Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Gustavo González Hernández

La construcción de los números reales

The construction of the real numbers

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2020

Dirigido por
Antonio Martinón Cejas

Antonio Martinón Cejas
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se presenta la construcción de los números reales. Veremos dos métodos diferentes: las cortaduras de Dedekind y las sucesiones de Cauchy.
Comenzamos con los números naturales, los enteros y los racionales. En $\mathbb{Q}$ *hay "lagunas"o "huecos", lo que se manifiesta, por ejemplo, en la imposibilidad de encontrar un racional* q *que resuelva* $q^2 = 2$.
Las cortaduras de Dedekind se definen como subconjuntos de $\mathbb{Q}$*, con ciertas propiedades especiales de manera que cada una de ellas define un número real. Finalizaremos esta parte demostrando que* $\mathbb{R}$*, definido de esta forma, es un cuerpo ordenado y completo.*
El método de las sucesiones de Cauchy atiende a que $\mathbb{Q}$ *no es sucesionalmente completo se define cada número real como una clase de sucesiones de Cauchy, de modo que dos son equivalentes cuando la diferencia de ambas converge a* 0*. El conjunto* $\mathbb{R}$ *así construido es de nuevo un cuerpo ordenado y completo.*
Los dos cuerpos ordenados obtenidos mediante los dos procedimientos son isomorfos, de forma que se define el conjunto de los números reales como cualquiera de las dos estructuras asi obtenidos.

Palabras clave: *Números reales, Cortaduras de Dedekind, Sucesiones de Cauchy, Cuerpos ordenados, Cuerpos ordenados completos.*

Abstract

In this work the construction of real numbers is presented. We will look at two different methods: Dedekind cuts and Cauchy sequences.
We start with the natural, integers and rational numbers. In $\mathbb{Q}$ there are "gaps", which is manifested, for example, in the impossibility of finding a rational q that solves $q^2 = 2$.
Dedekind cuts are defined as subsets of $\mathbb{Q}$, with certain special properties such that each of them defines a real number. We will finish this part by showing that $\mathbb{R}$, defined in this way, is a complete ordered field.
In the Cauchy sequences method, taking into account that $\mathbb{Q}$ is not successionally complete, each real number is defined as a class of Cauchy sequences, so that two are equivalent when the difference of both converges to 0. The set $\mathbb{R}$ thus constructed is again a complete ordered field.
The two ordered fields obtained by the two procedures are isomorphic, so that the set of real numbers is defined as either of the two structures thus obtained.

Keywords: *Real numbers, Dedekind cuts, Cauchy sequences, Ordered fields, Complete ordered fields.*

Contenido

Introducción

En este nos centraremos en la construcción de los números reales a partir de los racionales. Estudiaremos dos formas de hacerlo: las cortaduras, método debido a Richard Dedekind (1831-1916), y las sucesiones de Cauchy, usado por Georg Cantor (1845-1918) y Charles Méray (1835-1911).

El método de las sucesiones de Cauchy es general y se ha usado para extender un espacio métrico no completo en uno que sí lo es. El de las cortaduras también es general y se aplica a los conjuntos totalmente ordenados que tienen "huecos".

0.1. El sistema $\mathbb{R}$ de los números reales

Ambos métodos tienen como idea la de completar el conjunto de los racionales, ya que es "incompleto"desde tres perspectivas diferentes, como se ve a continuación.

0.1.1. La deficiencia algebraica

En $\mathbb{Q}$ no tienen solución todas las ecuaciones algebraicas, ni siquiera las de segundo grado. Por ejemplo la ecuación $x^2 = 2$ carece de solución en $\mathbb{Q}$. Realmente esta deficiencia no se resuelve en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, no hay ningún número real x que verifique $x^2 = -1$.

Es necesario realizar la extensión de $\mathbb{R}$ al cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$ para que todas las ecuaciones polinómicas tengan solución. Es decir, $\mathbb{Q}$ no es algebricamente cerrado, tampoco lo es $\mathbb{R}$, pero sí lo es $\mathbb{C}$.

0.1.2. La deficiencia de orden

En $\mathbb{Q}$ hay "huecos". Se puede producir una partición de $\mathbb{Q}$ en dos subconjuntos no vacío A y B, de modo que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, de tal forma que ni A tiene máximo ni B tiene mínimo. Otra manera de expresarlo: $\mathbb{Q}$ no es completo para el orden, ya que hay subconjuntos acotados superiormente que carecen de supremo.

La extensión a $\mathbb{R}$ solventa esta deficiencia, pues $\mathbb{R}$ sí es completo para el orden. En este enfoque, la construcción de $\mathbb{R}$ consiste en añadir a $\mathbb{Q}$ los "huecos"que tiene, de convertir los "huecos.en números reales, además de los mismos números racionales.

0.1.3. La deficiencia topológica

En $\mathbb{Q}$ hay sucesiones de Cauchy que no son convergentes: $\mathbb{Q}$ no es sucesionalmente completo. Podemos expresar esta situación diciendo que en $\mathbb{Q}$ no están los límites de todas las sucesiones "convergentes", pensando que las sucesiones de Cauchy son convergentes en cierto sentido.

La ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ supera esta situación ya que $\mathbb{R}$ sí es sucesionalmente completo. Ahora la construcción de $\mathbb{R}$ consiste en añadir a $\mathbb{Q}$ los "límites"de sus sucesiones de Cauchy, de tal forma que esos límites son números reales. Desde luego, los números racionales también son límites de sucesiones de Cauchy.

0.1.4. Unicidad de $\mathbb{R}$

Los dos procedimientos que estudiamos producen el mismo resultado, en el sentido de que llega a estructuras que son isomorfas. Realmente todos los cuerpos conmutativos totalmente ordenados que son completos para el orden resultan isomorfos a $\mathbb{R}$.

0.2. Estructura de este trabajo

En el Capítulo 1 se presentan las extensiones de los números naturales a los enteros y de estos a los racionales. Se ha tenido en cuenta el libro [2].

En el Capítulo 2 se explica el método de las cortaduras de Dedekind. Se sigue el texto de Rudin [6] y se ha tenido en cuenta el de Spivak Calculus.

En el Capítulo 3 se desarrolla la construcción por sucesiones de Cauchy. Se ha hecho uso del libro de J. Lelong-Ferrand y J. M. Arnaudiès [3].

El Capítulo 4 se dedica a demostrar que los métodos anteriores conducen al mismo cuerpo ordenado completo. De alguna manera se han tenido en cuenta los libros [1], [4] y [5].

1

De los números naturales a los racionales.

Es habitual iniciar el estudio de los números a partir del conjunto de los números naturales, tal como haremos en este capítulo. Son los números que fueron surgiendo en todas las sociedades, por primitivas que fueran, pues sirven para contar.

Podemos decir que esencialmente los números naturales son los ordinales finitos y lo cardinales finitos, pues ambos conceptos coinciden en las clase de los conjuntos finitos. Es decir, sólo hay una manera, salvo isomorfismos, de ordenar un conjunto finito de tal modo que sea un buen orden, luego un orden total.

En el conjunto de los números naturales tenemos una estructura con dos operaciones (adición y multiplicación) y un orden, de tal manera que se obtiene un semianillo unitario conmutativo bien ordenado. Como es habitual, representamos el sistema de los números naturales mediante el símbolo $\mathbb{N}$.

Se realiza una extensión de $\mathbb{N}$ para cubrir la deficiencia de que los números naturales no poseen opuesto para la suma. Dicho de otro modo, no siempre pueden restarse dos números naturales. Esta ampliación de $\mathbb{N}$ consiste en añadir nuevos números (los negativos) de tal forma que las operaciones y el orden también se extienden a ellos y se obtiene finalmente un nuevo conjunto que posee la estructura de anillo conmutativo unitario íntegro y totalmente ordenado.

Se obtiene así el sistema $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Merece la pena señalar que el buen orden que se tiene en $\mathbb{N}$ deja de serlo al pasar a $\mathbb{Z}$. No obstante, esta pega es más aparente que real. Podemos hablar del siguiente de cualquier número natural y del anterior de cualquiera no nulo. Del mismo modo, tenemos que todo número entero tiene un anterior y un posterior.

De forma análoga a que el sistema de los números naturales tiene una deficiencia con la suma, el sistema de los números enteros tiene una deficiencia con la multiplicación. Los enteros no nulos, salvo 1 y -1, carecen de inverso. Esto supone que no siempre pueden dividirse dos números enteros.

Esta situación da lugar a la necesidad de ampliar de nuevo el conjunto de números y obtener el sistema de los números racionales que se representa por $\mathbb{Q}$. La ampliación consiste, otra vez, en añadir nuevos números de modo que con ellos sí se pueda dividir. Esos nuevos números son las fracciones en las que el numerador no es múltiplo del denominador. La adición y la multiplicación se extienden a los números racionales y se obtiene un cuerpo conmutativo.

También el orden se extiende a $\mathbb{Q}$ de tal manera que se obtiene un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Hay una peculiaridad en este orden que lo diferencia del orden de $\mathbb{Z}$. No existe el anterior ni el posterior de ningún número racional. El orden es denso, en el sentido de que entre dos números racionales siempre hay otro número racional, lo que conduce a que realmente entre dos números racionales siempre hay infinitos números racioales.

En resumen, este capítulo se dedica a una visión, poco detallada, de las extensiones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$. En ambas extensiones los sistemas numéricos iniciales se convierten en subsistemas del nuevo, extendiendo las operaciones y el orden, de modo que puede escribirse

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \,.$$

1.1. Los números naturales

Los números naturales forman un conjunto que simbolizamos con $\mathbb{N}$ que contiene un elemento distinguido 0 denominado *cero*. Está definida una *función sucesor* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que asigna a cada número natural n su *sucesor* $S(n)$, y que satisface los siguientes axiomas:

1. S es inyectiva: dos números naturales diferentes tienen sucesores diferentes.
2. $0 \notin S(\mathbb{N})$: 0 no es sucesor de ningún número.
3. Si un subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ contiene al cero y $S(M) \subset M$, entonces $M = \mathbb{N}$.

La última propiedad se denomina *Principio de inducción.*

El conjunto $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito. Recordemos que se dice que un conjunto X es *infinito* si existe una función inyectiva $f : X \to X$ tal que $f(X) \neq X$.

La anterior definición de conjunto infinito es equivalente a esta otra: X contiene un subconjunto propio Y ($Y \neq X$) que es coordinable con él, lo que significa que existe una aplicación biyectiva de X sobre Y.

En efecto, ambas definiciones son equivalentes. Si X es infinito con la primera definición, X y $f(X)$ son conjuntos coordinables, pues f es una biyección entre X y $f(X)$, luego se verifica la segunda defiición. Recíprocamente, si se satisface la segunda definición, existe una biyección g de X sobre el subconjunto propio Y, de donde podemos definir f de X en X que coincide con g, salvo que ahora el conjunto de llegada es todo X.

Por lo tanto obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *El conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *es infinito.*

Demostración. La función sucesor $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva, pero no es sobreyectiva, así que satisface la definición que se ha dado de conjunto infinito.

El cardinal de $\mathbb{N}$ suele representarse por $\aleph_0$:

$$\text{card}\,(\mathbb{N}) = \aleph_0\ .$$

En $\mathbb{N}$ se definen, las operaciones *adición* $+$ y *multiplicación* $\cdot$, así como un *orden* $\leq$. Se verifican las propiedades recogidas en los siguientes teoremas y debido a ello algunos autores dicen que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con las operaciones y el orden es un semianillo unitario conmutativo bien ordenado.

Mediante la adición se obtiene la *suma* $m + n$ de m y n.

Teorema 1.2. *(Propiedades de la adición.) Para m, n, p números naturales se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m + (n + p) = (m + n) + p$ *(asociativa)*
2. $m + n = n + m$ *(conmutativa)*
3. $0 + n = n$ *(0 es neutro)*
4. $m + n = m + p \Longrightarrow n = p$ *(cancelación)*

Análogamente, mediante la multiplicación se obtiene el *producto* $m \cdot n$ de m y n. Es habitual escribir mn para el producto de m y n, en lugar de $m \cdot n$.

Teorema 1.3. *(Propiedades de la multiplicación.) Para m, n, p números naturales se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m(np) = (mn)p$ *(asociativa)*
2. $mn = nm$ *(conmutativa)*
3. $1n = n$ *(1 es neutro)*
4. $0n = 0$
5. $mn = mp$ *y* $m \neq 0 \Longrightarrow n = p$ *(cancelación)*
6. $m(n + p) = mn + mp$ *(distributiva respecto a la suma)*

Escribir $m < n$ significa $m \leq n$ y $m \neq n$. Significa lo mismo $n \geq m$ que $m \leq n$; también es lo mismo $n > m$ que $m < n$.

Teorema 1.4. *(Propiedades del orden.) Para m, n, p números naturales se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m \leq m$ *(reflexiva)*
2. $m \leq n$ *y* $n \leq m \Longrightarrow m = n$ *(antisimétrica)*
3. $m \leq n$ *y* $n \leq p \Longrightarrow m \leq p$ *(transitiva)*
4. *Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo: existe $m \in A$ tal que $m \leq a$, para todo a de A (buen orden).*

Finalmente, hay buenas propiedades que relacionan las operaciones y el orden.

Teorema 1.5. *(Compatibilidad del orden y la soperaciones.) Para* m, n, p *números naturales se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m \leq n \Longrightarrow m + p \leq n + p$
2. $m \leq n \Longrightarrow mp \leq np$

Podemos sintetizar los anteriores teoremas en el siguiente.

Teorema 1.6. $\mathbb{N}$ *con las operaciones y el orden definidos es un anillo conmutativo unitario íntegro y totalmente ordenado.*

Interesa dejar claro, de cara a los desarrollos posteriores, que como el orden en $\mathbb{N}$ es un buen orden, necesariamente es un orden total. Es decir, dados los naturales m y n se cumple una y sólo una de estas propiedades: $m = n$, ó $m < n$, ó $m > n$. Se trata de aplicar la propiedad de buen orden al conjunto $\{m, n\}$.

1.2. Los números enteros

En el sistema de los números naturales no existe el opuesto de un número. Es decir, dado el natural no nulo n, no existe un natural m tal que $m + n = 0$. Esto supone que no siempre se pueden "restar"dos naturales. Realmente, si $m < n$ no es posible encontrar otro natural p de manera que $m = n + p$. Sí que existe q verificando $n = m + q$, de forma que se tiene la resta $q = n - m$.

También hay una "deficienciaçon el producto, similar a la que se tiene para la suma, pero se corregirá más adelante, al ampliar los números enteros a los racionales.

Esta deficiencia de $\mathbb{N}$ conduce a la construcción del sistema de los números enteros $\mathbb{Z}$ en el que todo número tiene opuesto para la suma y se puede, por lo tanto, restar dos números enteros para obtener otro número entero. Es decir, dado un entero a, existe su opuesto $-a$ de modo que $a + (-a) = 0$. Por lo tanto, dados los enteros a, b existe $c = a + (-b)$ tal que

$$b + c = b + a + (-b) = b + (-b) + a = a \ .$$

Se escribe $c = a - b$ y se dirá que c es la *diferencia* entre a y b.

No sólo es que podamos restar dos enteros, sino que todo entero puede expresarse como la diferencia de dos naturales. Así resulta que un par de naturales definen un entero, pero lo que realmente ocurre es que todo entero queda determinado por una infinidad de pares de naturales. Por ejemplo, el entero $a - b$ queda descrito por el par (a, b) y también por (c, d) cuando $a - b = c - d$, o lo que es lo mismo $a + d = c + b$. Podemos escribir

$$(a,b) \sim (a+1,b+1) \sim (a+2,b+2) \sim \cdots$$

Las observaciones anteriores podemos formalizarlas del siguiente modo. Consideramos el conjunto de pares de naturales $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y en él se define la relación

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c \ ,$$

que es una relación de equivalencia, pues cumple las propiedades siguientes, para a,b,c,d números naturales:

1. Reflexiva: $(a,b) \sim (a,b)$
2. Simétríca: $(a,b) \sim (b,a)$
3. Transitiva: si $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$, entonces, $(a,b) \sim (e,f)$

Ahora podemos definir los enteros como las clases de equivalencia asociadas a esa relación y denotaremos a la clase del par (a,b) como $[a,b]$. El conjunto de clases que se obtiene es el de los *números enteros* y se representa por

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim \ .$$

La primera observación es que $\mathbb{N}$ se puede identificar con un subconjunto de $\mathbb{Z}$, exactamente con el formado por las clases del tipo $[m,0]$, con m natural. La extensión de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ también debe contemplar las operaciones de adición y multiplicación, así como el orden.

Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una suma mediante $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$, que es una operación compatible con la relación $\sim$, de manera que queda definida una adición de clases, lo que es decir de enteros:

$$[a,b]+[c,d] = [a+c,b+d] \ .$$

Teorema 1.7. *(Propiedades de la adición.) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la adición es un grupo conmutativo. Es decir, para m,n,p números enteros se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m+(n+p) = (m+n)+p$ *(asociativa)*
2. $m+n = n+m$ *(conmutativa)*
3. $0+n = n$ *(0 es neutro)*
4. *m posee un opuesto $-m$, es decir* $m+(-m) = 0$ *(existencia de opuesto)*

Análogamente, se define el producto de pares $(a,b)(c,d) = (ad+bc, ac+bd)$ y resulta que es compatible con la relación de equivalencia $\sim$, lo que nos permite definir el producto de enteros:

$$[a,b][c,d] = [ac+bd, ad+bc] \ .$$

Observemos que de la representación de los enteros como diferencias de naturales se obtiene la definición de su producto, pues se quiere que $(a-b).(c-d) = (ac+bd)-(ad+bc)$, lo que lleva a $[a,b].[c,d] = [ac+bd, ad+bc]$.

Teorema 1.8. *(Propiedades de la multiplicación.) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la multiplicación verifica las siguientes propiedades, para m, n, p números enteros:*

1. $m(np) = (mn)p$ *(asociativa)*
2. $mn = nm$ *(conmutativa)*
3. $1n = n$ *(1 es neutro)*
4. $mn = 0 \Longrightarrow m = 0$ *ó* $n = 0$ *(integridad)*
5. $m(n + p) = mn + mp$ *(distributiva respecto a la adición)*

Por último, se define un orden entre los pares de naturales: $(a, b) \leq (c, d) \Longleftrightarrow b + c \leq a + d$, que es compatible con la relación $\sim$. Definimos el orden entre enteros del siguiente modo:

$$[a, b] \leq [c, d] \Longleftrightarrow b + c \leq a + d \; .$$

Teorema 1.9. *(Propiedades del orden.) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un conjunto totalmente ordenado con la relación $\leq$. Es decir, para m, n, p números enteros se verifican las siguiente propiedades:*

1. $m \leq m$ *(reflexiva)*
2. $m \leq n$ *y* $n \leq m \Longrightarrow m = n$ *(antisimétrica)*
3. $m \leq n$ *y* $n \leq p \Longrightarrow m \leq p$ *(transitiva)*
4. *Se cumple una y sólo una de las tres propiedades siguientes:* $m < n$, $m = n$ *ó* $m > n$ *(orden total).*

Se dirá que un entero m es positivo si $m > 0$ y negativo si $m > 0$. Los números naturales se identifican con los enteros no negativos.

Hay una estrecha relación entre las operaciones y el orden.

Teorema 1.10. *(Compatibilidad del orden y la soperaciones.) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, con las operaciones y el orden, verifica las siguientes propiedades para m, n, p números enteros:*

1. $m \leq n \Longrightarrow m + p \leq n + p$
2. $m \leq n mboxyp \geq 0 \Longrightarrow mp \leq np$

Podemos sintetizar los anteriores resultados en el siguiente teorema.

Teorema 1.11. *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con las operaciones y el orden es un dominio de integridad, conmutativo, unitario y totalmente ordenado. Además, $\mathbb{N}$ puede identificarse con el subconjunto de $\mathbb{Z}$ de los números enteros no negativos, con las operaciones y el orden.*

Como los enteros forman un grupo respecto a la suma se tiene que vale la propiedad de cancelación para la suma:

$$m + n = m + p \Longrightarrow n = p$$

Además,

$$0n = 0$$

Como es un dominio de integridad, se puede cancelar en el producto:

$$mn = mp \text{ y } m \neq 0 \Longrightarrow n = p \ ,$$

pues si $mn = mp$, entonces $mn - mp = m(n - p) = 0$, de donde $m = 0$ ó $n = p$.

Finalmente, digamos que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un conjunto que tiene cardinal igual al de conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, es decir es un conjunto numerable.

$$\text{card } (\mathbb{Z}) = \aleph_0 \ .$$

1.3. Los números racionales

En el conjunto de los números enteros no puede asegurarse la existencia de inverso de un número. Es decir, dado el entero no nulo n, con $n \neq 1$ y $n \neq -1$, no es posible hallar otro entero m tal que $nm = 1$. De aquí resulta que no siempre se puede"dividir". Esto significa que dados los enteros m y n, no siempre podemos hallar p de forma que $n = mp$, o como se suele esribir $p = n/m$.

Esta "defecto"de $\mathbb{Z}$, que desde luego lo tiene también $\mathbb{N}$, nos lleva a su ampliación para obtener el sistema de los números racionales $\mathbb{Q}$, en el que todo número no nulo tiene inverso. Entonces se podrá dividir, salvo por 0. Es decir, dado un racional $x \neq 0$, existe su inverso $x^{-1} = 1/x$ de modo que $xx^{-1} = 1$. Por lo tanto, dados los racionales x y $y \neq 0$, existe un número racional $z = xy^{-1}$ de modo que $x = yz$, pues

$$yz = yxy^{-1} = yy^{-1}x = x \ .$$

Se escribe $z = x/y$ y se dirá que z es el *cociente* entre x e y.

Todo racional se puede escribir como el cociente de dos enteros, de hecho de una infinidad de pares de enteros. Por ejemplo, el racional m/n queda descrito por el par (m, n) y también por (mk, nk), con k cualquier entero no nulo.

Formalizamos ahora las observaciones anteriores. Consideramos el conjunto de pares de enteros, siendo el segundo no nulo: $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ y en él se define la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \ ,$$

que es una relación de equivalencia.

Definimos los racionales como las clases de esa relación de equivalencia y denotaremos a la clase del par (a, b) por $[a, b]$. El conjunto de clases que se obtiene es el de los *números racionales* y se representa por

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim \ .$$

Observemos que $\mathbb{Z}$ se puede identificar con un subconjunto de $\mathbb{Q}$, exactamente con el formado por las clases del tipo $[m, 1]$, con m entero. La extensión de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ también conserva las operaciones de adición y multiplicación, así como el orden.

Definimos en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ una suma mediante $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$, que es una operación compatible con la relación $\sim$, de manera que queda definida una adición de clases, es decir de racionales:

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd] \ .$$

Teorema 1.12. *(Propiedades de la adición.) El conjunto $\mathbb{Q}$ con la adición es un grupo conmutativo.*

Análogamente, se define el producto de pares $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ y resulta que es compatible con la relación de equivalencia $\sim$, lo que nos permite definir el producto de racionales:

$$[a, b][c, d] = [ac, bd] \ .$$

Teorema 1.13. *(Propiedades de la multiplicación.) El conjunto $\mathbb{Q}$ con el producto verifica las siguientes propiedades, para x, y, z números racionales:*

1. *$x(yz) = (xy)z$ (asociativa)*
2. *$xy = yx$ (conmutativa)*
3. *$1x = x$ (1 es neutro)*
4. *$x \neq 0$ posee un inverso x^{-1}, es decir $xx^{-1} = 1$ (existencia de opuesto)*
5. *$x(y + z) = xy + xz$ (Propiedad distributiva)*

Por último, se define un orden entre los pares de enteros de la siguiente manera: primero observemos que siempre es posible elegir un representante de la clase de modo que la segunda componente sea positiva. Dados dos pares (a, b) y (c, d) de este tipo, se define $(a, b) \leq (c, d) \iff ad \leq bc$, que es compatible con la relación $\sim$ y podemos definir el orden entre números racionales del siguiente modo:

$$[a, b] \leq [c, d] \iff ad \leq bc \ ,$$

tomando $b, d > 0$.

Teorema 1.14. *El conjunto $\mathbb{Q}$ con la relación $\leq$ es un conjunto totalmente ordenado. Además, las operaciones son compatibles con ese orden.*

Los anteriores teoremas los reunimos en el siguiente.

Teorema 1.15. *El conjunto $\mathbb{Q}$ con las operaciones y el orden definidos es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Además, $\mathbb{Z}$ puede identificarse con el subconjunto de $\mathbb{Q}$ de los números racionales que pueden escribirse en la forma $m/1$, con m entero, con las operaciones y el orden.*

La estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ permite que pueda simplificarse, tanto la suma como el producto. Es decir, las dos operaciones tienen la propiedad de cancelación:

$$x + y = x + z \Longrightarrow y = z \quad \text{y} \quad xy = xz\ ,\ x \neq 0 \Longrightarrow y = z\ .$$

Además, por ser anillo,

$$0n = 0$$

y como es un dominio de integridad,

$$xy = 0 \Longrightarrow\Longrightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0\ .$$

Hay una propiedad del orden de $\mathbb{Q}$ que es muy destacable y que no la tienen ni $\mathbb{N}$, ni $\mathbb{Z}$: el orden es *denso.* Esto significa que dados dos racionales $x < y$, existe un tercer racional z que verifica $x < z < y$. Se deduce inmediatamente que hay infinitos números racionales entre x e y. Puede tomarse como z la media de x e y:

$$z = \frac{x + y}{2}\ .$$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un conjunto numerable, lo que significa que tiene cardinal igual al del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales:

$$\text{card}\ (\mathbb{Q}) = \aleph_0\ .$$

También $\mathbb{Q}$ posee una ”deficiencia”, pero esa no tiene que ver ni con la adición ni con la multiplicación. El problema se produce con el orden, como veremos en el próximo capítulo.

2

Cortaduras de Dedekind

En este capítulo extendemos el sistema de los números racionales $\mathbb{Q}$ al de los números reales $\mathbb{R}$ y lo haremos mediante las cortaduras de Dedekind.

En el conjunto $\mathbb{Q}$ se tiene una deficiencia que tiene que ver con el orden, aunque también puede expresarse en término de las operaciones.

Consideremos la ecuación $q^2 = 2$. Esta ecuación carece de solución racional, no existe ningún racional que la satisfaga. Para demostrarlo procederemos por reducción al absurdo. Supongamos sí hay una solución racional q, que podemos escribir como fracción reducida $q = \frac{m}{n}$, siendo m, n números naturales no nulos primos entre sí. Podemos escribir $q^2 = 2$, o equivalentemente

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \ ,$$

de donde $m^2 = 2n^2$. De aquí deducimos que m^2 es par, lo que implica que m es par, pues si m fuera impar, se podría escribir como $m = 2s + 1$ con s natural, lo que implicaría que $m^2 = 4s^2 + 4s + 1$, que es impar. Como sabemos que m es un número par, entonces se puede escribir como $m = 2k$, con k natural, y por ende $m^2 = 4k^2$.

Si sustituimos en la ecuación inicial, tenemos que $4k^2 = 2n^2$, que es equivalente a $2k^2 = n^2$, luego, por el razonamiento anterior, tenemos que n es par, lo que nos lleva a un absurdo, pues m y n no pueden ser pares a la vez ya que la fracción $\frac{m}{n}$ es irreducible.

El ejemplo anterior puede expresarse en términos del orden de $\mathbb{Q}$. Consideremos el conjunto

$$A := \{q = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \text{ y } q^2 < 2\} \ .$$

El conjunto A es no vacío y es acotado superiormente, por ejemplo por 2, pero no tiene supremo.

Esta característica de $\mathbb{Q}$ se expresa diciendo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado pero que *no es completo para el orden* o que no es *orden completo*.

Gracias a este ejemplo vemos que en los números racionales existen ciertas "lagunas.º "huecos", pese a que el orden es denso: entre cada dos números racionales existen infinitos número racionales, pues si $q < p$, con $q, p \in \mathbb{Q}$, entonces

$$q < \frac{q + (n-1)p}{n} < p \ ,$$

para $n > 1$ natural.

2.1. Cortaduras

Comenzamos con la definición de cortadura en $\mathbb{Q}$.

Definición 2.1. *Una cortadura α en el conjunto de los números racionales es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que verifica las siguientes condiciones:*

1. *α contiene al menos un número racional, pero no todos ellos.*
2. *Si $q \in \alpha$ y $p < q$, entonces $p \in \alpha$.*
3. *α no contiene un número racional máximo.*

Otra forma de expresar las tres propiedades definitorias para que α sea una cortadura:

1. $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$.
2. Si q es un número racional de α, entonces cualquier número menor que q pertenece a α.
3. α es un intervalo abierto desde $-\infty$ "hacia la derecha".

Vemos a continuación algunas propiedades de las cortaduras.

Teorema 2.2. *Sea α una cortadura. Si $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$ entonces $p < q$.*

Demostración. Supongamos que $p \in \alpha$ y que $q \leq p$. Entonces $q \in \alpha$, lo que es absurdo. □

En base a este teorema, dada la cortadura α, llamaremos *números inferiores* a los racionales que pertenecen a α y *números superiores* a los que no. En algunas cortaduras podrá existir un número mínimo entre los números superiores.

Llamaremos *cortadura racional* al conjunto de todos los números racionales menores que un racional determinado r; es decir, el conjunto de todos los racionales q tales que $q < r$. Observemos que realmente r es el mínimo del complementario $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ de α en $\mathbb{Q}$. Dicho de otro modo, r es el mínimo de los números superiores.

Denotaremos por r^* la cortadura racional obtenida del racional r.

Teorema 2.3. *Toda cortadura racional r^* es efectivamente una cortadura.*

Demostración. Sea r un número racional. Sea r^* el conjunto de todos los racionales q tales que $q < r$.

Las condiciones (1) y (2) de la definición de cortadura se verifican claramente.

Para ver si r^* satisface la condición (3), vemos que para todo $q \in r^*$ se tiene $q < \frac{q+r}{2} < r$, luego $\frac{q+r}{2} \in r^*$, así que no hay un máximo en r^*. □

2.2. El orden

Damos la definición de orden entre las cortaduras.

Definición 2.4. *Sean α, β cortaduras. Se dice que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha \subset \beta$; es decir, si α es un subconjunto de β.*

Proposición 2.5. *La relación $\leq$ es una relación de orden en la clase de las cortaduras.*

Demostración. Veamos que se cumplen las tres propiedades del orden.

- Reflexiva: Para toda cortadura α se dará que $\alpha \leq \alpha$, pues $\alpha = \alpha$
- Antisimétrica: Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, es $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \alpha$, luego $\alpha = \beta$.
- Transitiva: Si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$, entonces $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \gamma$, luego $\alpha \subset \gamma$, de modo que $\alpha \leq \gamma$.

□

Escribiremos $\alpha < \beta$ si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$. Es decir, α esta contenida propiamente en β. Dicho de otro modo: todo número de α es de β y existe un racional q tal que $q \in \beta$ y $q \notin \alpha$. Luego $\alpha \leq \beta$ cuando $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$.

Usando la definición anterior, diremos que una cortadura α es positiva si $\alpha > 0^*$, que es no negativa si $\alpha \geq 0^*$, que es negativa si $\alpha < 0^*$ y que es no positiva si $\alpha \leq 0^*$.

Teorema 2.6. *Sean α y β dos cortaduras. Entonces solo se podrá dar uno de estos tres casos: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$.*

Demostración. Si $\alpha = \beta$, claramente no puede ocurrir $\alpha < \beta$, ni $\alpha > \beta$. Tampoco puede ocurrir que $\alpha < \beta$ y $\alpha > \beta$. Por tanto, las tres condiciones se excluyen mutuamente.

Veamos que se cumple una de ellas. Si $\alpha = \beta$ queda probado. Supongamos que $\alpha \neq \beta$. Como ambas cortaduras son diferentes, o bien existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$, en cuyo caso es $\beta < \alpha$, o bien existe $q \in \beta$ tal que $q \notin \alpha$, en cuyo caso es $\alpha < \beta$. □

Ahora obtenemos el siguiente teorema que afirma que el orden es total.

Teorema 2.7. *La clase de las cortaduras con la relación $\leq$ es un conjunto toalmente ordenado.*

Demostración. Dadas dos cortaduras α y β, si $\alpha \leq \beta$ queda probado. En otro caso, del Teorema 2.6 se obtiene que $\alpha > \beta$, luego $\beta \leq \alpha$. □

Ralmente el conjunto de las cortaduras con el orden posee una propiedad muy potente: es un orden *completo*. Recordemos que esto significa que todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.

Teorema 2.8. *La clase de las cortaduras con la relación $\leq$ es un conjunto orden completo.*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío de cortaduras. Suponemos que está acotado superiormente por la cortadura γ: $\alpha < \gamma$, para toda $\alpha \in A$.

Sea β el conjunto unión de todas las cortaduras $\alpha \in A$. Se tiene que $\beta es una cortadura$. En efecto:

1. Como toda $\alpha \in A$ es no vacía, la unión de todas ellas es no vacía.
   Sea un racional r que no está en γ, luego no está en ninguna $\alpha \in A$. Luego $\beta \neq \mathbb{Q}$.
2. Si $q \in \beta$, se tiene $q \in \alpha$, para alguna $\alpha \in A$. Si $r < q$, se tiene $r \in \alpha$, kuego $r \in \beta$.
3. Sea $q \in \beta$, luego $q \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$. Como α no tiene máximo, existe $r \in \alpha$ tal que $q < r$, así que $r \in \beta$. Luego β no tiene máximo.

Claramente β es cota superior de A, pues contiene todas las $\alpha \in A$. Además es la menor, pues si γ es una cota superior de A, es $\alpha \subset \gamma$ para toda $\alpha \in A$, así que $\beta \subset \gamma$, es decir $\beta \leq \gamma$. □

2.3. La adición

Sean α y β cortaduras. Se define la suma de ambas mediante

$$\alpha + \beta := \{p + q : p \in \alpha \ , \ q \in \beta\} \ .$$

Teorema 2.9. *Sean α y β cortaduras. Entonces $\alpha + \beta$ es una cortadura.*

Demostración. Veamos que $\alpha + \beta$ cumple las propiedades de las cortaduras:

1. $\alpha + \beta$ contiene al menos un número racional, pues, cualquier número racional $p + q$, donde $p \in \alpha$ y $q \in \beta$, pertenece a $\alpha + \beta$.
   Sin embargo, si tomamos p' y q' tales que $p' \notin \alpha$ y $q' \notin \beta$, entonces $p+q < p'+q'$ y por tanto $p' + q' \notin \alpha + \beta$, luego $\alpha + \beta$ no contiene todos los racionales.

2. Tomando un $s \in \alpha + \beta$ y r racional tal que $r < s$, sabiendo que $s = p + q$, con $p \in \alpha$ y $q \in \beta$, resulta que si tomamos $r = p + l$, como $r < s$, tendremos que que $l < q$, luego $l \in \beta$ y por tanto $r \in \alpha + \beta$.
3. Tomando un $s \in \alpha + \beta$, tal que $s = p + q$, $p \in \alpha$ y $q \in \beta$, se tiene que existe un $p' \in \alpha$ y un $q' \in \beta$ tales que $p < p'$ y $q < q'$, por ser α y β cortaduras, por lo tanto, siempre existirá un $s' = p' + q'$ que sea mayor que s, luego no existirá un máximo en $\alpha + \beta$.

Así concluye la demostración. □

Teorema 2.10. *Sean α, β y γ tres cortaduras, entonces:*

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\alpha + 0^* = \alpha$

Demostración. 1. Sabemos que $\alpha + \beta$ es el conjunto de todos los números racionales de la forma $p + q$, donde $p \in \alpha$ y $q \in \beta$, y por la ley conmutativa de la adición tenemos que $p + q = q + p$, para cualquier par de números racionales, por lo tanto, el conjunto $\alpha + \beta$ tiene que ser igual a $\beta + \alpha$

2. Sabemos que $(\alpha + \beta) + \gamma$ es el conjunto de todos los números racionales de la forma $(p + q) + l$ donde $p \in \alpha$, $q \in \beta$ y $l \in \gamma$, que por la ley asociativa de los números racionales, $(p + q) + l = p + (q + l)$, luego, el conjunto $(\alpha + \beta) + \gamma$ a de ser igual a $\alpha + (\beta + \gamma)$
3. Tomemos $s \in \alpha + 0^*$, es decir, $s = p + q$, donde $p \in \alpha$ y $q \in 0^*$. Como $q < 0$, entonces $s < p$, luego $s \in \alpha$.
   Ahora tomemos un $p \in \alpha$ y un l racional tal que $p < l$ y $l \in \alpha$. Entonces, sea $r = p - l$, como $p - l < 0$, $r \in 0^*$, y como $p = r + l$, $p \in \alpha + 0^*$

□

Teorema 2.11. *Sean α una cortadura y $r > 0$ un número racional, entonces existen dos números racionales p y q tales que $p \notin \alpha$ y $q \in \alpha$, donde p no es el número mínimo superior a α, de modo que $p - q = r$*

Demostración. Tomemos un número racional s y creemos la sucesión $s_n = s + nr$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces existirá un entero m tal que $s_m \in \alpha$ y $s_{m+1} \notin \alpha$.

En caso de que s_{m+1} no sea el número mínimo superior a α, tomaremos $q = s_m$ y $p = s_{m+1}$, y en caso de que si lo sea, tomaremos $q = s_m + \frac{r}{2}$ y $p = s_{m+1} + \frac{r}{2}$. □

Teorema 2.12. *Sea α una cortadura, entonces existirá una, y solo una, cortadura β, tal que $\alpha + \beta = 0^*$.*

Denominaremos a esta cortadura como la *opuesta* para la suma de α y la denotaremos como $-\alpha$.

Demostración. Comencemos probando la existencia, para esto tomemos como β al conjunto de los números racionales q tales que $-q$ sea un número superior a α, pero sin llegar a ser el mínimo de ellos. Veamos pues que efectivamente β es una cortadura:

1. Con tomar cualquier número racional q tal que $-q$ sea un número superior a α tendremos un racional perteneciente a β, y con tomar un racional p tal que $-p$ pertenezca a α tendremos al menos un racional que no pertenezca a β.
2. Sean $p \in \beta$ y q un racional tal que $q < p$, entonces, $-p \notin \alpha$ y $-p < -q$, de modo que $-q$ seria un número superior a $-p$ sin llegar a ser el mínimo, luego $q \in \beta$
3. Si tomamos $p \in \beta$, tal que $-p$ no sea un número mínimo superior a α, entonces habrá un número racional q tal que $-q < -p$ y $-q \notin \alpha$.
   Sea r el punto medio entre p y q, es decir, $r = \frac{p+q}{2}$, entonces $-q < -r < -p$, de modo que $-r$ es un número superior a α sin ser el mínimo, luego hemos encontrado un $r \in \beta$ tal que $p < r$.

Teniendo ya que β es una cortadura, veamos que $\alpha + \beta = 0^*$, para esto tomemos $s \in \alpha + \beta$, luego $s = p + q$ para $p \in \alpha$ y $q \in \beta$. Como sabemos que $-q \notin \beta$, entonces $p < -q$, luego $p + q < 0$, es decir, $p + q = s \in 0^*$.

Tomemos ahora $s \in 0^*$, entonces como $s < 0$, usando el teorema 2.11, sabemos que existen dos números racionales $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, donde q no es el número mínimo de los superiores a α, tales que $q - p = -s$, y como $-q \in \beta$ por definición, entonces $s = p - q = p + (-q) \in \alpha + \beta$.

Finalmente probemos la unicidad, para eso tomemos dos cortaduras β y γ tales que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = 0^*$. Gracias al teorema 2.10 sabemos que:
$\beta = \beta + 0^* = \beta + (\alpha + \gamma) = \gamma + (\alpha + \beta) = \gamma + 0^* = \gamma$. □

Con los teoremas 2.9, 2.10 y 2.12 sabemos que el conjunto de las cortaduras con la suma que se ha definido es un grupo conmutativo.

Teorema 2.13. *Sean α, β y γ tres cortaduras tales que $\beta < \gamma$, entonces se dará que $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$*

Demostración. Tomando $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$, entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ o $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.

En caso de que sea $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, entonces, $\beta = 0^* + \beta = (-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma) = 0^* + \gamma = \gamma$, luego $\beta = \gamma$ absurdo, pues $\beta < \gamma$. □

Con este teorema hemos demostrado que en el conjunto de las cortaduras el orden y la suma son compatibles.

Teorema 2.14. *Sean α y γ dos cortaduras, entonces existe solo una cortadura β tal que $\alpha + \beta = \gamma$.*

Demostración. La unicidad se deduce del teorema 2.13, pues si $\beta_1 \neq \beta_2$, entonces se tendrá que dar que $\alpha + \beta_1 \neq \alpha + \beta_2$, luego $\gamma_1 \neq \gamma_2$

Tomemos la igualdad como $\beta = \gamma + (-\alpha)$, entonces, $\alpha + \beta = \alpha + [\gamma + (-\alpha)] = \alpha + (-\alpha) + \gamma = 0^* + \gamma = \gamma$ □

Como resumen de todo lo anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.15. *El conjunto de las cortaduras con el orden y la suma es un grupo conmutativo totalmente ordenado.*

2.4. La multiplicación

Iniciamos el estudio del producto de dos cortaduras viendo el caso de que ambas sean o negativas. Posteriormente daremos la definición general haciendo us del concepto de valor absoluto.

Observemos que definiremos la cortadura producto tomando cortaduras no negativas y multiplicando solo los racionales no negativos, pues de no ser así, podríamos obtener todos los racionales al multiplicar las dos cortaduras. Por ejemplo, si tomamos α y β dos cortaduras positivas, al multiplicarlas sin la restricción de la definición, obtendríamos como producto el conjunto de todos los racionales.

2.4.1. Producto de cortaduras no negativas

Sean α y β cortaduras que cumplen que $\alpha \geq 0^*$ y $\beta \geq 0^*$, entonces definimos la cortadura producto de α y β del siguiente modo:

$$\alpha\,\beta := \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\} \cup \{pq : p \in \alpha; q \in \beta; p, q \geq 0\}\ .$$

Teorema 2.16. *Sean α y β dos cortaduras no negativas. Entonces su producto es una cortadura.*

Demostración. Veamos que se cumplen las propiedades de las cortaduras:

1. γ contiene al menos un número racional, pues cualquier racional negativo pertenecerá y cualquier número racional $r = pq$, donde $p \in \alpha$, $q \in \beta$ y $p, q \geq 0$ pertenecerá a γ por definición, además, si tomamos un p' y un q' tales que $p' \notin \alpha$, $q' \notin \beta$ y $p', q' \geq 0$, entonces $r = pq < p'q' = r'$ y por tanto $r' \notin \gamma$, luego γ no contiene a todos los racionales.
2. Tomando un $s \in \gamma$ y un r racional tal que $r < s$ y sabiendo que $s = pq$, con $p \in \alpha$, $q \in \beta$ y $p, q \geq 0$. Entonces, si tomamos $r = pl$, $l \geq 0$, como $r < s$, tendremos que que $l < q$, luego $l \in \beta$ y por tanto $r \in \gamma$.

3. Tomando un $s \in \gamma$, tal que $s = pq$, $p \in \alpha$, $q \in \beta$ y $p, q \geq 0$, entonces, siempre existirá un $p' \in \alpha$ y un $q' \in \beta$ tales que $p < p'$ y $q < q'$, por ser α y β cortaduras, por lo tanto, siempre existirá un $s' = p'q'$ que sea mayor que s, luego no existirá un máximo en γ.

Luego $\alpha\beta$ es una cortadura. □

2.4.2. Valor absoluto de una cortadura

Será útil definir el valor absoluto de una cortadura. Dada la cortadura α su valor absoluto, denotado por $|\alpha|$, se define del siguiente modo:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & si\ \alpha \geq 0^* \\ -\alpha & si\ \alpha < 0^* \end{cases}$$

Teorema 2.17. *El valor absoluto $|\alpha|$ de una cortadura α es también una cortadura.*

Demostración. Veamos los dos posibles casos.

Si $\alpha \geq 0^*$, ya estaría, pues $|\alpha| = \alpha$ cortadura.

Si $\alpha < 0^*$, entonces $|\alpha| = -\alpha$, que por el teorema 2.12 sabemos que es una cortadura. □

2.4.3. Producto de cortaduras en general

Gracias a la definición del valor absoluto en las cortaduras, podremos terminar de definir la multiplicación en las cortaduras, pues para dos cortaduras α y β, diremos que:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha|\,|\beta|) & si\ \alpha < 0^*, \beta \geq 0^* \\ -(|\alpha|\,|\beta|) & si\ \alpha \geq 0^*, \beta < 0^* \\ |\alpha|\,|\beta| & si\ \alpha < 0^*, \beta < 0^* \\ |\alpha|\,|\beta| & si\ \alpha \leq 0^*, \beta \leq 0^* \end{cases}$$

Teorema 2.18. *Sean α, β y γ cortaduras. Entonces tendremos que:*

1. $\alpha\beta = \beta\alpha$
2. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

Demostración. Como $\alpha\beta$ se reduce a multiplicar $|\alpha|\,|\beta|$ en cualquiera de los cuatro casos, y $|\alpha|, |\beta| \geq 0^*$, entonces con verificar las propiedades para $|\alpha|$ y $|\beta|$ ya nos valdría.

1. Sabemos que $|\alpha|\,|\beta|$ es el conjunto de todos los números racionales negativos y los positivos de la forma pq, donde $p \in |\alpha|$, $q \in |\beta|$ y $p, q \geq 0$. Por la ley conmutativa del producto tenemos que $pq = qp$, para cualquier par de números racionales, por lo tanto, el conjunto $|\alpha|\,|\beta|$ tiene que ser igual a $|\beta|\,|\alpha|$.
2. Sabemos que $(|\alpha|\,|\beta|)\,|\gamma|$es el conjunto de todos los números racionales negativos y los positivos de la forma $(pq)l$ donde $p \in |\alpha|$, $q \in |\beta|$, $l \in |\gamma|$ y $p, q, l \geq 0$, que por la ley asociativa con el producto de los números racionales, $(pq)l = p(ql)$, luego, el conjunto $(|\alpha|\,|\beta|)\,|\gamma|$ a de ser igual a $|\alpha|\,(|\beta|\,|\gamma|)$.
3. Sabemos que $|\alpha|\,(|\beta|+|\gamma|)$ es el conjunto de todos los números racionales negativos y los positivos de la forma $p(q+l)$ donde $p \in |\alpha|$, $q \in |\beta|$, $l \in |\gamma|$ y $p, q, l \geq 0$, que por la propiedad distributiva de los números racionales, $p(q+l) = pq + pl$, luego, el conjunto $|\alpha|\,(|\beta| + |\gamma|)$ a de ser igual a $|\alpha|\,|\beta| + |\alpha|\,|\gamma|$.

De este modo termina la demostración. □

Teorema 2.19. *Sean α y β dos cortaduras, entonces:*

1. $\alpha 0^* = 0^*$
2. $\alpha\beta = 0^*$ *si y sólo si* $\alpha = 0^*$ *ó* $\beta = 0^*$
3. $\alpha 1^* = \alpha$

Demostración. Al igual que con el teorema 2.18, lo demostraremos con el valor absoluto de las cortaduras.

1. Por definición, $|\alpha|\,0^*$ es el conjunto de todos los números racionales negativos, más los racionales positivos de la forma pq, donde $p \in |\alpha|$, $q \in 0^*$ y $p, q \geq 0$, pero, como no existe ningún racional positivo perteneciente a 0^*, entonces el conjunto de números racionales positivo en $|\alpha|\,0^*$ será vacío, y por lo tanto, solo existirán racionales negativos, luego $|\alpha|\,0^* = 0^*$.
2. Partamos de que $\alpha\beta = 0^*$, entonces, aplicando el valor absoluto de una cortadura, si $|\alpha|\,|\beta| = 0^*$, entonces $\{pq : p \in |\alpha|\,, q \in |\beta|\,, p, q \geq 0\} = \emptyset$, por lo que $|\alpha| = 0^*$ o $|\beta| = 0^*$.
   Ahora partamos de que $\alpha = 0^*$ o $\beta = 0^*$, entonces, por el apartado 1 vemos que, efectivamente $\alpha\beta = 0^*$.
3. Por definición, la cortadura $|\alpha|\,1^*$ es el conjunto de los racionales negativos y los positivos de la forma pq, donde $p \in |\alpha|$, $q \in 1^*$ y $p, q \geq 0$. Por lo tanto, los racionales negativos de $|\alpha|\,1^*$ pertenecerán a 1^* y viceversa. Lo que hay que ver que ocurra lo mismo con los racionales positivos.
   Tomemos $s \in |\alpha|\,1^*$, es decir, $s = pq$, donde $p \in |\alpha|$, $q \in 1^*$ y $p, q \geq 0$. Como $q < 1$, entonces $s < p$, luego $s \in |\alpha|$.
   Ahora tomemos un $p \in |\alpha|$ y un q racional tal que $p < q$, $q \in |\alpha|$ y $p, q \geq 0$. Entonces, sea $r = p\frac{1}{q}$, como $p\frac{1}{q} < 1$, $r \in 1^*$, y como $p = rq$, $p \in |\alpha| * 1^*$

Finalizamos así la demostración. □

Teorema 2.20. *Sean α, β y γ tres cortaduras tales que $0^* < \alpha < \beta$ y $\gamma > 0^*$. Entonces $\alpha\gamma < \beta\gamma$*

Demostración. Sabemos que $\alpha\gamma$ es el conjunto de todos los números racionales negativos y los positivos de la forma $pr, p \in \alpha, r \in \gamma$ y $p, r \geq 0$ y que $\beta\gamma$ es el conjunto de todos los números racionales negativos y los positivos de la forma $qr, q \in \beta, r \in \gamma$ y $p, r \geq 0$, por otra parte, como $0^* < \alpha < \beta$, entonces $p < q, p \in \alpha$ y $q \in \beta$, luego, si tenemos $p < q$, entonces, por el orden de los racionales, $pr < qr$, $r \geq 0$, y por lo tanto, $\alpha\gamma < \beta\gamma$. □

Teorema 2.21. *Sean α una cortadura y $r > 1$ un número racional, entonces existen dos números racionales p y q tales que $p \notin \alpha$ y $q \in \alpha$, donde p no es el número mínimo superior a α, de modo que $p\frac{1}{q} = r$*

Demostración. Tomemos un número racional s y creemos la sucesión $s_n = sr^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces existirá un entero m tal que $s_m \in \alpha$ y $s_{m+1} \notin \alpha$.

En caso de que s_{m+1} no sea el número mínimo superior a α, tomaremos $q = s_m$ y $p = s_{m+1}$, y en caso de que si lo sea, tomaremos $q = s_m\frac{r}{2}$ y $p = s_{m+1}\frac{r}{2}$. □

Teorema 2.22. *Sea $\alpha > 0^*$, entonces existirá una cortadura $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$ formada por los inversos de los racionales superiores de α y los racionales negativos pertenecientes a α, tal que $\alpha\frac{1}{\alpha} = 1^*$.*

A esta cortadura la denominaremos el *inverso* para el producto.

Demostración. Comencemos probando que es una cortadura.

1. Con tomar cualquier número racional negativo, tendremos un racional perteneciente a α^{-1}, además, si tomamos un número racional q tal que $\frac{1}{q}$ sea un número superior a α tendremos un racional perteneciente a α^{-1}, y con tomar un racional p tal que $\frac{1}{p}$ pertenezca a α tendremos al menos un racional que no pertenezca a α^{-1}.
2. Sean $p \in \alpha^{-1}$, $p \geq 0$ y q un racional tal que $q < p$, $q \geq 0$, entonces, $\frac{1}{p} \notin \alpha$ y $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$, de modo que $\frac{1}{q}$ seria un número superior a $\frac{1}{p}$ sin llegar a ser el mínimo, luego $q \in \alpha^{-1}$
3. Si tomamos $p \in \alpha^{-1}$, $p \geq 0$ tal que $\frac{1}{p}$ no sea un número mínimo superior a α, entonces habrá un número racional q, $q \geq 0$ tal que $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} \notin \alpha$.
   Sea r el punto medio entre p y q, es decir, $r = \frac{p+q}{2}$, entonces $\frac{1}{q} < \frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, de modo que $\frac{1}{r}$ es un número superior a α sin ser el mínimo, luego hemos encontrado un $r \in \alpha^{-1}$ tal que $p < r$.

Teniendo ya que α^{-1} es una cortadura, veamos que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$, para esto tomemos $s \in \alpha\alpha^{-1}$, $s \geq 0$, luego $s = pq$ para $p \in \alpha$ y $q \in \alpha^{-1}$, $p, q \geq 0$. Como sabemos que $\frac{1}{q} \notin \alpha^{-1}$, entonces $p < \frac{1}{q}$, luego $pq < \frac{1}{q}q = 1$, es decir, $pq = s \in 1^*$.

Tomemos ahora $s \in 1^*$, $s \geq 0$, entonces como $s < 1$, usando el teorema 2.21, sabemos que existen dos números racionales $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, donde q no es el número mínimo de los superiores a α, tales que $q\frac{1}{p} = \frac{1}{s}$, y como $\frac{1}{q} \in \alpha^{-1}$ por definición, entonces $s = p\frac{1}{q} \in \alpha\alpha^{-1}$.

Para el caso de los racionales negativos, pertenecerán a ambos conjuntos, por lo que concluimos que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$. □

Teorema 2.23. *Sean α, β dos cortaduras cualquiera tales que $\alpha \neq 0^*$, entonces existirá una única cortadura γ representada como $\frac{\beta}{\alpha}$ tal que $\alpha\gamma = \beta$*

Demostración. Como $\alpha\gamma$ se reduce a multiplicar $|\alpha| |\gamma|$ en cualquiera de los cuatro casos, y $|\alpha|, |\gamma| \geq 0^*$, entonces con verificar las propiedades para $|\alpha|$ y $|\gamma|$ ya nos valdría.

Sabemos que $|\alpha| |\gamma|$ es igual a $|\alpha| \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = |\alpha| \left|\frac{1}{\alpha}\right| |\beta|$, que por el teorema 2.22 es igual a $1^* |\beta| = |\beta|$. □

Como resumen obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.24. *El conjunto de las cortaduras con las operaciones adición y multiplicación, así como con el orden, es un cuerpo conmutatitvo totalmente ordenado y completo.*

2.5. Cortaduras racionales

Habiendo definido ya el orden y las operaciones de la adición y multiplicación, pasemos a hablar de tres teoremas relacionados con las cortaduras racionales.

El próximo teorema es una forma de decir que el conjunto de los números racionales es un subcuerpo del cuerpo ordenado de las cortaduras.

Teorema 2.25. *Sean p y q dos números racionales, entonces:*

1. $p^* + q^* = (p+q)^*$
2. $p^* q^* = (pq)^*$
3. $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$

Demostración. 1. Sea $s \in p^* + q^*$, entonces $s = p' + q'$ con $p' \in p^*, q' \in q^*$, luego, $s = p' + q' < p + q$, por lo tanto, $s \in (p+q)^*$

Sea $s \in (p+q)^*$, $s \geq 0$ entonces $s < p + q$.

Si tomamos $h = p + q - s$, $r = p - \frac{h}{2}$ y $t = q - \frac{h}{2}$, entonces, $r \in p^*, t \in q^*$ y $s = r + t$, por lo que $s \in p^* + q^*$.

2. Para el caso del producto, lo demostraremos haciendo uso del valor absoluto de una cortadura.
   Sea $s \in |p^*|\,|q^*|$, $s \geq 0$, entonces $s = p'q'$ con $p' \in p\,|p^*|\,, q' \in |q^*|$, y $p', q' \geq 0$, luego, $s = p'q' < pq$, por lo tanto, $s \in |(pq)^*|$
   Sea $s \in |(pq)^*|$, $s \geq 0$, entonces $s < pq$.
   Si tomamos $h = pq\frac{1}{s}$, $r = p\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}$ y $t = q\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}$, entonces, $r \in p^*, t \in q^*$ y $s = rt$, por lo que $s \in |p^*|\,|q^*|$.
   Para el caso de los racionales negativos, pertenecerán a ambos conjuntos, por como está definido el producto de cortaduras, por lo que concluimos que $p^*q^* = (pq)^*$
3. Si $p < q$, entonces $p \in q^*$ y $p \notin p^*$, luego $p^* < q^*$
   Si $p^* < q^*$, entonces existe un número racional s tal que $s \in q^*$ y $s \notin p^*$, luego, $p \leq s < q$, es decir, $p < q$.
   Concluimos así la demostración. □

Ahora se establece que las cortaduras racionales forman un conjunto denso en el conjunto de las cortaduras.

Teorema 2.26. *Sean α y β dos cortaduras tales que $\alpha < \beta$, entonces existe una cortadura racional s^*, tal que $\alpha < s^* < \beta$*

Demostración. Como $\alpha < \beta$, existe al menos un número racional q tal que $q \in \beta$ y $q \notin \alpha$. Tomemos ahora un racional s, tal que $q < s$ y $s \in \beta$.

Como $s \in \beta$ y $s \notin s^*$, entonces $s^* < \beta$, y como además, $q \in s^*$ y $s^* \notin \alpha$, entonces $\alpha < s^*$, luego, $\alpha < s^* < \beta$. □

Teorema 2.27. *Sean α una cortadura y q un racional. Entonces, $q \in \alpha$ si y sólo si $q^* < \alpha$*

Demostración. Para cualquier número racional q, $q \notin q^*$, luego, si $q \in \alpha$, entonces $q^* < \alpha$. Por el otro lado, si $q^* < \alpha$, existe un número racional p tal que $p \in \alpha$ y $p \notin q^*$, luego $q \leq p$, y como $p \in \alpha$, entonces $q \in \alpha$. □

2.6. Números reales

Hemos considerado ciertos conjuntos de números racionales, que hemos llamado cortaduras, y en ellos hemos definido una relación de orden y dos operaciones internas denominadas adición y multiplicación, que cumplen las mismas leyes que la aritmética de los números racionales. Es decir, forman un cuerpo ordenado.

Hemos tenido especial interés en las cortaduras racionales, pues, vimos que al sustituir los números racionales q por sus correspondientes cortaduras q^* se conservan la suma, el producto y el orden (2.25). Por este hecho, podemos decir que el cuerpo ordenado de todos los números racionales es isomorfo al cuerpo ordenado de todas las cortaduras racionales, identificando cada cortadura racional q^* con el número racional q, ya que, pese a no ser lo mismo, cumplen las mismas propiedades aritméticas y de orden.

Llamaremos entonces a las cortaduras *números reales*, identificando a las cortaduras racionales con los números racionales, y llamándolas de esta manera, mientras que a todas las cortaduras restantes las llamaremos *números irracionales*. De este modo, los números irracionales serán un subconjunto de los números reales.

Usaremos el símbolo $\mathbb{R}_D$ para referirnos al conjunto de los números reales, donde el subíndice D indica que se trata de un conjunto construido usando las cortaduras de Dedekind. El uso de este símbolo es provisional ya que más adelante escribiremos simplemente

$$\mathbb{R}\,.$$

Podemos resumir los resultados obtenidos en el siguiente teorema.

Teorema 2.28. *El conjunto $\mathbb{R}_D$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo, de tal forma que contiene al cuerpo de los números racionales como subcuerpo denso.*

2.7. Cortaduras de números reales

Es natural que nos planteemos la definición de cortadura de números reales, de forma análoga a la que hemos hecho con los números racionales. Pues bien, si se repitiera el proceso resultaría que obtendríamos de nuevo los números reales. Es decir, cada cortadura de números reales queda determinada por un número real, que es el mínimo de su complementario. Esto es lo que veremos a continuación.

Teorema 2.29. *(Teorema de completitud de los números reales. Dedekind) Sean A y B dos conjuntos de números reales tales que:*

1. *Todo número real está contenido en A o en B*
2. *Ningún número real pertenece a la vez a A y a B*
3. *Ni A ni B son vacíos*
4. *Si $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, entonces $\alpha < \beta$.*

Entonces, existe un solo número real γ, tal que $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$ y $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$.

Demostración. Comencemos viendo la unicidad, para ello, supongamos que existen dos números reales γ_1 y γ_2, que cumplan las condiciones del teorema, tales que $\gamma_1 < \gamma_2$. Tomemos ahora un γ_3 tal que $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$, posible por el teorema 2.26.

Como $\gamma_1 < \gamma_3$, entonces, $\gamma_3 \in B$, y como $\gamma_3 < \gamma_2$, $\gamma_3 \in A$, lo que contradice la hipótesis (*2*). Por lo tanto, solo puede haber un número real con estas propiedades.

Sea γ el conjunto de todos los números racionales q tales que $q \in \alpha$ para algún $\alpha \in A$. Veamos que este γ es una cortadura, o lo que es lo mismo, un número real.

1. Como A no está vacío, tampoco lo será γ. Por otra parte, si $\beta \in B$ y sea p un racional tal que $p \notin B$, entonces, $p \notin \beta$, y, como $\alpha < \beta$, entonces, $p \notin \alpha$, luego, $p \notin \gamma$.
2. Si $q \in \gamma$, y p es un número racional tal que $p < q$, entonces $q \in \alpha$, para algún $\alpha \in A$, lo que implica que, $p \in \alpha$ y $p \in \gamma$.
3. Si $q \in \gamma$, entonces $q \in \alpha$, para algún $\alpha \in A$, luego, existe un racional p, $p > q$, tal que $p \in \alpha$ y, por lo tanto, $p \in \gamma$.

Por último, como $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in A$, si existiera algún $\beta \in B$ tal que $\beta < \gamma$, habría un número racional q, tal que $q \in \gamma$ y $q \notin \beta$, pero, si $q \in \gamma$, entonces, $q \in \alpha$, para algún $\alpha \in A$, lo que implica que $\beta < \alpha$, y esto contradice la hipótesis (*4*). Por lo tanto, $\gamma \leq \beta$ para todo $\beta \in B$. □

Corolario 1 *En las hipótesis del teorema 2.29, ó A contiene a un número máximo ó B a un número mínimo.*

Si $\gamma \in A$, entonces γ es el número máximo en A, si $\gamma \in B$, entonces γ es el número mínimo en B. Por la hipótesis (1) debe ocurrir uno de estos dos casos, mientras que por la hipótesis (2) no pueden ocurrir ambos a la vez.

La existencia de γ es una característica principal de los números reales. Las “lagunas”o “huecos”que se tienen en el cuerpo de los números racionales se han ”ocupado”por números reales.

Concluimos dando una nueva demostración de que $\mathbb{R}_D$ es completo para el orden.

Teorema 2.30. *Si E es un conjunto no vacío de números reales acotado superiormente, entonces existe un extremo superior.*

Demostración. Tomemos un conjunto de números reales A de la forma que $\alpha \in A$ sí, y sólo sí, existe un $\beta \in E$ tal que $\alpha < \beta$, y tomemos un B formado por todos los números reales que no pertenecen a A.

Es evidente que ningún número de A es una cota superior de E, mientras que todos los elementos de B lo son. Con probar que el conjunto B tiene un mínimo tendríamos probada la existencia del extremo superior. Para ello, primero veremos que los conjuntos A y B cumplen las hipótesis del teorema 2.29

Las hipótesis (*1*) y (*2*) se verifican me manera inmediata por como están construidos A y B. Al estar el conjunto E acotado superiormente, existe un γ tal que $\beta \leq \gamma$ para todo $\beta \in E$, luego, $\gamma \in B$ y, por tanto, se verifica la hipótesis (*3*).

Por último, si $\alpha \in A$, existe un $\beta \in E$ tal que $\alpha < \beta$, y si $\gamma \in B$ con $\beta \leq \gamma$, luego, siempre se dará que $\alpha < \gamma$ siempre que $\alpha \in A$ y $\gamma \in B$, verificando la hipótesis (*4*).

Para terminar la demostración, tendremos en cuenta el corolario 1, es decir, que A contiene un máximo o B un mínimo.

Si $\alpha \in A$, existirá un $\beta \in E$ tal que $\alpha < \beta$. Tomemos entonces un γ de modo que $\alpha < \gamma < \beta$. Como $\gamma < \beta$, $\gamma \in A$, luego α no será el máximo de A, y por lo tanto, B tendrá un mínimo. □

Se puede obtener un resultado similar para conjuntos no vacíos acotados inferiormente. De hecho es sencillo usando este que acabamos de probar.

3

Sucesiones de Cauchy

En el capitulo anterior realizamos la extensión de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}_D$. Vimos que dentro del cuerpo de los racionales existen una serie de "lagunas"que muestran la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ para la resolución de diversos problemas como el ya mencionado de hallar raíces del polinomio $q^2 = 2$.

Entonces usamos el método de las cortaduras de Dedekind para construir el cuerpo ordenado $\mathbb{R}_D$. Ese método se centra en la estructura de orden de $\mathbb{Q}$, de tal forma que el "defecto"de $\mathbb{Q}$ se expresa observando que no es completo, en el sentido de que los conjuntos acotados superiormente necesariamente no tienen supremo, o equivalentemente, los conjuntos acotados inferiormente necesariamente no tienen ínfimo. Un número real se define entonces como una cortadura en el conjunto de los números racionales.

En este capitulo nos apoyaremos en las sucesiones de Cauchy para realizar la ampliación de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}_C$, símbolo provisional para los números reales. Resulta que no toda sucesión de Cauchy de números racionales es convergente en $\mathbb{Q}$, así que el "defecto"lo podemos expresar diciendo que $\mathbb{Q}$ no es sucesionalmente completo, "faltan"los límites de algunas sucesiones de Cauchy.

Cada sucesión de Cauchy definirá un número real, pero ese número también quedará definido por las sucesiones de Cauchy que son equivalentes a ella, en el sentido de que la diferencia es convergente a 0. Es decir, llenaremos las lagunas de $\mathbb{Q}$ con los límites de las sucesiones de los números racionales.

El procedimiento de construcción de los números reales que describimos en este capítulo es un caso particular del método general de complexión de un espacio métrico en el que hay sucesiones de Cauchy que no son convergentes.

3.1. Sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes

Destacamos ahora algunas propiedades de las sucesiones de Cauchy y de las sucesiones convergentes. Damos un ejemplo de sucesión de Cauchy de números racionales que no tiene límite racional.

3.1.1. Sucesión de Cauchy

Diremos que una sucesión de números racionales (x_n) es *de Cauchy* en $\mathbb{Q}$ si, para todo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe un entero n_ε tal que las desigualdades $n > n_\varepsilon$ y $m > n_\varepsilon$ implican que $|x_n - x_m| < \varepsilon$

Algunas propiedades sencillas que son básicas:

Teorema 3.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*
2. *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*
3. *Sean dos sucesiones (x_n) e (y_n) tales que (x_n) tiende a cero, e (y_n) está acotada. Entonces la sucesión $(x_n y_n)$ tiende a cero.*
4. *Si dos sucesiones (x_n) e (y_n) son de Cauchy, entonces las sucesiones $(x_n + y_n)$ y $(x_n y_n)$ son de Cauchy.*
5. *Sean dos sucesiones (x_n) e (y_n) tales que (x_n) tiende a x, e (y_n) tiende a y, entonces ls sucesiones (x_n+y_n) y $(x_n y_n)$ tienden a $x+y$ y a xy, respectivamente.*
6. *Si (x_n) es una sucesión de Cauchy que no converge a cero, entonces, existe un racional $z > 0$ y un entero n_0 tal que, para todo $n > n_0$ se tiene que $|x_n| > z > 0$. Además, la sucesión $(\frac{1}{x_n})$, definida para $n > n_0$, es de Cauchy.*

3.1.2. Ejemplo de sucesión de Cauchy no convergente en $\mathbb{Q}$.

Consideramos la sucesión (x_n) de números racionales definida por

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \ .$$

Entonces, para $m > n$ tenemos que:

$$x_m - x_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\big[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n-1}}\big] <$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!} \ .$$

Esto nos permite ver que la sucesión es de Cauchy, pues, para cualquier $\varepsilon = \frac{p}{q}$ (p, q naturales), tenemos que para todo $m > q$ y $n > q$ se tiene

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{qq!} \leq \frac{p}{q} = \varepsilon \ .$$

Pero, por otra parte, esta sucesión no puede converger en los racionales, pues, de hacerlo, las desigualdades $0 < x_m - x_n < \frac{1}{nn!}$, válidas para cualquier $m > n$, implicarían en el límite para $m \longrightarrow \infty$,

$$0 < \frac{p}{q} - x_n \leq \frac{1}{nn!} \ .$$

La primera desigualdad $0 < \frac{p}{q} - x_n$ sale por ser (x_m) una sucesión creciente, sin embargo, para $n \geq q$, el número racional $\frac{p}{q} - x_n$ lo podemos escribir como $\frac{r}{n!}$, con r natural, luego las desigualdades pasarían a ser:

$$0 < \frac{r}{n!} \leq \frac{1}{nn!} \ ,$$

o lo que es lo mismo

$$r \leq \frac{1}{n} \ ,$$

lo que es imposible para $n > 1$. Por lo tanto, concluimos que es una sucesión de Cauchy que no converge en $\mathbb{Q}$.

La sucesión anterior define al número irracional e.

3.2. Las operaciones

Las aplicaciones que van de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$, es decir las sucesiones de elementos de $\mathbb{Q}$, forman un conjunto denotado como $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Consideraremos el subconjunto formado por las sucesiones de Cauchy, que denotaremos por $\mathscr{C}$.

Obtenemos una estructura de anillo conmutativo en el conjunto $\mathscr{C}$ de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Para ello definiremos la suma de dos sucesiones de Cauchy $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ como $x + y = (x_n + y_n)$ y el producto $xy = (x_n y_n)$. Aplicando el apartado *4* del teorema 3.1 tenemos que las operaciones $(x, y) \to x+y$ y $(x, y) \to xy$ son leyes internas de $\mathscr{C}$, cuyas propiedades coinciden con las de la suma y el producto de $\mathbb{Q}$. Por otra parte, este anillo tiene como unidad a las sucesiones convergentes hacia 1, como la sucesión constante $x = 1$ definida como $x_n = 1$. Además, tiene como elemento nulo a las sucesiones que convergen a 0, como la sucesión constante $x = 0$, cuyos términos son todos nulos.

Recordaremos la definición de ideal de un anillo. El subconjunto I de un anillo conmutativo A es un ideal si se cumplen las dos siguientes propiedades para $x, y, z \in A$:

1. $x, y \in I \Longrightarrow x + y \in I$
2. $x \in I$ y $z \in A \Longrightarrow xz \in I$

donde las operaciones de A quedan denotadas con "+z "."."

También recordaremos que un ideal es maximal si y sólo si el único ideal que lo contiene estrictamente es el propio anillo A y que un resultado general del Álgebra establece que el anillo cociente A/I es un cuerpo si y sólo si I es un ideal maximal.

Teorema 3.2. *El conjunto $\mathscr{C}_0$ formado por las sucesiones de $\mathbb{Q}$ convergentes a cero es un ideal de $\mathscr{C}$*

Demostración. Sabemos que el conjunto $\mathscr{C}_0$ es no vacío ya que contiene al menos a la sucesión nula. Además, aplicando el apartado *1* del teorema 3.1 tenemos que $\mathscr{C}_0$ está contenido en $\mathscr{C}$. Por otra parte, por los apartados *2* y *3* tenemos que si $x \in \mathscr{C}_0$ e $y \in \mathscr{C}$, entonces $xy \in \mathscr{C}_0$. Por último, mediante el apartado *5* tenemos que si $x \in \mathscr{C}_0$ e $y \in \mathscr{C}_0$, entonces $x + y \in \mathscr{C}_0$. □

Todo ideal define una relación de equivalencia en el correspondiente anillo, de forma que el cociente es también un anillo. Esto se recoge en el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Obtenemos una relación de equivalencia en $\mathscr{C}$ estableciendo que, para $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$, $x \equiv y$ si $x - y \in \mathscr{C}_0$, es decir, si la sucesión $(x_n - y_n)$ converge a cero. Esa relación es compatible con las operaciones.*

Demostración. Como $x - y \in \mathscr{C}_0$ son evidentes las relaciones reflexiva y simétrica, por lo que, solamente habría que comprobar la transitividad. Para ello, tendremos en cuenta que si $x - y \in \mathscr{C}_0$ e $y - z \in \mathscr{C}_0$, entonces, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathscr{C}_0$. Luego, es una relación de equivalencia.

Veamos ahora que la relación de equivalencia $\mathscr{C}_0$ es compatible con la estructura algebraica de $\mathscr{C}$, para ello, tomemos cuatro elementos, x, y, z, t de $\mathscr{C}$, tales que $x \equiv y$ y $z \equiv t$, es decir, $x - y \in \mathscr{C}_0$ y $z - t \in \mathscr{C}_0$.

Vemos que $(x + z) - (y + t) = x + z - y - t = (x - y) + (z - t) \in \mathscr{C}_0$, por lo que $(x + z) \equiv (z + t)$, luego, la relación $\mathscr{C}_0$ es compatible con la suma de $\mathscr{C}$.

Por otro lado vemos que $xz - yt = (x - y)z + (z - t)y \in \mathscr{C}_0$, ya que $\mathscr{C}_0$ es un ideal y sabemos que $(x - y), (z - t) \in \mathscr{C}_0$, por lo que $(x - y)z, (z - t)y \in \mathscr{C}_0$, luego, la relación $\mathscr{C}_0$ es compatible con el producto de $\mathscr{C}$. □

En lo que sigue denotamos por $\bar{x} \in \mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ clase de equivalencia de la sucesión $x \in \mathscr{C}$.

Teorema 3.4. *El cociente $(\mathscr{C}/\mathscr{C}_0)$ de $\mathscr{C}$ obtenido por esta relación de equivalencia es un anillo conmutativo unitario para las leyes definidas por*

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} \quad y \quad \bar{x}\bar{y} = \overline{xy}\ .$$

Demostración. De la demostración del teorema 3.3 tenemos que las clases de equivalencia $\overline{x+y}$ y $\overline{xy}$ dependen únicamente de las clases $\overline{x}$ e $\overline{y}$. Por lo tanto, obtenemos dos leyes internas en el cociente $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ estableciendo que $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$ y $\bar{x}\bar{y}=\overline{xy}$, cuyas propiedades coinciden con las de $\mathscr{C}$. □

Teorema 3.5. *El anillo cociente $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ es un cuerpo conmutativo.*

Demostración. (Primera demostración.) Tenemos que el anillo $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ admite como unidad a la clase $\overline{u}$ formada por las sucesiones de Cauchy convergentes hacia 1.

Por otra parte, sea $x=(x_n)$ una sucesión de Cauchy que no converge a cero, entonces, por el apartado *6* del teorema 3.1 tenemos que la sucesión $(\frac{1}{x_n})$ está definida para un $n>n_0$ lo suficientemente grande y que es de Cauchy. Luego, si tomamos una sucesión $y=(y_n)$ tal que $y_n=0$ para $n\leq n_0$ e $y_n=\frac{1}{x_n}$ para $n>n_0$, habremos encontrado una sucesión de Cauchy tal que la sucesión $xy=(x_n y_n)$ converge hacia 1.

Por lo tanto, obtenemos que $\overline{xy}=\overline{xy}=\overline{u}$, lo que demuestra que todo elemento no nulo de $\overline{x}$ de $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ posee un inverso en $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$. □

Demostración. (Segunda demostración.) Otra forma de probar que el anillo cociente $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ es un cuerpo conmutativo es demostrando que el ideal $\mathscr{C}_0$ es un ideal maximal del anillo conmutativo $\mathscr{C}$.

Sea I un ideal que contiene a $\mathscr{C}_0$. Para probar que $\mathscr{C}_0$ es un ideal maximal, tomamos una sucesión de Cauchy no nula (z_n) que está en I. A partir de un cierto n_0 todos los z_n tienen el mismo signo y su valor absoluto está acotado por ciertos k y K; es decir, para $n\geq n_0$ se tiene que $k<|z_n|<K$. Sabemos que la sucesión $(\frac{1}{z_n})_{n\geq n_0}$ es de Cauchy, luego el producto

$$(z_n)\left(\frac{1}{z_n}\right)=(1)=1\ .$$

Luego $1\in I$. Por tanto $I=\mathscr{C}$. □

Llamamos *números reales* a las clases de equivalencia pertenecientes al anillo cociente $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$.

3.3. El orden

Para ayudarnos a ordenar $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ definiremos $\mathscr{C}_+$ y $\mathscr{C}_-$ como los conjuntos formados por las sucesiones de Cauchy encargadas de representar los números positivos y los negativos.

Sea x una sucesión de Cauchy. Diremos que x pertenece al conjunto $\mathscr{C}_+$ si para cada $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in\mathbb{Q}$, podemos asociar un entero n_ε tal que $n>n_\varepsilon$ implica que $x_n>-\varepsilon$. Por otra parte, diremos que x pertenece al conjunto $\mathscr{C}_-$ si para cada $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in\mathbb{Q}$, podemos asociar un entero n_ε tal que $n>n_\varepsilon$ implica que $x_n<\varepsilon$.

Teorema 3.6. *Los conjuntos $\mathscr{C}_+$ y $\mathscr{C}_-$ cumplen las siguientes propiedades:*

$$\mathscr{C}_+ \cap \mathscr{C}_- = \mathscr{C}_0 \quad y \quad \mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_- = \mathscr{C} \ .$$

Demostración. 1. Sea $x \in \mathscr{C}_+ \cap \mathscr{C}_-$, entonces, para $\varepsilon > 0$, existen dos enteros n_ε y m_ε tales que $n > n_\varepsilon$ y $n > m_\varepsilon$ implican que $x_n > -\varepsilon$ y $x_n < \varepsilon$. Luego, para $n > sup(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$, se verificará que $|x_n| < \varepsilon$, lo que implica que la sucesión $x = (x_n)$ tiende a cero, luego, $x \in \mathscr{C}_0$.

2. Si $x \notin \mathscr{C}_+$, entonces, existirá un número racional $q > 0$ y valores de m lo suficientemente grandes para los cuales $x_m \geq q$. Por otra parte, como la sucesión $x = (x_n)$ es de Cauchy, entonces, existirá un entero n_0 tal que $n > n_0$ y $m > n_0$ implican que $|x_n - x_m| < \frac{q}{2}$. Luego, podemos elegir un $m > n_0$ tal que $x_m \geq q$ y por lo tanto, para todo $n > n_0$, se da que $x_n > \frac{q}{2} > 0$, lo que implica que la sucesión $x = (x_n)$ pertenece a $\mathscr{C}_+$ y por lo tanto, $\mathscr{C}_+ \cup \mathscr{C}_- = \mathscr{C}$.

La demostración está ya finalizada. □

Teorema 3.7. *Sea $x = (x_n)$ una sucesión que no pertenece a $\mathscr{C}_-$, entonces, existe un número racional $p > 0$ y un entero n_0 tales que $x_n > p$ para todo $n > n_0$*

Demostración. Tomando $p = \frac{q}{2}$ en la segunda parte de la demostración del teorema 3.6, ya estaría. □

Teorema 3.8. *Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ dos sucesiones pertenecientes a $\mathscr{C}$. Entonces:*

1. *Si $x \in \mathscr{C}_-$, entonces, $-x \in \mathscr{C}_+$.*
2. *Si $x \in \mathscr{C}_+$ e $y \in \mathscr{C}_+$ entonces $x + y \in \mathscr{C}_+$*
3. *Si $x \in \mathscr{C}_+$ e $y \in \mathscr{C}_+$ entonces $xy \in \mathscr{C}_+$*

Demostración. 1. $x \in \mathscr{C}_-$ si para cada $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, podemos asociar un entero n_ε tal que $n > n_\varepsilon$ implica que $x_n < \varepsilon$, entonces, $-x$ implicará que para ese entero n_ε, $-x_n < \varepsilon$, es decir, $x_n > -\varepsilon$, luego, $-x \in \mathscr{C}_+$.

2. En caso de que x o y pertenezca a $\mathscr{C}_0$, tendremos que, para un n lo suficientemente grande, $x_n + y_n = x_n$, $x_n + y_n = y_n$ o $x_n + y_n = 0$, lo que implica que, para cualquiera de los tres casos,$x + y \in \mathscr{C}_+$. Veamos que ocurre si $x, y \notin \mathscr{C}_0$, es decir, si $x, y \notin \mathscr{C}_-$. En este caso, aplicando el teorema 3.7, como $x_n > 0$ e $y_n > 0$, para un n lo suficientemente grande, entonces, $x_n + y_n > 0$, lo que implica que, $x + y \in \mathscr{C}_+$.

3. En caso de que x o y pertenezcan a $\mathscr{C}_0$, entonces, $xy \in \mathscr{C}_0$, y por tanto, $xy \in \mathscr{C}_+$. Veamos que ocurre en caso de que $x, y \notin \mathscr{C}_0$, es decir, cuando $x, y \notin \mathscr{C}_-$. En este caso, por el teorema 3.7, como $x_n > 0$ e $y_n > 0$, para un n lo suficientemente grande, entonces, $x_n y_n > 0$, lo que implica que, $xy \in \mathscr{C}_+$.

Queda así acabada la demostración. □

Podemos observar, que si tomáramos $x \in \mathscr{C}_-$ e $y \in \mathscr{C}_-$, entonces, $-x \in \mathscr{C}_+$ e $-y \in \mathscr{C}_+$, luego, $-(x+y) \in \mathscr{C}_+$, y por lo tanto, $x+y \in \mathscr{C}_-$. De este modo podemos ver qué ocurre con todas las posibilidades.

Teorema 3.9. *Sean x e y dos sucesiones de Cauchy equivalentes, es decir, tales que $x - y \in \mathscr{C}_0$. Entonces, ambas pertenecen a $\mathscr{C}_-$ o ambas pertenecen a $\mathscr{C}_+$*

Demostración. Si $x \in \mathscr{C}_+$, entonces, para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe un entero n_1 tal que para todo $n > n_1$ se cumple que $x_n > -\frac{\varepsilon}{2}$, y existe un segundo entero n_2 tal que para todo $n > n_2$ se cumple que $|y_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, para $n > sup(n_1, n_2)$ tenemos que $y_n > x_n - \frac{\varepsilon}{2} > -\frac{\varepsilon}{2}$, lo que implica que $y \in \mathscr{C}_+$.

Del mismo modo probaríamos que si $x \in \mathscr{C}_-$ entonces $y \in \mathscr{C}_-$. □

3.4. Números reales

Definimos los números reales como las sucesiones de números racionales que son de Cauchy. Más exactamente por clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. Las que no son convergentes en $\mathbb{Q}$ darán lugar a los que denominaremos *números irracionales*.

A partir de ahora denotaremos

$$\mathbb{R}_C = \mathscr{C}/\mathscr{C}_0 \ ,$$

y por lo tanto, a los conjuntos de números no negativos y no positivos por $\mathbb{R}_{C_+}$ y $\mathbb{R}_{C_-}$, respectivamente.

Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $x \in \mathbb{R}_{C_-}$ es equivalente a que $-x \in \mathbb{R}_{C_+}$
2. Si $x \in \mathbb{R}_{C_+}$ e $y \in \mathbb{R}_{C_+}$, entonces, $x + y \in \mathbb{R}_{C_+}$ y $xy \in \mathbb{R}_{C_+}$.
3. $\mathbb{R}_{C_+} \cup \mathbb{R}_{C_-} = \mathbb{R}_C$ y $\mathbb{R}_{C_+} \cap \mathbb{R}_{C_-} = \{0\}$

El Teorema 3.9 nos permite decir que un número real es no negativo si está representado por una sucesión de Cauchy perteneciente a $\mathscr{C}_+$, y que es no positivo si está representado por una sucesión de Cauchy perteneciente a $\mathscr{C}_-$.

Teorema 3.10. *Obtenemos una relación de orden total en $\mathbb{R}_C$ definiendo $b \geq a$ si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}_{C_+}$*

En base a este teorema tenemos que:

Teorema 3.11. *Para cualquier terna de números reales a, b, c:*

1. *La relación $b \geq a$ implica que $b + c \geq a + c$.*
2. *Las relaciones $b \geq a$ y $c \geq 0$ implican que $bc \geq ac$.*

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.12. *$\mathbb{R}_C$ es u cuerpo conmutativo totalmente ordenado.*

3.4.1. Valor absoluto

Definiremos como $|x| = sup(x, -x)$ al valor absoluto de un número real x. Además, de los dos posibles casos $xy \leq 0$ y $xy \geq 0$, podemos extender las relaciones

$$|a \pm b| \leq |a| \pm |b|; |ab| = |a||b|$$

a $\mathbb{R}_C$.

Una propiedad sencilla y útil:

$$|x| < y \Longleftrightarrow -y < x < y \ .$$

3.4.2. De $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}_C$

Podemos asociar a cada número racional q una clase de equivalencia $C(q)$ formada por todas las sucesiones de Cauchy convergentes hacia q.

Vemos que $q \to C(q)$ es un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}_C$, donde resulta que $C(\mathbb{Q})$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}_C$.

Tomando la sucesión constante (q), perteneciente a $C(q)$, entonces, la desigualdad $q \geq 0$ implica que $C(q) \in \mathscr{C}_+$, es decir, $C(q) \geq 0$, mientras que la desigualdad $q \leq 0$ implica que $C(q) \in \mathscr{C}_-$, es decir, $C(q) \leq 0$.

Por otra parte, de la desigualdad $p \leq q$ $(p, q \in \mathbb{Q})$, deducimos que $C(p) \leq C(q)$, es decir, que la aplicación C es creciente. Por lo tanto, podemos identificar sin problemas cada número racional q con el número real correspondiente $C(q)$.

3.5. Axioma de Arquímedes

Tras identificar $\mathbb{Q}$ como un subcuerpo de $\mathbb{R}_C$, surge el problema de colocar los números racionales en relación con el conjunto de los números reales, además, de precisar las relaciones de orden entre los números racionales y los números reales. Para ello recurriremos al axioma de Arquímedes.

Teorema 3.13 (Axioma de Arquímedes). *Para cada número real x, existe un natural m tal que $m > x$.*

Demostración. Sea $y = (y_n)$ una sucesión de Cauchy de números racionales que representa al número x, es decir, $\overline{y} = x$, entonces, esta sucesión estará acotada, dado que es de Cauchy, por lo tanto, existirá un número racional $M = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$, tal que $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, como la sucesión $(M - y_n)$ está formada de números racionales positivos, entonces, el número racional que representa $M - x$ será no negativo, luego, $M \geq x$, es decir, $\frac{p}{q} \geq x$. Tomando $m = p + 1$, entonces, $x \leq \frac{p}{q} \leq p < z$, y por lo tanto, $x < z$. $\square$

Otra forma de formular este teorema sería decir que: Dado un número real $x > 0$, siempre podemos encontrar un natural n tal que

$$0 < \frac{1}{n} < x \ .$$

Como aplicación podemos decir que para todo número real $x > 0$, existe un número racional y $(1/n)$ tal que $0 < y < x$.

Corolario 2 *Sean x e y dos números reales tales que $x, y > 0$, entonces, existirá un número natural m tal que, por muy pequeño que sea x, sumándolo a si mismo supere a y, es decir, $mx > y$.*

Demostración. Se demuestra aplicando el teorema 3.13, ya que cambiando x por $\frac{y}{x}$, obtenemos que $m > \frac{y}{x}$ y por lo tanto, $mx > y$, con m natural.

Ahora probamos que todo número real está entre dos múltiplos enteros de otro real.

Teorema 3.14. *Sean x e y dos números reales cualesquiera, tales que $x > 0$, entonces, existe un único entero n tal que*

$$nx \leq y < (n+1)x \ .$$

Demostración. Aplicando el corolario 2 tenemos que existe un entero p tal que $px \geq |y|$, es decir, $-px \leq y \leq px$. De aquí obtenemos que el conjunto P de números enteros n tales que $nx \leq y$ es no vacío, ya que $-p \in P$, y está acotado superiormente por p. Usando que el orden de los números naturales es un buen orden, se tiene que el complementario de P en
$mathbbZ$ tiene mínimo, así que P posee un máximo n, que por lo tanto cumple que $nx \leq y < (n+1)x$.

Veamos que este número es único, para ello veamos si existe otro entero m que verifique $mx \leq y < (m+1)x$. En este caso tendríamos que $mx < (n+1)x$ y que $nx < (m+1)x$, lo que implica que $m < n+1$ y que $n < m+1$, es decir, $m \leq n$ y $n \leq m$, por lo que, $n = m$. □

El conjunto de los números racionales es denso para el orden en el conjunto de los reales, tal como se establece en el próximo teorema.

Teorema 3.15. *Sean x e y dos números reales cualesquiera distintos tales que $x < y$, entonces, existe un número racional q tal que $x < q < y$.*

Demostración. Tomemos un natural n tal que $1/n < y - x$, y, sea m el entero definido por $\frac{m}{n} \leq y < \frac{m+1}{m}$. Entonces tenemos que

$$x = y - (y - x) < \frac{m+1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m}{n} < y \ .$$

Luego, con tomar $q = \frac{m}{n}$ queda demostrado. □

Teorema 3.16. *Sean p y q dos números racionales cualesquiera tales que $p < q$, entonces, existe siempre un irracional x tal que $p < x < q$.*

Demostración. A principio del tema construimos el número irracional e mediante una sucesión de números racionales. Además, por el corolario 2 sabemos que para dados los números racionales p y q, con $p < q$, existe un natural n tal que $n(q-p) > e$. Luego, tomando el número $x = p + \frac{e}{n}$, tenemos que $p < p + \frac{e}{n} < q$, así que $p < x < q$. Además, x es irracional, porque de no serlo, $e = n(x - p)$ tendría que ser racional. □

3.6. Completitud

En $\mathbb{R}_C$ nos encontramos con dos nociones de completitud. Por un lado tenemos la completitud asociada a la convergencia de sucesiones, que denominamos *completitud sucesional* o *completitud secuencial*, lo que supone que las sucesiones de Cauchy son convergentes. Por otro lado, está la *completitud del orden* o simplemente *completitud*, que significa que los conjuntos no vacíos acotados superiormente tienen supremo, o equivalentemente que los conjuntos no vacíos acotados inferiormente tienen ínfimo.

Con carácter general se tiene que, en un cuerpo conmutativo totalmente ordenado, la propiedad de ser completo es equivalente a que se verifiquen la propiedad arquimediana y la completitud sucesional.

Las nociones sobre sucesiones que conocemos en $\mathbb{Q}$ se trasladas de manera natural a $\mathbb{R}_C$. Diremos que una sucesión (x_n) de números reales está acotada en $\mathbb{R}_C$ si existe un $M \in \mathbb{R}_C$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_n| \leq M$. También diremos que la sucesión (x_n) de números reales tiende o converge hacia un número real x si, para cada número real $\varepsilon > 0$, existe un entero n_ε tal que para todo $n > n_\varepsilon$, se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$. Además, diremos que la sucesión de números reales (x_n) es de Cauchy si, para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_C$, $\varepsilon > 0$, existe un entero n_ε tal que las desigualdades $n > n_\varepsilon$ y $p > n_\varepsilon$ implican que $|x_n - x_p| < \varepsilon$. Por último, una sucesión de números reales tiene a lo sumo un límite, y por lo tanto, una sucesión convergente de números reales (x_n) posee sólo un límite, que será denotado como $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Veamos ahora una serie de propiedades sobre las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}_C$.

Teorema 3.17. *Toda sucesión formada por números racionales que sea de Cauchy converge hacia el número real que representa.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que representa al número $\overline{x}$, entonces, para $\varepsilon > 0$, existe un entero n_ε tal que las desigualdades $n > n_\varepsilon$ y $p > n_\varepsilon$ implican que $|x_n - x_p| < \varepsilon$, o lo que es lo mismo,

$$x_p - \varepsilon < x_n < x_p + \varepsilon$$

Tomando un p fijo, entonces, vemos que, por la definición de la relación de orden de $\mathbb{R}_C$, el número $\overline{x}$ cumple que

$$x_p - \varepsilon < \overline{x} < x_p + \varepsilon$$

para todo $p > n_\varepsilon$. Por lo tanto, (x_n) tiende a $\overline{x}$. □

El siguiente teorema nos dice que $\mathbb{R}_C$ es *sucesionalmente completo.*

Teorema 3.18. *Una sucesión de números reales es convergente en $\mathbb{R}_C$ si, y sólo si, es de Cauchy.*

Demostración. Sabemos que si una sucesión de números reales es convergente, entonces es de Cauchy. Por lo tanto, tendremos que demostrar que si una sucesión es de Cauchy, entonces es convergente en $\mathbb{R}_C$. Para ello tomemos una sucesión de Cauchy de números reales (x_n) y formemos una sucesión de racionales (y_n) lo suficientemente próxima a (x_n) para que también sea de Cauchy.

El objetivo será comprobar que la sucesión (x_n) tiende a $\overline{y} = \lim_{n\to\infty} y_n$. Para formar (y_n), tendremos en cuenta que el teorema 3.15, para cada $n \in \mathbb{N}$, nos asegura la existencia de un número racional y_n que cumple que

$$x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n} ,$$

es decir, $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$. Por otra parte, para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, existe un entero n_ε tal que las desigualdades $n > n_\varepsilon$ y $p > n_\varepsilon$ implican que $|x_n - x_p| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Utilizando las desigualdades

$$\begin{aligned} |y_n - y_p| &\leq |y_n - x_n| + |x_n - x_p| + |x_p - y_p| \\ &< |x_n - x_p| + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

, entonces, con tomar como $m_\varepsilon = sup(n_\varepsilon, \frac{1}{3\varepsilon})$, tendríamos que las desigualdades $n > m_\varepsilon$ y $p > m_\varepsilon$ implican que $|y_n - y_p| < \varepsilon$. De este modo tenemos que la sucesión (y_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

Veamos ahora que la sucesión (x_n) tiende hacia $\overline{y}$, para ello, razonando igual que en la demostración del teorema 3.17, vemos que el número $\overline{y}$ cumple que $|\overline{y} - y_p| < \varepsilon$ para $p > m_\varepsilon$. Luego, para todo $p > m_\varepsilon$ tenemos que,

$$|\overline{y} - y_p| < \varepsilon + \frac{1}{p} < \frac{4\varepsilon}{3} ,$$

por lo que, la sucesión (x_p) tiende hacia $\overline{y}$. □

El siguiente teorema dice que $\mathbb{R}_C$ es *orden completo* o simplemente *completo.*

Teorema 3.19. *Todo conjunto no vacío de $\mathbb{R}_C$ acotado superiormente tiene supremo.*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Sea λ una cota superior de A y sea k un número natural con $\lambda \leq k$. Sea h un entero con $h < \mu$, para algún $\mu \in A$.

Fijemos un natural n y consideremos la sucesión finita

$$h < h + \frac{1}{2^n} < h + \frac{2}{2^n} < h + \frac{3}{2^n} < \cdots < h + \frac{j}{2^n} < \cdots < k \ .$$

Sea x_n el menor de esos números que es cota superior de A, así que $x_n - \frac{1}{2^n}$ no es cota superior de A.

Para $m \geq n$ se tiene una sucesión similar de modo que obtenemos un x_m que cumple

$$x_n - \frac{1}{2^n} < x_m \leq x_n \ ,$$

y entonces $x_n - x_m \leq \frac{1}{2^n}$. Luego la sucesión (x_n) es de Cauchy.

Fijamos n. La sucesión (x_m) es decreciente y de Cauchy, que define un real α que verifica

$$x_n - \frac{1}{2^n} \leq \alpha \ .$$

Si α no fuera cota superior de A existiría $y \in A$ con $\alpha < y$, de modo que podemos encontrar un natural p cumpliendo

$$\frac{1}{2^p} < y - \alpha \quad \text{y} \quad x_p - \frac{1}{2^p} \leq \alpha \ ,$$

luego $x_p < y$, lo que contradice que x_p sea cota superior. Es decir, α es cota superior.

Además, α es la menor cota superior. Si hubiera otra cota superior β con $\beta < \alpha$, tendríamos

$$\frac{1}{2^p} < \alpha - \beta \quad \text{y} \quad x_p - \frac{1}{2^p} \leq \beta \ ,$$

de donde se obtiene $x_p < \alpha$, lo que es absurdo.

Es $x_m \leq x_p$, para todo $m \geq p$, luego $\alpha = (x_m) \leq x_p$, para todo p. En conclusión α es la menor cota superior de A, es su supremo. $\square$

Finalmente concluimos el resultado que culmina nuestro trabajo en este capítulo.

Teorema 3.20. *El conjunto $\mathbb{R}_C$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo, de tal forma que contiene al cuerpo de los números racionales como subcuerpo denso.*

4

Los números reales

Los dos anteriores capítulos han sido dedicados a la construcción de $\mathbb{R}$ de dos maneras bien distintas.

Primero construimos $\mathbb{R}_D$ mediante las cortaduras de Dedekind, que es una forma que esencialmente atiende a la estructura de orden de $\mathbb{Q}$.

En segundo lugar construimos $\mathbb{R}_C$ usando el método de las sucesiones de Cauchy, prestando atención a la convergencia de sucesiones.

En el presente capítulo probamos que ambas construcciones dan lugar a estructuras isomorfas, de manera que podemos definir el sistema de los números reales como cualquiera de los resultados de esas dos construcciones y escribiremos sencillamente

$$\mathbb{R} .$$

En este capítulo *cuerpo ordenado* significará cuerpo conmutativo totalmente ordenado.

4.1. Cuerpos ordenados

Recordemos que un cuerpo ordenado es un cuerpo conmutativo en el que está definido un orden total que es compatible con las operaciones.

4.1.1. El subcuerpo racional

Sea K un cuerpo ordenado. Dados $x \in K$ y n número natural, escribiremos

$$nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n} .$$

Si m es un entero negativo, entonces $mx = (-m)(-x)$, y si $m = 0$, entonces $mx = 0x = 0$.

Tomando $x = 1$, la unidad multiplicativa del cuerpo, escribiremos simplemente, para m número entero, $m = m1$. Si m es positivo significa

$$m = m1 = \underbrace{1 + \cdots 1}_{m} \ .$$

Si m es negativo, entonces

$$m = \underbrace{-1 - \cdots - 1}_{-m} \ .$$

Desde luego $0 = 0.1$, que se identifica con el neutro 0 de la suma.

Como $1 > 0$, se tiene $n+1 > n$, luego todos los naturales en K son diferentes:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < n+1 < \cdots$$

Por tanto, obtenemos que todo cuerpo ordenado es infinito.

El conjunto de los enteros puede considerarse incluido en K. Como K es cuerpo también debe contener los cocientes m/n, con m entero y n natural. Es decir, K contiene al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, que se convierte así en subcuerpo de cualquier cuerpo ordenado.

Teniendo en cuenta esa identificación hablaremos del *subcuerpo racional* $\mathbb{Q}$ de K, para todo cuerpo ordenado K.

4.1.2. Densidad

Una propiedad común a todos los cuerpos ordenados es que el orden es denso.

Teorema 4.1. *Sea K un cuerpo ordenado. Entonces el orden es denso; es decir, dados $x, y \in K$ con $x < y$, existe $z \in K$ tal que*

$$x < z < y \ .$$

Demostración. Sean $x, y \in K$ siendo $x < y$. Entonces

$$2x = x + x < x + y < y + y = 2y \ ,$$

luego

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

Se toma $z = (x + y)/2$. □

4.1.3. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de cuerpos ordenados.

Ejemplo 4.2. Todo subcuerpo infinito de un cuerpo ordenado es también un cuerpo ordenado. Por ejemplo, cualquier cuerpo que sea extensión de $\mathbb{Q}$ y subcuerpo de $\mathbb{R}$. Es el caso de

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} := \{q + r\sqrt{2} : q, r \in \mathbb{Q}\} \ .$$

Ejemplo 4.3. Sea K el cuerpo de los cocientes de polinomios con coeficientes enteros. Se dice que un cociente

$$\frac{a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots}{b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots}$$

con $a_m b_n \neq 0$, es positivo (> 0) si $a_m b_n > 0$. Resulta que K es un cuerpo ordenado.

Se tiene

$$0 < \cdots < \frac{1}{X^2} < \frac{1}{X} < 1 < X < X^2 < \cdots$$

Ejemplo 4.4. Sea K el conjunto de la series de Laurent formales de coeficientes racionales

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} r_n X^n$$

tales que como máximo un número finito de coeficientes de potencias negativas son no nulos. Se define

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} r_n X^n > 0$$

si existe i tal que $r_i > 0$ y $r_j = 0$ para todo $j \geq i$. Se tiene que K es un cuerpo ordenado.

4.1.4. Cuerpos completos

Los conceptos a los que nos referiremos ya han sido dados en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$. Aquí damos las definiciones en el ámbito de un cuerpo ordenado.

ojo con el no vacío

Comenzamos con la definición de cuerpo ordenado completo.

Definición 4.5. *Sea K un cuerpo ordenado. Se dice que K es completo si todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.*

Una forma equivalente de expresar el concepto de cuerpo ordenado completo: todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

En la definición anterior se consideran subconjuntos acotados *no vacíos*. Parece conveniente que respondamos a la pregunta ¿el conjunto vacío tiene supremo? Para fijar ideas nos situamos en el cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tales que están acotados superiormente y tienen supremos. Suponemos $\emptyset \neq A \subset B$. Es claro que $\sup A \leq \sup B$. Si extendemos esta propiedad al caso $A = \emptyset$ resultaría que el supremo del conjunto vacío, si existiera, debería ser menor que el supremo de cualquier conjunto con supremo, es decir menor que cualquier número racional. Hemos de concluir que el conjunto vacío carece de supremo pues no hay ningún número racional menor que todos los demás. Consideraciones similares pueden realizarse sobre los ínfimos.

Fijaremos nuestra atención en dos posibles propiedades de los cuerpos ordenados: ser arquimediano y ser sucesionalmente completo. Ambas conjuntamente son equivalentes a ser completo.

4.2. Cuerpos arquimedianos

Un primer resultado importante: la propiedad arquimediana de los cuerpos ordenados completos.

Definición 4.6. *Sea K un cuerpo ordenado. Se dice que K es arquimediano si para $x, y \in K$ siendo $x, y > 0$, existe un número natural n de modo que $nx > y$.*

El cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un cuerpo arquimediano.

Hay otras dos formas simples de expresar que un cuerpo ordenado es arquimediano.

Teorema 4.7. *Sea K un cuerpo ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *K es arquimediano*
2. *$\mathbb{N}$ no es acotado en K; es decir, dado cualquier $x \in K$, existe un número natural n tal que $x < n$.*
3. *La sucesión $(1/n)$ formada por los inversos de los números naturales es convergente a 0; es decir, dado $y \in K$, $y > 0$, existe un número natural n tal que $1/n < y$.*

Otra forma de expresar que un cuerpo ordenado es arquimediano se tiene en el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Sea K un cuerpo ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. K es arquimediano
2. El subcuerpo racional $\mathbb{Q}$ de K es denso en K.

Demostración. (a) Suponemos que K es arquimediano. Veamos que $\mathbb{Q}$ es denso en K.

Sean $x, y \in K$ tales que $x < y$. Suponemos primero que $x > 0$. Como $y - x > 0$, aplicamos la propiedad arquimediana y podemos asegurar que existe un natural n tal que $n(y - x) > 1$. Luego $ny > nx + 1$. Aplicamos de nuevo la propiedad aquimediana y debe existir un natural m que cumple $m > nx$. Tomamos m el menor de los que cumple esa propiedad. Entonces

$$m > nx \geq m - 1 \ ,$$

ya que $x > 0$. Luego

$$ny > nx + 1 \geq (m - 1) + 1 = m > nx \ .$$

Por tanto,

$$y > \frac{m}{n} > x \ ,$$

siendo $m/n \in \mathbb{Q}$.

Si $x \leq 0$, existe un natural p tal que $p > -x$, así que $x + p > 0$. Por la primera parte, hay un q en $\mathbb{Q}$ tal que

$$x + p < q < y + p \ .$$

Por tanto

$$x < q - p < y \ ,$$

siendo $q - p \in \mathbb{Q}$.

(b) Suponemos que $\mathbb{Q}$ es denso en K. Veamos que K es arquimediano.

Tomamos $x, y \in K$ con $0 < x < y$. Existen racionales q, r tales que

$$0 < q < x < y < r < x + y \ .$$

Como $\mathbb{Q}$ es arquimediano existe un número natural n tal que $nq \geq r$, así que

$$nx > nq \leq r > y \ .$$

Por tanto K es arquimediano. □

Teorema 4.9. *(Propiedad arquimediana de los cuerpos ordenados completos.) Sea K un cuerpo ordenado completo. Entonces K es arquimediano.*

Demostración. Consideremos $x, y \in K$ siendo $0 < x < y$. Si no existiera un número natural n tal que $y < nx$, tendríamos $y \geq nx$ para todo n, de modo que y sería cota superior del conjunto $A = \{nx : n = 1, 2, 3...\}$. Como K es completo y A es no vacío y acotado superiormente, existiría el supremo a de A. Es decir, para todo natural n resultaría $nx \leq a$. Por tanto $(n-1)x = nx - x \leq a - x$, de donde se deduciría que $a - x$ es cota superior de A, lo que contradice que a sea la mínima cota superior. □

Corolario 4.10. *Sea K un cuerpo ordenado completo. El subcuerpo racional de K es denso en K.*

Demostración. En el Teorema 4.8 se estableció la equivalencia entre las propiedades de que un cuerpo ordenado sea arquimediano y de que su subcuerpo racional sea denso.

En el Teorema 4.9 se ha probado que todo cuerpo ordenado completo es arquimediano.

Consecuentemente, en todo cuerpo ordenado completo, el subcuerpo racional es denso. □

El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ del Ejemplo 4.2 es arquimediano. No lo son los Ejemplos 4.3 y 4.4.

4.3. Cuerpos sucesionalmente completos

Las nociones de sucesión acotada, sucesión de Cauchy y de sucesión convergentes se pueden introducir de manera natural en cualquier cuerpo ordenado.

Definición 4.11. *Sea K un cuerpo ordenado. Se dice que K es sucesionalmente completo si en K toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Teorema 4.12. *(Propiedad de completitud sucesional de los cuerpos ordenados completos.) Sea K un cuerpo ordenado completo. Entonces K es sucesionalmente completo.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en K, luego es una sucesión acotada. Consideremos los conjuntos

$$X_n := \{x_m : m \geq n\} ,$$

para $n = 1, 2, 3....$ Estos conjuntos son no vacíos y acotados. Forman una sucesión decreciente

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots$$

Como K es completo, cada X_n tiene ínfimo $z_n = \inf X_n$. Observemos que la sucesión (z_n) es creciente y acotada superiormente. Sea

$$x := \sup\{z_n : n = 1, 2, 3 \cdots\} .$$

Es $x = \lim x_n$. En efecto, dado $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, resulta que existe un natural k de modo que, para $n \geq k$,

$$x - \varepsilon < x_n \leq x ,$$

lo que significa que (x_n) converge a x. □

4.4. Cuerpos ordenados completos

Teorema 4.13. *Sea K un cuerpo ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *K es completo.*
2. *K es arquimediano y sucesionalmente completo.*

Demostración. En los Teoremas 4.12 y 4.9 ha quedado establecida la implicación (1) $\Longrightarrow$ (2).

Veamos ahora (2) $\Longrightarrow$ (1). Sea A un subconjunto no vacío y acotado superiormente de K. Sea $b \in K$ una cota superior de A y sea $x \in A$. Luego $b - x \geq 0$.

Dado un número natural n, y sea K un cuerpo arquimediano, entonces, existe un natural m tal que $m/n \geq b - x$, luego

$$x + \frac{m}{n} \geq b ,$$

así que $x + m/n$ es cota superior de A. El conjunto

$$B_n := \{m \in \mathbb{N} : x + \frac{m}{n} \text{ es cota superior de } A\}$$

es no vacío y tiene un mínimo al que denominaremos m_n. Entonces

$$y_n := x + \frac{m_n}{n} \text{ es cota superior de } A .$$

Además, existe $z \in A$ tal que

$$x_n = y_n - \frac{1}{n} = x + \frac{m_n - 1}{n} \leq z .$$

Entonces resulta, para todo par de naturales m, n,

$$x_m \leq y_n \ ,$$

luego

$$x_m - x_n < y_n - (y_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \ .$$

Por tanto

$$|x_m - x_n| \leq \text{máx}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \ .$$

Por tanto, la sucesión (x_n) es de Cauchy. Como K es sucesionalmente completo, esa sucesión es convergente. Llamemos a al límite.

Veamos que $a = \sup A$. Primero probamos que es cota superior de A. Si no fuera así, existiría $x \in A$ con $a < x$. Tomamos $\varepsilon = (x - a)/2$. Entonces existe un natural n tal que

$$x_n - a \leq |x_n - a| < \frac{x-a}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} < \frac{x-a}{2} \ ,.$$

Consecuentemente

$$y_n = x_n + \frac{1}{n} < a + \frac{x-a}{2} + \frac{x-a}{2} = x \ ,$$

lo que no es posible ya que $x \in A$.

Concluimos demostrando que a es la menor de las cotas superiores de A. Si c es cota superior de A tal que $c < a$, se tendría que, para algún n,

$$a - x_n \leq |a - x_n| < a - c \ ,$$

de donde se deduce que $c < x_n \leq z$, para algún $z \in A$, lo que es imposible. □

4.4.1. Isomorfismos de cuerpos ordenados

Sean K y F cuerpos ordenados. Usaremos los mismos símbolos para indicar las operaciones y el orden en ambos: $+$, $\cdot$, $\leq$.

Un *isomorfismo* entre K y F es una aplicación biyectiva entre ambos que conserva las operaciones y el orden. Es decir, un isomorfismo es una biyección $f : K \longrightarrow F$ que verifica, para todo $x, y \in K$,

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $f(xy) = f(x)f(y)$
3. $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

Teorema 4.14. *Sean K y F cuerpos ordenados. Entonces los subcuerpos racionales de K y L son isomorfos.*

Demostración. El cuerpo racional de cualquier cuerpo ordenado es isomorfo al cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$. Luego los cuerpos racionales de todos los cuerpos ordenados son isomorfos entre sí. □

4.4.2. Unicidad de los cuerpos ordenados completos

Teorema 4.15. *Sea K un cuerpo ordenado completo y $\mathbb{Q}$ el subcuerpo racional. Sea $z \in K$ y se consideran*

$$X_z := \{q \in \mathbb{Q} : q < z \quad y \quad Y_z := \{r \in \mathbb{Q} : r > z\} \ .$$

Existen el supremo x de X_z y el ínfimo y de $_z$, y además ambos coinciden y coinciden co z:

$$\sup X_x = z = \inf_z \ .$$

Demostración. Sea $a \in \mathbb{Q}$ tal que $z - 1 < a < z$, luego X_z no es vacío y es evidente que z es cota superior de X_z. Llamamos x a su supremo: $x \leq z$. Si fuera $x < z$, existiría un $s \in \mathbb{Q}$ tal que $x < s < z$, lo que contradice que $s < z$, $s \in X_z$, as´ique $s \leq x$.

De forma análoga se prueba que $z = \inf Y_z$. □

Hemos probado que las dos construcciones $\mathbb{R}_D$ y $\mathbb{R}_C$ que hemos realizado en los capítulos anteriores dan lugar a un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y completo. Veremos ahora que se trata de estructuras isomorfas, de modo que pueden identificarse.

Presentamos un bosquejo de la demostración del próximo teorema.

Teorema 4.16. *Sean K y L cuerpos conmutativos totalmente ordenados y completos. Entonces K y L son isomorfos.*

Demostración. Sea $z \in K$. Escribimos

$$X_z := \{q \in \mathbb{Q} : q < z \quad \text{y} \quad Y_z := \{r \in \mathbb{Q} : r > z\} \ .$$

Hemos visto que $\sup X_z = z = \inf Y_z$. Denotamos esos mismos conjuntos de números racionales por X'_x y Y'_z al considerarlos como subconjunto del cuerpo L y definimos

$$z' = \sup X'_z = \inf Y'_z \in L \ .$$

La correspondencia $z \in K \longrightarrow z' \in L$ es el isomorfismo que deseamos establecer.

(1) $z \in K \longrightarrow z' \in L$ *conserva el orden.* Sean z_1, z_2 de L tales que $z_1 < z_2$. Existen racionales q, r tales que

$$z_1 < q < r < z_2 \ ,$$

luego $q \in Y_{z_1}$ y $r \in X_{z_2}$, es decir $qinY'_{z_1}$ y $r \in X'_{z_2}$, y por tanto

$$z'_1 < q < r < z'_2 \ .$$

(2) $z \in K \longrightarrow z' \in L$ *es inyectiva.* Es una consecuencia inmediata de (1), pues elementos diferentes tiene imágenes diferentes.

(3) $z \in K \longrightarrow z' \in L$ *es suprayectiva.* Vimos en (1) que realmente $q < z \Longleftrightarrow q < z'$, para q racional. Análogamente, dado u en L definimos z en K de tal forma que $q < u \Longleftrightarrow q < z$. Por tanto $X'_z = \{q\mathbb{Q} : q < u\}$. Luego

$$z' = \sup X'_z = \sup\{q\mathbb{Q} : q < u\} = u \ .$$

Es decir $z \in K \longrightarrow z' \in L$ es suprayectiva.

(4) $z \in K \longrightarrow z' \in L$ *conserva las operaciones.* Finalmente tenemos que

$$(z_1 + z_2)' = z'_1 + z'_2 \ \ , \ \ (z_1 z_2)' = z'_1 z'_2 \ ,$$

para z_1, z_2 en K. □

4.5. Números reales

El anterior teorema nos permite definir el sistema de los números reales mediante

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_D = \mathbb{R}_C \ .$$

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales.*

Damos en el siguiente teorema una nueva forma de expresar que un cuerpo ordenado es arquimediano.

Teorema 4.17. *Sea K un cuerpo ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. K es arquimediano
2. K es subcuepro de $\mathbb{R}$.

4.5.1. Cardinal de $\mathbb{R}$

Concluimos este trabajo comentando que el cardinal de $\mathbb{R}$ no es el mismo que el de $\mathbb{N}$, es decir $\mathbb{R}$ no es numerable. Se suele decir que $\mathbb{R}$ tiene la *potencia del continuo.*

Teorema 4.18. *El cardinal de $\mathbb{R}$ es*

$$card\ (\mathbb{R}) = 2^{\ card\ (\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0} > \ card\ (\mathbb{N}) \ .$$

Como consecuencia del anterior teorema tenemos que el cardinal de los números irracionales es el de $\mathbb{R}$.

A

Apéndice

Se incluyen las nociones básicas que se utilizan a lo largo de la memoria.

A.1. Conjuntos ordenados

- **Conjunto ordenado.** $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado cuando la relación $\leq$ es una *relación de orden* o simplemente un *orden*; es decir, cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- **Conjunto totalmente ordenado.** $(X, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, o el orden $\leq$ es total, si para todo x e y en X, se tiene $x \leq y$ o $y \leq x$.

Sea S un subconjunto no vacío de un conjunto ordenado X.

- **Cota superior.** Todo elemento de X que sea mayor o igual que cualquier elemento de S es una cota superior de S. Si S tiene alguna cota superior se dice que S es un subconjunto *acotado superiormente*.
- **Cota inferior.** Todo elemento de X que sea menor o igual que cualquier elemento de S es una cota inferior de S. Si S tiene alguna cota inferior se dice que S es un subconjunto *acotado inferiormente*.
- **Supremo.** Decimos que una cota superior de S es supremo de S si es la menor de todas las cotas superiores. Si el supremo está en S se denomina *máximo*.
- **Ínfimo.** Decimos que una cota inferior de S es ínfimo de S si es la mayor de todas las cotas inferiores. Si el ínfimo está en S se denomina *mínimo*.
- **Conjunto ordenado completo.** Conjunto ordenado en el que todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo y todo subconjunto acotado inferiormente tiene ínfimo, se denomina *completo*.
- **Conjunto bien ordenado.** Conjunto totalmente ordenado, no vacío, tal que todos los subconjuntos no vacíos tiene un elemento mínimo.

A.2. Estructuras algebraicas

- **Grupo.** Conjunto en el que se ha definido una operación $+$ que es asociativa, tiene neutro 0 y todo elemento x posee un *opuesto* $-X$ de modo que $x+(-x)=0$. Se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano* si la operación lo es.
- **Anillo.** Conjunto en el que se define una operación $+$ para la que es grupo conmutativo y otra $\cdot$ que es asociativa y distributiva para $+$.
- **Ideal.** Subconjunto de un anillo se denomina ideal si es anillo con las operaciones heredadas del anillo y el producto de un elemento cualquiera del anillo por uno del subconjunto está en el subconjunto.
- **Anillo cociente.** Sea A un anillo e I uno de sus ideales. Queda definida en A la relación de equivalencia $a \sim b$ si $a - b \in I$. El cociente $A/\sim$ es un anillo denominado cociente port I.
- **Ideal maximal.** Un ideal es maximal si el único ideal que lo contiene es el propio anillo.
- **Cuerpo.** Un cuerpo es un anillo en el que la operación $\cdot$ tiene elemento unidad (neutro) 1 y todo elemento no nulo x tiene inverso x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

A.3. Convergencia

Sea E un espacio métrico cuya distancia denotamos por d.

- **Convergencia.** La sucesión (x_n) en E converge a $x \in E$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 de modo que, para $n \geq n_0$ se tiene $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Se dice que x es el límite.
- **Sucesiones de Cauchy.** La sucesión (x_n) en E es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe un natural n_0 de modo que, para $m, n \geq n_0$ se tiene $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Toda sucesión convergente es de Cauchy.
- **Espacio completo.** E es completo si toda sucesión de Cauchy en E tiene límite en E.

A.4. Cuerpos ordenados

- **Cuerpo conmutativo totalmente ordenado** Un cuerpo conmutativo totalmente ordenado es un cuerpo K en el que el producto es conmutativo y en el que está definido un orden $\leq$ que es compatible con las operaciones: para $x, y, z \in K$ se tiene $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ y además $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$ cuando $z \geq 0$.
- **Cuerpo ordenado completo.** Llamaremos cuerpo ordenado completo a un cuerpo conmutativo totalmente ordenado que es completo para el orden.

Bibliografía

[1] L. W. Cohen, G Ehrlich: *The structure of the real number system.* D van Nostrand, 1963.

[2] H.-D. Ebbinghaus *et al.*: *Numbers.* Springer, 1995.

[3] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès: *Análisis.* Reverté, 1980.

[4] E. J. McShane, T. A. Botts: *Análisis Real.* Aguilar, 1970.

[5] E. Mendelson: *Number systems and the foundations of Analysis.* Academic Press, 1973.

[6] W. Rudin *Principios de Análisis Matemático* Ediciones del Castillo, 1966.

[7] M. Spivak *Calculus. Cálculo infinitesimal.* Reverté, 1970.

The construction of the real numbers

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Gustavo González Hernández
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101030968@ull.edu.es

Abstract

IN THIS WORK *the construction of real numbers is presented. We will look at two different methods: Dedekind cuts and Cauchy sequences.*

We start with the natural, integers and rational numbers. In $\mathbb{Q}$ there are "gaps", which is manifested, for example, in the impossibility of finding a rational q that solves $q^2 = 2$.

Dedekind cuts are defined as subsets of $\mathbb{Q}$, with certain special properties such that each of them defines a real number. We will finish this part by showing that $\mathbb{R}$, defined in this way, is a complete ordered field.

In the Cauchy sequences method, taking into account that $\mathbb{Q}$ is not successionally complete, each real number is defined as a class of Cauchy sequences, so that two are equivalent when the difference of both converges to 0. The set $\mathbb{R}$ thus constructed is again a complete ordered field.

The two ordered fields obtained by the two procedures are isomorphic, so that the set of real numbers is defined as either of the two structures thus obtained.

1. From natural numbers to rational numbers

THE OBJETIVE OF THIS WORK is to form the set of real numbers, starting from the natural numbers, where we carry out an extension towards the whole numbers, in order to solve the deficiencies of the sum existing in the set of natural numbers, by not possess opposite for sum. Subsequently, we take the set of integers and carry out another extension towards rational numbers, to solve the deficiencies of division, since non-zero integers, except for 1 and -1, have no inverse. At this point, we realize that the problems do not have to do with operations but rather have to do with order, because there are a series of "gaps" that make this set inefficient to solve various problems such as finding a rational q that solves $q^2 = 2$.

2. Dedekind cuts

WE WILL DEFINE DEDEKIND CUTS as subsets of $\mathbb{Q}$ that contain at least one rational number, but not all of them, such that if a number q belongs to the cut, then, any rational number less than it will belong to the cut ($p < q$). Also, this subset will not contain any maximum rational number. That is, these subsets will be open intervals from $-\infty$ to a certain point that is never reached. Using these cuts we will try to eliminate those "gaps". To do this, we will show that the set formed by all these cuts has an order relationship and follows two internal operations called addition and multiplication, which comply with the same laws that have the arithmetic of rational numbers, and therefore, we will show that it forms a complete ordered field, in such a way that it contains the set of rational numbers as a dense subfield.

3. Cauchy sequences

WE WILL USE THE METHOD OF CAUCHY SEQUENCES when we see that $\mathbb{Q}$ is not successionally complete, and that therefore, we are "missing" the limits of some Cauchy sequences. Therefore, we will define each real number as a class of Cauchy sequences, so that two Cauchy sequences are equivalent if the difference converges to 0. In other words, we will try to fill the gaps in $\mathbb{Q}$ by means of the limits of the sequences of rational numbers. To do this, we will call the set of Cauchy sequences as $\mathscr{C}$, We will define two internal operations on it, which will coincide with those of the set of $\mathbb{Q}$ and we will see that it has a ring structure. Then, we will take the ideal formed by the set of sequences that converge to 0, which we will call $\mathscr{C}_0$ and we will make the quotient ring $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$. The idea will be to show that this resulting quotient ring is a complete ordered field, in such a way that it contains the set of rational numbers as a dense subfield.

4. Real numbers

FINALLY, we will show that the two sets formed by the Dedekind cuts and the Cauchy sequences are isomorphic structures, so that the set of real numbers can be defined as either of the two sets obtained, and simply denoting $\mathbb{R}$. To do this, we will demonstrate the uniqueness of complete ordered fields.

References

[1] L. W. Cohen, G Ehrlich: *The structure of the real number system.* D van Nostrand, 1963.

[2] H.-D. Ebbinghaus *et al.*: *Numbers.* Springer, 1995.

[3] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès: *Análisis.* Reverté, 1980.

[4] E. J. McShane, T. A. Botts: *Análisis Real.* Aguilar, 1970.

[5] E. Mendelson: *Number systems and the foundations of Analysis.* Academic Press, 1973.

[6] W. Rudin *Principios de Análisis Matemático* Ediciones del Castillo, 1966.

[7] M. Spivak *Calculus. Cálculo infinitesimal.* Reverté, 1970.