de las habilidades VP e IFI, propuestas por Bishop (1989) ya que por una parte manipula, rota, gira, o invierte mentalmente las figuras del test (VP), y, por otra, relaciona las formas presentes en su mente con el estimulo material presentado (IFI).

Queremos señalar que ante la duda que su actuación en el test nos suscitó, después de cuatro meses se le repitió el mismo y obtuvo el siguiente resultado: contesta correctamente 99 items de los 100 propuestos en un tiempo de ejecución de 6 minutos (dos minutos menos del tiempo establecido), lo que hace que obtenga una puntuación en el WSAT de 98.5.

3.3.1. Actuación de Noel frente a los problemas matemáticos

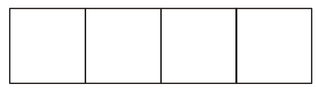
En este apartado describiremos e interpretaremos la forma cómo Noel resolvió las tareas planteados en las entrevistas.

3. 3. 1. 1. Análisis de los problemas del tipo A

Comenzamos este apartado con la actuación de Noel frente a los problemas que etiquetamos como: desarrollo del cubo, tarea del dibujo rápido y reproducción de un modelo geométrico y que denotaremos como A.1), A.2.) y A.3). Los enunciados no los reproducimos en este apartado por estar redactados en Kevin.

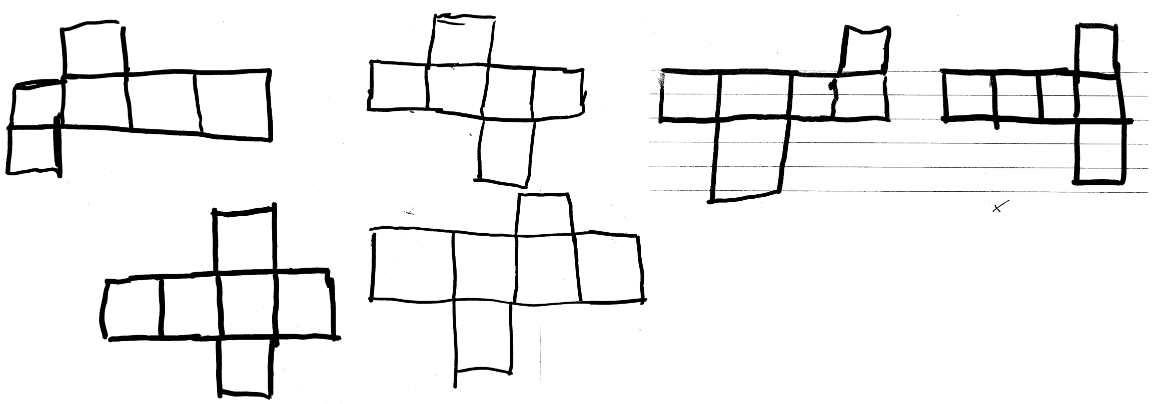
A. 1) PROBLEMA DEL DESARROLLO DEL CUBO

Noel al principio tuvo dificultades para entender la tarea. Cuando le enseñamos la siguiente figura en cartulina:



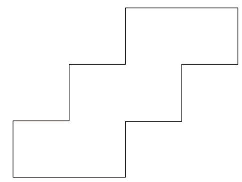
y se le pidió resolviera el apartado a) no le fue fácil ver que podía formase la parte lateral del cubo. Una vez que lo comprendió finalizó correctamente esta primera parte.

En relación con el apartado b) fue el único alumno que dibujó los seis posibles desarrollos que tiene un cubo en los que hay cuatro cuadrados en línea, como se muestra en las siguientes figuras escaneadas:



Contestó sin dificultad lo referente al apartado c), en cada desarrollo señaló correctamente dónde situar la base y su correspondiente tapa.

En el desarrollo siguiente, que le supuso algo más de tiempo, hizo movimientos con las manos para ayudarse en su razonamiento



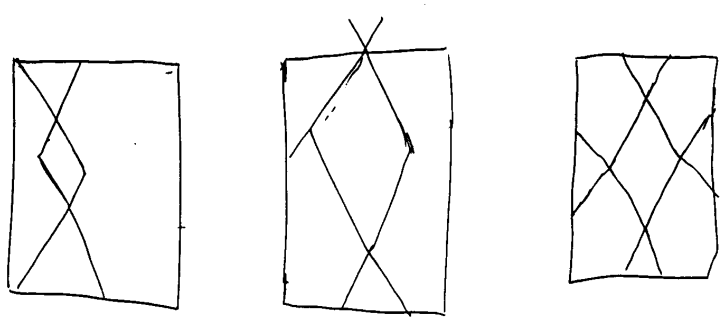
Noel en esta entrevista hace uso de imágenes cinestésicas: con sus manos parece que está simulando la construcción de un cubo donde éstas son las caras que va colocando en distintas posiciones mientras razona sobre el desarrollo indicado. Creemos, además por la naturaleza del problema, que pudo hacer uso de la imagen concreta del cubo para configurarlo.

A.2) TAREA DEL DIBUJO RÁPIDO

Noel empezó la tarea con dificultad. Nos confiesa que no tiene facilidad para dibujar y que ese día se encontraba desconcentrado.

En principio, no construye una imagen muy elaborada del primer modelo; explica que se le parece a un rectángulo con rombos en su interior, y desde nuestro punto de vista es esa percepción la que intenta dibujar. Realiza cinco dibujos diferentes, y tiene que mirar el modelo dos veces más.

Como se muestra en los siguientes dibujos, parece que hace un rombo dentro del cuadrado.



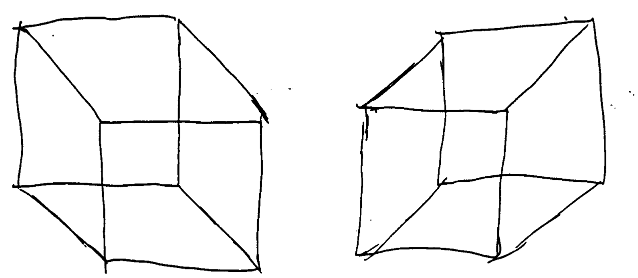
Parece como si la descomposición que hizo de un cuadrado y rombos inscritos condicionase su imagen y tenga problemas para componerla (Brown y Wheatley, 1997).

El segundo modelo lo percibe como un papel doblado; elabora tres dibujos y tiene que mirar el modelo dos veces.

La resolución del tercer modelo tiene gran interés para nuestra investigación.

Al preguntarle lo que vio, contesta que un cuadrado, pero por su dibujo es obvio que se refiere a un cubo. Ante la pregunta de la entrevistadora de si vio ese cubo, responde afirmativamente y realiza un segundo diseño pero hecho de otra forma: orienta las caras del "cubo" en sentido contrario.

Ante la pregunta de la investigadora de si está seguro del segundo dibujo, pide que se le enseñe de nuevo y hace un tercer y cuarto cubos idénticos. Una vez más se le interroga sobre su seguridad y el alumno solicita que se le enseñe de nuevo, repitiendo la construcción anterior. Le colocamos el modelo ante sí y vuelve a realizar lo mismo. El siguiente dibujo muestra dos de los diseños realizados por Noel.

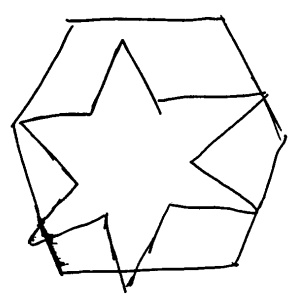


Nuestra percepción es que Noel dibuja el cubo de la misma forma que lo hace la maestra Rocío, algo que pudimos constatar en las observaciones de aula. En el diseño que se le muestra, "ve" un cubo y dibuja un cubo.

Parece que tiene dificultad para modificar su construcción y tenemos la impresión de que una vez construye "su" imagen le cuesta modificarla. Nos extraña que haya reproducido "el cubo de la escuela" después de mostrarle cinco veces el modelo: repite su dibujo una y otra vez, totalmente convencido de su proceder.

Pensamos que la imagen que tiene Noel del cubo aprendido en la escuela es “tan potente” que le impide formar cualquier otra a partir de ella. Quizá pudo haber construido una *imagen incontrolable* (Presmeg, 1985; 1999) que persiste en su pensamiento impidiéndole la apertura a otros caminos.

Noel muestra ciertos problemas al realizar los dibujos de los modelos cuarto y quinto, lo cual no es extraño ya que son realmente difíciles. Observamos idéntica situación con el modelo quinto: Noel encuentra problemas para, una vez descompuesta la imagen, volver a componerla. Afirma ver un hexágono y dentro una flor, y en el dibujo que realiza parece representar una flor interior al hexágono.



A. 3) REPRODUCCIÓN DE UN MODELO GEOMÉTRICO

Modelo A del cuadrado pequeño

Noel no muestra dificultad frente al primer modelo, toma los dos triángulos pequeños (Tp) y el triángulo mediano (Tm) y los coloca correctamente.

Modelo B del rectángulo

Para resolver este modelo coloca, en primer lugar, el R en una posición incorrecta

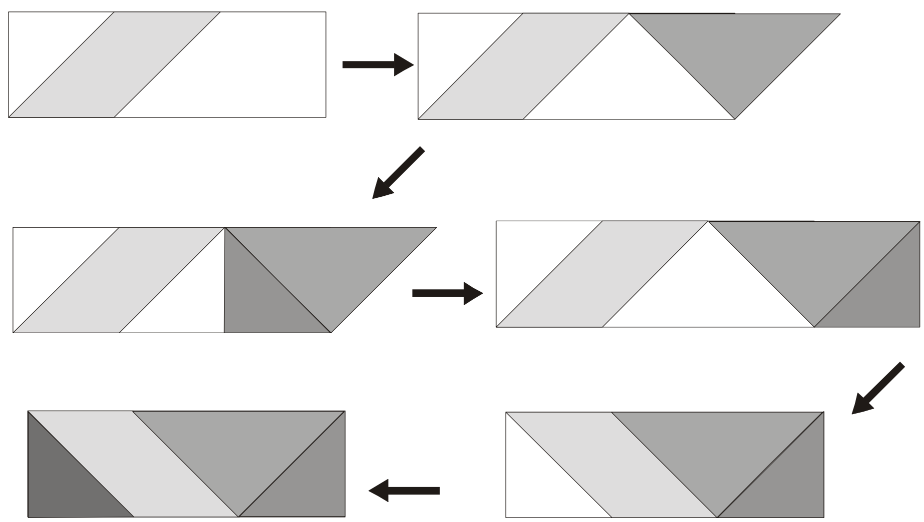
A continuación elige un Tm y lo coloca

Solicita que se le muestre, de nuevo, el modelo. Toma y coloca un Tp

Pide, una vez más, mirar el modelo. Cambia de lugar el Tp

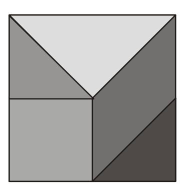
Toma el R, lo gira y lo sitúa

Finalmente coloca un Tp



Modelo C del cuadrado grande

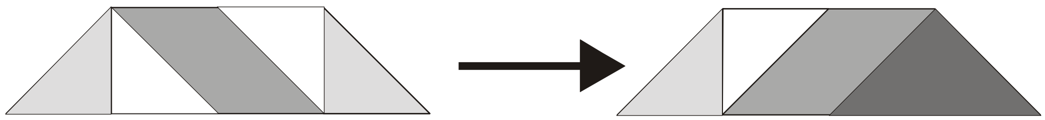
En el tercer modelo, Noel comienza colocando el Tm, el C y un Tp. Elige el R y después de reflexionar, le da la vuelta en la mano y lo coloca. Finalmente rellena el espacio sobrante con otro Tp.



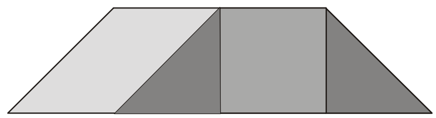
Modelo D del trapecio pequeño

En la solución del modelo D, Noel comienza colocando los dos Tp y el R

Gira el R, retira el Tp de la derecha y coloca el Tm

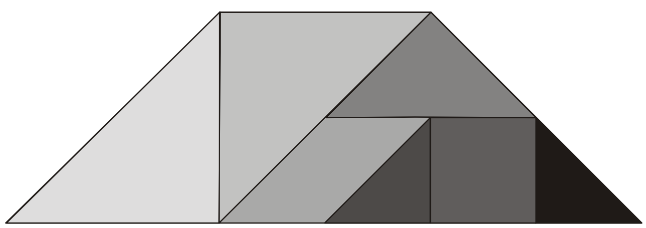


Solicita volver a mirar el modelo y después de retirar todas las piezas que había colocado previamente, sitúa el R, luego el C y por último los dos Tp.



Modelo E del trapecio grande

En el último modelo, probablemente el más difícil, puesto que se emplean las siete piezas del tangram, coloca con seguridad, los dos Tg, luego el R y el Tm, para finalmente emplazar el C y los dos Tp.



Consideraciones sobre la resolución de los problemas del tipo A

Como hemos indicado Noel fue el estudiante que obtuvo la mejor puntuación en el test WSAT, esto nos hizo pensar que poseía una gran habilidad espacial, en el sentido de que podía comparar “mentalmente”, en un tiempo record, dos objetos que se encontraban en distintas posiciones y decidir si eran iguales o diferentes salvo rotación plana o espacial.

Por otra parte, sus resultados en la tarea de “reproducción de un modelo” estaban en coherencia con nuestra concepción sobre el pensamiento de Noel, en el que era patente su capacidad visualizadora. No obstante su actuación en la tarea del “dibujo rápido” no “encajaba” con nuestros planteamientos. Resultaba extraño que Noel no afrontase “con éxito” esta tarea.

Esto nos llevó a reconsiderar el tipo de demandas cognitivas que exigía cada una de estas tareas para su ejecución.

Por una parte, tanto el test de Wheatley como la tarea de “reproducción de un modelo” requiere <u>una transformación dinámica de la imagen mental construida</u>.

Por otra, la tarea del “dibujo rápido” demanda <u>la construcción mental de una imagen “estática” y su reproducción a través de un dibujo.</u>

Con relación a Noel nos atrevemos a apuntar dos reflexiones (siempre bajo la duda razonable que permiten las investigaciones en las que se analiza el pensamiento de una persona):

1. Probablemente una de las causas de su inseguridad al representar los modelos del “dibujo rápido” radique en su dificultad para dibujar (hecho que él mismo confesó); el dibujo requiere, para su ejecución, tener ciertas habilidades: lograr perfilar un esbozo, poseer una coordinación visual motora, una capacidad para guardar proporciones, etc. y puede que Noel no las haya desarrollado.

No estamos en condiciones de asegurar que sus imágenes en esta tarea sean de “baja calidad”; pudo haber ocurrido que Noel disponga de una imagen muy nítida del modelo y que, sin embargo, no pueda dibujarla. Para estos estudiantes que tienen dificultad al dibujar, la tarea del “dibujo rápido” puede no ser la adecuada para “evaluar” sus imágenes mentales. Una forma de comprobar si el estudiante ha construido una imagen acertada del modelo podría llevarse a cabo enseñándole distintas reproducciones del mismo y solicitándole que elija la que se ajusta más al mismo.

2. Por otra parte, ante el hecho de mostrar una figura abstracta y preguntar: ¿Qué viste?, Noel pudo interpretar la cuestión como: ¿qué dibujo figurativo ves ahí?, lo que probablemente le llevó a asimilarlo y conceptualizarlo como un objeto figurativo y, en consecuencia, establecer una distorsión en su mente al categorizarlo.

Esta sería nuestra interpretación de lo que ocurrió cuando dibuja, una y otra vez, el cubo prototípico (Presmeg 1992 a; 1992 b; Hershkowitz, 1989), quizá influenciado por la instrucción escolar.

3. 3. 1. 2. Análisis de los problemas no rutinarios o de tipo B

En este apartado analizaremos la actuación de Noel frente a algunos de los problemas matemáticos no rutinarios planteados. Señalamos, con anterioridad, que para cada estudiante elegimos mostrar en esta memoria, los problemas más relevantes y significativos en relación con la visualización.

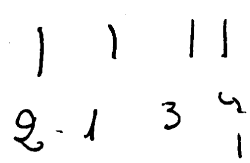
B. 1) PROBLEMA DE LOS TIGRES Y LAS JAULAS
En un zoológico hay 15 tigres y 4 jaulas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los tigres, de forma que en cada jaula haya como mínimo un tigre, y que no haya el mismo número de tigres en 2 jaulas?

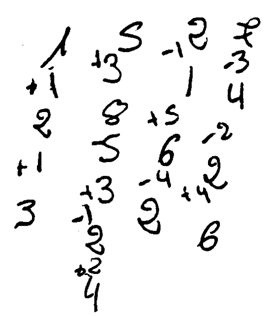
[¡ Es un problema de dividir!]

Noel tiene ciertas dificultades para comprender el problema. Interpreta que es un problema “de dividir”: divide por dos y por cuatro; titubea, borra por dos veces lo que tiene escrito en la pizarra, duda.

Finalmente, encuentra una estrategia visual que le ayuda a dar sentido al problema:

Coloca 4 segmentos verticales que identifica con las jaulas y va escribiendo aleatoriamente números debajo de ellos.





Por simple tanteo encuentra la solución (1, 5, 2, 7), como puede observarse en la figura anterior. A partir de ahí, utilizando una estrategia de compensación, encuentra las cuarternas (2, 8, 1, 4) y (3, 4, 2, 6).

Con posterioridad aporta la solución (1, 5, 3, 6).

B. 2) PROBLEMA DE LOS CUBOS PINTADOS

Disponemos de 216 cubitos pequeños de 1x1x1 cm^3 con los que formamos un cubo de 6x6x6 cm^3. Pintamos de blanco todo el exterior del cubo grande.
¿Cuántos cubitos pequeños no tienen ninguna cara pintada de blanco?
¿Cuántos tienen sólo una cara?
¿Cuántos tienen dos caras pintadas?
¿Cuántos tres? ¿Y cuatro?

[¡El cubo es hueco dentro!]

Para responder a la pregunta del problema: ¿cuántos cubitos tienen una cara pintada de blanco?, Noel dibuja un cubo de 6 cm de lado, calcula el área de cada cara multiplicando 6 cm por 6 cm correspondientes a los lados de cada una y multiplica el área de cada cara por el número de caras: obtiene un total de 216.

La investigadora vuelve a preguntar sobre el número de cubitos que tienen una cara pintada de blanco y Noel reflexionando sobre el cubo de 6 cm que dibujó, se da cuenta de que tiene que sustraer las esquinas, ya que en ellas hay caras que pertenecen al mismo cubito, pero sólo cuantifica, en principio, el lado derecho del cubo y expresa que tiene que sustraer 4 a 216. Posteriormente, se percata de que hay ocho esquinas y dice que tiene que restar ocho y escribe:

“8 con tres caras pintadas”

La entrevistadora le interroga: ¿Cuántos cubitos con dos caras pintadas?

En principio, Noel contesta que 24; nos explica que cada lado (arista) tiene 6 cubitos, quita los de las esquinas y le quedan 4 en cada lado y multiplica finalmente 4 por 6. Nótese que la imagen que tiene del cubo no está suficientemente elaborada, confunde el número de aristas con el número de caras, por eso multiplica 4 por 6 en lugar de 4 por 12.

En segundo lugar, y ahondando más en el problema, expresa que hay 16 cubitos en cada cara con dos caras pintadas, y que hay que multiplicar por 6 (número de caras), esto es 96 y escribe:

"96 con dos caras pintadas"

Vuelve a confundirse ya que siempre cuenta dos veces el número de cubitos con dos caras pintadas que se encuentran en caras adyacentes.

La entrevistadora le vuelve a preguntar por el número de cubitos que tienen sólo una cara pintada de blanco, y Noel obtiene una respuesta restando a 216 (número total de cubitos), la suma de 8 (cubitos con tres caras pintadas) y de 96 (cubitos con dos caras pintadas): 216-(8+96)= 112 cubitos con una cara pintada.

Ante esta última respuesta, evidentemente incorrecta, y teniendo en cuenta los sucesivos errores que Noel va cometiendo, la investigadora intenta ayudarle para aclarar sus ideas, y durante la conversación observa que Noel tiene una imagen equivocada del cubo de 6 cm de arista: según sus palabras "el cubo es hueco dentro" y en consecuencia visualiza el problema identificando el exterior (superficie total) con todo el cubo.

Nuestro alumno tiene la imagen "sólo de las seis caras exteriores del cubo" y a partir de ahí razona.

Estas argumentaciones nos hicieron reflexionar sobre su respuesta a la pregunta: ¿Cuántos cubitos tienen sólo una cara pintada de blanco?

Su contestación la podemos explicar de la siguiente forma:

Si partimos de su premisa, que el cubo es hueco interiormente, la estrategia que Noel sigue, aunque con errores de cálculo, es correcta:

Analicemos, paso a paso, su respuesta: 216-(8+96)= 112

.- El 216 significa para el alumno el número total de cubitos que estarían todos pintados (dato de partida incorrecto).

.- El 8 significa el número de cubitos con tres caras pintadas (dato correcto).

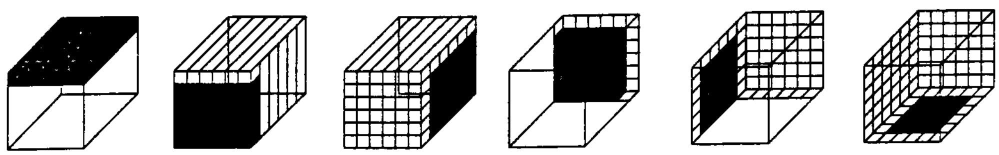
.- El 96 significa el número de cubitos con dos caras pintadas (dato incorrecto).

Observamos que su estrategia, para encontrar el número de cubitos con sólo una cara pintada es buena, pues resta a “su” total (216), el número de cubitos que tienen tres y dos caras pintadas: 8+96=104.

Nótese que el número 216 del que parte Noel es incorrecto; el número de cubitos del exterior, o lo que es lo mismo, los que tienen al menos una cara pintada es de 152, los cuales corresponden al número de cubitos de la base superior (BS), cara frontal (CF), cara lateral (CL), cara posterior (CP), cara lateral (CL) y base inferior (BI):

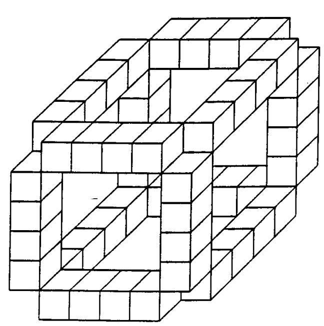
BS+CF+CL+CP+CL+BI

36+30+25+25+20+16=152



La secuencia correcta que Noel tendría que haber utilizado para obtener éxito en su respuesta es: nº de cubitos con sólo una cara pintada = 152 – (8 + 48) = 152 – 56 = 96.

El 48 indica el número de cubitos con dos caras pintadas (4 x 12 = 48) y su expresión gráfica la presentamos en el dibujo siguiente:



Pensamos que Noel comete un error al identificar *el cubo* con *sus caras exteriores*, hecho que proviene de la construcción que realizaron en el aula al manipular los correspondientes desarrollos.

Este es un caso donde una instrucción "incompleta" da lugar a un obstáculo cognitivo en el pensamiento de un estudiante. Confirma una vez más que cada estudiante construye sus imágenes por caminos diferentes.

Más adelante, la investigadora intenta que Noel descubra su error y le pregunta:

I: Noel, si quitas el exterior ¿qué te queda?

Y es curiosa y sorprendente su contestación:

N: Otro cubo: si le quito el exterior queda un cubo de lado 5 y escribe: 5x5x5=125.

El estudiante percibe, después de un largo espacio de tiempo, que el cubo no está hueco; que dentro existen otros cubitos sin pintar, lo que nos hace pensar que desde un principio no entendió el enunciado del problema. Finalmente escribe:

"125 sin ninguna cara pintada"

Esta contestación, incorrecta, es muy frecuente entre las personas a las que se les plantea este problema, debido probablemente, a que poseen imágenes de la situación insuficientemente elaboradas.

B.3). PROBLEMA DE LAS MESAS Y PATAS

Hay 8 mesas en una casa. Algunas tienen 4 patas y otras tienen 3 patas. En total hay 27 patas. ¿Cuántas mesas hay con 4 patas?

[¡Separar unas a un lado y otras a otro!]

Noel empieza el problema dividiendo 27 entre 4 y 27 entre 3, y durante un buen espacio de tiempo no sabe qué hacer (*no sé qué hacer*) con los resultados de la división. La investigadora le pregunta por qué y no contesta, ni actúa; ni siquiera realiza un planteamiento algebraico.

Dice que sólo puede haber mesas de tres patas ya que 27 entre 3 da un número exacto, y que lo intenta hacer de cabeza. La entrevistadora le pregunta:

> I*: Cuándo lo haces de cabeza, ¿qué tienes en la cabeza?*
> N: *27 y 8.*

Después de algunos minutos descarta el método de dividir y empieza a dar sentido al problema utilizando su propia estrategia.

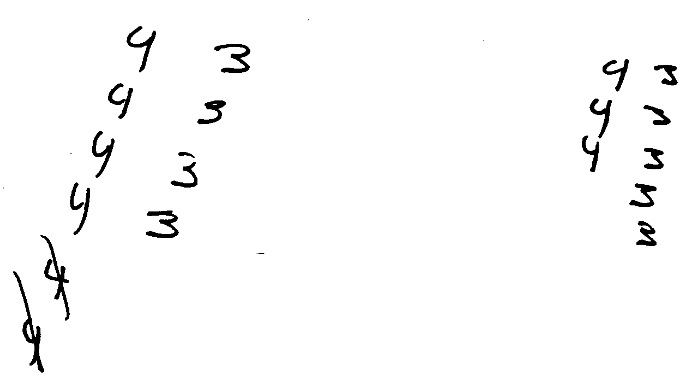
Escribe dos columnas, a la izquierda escribe cuatros y a la derecha tres. Explica que intenta separar unas a un lado y otras a otro: las mesas de cuatro patas y las mesas de tres.

Presenta una solución al problema: seis mesas de cuatro patas y una mesa de tres.

La entrevistadora le pregunta:

> I*: ¿Cuántas mesas hay en total?*
> N*: Siete*
> I*: ¿Cuántas tienes que tener?*
> N*: Ocho*
> I*: ¿Qué sucede entonces?*

Noel va tachando algunos cuatros de la columna izquierda y añadiendo tres en la de la derecha utilizando una estrategia de compensación y haciendo cálculos mentalmente, como puede observarse en la siguiente figura:



Finalmente, presenta la solución correcta: tres mesas de cuatro y cinco mesas de tres.

Noel explica que para él lo más importante a la hora de resolver el problema fue:

1N: “S*eparar las mesas así, a un lado las de cuatro y a otro las de tres”.*

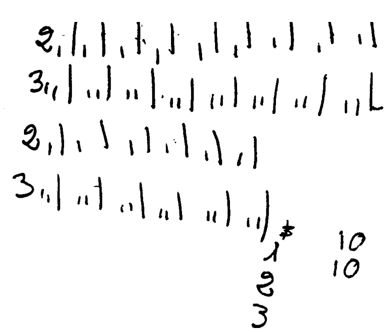
Utiliza una estrategia visual (de compensación), en la que evidentemente entran en juego imágenes concretas y cinestésicas (párrafo 1); con sus manos simula la separación de las mesas en dos columnas e imagina las mesas a un lado y a otro.

B.4). PROBLEMA LA BIBLIOTECA

Cierto día Juan y Ana fueron juntos a la biblioteca. Después de ese día, Juan fue regularmente a la biblioteca cada dos días al mediodía y Ana fue cada tres días también al mediodía. ¿Cuántos días pasaron hasta que se volvieron a encontrar en la biblioteca por segunda vez?

[¡no me va a salir!]

Noel entiende el problema; representa dos líneas (teóricamente una debajo de la otra) con segmentos verticales y puntos, que identifica con los días que van pasando; los segmentos verticales son los días a los que se asiste a la biblioteca: la primera línea es la de Juan y la segunda la de Ana.



No realiza correctamente la correspondencia entre las dos secuencias e intenta, sin éxito, hacer coincidir los segmentos grandes en las misma (nótese que no coloca los segmentos y puntos ordenadamente unos debajo de los otros).

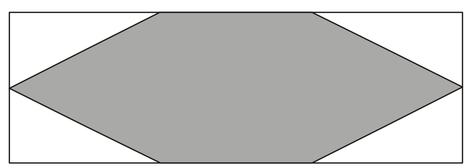
Reflexiona correctamente pero su dibujo no es bueno, y ahí fracasa.

Pensamos que existe una disfunción entre lo que piensa y lo que escribe. Se le ve bastante desconcertado, vuelve a leer el problema y finalmente dice: ”no me va a salir”. No lo vuelve a intentar.

Podemos asegurar que las imágenes mentales que a Noel le suscitó la lectura del problema no son de “baja calidad” puesto que intenta reflejar la situación mediante un gráfico que de haberlo dibujado correctamente le hubiera llevado al éxito; sin embargo, una vez más, es la dificultad al dibujar la que le hace fracasar

B. 5) PROBLEMA DEL HEXÁGONO

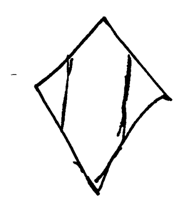
Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



[¡Esto es un rombo!]

Desde un principio afirma que es un rombo y mide las diagonales para intentar aplicar la fórmula del área.

Persiste en su imagen de rombo; gira el papel noventa grados colocándolo verticalmente para observar mejor “su rombo”; lo dibuja en posición prototípica y dice que le faltan los vértices.

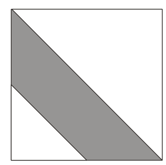


Noel no resuelve el problema.

Posiblemente le sucede algo parecido a lo que le ocurrió en la tarea del dibujo rápido con el "cubo aprendido en la escuela". En este problema tiene una imagen obsesiva de un rombo y esa imagen es "tan potente" que le impide ver el exágono. Quizá esté en posesión, una vez más, de una *imagen incontrolable* (Presmeg, 1999).

B.6) PROBLEMA DEL TRAPECIO

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



Noel entiende el problema. Observa que la figura es un trapecio, mide las bases e intenta aplicar la fórmula, lo que hace incorrectamente.

La investigadora le sugiere en dos ocasiones que procure resolverlo por un método alternativo, sin utilizar fórmulas, en un intento de averiguar si dispone de alguna estrategia visual; Noel hace caso omiso y no resuelve el problema.

3.3.2. En síntesis

Resumiendo, y en relación con Noel, hemos indicado con anterioridad que fue el estudiante que obtuvo la mejor puntuación en el test WSAT, esto nos hace pensar que posee una gran habilidad espacial, en el sentido de que puede comparar "mentalmente" en un tiempo record dos objetos que se encuentran en distintas posiciones y decidir si son iguales o diferentes salvo rotación plana o espacial.

En primer lugar, sus resultados en las tareas del tipo A, no nos aseguran que sus imágenes sean de "baja calidad". En la tarea del "dibujo rápido", en la que mostró mas dificultad, puede ocurrir que Noel disponga de una imagen muy nítida del modelo y que, sin embargo, no pueda dibujarla. No obstante, en el modelo del “cubo” parece que tiene dificultad para modificar su construcción y tenemos la impresión de que una vez construye “su” imagen le cuesta modificarla. Nos extraña que haya reproducido “el cubo de la escuela”, después de mostrarle cinco veces el modelo: repite su dibujo una y otra vez, totalmente convencido de su proceder. Pensamos que la imagen que tiene Noel del cubo aprendido en la escuela es “tan potente” que le impide formar cualquier otra a partir de ella. Quizá pudo haber construido una *imagen incontrolable* que persiste en su pensamiento impidiéndole la apertura a otros caminos (Presmeg, 1985; 1999).

Hemos comentado con anterioridad la necesidad de modificar el planteamiento de esta tarea en alumnos con dificultades en el dibujo.

En segundo lugar, constatamos que la competencia de Noel ante los problemas matemáticos “no rutinarios” no estaba en consonancia con las investigaciones realizadas en USA por Brown y Wheatley (1989, 1990) y Wheatley, Brown y Solano (1994).

Sus actuaciones eran inseguras y en la mayoría de los problemas no encontró una estrategia que le llevase al éxito. En algunos, como en los problemas de “*las mesas y las patas”* y *“los tigres y las jaulas”* necesita que se le insista en la posibilidad de utilizar estrategias alternativas a las enseñadas. A muchos niños les cuesta aceptar que los problemas pueden resolverse de maneras diferentes a las enseñadas en clase.

El aprendizaje de Noel está mediatizado por el sistema escolar y en consecuencia no le es fácil desarrollar un pensamiento autónomo en el que pueda hacer uso de sus “poderosas” habilidades espaciales.

3. 4. RAÚL[3]

En principio, Raúl no era uno de los alumnos seleccionados para este estudio debido a que no destacaba en relación con los criterios que seguimos para la selección de los estudiantes basándonos en las puntuaciones del test WSAT. Obtuvo en el test una puntuación de 40.5. De 69 ítems contestados resolvió correctamente 50, lo que le situaba en el numero 13 en el "ranking".

La incorporación de este alumno en la investigación fue siguiendo las sugerencias de su maestra, quien pensaba que uno de los mejores alumnos no podía ser retirado del estudio. Esta propuesta fue muy acertada, ya que Raúl fue un alumno que aportó mucha riqueza a nuestra investigación.

3.4.1. Actuación de Raúl frente a los problemas matemáticos

En este apartado describiremos e interpretaremos la forma cómo Raúl resolvió los problemas matemáticos planteados en las entrevistas.

3. 4. 1. 1. Análisis de los problemas del tipo A

Para analizar la "calidad" de las imágenes de Raúl hemos elegido, como más significativos, los problemas enumerados en Kevin y Noel como A.2) *dibujo rápido* y A.3) *reproducción de un modelo geométrico.*

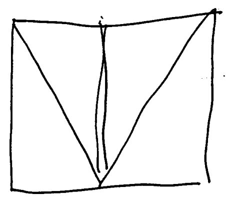
A. 2) TAREA DEL DIBUJO RÁPIDO

En la primera presentación, modelo A, Raúl no se siente seguro, necesita mirar el dibujo tres veces para tener la certeza de que lo está haciendo bien. Parece que no se atreve a hacer una representación pictórica de su imagen mental, debido quizá a la construcción de

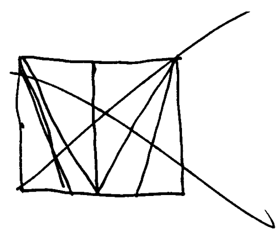
---

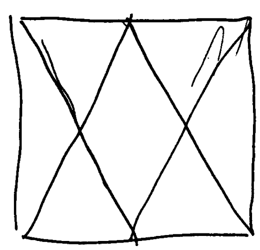
[3] Nombre supuesto

una imagen débil. Nos comenta que “ve” un cuadrado y dos triángulos. En su primer dibujo, un triángulo, parece que se ha fijado en una parte del modelo e intenta representarla.

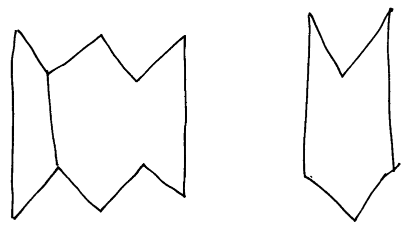


Pide volver a mirarlo para sentirse seguro de su representación. De nuevo solicita mirar el modelo para finalizar la tarea.

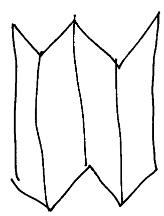




En el modelo B vuelve a mostrar inseguridad, necesita mirar el modelo cinco veces. Puede que tenga dificultad para interiorizar y retener la imagen que debe representar como puede observarse en los dibujos que realiza:

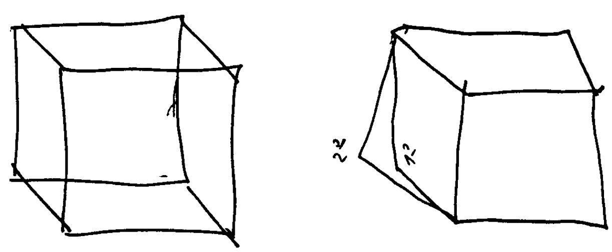


Finalmente, cuando se le sitúa delante el modelo, lo dibuja correctamente.

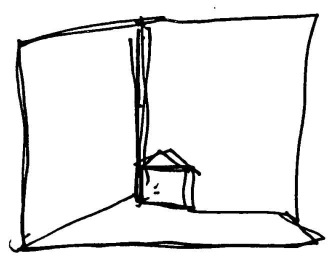


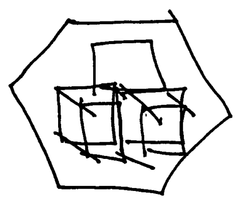
Por el número de veces que solicita mirar los dos modelos anteriores creemos que le cuesta “retener” una imagen completa para luego “copiarla”, parece que se fija sólo en una parte y eso es lo que reproduce.

El modelo C, que categoriza como un cubo, lo dibuja como se le enseñó en la clase de matemáticas. Vuelve a pedir que se le muestre y entonces se da cuenta de que “*le sobran rayas”*.



En los modelos restantes, D y E, igualmente manifiesta inseguridad. Expresa que tiene problemas para dibujarlos. Las figuras siguientes reflejan sus representaciones.





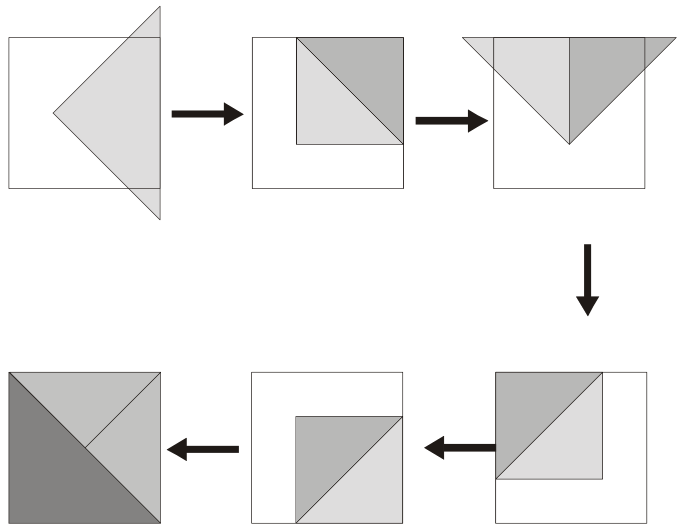
La tarea de "dibujo rápido" ha sido utilizada con éxito para evaluar la calidad de las imágenes (Brown y Wheatley, 1997), ya que a través de los comentarios y dibujos de los alumnos en esta tarea, se puede encontrar información acerca de los caminos en que construyen las imágenes de los modelos proporcionados. No obstante, hay obstáculos "exteriores" a la tarea, como la facilidad para el dibujo o la forma de categorizar el modelo, que es importante tener en cuenta a la hora de valorar la competencia en la misma.

A. 3) REPRODUCCIÓN DE UN MODELO GEOMÉTRICO

Modelo A del cuadrado pequeño

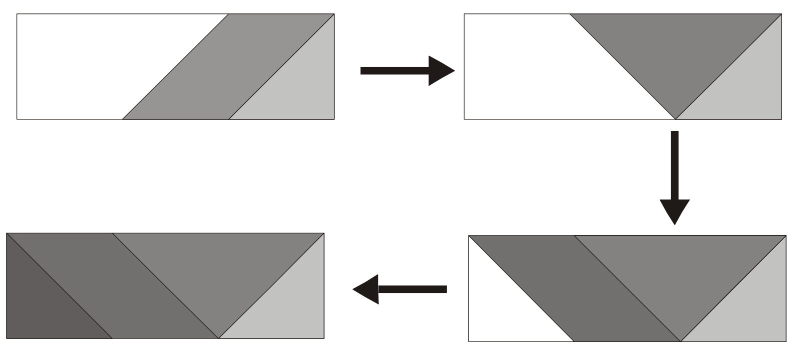
Raúl comienza colocando el Tm en el interior del contorno. Lo retira y a continuación coloca los dos Tp, por tanteo, en diferentes posiciones. Finalmente, encuentra la posición correcta para los dos Tp y el Tm.

La siguiente figura esquematiza el proceso seguido:



Modelo B del rectángulo

Raúl coloca el R y un Tp, a continuación retira el R, elige el Tm y un Tp. Coloca adecuadamente el R y finalmente el Tp. El siguiente dibujo representa la secuencia:

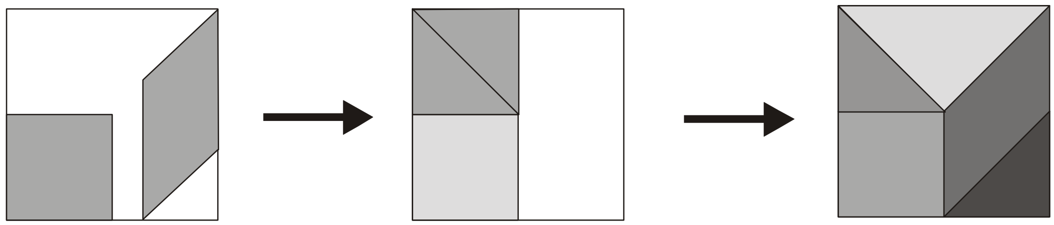


Modelo C del cuadrado grande

Una vez que Raúl ha visto unos segundos el puzzle, comienza dudando y pide volverlo a ver. Toma el R y el C

Retira el R y coloca los dos Tp

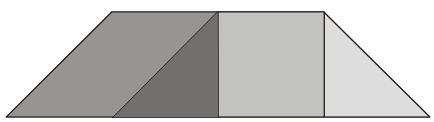
Retira un Tp, toma el Tm, el R y completa con un Tp.



Modelo D del trapecio pequeño

> Investigadora: *Bueno, vamos a ver el siguiente. ¿Qué figura es esta?*
>
> Raúl**:** *Un trapecio*

Raúl toma un Tp y un C y los coloca adecuadamente en la parte derecha del trapecio; luego toma el R, lo gira en su mano y lo sitúa en lugar correcto. Completa el modelo con el Tp. El proceso seguido puede observarse en la siguiente figura:



Modelo E del trapecio grande

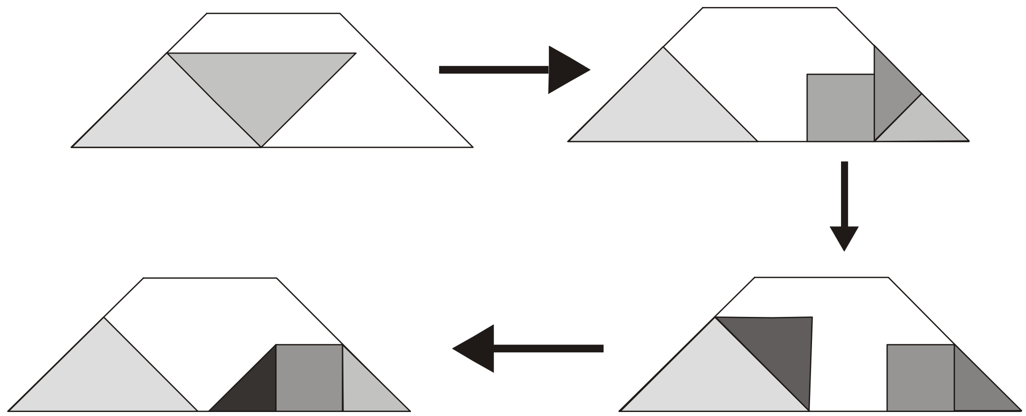
El alumno toma los dos Tg grandes y los coloca

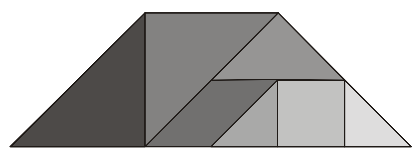
Retira un Tg y lo intenta colocar de diferentes formas. Elige el C y los dos Tp y los coloca

Retira un Tp, elige el Tm y lo sitúa

Retira el Tm, y vuelve a colocar el Tp

Después de una serie de intentos concluye la figura correctamente





El tiempo que Raúl necesita para cada construcción nueva se va acortando, quizá porque conoce mejor las piezas del tangram. Parece lógico pensar que el alumno se haya dado cuenta que los Tg sobresalen del contorno en los modelos B y D. En ninguna de las tareas conserva en mente todas las piezas del modelo que le enseña la entrevistadora. En la última necesita 4 minutos y diez segundos. Dado que ha de utilizar las siete piezas, el tanteo le resulta menos efectivo y por ello parece desanimarse.

3.4.1.2. Análisis de los problemas no rutinarios o de tipo B

B. 1) PROBLEMA DE LOS TIGRES Y LAS JAULAS
En un zoológico hay 15 tigres y 4 jaulas. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los tigres, de forma que en cada jaula haya como mínimo un tigre, y que no haya el mismo número de tigres en 2 jaulas?

[¡Sería dividiendo 15 entre 4!]

Reproducimos, a continuación, parte del dialogo que la investigadora y Raúl mantuvieron en este problema.

R: *En un zoo hay 15 tigres y 4 jaulas ¿de cuántas maneras se puede distribuir los tigres si por cada jaula hay como mínimo un tigre y que no haya el mismo número de tigres en dos jaulas? Hay 4 jaulas, 15 tigres... sería dividiendo 15 entre 4.*
I: *¿Por qué quieres dividir 15 entre 4?*
R: *Porque hay que partir los tigres en cada jaula, [...],15 entre 4 a 3 y 3 por 4, 12 sobran... serían 3 en cada jaula y en una 6.*

La entrevistadora le solicita que vuelva a leer bien el problema, y sorprendentemente vuelve a decir que tiene que dividir.

R: *Sí, tengo que dividir por el número de tigres en cada jaula. En esta jaula habrán 5, 5, y en otra 3, 2.*
I*: Sí, pero ¿qué te dice el problema?*
R*: Que no puede haber el mismo número en dos jaulas, en que no se puede porque tiene que haber dos jaulas con el mismo número, 3, 2, 5, 10... no se puede.*

A pesar de emplear diez minutos en la realización de este problema no se le ocurre otra estrategia que no sea la división.

Raúl entiende el problema y su estrategia es “distribuir” utilizando el algoritmo de la división, lo que le lleva a dar como resultado la cuaterna (3, 3, 3, 6) o la (5, 5, 3, 2). Es consciente de que ambos resultados son incorrectos. Sorprende que no se le ocurra establecer estrategias de compensación. Resaltemos que Raúl no encuentra ninguna de las seis soluciones al problema.

Pensamos que tener imágenes mentales de relaciones entre números es de utilidad para construir modelos a seguir y encontrar soluciones a los problemas de una manera significativa.

B. 2) PROBLEMA DE LOS CUBOS PINTADOS
Disponemos de 216 cubitos pequeños de 1x1x1 cm^3 con los que formamos un cubo de 6x6x6 cm^3. Pintamos de blanco todo el exterior del cubo grande. ¿Cuántos cubitos pequeños no tienen ninguna cara pintada de blanco? ¿Cuántos tienen sólo una cara? ¿Cuántos tienen dos caras pintadas? ¿Cuántos tres? ¿Y cuatro?

[¡A*y Dios estoy equivocado!]*

Raúl lee el problema, comienza dibujando un cubito pequeño en el que señala el largo, el ancho y el alto. A continuación, dibuja el cubo grande señalando igualmente sus dimensiones 6x6x6; calcula los volúmenes de ambos correctamente (“216 centímetros cúbicos” y “1 centímetro cúbico”).

Parece que se pierde, y entonces la investigadora le pregunta:

I*: ¿Cuántos cubos no tienen ninguna cara pintada de blanco, si es que los hay?*

Contesta que todos los cubitos exteriores tienen una cara pintada. Calcula el área de una cara y divide 216 entre 36 que le da 6, que serían según su interpretación el número de los cubitos, con una sola cara pintada, en cada cara.

Para calcular el número total de cubitos con una sola cara pintada escribe 6 x 4 = 24 (pensamos que el hecho de multiplicar por cuatro es debido a que confunde el número de caras de un cubo con el numero de lados de un cuadrado).

Se da cuenta de su confusión y ya aclarado que el cubo tiene 6 caras, resta 216 de 36 y le da 180 que es su respuesta a los que no tienen ninguna cara pintada.

Cuando la investigadora le pregunta cuántos tienen dos caras pintadas, cuenta los cubitos que se encuentran en los vértices del cubo. Señalando en el dibujo dice:

R*: "8 son los que tienen dos caras pintadas"*

Entonces la entrevistadora le pregunta por el número de cubitos con tres caras pintadas y en ese momento expresa:

R: ¡A*y Dios estoy equivocado!*

Parece darse cuenta de que los que están en los vértices son los que tienen tres caras pintadas. Pero su interés por realizar operaciones le lleva a operar 4 x 8, y de nuevo confunde cubo y cuadrado diciendo que hay 32 cubitos con tres caras pintadas.

La investigadora insiste y Raúl se da cuenta de que está equivocado. Comienza de nuevo el problema:

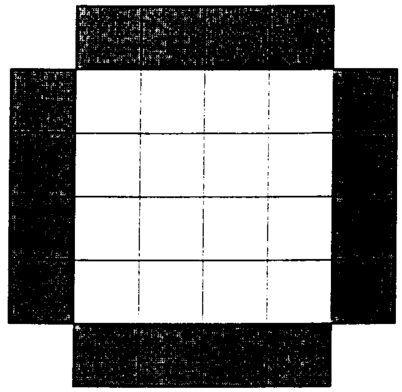
- Dibuja una cara del cubo mediante una rejilla de 6x6
- Señala los cuatro puntos de las esquinas y de nuevo escribe 4x6=24.
- A continuación dibuja el cubo y vuelve a contar los cubitos de los vértices y dice extrañado: "*hay 8"*.

Confía por primera vez en el dibujo y escribe en la pizarra:

"8 los que tienen 3 caras pintadas".

En relación con: "¿cuántos tienen dos caras pintadas?", señala y cuenta en la misma cuadrícula (para él una cara del cubo), los cuadrados exteriores, sin contar las "esquinas", y dice:

R: *sería 1, 2,3,4 ... , 4x4=16*



Para encontrar el número de cubitos con dos caras pintadas multiplica 16 x 6 = 96 (los que contó en una cara por el número de éstas) su respuesta a la última cuestión planteada es 96, reafirmándose en ella.

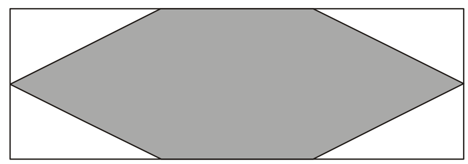
Nótese que comete el mismo error que cometió Noel en un momento determinado en la resolución de este problema: cuantifica dos veces los cubitos que pertenecen a caras adyacentes

En el proceso de resolución se observa, por una parte, su obsesión por buscar una operación y por otra, no parece que haya construido una imagen mental adecuada del problema que le lleve a encontrar sentido a lo que está haciendo. Sus argumentaciones no están concatenadas, limitándose a expresar frases aisladas que a veces carecen de sentido. Por dos veces comienza de nuevo el problema; se le nota distraído y desconcentrado, incluso, alude al número ocho para referirse al numero de caras del cubo

Raúl sólo contesta correctamente la pregunta que pide el número de cubitos con tres caras pintadas.

B. 3) PROBLEMA DEL HEXÁGONO

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



[¡Tengo que hacer la raíz cuadrada!]

Vamos a reproducir la parte más relevante del dialogo que mantuvimos con Raúl cuando resolvió el problema del hexágono. Hemos eliminado parte de la entrevista, indicándolo con puntos suspensivos entre corchetes.

R: *A ver, que tengo qué hacer. Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura, eh esto es un rombo ¿no?, [...], ¡no!, un rombo no. Ay, no sé. No es un cuadrado, ni un rectángulo, ni un trapecio [...], no tengo ni idea de qué figura es.*
I:*¿y eso te influye?*
R: *Claro para saber el área de la figura tengo que saber qué figura es.*
I: *¿Y si no, no lo puedes hacer?*
R: *Creo que no.*
I: *¿Si tú tienes una figura, sabes inmediatamente calcular el área?*
R: *Sí*
I: *¿Por qué sabes calcular el área?*
R: ¡*Oh!, porque me la sé de memoria.*
I: *¿Qué te sabes de memoria?*
R: *El área, la fórmula del área*.
I: *¿Y te sabes todas las fórmulas de memoria?*
R: *Más o menos, !sí yo creo que sí!. Todas las de todas las figuras del mundo, no sé, pero de las que hemos dado.*

La entrevistadora le argumenta al estudiante que la forma era un hexágono.

R: *¡Ah! es verdad. Claro el área del hexágono es, era base, ¡no!, perímetro por apotema partido por dos[...] el perímetro de todos los lados es dos por seis, doce, y la apotema es del medio del lado al centro, más o menos, ... y la apotema es lo mismo que el radio, el radio es lo mismo que la mitad del lado [...] porque haciendo el teorema de Pitágoras, es la suma de los catetos al cuadrado [...] para calcular el área de la zona, ¡el perímetro lo sé!, [...] La hipotenusa al cuadrado, tengo que hacer la raíz cuadrada para despejar esto [...] el radio mide dos, el radio es lo mismo que la apotema [...] porque el perímetro es doce y la apotema mide dos. La apotema es* *lo mismo que el radio, entonces si el radio mide dos también la apotema mide dos, si es igual. Área igual a doce.*

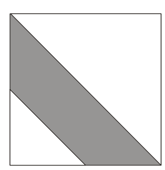
Aunque Raúl tiene una gran facilidad para recordar fórmulas, por ejemplo, la del hexágono regular (que utilizó para intentar resolver este problema), su planteamiento fue erróneo porque el hexágono no era regular.

También utilizó algunos teoremas como el de Pitágoras y obtuvo como área 12 centímetros que es una respuesta incorrecta.

Raúl no es una persona observadora ya que si hubiera inspeccionado cuidadosamente el dibujo se habría dado cuenta de que el área del rectángulo en el que el hexágono está inscrito ya es doce centímetros cuadrados.

B. 4) PROBLEMA DEL TRAPECIO

Calcular el área de la zona sombreada de la siguiente figura:



Raúl en primer lugar observa que la figura sombreada es un trapecio e intenta aplicar las fórmulas que conoce, en este caso el área del trapecio, pero tiene dificultad para encontrar las bases y la altura del mismo. Comete un error llamando con la misma letra, la x , a las bases, y llega a una ecuación con dos incógnitas, el área y la base.

$\boxed{\text{Trapecio}}$

$A = \frac{(b+b) \cdot a}{2}$

$\boxed{\text{Cuadrado}}$

$A = \ell^2$

$A = 1 cm$

$A = \frac{(x+x) \cdot 0{,}5}{2}$

$A = \frac{2x \cdot 0'5}{2}$

$h^2 = c^2 + c^2$

$c = \sqrt{h^2 - c^2}$

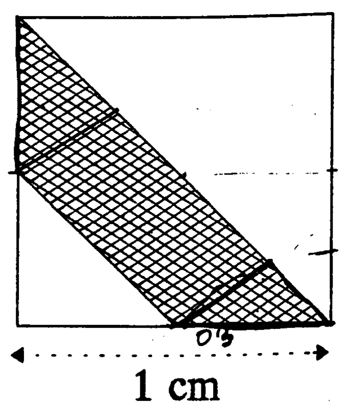
$c = 0'5^2 -$

$h^2 = \sqrt{1^2 - 1^2}$

$h^2 = 0$

Observa que es imposible encontrar la solución por ese camino.

En una segunda estrategia, descompone el trapecio en dos triángulos y un rectángulo como puede verse en la siguiente figura:



De nuevo intenta aplicar algunos de los conocimientos enseñados en la escuela, como aplicar el teorema de Pitágoras y realizar mediciones.

Nuestra idea es que no hace el problema de una manera significativa; está mas obsesionado en aplicar las fórmulas que en darle sentido al mismo.

B. 5) PROBLEMA DE LOS CONEJOS Y LAS GALLINAS

En un corral había conejos y gallinas. Cuando Jonás miró a través de la valla vio 7 cabezas y 20 patas. ¿Cuántos conejos había?.¿Cuántas gallinas?

[¡¿Puedo sacar decimal?!]

A continuación transcribimos parte del diálogo en este problema:

> *R: Si lo haces de cabeza tienen que haber 7 animales. Y si las gallinas tienen dos patas, los conejos tienen cuatro[...] Porque si hay 7 patas, ¿no? Entonces divido 20 entre 7 para saber cuántas patas deberían tener cada uno. Si, son 20 ¿no? Y sobran 6 pues nada daba 2 entonces habrían 2 gallinas para las que tenían dos patas y luego los demás eran conejos que tenían 5.*
> I*: ¿Cuántas patas tendrían en total?*
>
> R: *A ver... 5 por 4, 20. ¡Ah!, No me salen más, porque 5 por 4 son 20 y 2 por 2 me salen 24.*
> I: *24 patas. Entonces ¿ Tú que te estás imaginando en la cabeza? ¿Tú que tienes en la cabeza cuando resuelves el problema?*
> R: *Si veo la... lo... intento sacar la operación. A ver, hay 20 patas... 20 patas... y hay 7 y 7 animales, animales... 7 animales... si 20 patas..., si 20 patas lo divido entre 7... ¡no! Pues este salió mal ..., Es que no sé... es que estoy intentando sacar a ver como coger para lo que tengo que... para saberlo y no quedarme en blanco* [...] *que estoy a ver... si dividir, multiplicar, sumar, restar. Ya, entonces aquí cabría 5 y de otra mil. A lo mejor. Como no se ve una parte... tendrían que haber 5... creo que uno y dos de 8 porque así si daba 20. Si habían 3 conejos... 3 por 4, 12 y 2 por... a ver... 20 entre 7 da a 2... 2 y sobraba 6. ¿puedo sacar decimal?,* [...], *está mal porque no creo que una tenga media pata.*

Raúl parece rendirse

> R: *Intento sacarlo pero no... ni idea.*
> I: *¿Te recuerda algo ese problema? ¿Algo que tú hayas hecho? ¿Alguno que hayamos hecho aquí en las entrevistas?*
> R: *Podría ser como un problema de ecuaciones.*
> I: *¿Problema de ecuaciones?*
> R*: Podría ser. No lo sé*

Raúl intenta, sin éxito, aplicar ecuaciones para resolver el problema. Después de varios intentos y al percibir la frustración del estudiante la investigadora le sugiere que finalice el trabajo.

En la solución de los problemas anteriores, las técnicas sobreaprendidas por Raúl y previamente ejercitadas, constituyen un medio o recurso instrumental necesario, pero no suficiente para alcanzar la solución en estos problemas no rutinarios. Necesita algo más que algoritmos, le faltan estrategias, imaginación, creatividad, conocimientos conceptuales, actitudes, etc.

Como expresa Skemp (1980: 55):

> La cantidad que un niño brillante puede memorizar es notable y la apariencia de aprendizaje matemático puede mantenerse hasta que se alcanza un nivel en el cual sólo el verdadero aprendizaje conceptual es adecuado a la situación. En esta etapa, el que aprende intenta dominar las nuevas tareas por los únicos medios que conoce-memorizar la regla para cada tipo de problema-. Al ser ahora imposible esta tarea, incluso la apariencia externa del progreso cesa; y con acompañamiento de tensión otro alumno se queda en la cuneta.

Saber matemáticas no es solamente aprender y memorizar definiciones y teoremas para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos; pensamos que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas en los que el alumno intervenga, formula, comprueba, construya modelos, lenguajes, conceptos, etc.

3.4.2. En síntesis

En síntesis, Raúl, "académicamente" el mejor alumno según la profesora, muestra unos resultados que sorprenden. Es verdad que es un "buen estudiante", realiza la tarea, asiste regularmente a clase, obtiene buenas notas en los exámenes, y sabe resolver con prontitud los problemas planteados en el aula.

Raúl intenta utilizar todo su conocimiento "dirigido", pero su aprendizaje escolar no le sirve cuando se enfrenta a problemas no rutinarios. No es capaz de desarrollar sus propias estrategias cognitivas; en las entrevistas no hemos detectado que las posea, limitándose a aplicar lo que le enseña la maestra. En muchas ocasiones, sólo tuvo éxito cuando repetía algo aprendido de memoria.

Es una persona que tiene una gran facilidad para recordar formulas (área del hexágono regular, teoremas como el de Pitágoras, etc.), para intentar resolver los problemas pero sus planteamientos "rígidos" y "estáticos" le impiden emprender nuevas vías.

3.5. CREENCIAS PEDAGÓGICAS DE LOS ALUMNOS

Con el fin de conocer las creencias y concepciones pedagógicas de Kevin, Raúl y Noel, se les realizó una entrevista para que nos aportara información sobre sus creencias acerca de las matemáticas, del profesorado, sus asignaturas favoritas, su integración en el colegio y sobre su propio aprendizaje.

Consideramos que una creencia es una forma de conocimiento viable (Tobin, 1990; Díaz – Obando, 1993) en el sentido de que ayuda a la persona a encontrar sus objetivos. Una creencia o concepción pedagógica refleja la visión que una persona tiene de la escuela, de la enseñanza escolar, del currículo y del aprendizaje.

Las categorías que hemos considerado para este análisis hacen referencia a las creencias de los estudiantes sobre:

- La escuela y el aprendizaje matemático
- La profesora y la enseñanza de las matemáticas

3.5.1. Creencias pedagógicas de Kevin

3.5.1.1. La escuela y el aprendizaje matemático

Una de las ideas que subyace en las respuestas de la entrevista es que Kevin cree que en la escuela el conocimiento está uniformado y que todo el alumnado debe aprender igual y de la misma forma:

> *En la escuela si uno va por una línea el otro también.*

o

> *En la escuela tiene que ir todo el mundo igual, te dan tres métodos y tienes que coger uno de los tres.*

En ésta última frase Kevin se está refiriendo a los métodos de sustitución, igualación y reducción para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por el contrario, esta percepción varía cuando se refiere a los problemas planteados en esta investigación sobre los que expresa:

> *Pero aquí no, si uno va por un lado, el otro va por otro y cada uno lo resuelve según su método.*

Comprobamos que, efectivamente, este alumno se siente cómodo buscando diferentes formas de resolver un problema y eso, al parecer no le produce cansancio; lo que sí manifiesta como aburrido es la uniformidad y la rutina diaria.

El alumno entiende que para aprender debe ser él mismo el que descubra el camino que tiene que seguir, como una forma de adquirir conocimientos.

Kevin también establece una clara diferencia entre los problemas realizados en la escuela y los planteados por la investigadora en las entrevistas. Refiriéndose a los de clase expresa:

> *Los de clase son para aprender a sumar, restar, multiplicar, dividir, raíz cuadrada, todo lo que hacemos.*

Mientras que aludiendo a los planteados en las entrevistas manifiesta:

> *Y esto que hacemos contigo es para saber, para aprender a razonar.*

Pensamos que existen condiciones favorables para el aprendizaje si a una persona se la enfrenta con un problema para el que no hay un procedimiento inmediato; esto es, si se enfrenta a una situación no rutinaria cuya solución está en función de la actitud y aptitud del aprendiz. Lo que puede ser problemático para una persona puede no serlo para otra (Wheatley, 1991).

Por regla general el profesorado inquieto por la enseñanza se preocupa por explicar y hacerse entender como es el caso de nuestra profesora, pero a veces ocurre que esas explicaciones reguladas y controladas desde el exterior (libros de texto, curriculum prescrito, …) hacen que sea una enseñanza no efectiva para alcanzar los objetivos iniciales.

Lo hemos comprobado con Kevin cuando describe las formas de aprender en la escuela y los problemas matemáticos planteados en ella:

> *Porque, a ver, cómo te diría yo, los de clase nos lo enseñan, nos los explican, pero estos no, tu tienes que fabricar una especie de modo para escapar de ahí.*

Claramente Kevin nos expone su idea de cómo se puede construir una situación de aprendizaje. Resulta interesante resaltar que este alumno desconocedor de las teorías de aprendizaje, utiliza la palabra *fabricar* para referirse a la manera de comprender y resolver los problemas matemáticos.

Pensamos que esta idea es análoga a la compartida por muchos educadores interesados en la construcción del conocimiento. Nosotros estamos de acuerdo en afirmar que el aprendizaje es un proceso constructivo interno, que se apoya en la actividad cognitiva de la persona para reorganizar y ampliar sus ideas y pensamientos, a través de procesos como asimilación, acomodación y equilibración, términos relacionados directamente con la teoría desarrollada por Jean Piaget.

Frente a las concepciones conductistas que entienden la adquisición del conocimiento como la acumulación de información, de manera que el nivel de almacenamiento que alcanzan las personas se toma como indicativo de su nivel de conocimiento, Piaget (1990) defendió una concepción constructivista de la adquisición del mismo y entre sus características manifiesta que el sujeto es quien edifica su propio conocimiento, de manera que sin una actividad mental constructiva propia e individual, el conocimiento no se produce.

Kevin, utilizando su propio vocabulario, habla de *fabricar* (sinónimo a construir) lo que le sitúa, sin proponérselo, dentro de ese entorno constructivista, algo realmente profundo y reflexivo en una persona de la edad y del medio social al que pertenece; pero aún hay más, al preguntarle si creía que los problemas planteados en las entrevistas tenían "truco", presenta una respuesta clarificadora desde esta última perspectiva:

> *No es truco, se trata de razonar [...], lo que tienes que tener es imaginación […], los problemas que hacemos en clase son para aprender y resolver, y estos son además para aprender a razonar[...] es como una especie de test para pensar.*
> *Razonar, pensar y la imaginación, porque sin imaginación, cómo te diría yo, te lo vas a tomar todo multiplicando, te lo vas a tomar todo en forma cuadrada, no vas a poder sacarlos, tienes que pensar, saber cómo cambiar.*

Kevin es consciente que para resolver los problemas de las entrevistas no es suficiente conocer las fórmulas y los procedimientos enseñados en la escuela; hace falta indagar, inventar nuevas estrategias y en definitiva, poner en marcha la imaginación y, por supuesto, como él bien dice, la fantasía:

> *Pensar no en la realidad sino en la fantasía.*

Incluso llega más lejos, al establecer comparaciones y relaciones con otras disciplinas:

> *Es como los artistas, como los compositores; los compositores tienen un punto fijo para sacar las canciones.*

Nos apunta un ejemplo de cómo cierto artista obtuvo un premio al componer una canción contra la droga, el racismo, la discriminación y otros problemas sociales, aplicando lo que él denomina imaginación:

> *Y lo que intentó por medio de la imagen y el sonido unirlo y que la gente pensara más, la droga está mal, el racismo está mal.*

Su manera de entender esa imaginación en el marco escolar es la siguiente:

> *Cuando estás haciendo un ejercicio en clase, tienes que pensar en resolverlo y en nada más. Si te desconcentras, que sería la imaginación lo que te desconcentra, no lo vas a sacar.*

Las reflexiones de Kevin nos llevan a pensar que en la escuela, muchas veces, el objetivo tácito del aprendizaje es la recompensa que se obtiene al "complacer" al maestro. Puesto que el aprendizaje escolar se centra en el comportamiento y no en el pensamiento, el niño aprende exactamente cómo tiene que comportarse, mientras que sus pensamientos los guarda para sí.

El alumnado observa cómo la creatividad no se valora, no se tiene en cuenta y, por lo tanto, se concentran más, en lo que el maestro quiere que digan, que en la comprensión significativa del problema.

Por otra parte, para ejercitar la creatividad, actividad mental importante para la construcción del conocimiento, es necesario disponer de tranquilidad y tiempo para pensar; nuestro alumno lo manifiesta de la siguiente forma:

> *En la escuela no te dejan tomar las cosas tranquilo, no te dejan utilizar la imaginación; lo fundamental para todas las cosas es la imaginación tanto si eres escultor, pintor, disyokey, en todo, en todo, lo importante es la imaginación.*
>
> *Lo que me refiero es que las cosas tienes que hacerlas a tu forma. A mí me gustan las estrellas, la luna, la creatividad […], me pongo a pensar […], me gustan los viajes astrales, ¿sabes lo que es un viaje astral?, la mente, si puede andar como dice que puede andar, podría ir a sitios que el hombre nunca ha estado.*

Con sus cavilaciones nos está mostrando una madurez que no encontramos en los otros estudiantes entrevistados. Es evidente su interés por la lectura de temas no escolares, lo que da idea de una persona preocupada e inquieta por documentarse en otras ramas: sobre Einstein nos dijo que descubrió la bomba atómica, que era judío, que todo el mundo lo maltrataba; sobre la música, el deporte o la lectura manifiesta criterios propios.

Es una persona que tiene opinión, reflexiona sobre las preguntas que se le hacen, y tiene una cultura, no siempre adquirida en la clase.

Con respecto a la enseñanza práctica, Kevin expresa:

Si estás estudiando, vamos a ponerle, química, ¿pues qué te gusta a ti más?, ¿ir pensando, a lo mejor, el calcio tiene valencia dos, o cogerte un calcio y un magnesio y mezclarlos? La práctica, no la teoría. A mí no me gusta la teoría, me gusta la práctica.

Pensamos que la práctica, si está planteada adecuadamente, lleva de forma inductiva a construir esquemas teóricos, que ayudan a estructurar el pensamiento científico.

Los intereses de Kevin no están centrados en el mundo de la escuela, por eso no le interesa lo que de ella venga:

No me gustaba y dejé de estudiar.

-

Vemos pues que como afirma Pérez Gómez (1992: 59):

el aprendizaje escolar esta claramente descontextualizado, donde el alumno/a se le pide que aprenda cosas distintas, de forma diferente y para un propósito también distinto a lo que está acostumbrado en su aprendizaje cotidiano. No es de extrañar, por tanto, que el alumno/alumna construya esquemas y estructuras mentales para afrontar las exigencias tan dispares de estos dos contextos de vida y aprendizaje.

Kevin es consciente que puede afrontar, con éxito, las tareas encomendadas en la escuela:

Yo ahora lo repaso todo en dos días y me apuesto que hago un examen y lo saco, […], lo que doy se me queda, pero tengo que repasarlo para que me vuelva.

No obstante, él no desea abordar la matemática escolar porque no la ve útil en su mundo. Sólo un alumno que es consciente (a lo mejor no inmediatamente) que los procedimientos y las herramientas que proporciona la escuela, le van a servir para sortear cualquier tipo de obstáculo (un examen de grado, una oposición, un trabajo, etc.) en un futuro, vería el incentivo para el aprendizaje.

3.5.1.2. La profesora y la enseñanza de las matemáticas

Kevin tiene una buena opinión de la maestra como persona, pero considera que no es capaz de establecer vínculos para llevar a cabo una comunicación escolar fluida

> *Es una buena persona pero es muy exigente. Quiere que haga las cosas muy rápido, […], todo tiene que ser, a su modo, a su modo, […], si yo me busco un camino es porque desde pequeño me he acostumbrado a acomodar las cosas.*

Nuestra idea de la enseñanza nos sitúa en un plano dónde la figura del profesor esté más cercana a la de una persona que facilita el aprendizaje, que contribuya a crear un ambiente donde la meta sea aprender y no completar tareas. A propósito indica Maslow (1983: 215): "Las matemáticas pueden ser tan hermosas, y tan motivadoras de experiencias cumbres como la música, si algunos profesores de matemáticas no se dedicaran a impedirlo".

Por último, en cuanto a las preguntas realizadas sobre los ambientes de aprendizaje de la escuela, contesta lo siguiente:

> *En las clases de matemáticas tengo que estar siempre en silencio.*

Nosotros, sin embargo, entendemos el aprendizaje de las matemáticas como la producción activa del significado, a través de la experimentación, cuestionamiento, reflexión, descubrimiento, invención y discusión, que nos lleva a pensar en ambientes de aprendizaje donde haya comunicación, dialogo, dónde los estudiantes sean escuchados y puedan escuchar.

3. 5. 2. Creencias pedagógicas de Raúl

3.5.2.1. La escuela y el aprendizaje matemático

Para Raúl su estancia en la escuela no es placentera, acude a ella parece que no de forma voluntaria:

> *No es que me agrade pero tengo que venir, es mi obligación.*

Incluso piensa que a nadie puede gustarle y, en una especie de pasiva resignación, entiende que a fuerza de acudir -obligado- ha llegado a habituarse:

> *Porque a nadie le gusta, pero al final te vas acostumbrando a todo.*

Su creencia es que en la escuela todo es rutina y repetición:

> *Pues son 5 horas en la escuela estudiando, siéntate, cállate, abre los libros y todo eso.*

Parece que ha interiorizado que es esa la función esencial que debe seguir la institución escolar:

> *¿Si haría algún cambio?, No.*

Incluso, cuando habla de Sociales, la asignatura que más le gusta, dice no la elegiría si tuviese que decidirse por una, porque en definitiva también es parte de esa institución escolar que implícitamente rechaza.

> *Me gustaba las Sociales un montón, siempre sacaba buenas notas en sociales pero ya para elegir no elijo ninguna.*

En cuanto a las matemáticas, Raúl, piensa que es una asignatura en la que se siente incómodo, no porque no sepa hacerle frente a las actividades y tareas que la profesora manda a realizar, sino por la inseguridad que siente ante ellas.

> *Me siento más incómodo, menos seguro en las clases de Matemáticas.*

Para este alumno, el aprendizaje de las Matemáticas es difícil, además que éstas representan para él, un orden y unos criterios preestablecidos ya que su respuesta ante la pregunta de qué era para él las matemáticas:

> *Un montón de números que hay que poner en orden.*

Y, el orden en los números lo entiende de la siguiente forma:

> *Si, que hacen partes, el álgebra con x y todo eso, las operaciones, las incógnitas, todo al final son números.*

3.5.2.2. La profesora y la enseñanza de las matemáticas

Raúl - el mejor alumno en matemáticas según la profesora - se siente inseguro en las clases de Matemáticas, y con temor a defraudar las expectativas de la maestra:

> *Sí menos seguro, que creo que voy a decir algo mal.*

No es la profesora que más le entusiasma, la siente poco cercana y distante:

> *Para mí la maestra que más me gusta es la de lenguaje... es como una amiga... la de matemáticas se enfada y eso.*

Es curioso comprobar como, a pesar de no gustarle el sistema de enseñanza de las matemáticas si él fuera profesor no intentaría llevar a cabo su enseñanza de otra forma, piensa que deberá hacerlo igual que como se ha venido haciendo hasta estos momentos.

Nada, pues igual que las hacemos ahora [...] cuando mandan tarea y todo eso, intentar corregir en la pizarra, lo que no sabemos, intentar explicar y todo eso.

Raúl prefiere otro método de enseñanza que afronte la asignatura de matemáticas, análogo al desarrollado por la investigadora en las entrevistas; pero lo ve más como un juego que como un aprendizaje que le pueda servir para afrontar los retos que le plantee la escuela y la vida y, además le sirva para construir su propio conocimiento:

Sí, sí me gusta porque es más divertido, no es tan como... monótono". No que siempre se da lo mismo sino cambiando las cosas.

3.5.3. Creencias pedagógicas de Noel

3.5.3.1. La escuela y el aprendizaje matemático:

Noel, no se siente motivado en la escuela porque la escuela le produce cansancio:

Sí, a veces me aburro.

Además, le supone una rutina diaria cargada de tareas sin mucho sentido:

Porque, no sé, tanta tarea para casa.

Quizá, en algún momento, se ha planteado abandonar la institución, pero deducimos, que el incentivo de conseguir el Graduado Escolar, le ha hecho desistir de ese pensamiento:

A estas alturas no me gustaría irme, porque en otros sitios es más fuerte.

3.5.3.2. La profesora y la enseñanza de las matemáticas

Este alumno prefiere a Rocío en comparación con otras profesoras de matemáticas:

Cuando pasé de 5º a 6º tenía otra profesora. Cuando repetí 6º sí me dio Rocío. Me ha gustado bastante más que la otra.

Ha ido gustándole cada vez más, a medida que ha ido entendiendo mejor sus explicaciones:

Ella explica las cosas, por ejemplo, la propiedad distributiva y pide que la repitamos, una vez y hasta, a veces, dos veces.

El hecho de entender mejor a la profesora hace que, en este curso, le guste más la materia, pues ante nuestra clásica pregunta de si le gustaban las matemáticas su respuesta fue contundente:

Sí, este año más... porque las cosas son como si fuesen cosas de sexto, de séptimo y algo habrá de nuevo, pero es casi repaso.

E incluso, si tuviese que enseñar matemáticas lo haría igual a como lo ha realizado esta maestra.

Como Rocío.

Suponemos que ha sido la profesora con la que ha logrado aprobar, y no le ha supuesto tanto esfuerzo:

Explica algo, por ejemplo, lo de la hipotenusa al cuadrado, ella lo dice y después pregunta a Raúl, a Lina[1] *a todos.*

Pensamos que la forma repetitiva del “machacar” un mismo procedimiento hace que todo el alumnado, que asiste a clase regularmente, pueda aprenderlo.

[1] Nombres supuestos.

3.6. VALORACIÓN FINAL SOBRE LAS CREENCIAS PEDAGÓGICAS DE LOS TRES ESTUDIANTES ENTREVISTADOS

En síntesis, la concepción que los tres estudiantes tienen de la escuela obligatoria - aunque sea expresada de diferente forma - es la misma: “un trámite que deben sufrir”.

Uno de ellos, Kevin, con mayor riqueza léxica, por haberse desenvuelto en distintos ambientes, y, los otros – Raúl y Noel – con la parquedad que caracteriza a los ambientes rurales, vienen a decir lo mismo: en la escuela predomina la rutina, la obediencia y la repetición.

Para los tres, no existe un aprendizaje placentero sino una rutina que deben aceptar con resignación y que no es posible cambiarla. Y, no es posible cambiarla, porque en definitiva es, al parecer, para Raúl y Noel, el único referente que poseen al no contar con otros modelos con los que poder comparar.

Hemos comprobado como Raúl y Noel harían exactamente lo mismo, no cambiarían nada en las clases de matemáticas y sólo Kevin -que ha podido aprender fuera del mundo académico, en el mundo laboral, concretamente- es el que ha vislumbrado otros modelos con los que se siente más a gusto porque le ayudan en la construcción del conocimiento matemático.

En cuanto a la profesora existen diferencias y matices, Kevin y Raúl la sienten distante y exigente mientras que para Noel es la profesora que lo ha sacado del bache de 6º curso. No obstante, si nos fijamos bien en las respuestas, todos ellos consideran que es una profesora preocupada, porque repite y se esfuerza porque la entiendan.

CAPÍTULO 4:

ROCÍO, MAESTRA DE PRIMARIA

4. ROCÍO, MAESTRA DE PRIMARIA

> Entonces un profesor dijo: Háblanos de la Enseñanza.
> y él dijo:
> Ningún hombre podrá revelaros nada sino lo que ya está medio adormecido en la aurora de vuestro entendimiento.
> El maestro que pasea a la sombra del templo, rodeado de discípulos, nada da de su sabiduría, mas sí de su fe y de su ternura.
> Si es verdaderamente sabio, no os convidará a entrar en la mansión de su saber, sino antes os conducirá al umbral de vuestra propia mente.
> El astrónomo podrá hablaros de su comprensión del espacio, mas no podrá daros su comprensión.
> El músico podrá cantar para vosotros el ritmo que existe en todo el Universo, mas no podrá daros el oído que capta la melodía, ni la voz que la repite.
> Y el versado en la ciencia de los números podrá hablaros del mundo de los pesos y de las medidas, pero no podrá llevaros hasta él.
> Porque la visión de un hombre no presta sus alas a otro hombre.[1]
>
> GIBRAN KHALIL GIBRAN

4.1. INTRODUCCIÓN

Si esquematizamos las características de los estudiantes Kevin y Raúl[2], analizados en el Capítulo 3, podríamos decir que:

- Kevin es un alumno visualizador, creativo y observador.
- Raúl académicamente es un “buen” estudiante.

Efectivamente, Kevin fue capaz de resolver, a través de caminos originales, los problemas propuestos en las entrevistas valiéndose de sus propias estrategias y experiencias vitales. Podía “ver” y visualizar las respuestas, muchas veces, sin recurrir a los conocimientos teóricos, ni al empleo de las herramientas proporcionadas en la escuela. Su capacidad de visualización le ayuda a encontrarle sentido a los problemas y

[1] Gibran Khalil Gibran (1985:81)
[2]El tercer estudiante Noel no aporta mucha “luz” a las ideas de este capítulo.

finalmente a resolverlos, empleando frecuentemente imágenes dinámicas. A pesar de esto, Kevin fue un alumno que suspendió repetidas veces y no obtuvo el certificado de estudios primarios, necesario, al menos teóricamente, para acceder al mundo laboral.

Por otro lado, Raúl intenta utilizar todo su conocimiento, pero su aprendizaje escolar no le sirve cuando se enfrenta a nuevos problemas. No es capaz de desarrollar sus propias estrategias cognitivas, no porque no las posea, sino porque quizá entienda que no las debe emplear en la escuela, en la que se tiene que aplicar lo que enseña la maestra. En muchas ocasiones, sólo tuvo éxito cuando repetía algo aprendido de memoria.

Según Gimeno (1988: 85):

> Una característica lamentable de los aprendizajes escolares sigue siendo el que se mantienen muy disociados del aprendizaje experiencial extraescolar de los alumnos. Ese alejamiento se debe a la misma selección de contenidos dentro del curriculum y a la ritualización de los procedimientos escolares, esclerotizados en la actualidad. La brecha se agranda y se agrava en la medida en que la estimulación cultural fuera de la institución cada vez es más amplia, atractiva y penetrante.

Este capítulo tiene como objetivo encontrar algunas claves que nos ayuden a resolver la aparente paradoja que hemos visto con anterioridad: alumnos calificados de "buenos estudiantes" por el profesorado no resuelven problemas no rutinarios y, por el contrario, alumnos con una visión negativa de la escuela y con poco estímulo para el estudio, sí los resuelven. Para ello analizaremos y profundizaremos en las creencias pedagógicas y en la práctica educativa de la maestra de este estudio.

Las ideas que exponemos surgen de la interpretación de los datos recogidos básicamente a través de las entrevistas semiestructuradas y de las observaciones de aula que realizamos durante un curso académico. En primer lugar expondremos el análisis de las entrevistas -formales e informales- y, en segundo lugar, el relacionado con las observaciones de aula.

4.2. ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

La información obtenida a través de las entrevistas pertinentes para este estudio la hemos organizado en tres apartados:

- Trayectoria profesional
- Concepciones didáctico-pedagógicas
- Criterios sobre sus escolares

4.2.1. Trayectoria profesional

Rocío es una maestra de 45 años de edad, formada en el Plan de 1967 de Magisterio, ya extinguido y que estuvo inspirado en el plan profesional de 1931. Este plan se desvirtuó desde sus inicios por el marco político y por la escasa sensibilidad en torno a la innovación pedagógica.

> *Yo hice el plan con sexto y reválida sin C.O.U.*[3]

Su perfil se ajusta a la mayoría de los estudios que se han realizado sobre la carrera de magisterio, profesión básicamente femenina y de mujeres procedentes del mundo rural, donde las expectativas profesionales se centraban, básicamente, en "estudiar para maestras".

> *Yo quería hacer Biología o Medicina… todas las amigas iban a hacer Magisterio a la Normal y la única que me iba a la Universidad era yo, y eso me trababa un poco, me daba un poco de vergüenza.*

Su ambiente social hace que se decida por un tipo de estudios diferente al que ella primeramente deseaba y, a pesar de que dos años después de haber iniciado los estudios de Magisterio se le concede una beca para realizar Medicina, desiste de su deseo de hacer una carrera superior ante la imposibilidad de no poder compaginar esos estudios con las prácticas de Magisterio, estudios que ya había iniciado.

> *Me dieron una beca para hacer Medicina, justo, cuando había hecho la inscripción en Medicina, me dicen que si no hago las prácticas de Magisterio el plan se extinguía… yo no podía compaginar las dos cosas.*

Aunque la maestra Rocío no llegó a los estudios de Magisterio por vocación, el trabajo y la experiencia a lo largo de los años la han hecho sentirse a gusto con su

[3] Las frases que aparecen en cursiva son textuales de la profesora.

profesión. Pues, ante la pregunta de cómo se sentía trabajando como maestra, su respuesta fue clara, firme y sin titubeos:

> *Muy bien, ahora no cambiaría la profesión por ninguna otra [...], ahora mismo la escuela no la dejaría.*

Lo que sí existen son marcadas preferencias del nivel en el que desea dar clases:

> *Lo que sí me quedaría en segunda etapa, primaria no la cogería [...], me gusta trabajar con chicos más mayorcitos.*

El trabajo de maestra, a lo largo de los años, le han hecho darse cuenta de que la elección de su profesión ha sido acertada. E incluso al insistirle en que si pudiese elegir de nuevo, qué profesión le gustaría tener, contestó con rapidez y seguridad:

> *Yo volvería a ser maestra o me gustaría dar clases en un instituto también, [...], enseñando Matemáticas o Naturales, Biología o Física.*

Adentrarnos en su trayectoria profesional es constatar el recorrido del profesorado de Magisterio en su caminar por diferentes centros, distintos niveles, variadas especialidades, el hacer frente a la práctica con los pocos recursos que se disponían, e inventar miles de estrategias de enseñanza para que el aprendizaje resultara satisfactorio. Este deambular no permite que el profesorado se arraigue en los centros y refuerce su vocación profesional, no les posibilita formar equipos de trabajo y les dificulta reflexionar sobre su práctica educativa y por tanto mejorarla.

Rocío responde a las características de la mayoría del profesorado de Primaria: recorrer diferentes islas (Fuerteventura, Gran Canaria y Tenerife), diferentes centros (La Lajita, Jandía, Las Playitas, San Bartolomé de Tirajana, Jinamar, La Guancha, La Corujera), y distintos niveles y cursos (desde Preescolar -ahora Educación Infantil -a Octavo de E.G.B.-2º de la ESO).

> *Cuando terminé empecé a ejercer en las Dominicas, daba clases en Segunda Etapa de Matemáticas y Física [...] tuve que estudiar cantidad [...], nadie quería coger la Física y yo me planteé como un reto personal coger la Física de séptimo.*
> *En Fuerteventura daba todas las áreas en quinto [...], tenía Preescolar de cuatro, Preescolar de cinco, primero y segundo, [...], me empecé a poner al día en toda la cuestión de la primera etapa, [...] tuve que estudiar las palabras nuevas que surgieron, todo lo de los semantemas, los monemas, los morfemas, tuve que ponerme al día, [...], empecé en aquella época a comprar unos libros verdes que se editaban sobre todos los contenidos de*

preescolar, y a informarme porque yo Preescolar no lo había visto en la vida, no sabía métodos de lectura, tuve que empezar a buscar la forma de enseñar a leer a los de primero.

En cuanto a sus inquietudes académicas podemos decir que Rocío es una maestra que se preocupa por su preparación profesional. Porque, como persona inquieta, continuó su formación académica a lo largo de los años a través de la asistencia y participación en diferentes cursos de perfeccionamiento.

En Psicología saqué primero y segundo completo, al llegar a tercero me iba para Fuerteventura, pensé en seguir los estudios por la Universidad a Distancia pero después se te hace muy difícil [...], empecé a hacer cursos de renovación, a todos los cursos que salían me apuntaba [...], hice el ACD, curso de actualización científico -didáctica, un curso de 150 horas.

Como vemos, su perfil profesional es el siguiente: mujer procedente de zona rural, que ha recorrido lugares y centros muy heterogéneos e impartido distintas asignaturas en los diferentes niveles educativos.

Otros aspectos que definen su perfil de maestra son:

1. Una clara convicción de que la profesión elegida ha sido la correcta.
2. Preocupación por su preparación profesional. Como se constata en la entrevista asiste regularmente a cursos de perfeccionamiento.[4]

Estos dos aspectos la llevan a que en la impartición de las clases sienta mucho interés y se vuelque en cada explicación para que sea comprendida por sus estudiantes, como confirmamos en las observaciones del desarrollo de las mismas, recogidas en los anexos.

4.2.2. Concepciones didáctico-pedagógicas

Con la finalidad de entender y construir fieles imágenes de lo que sucede en las clases pensamos que es interesante analizar la naturaleza de las creencias o concepciones pedagógicas del profesorado. En última instancia, lo que determina sus actuaciones

[4] Gracias a uno de estos cursos la seleccionamos para realizar este estudio.

profesionales es la influencia de estas creencias en los acontecimientos y actividades de la clase. Como diría Grundy (1991: 21): “Hemos de buscar el currículo, no en la estantería del profesor, sino en las acciones de las personas inmersas en la educación”.

Para nosotros una creencia será una forma de conocimiento viable (Tobin, 1990; Díaz – Obando, 1993) en el sentido de que ayuda a la persona a encontrar sus objetivos. Una creencia pedagógica refleja la visión que una persona tiene de la escuela, de la enseñanza escolar, del currículo y del aprendizaje.

Las creencias son cognitivas en su naturaleza y se desarrollan y permanecen durante largo tiempo. En algunos casos las personas no son conscientes de sus creencias, además de que la misma persona puede tener diferentes creencias y que estas sean contradictorias entre sí (Cooney, 1985; Thompson, 1992). En algunos ámbitos educativos se conocen como teorías implícitas: teorías pedagógicas personales reconstruidas sobre la base de conocimientos pedagógicos históricamente elaborados y transmitidos a través de la formación y en la práctica pedagógica. Nosotros seguiremos hablando de creencias o concepciones pedagógicas.

Ernest (1989), Lerman (1992) y Díaz–Obando (1993) han encontrado poca relación entre las creencias “teóricas” del profesorado y las que manifiestan, a través de sus actuaciones, en la práctica.

Con el objetivo de adquirir una mayor comprensión de lo que ocurre en nuestra aula, hemos creído importante analizar las relaciones entre las creencias de la maestra Rocío y sus actuaciones en la práctica. La comprensión de las creencias de Rocío puede facilitarnos entender sus acciones y decisiones académicas. Por otra parte, examinar las creencias, y su implicación en la práctica, de una maestra particular podría ayudar a que otros profesores reflexionen sobre sus practicas educativas. Porque como dice Contreras (1999: 461): “Las relaciones entre la teoría y la práctica no hay que buscarlas en los sentidos aplicativos, sino en los iluminativos, es decir, en el valor que demuestran las reflexiones teóricas para ayudarnos a discernir sobre la forma más apropiada de mejorar la educación”.

Por lo tanto, en este apartado, como anteriormente hemos afirmado, describiremos y analizaremos algunas de las creencias o concepciones pedagógicas de Rocío sobre la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje; del mismo modo veremos como implícita o explícitamente, asociadas al pensamiento de la maestra se encontraban las metáforas.

Como ya señalamos en el primer capítulo entendemos la metáfora desde dos vertientes diferentes:

1.-Como herramienta, que actúa como enlace para ilustrar las explicaciones de los profesores y cuya finalidad es facilitar la construcción y la comprensión de los conceptos matemáticos.

2.-Como forma de conceptualizar los principios y las creencias o concepciones pedagógicas del profesorado y su construcción del escenario profesional.

Estamos de acuerdo con Angulo Rasco (1999: 296), que expresa: "Las metáforas son medios lingüísticos a través de los cuales es posible acceder a la forma por la que los docentes comprenden, estructuran y proponen resoluciones a sus problemas en clase".

4.2.2.1. Creencias acerca de las matemáticas

Para Rocío la matemática es ante todo un lenguaje cuyas reglas hay que entender para poder resolver las dificultades que conlleva su comprensión. La metáfora que descansa en su concepción de nuestra ciencia es la siguiente*: la matemática es un lenguaje*. Pimm (1990) considera a este tipo de metáfora, que coincide con la comprensión que hace Lakoff y Johnson, como una metáfora sistemática en el sentido de que no es casual puesto que se da una transferencia sistemática de las expresiones utilizadas para describir los aspectos relacionados con el lenguaje al campo de las matemáticas.

Según sus creencias el papel de las matemáticas en la escuela sería el de enseñar a razonar, propiciando que los estudiantes puedan relacionar los conocimientos que tienen y utilizarlos en la resolución de nuevos problemas:

> *Yo pienso que la Matemática es un lenguaje, igual que la Plástica, la Música y la Lengua. [...]. Es un tipo de lenguaje, y si los alumnos lograran descifrar ese lenguaje la mayor parte de las dificultades de las matemáticas se eliminarían, porque muchas veces tú estás*

trabajando y no te das cuenta de que los alumnos no entienden porque no saben que significa la palabra "implica", no te das cuenta que los alumnos no comprenden un problema porque creemos que tienen el concepto claro del doble y sin embargo no lo tienen o la mitad, o la tercera parte o un tercio o el triple o el cuádruple, una serie de palabras que a lo mejor no las tienen claras.

Lo mismo que en el aprendizaje de un idioma, cree que se debe partir desde el principio, enseñando y afianzando bien los cimientos sobre los que se pretende construir el conocimiento. También piensa que hay que evitar los errores a tiempo, es más difícil corregir, por ejemplo, una mala pronunciación cuando ya está consolidada, que empezar desde cero:

Es más difícil eliminar un hábito que transmitir un conocimiento nuevo, […], cuando los alumnos llegan a segunda etapa tienen unos hábitos adquiridos que son muy, muy difícil quitarles, resolver los problemas sin terminar de leerlos, de no pensarlos, de no buscarles soluciones, de mirar la solución que tiene el compañero.

Para la maestra es importante que los estudiantes razonen el enunciado de los problemas, propone hacer traducciones de la misma forma que realizamos traducciones en otros lenguajes, el estudiante debe entender lo que está leyendo, si no difícilmente trabajará de una manera significativa. También queda patente que la maestra al expresarnos su comprensión de la matemática emplea metáforas extraídas de la enseñanza de la Lengua.

Si nosotros vamos, como yo les decía a ellos, traduciendo palabra por palabra, parte de las dificultades desaparecen, no es que lo crea es que lo he comprobado en este curso, […], este curso empecé con el álgebra y les decía que íbamos a hacer traducciones de Matemáticas a Lengua, vamos a traducir Matemáticas, en principio se reían, y decía: pero sin diccionario o con el diccionario de la Lengua cuando hay una palabra que no entendemos, entonces íbamos con frases completas, el cuadrado de una suma, viendo la diferencia de lo que era el cuadrado de una suma y la suma de cuadrados, el cuadrado de una diferencia y la diferencia de cuadrados, la diferencia que había entre una frase y otra, palabra por palabra la íbamos analizando, y gran parte de las dificultades desaparecieron en el tema de ecuaciones.

Los estándares curriculares sobre enseñanza, propuestos por el NCTM (1991) llaman la atención sobre el papel del lenguaje en la comprensión y en el hacer matemático de los estudiantes. Los estudiantes pueden no tener el vocabulario y sintaxis adecuada para expresarse y entender los conceptos matemáticamente. Esto puede crearles dificultades para alcanzar el éxito en las clases de matemáticas. Es responsabilidad del profesorado ayudar a los estudiantes a comprender y avanzar en el uso correcto y apropiado del lenguaje matemático.

4.2.2.2. Creencias sobre el aprendizaje

Su idea básica de lo que espera que consiga el alumnado en sus clases, frente a los problemas matemáticos, es lograr desarrollar el razonamiento:

> *Que los alumnos razonen, que piensen, simplemente que se paren a pensar[...], es increíble que alumnos que están en la escuela hagan los problemas sin pensar, […] saben por la forma de redacción que tiene el problema que es de sumar […], además no terminan de leerlo, te das cuenta de que los alumnos no terminan de leer el problema, es más cuando el problema tiene dos cuestiones, contestan la primera y no llegan a contestar la segunda cuestión, lo cual te indica que no ha terminado de leer el problema, ni lo ha razonado.*

Cree que las matemáticas es una asignatura difícil, y atribuye esa dificultad a la falta de manipulación y a la cantidad de contenido.

> *Yo pienso que es en la falta de manipulación, o sea, a partir de quinto en las escuelas no se manipula, […]. Si se manipulara y se buscara una base material a todos los conceptos no habría dificultades en las matemáticas ni siquiera, y es muy aventurado decirlo habría dificultades, en alumnos de educación especial, […], lo que pasa que así como los niños que no tienen dificultades dejan muy pronto la manipulación, los niños de educación especial necesitan un tiempo mayor de manipulación.*

Es consciente de la diversidad de métodos, de caminos, a la hora de resolver un problema, y que el maestro tendría que estar alerta y no imponer su método como único:

> *Si te resuelve el problema por otro método y tú dices: bueno, no está mal, pero vamos a hacerlo así porque es más fácil y porque a mí me gusta más, a lo mejor eso lo haces tres o cuatro veces, y ya indirectamente estás imponiendo tus pensamientos en él , y ya ahí tú tendrías que cambiar, tú como maestra, no él.*

Está en desacuerdo con que el trabajo matemático se reduzca a hacer cálculos rutinarios:

> *Muchas veces en la escuela se les da a los alumnos cantidad de operaciones donde tienen que hacer unos cálculos tremendos y donde no están utilizando la mente para nada, sino que se reduce a una mera mecánica.*

Pero a su vez cree que existen dificultades entre las exigencias administrativas, esto es, el currículum prescrito por la administración y la realidad con la que cotidianamente nos encontramos en el aula. Para la maestra, la administración, con sus exigencias, dificulta la toma de decisiones del profesorado:

> *A veces nos olvidamos del papel de las Matemáticas por la cantidad de contenidos que tenemos que transmitir, porque si la ley no te marcara esos contenidos tan elevados yo le daría otro giro al área.*

Para ella las actividades que se utilicen en la instrucción deben partir o estar relacionadas con el medio en que vive y se desarrolla el alumno. En su deseo de hacer que el alumnado entienda los conceptos, recurre a su medio familiar y social.

> *Es importante que los problemas estén relacionados con su mundo, con su entorno.*

Refiriéndose al colegio de La Corujera:

> *Por ejemplo, en este colegio intento poner problemas relacionados con el deporte, porque hay una afición tremenda al fútbol, al baloncesto.*

Cuando describe su experiencia en un colegio de la isla de Fuerteventura, situado en un medio dedicado fundamentalmente a la pesca, expone:

> *A los chicos les gustaba la pesca […]. Tuve que empezar a buscar estrategias para montar un trabajo sobre los peces, que era lo que ellos más dominaban.*

De su estancia en San Bartolomé de Tirajana, en la isla de Gran Canaria, pueblo agrícola y ganadero, nos dice:

> *Allí había muchas vacas, y entonces me trajeron los medidores que tienen de leche…al final me acuerdo que hacía calculo mental en grupo [...] les gustaba cualquier tema relacionado con la agricultura.*

De su paso por Educación Compensatoria nos resalta su trabajo con los niños de Educación Especial:

> *Hacían proyectos de tapicería, de carpintería, de agricultura, hacían presupuestos, empezaron a vender plantas, tapizados de sillones, tenían que llevar una contabilidad, y claro en la contabilidad empezaban los números negativos, dinero que entraba, dinero que salía, se planteo la necesidad de trabajar la medida porque resulta que habían equivocado*

> *varios proyectos por equivocarse en medidas se usaban los talleres como motivación para las clases teóricas y la verdad es que les gustaba.*

Pero, al mismo tiempo, intenta seguir fielmente las exigencias administrativas al suponer que, el no seguirlas, pueda dar lugar a que, el alumnado, en etapas posteriores se encuentren con serios problemas:

> *Tienes que tratar todo porque después se lo van a pedir en el instituto, del instituto a la universidad.*

Por una parte cree que el currículo prescrito está cargado de contenidos que deberán desarrollarse en el aula, y por otra piensa que es imposible que el aprendizaje se realice adecuadamente y con un nivel aceptable si, en la formación del concepto no se cubre la etapa manipulativa y si el aprendizaje no se inicia desde la realidad cercana y concreta del alumnado.

Su inquietud la resuelve aceptando un currículum contextualizado -problemas referidos a la realidad cercana al alumnado- pero formulado a partir de un conjunto de reglas, obligaciones y valores procedentes del currículum oficial que se presenta cargado de contenidos, y que denomina “herramientas de trabajo”:

> *Ellos no tienen herramientas de trabajo, […], cuando ellos llegan a segunda etapa y tú les planteas un problema de entrada es muy difícil que te lo resuelvan si el problema no tiene una estructura parecida a la que ellos están acostumbrados a resolver, no tienen el mecanismo de decir, voy a utilizar todos los conocimientos que adquirí anteriormente para ver por qué camino puedo resolver este problema, […], tienen bastantes dificultades en empezar a hacer esquemas y representaciones para buscar la solución de los problemas, […], en segunda etapa lo que más se debe trabajar es los problemas por eso porque tienen muy poca facilidad para resolverlos.*

Se observa, en los apartados anteriores, cómo la maestra emplea, a veces, expresiones metafóricas para explicar sus pensamientos y conceptos acerca del aprendizaje matemático. Como afirma Carter (1990: 301): “Las metáforas son una ventana para conocer los tipos de conocimiento profesional que diferentes docentes mantienen y asumen”.

4.2.3. Criterios sobre sus estudiantes

La última entrevista que mantuvimos con Rocío se llevó a cabo cuando había acabado el curso escolar y los estudiantes estaban evaluados. El objetivo era que nos diera su opinión acerca de la actuación matemática de los escolares entrevistados. Encontramos sus respuestas disonantes con su dedicación profesional, sin embargo, cuando analizamos sus palabras y acciones teniendo en cuenta su contexto académico e institucional, entendimos que sus opiniones y creencias sobre los estudiantes eran, básicamente, consecuencia del entorno académico y de las reglas de las instituciones educativas, como se pone de manifiesto en su preocupación por el trabajo cotidiano del alumnado en el aula:

> *En la escuela se debe valorar el esfuerzo y el trabajo diario.*

No cae en cuenta de que las circunstancias específicas de cada escolar condicionan su educación y su aprendizaje. Ante la pregunta de por qué había suspendido a Kevin, si encontraba difícil evaluarlo, no titubeó en la respuesta:

> *Yo valoro el trabajo diario y la evaluación es continua [...], moralmente no lo puedo aprobar, ni por mí ni por el resto de sus compañeros [...], no puedo valorar lo mismo a un alumno inteligente que no trabaja, no asiste a clase, su esfuerzo es mínimo, mientras que hay alumnos que les cuesta más adquirir una serie de conocimientos y por lo tanto se esfuerzan más, no se pueden valorar igual.*
> *No lo puedo aprobar aunque haya hecho un control superbrillante.*

Ella es consciente de que Kevin es un alumno despierto y con posibilidades de tener éxito académico:

> *Pienso que es un alumno que podría ser brillante si tuviera constancia, si viniera a clase, si no tuviera esos problemas tan gordos que tiene de familia, esos problemas de autoestima, de personalidad, de exigencia a sí mismo, podría ser un alumno superbrillante.*

Pero también exige para valorarlo que acate las normas establecidas por la institución.

Por lo general, las instituciones educativas fijan los objetivos de acuerdo a las necesidades de la sociedad. La estructura de la escuela debe ser coherente además de eficaz con respecto a ellos, adaptándolos al alumnado. El profesorado suele asumir el cometido que la sociedad en general y, la escuela en particular, le ha asignado. Aquellos/as alumnos/as que no se adapten al modelo preestablecido por la escuela son tachado de problemático y en algunos casos pueden sentirse apartados de la red escolar, como así ha acontecido en nuestro caso de estudio:

> *Ha sido un chico problemático en el ámbito de comportamiento y de personalidad.*

La maestra no valora los conocimientos previos del alumnado adquiridos en otras instancias fuera del ámbito escolar. Los conocimientos, para ella, debe establecerlos e impartirlos la escuela. Los adquiridos fuera del recinto escolar no son tenidos en cuenta.

> *A mí me es muy difícil evaluar, porque no sé hasta que punto los conocimientos que ha adquirido los ha adquirido aquí, o los ha adquirido en el mundo del trabajo.*

Para esta maestra, aunque se preocupa por atender a la diversidad, sus actuaciones se contradicen con su forma de pensar. Es consciente de que, para alumnos heterogéneos, las estrategias de enseñanza tienen que ser diferentes, en teoría. Cuando le preguntamos cuál sería su reacción si se encontrara con un alumno o una alumna que fuese capaz de resolver los problemas matemáticos siguiendo pasos no enseñados en la escuela respondió:

> *En el que caso que yo me encontrara un caso así me haría reflexionar y cambiar de actitud, porque entonces es que yo le estoy imponiendo a él un método determinado o un camino determinado a seguir y no le estoy dando rienda suelta a su pensamiento, no le estoy trabajando el pensamiento divergente, tendría que planteármelo para cambiar con ese alumno mi actitud con él.*

En primer lugar podemos destacar el hecho de que no es consciente de que ya se encontró un alumno "especial" – Kevin – y en segundo que no es capaz de llevar a la práctica lo que sabe perfectamente en teoría, como lo demuestra el hecho de no evaluar los problemas resueltos por Kevin, en un control que hizo, y en el que utilizó un método diferente.

Concluimos que en determinados casos son más importantes las ideas académicas que los hechos concretos de cada alumno y de cada momento. Sabiendo la maestra que Kevin tiene algún conocimiento básico y puede resolver problemas usando métodos no aprendidos en la escuela, no aceptó las soluciones halladas por el alumno utilizando procedimientos no académicos, sólo fueron aceptadas las soluciones establecidas en los contenidos del curso y fijadas por ella:

> *Él sabe razonar, sabe razonar un problema, no lo sabe plantear porque no tiene las herramientas necesarias para plantearlo[...], resuelve todos los problemas por tanteo [...], pero no tiene herramientas, no sabe propiedades, no tiene método, no tiene nada, porque no lo ha adquirido aquí, entonces ese alumno no puede pasar aprobado.*

Pensamos que es importante que los estudiantes sean estimulados y alentados a utilizar "su método" de solución en los problemas matemáticos, porque en ese proceso el estudiante se esfuerza por encontrar significado a lo que está haciendo, más que intentar "recordar" el método o el procedimiento utilizado por el profesor, o hecho en clase. Los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* propuestos por el NCTM (1991) y los *Diseños Curriculares Base* [5] formulados por el M.E.C. (1989) hablan de que la intervención educativa debe dar prioridad a que los alumnos realicen aprendizajes significativos por sí solos. Según los D. C. B. una de las condiciones que tiene que cumplirse para asegurar que el aprendizaje sea significativo es que el alumno tenga una actitud favorable a aprender, esto es que esté motivado y comprometido en su formación.

Debido a su "bajo" ambiente social Kevin se puede considerar como un alumno "con problemas" (según su maestra). Nuestra opinión como investigadores es que Kevin fue un alumno que colaboró con entusiasmo en las entrevistas, no faltando a ninguna de ellas, en total ocho, cada quince días y durante cuatro meses. Parecía que esperase con gran ilusión el día de las entrevistas, ofreciéndose en todo lo que fuese necesario en relación con la ayuda logística. Cabría resaltar su interés en expresar sus pensamientos y razonamientos en la solución de los problemas matemáticos de la forma más clara posible para facilitar el trabajo de investigación, no desanimándose, y mostrándose muy activo mientras resolvía los problemas.

Queremos dejar constancia del contraste en el cambio de actitud del alumno en la escuela y en la colaboración para esta investigación. Justificaríamos este cambio en el interés que le suscitaba lo que hacía en las entrevistas, en las que se valoraban sus

[5] En adelante, D. C. B.

aptitudes para resolver problemas, en caminos no estándares, y en las que no tenía que estar pendiente de una calificación.

Es evidente la valoración que la maestra hace del trabajo personal y el esfuerzo realizado por los alumnos, en cambio no valora otros aspectos extraacadémicos adquiridos por el alumnado que le pueden ayudar a afrontar el mundo del trabajo y que podían hacer pensar a la profesora que Kevin es apto para obtener el graduado escolar.

Por el contrario, otro alumno, Raúl, que en absoluto se aparta del currículo y de las normas establecidas por la escuela, es valorado como brillante:

> *Es un niño que siempre ha destacado [...], ha destacado siempre dentro del grupo.*

A pesar de que como mostramos, en las entrevistas, era un alumno dependiente cognitivamente de la maestra, sin criterios propios y que se apoyaba, fundamentalmente, en la memoria. Repetía lo enseñado en clase, pero siempre fue valorado positivamente:

> *Era un niño que desde que yo lo cogí en sexto era bueno, un niño que nunca tuvo dificultad.*

En lo general, algunos profesores tienen ideas previas del alumnado, si creen o piensan que un alumno es “bueno” o “malo” mantienen ese criterio a través de los diferentes cursos. Por otra parte y en determinadas ocasiones se dejan influenciar por la opinión que puedan tener sus colegas.

Alumnos que se adaptan a la norma establecida por los profesores y hacen exactamente lo “mandado o establecido” por la institución académica son considerados “buenos”.

> *Era el típico alumno que siempre traía la tarea hecha.*

Pensamos que al profesorado le preocupa especialmente que el alumnado realice la tarea, aprenda los conocimientos que ellos creen pertinentes para pasar de curso y establecidos por el currículo prescrito. Valoran los aspectos formales de la enseñanza: asistencia, puntualidad, conocimientos tal y como las instituciones los establecen. Algunos suelen ser poco sensibles a otro tipo de conocimiento generado por el propio alumno y adquirido en el mundo laboral o familiar.

Por lo general y durante mucho tiempo el profesorado ha estado influenciado por la perspectiva técnica del currículo basada, fundamentalmente, en el control, por lo que es lógico pensar que esto hace que valoren sólo lo que ellos enseñan y explican porque es, en definitiva, lo que pueden controlar.

Cambiar esta posición del profesorado es muy difícil si las instituciones no se implican en ello, y el profesorado no se pone a la labor y toma conciencia de los aspectos considerados anteriormente. Se cree que sólo con los cursos de perfeccionamiento para mejorar la instrucción de las materias concretas, se logra la calidad de la enseñanza, olvidando que con el análisis de las actuaciones del profesorado se puede contribuir, también, a mejorar dicha calidad. Los investigadores en educación, desde este tipo de estudios podemos hacer reflexionar al profesorado sobre cómo influyen sus creencias y actuaciones pedagógicas en el desarrollo diario de sus clases y hacerles caer en la cuenta que no sólo se debe premiar el trabajo y la constancia sino también se debe valorar la creatividad y el pensamiento divergente que, a veces, implica ruptura con las normas establecidas.

4.3. ANÁLISIS DE LAS OBSERVACIONES DEL DESARROLLO INSTRUCTIVO DE LA MAESTRA ROCÍO

En los apartados anteriores construimos el perfil profesional de la maestra Rocío y hemos detectado algunas de sus concepciones pedagógicas "teóricas". Con la finalidad de profundizar y comprender más su práctica educativa y la relación entre sus creencias teóricas y sus actuaciones didácticas, analizaremos en los apartados siguientes las observaciones de aula que realizamos en el transcurso de la investigación.

Para facilitar la lectura de este apartado repetimos algunas de las ideas principales, desarrolladas en el capítulo segundo sobre metodología, y que hemos seguido en el análisis de las observaciones de clase.

Doyle (1983, 1986) indica que los docentes organizan a los grupos de estudiantes para trabajar por medio de actividades que poseen una doble dimensión:

- Por una parte, la estructura social, a través de la cual el profesorado organiza al alumnado para llevar a cabo el trabajo asignado en el aula (tiempo estipulado, trabajo en grupos, etc.).
- Y por otra, las tareas académicas que el alumnado realiza en cada materia concreta.

En relación con esta segunda dimensión, Doyle (1986), refiriéndose al contenido de la materia (o currículo), afirma que las tareas académicas que los docentes asignan al alumnado organizan y dirigen su pensamiento y su actuación.

Una tarea académica se puede definir sobre la base de las siguientes componentes:

1. Un producto que hay que conseguir, por ejemplo las respuestas a un test, respuestas verbales a cuestiones planteadas en clase o una solución a un problema verbal.
2. Recursos como apuntes, libros de texto, materiales, retroproyectores, ordenadores, conversaciones con otros estudiantes o modelos de distintas soluciones facilitados por el profesor.
3. Las operaciones que se ejecutan en la obtención del producto, como por ejemplo, *copiar* números en una lista, *recordar* respuestas de lecciones aprendidas con anterioridad, *aplicar* una regla (regla de tres, invertir y multiplicar) que sirva para seleccionar la respuesta adecuada o formular un algoritmo que ayude a resolver el problema, *definir* un concepto, etc.
4. El "peso" de la tarea en la evaluación de la asignatura, por ejemplo hay ejercicios que hay que realizar diariamente como parte de la evaluación y otros, como los exámenes que pueden valer el 30% de la nota de un trimestre.

En resumen, la reflexión en el concepto de tarea lleva la atención a cuatro aspectos claves del trabajo del alumnado en una clase: a) un objetivo o producto final para ser alcanzado, b) un conjunto de condiciones y recursos que se dispone para la realización de la tarea, c) operaciones cognitivas envueltas en la conexión y uso de los recursos para alcanzar el objetivo o generar el producto, y d) importancia dada al trabajo hecho.

Los profesores son quienes proponen las tareas de clase, ellos especifican los productos, guían y orientan a los estudiantes sobre los procesos que pueden utilizar para realizar el trabajo. Definiendo y estructurando el trabajo que los estudiantes tienen que desarrollar, influyen y son responsables del aprendizaje de estos.

Localizar, describir y evaluar las tareas no es un proceso fácil; para obtener una imagen acertada del trabajo asignado y realizado hace falta llevar a cabo continuas observaciones de las clases y examinar lo que los estudiantes realizan diariamente. La multiplicidad de opciones complica la investigación, pero al mismo tiempo esta variedad la enriquece y contribuye a su productividad, ya que refleja una parte importante dentro de la vida de una clase.

Una manera útil de describir las tareas es analizando las operaciones cognitivas que se les exige a los alumnos para que puedan ejecutarlas. Doyle (1983) distinguía, por una parte, entre las diferentes tareas en las que se puede presentar el currículo, y por otra, en las dimensiones asociadas con dichas tareas académicas en la clase.

Con relación a las diversas tareas diferencia entre:

- <u>Tareas de memoria</u>, aquellas en las que, básicamente, se les pide a los estudiantes reconocer o reproducir información previamente presentada (por ejemplo, memorizar las tablas de multiplicar).
- <u>Tareas de rutinas</u>, en las que se demanda al alumnado la aplicación de una formula estandarizada o un algoritmo, para generar las respuestas (por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones utilizando el método de sustitución).

Tanto las de rutina, como las de memoria pueden, a su vez, clasificarse en dos tipos, las de Tipo I que suponen la reproducción de una cantidad relativamente pequeña de conceptos, palabras, etc., o el uso de un número pequeño de pasos de un algoritmo para producir la respuesta. Por el contrario, las de Tipo II representan la reproducción y la utilización de algoritmos en mayor cantidad o especialmente complicados.

- <u>Tareas de comprensión o entendimiento</u>, son aquellas en las que se espera que el alumno transforme versiones de información previamente presentada y aplique procedimientos a nuevos problemas, o decida sobre algunos procedimientos que se pueden aplicar a un problema en particular (por ejemplo, resolver un problema “no rutinario”).

- Tareas de opinión, que piden al alumnado que establezcan preferencias sobre algo (por ejemplo, decidir sobre sus asignaturas favoritas).

Es importante tener en cuenta la distinción entre las distintas tareas por la demanda que exige su cumplimentación. Doyle (1988) sostiene que la forma de pensar de un alumno acerca de una cierta asignatura está condicionada por las tareas que se le pide que realice en dicha asignatura.

En este contexto, el trabajo dirigido que los estudiantes realizan determina cómo entienden y encuentran sentido a los conceptos matemáticos (influenciará además los conocimientos previos que el alumno posee, la experiencia, la motivación y actitud hacia el contenido y el medio sociocultural al que pertenece)**.**

Por otra parte en relación con las dimensiones asociadas a dichas tareas académicas en la clase, Doyle habla de *ambigüedad y riesgo*. La primera dimensión hace referencia a la posibilidad con la que una respuesta concreta puede ser constituida por adelantado o una fórmula precisa puede ser utilizada como respuesta plausible. El *riesgo* indica el rigor de los criterios de evaluación que un docente aplica y la probabilidad de que dichos criterios sean cumplidos por el alumnado en una situación dada.

Las tareas de comprensión son las que implican mayor *riesgo* y mayor *ambigüedad* ya que el alumnado ha de emplear procedimientos complejos y estrategias cognitivas de alto nivel para encontrar una respuesta.

Tomando las ideas anteriores como referencia, en el siguiente apartado, analizaremos el tipo de tareas que la maestra propuso durante el tiempo que trabajamos con ella.

4.3.1. Identificación de las tareas y sucesos en el desarrollo de la instrucción

Para la redacción de este apartado nos apoyaremos en la información recogida durante las observaciones de clase que realizamos durante el primer trimestre del curso académico. La razón fundamental es que durante ese tiempo se desarrolló en la instrucción un bloque temático completo. Se constató en el resto de las observaciones realizadas que la maestra siguió el mismo patrón instructivo.

Durante el primer trimestre la maestra llevó a cabo el desarrollo del bloque temático: los cuerpos geométricos (prismas, pirámides, cilindros y conos), en torno a cuatro grandes objetivos:

- El reconocimiento de los cuerpos geométricos globalmente y analizando sus elementos, partiendo de su construcción de forma manipulativa.
- La comprensión del concepto de área, diferenciando entre área lateral y total.
- El desarrollo conceptual y no simplemente memorístico de las fórmulas para determinar las áreas de los cuerpos geométricos.
- Problemas relacionados con el tema.

La maestra dedicó quince sesiones de clase, de una hora de duración, al desarrollo de este bloque temático: diez de las cuales las invirtió en el concepto de prisma, dos en el de pirámide, dos en el de cilindro y una en el cono.

Las sesiones de clase dedicadas al concepto de prisma fueron diez. De estas:

- Cinco (8, 9, 15, 16 y 17 de noviembre) se dedicaron a la comprensión de los conceptos.
- Una (21 de noviembre y mitad del 22 de noviembre) a resolver un problema de aplicación de los conceptos adquiridos.
- Tres (22, 23 y 28 de noviembre) a actividades de consolidación y repaso.
- Una (29 de noviembre) a una evaluación.

La siguiente tabla muestra la distribución temporal del bloque temático:

Distribución temporal del bloque temático Los cuerpos geométricos						
Prisma				Pirámide	Cilindro	Cono
Comprensión de conceptos	Aplicación	Revisión	Evaluación			
1 2 3 4 5	6	7 8 9	10	11 12	13 14	15
8, 9, 15, 16 y 17 nov.	21 nov.	22,23,28 nov.	29 nov.	30 nov., 5, 12, 15 y 19 dic.		

Los recursos que la maestra utilizó en el desarrollo del tema fueron:

-fotocopias de una unidad didáctica que ella misma había elaborado como parte de la evaluación de un curso de actualización didáctica–científica al que asistió,

-libro de texto,

-material elaborado en cartulina,

-caja de cuerpos geométricos,

-gomas, tijeras, pizarra y tizas.

La unidad didáctica, cuya copia integra figura en el anexo, se organizó en torno a 4 fichas y 19 actividades relacionadas con las fichas.

En las fichas se mostraba el contorno del desarrollo de los prismas cuadrangular, pentagonal, hexagonal y octogonal. Las actividades, que tomaban como punto de partida la construcción en cartulina de los diferentes prismas, estaban orientadas a que el alumno lograra, siguiendo un método inductivo–experimental los siguientes objetivos:

1. Construir y reconocer cuerpos geométricos y sus elementos, diferenciándolos de las figuras planas.
2. Enunciar características de los cuerpos geométricos.
3. Aplicar los conocimientos previos, relativos al concepto de área, en la resolución del área lateral y total del prima.
4. Enunciar y resolver problemas geométricos de la vida real.
5. Aplicar actividades de tanteo de medidas a los cuerpos geométricos.

En el desarrollo de la lección, además de las actividades de la unidad didáctica, la maestra intercalaba problemas, algunos inventados por ella y otros copiados del libro de texto.

A través de las observaciones de aula y posterior análisis, distinguimos que utilizó distintos tipos de tareas para conseguir el aprendizaje de los conceptos relacionados con los prismas, que podemos clasificar en:

- Tareas de construcción
- Tareas de aplicación
- Tareas de revisión
- Tareas de evaluación

4.3.1.1. Tareas de construcción

Las tareas realizadas durante la instrucción podíamos considerarlas de comprensión, ya que en ellas lo que demandaba continuamente la maestra era que los alumnos comprendiesen lo que estaban haciendo y razonasen, hecho coherente con sus creencias, ya formuladas en apartados anteriores, sobre el aprendizaje.

Para ello, en el desarrollo de la lección diaria y después de que los alumnos han construido en cartulina los prismas y resuelto las actividades programadas para ese día, la maestra va preguntando a cada uno de los estudiantes, estimulándoles a que expliquen sus razonamientos; al mismo tiempo, a través de preguntas, les ayuda a clarificar sus pensamientos y razonamientos.

El siguiente extracto, correspondiente a la sesión de clase del día 15 de noviembre, es un ejemplo "típico" de la interacción de Rocío con los estudiantes.

Rocío pregunta sobre la relación entre el número de caras de un prisma hexagonal y el número de lados de los polígonos que forman las bases del prisma.

> *Rocío: ¿Qué relación existe entre el número de rectángulos en la figura, y la base? ¿Hay alguna?*
> *Alumno: Coinciden con las caras de la base.*

La maestra tiene el prisma en su mano y pide al resto de los estudiantes que observen lo que ha dicho el alumno.

Alumno: El número de lados de la base coincide con el número de caras.

Rocío: ¡Eso sí! Hay que explicar bien las cosas.

La maestra se pasea entre los estudiantes y les ayuda a que contesten las preguntas formuladas en las actividades de la unidad didáctica. Se dirige a otro estudiante y le pregunta el nombre del prisma hexagonal.

Alumno: Es un hexágono.

Rocío: ¿Hexágono?

Alumno: Prisma hexagonal.

Rocío muestra los diferentes prismas ya realizados (cuadrangular y pentagonal) y pregunta a distintos alumnos los nombres. Se dirige a otro alumno y sigue preguntando sobre el prisma hexagonal que acaban de construir.

Rocío: ¿Qué figura se ha formado?
Alumna: Prisma hexagonal.

Rocío: ¿Están todos de acuerdo?

Alumnos: Sí.

Rocío: ¿Tiene algunas diferencias con la figura anterior?

Alumnos: Sí.

Rocío: ¿Cuáles?
Alumna: En el área lateral tiene una cara más. En la base tiene también un lado más.
Rocío: *¿Cómo se llama esa base?*
Alumna: Hexágono.
Rocío: *¿Alguna diferencia más?*

Los niños se callan.

Rocío: Díganme ahora las semejanzas.

Es Kevin, quien contesta ahora a las preguntas.

Rocío: ¿Sabes cuáles son?

Kevin: Sus caras son rectángulos.

Rocío: ¿Alguna más? ¿Cómo están colocados los rectángulos? ¿Qué le da nombre al prisma?
Kevin: La base.

Rocío: ¿Sólo hay una base?

Kevin: Dos.

Rocío: Entonces debemos decir las bases.

La maestra enseña un prisma que tiene en su gaveta y pregunta:

Rocío: ¿Qué prisma es este?
Alumno: Prisma triangular.

Rocío: ¿Por qué?

Alumno: Porque su base es un triángulo, y tiene tres caras.

Rocío: Este es el prisma que se usa para la dispersión de la luz.

Se dirige a un alumno que parece no estar atendiendo, y le pregunta el nombre del prisma.

Alumno: Prisma triangular.

Rocío: ¿Por qué?

Alumno: Porque tiene tres bases.

Rocío: ¿Bases?

Alumno: No, caras.

Rocío: Si la base es un triángulo, ¿cómo se llama el prisma?

Alumno: Triangular.

Rocío: ¿Si la base es un cuadrado?

Alumno: Cuadrangular.

Se puede observar, a través de los párrafos anteriores, el interés de Rocío por promover la reflexión y el razonamiento en sus estudiantes, llevándoles a conectar los conocimientos adquiridos, y a encontrar semejanzas y diferencias entre los distintos conceptos.

En coherencia con su creencia "teórica", señalada en párrafos anteriores, de que la matemática es un lenguaje y que es importante entender el significado de las palabras, se constata a lo largo de las observaciones su preocupación por que los estudiantes entiendan el significado de las palabras que están utilizando:

Rocío: ¿Qué eran semejanzas?
Alumna: No lo sé, no me acuerdo.

Rocío: Lo que tienen igual.

Como puede comprobarse en las observaciones que figuran en el anexo, Rocío es reacia a aceptar una explicación si no está bien justificada. Hace que el estudiante la repita, de manera que el resto de los alumnos entienda dicha explicación. Cuando un estudiante explica un problema se asegura que pueda justificar lo que hace, insistiendo en que el resto de los compañeros entiendan el proceso utilizado, para lo cual después de la explicación de un alumno, ella repite el proceso.

4.3.1.2. Tareas de aplicación

Después de cinco sesiones de clase en las que se trabaja en la unidad didáctica, la maestra decide proponer en la sexta sesión (21 de noviembre), un problema tipo, que se inventa, y que sirva de aplicación a los conceptos desarrollados.

El enunciado del problema es el siguiente:

> Calcular la cantidad de papel que se necesita para construir un prisma cuadrangular, cuya arista básica mide 3 cm y su arista lateral 10 cm
> ¿Cuánto costará si el dm^2 de papel cuesta 15 Ptas.?

De nuevo la maestra intenta que los alumnos realicen un aprendizaje significativo, comprendiendo lo que están haciendo. El siguiente extracto (22 de noviembre) muestra el diálogo entre la maestra y uno de los estudiantes que había resuelto el problema:

> *Rocío: Sal a la pizarra y explica como resolviste el problema. ¿Cómo calculaste la cantidad de papel que necesitabas para el prisma cuadrangular?*

El estudiante dibuja en la pizarra un prisma cuadrangular.

> *Rocío: Lee el problema.*

El alumno lee el problema.

> *Rocío: Estén todos atentos, cuando él termine intervendrán quienes hayan hecho el problema de una forma diferente.*

El estudiante empieza a razonar de la siguiente manera:

Alumno: Lo primero que hay que hacer es calcular el área de un rectángulo, su fórmula es base por altura.

Escribe en la pizarra:

$$b \times h = 3 \times 10 = 30 \text{ cm}^2.$$

Alumno: El segundo paso, sería hallar el área del rectángulo grande, que su fórmula sería rectángulo pequeño por cuatro.

Se refiere al área lateral del prisma. Escribe:

$$Rp \times 4 = 30 \times 4 = 120\text{cm}^2$$

Rocío: Bien, sigue.

Un alumno pregunta: ¿qué es Rp? ¿Rectángulo pequeño?

Alumno: Es una cara del prisma, que necesitamos.

La maestra explica el enunciado del problema al estudiante que preguntó, diciéndole que es un problema donde se pide el precio del papel necesario para construir el prisma

Alumno: El tercer paso sería hallar la base. Su fórmula es: $l \times l = 3 \times 3 = 9$
Rocío: Bien.
Alumno: El siguiente paso es hallar las dos bases.
Rocío: Aquí no necesitas fórmula, ¿qué vas a hacer?
Alumno: Multiplicar por dos.
Rocío: Vale.

El estudiante escribe en la pizarra:

$$b \times 2 = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}^2.$$

Alumno: El cuarto paso es hallar el área final.
Rocío: ¿Cómo se llama esa área?
Otro alumno: Perímetro.
Rocío: Pero ¿qué es el perímetro?

En la sesión de clase del día anterior la maestra había recalcado la diferencia entre área y perímetro, explica que *peri* significa alrededor y que *área* tiene que ver con el interior de la figura.[6]

Alumno: Se trata del área total

Escribe en la pizarra:

$$At = Ab + A$$

Rocío: Pon dos áreas de la base, recuerda que siempre que tengan un número y letra, escribe el número antes de la letra.

El alumno escribe en la pizarra:

$$At = (9 \times 2) + 120 = 138 \text{ cm}^2.$$

Rocío: ¿Qué es 138 cm^2*?*
Alumno: El papel necesario para construir un prisma cuadrangular.
Rocío: ¿Qué más decía el problema?

El estudiante lee la segunda parte del problema y continua con el proceso. La maestra sigue preguntándole, haciendo que el estudiante reflexione sobre lo que está haciendo.

Rocío: Ahora yo les repasaré lo que hizo y si alguien ha hecho el problema de una forma diferente lo puede hacer en la pizarra. No es necesario que haga todo el problema, sino que diga las diferencias que ha utilizado.

La maestra repite el proceso haciendo preguntas a toda la clase. Luego comenta la solución encontrada por otra estudiante, quien primero dibuja el rectángulo de dimensiones 12 cm y 10 cm y calcula su área, luego pasa el resultado de cm^2 a dm^2, y por último calcula el área de la base, transforma las unidades y lo añade al resultado anterior.

---

[6] Haciendo un paréntesis merece la pena recordar que la confusión entre los conceptos de perímetro y área suele ser habitual en los estudiantes, algo que se ha constatado en distintos países. La profesora italiana Emma Castelnuovo (1981), pionera en el desarrollo de la Educación Matemática, piensa que una de las razones de esta dificultad es debida a que estos conceptos no se desarrollan al mismo tiempo en la instrucción, además de que en ésta se acostumbra a utilizar recursos que conducen a una geometría estática. Ella propone distintas estrategias y recursos para explicar estos conceptos.

En relación con su creencia sobre la diversidad de soluciones, en varias ocasiones pidió a sus estudiantes que expusiesen sus soluciones, si eran diferentes de la que en esos momentos se había presentando:

> *Rocío: Ahora yo les repasaré lo que hizo Kevin y si alguien ha hecho el problema de una forma diferente lo puede hacer en la pizarra. No es necesario que haga todo el problema, sino que diga las diferencias que ha utilizado. (22 noviembre)*
>
> o
>
> *Rocío: Si al calcular el área, o al calcular algo por diferentes caminos da el mismo resultado ¿qué pasa? Si hago un problema por tres caminos diferentes ¿valen los tres?*
>
> *La alumna: Si (17 noviembre)*

Su creencia de enfatizar en clase la diversidad de soluciones, es contradictoria con la valoración que hizo cuando Kevin resolvió los problemas del examen comentados en el tercer capítulo. Intuimos que valora el que los estudiantes utilicen distintos métodos si estos han sido explicitados en clase. Por otra parte fue nuestro trabajo, intensivo e individual, con Kevin lo que nos hizo darnos cuenta de sus habilidades poderosas de visualización, algo no detectable fácilmente a través de exámenes.

4.3.1.3. Tareas de revisión

En los párrafos anteriores hemos querido reflejar cómo la maestra se esfuerza en la instrucción directa, por crear las condiciones adecuadas para que los alumnos, a través de sus observaciones, análisis y razonamientos, lleguen a la comprensión.

No obstante las tareas que propone en el resto de las sesiones, dedicadas a la consolidación y las tareas que propone en la evaluación, contradicen esta percepción.

Los docentes dirigen el proceso de aprendizaje de los estudiantes, no sólo por medio de la instrucción directa en la que se suceden e intercalan exposiciones, respuestas a preguntas y elogios al trabajo de los estudiantes, sino que también guían el procesamiento de información del estudiante, diseñando y llevando a cabo otro tipo de tareas académicas que permitan un trabajo autónomo del estudiante, así como manteniendo la responsabilidad de los alumnos en la realización de las mismas.

La maestra Rocío en cuatro sesiones de clase, tres de las cuales dedica a la consolidación y una a la evaluación, intenta que los alumnos consoliden y apliquen los conocimientos aprendidos en las cinco sesiones en las que llevó a cabo el desarrollo de la unidad didáctica ya mencionada.

En contraste a las tareas de comprensión utilizadas en la instrucción, los problemas propuestos en las tres sesiones mencionadas podían ser considerados tareas de rutinas o procedimientos, ya que demanda a los estudiantes, para generar las respuestas, la aplicación de una formula estandarizada o un algoritmo; en otras palabras al leer los enunciados la mente de forma inmediata elige un camino a seguir, en cierto modo no hace falta interpretar los problemas sino acordarse de un procedimiento ya aprendido.

En una de las sesiones de consolidación (22 de noviembre) se planteó el siguiente problema:

Quiero forrar con tela de flores un joyero en forma de prisma hexagonal ¿Cuánto me costará si el prisma mide 10 cm de arista básica, 7 cm de apotema y 95 cm de arista lateral y el precio de la tela es 1500 ptas el m^2?

En este problema, semejante al problema tipo, formulado y resuelto en clase el día anterior, las demandas para que el estudiante interprete la situación y tome decisiones para conseguir una vía de solución son mínimas; es suficiente que los estudiantes recuerden la formula del área total del prisma y la apliquen.

La sesión del día 28 de noviembre se dedica a repaso, en ella la maestra advierte:

> *Rocío: Vamos a revisar todo lo del prisma porque mañana tendremos un control. Todas las dudas que tengan intenten preguntarlas hoy.*

La sesión se dedica a:

- Recordar la diferencia entre aristas básicas y laterales.

- Calcular el área de un prisma cuadrangular, pentagonal y hexagonal.
- Diferenciar entre área lateral y total.

Al final de la sesión la maestra les recuerda que vuelvan a hacer los ejercicios en casa ya que al día siguiente tienen un "control".

Se constata la "familiaridad" de las tareas: a los estudiantes se les dirige y guía de una forma explícita y por tanto se les limita la oportunidad de realizar un aprendizaje autónomo y se refuerza su dependencia del método o procedimiento enseñado por el profesor.

Las tareas que los estudiantes realizan en las clases se asemejan a las que encuentran en los exámenes, así que muchos captan, rápidamente, lo que tienen que aprender porque eso es en definitiva lo que se va a evaluar.

4.3.1.4. Tareas de evaluación

Se observó bastante concordancia entre las tareas que los estudiantes realizaron en clase y las del examen trimestral.

Las preguntas del examen (29 de noviembre) fueron:

1. Calcular el área total de un prisma cuadrangular que tiene de arista básica 5,5 cm y de arista lateral 10,5 cm
2. ¿Cuánto papel necesitaré para construir un prisma hexagonal regular cuya arista básica mide 2,5 cm, apotema básica 1,5 cm y arista lateral 12,5 cm?
3. ¿Qué cantidad de tela necesitaré para construir un joyero octogonal regular de 5,25 cm de arista básica, 2,25 cm de apotema básica y 12,5 cm de arista lateral?
4. Dibuja un prima y explica los siguientes elementos: arista básica, arista lateral, apotema básica, área lateral, área básica y área total.

A pesar del énfasis, que la mayoría de guías curriculares ponen en la importancia de procesos cognitivos como la comprensión y la transferencia (NCTM, 1989; 1998), en los que los estudiantes tomen decisiones (Skemp, 1987) los profesores descuidan estos aspectos y centralizan los exámenes en la aplicación de procedimientos. Los estudiantes saben que procedimiento tiene que usar para resolver los problemas. En cierta manera, el tipo de trabajo “valorado” por el profesor comunica al estudiante en qué deberían “gastar” ellos su tiempo y energías intelectuales.

Rocío, la maestra de nuestro estudio, a pesar de ser una maestra inquieta y preocupada por el aprendizaje de sus alumnos propone tareas familiares (estandarizadas) que simplifican notablemente el trabajo que sus estudiantes tienen que realizar. En muchos casos les explicitó el trabajo proporcionándoles una guía práctica con problemas tipo, y rara vez les requirió que reuniesen información que no hubiese sido dada con anterioridad.

Aunque hubo un alto grado de compromiso en casi todos los estudiantes y una gran producción, las decisiones de los estudiantes están bastante limitadas y es improbable que aprendan cómo aplicar sus conocimientos en situaciones no familiares como ocurrió con Raúl y Noel, estudiantes analizados en el capítulo 3.

4.4. El uso de metáforas en la instrucción

En contraste con el uso de la pizarra que hacen muchos profesores de matemáticas, en las explicaciones de la maestra prevalece el discurso oral; fundamentalmente utiliza y se apoya en las palabras, como instrumentos para producir conocimiento. Estas palabras, muchas veces, se unían formando analogías y metáforas.

A continuación exponemos algunas de las metáforas que Rocío utilizó, muchas veces inconscientemente, con la finalidad de que les sirvieran como base para que la enseñanza fuera significativa a sus estudiantes.

Sobre el tema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Rocío, previamente a cada tema objeto de la instrucción, hace una intervención en la que intenta recordar a los estudiantes, a través de un sistema de preguntas e interrogantes, todo lo que ya conocen sobre los conceptos a tratar.

Muchos de los vehículos que utilizó Rocío cuando dialogaba con algún estudiante, hacía referencia al mundo particular y social del mismo.

a).-En relación con el método de sustitución, al hablar con un estudiante cuyos padres tenían un bar, y ante el error que cometía el alumno después de haber despejado la "x" en función de la "y", y seguir manteniendo la "x" y la "y" en el lugar que inicialmente ocupaban le interroga:

Jonás (es un seudónimo), si tu madre te dice: Jonás, el domingo <u>tienes que sustituir</u> a tu hermano en la barra del bar, ya que tiene un partido, ¿quién se queda en la barra del bar?, ¿tú?, ¿tu hermano también se queda?

En otro momento:

Si viene un sustituto a clase, ¿qué significa? Si yo estoy enferma y viene un sustituto, ¿venimos él y yo a clase? Si viene y yo estoy no sería un sustituto, sería un acompañante.
Si decimos que x se sustituye significa que se va, que viene otro, entonces no tendríamos x.

b).-Refiriéndose a "despejar" y hablando con una alumna le pregunta:

¿Qué es despejar?, si tu madre te dice: !Venga, despeja la mesa que vamos a comer!, ¿Tú que haces?, ¿te llevas la mesa al patio? Despejar la x, ¿es llevarte la x?
¿Cómo despejo la x? ¿Quitándola del medio?

c).-Sobre el método de reducción:

¿Cuándo tu madre reduce la velocidad en el coche, qué hace, ¿acelera?

d).-Sobre los paréntesis:
Un paréntesis es el muro de la casa, encierra todo lo que está dentro.

e).-Sobre el signo menos:

El signo menos es como un semáforo que tiene la luz roja encendida, nos avisa de que hay cambiar todo lo que está dentro.

Esos son algunos ejemplos que constatan la utilización que la maestra, en su afán por hacer comprensible los conceptos matemáticos a los estudiantes, hacía de metáforas en el desarrollo instructivo. En nuestra investigación las hemos llamado "imágenes metafóricas", porque es la imagen (semáforo, mesa, etc.) la que da forma a la metáfora.

La construcción de imágenes metafóricas puede ayudar a esclarecer los conceptos matemáticos (Presmeg, 1986b). Así pues, las imágenes consideradas en este sentido son un camino para comprender y encontrar significado a los conceptos e ideas matemáticos.

Sería interesante observar y analizar la repercusión que el uso de las imágenes metafóricas tiene en la comprensión de las ideas matemáticas por los estudiantes. Este hecho no se analizó en este trabajo ya que no formaba parte del diseño inicial de la investigación, no obstante pensamos abordarlo en estudios futuros.

4.5. UNA PROPUESTA PARA LA INSTRUCCIÓN

Parece natural, después del análisis y la valoración que hemos hecho de la actuación de la profesora Rocío, ofrecer alguna alternativa o explicitar de qué manera nosotros pensamos que podría ser realizada la instrucción, y cómo se conseguirían fomentar las habilidades de visualización.

4.5.1. Algunas tareas de visualización

Creemos que el aprendizaje matemático significativo está frecuentemente basado en la utilización de imágenes y en este sentido la visualización juega un papel determinante. Si la matemática que se enseña en la escuela está basada, únicamente, en el aprendizaje de reglas y procedimientos no se les permite a los estudiantes que desarrollen la destreza para formar imágenes de modelos y relaciones matemáticas. La capacidad de visualizar puede tener distintos grados según las personas pero no cabe duda que es una habilidad que debe y puede ser desarrollada.

Hemos comentado, en el análisis del desarrollo instructivo del bloque temático "Los Prismas" cómo Rocío enfocó la instrucción, a través de *tareas de construcción, aplicación, revisión y evaluación.*

En este tratamiento echamos en falta tareas que fomenten la visualización en los estudiantes, es decir, *tareas de visualización*.

No pretendemos hacer aquí un desarrollo exhaustivo de un diseño instruccional curricular, algo que aleja de los objetivos actuales de esta investigación pero que deseamos abordar en futuros trabajos; pero sí queremos señalar que las actividades propuestas en clase se tendrían que orientar desde el punto de vista conceptual más que procedimental y deberían animar a que los estudiantes encuentren sentido a lo que están haciendo.

Algunos problemas no rutinarios que podrían estimular la visualización en los estudiantes podrían ser:

- con relación al tema de los prismas

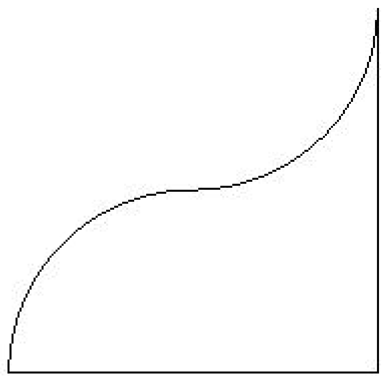
<u>¿Qué prismas podrías construir que tengan 100 cm^2 de área total?</u>

o

<u>Siete cubos, de 2 cm de arista cada uno, se van a envolver como un regalo. ¿Cuál será la cantidad de papel que se necesitará?, ¿Cuál será la mínima cantidad?</u>[7]

Con relación a otros temas, como por ejemplo al de áreas de figuras geométricas en el plano:

<u>Encontrar el área de la figura bajo la curva (cada uno de los arcos es una cuarta parte de una circunferencia de radio 1)</u>



[7] La idea original procede del profesor Grayson Wheatley.

En el contexto numérico Wheatley y Reynolds (1999), defensores a ultranza de la importancia de las imágenes y la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, proponen, en su último libro, *Coming to Know Number*, una colección de problemas no rutinarios que pueden ayudar al profesorado en la planificación de la instrucción.

4.5.2. El papel del profesorado en la instrucción

Desde una perspectiva constructivista, el alumno es el responsable último de su propio proceso de aprendizaje. Es él quien construye significado y atribuye sentido a lo que aprende y nadie, ni siquiera el profesor, puede sustituirle en este cometido. En cierta manera, la incidencia de la enseñanza sobre los resultados del aprendizaje está totalmente mediatizada por la actividad mental constructiva del alumno.

Ahora bien, la actividad mental constructiva de los alumnos se aplica a contenidos que tienen ya un considerable grado de elaboración, resultado de un proceso de construcción social. Esto lleva a que la acción mental del individuo, por sí sola no garantiza el aprendizaje, es necesario que ésta se oriente a constituir unos significados acordes con lo que expresan y representan los contenidos de aprendizaje como conocimientos culturales ya elaborados. La construcción del conocimiento se contempla como un proceso de reconstrucción compartido por profesores y alumnos en torno a unos saberes o modelos culturales preexistentes en cierto modo al propio proceso de construcción.

El papel del profesor, en este sentido, obliga a sustituir su imagen clásica como transmisor de conocimiento por la imagen del profesor como orientador o guía, cuya misión es acoplar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados y con situaciones significativas que los alumnos puedan encontrarse en su vida cotidiana.

Sintetizando, no se trata sólo de comprender mejor cómo los alumnos construyen el conocimiento, sino comprender cómo los profesores pueden influir sobre este proceso de construcción, facilitarlo y encauzarlo hacia el aprendizaje de unos contenidos determinados.

En relación con la materia en sí, vemos la matemática no como un conjunto de reglas, formulas y algoritmos por aprender, no sólo como memorización, sino que entendemos la matemática como razonamiento. Es útil conocer ciertos hechos y procedimientos pero es importante que los estudiantes los desarrollen con comprensión.

Existen condiciones favorables para el aprendizaje cuando una persona se la enfrenta con una tarea para la cual no hay disponible un procedimiento conocido. Esto es, cuando el aprendiz se encuentra a sí mismo en una situación problemática del estilo de un problema no rutinario.

Un modelo de instrucción que ha resultado efectivo es el centrado en problemas (Nicholls, Cobb, Yackel, Wood, Wheatley, Trigatti, y Perwitz, 1991; Wood y Sellers, 1996) el cual ha tenido considerables beneficios para los estudiantes. El aprendizaje centrado en problemas está diseñado para animar a que los estudiantes construyan por sí mismos el conocimiento, comprometiéndose en su aprendizaje. En este modelo, en pequeños grupos o por parejas, los estudiantes exponen y defienden sus ideas lo que les lleva a desarrollar confianza y conocimiento en sus razonamientos.

Doyle (1986) identifica algunos patrones de representación del contenido curricular en las tareas que el docente define. Destacan la "familiaridad" y la "novedad" de la tarea, ideas que podrían considerarse análogas a los que serían "tareas estandarizadas" o "tareas creativas". Tomando como referencia esas ideas, en Matemáticas, la *familiaridad* de una tarea lleva a ejercicios estandarizados en los para conseguir el resultado se recurre a la memoria o se utilizan formulas y algoritmos ya aprendidos. Hay poca ambigüedad sobre lo que hay que hacer y como se tiene que hacer.

En contraste, la *novedad* de las tareas (en cierto modo la creatividad de las mismas) hace que el estudiante tenga que ensamblar información y operaciones desde distintas fuentes, a través de caminos que no han sido explícitamente enseñados antes por el profesor y para los que no poseen experiencia previa. Quizá la característica más importante del *"trabajo nuevo"* (o creativo) es que los estudiantes tienen que tomar decisiones sobre qué producir y cómo producirlo. En muchos casos tendrán que reconocer una versión diferente de una información o una fórmula que ya han aprendido, inferir nuevas hipótesis a partir de la información dada o seleccionar una o varias operaciones para encontrar la solución al problema que se habrá alcanzado gracias a esa combinación de ideas que algunos profesionales e investigadores reconocen como creatividad (Poincaré, 1995; Vernon, 1970; Presmeg, 1991).

Durante la realización del trabajo “familiar” (o estandarizado) la actividad de la clase suele ser tranquila, la mayoría de los alumnos saben lo que tienen que hacer, el compromiso que adquieren es alto y suelen completar las tareas con éxito. Este hecho no ocurre con el trabajo “novedad” (o creativo), el compromiso es bajo, muchos estudiantes piden ayuda explícita al profesor, y los errores son mayores. Para el profesor es más difícil dirigir la clase cuando el trabajo es “novedad”, así que muchos optan por no proponer este tipo de actividad más creativa o por simplificar el trabajo redefiniendo las preguntas.

Hemos expuesto, brevemente, algunas ideas que intentan reflejar nuestra concepción acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En síntesis, creemos que es vital que el profesorado se implique en negociar con el estudiantado las normas de la clase, construir ambientes de aprendizaje en los que se fomenten en el estudiantado, la autonomía intelectual, la curiosidad, la creatividad y la construcción de significado acerca de la realidad que se pretende conocer.

Porque vivimos en una sociedad que cambia a pasos gigantescos es importante desarrollar la habilidad de enfrentarnos a “lo nuevo”, hecho que en matemáticas conduce a los problemas “no rutinarios”.

CAPÍTULO 5:

APORTACIONES E IMPLICACIONES EDUCATIVAS

5. APORTACIONES E IMPLICACIONES EDUCATIVAS

> El cambio educativo en la enseñanza sólo puede darse si el profesor se implica en el proceso de reflexión sobre su práctica. Si el proceso investigador se dirige a la transformación educativa de la práctica, el procedimiento no es generar conocimiento para ser aplicado, sino generar modos de reflexión que pongan en conexión lo que averiguamos de la realidad con su significado valorativo.[1].
>
> J. CONTRERAS

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos las conclusiones de esta investigación y algunas recomendaciones que ofrecemos, a modo de sugerencias, para mejorar la enseñanza de las matemáticas en el ámbito de la visualización. Así mismo proponemos posibles líneas de investigación futuras.

Queremos matizar que estas conclusiones no son generalizables para todo el alumnado y el profesorado. Esta no fue nuestra pretensión, ni la naturaleza del estudio de casos así lo permite ya que, dado que no se ha elegido la muestra de forma aleatoria, no sigue las pautas del análisis estadístico. Recordemos que los alumnos, en esta investigación, han sido elegidos de una forma determinista, como consecuencia del test WSAT aplicado y/o por las sugerencias de la profesora.

Las historias de Kevin, Noel, Raúl y Rocío son estudios de casos que proporcionan problemas y situaciones reales que ocurren en una clase de matemáticas y que podrían ser valiosos, ya que incluyen un extenso abanico de posibilidades, para que los profesores reflexionen sobre los sucesos que se han presentado; a través del análisis

[1] Cita extraída de Contreras (1999: 461)

y la discusión, el profesorado podría proponer soluciones viables que a la larga sirvan para mejorar su practica educativa.

Estas conclusiones deben entenderse más como punto de partida para la discusión, para la reflexión colectiva, que como proposiciones. Son, insistimos, conclusiones personales inducidas desde la lectura y la reflexión sobre los resultados obtenidos, con la voluntad de generar o continuar el debate necesario en torno a los procesos de visualización y la utilización de imágenes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A modo de resumen diremos que el propósito de esta investigación ha consistido en: (a) averiguar si los alumnos de edades comprendidas entre 13 y 14 años hacían uso o no de las imágenes mentales y de los procesos de visualización cuando resolvían problemas de matemáticas y también, (b) analizar el papel que tiene el profesorado en esta actividad matemática.

Las conclusiones las centraremos en los dos apartados objeto de nuestra investigación:

- Las imágenes mentales y su utilización en la actividad matemática, y
- El profesorado y la enseñanza.

Apuntamos algunas sugerencias o recomendaciones para la enseñanza y finalizamos esta memoria presentando algunas líneas de investigación que nos ocupan en la actualidad.

5.2. LOS ESTUDIANTES Y EL APRENDIZAJE: IMÁGENES MENTALES Y SU UTILIZACIÓN EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

En este apartado nos centraremos en contestar las cuestiones objeto de esta investigación en relación con el aprendizaje de los estudiantes. En concreto, las preguntas formuladas en el Capítulo 1 fueron:

¿Cuál es el uso de las imágenes mentales que los estudiantes realizan cuando construyen Matemáticas? ¿Qué tipo de imágenes suelen desarrollar?

¿Qué relación existe entre su habilidad para construir imágenes y su competencia en Matemáticas?

¿Qué relación existe entre el test WSAT y el “ser competente” en Matemáticas?

¿Cuáles son las creencias pedagógicas que los estudiantes tienen sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas?

La literatura acerca de las imágenes mentales sugiere que existe una relación compleja entre la habilidad para construir y usar imágenes, la preferencia para tal uso, y su papel en la construcción de significados en el aprendizaje de las ideas matemáticas (Krutestskii, 1976; Wheatley y Bebout, 1990; Wheatley, 1997; Presmeg, 1997).

Por otro lado, de las investigaciones sobre la creatividad se conoce que las imágenes mentales están implicadas, frecuentemente, en procesos de pensamiento originales o creativos (Vernon, 1970).

En nuestro trabajo hemos analizado a tres personas, Kevin, Noel y Raúl, que procesan la información de diferente forma y que pueden servir como “modelos” para investigaciones futuras en las que puedan diseñarse diseños instruccionales, con actividades que detecten el uso de imágenes por parte de los estudiantes de distintos niveles educativos.

Para Kevin la visualización y las imágenes mentales desempeñan un papel importante en sus procesos de pensamiento cuando resuelve problemas de matemáticas. En su actuación, ante los problemas del tipo “A”, diseñados para evaluar la “calidad” de las imágenes de los estudiantes, y ante los del tipo “B”, planteados para analizar la competencia de los alumnos frente a problemas matemáticos no rutinarios, se manifiesta como una persona competente, observadora y creativa.

Como hemos comentado, en el Capítulo 3, las estrategias que Kevin emplea involucran básicamente imágenes *concretas*, *cinestésicas* y *dinámicas*. Ellas le ayudan a dar sentido a los problemas y a resolverlos aportando en algunos más de una solución. A menudo puede “ver” y visualizar la respuesta a los problemas sin utilizar, salvo fórmulas de fácil recuerdo (área del rectángulo, volumen del cubo,...), conocimientos teóricos aprendidos en la escuela.

La actuación de Kevin está en consonancia con las investigaciones realizadas en USA, por Brown y Wheatley (1989, 1990) y Wheatley, Brown y Solano (1994), en las que una de las conclusiones es:

“Obtener una alta puntuación en el test WSAT” equivale a “ser competente en problemas no rutinarios”.

Con relación a Noel, hemos indicado con anterioridad que fue el estudiante que obtuvo la mejor puntuación en el test WSAT, esto nos hace pensar que posee una gran habilidad espacial, en el sentido de que puede comparar “mentalmente”, en un tiempo “record”, dos objetos que se encuentran en distintas posiciones y decidir si son iguales o diferentes salvo rotación plana o espacial.

Sus resultados en las tareas del tipo A, no nos aseguran que sus imágenes sean de “baja calidad”. En la tarea del “dibujo rápido”, en la que mostró más dificultad, puede ocurrir que Noel disponga de una imagen muy nítida del modelo y que sin embargo no pueda dibujarla. Hemos comentado con anterioridad la necesidad de modificar el planteamiento de esta tarea, para posteriores investigaciones, en alumnos con dificultades en el dibujo. Sugerimos una alternativa en el Capítulo 3.

No obstante, en el modelo del “cubo” parece que Noel tiene dificultad para modificar su construcción y tenemos la impresión que una vez construye “su” imagen le cuesta transformarla. Nos extraña que haya reproducido “el cubo de la escuela”, después de mostrarle cinco veces el modelo, repite su dibujo una y otra vez, totalmente convencido de su proceder. Pensamos que la imagen que tiene Noel del cubo aprendido en la escuela es “tan potente” que le impide formar cualquier otra a partir de ella. Quizá pudo haber construido una *imagen incontrolable* que persiste en su pensamiento impidiéndole la apertura a otros caminos. Se ha detectado que este estudiante hace uso de imágenes concretas (por ejemplo, en el problema de patas y mesas) y cinestésicas (en los problemas del cubo pintado y en el de patas y mesas).

Constatamos que la competencia de Noel, ante los problemas matemáticos “no rutinarios”, no estaba en consonancia con las investigaciones realizadas en USA anteriormente reseñadas. Sus actuaciones eran inseguras y en la mayoría de los problemas no encontró una estrategia que le llevase al éxito; en algunos, como en el de “*las mesas y las patas”*, necesita que se le insista en la posibilidad de utilizar estrategias alternativas a las enseñadas en la escuela. A muchos estudiantes les cuesta aceptar que los problemas pueden resolverse de formas diferentes a las que han aprendido en el aula.

El aprendizaje de Noel está mediatizado por el sistema escolar y en consecuencia no le es fácil desarrollar un pensamiento autónomo en el que pueda hacer uso de sus poderosas habilidades espaciales.

Con respecto al tercer estudiante, Raúl, “académicamente” el mejor alumno según la profesora, los resultados encontrados no nos sorprenden. Es verdad que es un “buen estudiante”: realiza la tarea, asiste regularmente a clase, obtiene buenas notas en los exámenes, y sabe resolver con prontitud los problemas planteados en el aula.

Raúl intenta utilizar todo su “conocimiento dirigido”, pero éste no le sirve cuando se enfrenta a problemas no rutinarios. No es capaz de desarrollar sus propias estrategias cognitivas; en las entrevistas no hemos detectado que las posea, limitándose a aplicar lo que le enseña la maestra. En muchas ocasiones, sólo tuvo éxito cuando repetía algo aprendido de memoria.

Aunque es una persona que tiene una gran facilidad para recordar fórmulas (área del hexágono regular, teoremas como el de Pitágoras, etc.) y aplicarlas para resolver los problemas, sus planteamientos “rígidos” y “estáticos” le impiden emprender nuevas vías.

En síntesis, los tres alumnos investigados, en mayor o menor grado, hicieron uso de las imágenes y la visualización y dibujaron algún diagrama, lo que nos confirma que las imágenes y la visualización son componentes importantes en su actividad matemática.

Las siguientes tablas resumen la actuación matemática de Kevin, Noel y Raúl en los problemas planteados en esta investigación:

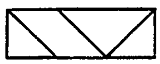
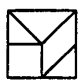
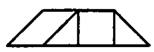
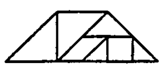
DESARROLLO DEL CUBO

	KEVIN	NOEL	RAÚL
COMPLETAR	Bien	Bien	Bien
NÚMERO DE DESARROLLOS NUEVOS	3	6	1
SEÑALAR BASE Y TAPA	7	7	6

Tarea Del Dibujo Rápido

		Kevin	Noel	Raúl
	Número De Miradas	2	3	3
		1	2	5
		1	5	2
		1	2	3
		2	2	3

Reproducción De Un Modelo

	Kevin		Noel		Raúl	
	Miradas	Tiempo	Miradas	Tiempo	Miradas	Tiempo
	1	20”	1	6”	2	120”
	1	20”	3	59”	2	70”
	2	300”	1	60”	3	120”
	2	60”	2	46”	1	60”
	1	45”	1	47”	5	300”

PROBLEMAS NO RUTINARIOS

	KEVIN	NOEL	RAÚL
Tigre y jaulas	EV (Correcta)	EV (Regular)	EA (Incorrecta)
Cubos pintados	EV (Correcta)	EV (Incorrecta)	EA (Incorrecta)
Mesas cuadradas	EV (Regular)	EV (Regular)	EV (Regular)
Mesas y patas	EV (Correcta)	EV (Correcta)	EA (Incorrecta)
Biblioteca	EV (Correcta)	EV (Incorrecta)	EA (Correcta)
Pista de atletismo	EV (Correcta)	EA (Incorrecta)	EA (Incorrecta)
Pasajero	EV (Correcta)	EA (Incorrecta)	No se formuló
Perro y zorro	EV (Incorrecta)	No se formuló	EA (Incorrecta)
Conejos y gallinas	EV (Correcta)	EV (Incorrecta)	EA (Incorrecta)
Distancia	EV (Correcta)	No contesta	No estrategia
Hexágono	EV (Correcta)	EV (Incorrecta)	EA (Incorrecta)
Trapecio	EV (Correcta)	EA (Incorrecta)	EA (Incorrecta)
Fracciones	EV (Correcta)	EV (Regular)	EV (Regular)

En la tabla anterior hemos resaltado los problemas no rutinarios que se han descrito y analizado en esta memoria para cada uno de los alumnos.

La siguiente tabla alude a los resultados obtenidos por Kevin, Noel y Raúl en el examen comentado en el Capítulo 3.

EXAMEN

		KEVIN	NOEL	RAÚL
Sistemas de Ecuaciones		No contesta	Bien	Bien
Balanza	ESTRATEGIA	Visual (Correcta)	No contesta	Algorítmica (Incorrecta)
Madre e Hija		Visual (Correcta)	Algorítmica (Incorrecta)	Algorítmica (Correcta)
Patos y Conejos		Visual (Correcta)	Algorítmica (Incorrecta)	Algorítmica (Correcta)

Con respecto a la valoración que hacemos sobre el uso de las imágenes mentales en su actividad diremos que en Kevin es "muy alta", en Noel "media" y en Raúl "baja".

En relación con la puntuación del test WSAT en Kevin es "muy alta", en Noel "muy alta" y en Raúl "normal".

Con respecto a la conexión entre la puntuación en el test y ser competente en resolver problemas no rutinarios diremos que en Kevin es "muy alta", en Noel "baja" y en Raúl no podemos afirmar que haya relación.

Nuestro trabajo en relación con Kevin confirma la tesis de las investigaciones realizadas en USA por Brown y Wheatley (1989, 1990) y Wheatley, Brown y Solano (1994), en la que: "Obtener una alta puntuación en el test WSAT" equivale a "ser competente en resolver problemas no rutinarios"; tesis que no se confirma en el caso de Noel.

En cuánto a la valoración académica diremos que en Kevin es "muy baja", en Noel "media" y en Raúl "alta".

En relación con las creencias pedagógicas, la concepción que los tres estudiantes tienen de la escuela obligatoria - aunque sea expresada de diferente forma - es la misma: "un trámite que deben sufrir".

Uno de ellos, Kevin, con mayor riqueza léxica, por haberse desenvuelto en distintos ambientes, y, los otros - Raúl y Noel - con la parquedad que caracteriza a los ambientes rurales, vienen a decir lo mismo: "en la escuela predomina la rutina, la obediencia y la repetición".

Para los tres no existe un aprendizaje placentero, sino una rutina que deben aceptar con resignación y que no es posible cambiarla. Y, no es posible cambiarla, porque en definitiva es, al parecer, para Raúl y Noel, el único referente que poseen al no contar con otros modelos con los que poder comparar.

Hemos comprobado como Raúl y Noel harían exactamente lo mismo, no cambiarían nada en las clases de matemáticas y sólo Kevin -que ha podido aprender fuera del mundo académico, en el mundo laboral, concretamente- es el que ha vislumbrado otros modelos con los que se siente más a gusto porque le ayudan en la construcción del conocimiento matemático.

5.3. El profesorado y la enseñanza: la maestra objeto de nuestro estudio

Otro propósito de esta investigación es analizar el papel de profesorado en la actividad matemática de los alumnos. En concreto, queríamos indagar si los métodos de enseñanza promueven el uso de la visualización y si desde el profesorado se detecta, y en su caso se valora el uso de la misma. En particular, las cuestiones objeto de estudio formuladas en el capítulo I fueron:

A.- ¿Cuáles son las creencias y concepciones que el profesorado tiene sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas?

B.- ¿Qué tipo de tareas se llevan a cabo en clase que fomenten el uso de las imágenes mentales y la visualización?

C.- ¿Qué conciencia tienen los profesores de la diversidad de los alumnos y de la existencia de alumnos visualizadores?

A.- La práctica de Rocío, la maestra de nuestro estudio, es muy compleja. Su proceso de enseñanza está influenciado por varios factores que configuran e influyen en su actuación pedagógica: sus conocimientos sobre la materia, creencias pedagógicas, interacciones con sus compañeros, el clima social en la clase y en el colegio, etc.

Sus creencias sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje han sido el resultado de su formación académica y de su experiencia como profesora durante más de veinte años. Es entusiasta en su profesión y muestra interés por la innovación pedagógica.

Constatamos el interés de Rocío por promover la reflexión y el razonamiento en sus estudiantes, llevándoles a conectar los conocimientos adquiridos, y a encontrar semejanzas y diferencias entre los distintos conceptos. En coherencia con su creencia "teórica" de que la matemática es un lenguaje y que es importante entender el significado de las palabras, se comprobó a lo largo de las observaciones su preocupación por que los estudiantes entendiesen el significado de las palabras que estaban utilizando.

Encontramos que para ella el papel del profesor era esencialmente el de prescribir a los estudiantes los conceptos matemáticos para que éstos los aplicasen. La manera en la que se desarrolló la práctica de clase (a través de la intervención directa) hace que el profesorado tenga percepciones limitadas del pensamiento de los estudiantes.

Detectamos en esta investigación, que sigue asentada la idea de un curriculum basado en el control; esto hace que los profesores valoren los conceptos y métodos que ellos explican ya que, en definitiva, es lo que pueden controlar (Apple, 1986; Grundy, 1987; Kemmis, 1988; King, 1986).

B.- Hemos analizado, en el capítulo cuarto, el patrón del desarrollo instructivo que utilizó Rocío durante el tiempo que observamos sus clases. Ella enfocó la instrucción, a través de *tareas de construcción, aplicación, revisión y evaluación.* En este tratamiento echamos en falta tareas que fomenten la visualización en los estudiantes, es decir, *tareas de visualización*.

Creemos que el aprendizaje matemático significativo está frecuentemente basado en la utilización de imágenes y en este sentido la visualización juega un papel determinante. Si la matemática que se enseña en la escuela está basada, únicamente, en el aprendizaje de reglas y procedimientos no se les permite a los estudiantes que desarrollen la destreza para formar imágenes de modelos y relaciones matemáticas. La capacidad de visualizar puede tener distintos grados según las personas pero no cabe duda que es una habilidad que debe y puede ser desarrollada.

Los docentes dirigen el proceso de aprendizaje de los estudiantes, no sólo por medio de la instrucción directa en la que se suceden e intercalan exposiciones, respuestas a preguntas y elogios al trabajo de los estudiantes, sino que también guían el procesamiento de información del estudiante, diseñando y llevando a cabo otro tipo de tareas académicas que permitan un trabajo autónomo del estudiante, así como manteniendo la responsabilidad de los alumnos en la realización de las mismas.

C.- Comprobamos la poca valoración que Rocío dio al pensamiento visual de Kevin en un examen, en contraste a su apreciación por el aprendizaje procedimental de Raúl acorde con el currículo escolar.

Desde la literatura se ha señalado que los profesores no siempre valoran las soluciones visuales matemáticas que no se ajustan a los métodos estándares (Eisenberg y Dreyfus, 1992; Presmeg, 1992).

Finalizando queremos reconocer que la importancia de esta investigación se encuentra en sus resultados, que muestran estos dos casos (Kevin y Raúl), que contrastan a causa de la inadaptación curricular experimentada en una clase de matemáticas por Kevin, un estudiante creativo, que prefiere dar significado a las ideas matemáticas por medio de imágenes y diagramas.

La falta de reconocimiento de la maestra al alumno que utilizó métodos que ella no enseñó y su elogio al estudiante que los memorizó lleva a cuestionarnos si estudiantes visuales y creativos continuarán estudiando matemáticas y comenzarán carreras relacionadas con las mismas, o por el contrario las aborrecerán como asignatura, precisamente por la forma en que le fue enseñada (señalamos que Kevin abandonó el centro sin obtener el título de graduado escolar, en contraste con los otros alumnos que lo superaron sin dificultad).

Este caso puede ser considerado como una muestra de un buen visualizador, algo relativamente infrecuente, que lo convierte en un ejemplo privilegiado tanto en el papel del pensamiento visual en el aprendizaje de las matemáticas, como del desencuentro (violencia simbólica) que a menudo se da entre la evaluación escolar de las capacidades y la capacidad real del alumno. Lo que le sucede al alumno Kevin puede ser considerado como un caso verosímil que la escuela puede y debe valorar.

Bourdieu (1992) ha llamado la atención sobre el constructo sociológico de *violencia simbólica*, en la que una persona (como un estudiante) cree que su contribución al discurso académico no será valorada porque no tiene acceso al capital cultural dominante. Ese estudiante se abstiene de participar en el discurso de la clase llegando, en determinados casos, a no asistir a la escuela para evitar experimentar esta violencia simbólica.

Este constructo teórico aparece en uno de los casos descritos en esta investigación. Kevin, que fue capaz de utilizar ricas imágenes y métodos creativos en la solución de problemas, recibió poco reconocimiento por parte de la profesora. Ante la *violencia simbólica* experimentada por Kevin surgen preguntas sobre si los profesores aceptan métodos visuales u otros alternativos como estrategias validas de resolución. Este hecho es debido, quizá, a su desconocimiento sobre las aptitudes cognitivas de aquellos alumnos que prefieren utilizar imágenes visuales y su imaginación en la solución de problemas.

Finalmente, el hecho de que no se valore el pensamiento visual -en este caso concreto- y, probablemente, no se valore en muchos otros, es posible que se deba al desconocimiento de que hay distintos modos de pensar en Matemáticas (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1985); hay personas visualizadoras en las que predomina, y prefieren, lo visual frente a lo verbal. Por ello consideramos prioritario, desde la investigación, trabajar con profesores, analizando sus prácticas educativas con el fin de mejorarlas.

Serían deseables investigaciones que ayuden a los profesores a reflexionar y darse cuenta que sus creencias y prácticas afectan al desarrollo de sus alumnos.

La situación planteada en los párrafos anteriores y la existencia de alumnos similares a Kevin (visualizadores, observadores, imaginativos, creativos, autodidactas) que no son valorados académicamente, no es nueva y ocurre con cierta frecuencia en las aulas de muchos países, donde:

- se descuida la educación visual,

- el sistema de enseñanza en general y los métodos de evaluación no permiten detectar a estos alumnos,

- el sistema educativo considera que son alumnos inteligentes (saben razonar, actúan de diferente forma ante situaciones nuevas, etc.) pero los suspende posiblemente por no utilizar las herramientas estándares,

- se tiende a no tomar en cuenta, ni valorar los conocimientos adquiridos fuera del aula.

5.4. PERPECTIVAS FUTURAS

En conexión con esta memoria estamos interesados en seguir investigando en dos ámbitos.

1.- Tomando como referencia los trabajos de Jakobson (citado en Walkerdine, 1982; Presmeg, 1997) en los que afirma la existencia de dos ejes básicos que caracterizan el lenguaje:

- el "eje metonímico" que comprende los procesos de combinación, contextualización, simbología y contigüidad (propios de la metonimia), y

- el "eje metafórico" que incluye los procesos de selección, sustitución y semejanza (propios de la metáfora),

y dado que toda la matemática está rodeada de símbolos y analogías, creemos que las metonimias y las metáforas juegan un papel determinante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y además estos dos ejes son fundamentales para comprender la estructura del contexto matemático.

Como hemos señalado en el Capítulo 1 el eje metonímico está relacionado con la simbología y en consecuencia con la acepción *bedeuten*. Por otra parte, el eje metafórico, que facilita la construcción y comprensión de los conceptos vendría a estar conectado con la acepción *vorstellen* que alude a la imagen mental que interioriza las ideas.

Así pues todo lo que conllevan estas dos acepciones distintas de la palabra castellana *representación*, la primera relacionada con las metonimias y la segunda con las metáforas, influyen directamente en la estructura del pensamiento matemático. Un ejemplo de ello lo podemos encontrar en el expuesto y analizado en el primer capítulo de esta Memoria.

La imagen de una montaña o de un barranco pertenece al eje metafórico (*vorstellen)* y nos ayuda a dar sentido al concepto matemático de superficie; el símbolo que representa al concepto: f(x, y) = z, pertenece al eje metonímico (*bedeuten).*

De igual forma, los desniveles o inclinaciones de una montaña pertenecen al eje metafórico y clarifican el concepto matemático de derivada direccional, cuyo símbolo $D_u f$[(a, b)] pertenece al eje metonímico. Quizá la metáfora más clarificadora de esta situación sea la analogía entre gradiente y brújula; usamos esta palabra para dar un sentido más familiar al concepto de gradiente, ya que este vector "señala" en cada punto del plano el camino donde la derivada direccional es máxima; ello interiorizaría mejor la idea o concepto de gradiente y de ahí la relación de la palabra *vorstellen* con la metáfora. Obviamente "representamos" el gradiente mediante el símbolo: ***Ñ*¦ ,** el cual pertenece al eje metonímico y por ello su relación con *bedeuten.*

Este ejemplo muestra cómo las metáforas, igual que las metonimias (las imágenes y los simbolismos que las acompañan) son componentes esenciales en la representación de las construcciones matemáticas hechas por un individuo, ya que le ayudan a dar sentido a su aprendizaje. Además, toda la Matemática está llena de metonimias ya que no existe ninguna rama de ella que prescinda de símbolos, y todo simbolismo matemático trabaja con significante y significado a través de diferentes relaciones en las que los símbolos o signos forman cadenas en niveles progresivos de abstracción.

Por otra parte estamos desarrollando en conexión con todas las argumentaciones anteriores un estudio sobre:

a) El tipo de metáforas extramatemáticas y estructurales que utiliza el profesorado,

b) Cómo perciben esas analogías los estudiantes, y qué influencia tienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Secundaria y en los primeros años de Universidad.

Nos podemos preguntar: ¿qué beneficios pedagógicos resultarían si los profesores fueran conscientes de la existencia de las metáforas y metonimias implícitos en los conceptos matemáticos que explican en Secundaria y en los primeros cursos universitarios? Quizá estos profesores podrían aumentar su comprensión respecto de las dificultades que experimentan sus estudiantes en los procesos de aprendizaje y que por supuesto, mejorarían el nivel de transmisión de los mismos. En ésta línea de investigación nos estamos ocupando en la actualidad.

2.- Otra cuestión objeto de investigación que pretendemos desarrollar es en qué medida se puede fomentar la construcción de imágenes mentales a través de las nuevas tecnologías, en particular, cómo la pantalla del ordenador puede ser un vehículo para promover la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La llegada de las calculadoras y ordenadores ha ocasionado que muchas cuestiones algorítmicas las resuelvan los programas de ordenador. Parece que se ha venido potenciando la praxis del algoritmo en detrimento del pensamiento visual; de hecho, Zimmermann y Cunningham (1995) señalan cómo muchos estudiantes prefieren el pensamiento algorítmico antes que el visual.

Nótese que cuanta mayor formación matemática tiene un alumno son más y variados los algoritmos que puede aplicar. Por ejemplo el problema del trapecio (que aparece en el Capítulo 2 de esta Memoria)**,** admite varias vías de solución: aplicando fórmulas, cálculo integral, etc., muchas de ellas de tipo algorítmico.

Desde la enseñanza se ha de realizar un esfuerzo por invertir la tendencia hoy aún predominante. Sería deseable complementar el pensamiento algorítmico y el visualizador aprovechando las nuevas tecnologías.

Hay en la actualidad un consenso en que la búsqueda de patrones y relaciones matemáticas por los estudiantes debe ser tratada como una acción matemática, en que la visualización sea considerada de igual rango como el cálculo y la simbolización (NCTM, 1989; Senechal, 1990); sin embargo, la educación visual es a menudo un área olvidada en la práctica educativa, en relación a la fuerza que tienen los contenidos numéricos y algebraicos.

En la propuesta para el año 2000 de los Estándares Curriculares americanos (NCTM, 1998) se incentiva la visualización como parte fundamental del entendimiento para las relaciones en geometría, en dos y tres dimensiones, sobre todo, para estudiantes de grado medio.

Dado que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas, sería deseable que se tuviera en cuenta, desde el punto de vista de la Educación Matemática, una atención sistemática a la visualización y a las nuevas tecnologías, lo cual comprometería activamente a los estudiantes en la situación de aprendizaje.

Aportamos algunas consideraciones didácticas que podrían atenuar algunos de los problemas relatados en esta memoria:

a) Incentivar la visualización como una herramienta para el proceso de enseñanza aprendizaje en otros campos de la matemática: Álgebra, Análisis, Estadística,...
b) Desarrollar una educación visual en el aula por medio de ejercicios adecuados (por ejemplo, problemas no rutinarios del estilo de los que se recogen en esta Memoria),
c) Buscar los mecanismos para detectar a los alumnos visualizadores y creativos (test, pruebas o exámenes alternativos, etc.),
d) Estimular y alentar a estos alumnos con un seguimiento particular donde sus capacidades puedan ser desarrolladas,
e) Valorar y no discriminar a los alumnos visualizadores, aprovechando y potenciando sus cualidades.

En la actualidad, afortunadamente, hay cada día más personas en el campo de las matemáticas, muchas aparecen en nuestra bibliografía, que están convencidas de la poderosa herramienta que constituyen las imágenes en la construcción de las ideas matemáticas. Pensamos que hay mucha labor que efectuar en esta línea desde la docencia, transmitiendo a nuestros estudiantes los procesos y destrezas visuales implícitos en el quehacer matemático, y valorando, potenciando y estimulando la realización de estos procesos, y la utilización de imágenes por nuestros estudiantes.

Queremos finalmente resaltar de que los estudios de casos son costosos y más aún cuando trabajan en un mismo proyecto profesorado investigador de distintas disciplinas o trayectorias. Todo el proceso requiere llegar a puntos de encuentro para compartir el conocimiento. Esta tarea, a pasar de su coste, es apasionante y recomendable para abrir expectativas y reflexionar sobre los que está sucediendo en las aulas donde se imparte matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

Angulo Rasco, J. (1999). De la investigación sobre la enseñanza al conocimiento docente. En A. Pérez; J. Barquín; J. F. Angulo (Eds), *Desarrollo profesional del docente*. Madrid: Akal.

Allender, J. S. (1991). *Imagery in teaching and Learning*. New York: Praeger.

Apple, M. (1986). *Ideología y Currículo*. Madrid: Akal.

Arnheim, R. (1986). *El pensamiento visual.* Barcelona: Paidós.

Aspinwall, L.; Presmeg, N.; Shaw, K.L. (1995, Enero). Uncontrollable images: graphic representations between a function and its derivative. Paper presented at the joint *Meeting of the Mathematical Association of America and the American Mathematical Society*, San Francisco.

Balomenos, R.; Ferrini Mundy, J.; Dick, T. (1988). Geometry for calculus readiness. En Lindquist, M.; Schulte, A. (Eds.). *Learning and Teaching Geometry, K-12*. Reston, VA: NCTM. 195-209.

Baroody, A. ;Ginsburg, H. (1990). Children's learning: A cognitive view. In R. B. Davis; C. A. Maher; N. Noddings (Eds), *Constructivist views on the teaching and learning of Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Battista, M.; Clements, D. (1991). Using Spatial Imagery in Geometry Reasoning. *Arithmetic Teacher*, 39, 3, 18-21.

Battista, M.T.; Wheatley, G.H.; Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for Geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 5, 332-340.

Battista, M. (1980). Interrelationships between Problem Solving Ability, Righ Hemisphere Processing Facility and Mathematics Learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 2, 1.

Battista, M. T. (1990). Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 1, 47-60.

Battista, M. T. (1994). On Greeno's Environmental/ Model View of Conceptual Domains: a Spatial/ Geometric Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 1, 86-99.

Battista, M.; Wheatley, G.; Talsma, G. (1989). Spatial Visualization, Formal Reasoning, and Geometric Problem-Solving strategies of Preservice Elementary Teachers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 11, 4.

Ben Chaim, D.; Lappan, G.; Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics* 16, 389-409.

Ben Chaim, D.; Lappan, G.; Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: analyzing and effecting student's performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.

Ben-Chaim, D.; Lappa, G.; Houang; R. T. (1989). The role of visualization in the middle school Mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 1, 49-60.

Bennett, A. B. (1988). Visual thinking and number relationships. *Mathematics Teacher*, 81, 4, 267-272.

Bernstein, B. (1993). *La estructura del discurso pedagógico.* Madrid: Morata.

Bishop, A.J. (1980a). *Spatial and mathematical abilities*. Articulo presentado en la conferencia sobre habilidades Matemáticas. Atenas, GA: University of Georgia.

Bishop, A. J. (1980b). Spatial Abilities and Mathematics Education - A Review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 3, 257-269.

Bishop, A. J. (1982). *A Mathart Workshop*. England: The British Council.

Bishop, A. J. (1983). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. In R. Lesh; M. Landau, *Space and Geometry.* 175-203. New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 1, 7-16.

Bondesan, M. G.; Ferrari, P. L. (1991). The active comparison of strategies in problem-solving: an exploratory study. *Proceedings of the XV Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 168-175. Italia: Assisi.

Booth, R.; Thomas, M. (2000). Visualization in Mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *Journal of mathematical behavior,* 18(2), 169-190.

Bourdieu, P. (1992). *Language and symbolic power*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brown, D. L.; Wheatley, G. (1989). Relationship between spatial ability and Mathematics knowledge. *Proceedings of the XI Annual Meeting Psychology of Mathematics Education*. N. New Brunswick, NJ.

Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1990). The Role of Imagery in Mathematical reasoning. *Proceedings of the Fourteenth International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mexico: Oaxtepec.

Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1991). Assessing Spatial Visualization: Evidence for transformed Images. In *Proceedings of the XV Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1. Italia: Assisi.

Brown, D. L. (1993). *An investigation of imagery and mathematical understanding in elementary school children*. Unpublished Master's thesis. Florida State University. Tallahassee. Florida.

Brown, D. L.; Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. *Proceedings of the XVII annual meeting international group for Psychology of Mathematics Education Conference.* Japan: Tsukuba.

Brown, D. L.; Wheatley, G. H. (1997). Components of Imagery and Mathematical Understanding. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 19, 1, 45-70.

Bruner, J. S. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje.* Madrid: Alianza.

Bruno, A.; Martinón, A. (1996). Les nombres négatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droit. *Petit x,* 42, 59-78.

Burger W. F.; Shaughnessy, J. (1986). Characterizing The Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 1, 31-48.

Bussi, M. B. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In *Proceeding of the XV Annual Meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol.1. 1-16.

Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston (comps.). *Handbook of Research on Teacher Education.* New York: MacMillan Publishing Comp.

Castelnuovo, E. (1981). *La Geometría*. Barcelona: Ketres.

Chambers, D.; Reisberg D. (1992). What an image depicts depends on what an imagery means. *Cognitive Psychology*, 24, 145-174.

Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational studies in Mathematics*, 3, 32, 201-228.

Chappell, M. F. (1991). *African-American fifth-grades visual-imagery constructions of tiling patterns and area measurement concepts.* Florida State University. Tallahasee. Florida.

Clements, M.A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 1.

Clements, M. A. (1981). Visual imagery and school Mathematics. Parte I. *For the learning of Mathematics*, 2, 2, 2-9.

Clements, M. A. (1982). Visual imagery and school Mathematics. Parte II. *For the learning of Mathematics*, 2, 3, 33-38.

Clements, M.A. (1984). Terence Tao. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 3.

Clements, M.A.; Del Campo, G. (1989). Linking Verbal Knowledge, Visual Images, and Episodes for Mathematical Learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*

Clements, D. H.; Battista ; M. T. (1991). Van Hiele levels of learning geometry. *Proceedings of the XV Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 223-229. Italia: Assisi.

Clements, D. H.; Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In Douglas, A. Grouws (Eds), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Mcmillan Publishing Company.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C.

Contreras, J. (1999). El sentido educativo de la investigación. En A. Pérez Gómez, J. Barquín Ruiz; J. F. Angulo Rasco (Eds), *Desarrollo profesional del docente*. Madrid: Akal.

Cobb, P.; Yakel, E.; Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in Mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 23, 1, 2-33.

Cobb, P. ; Whitenack, J. W. (1996). A Method for Conducting Longitudinal Analyses of Classroom Videorecordings and Transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213-228.

Cook, T. D.; Reichardt, Ch. S. (1982). *Qualitative and Quantitative Methods in Evaluation Research.* Newbury Park. Ca: Sage Publications.

Cook, T. D.; Reichardt, Ch. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.

Cook, M. S. (1992). *A clinical interview of an eleventh grade female's application of imagery in fractions*. Thesis. The Florida State University. College of education.

Cooney, T. J. (1985). A beginning teacher’s view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(5), 324-336.

Cooper, L.A. (1975). Mental transformations of random 2-dimensional shapes. *Cognitive Psychology*, 7, 20-43.

Cunningham, S. (1991). The Visualization Environment for Mathematics Education. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning Mathematics.* M.A.A. Notes and Reports Series, Vol 19.

Davis, R.; Maher, C. ; Noddings, N. (Eds). (1990). *Constructivist views on the teaching and learning of Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis R.; Maher, C. (1997). How Students Think: The Role of Representations. In Lyn D. English (Ed). *Mathematical Reasoning. Analogies, metaphors, and images.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Days, H.C.; Wheatley, G. H.; Kulm, G. (1979). Problem Structure, Cognitive Level, and Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 2, 135-145.

De Vega, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid: Alianza.

Díaz Obando, E. (1993). Constructing a portrait of a high school Mathematics teacher in Costa Rica. Tesis Doctoral no publicada. Tallahassee, Florida: Floride State University.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols. *Proceedings of the fifteenth Annual of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 17-32. Italia: Assisi.

Dormolen, J. (1991). Metaphors mediating the teaching and understanding of Mathematics. In A. Bishop and others (Eds), *Mathematics teaching: Its grow through learning.* London: Kluwer Academic Publishers.

Doyle, W. (1983). Academic Work. *Review of Educational Research,* 53, 2, 159-199.

Doyle, W.; Carter, K. (1984). Academic Tasks in Classroom. *Curriculum Inquiry,* 14, 2, 129-149.

Doyle, W. (1985). La investigación sobre el contexto del aula: hacia un conocimiento básico para la práctica y la politica de formación del profesorado. *Revista de Educación*, 277, 29-42.

Doyle, W. (1986). Classroom Organization and Management. In M. C. Wittrock (Eds), *Handbook of Research on Teaching*. New York: MacMillan Publishing Comp.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking during Instruction. *Educational Psychologist,* 23, 2, 167-180.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics education. In Proceedings of the fifteenth Annual Meeting of the International Group for the *Psychology of Mathematics Education*, 1, 33-48 Assisi, Italia.

Dreyfus, T.; Hadas, N. (1991). Stereometric- A learning tool for spatial Geometry. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds) *Visualization in teaching and learning Mathematics.* M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19.

Duilt, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, 75, 6, 649-672.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg. (traducido por el departamento de Matemática Educatica del CINVESTAV: IPN. México, 1997).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres, sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Suisse: Peter Lang.

Eisenhart, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and Mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 2, 99-114.

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1989). Spatial visualization in the Mathematics curriculum. *Focus on learning problems in Mathematics*, 11, 1.

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in Mathematics. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds*). Visualization in teaching and learning Mathematics*. M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19. 25-37.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 26, 4, 109-113

English, L. D. (Ed) (1997). *Mathematical reasonig: Analogies, metaphors and images.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

English, L. D. (1997). Children's Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational Word Problems. In L. D. English (Ed). *Mathematical Reasoning. Analogies, metaphors, and images.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ericsson, K. A.; Simon, H. A. (1980). Verbal Reports as Data. *Psychological Review,* 87, 3.

Ericsson, K. A.; Simon, H. A. (1996). *Protocol Analysis. Verbal Reports as data.* Cambridge, Massachusetts: The Mit Press.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes to the Mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching,* 15(1), 13-33.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In David Tall (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. 42-53. London: Kluwer Academic Publishers.

Euclides (1956). *The Thirteen Books of the Elements.* New York: Dover Publications.

Fennema, E. (1975). *Spatial ability, Mathematics and the sexes*. In E. Fennema (Ed) ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education, College of Education, Ohio State University, Columbus, OH.

Fennema, E.; Tartre, L.A. (1985). The use of spatial visualization in Mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3, 184-206.

Fennema, E.H.; Sherman, J.A. (1978). Sex-related differences in Mathematics achievement and related factors: a further study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 3, 189-203.

Fernández Viña, J.A. (1976). *Lecciones de Análisis Matemático*. Madrid: Tecnos.

Feynman, R. (1988). *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* Madrid: Alianza.

Finke, R. A. (1980). Levels of Equivalence in Imagery and Perception. *Psychological Review*, 87, 2.

Finke, R.; Ward, T.; Smith, S. (1992*). Creative Cognition. Theory, Research, and Applications.* Cambridge, Massachusetts: The Mit Press.

Finke, R. A. (1993). *Principes of mental imagery*. Cambridge, Massachusetts: The Mit Press.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 153-165.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. 24, 2, 139-162.

Freire, P. (1973). *Pegagogía del oprimido.* Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* , 3, 413-435.

Friedman, L. (1995). The space factor in Mathematics: gender differences. *Review of Educational Research,* 65, 1, 22-50.

Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and substraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam, R. Hattrup (Eds*), Analysis of arithmetic for Mathematics teaching.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gagatsis, A.; Patronis, T. (1990). Using geometrical models in a process of reflective thinking in learning and teaching Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 29-54.

García, J. A.; Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias,* 17, 1, 31-43.

Gibran Khalil Gibran (1985). *El profeta.* Barcelona: Urano

Gimeno, J. (1988). *El Currículum: una reflexión sobre la práctica.* Madrid: Morata.

Gimeno, J.; Pérez, A. (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Morata.

Giroux, H. A. (1988). *Teachers as Intellectuals. Toward a Critical Pedagogy of Learning*. Massachussetts: Bergin and Garvey Publishers.

Goetz, J. P.; LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y Diseño Cualitativo en Investigación Educativa.* Madrid: Morata.

Goldenberg, E. P. (1991). The difference between graphing software and educational graphing software. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds), *Visualization in teaching and learning Mathematics*. 77-86. M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19.

Goldin, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. In C. Janvier (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.

Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. In *Proceedings of the XX Annual Meeting Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1. 3-19. Spain: Valencia.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problem. *Educational Studies in Mathematics,* 35, 207-231.

Grouws, D.A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Grundy, S. (1991). *Producto o praxis del curriculum.* Madrid: Morata.

Guay R.B.; McDaniel, E.D. (1977). The relationship between Mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*. 8, 3, 211-215.

Güemes Artiles, R. (1994). *Libros de texto y desarrollo del currículo en el aula. Un estudio de casos.* Tesis doctoral no publicada. La Laguna: Universidad de la Laguna.

Guilford, J.P. (1959). Three faces of intellect. *American Psychologist*, 14, 469-479.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. Plenary paper. *Proceedings of the XX Annual Meeting Psychology of Mathematics Education.* Valencia. Spain.

Guzmán, M. de (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Guzmán, M. de ; Colera, J. (1989). *Matemáticas 3*. Madrid: Anaya.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princenton, N.J: Princenton University Press.

Halford, G. S. (1993). *Children's Understanding the Development of mental models*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Herhkowitz, R.; Parzsz, B.; Dormolen, J. (1996). Space and Shape. In A. Bishop, K. Clements y otros (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*. Vol. 1. 161-204. Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

Herscovics, N. (1989). The Description and Analysis of Mathematical Processes. *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* New Brunswick, New Jersey, U.S.A.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry- Two sides of the coin. *Focus on learning problems in Mathematics*, 11, 1, 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of learning Geometry. In *Mathematics and Cognition.* Cambridge: University Press.

Hershkowitz, R.; Markovits, Z. (1992). Conquer Mathematics Concepts by Developing visual thinking. *Arithmetic Teacher*, 39, 9.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putnam; R. Hattrup (Eds), *Analysis of arithmetic for Mathematics teaching.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J.; Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D.Grouws (Eds). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 65-97. New York: NCTM - Mac Millan.

Hjelmslev, G. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos.

Hofstadter, D. R. (1995). *Gödel, Escher, Bach, un eterno y grácil bucle*. Barcelona:Tusquests.

Hollenberg; Clementina K. (1970). Functions of visual imagery in the learning and concept formation of children. *Child Development*, 41, 1003-1015.

Holloway G. E. T. (1969). *Concepción del espacio en el niño según Piaget*. Buenos Aires: Paidos.

Holton, G. (1971). On trying to understand scientific genius. *American Scholar*, 41, 95-110.

Hughes, H.D. (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19. 121-126.

Irwin, K. C. (1995). Students'images of decimal fractions. *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brasil.

Jaime, A.; Gutierrez, A. (1991). A study of the degree of acquisition of the Van Hiele Levels in secondary schools students. *Proceedings of the fourteenth annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, 251-258. Mexico.

Janvier, C. (Ed) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching. A Constructivist Enquiry.* London: The Falmer Press.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination and Reason.* Chicago: University of Chicago Press. (En castellano: El cuerpo en la mente. Editorial Debate).

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in Mathematics. In Janvier, C. (Ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (1989a). Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner y C. Kieran (Eds). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston. VA: NCTM. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1989b). Supporting Concrete Visual Thinking in Multiplicative Reasoning: Difficulties and Opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 11, 1.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of Constructive Processes. In Von Glasersfeld E. (Ed) *Radical Constructivism in Mathematics Education*. London: Kluwer.

Kemmis, S. (1988). *El Curriculum: más allá de la teoría de la reproducción.* Madrid: Morata.

Kenney, M.J. (1987). Logo adds a new dimension to geometry programs at the secondary level. In M.M. Lindquist ; A.P. Shulte (Eds). *Learning and Teaching Geometry, K-12*. 85-100. Yearbook Reston, VA: N. C. T. M

King, N. (1986). Economía y Control en la Vida Escolar. In M. Apple, *Ideología y Curriculum* Madrid: Akal.

Klotz, E. A. (1991). Visualization in Geometry: A case study of a multimedia Mathematics education project. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning Mathematics.* 95-104. M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19.

Kosslyn, S.M. (1980). *Image and Mind*. Cambridge, Massachusetts and London, England: Harvard University Press.

Kosslyn, S.M. (1981). The medium and the message in mental imagery. In N. Block (Ed). *A theory*. *in Imagery*. Cambridge, Massachusetts: The Mit Press.

Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the Mind's Machine.* New York: W. W. Norton Co.

Kosslyn, S. M. (1990a). Age Differences in Imagery Abilities. *Child Development*, 61, 4, 995-1010.

Kosslyn, S. M. (1990b). Mental Imagery. In D. N. Osherson; S. M. Kosslyn; J. M. Hollerback. (Eds). *An Invitation to Cognitive Science. Visual Cognition and Action.* Cambridge, Mass: The Mit Press.

Kosslyn, S. M. and others (1981). On the Demystification of Mental Imagery. In N. Block (Ed). *A theory*. *In Imagery*. Cambridge, Massachusetts: The Mit Press.

Kosslyn, S., Seger, C.; Pani, J.; Hillger, L. ; Stephen M. (1990). When is imagery used in everyday life? A diary study. *Journal of Mental Imagery*. 14, 3&4, 131-152.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press.

Kulm, G. ; Bussmann, H. (1980). A phase-ability model of Mathematics problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 3, 179-189.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire and Dangerous Things: What Categories Reveal about the Mind*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1986). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Catedra. (En inglés, *Metaphors We Live By.* Chicago: University of Chicago Press, 1980).

Lapesa, R. (1977). *Introducción a los estudios literarios*. Madrid: Catedra. 1980). *Metaphors We Live By.* Chicago: University of Chicago Press.

Larkin, J. H.; Simon, H. A. (1987). Why a Diagram is (sometimes) Worth Ten Thousand Words. *Cognitive Science,* 11, 65-100.

Lean, G.; Clements, M.A. (1981). Spatial Ability, Visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 3, 267-299.

Leino, A.; Drakenberg, M. (1993). *Metaphor: An educational perspective.* University of Helsinki, Department of Education, Research Bulletin number 34.

Lerman, S. (1992). *From reflection to research: some methodological issues in studying teachers' images of Mathematics.* Paper presented at the Seventh International Congress on Mathematical Education, Quebec, Canada.

Liben, L. S. (1981). Spatial representation and behaviour: multiple perspectives. In L.S. Liben, A. H. Patterson; N. Newcombe (Eds). *Spatial Representation and behaviour across the life span*. New York: Academic Press.

Lohman, D. F. (1979). Spatial Ability: a review and re-analysis of the correlational literature. Stanford: Aptitude Research Project, Standford University School of Education technical report, nº 8.

Luria, A. R. (1968). *Pequeño libro de una gran memoria*. Madrid: Valograf.

Luria, A.R.; Yudovich, F. (1979). *Lenguaje y desarrollo intelectual.* Madrid: Pablo del Río.

Luria, A.R. (1980). *Lenguaje y pensamiento.* Barcelona: Fontanella.

Macfarlane S., I. (1964). *Spatial Ability: Its educational and social significance*. University of London Press. London.

Maier, G. ; Nelson, T. (1986). Strategy Spotlight. Recalling an Image. *Arithmetic Teacher*. 34, 3.

Marchese, A.; Forradellas, J. (1986). *Diccionario de retórica, crítica y terminología literaria.* Barcelona: Ariel.

Markovits, Z.; Hershkowitz, R. ; Eylou, B. (1991). The Agam method of visual thinking. In *Proceeding of the XV Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 1. Italia: Assisi.

Marks, D. (1977). Imagery and Consciousness: A Theoretical Review from an Individual Differences Perspective. *Journal of Mental Imagery*, 2, 275-290.

Marsdem, J.E. ; Tromba, A. J. (1991). *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley.

Maslow, A. (1983). *La personalidad creadora*. Barcelona: Kairós.

Mason J. ; Heal B. (1993). Mathematica Screen Metaphors. In R. Sutherland ; J. Masson (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Springer.

Mayer, R. E. (1989). Models for Understanding. *Review of Educational Research*. 59, 1,43-64.

McGee, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin,* 86, 5, 889-918.

McKim, R. M. (1972). *Experiences in visual thinking*. Monterey, CA: Brooks/Cole.

M.E.C. (1989). *Diseños curriculares básicos de Primaria.* Madrid: MEC.

M.E.C. (1989). *Diseños curricular base. Educación Secundaría Obligatoria.* Madrid: MEC.

Miller, A. I. (1984). *Imagery in Scientific Thought Creating 20th*. Century Physics. Birkhauser, Boston.

Mitchelmore, M.C. (1980). Prediction of Developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*. 11, 2, 83-93.

Morris, P.E. ; Hampson, P. J. (1983). *Imagery and Consciousness*. London: Academic Press.

Moses, B. E. (1977). The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving. Unpublished *doctoral dissertation*. Indiana University. Bloomington, IN.

Moses, B. E. (1980). *The relationship between visual thinking tasks and problem-solving performance.* Paper presented at the annual meeting of the American Education Research association, Boston.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 2, 83-93.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston,Virginia: NCTM (En castellano, *Estandares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* 1991. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales).

NCTM (1991). *Professional standards for teaching Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (1998). *Principles and Standards for school Mathematics discussion draft.* Reston, Virginia: NCTM.

National Research Council (1989). *Everybody counts: a report to the nation on the future of Mathematics Education*. Washington, DC: National Academy Press.

Nelsen R. B. (1993). *Proofs Without Words*. The Mathematical Association of America. Washington.

Nicholls, J.; Cobb .P.; Yackel, E.; Wood, T.; Wheatley, G.; Trigatti, B.; Perwitz, M. (1991). Assessment of a problem centered second-grade Mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22, 1, 3-29.

Nolder, R. (1991). Mixing metaphor and Mathematics in the secondary classroom. In K. Durking; B. Shire (Eds). *Language in Mathematical Education. Research and Practice.* Bristol. USA: Open University Press.

Otte, M. (1986). What is a text. In C. Howson; M. Otte (Eds). *Perspectives On Mathematics.* Dordrecht. Education Reidel.

Owens, K. (1999). The role of visualization in young students' learning. *Proceeding of the XXIII Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Israel: Haifa.

Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Paivio, A. (1978). On Exploring Visual Knowledge. In B. S. Randhawa; W. E. Coffman (Eds). *Visual Learning Thinking and Communication.* New York: Academic Press.

Paivio, A. (1986). *Mental Representations: A Dual Coding Approach*. New York: Oxford University Press.

Palarea, M. M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. *Tesis doctoral* no publicada. Universidad de La Laguna. Tenerife.

Palarea, M. M.; Socas, M. M. (1994a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*. Monográfico Lenguaje y Matemáticas, 16, 91-98.

Palarea, M. M.; Socas, M. M. (1994b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement - apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans). *Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM.* Vol II. Toulouse. France.

Pallascio, R.; Allaire, R.; Mongeau, P. (1993). The Development of Spatial Competencies through Alternating Analytic and Synthetic Activities. *For the learning of Mathematics* 13, 3.

Parzysz, B. (1988). Knowing Vs Seeing. *Educational Studies in Mathematic,* 19, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 575-593.

Patterson, J.R. (1994). An Investigation of Imagery in IX grade Mathematics. Unpublished *Master's thesis*. Florida State University, Tallahassee, U.S.A.

Pérez Gómez, A. (1992). Los procesos de enseñanza – aprendizaje: análisis didáctico de las principales teorías de aprendizaje. En J. Gimeno Sacristán y A. Pérez Gómez, *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Morata.

Perunko, M.A. (1983*). The Relationships among mental imagery, spatial ability, analytic-synthetic processing and performance on Mathematics problems.* Dissertation. University of Maryland. College Park. U.S.A.

Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema del desarrollo.* Madrid: Siglo XXI de España editores.

Piaget J.; Inhelder B. (1971). *Mental Imagery and the Child*. Routledge and Kegan Paul, London.

Pimm, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata

Pirie, S.; Kieren, T. (1994). Beyond metaphor: formalizing in mathematical understanding within constructivist environments. *For the learning of Mathematics* 14,1, 39-43.

Plasencia, I.; Dorta, J. A.; Espinel, M. C.; Güemes, R. (2000). La metáfora en la matemática. El estudio de una profesora. *Revista Cubo. Matematical Educacional.* Universidad de Frontera. Chile: Temuco (En prensa).

Plasencia, I.; Espinel, M. C.; Dorta, J. A. (1998). Visualización y Creatividad. *Educación Matemática,* 10, 2, 102-120.

Plasencia, I.; Espinel, M. C.; Dorta, J. A. (1999). Kevin, un alumno visualizador. *Cultura y Educación*, 16, 23-38.

Plasencia, I.; Espinel, M. C.; Dorta, J. A. (2000). Kevin a visualiser pupil. *For the learning of Mathematics.* (Aceptado para publicar; este artículo es una adaptación más corta del aparecido en Cultura y Educación).

Plasencia, I.; Güemes, R.; Espinel, M. C. (1996). Going deeper into mathematical activity. In *Proceeding of the XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Vol.1, 189.

Plasencia, I.; Güemes, R.; Dorta, J. A.; Espinel, M. C. (1999). Metodología utilizada en un trabajo sobre visualización matemática. *Revista de Investigación Educativa.* 17, 1, 167-185.

Plasencia, I.; Presmeg, N.; Güemes, R. (2000). Reflections about two cases studies of imagery and meaning in Mathematics. *Focus on the learning in Mathematics*. (En prensa).

Pohl, V. (1986). Producing Curved Surfaces in the Octahedron: Enrichment for Junior High School Students. *Arithmetic Teacher,* 34, 3.

Poincaré (1995). Grandes matemáticos. Temas 1. Número especial de *Investigación y Ciencia*. 2-4.

Poltrok, S.E.; Brown, P. (1984). Individual differences in visual imagery and spatial ability. *Intelligence*, 8, 93-138.

Potary, D.; Spiliotopoulou, V. (1992). Childrens' representations of the Development of Solids. *For the learning of Mathematics,* 12, 1, 38-46.

Presmeg, N. C. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Unpublished *Ph. D. dissertation*. University of Cambridge. England.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization in high school Mathematics. *For the learning of Mathematics,* 6, 3, 42-46.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualization and Mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*. 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1988). School Mathematics in culture-conflict situations. *Educational Studies in Mathematics* 19, 163-177.

Presmeg, N. C. (1989). Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms. *Focus on learning Problems in Mathematics,* 11, 1.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school Mathematics. *Proceeding of the XV International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* 15. 191-198. Italia: Assisi.

Presmeg, N. C. (1992a). *Uses and values of prototypic visual images in high school Mathematics.* Paper presented at the 24th. Annual Conference of the International Visual Literary Association, Pittsburg.

Presmeg, N. C. (1992b). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 6, 595-610.

Presmeg, N. C. (1993). Mathematics- A bunch of formulas? Interplay of beliefs and problem solving styles. *Proceedings of the XVII Annual Meeting of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education. Tsukuba, Japan, Vol III.

Presmeg, N. C. (1995). Preference for visual methods: an international study. *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Brasil: Recife.

Presmeg, N. C. (1997a). Generalization using imagery in Mathematics. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres

Presmeg, N. C. (1997b). Reasoning With Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Londres

Presmeg, N. C. (1998). Metaphoric and Metonymic Signification in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 25-32.

Presmeg, N. C. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas. *Suma*. 32, 17-22.

Pylyshyn, Z. (1981). The Imagery Debate: Analog Media Vs. Tacit Knowledge. In N. Block (Ed). *Imagery*. The Mit Press. Cambridge, Massachusetts.

Razel, M. ; Eylon, B.S. (1990). Developmental of visual cognition: Transfer effects of the Agam Program. *Journal of applied developmental psychology,* 11, 459-485.

Real Academia Española (1984). Diccionario de la Lengua Espanola. Madrid.

Refil, F. (1987). Interpretation of scientific or mathematical concepts: Cognitive Issues and Instructional Implications. *Cognitive Science,* 11, 395-416.

Reynolds, A. M. (1993). Imaging in children's mathematical activity. *Dissertation*, Florida State University. U.S.A.

Richardson (1969). *Mental Imagery*. London: Routledge and Kegan Paul.

Roanes, E. (1976). *Didáctica de las Matemáticas.* Salamanca: Anaya.

Rollins, M. (1989*). Mental Imagery*. Yale University Press, New Haven. London.

Rosembert, J.F. (1996). Reflexiones sobre creatividad. *Conferencia* del Profesor de Filosofía. University of North Carolina. Chapel Hill, NC.

Ruiz Olabuénaga, J. I. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Bilbao. España: Universidad de Deusto

Sapir, E. (1977). *El lenguaje*. México: Fondo de cultura económica.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Schön, D. A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner.* San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Senechal, M. (1990). Shape. In L. A. Steen (Ed). *On the Shoulders of Giants – New Aproaches to Numeracy.* Washington: Nacional Academic Press.

Sfard, A. (1994a). What History of Mathematics has to offer to Psychology of Mathematical Thinking. *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. I. 129-132. Portugal: Lisboa.

Sfard, A. (1994b). Reification as the birth of metaphor. *For the learning of Mathematics*, 14, 1, 44-55.

Shama, G.; Dreyfus, T. (1994). Visual, Algebraic and Mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 45-70.

Shepard, R. N. (1978). The mental image. *American Psychologi*st. 33. 125-137.

Shepard, R. N. (1978). Externalization of mental images and the act of creation. In B. S. Randhawa; W. E. Coffman (Eds). *Visual Learning, Thinking and Communicati*on. New York: Academic Press.

.

Shone, R. (1988). *Creative visualization. How to use imagery and imagination for self-improvemen*t. Destiny Books: Rochester.

Sigel, I. E. (1978). The Development of Pictorial Comprehension. In B. S. Randhawa ; W. E. Coffman (Eds). *Visual learning, thinking and communicati*on. New York: Academic Press.

Silver, E. A. (1987). Foundations of Cognitive Theory and Research for Mathematics Problem-Solving Instruction. In *Cognitive Science and Mathematics Educati*on. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers: Hillsdale, New Jersey.

Sinclair, H. (1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. In L. P. Steffe ; T. Wood (Eds). *Transforming children's Mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers: Hillsdale, New Jersey.

Skemp, R. (1976). Relational and instrumental understanding. *Mathematics Teaching,* 77, 20-26.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata. (En ingles: *The Psychology of learning Mathematics*, 1978. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.).

Smith, E. E. (1990). Categorization. In D. N. Osherson ; E. E. Smith (Eds). *An invitation to cognitive science*. Vol.3. Thinking. Cambridge, Mass. Mit Press.

Steen, L. A. (Ed). (1990). *On the Shoulders of Giants – New Aproaches to Numeracy.* Washington: Nacional Academic Press. (En castellano, *La enseñanza agradable de las matemáticas*, 1999. México: Limusa).

Solano, A.; Presmeg, N. (1995). Visualization as the relation of images. In *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Brazil: Recife.

Sommer, R. (1978). *The Mind's eye: imagery in everyday life.* Delacorte Press. New York.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240, 611-616.

Steen, L. A. (1990). Pattern. In L. A. Steen (Ed). *On the shoulders of giants. New Approaches to Numeracy.* National Academy Press. Washington.

Sutherland, R.; Mason, J. (1993). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* Oxford, U.K.: Springer.

Suwarzono, S. (1982). *Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students.* Tesis doctoral no publicada. Melbourne, USA. Monash University.

Tall, D.; Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 2, 150-169.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds). *Visualization in teaching and learning Mathematics*. M.A.A. Notes and Report Series, Vol 19. 105-119.

Talsma, G.W. (1986). Individual differences in visual short-term recognition memory and their interrelationships with spatial ability and mathematical problem solving. *Dissertation*, Purdue University, U.S.A.

Tartre, L. A. (1990). Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education.* 21, 3, 216-229.

Thompson, A. (1992). Teachers'beliefs and conceptions: a syntesis of the research. En D. A. Grouws (editores), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* 127-146. New York: MacMillan .

Tobin, K. (1990). Changing metaphors and beliefs: A master switch for teaching? *Theory into practice*, 29(2), 122-127.

Turner, K. V. (1982). An investigation of the role of spatial performance, Learning styles, and Kinetic Imagery in the learning of calculus. *Dissertation*. Purdue University, USA.

Tye, M. (1991). *The imagery debate*. . England: Mit Press.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In MM Linquist; A.P. Shulte (Eds.) *Learning and Teaching geometry K-12*. 17-31. Reston, VA: N. C. T. M.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a Language. In National Council of Teachers of Mathematics *Communication in Mathematics K-12 and Beyond*. Yearbook 1996. U. S. A.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando, FL: Academic Press.

Vallés, M. (1997). *Técnicas cualitativas de investigación social: reflexión metodológica y práctica profesional.* Madrid: Síntesis.

Vernon, P. E. (Eds). (1970). *Creativity: Selected readings.* Middlesex, England: Penguin.

Verschaffel, L.; De Corte, E. (1996). Number and Arithmetic. En A. Bishop y otros, *International handbook of Mathematics education*, London: Kluwer Academic Publishers. 99-137.

Vinner S. (1975). The Naive Platonic approach as a teaching strategy in Aritmetics. *Educational Studies in Mathematics* 6, 339-350.

Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 83, 1, 20-25.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on learning problems in Mathematics*, 11, 2.

Von Glasersfeld, E. (1987). Preliminaries to any Theory of Representation. In Janvier, C. (Ed), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Von Glasersfeld, E. (1990). Environment and Communication. In L. P. Steffe; T. Wood (Eds). *Transforming children's Mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers. Hillsdale, New Jersey, Hove and London.

Von Glasersfeld, E. (Ed) (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Von Glasersfeld, E. (1994). Despedida de la objetividad. En P.Watzlawick; P. Krieg (Eds), *El ojo del observador. Contribuciones al constructivismo.* Barcelona: Gedisa.

Walkerdine, V. (1982). From context to text: A psychosemiotic approach to abstract thought. In M. Beveridge (Eds). *Children thinking through language*. London: Edward Arnold.

Walter, M. (1981). Do we rob students of a chance to learn? *For the learning of Mathematics*, 1, 3, 16-18.

Weiss, R. (1994). *Learning from strangers. The art and method of qualitative interview studies.* The Free Press. New York..

Wheatley, G. (1978). *The Wheatley Test of Spatial Ability.* West Lafayette, IN: Purdue University.

Wheatley, G. H. (1990). Spatial sense and Mathematics learning. *Aritmetic Teacher*. 37, 6, 10-11.

Wheatley, G. H. (1991a). Enhancing Mathematics learning through imagery". *Arithmetic Teacher 39*, 1, 34-36.

Wheatley, G. H. (1991b). Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning. *Science Education,* 75, 1, 9-21.

Wheatley, G. H. (1992a). The role of reflection in Mathematics Learnig. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 529-541.

Wheatley, G. H. (1992b). Spatial Sense and the construction of abstract units in tiling. *Arithmetic Teacher*, 39, 8, 43-45.

Wheatley, G. H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. In L. D. English (Ed). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Wheatley, G.; Bebout H. (1990). Mathematical Knowledge of Young Learners. In Steffe, P. and Wood, T. (Eds.). *Transforming Childrens's Mathematics*

Education. International Perspectives. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Wheatley, G.; Brown, D.; Solano, A. (1994). Long term relationship between spatial ability an mathematical knowledge. *North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education.* Baton Rouge, LA.

Wheatley, G.H.; Brown, D. (1994). The construction and re-presentation of Images in mathematical activity. . In *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Portugal: Lisboa.

Wheatley, G.H.; Lo, J. (1989). The role of spatial patterns in number development. *Proceedings of the XI Annual Meeting North American*. Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. New Jersey, U.S.A.

Wheatley, G.H.; Cobb, P. (1990). Analysis of young children's spatial constructions. In L. P. Steffe; T. Wood (Eds). *Transforming children's Mathematics education*. International Perspectives Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey. Hove and London.

Wheatley, G.; Reynolds, G. (1999). *Coming to Know Number.* Tallahassee, Florida: Mathematics Learning Publisher.

Wittrock, M. C. (1989). *La investigación en la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación.* Barcelona: Paidós.

Wood, T.; Sellers, P. (1996). Assessment of a problem-centered Mathematics program: Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 3, 337-353.

Woodworth, R.S. (1938). *Experimental Psychology*. New York: Henry Holt & Co.

Yackel, E.; Wheatley, G.H. (1990). Promoting visual imagery in young pupils. *Aritmetic teacher*. 37, 52-58.

Yeazel, L. F. (1988). *Changes in spatial problem-solving strategies during work with a two-dimensional rotation task*. The University of Wisconsin, Madison.

Yerushalmy, M.; Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 199-219.

Yuille, J.C.; Catchpole, M. (1977). The role of imagery in models of cognition. *Journal of mental imagery* 1, 171-180.

Zazkis, R.; Dubinsky, E.; Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students understanding of the group D4. *Journal for*

Research in Mathematics Education. 27, 4, 435-457.

Zimmermann W.; Cunningham, S. (Eds) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, D.C. Mathematical Association of America.

Zimmermann, W.; Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds.) *Visualization in teaching and learning Mathematics*. MAA Notes and Report Series, Vol 19. 1-8

Zimmermann, W. (1991). Visual Thinking in Calculus. In W. Zimmermann; S. Cunningham (Eds) *Visualization in teaching and learning Mathematics*. MAA Notes and Report Series, Vol 19. 127-137.

INDICE