

Gabriel González García

El teorema de la aplicación de Riemann

The Riemann's mapping theorem

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2020

DIRIGIDO POR

M. Alejandro Sanabria García

M. Alejandro Sanabria García
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a Alejandro Sanabria el tiempo dedicado a este trabajo, así como su profesionalidad y sus palabras motivadoras en unas de mis etapas más complicadas como estudiante. Gracias por animarme a seguir aprendiendo.

También quiero agradecer a mis padres por todo el apoyo recibido durante mi andadura en el grado, estando siempre ahí en una carrera tan exigente.

Gabriel González García
La Laguna, 9 de septiembre de 2020

Resumen • Abstract

Resumen

El principal objetivo de esta memoria es demostrar el Teorema de representación conforme de Riemann, o teorema de la aplicación de Riemann, siguiendo el espíritu de la prueba original propuesta por Riemann. La memoria se divide en tres capítulos. En el primero estudiamos las funciones holomorfas y las funciones armónicas en dominios de \mathbb{C} . Damos una descripción de los dominios simplemente conexos en términos del índice de curvas cerradas contenidas en el mismo. El problema de Dirichlet en el disco unidad admite solución única y esta puede ser representada por la integral de Poisson. Finalizamos el capítulo con el principio de Harnack para funciones armónicas positivas. El segundo capítulo se dedica al problema de Dirichlet en dominios planos. Para ello estudiaremos el método de Perron. Este método proporciona, por maximalidad, una función armónica asociada de manera natural al problema de Dirichlet en dominios arbitrarios. La convergencia al dato de frontera de la solución de Perron se presenta introduciendo el concepto de punto frontera regular. Los dominios regulares son precisamente aquellos donde es posible resolver el problema de Dirichlet. Los puntos regulares admiten a su vez barreras subarmónicas, y esto es condición suficiente para la convergencia al dato frontera. En el caso particular de dominios planos simplemente conexos es posible construir una barrera subarmónica en todo punto frontera. Para ello se emplearán propiedades de las funciones holomorfas. En el tercer y último capítulo definimos las aplicaciones conformes como aquellas que conservan ángulos en magnitud y sentido. Estas son precisamente las funciones holomorfas e inyectivas con derivada no nula. Finalizamos la memoria con las pruebas del teorema de la aplicación de Riemann y del teorema de Carathéodory. Este último sobre la extensión a la frontera de la aplicación de Riemann cuando el dominio está delimitado por una curva de Jordan.

Palabras clave: *Dominio simplemente conexo, función holomorfa, índice, función armónica, integral de Poisson, principio de Harnack, problema de Dirichlet, función subarmónica, método de Perron, aplicación conforme.*

Abstract

The main objective of this memoir is to give a proof of Riemann's conformal representation theorem, as well called the Riemann's mapping theorem, following, in spirit, the original proof proposed by Riemann. The memoir is divided into three chapters. In the first one we study holomorphic and harmonic functions in domains of \mathbb{C} . We give a description of simply connected domains in terms of the index of closed curves contained inside the domain. Dirichlet's problem in the unit disk admits a unique solution which it can be represented by the Poisson's integral of the boundary data. We end the chapter with Harnack's principle for positive harmonic functions. The second chapter is devoted to Dirichlet's problem in arbitrary bounded domains of the complex plane. We will study Perron's method. Such method provides, by maximality, a natural candidate to solution of Dirichlet's problem, namely the Perron's solution. The convergence to the boundary data is presented in terms of regular points on the boundary of the domain. Regular domains are precisely those where it is possible to solve Dirichlet's problem. A sufficient condition for a boundary point to be regular it can be given by using subharmonic barriers. In the particular case of simply connected bounded domains, the subharmonic barrier is constructed using properties of holomorphic functions. In the third and last chapter we will study conformal mappings. They are those that conserve angles both, in magnitude and in orientation. We end the memoir with the proof of Riemann's mapping theorem as well as with Carathéodory's theorem. This last one about the extension of the Riemann's map when the boundary of the domain is a Jordan curve.

Keywords: *Simply connected domain, holomorphic function, winding number, harmonic function, Poisson's integral, Harnack's principle, Dirichlet's problem, subharmonic function, Perron's method, conformal mapping.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Funciones holomorfas y funciones armónicas	1
1.1. Funciones holomorfas. Índice y homología	1
1.2. Funciones armónicas. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la ecuación de Laplace	11
1.3. El problema de Dirichlet en el disco y la integral de Poisson	14
1.4. Funciones armónicas positivas. Desigualdad y principio de Harnack	18
2. El problema de Dirichlet	21
2.1. Funciones subarmónicas	21
2.2. El principio del máximo.	22
2.3. Método de Perron	26
2.4. Funciones barrera	29
3. Los teoremas de Riemann y Carathéodory	35
3.1. Aplicaciones conformes	35
3.2. El teorema de la aplicación de Riemann	39
3.3. El teorema de Carathéodory	42
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

En esta memoria de fin de grado pretendemos demostrar, siguiendo la estrategia original sugerida por Bernhard Riemann, el teorema de representación conforme de Riemann.



Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1863. (Fuente, Wikipedia)

La historia del teorema de representación conforme de Riemann comienza en el año 1851, año en el que Riemann tantea una prueba en su tesis. Esta prueba se limitaba a dominios delimitados por una curva diferenciable a trozos. En esta prueba, Riemann relaciona la existencia de la aplicación conforme con el problema de Dirichlet. Para ello utiliza el *principio de Dirichlet*.

Principio de Dirichlet. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u(z) = g(z) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

con g continua. Entonces u es la función que minimiza la energía de Dirichlet,

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \, dx dy.$$

Estas ideas revolucionarias fueron bastante complicadas de aceptar en la comunidad matemática. Con el paso de los años esta prueba siguió recibiendo numerosas críticas hasta que en el año 1870, Weierstrass, formula un contraejemplo donde demostraba que la existencia de la función minimizante del principio de Dirichlet no era cierta generalmente.

En estos tiempos, los teoremas como este eran considerados de gran dificultad en el análisis matemático. Es más, antes del año 1912 todos los métodos que presentaban una aproximación del teorema de Riemann usaban el problema con valores de frontera de la ecuación potencial $\Delta u = 0$. Sin embargo, en este mismo año, Carathéodory fue capaz de diseñar un método en el que, dado un abierto simplemente conexo Ω , podíamos

encontrar una sucesión $\{f_n\}_n$ que converge sobre compactos a una aplicación conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. En este momento se demostraba el teorema de la aplicación de Riemann con técnicas relativamente sencillas. Finalmente, Koebe mejora la prueba que había realizado Carathéodory eliminando las superficies de Riemann que utilizaba este. En 1922 L. Fejér y F. Riesz prueban que la aplicación conforme del teorema de Riemann se podía obtener como solución de un problema que maximiza las derivadas. Esta prueba, más corta, suele ser la prueba estándar en los cursos de variable compleja, [1], [4], [9]. Otras pruebas del teorema de Riemann aparecen por ejemplo en, [7], [12], [10], [11].

Por otro lado, la unicidad del isomorfismo conforme del teorema de Riemann fue demostrado en el año 1884, por Poincaré, utilizando la existencia como única hipótesis. Sin embargo, de nuevo en 1912, Carathéodory demostró que la unicidad no era más que una consecuencia directa del Lema de Schwarz.

En la prueba de Riemann, este no sólo concluye la existencia de una aplicación conforme entre dos abiertos simplemente conexos, sino que también comenta que se puede extender a un homeomorfismo entre las clausuras de los abiertos. Como veremos en la memoria, Carathéodory desarrolla la teoría que permite demostrar este resultado, en el conocido como teorema de Carathéodory. Sobre la historia del teorema de la aplicación de Riemann, puede consultarse [2], [8], [5], [14].

La memoria la hemos estructurado en tres capítulos. En el primer capítulo introducimos las funciones armónicas. Estas comparten propiedades similares con las funciones holomorfas. Partiendo del concepto de índice de una curva cerrada regular a trozos y tomando por conocidos algunos resultados básicos del análisis complejo, estudiaremos las versiones homológicas del teorema de Cauchy y del principio del argumento. La solución del problema de Dirichlet en el disco unidad se prueba que viene representada por la fórmula integral de Poisson. Acabamos el capítulo con el principio de Harnack que estudia el comportamiento límite de sucesiones crecientes de funciones armónicas positivas.

En el segundo capítulo nos centramos en el estudio del problema de Dirichlet en dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$ arbitrarios. Emplearemos el esquema de Perron para construir, por maximalidad, una función armónica asociada al dato f . Previamente, introducimos las funciones subarmónicas y establecemos algunas de sus propiedades. La función que proporciona el método de Perron es el candidato natural a solución del problema de Dirichlet. Para ver cuándo la solución de Perron es efectivamente una genuina solución del problema de Dirichlet se introduce el concepto de punto frontera regular y función barrera local. Veremos que en dominios regulares la solución de Perron es una genuina solución. Finalizaremos con el resultado fundamental, y que ratifica la prueba original de Riemann, que garantiza que en dominios Ω simplemente conexos y acotados de \mathbb{C} siempre es posible resolver el problema de Dirichlet.

En el último capítulo demostramos los teoremas de representación conforme de Riemann y el teorema de Carathéodory. Primeramente definimos las aplicaciones conformes de \mathbb{C} . Veremos que estas localmente son las funciones holomorfas con derivada no nula. Imponiendo la condición de inyectividad global se tienen las aplicaciones conformes o biholomorfas. El teorema de representación conforme de Riemann identifica el representante canónico en la clase de dominios simplemente conexos propios de \mathbb{C} bajo biholomorfismos, el disco unidad \mathbb{D} . Finalmente veremos que si la frontera del dominio simplemente conexo y propio Ω es una curva de Jordan, la aplicación de Riemann extiende a un homeomorfismo entre sus clausuras. Las principales referencias que se ha seguido en el desarrollo de este trabajo han sido [11] [3] y [6].

Funciones holomorfas y funciones armónicas

Las funciones armónicas aparecen en la práctica como soluciones de la ecuación de Laplace

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Estas a su vez comparten propiedades similares con las funciones holomorfas. En particular, en dominios planos simplemente conexos una clase puede obtenerse a partir de la otra y viceversa. En la primera sección recordaremos resultados básicos del análisis complejo y partiendo del concepto de índice de una curva cerrada regular a trozos estudiaremos las versiones homológicas del teorema de Cauchy y del principio del argumento. En la sección 1.2 estudiaremos propiedades de las funciones armónicas en dominios planos, mientras que para el caso particular del disco unidad \mathbb{D} , en la sección 1.3, resolvemos el problema de Dirichlet. A partir de la fórmula integral de Poisson se deduce que toda función holomorfa en \mathbb{D} puede obtenerse, salvo constantes, a partir de su parte real o imaginaria. Finalizamos el capítulo estudiando la clase de funciones armónicas no negativas probando la desigualdad de Harnack y el principio de Harnack, resultado que será empleado en el desarrollo del capítulo 2. Las referencias que se han seguido en el desarrollo de este capítulo han sido: [3, Cap. 1, 6, 9 y 10], [11, Cap. 3, 7, 8 y 13], [6] y [13, Cap. 1, 2 y 4].

1.1. Funciones holomorfas. Índice y homología

Denotaremos por $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ el disco abierto de centro a y radio $r > 0$. Usaremos la notación D para discos arbitrarios, \mathbb{D} para el disco unidad y \bar{D} para la clausura de estos discos, mientras que ∂D denotará la frontera topológica.

Compactificando el plano complejo \mathbb{C} con el punto $\{\infty\}$ se obtiene la esfera de Riemann o plano complejo extendido \mathbb{C}^* . Entendemos una base de entornos de ∞ como el complemento de discos cerrados centrados en el origen,

$$\{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

Definición 1.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y consideremos la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que f es derivable en sentido complejo en $z \in \mathbb{C}$ si el límite*

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z) \tag{1.1}$$

existe. Este límite se denomina derivada de f en $z \in \mathbb{C}$. Decimos que f es holomorfa en Ω cuando es derivable en todo punto de Ω . Además, denotamos por $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω .

Observación 1.1.1 Las funciones holomorfas también se denominan **analíticas**. Puede probarse que la mera existencia del límite 1.1 implica que éstas pueden ser representadas localmente mediante serie de potencias. En virtud del teorema de Goursat [6, p. 123], se puede imponer, sin pérdida de generalidad, que $f'(z)$ sea continua en la definición 1.1.1.

Un resultado fundamental que verifican las funciones holomorfas es el principio del módulo máximo o principio del máximo.

Teorema 1.1.2 (principio del máximo) Sea Ω un abierto conexo y sea f holomorfa en Ω . Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que

$$f(z_0) = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|$$

entonces f es constante en Ω .

En particular, si f es holomorfa y no constante en Ω entonces $|f|$ no tiene máximos locales absolutos. El principio del máximo puede ser reformulado en la siguiente forma: Si f es holomorfa en Ω , entonces

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \limsup_{z \rightarrow \partial\Omega} |f(z)|,$$

donde la convergencia a la frontera de Ω la entendemos en el sentido siguiente. Una sucesión de puntos $\{z_n\} \subset \Omega$ tiende a $\partial\Omega$ si para cada compacto $K \subset \Omega$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \notin K$, para todo $n \geq n_0$. Cuando Ω es no acotado entendemos $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ de tal forma que $\{\infty\} \in \partial\Omega$. Este concepto topológico se extiende de manera natural a las aplicaciones continuas.

Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación continua entre los dominios $\Omega_i \subset \mathbb{C}$, $i = 1, 2$. Diremos que $f(z)$ tiende a $\partial\Omega_2$ cuando z tiende a $\partial\Omega_1$, si para cada compacto $K_2 \subset \Omega_2$ existe un compacto $K_1 \subset \Omega_1$ tal que si $z \notin K_1$ entonces $f(z) \notin K_2$.

Una aplicación continua $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ se dice **propia** si $f^{-1}(K) \subset \Omega_1$ es compacto cuando $K \subset \Omega_2$ es compacto.

Proposición 1.1.3 Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una aplicación propia, entonces $f(z)$ tiende a $\partial\Omega_2$ cuando z tiende a $\partial\Omega_1$.

Demostración. En efecto, sea $K \subset \Omega_2$ compacto y $w \in \Omega_2 \setminus K$. Como f^{-1} es propia, el compacto $f^{-1}(K)$ satisface la condición requerida. Basta tomar $z \in f^{-1}(w)$.

Un dominio particular de \mathbb{C} lo constituye el disco unidad \mathbb{D} . Como consecuencia del principio del máximo se observa que el crecimiento de las funciones holomorfas y acotadas en \mathbb{D} es de tipo lineal.

Teorema 1.1.4 (lema de Schwarz) Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Entonces

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D} \tag{1.2}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \quad (1.3)$$

Si se verifica la igualdad en (1.2) para algún $z \neq 0$ o la igualdad (1.3) se satisface, entonces $f(z) = cz$, donde c es una constante unimodular.

En este trabajo entenderemos por:

Definición 1.1.5 Una **curva** γ es una aplicación continua y definida de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ en \mathbb{C} .

En la memoria denominaremos indistintamente por γ , cuando esté claro por el contexto, tanto a la parametrización $\gamma(t)$, $t \in I$, como a la traza $\gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{C}$. Recordamos las siguientes definiciones:

Definición 1.1.6 Una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina **arco** si γ es inyectiva. La curva es **cerrada** si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y es **simple** si γ restringida a $[a, b)$ es inyectiva.

Definición 1.1.7 Una curva $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, se dice **regular a trozos** si $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, es continua excepto en un número finito de puntos y además x' e y' tienen límites unilaterales en los puntos singulares.

Definición 1.1.8 La curva γ se dice una **curva de Jordan o cerrada simple** si es cerrada y simple. Decimos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un **dominio de Jordan** si Ω es acotado y su frontera, $\partial\Omega$, es una curva de Jordan.

Recordamos que para curvas regulares a trozos

Definición 1.1.9 Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva diferenciable continua a trozos, definimos la **lóngitud de la curva** como

$$\ell(\gamma) = |\gamma| = \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Observación 1.1.2 En el capítulo 3 estudiaremos el problema del comportamiento frontera de la aplicación de Riemann cuando un dominio acotado está delimitado por una curva de Jordan. El **Teorema de la curva de Jordan** establece que toda curva cerrada de Jordan divide a \mathbb{C} en dos componentes conexas siendo una de ellas acotada. Además la frontera de cada una de las componentes es la curva de Jordan dada. Usaremos el teorema de Jordan (aunque no lo demostramos (ver [11, Cap 12, p. 199])) en la prueba del teorema de Carathéodory 3.3.1.

Otro resultado fundamental en variable compleja lo constituye el teorema de Cauchy.

Teorema 1.1.10 (Cauchy) Si Ω es un dominio acotado del plano con frontera regular a trozos orientada positivamente y f es una función holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$, entonces:

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

A partir del teorema de Cauchy, podemos definir la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1.1.11 (fórmula integral de Cauchy) Si Ω es un dominio acotado del plano con frontera regular a trozos orientada positivamente y f es una función holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$ entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in \Omega. \quad (1.4)$$

Observación 1.1.3 El caso particular en el que el dominio Ω es un rectángulo con lados paralelos a los ejes se conoce también como el **teorema de Cauchy-Goursat**.

Los dominios simplemente conexos en el plano son, intuitivamente, aquellos que no tienen agujeros o lo que es equivalente a que toda curva cerrada se puede contraer a un punto mediante una homotopía. Cuando estos dominios los vemos en \mathbb{C}^* , los conjuntos simplemente conexos determinan en la esfera de Riemann dos componentes conexas, el dominio y su complementario.

Definición 1.1.12 Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ se dice **simplemente conexo** si $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es conexo en \mathbb{C}^* .

En dominios simplemente conexos se verifica el siguiente teorema, que puede ser considerado como el teorema fundamental del cálculo en variable compleja y que caracteriza además a estos. Pruebas del mismo: [3, p. 24], [11, p. 69].

Teorema 1.1.13 Las siguientes afirmaciones son equivalentes para dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$.

- i) Ω es simplemente conexo.
- ii) Cada $f \in H(\Omega)$ tiene primitiva en Ω , esto es, existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.
- iii) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, para toda curva cerrada regular a trozos $\gamma \subset \Omega$.

Consideramos una curva cerrada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que no contiene al origen y sea $\Theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ una determinación continua o rama de la función argumento a lo largo de γ . Al ser γ cerrada, si denotamos por $I = [a, b]$ entonces $\Theta(a)$ y $\Theta(b)$ son argumentos del mismo punto. Por tanto

$$\Delta_{\gamma} \arg \equiv \Theta(b) - \Theta(a)$$

es un número entero múltiplo de 2π .

Definición 1.1.14 Si γ es una curva cerrada que no pasa por el origen, entonces el número entero

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg$$

se conoce como **índice de γ respecto al origen**.

En el caso de que la curva cerrada γ fuera de clase C^1 a trozos y parametrizada por:

$$\gamma(t) = R(t)e^{i\Theta(t)}, \quad t \in I$$

donde $R(t)$, $\Theta(t)$, $t \in I$, son funciones de clase C^1 a trozos. Entonces

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

En efecto, como

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = d \frac{R'(t)}{R(t)} + i\Theta'$$

entonces

$$\Re \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right) = \frac{R'(t)}{R(t)}$$

que coincide con la derivada de $\log R(t) = \log |\gamma(t)|$, pues $R(t) = |\gamma(t)|$. Así,

$$\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_a^b \Re \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right) dt + i \int_a^b \Im \left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \right) dt = \log \frac{|\gamma(b)|}{|\gamma(a)|} + i\Delta_\gamma \arg = n(\gamma, 0)$$

En términos generales, $n(\gamma, 0)$ cuenta el número de vueltas alrededor del origen que realiza una partícula moviéndose sobre la curva $\gamma(t)$. Esta cantidad es invariante bajo reparametrizaciones de la curva γ que conservan la orientación.

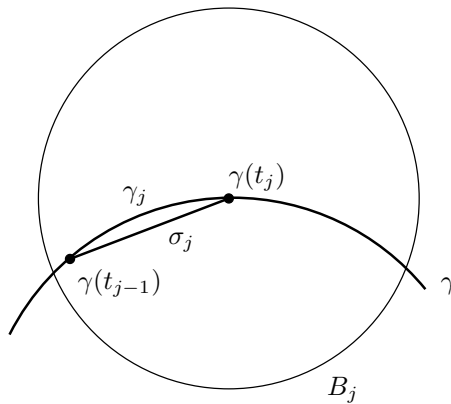
El índice de una curva cerrada γ respecto de un punto arbitrario $z \in \mathbb{C}$, no nulo, se define como $n(\gamma - z, 0)$. En el caso de que γ fuera una curva cerrada de clase C^1 a trozos parametrizada por $[a, b]$, entonces:

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \tag{1.5}$$

Queremos extender el concepto de índice para el caso en que la curva γ venga dada meramente por una parametrización continua. Con este objetivo probamos en primer lugar el siguiente lema.

Lema 1.1.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y supongamos que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es continua. Dado $\epsilon > 0$, $0 < \epsilon < \text{dist}(\gamma, \partial\Omega)$, podemos encontrar una partición finita $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ de $[0, 1]$ de manera que*

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j = \{z : |z - \gamma(t_j)| < \epsilon\} \subset \Omega.$$



Demostración. Si $0 < \epsilon < \text{dist}(\gamma, \partial\Omega)$ entonces, por la continuidad uniforme de γ , podemos elegir $\delta > 0$ de manera que $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \epsilon$ cuando $|t - s| < \delta$. Entonces, cualquier

partición finita $\{t_j\}$ que verifique

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |t_{j-1} - t_j| < \delta,$$

también verifica lo que queríamos probar.

Con la notación del lema anterior, consideramos σ como la curva poligonal $\sum_{j=1}^N \sigma_j$, donde cada σ_j es el segmento rectilíneo desde $\gamma(t_{j-1})$ hasta $\gamma(t_j)$ y denotamos por γ_j el subarco $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ de γ . Luego, $\beta_j = \gamma_j - \sigma_j$ es una curva cerrada contenida en B_j . Ahora, si γ es una curva regular a trozos y f es holomorfa en Ω , aplicando el teorema de Cauchy (1.1.10),

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{\sigma_j} f(z) dz.$$

y por tanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz. \tag{1.6}$$

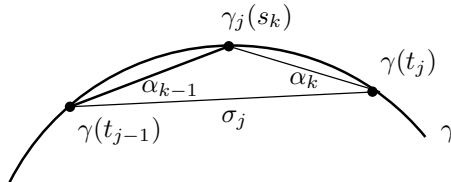
Si la curva γ no es regular a trozos usaremos (1.6) como definición de la integral. Para que la integral esté bien definida, ha de ser independiente de la curva poligonal, esto es, de la partición de $[0, 1]$.

Teorema 1.1.16 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y supongamos que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es continua. Sea σ la curva poligonal definida anteriormente. Si f es holomorfa en Ω , entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz.$$

Esta definición de la integral de línea no depende de la curva poligonal σ y coincide con la integral de línea definida para curvas regulares.

Demostración. Supongamos que σ es la curva poligonal asociada a la partición $\{t_j\}$ dada por el lema 1.1.15. Sea α la curva poligonal asociada a otra partición finita $\{s_k\}$ de $[0, 1]$ de manera que $\{t_j\} \subset \{s_k\}$. Podemos escribir ahora



$$\sigma - \alpha = \sum \beta_j,$$

donde cada $\beta_j : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una curva poligonal cerrada contenida en B_j . Nuevamente, por el teorema de Cauchy (1.1.10),

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\sigma} f(z) dz.$$

y concluimos que esta definición de la integral de línea no depende de la partición, pues dadas dos particiones cualesquiera que satisfagan las condiciones del teorema basta encontrar un refinamiento finito de ambas.

En lo que sigue, entenderemos la integración sobre curvas dadas por parametrizaciones continuas en el sentido del teorema 1.1.16.

Definición 1.1.17 Un **ciclo** $\Gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_j$ es una unión finita de curvas cerradas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Lema 1.1.18 Si Γ es un ciclo y $z \notin \Gamma$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

es un número entero.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el ciclo Γ es una curva cerrada parametrizada por una función regular a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos

$$h(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Así, $h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}$ existe, excepto en un número finito de puntos x . De esta forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{-h(x)}(\gamma(x) - z) &= -h'(x)e^{-h(x)}(\gamma(x) - z) + e^{-h(x)}\gamma'(x) \\ &= -\gamma'(x)e^{-h(x)} + \gamma'(x)e^{-h(x)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

excepto en un número finito de puntos. Ahora, como $e^{-h(x)}(\gamma(x) - z)$ es continua, debe ser constante.

Luego,

$$e^{-h(1)}(\gamma(1) - z) = e^{-h(0)}(\gamma(0) - z) = \gamma(1) - z,$$

pues γ es cerrada y $h(0) = 0$. Como $\gamma(1) - z \neq 0$ concluimos que $e^{-h(1)} = 1$ y por tanto $h(1) = 2k\pi i$, donde $k \in \mathbb{Z}$. De esta forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} h(1) = k$$

es constante.

Definición 1.1.19 Sea Γ un ciclo en \mathbb{C} . Llamamos **índice** de Γ en $z \notin \Gamma$ a

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

El índice $n(\Gamma, z)$ verifica las siguientes propiedades:

1. $n(\Gamma, z)$ es una función analítica en z , para $z \notin \Gamma$ (nótese que el integrando es holomorfo en z (ver [6, p. 121])). Además, por el lema anterior, es un número entero y, por lo tanto, $n(\Gamma, z)$ es constante en cada componente de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.
2. $n(\Gamma, z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. Asimismo, $n(\Gamma, z) = 0$ en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. En efecto:

$$n(\Gamma, z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\ell(\Gamma)}{\text{dist}(z, \Gamma)} \rightarrow 0.$$

al menos cuando $\ell(\Gamma) < \infty$. En el caso contrario, aproximando Γ por una poligonal regular a trozos (lema 1.1.15), se sigue el resultado.

3. $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$.
4. $n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) = n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z)$

Definición 1.1.20 Decimos que dos curvas cerradas Γ_1, Γ_2 son homólogas en una región Ω si

$$n(\Gamma_1 - \Gamma_2, z) = 0, \quad \text{para todo } z \notin \Omega$$

y, en este caso, escribimos $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Lema 1.1.21 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y consideremos $f \in H(\Omega)$. Entonces, existe un número finito de segmentos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ contenidos en $\Omega \setminus K$ de manera que si $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in K.$$

Demostración. Sea $\epsilon = \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ y consideremos una malla del plano formada por cuadrados de diagonal menor que ϵ , y consideremos los cuadrados J_1, \dots, J_m de esta malla que tiene intersección no vacía con K . Si ∂J_i es la frontera de J_i , orientada positivamente, consideramos $\gamma = \sum_i \partial J_i$. Una vez que se realizan todas las cancelaciones posibles, obtenemos

$$\gamma = \sum_{j=1}^N \gamma_j$$

donde cada γ_j es un lado de cada J_i y $\gamma_j \subset \Omega \setminus K$. Por tanto, para toda función continua φ en $\bigcup_j \partial J_j$ tenemos

$$\sum_{i=1}^m \int_{\partial J_i} \varphi(w) dw = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \varphi(w) dw = \int_{\gamma} \varphi(w) dw.$$

Supongamos ahora que el punto $z \in K$ no pertenece a ninguna ∂J_i . Luego, z pertenece a un único cuadrado, J_{i_0} , del conjunto J_1, \dots, J_m y aplicando el teorema 1.1.11 a la función f y el teorema de Cauchy-Goursat (ver observación 1.1.3) a la función $w \rightarrow \frac{f(w)}{w - z}$ se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{\partial J_j} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial J_{i_0}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j \neq i_0} \int_{\partial J_j} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z).$$

De esta forma, el lema ha sido probado para todo z que no pertenece a ninguna frontera ∂J_i . Para los puntos de $\bigcup_i \partial J_i$ se verifica por continuidad.

Teorema 1.1.22 (Cauchy homológico) *Sea Ω un dominio del plano y sea $\Gamma \sim 0$ respecto a Ω y $f \in H(\Omega)$, entonces*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Consecuentemente, si Γ_1 y Γ_2 son ciclos homólogos respecto de Ω y $f \in H(\Omega)$ entonces

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma \sim 0$ con respecto a Ω y consideremos $f \in H(\Omega)$. Consideremos

$$K = \Gamma \cup \{z \notin \Gamma : n(\Gamma, z) \neq 0\}$$

que es el complementario en \mathbb{C} del conjunto

$$\{z \notin \Gamma : n(\Gamma, z) = 0\}.$$

Este último conjunto es la unión de algunas componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, entre las cuales existe una no acotada que contiene a ∞ : además, K es compacto y como $\Gamma \sim 0$ con respecto a Ω sigue que $K \subset \Omega$. Tomando ahora γ como en el lema 1.1.21, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \right\} dz = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{dz}{w-z} \right\} dw.$$

Sin embargo, para $w \in \gamma$, tenemos que $w \in \Omega \setminus K$. Se concluye así que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{w-z} dz = -2\pi i n(\Gamma, w) = 0$$

Observación 1.1.4 La homología es una relación de equivalencia en las curvas de Ω . Una curva cerrada, $\gamma \subset \Omega$, se dice homóloga a 0 ($\gamma \sim 0$) en Ω si $n(\gamma, z) = 0$, para todo $z \notin \Omega$. Por el teorema de Cauchy 1.1.22, si $\gamma \sim 0$ y f es analítica en Ω , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Teorema 1.1.23 (principio del argumento) *Sea f una función meromorfa en una región Ω con ceros $\{z_j\}_j$ y polos $\{p_k\}_k$ contados con sus respectivas multiplicidades. Supongamos que Γ es un ciclo tal que $\Gamma \sim 0$ en Ω y supongamos también que $\{z_j\} \cap \Gamma = \emptyset$ y $\{p_k\} \cap \Gamma = \emptyset$. Entonces*

$$n(f(\Gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j n(\Gamma, z_j) - \sum_k n(\Gamma, p_k). \tag{1.7}$$

Demostración. La primera igualdad de la ecuación (1.7) es consecuencia del cambio de variable $w = f(z)$. Tenemos que tener en cuenta que si $\Gamma \sim 0$ y $\Gamma \subset \Omega$ entonces $n(\Gamma, z) = 0$, para todo z lo suficientemente cerca de $\partial\Omega$. De esta forma, $n(\Gamma, z_j) \neq 0$ para un número finito de z_j y un número finito de p_j ya que no existen puntos de acumulación de $\{z_j\}$ o $\{p_k\}$ en Ω . De esta forma, las sumas de la ecuación (1.7) son finitas. Definimos ahora

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \{z_j : n(\Gamma, z_j) = 0\} \cup \{p_k : n(\Gamma, p_k) = 0\}.$$

Luego, $\Gamma \sim \Omega_1$ en Ω . Ahora, si ζ es un cero o un polo de f , podemos escribir:

$$f(z) = (z - \zeta)^k g(z)$$

donde g es una función holomorfa en un entorno de ζ y $g(\zeta) \neq 0$. Luego

$$f'(z) = k(z - \zeta)^{k-1} g(z) + (z - \zeta)^k g'(z)$$

y

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - \zeta} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como $g(\zeta) \neq 0$, g'/g es holomorfa en un entorno de ζ y consecuentemente $f'/f - k(z - \zeta)^{-1}$ es holomorfa cerca de ζ . De esta forma:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum \frac{1}{z - z_j} + \sum \frac{1}{z - p_k} \quad (1.8)$$

es holomorfa en Ω_1 . Ahora, es suficiente con aplicar el teorema de Cauchy después de integrar la ecuación (1.8) sobre Γ , con lo que obtenemos (1.7).

Corolario 1.1.24 *Sea Ω un dominio acotado y f una función holomorfa en un entorno de $\overline{\Omega}$. Si $w \notin \Gamma = f(\partial\Omega)$ y suponemos además que $\partial\Omega \sim 0$ en Ω y $n(\partial\Omega, z) = 1$ para todo $z \in \Omega$ entonces:*

$$n(\Gamma, w) = N(w)$$

donde $N(w)$ denota el número de raíces de la ecuación $f(z) = w$ en Ω contadas con multiplicidades.

Demostración. Basta aplicar el principio del argumento a $g(z) = f(z) - w$. En efecto,

$$n(g(\partial\Omega), 0) = \sum_j n(\partial\Omega, z_j) = N(w)$$

donde los z_j son los ceros de g , esto es, $N(w)$ es el número de raíces de la ecuación $f(z) - w = 0$ contadas con multiplicidad.

Observación 1.1.5 *Bajo las hipótesis del corolario 1.1.24 es posible probar (ver [3, p.128]) que $f(\overline{\Omega})$ puede describirse a partir de Γ y aquellas componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ que tienen índice no nulo respecto de Γ .*

Finalizamos la sección caracterizando los dominios simplemente conexos en términos de homología de curvas.

Teorema 1.1.25 *Una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexa si, y solo si, todo ciclo en Ω es homólogo a 0 en Ω . Si Ω no es simplemente conexo, podemos encontrar una curva poligonal simple cerrada contenida en Ω que no es homóloga a 0.*

Demostración. Supongamos que Ω es simplemente conexo y sea Γ un ciclo contenido en Ω . El conjunto $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es conexo y está contenido en la componente conexa de $\mathbb{C}^* \setminus \Gamma$ que contiene el punto del infinito y por tanto $n(\Gamma, z) = 0$ para $z \notin \Omega$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbb{C}^* \setminus \Omega = A \cup B$, donde A, B son conjuntos cerrados y no vacíos en \mathbb{C}^* con $A \cap B = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\infty \in B$. Como A es cerrado, podemos encontrar un entorno de ∞ que tiene intersección vacía con A . Luego A está acotado y es por tanto compacto. Tomamos $z_0 \in A$ y construimos una curva poligonal $\Gamma_0 \subset \Omega$ de manera que $n(\Gamma_0, z_0) \neq 0$. Para ello sea

$$d = \text{dist}(A, B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Si $B = \{\infty\}$ tomamos $d = 1$. Cubrimos el plano con cuadrados de tamaño $d/2$ de manera que z_0 sea el centro de uno de ellos. Consideremos en cada cuadrado la orientación positiva. Orientamos la frontera de cada cuadrado S_j con la orientación habitual y tomamos los cuadrados S_j que satisfacen $\bar{S}_j \cap A \neq \emptyset$. Sea Γ_0 el ciclo obtenido a partir de $\cup \partial S_j$ después de realizar todas las cancelaciones posibles. Entonces $\Gamma_0 \subset \Omega$, pues Γ_0 tiene intersección vacía tanto con A como con B . Además $n(\Gamma_0, z_0) = 1$. Ahora, como Γ_0 es unión finita de curvas poligonales simples y cerradas, al menos una de estas curvas no es homóloga a 0.

1.2. Funciones armónicas. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la ecuación de Laplace

Definición 1.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\Omega)$. Decimos que u es armónica si satisface la ecuación de Laplace*

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

Algunos ejemplos de funciones armónicas definidas en dominios de \mathbb{C} vienen dados por $\Re f$ y $\Im f$ para $f \in H(\Omega)$. Para probar esta afirmación recordamos en primer lugar las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

Teorema 1.2.2 *Sea $f = u + iv$ una función definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si, y sólo si, las funciones $u = \Re f, v = \Im f$ son diferenciables en z_0 y sus derivadas parciales verifican:*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{1.9}$$

Además,

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0)$$

Demostración. En primer lugar, si f es holomorfa

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik} = \frac{1}{i} f_y(x, y) = v_y(x, y) - iv_x(x, y) \end{aligned}$$

Por tanto se verifica (1.9). Recíprocamente, si u y v satisfacen (1.9) entonces, por el teorema de Taylor aplicado a las funciones reales u y v

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = hu_x(x, y) + kv_y(x, y) + i(hv_x(x, y) + kv_y(x, y)) + r(h, k),$$

donde $|r(h, k)| \leq c\sqrt{|h|^2 + |k|^2}$ cuando $|h|, |k| \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.9) sigue

$$\lim_{\sqrt{|h|^2 + |k|^2} \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{h+ik} = u_x(x, y) - iv_y(x, y).$$

Por tanto $f'(z)$ existe (además es continua), esto es, f es holomorfa.

Proposición 1.2.3 *Si la función f es holomorfa en Ω , entonces $u = \Re f$ y $v = \Im f$ son funciones armónicas en Ω .*

Demostración. Como f es holomorfa, verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.9). Derivando respecto de x e y respectivamente, se obtiene que $u_{xx} = v_{yx}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$. Ahora, como $v \in C^2(\Omega)$ se sigue que $v_{xy} = v_{yx}$. De esta forma

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

La demostración para v es análoga.

Se verifica además el recíproco. Lo enunciamos sin demostración. En la proposición 1.2.10 veremos que esta propiedad se verifica en general en dominios simplemente conexos.

Proposición 1.2.4 *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armónica. Entonces u es localmente la parte real de una función holomorfa.*

Corolario 1.2.5 *Toda función armónica es de clase C^∞ .*

Teorema 1.2.6 (principio de identidad) *Sean f y g funciones armónicas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $f = g$ en un abierto no vacío U en Ω , entonces $f = g$ en todo Ω .*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $g = 0$. Tomemos $t = f_x - if_y$. Siguiendo la proposición 1.2.3 sabemos que t es holomorfa en Ω y $t = 0$ en Ω , ya que $f = 0$ en este dominio. Aplicando el principio de identidad para funciones holomorfas se sigue que $t = 0$ en todo Ω , con lo que $f_x = 0$ y $f_y = 0$ en Ω . Por lo tanto, f es constante en Ω y como $f = 0$ en Ω esta constante debe ser cero.

La siguiente propiedad, que es consecuencia inmediata de la fórmula de Cauchy, caracteriza las funciones armónicas.

Teorema 1.2.7 (propiedad del valor medio.) *Sea u una función armónica en el disco abierto $D(z, r)$. Entonces:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Demostración. Tomemos $r > 0$ de manera que u es armónica en $D(z, r)$. Aplicando la proposición (1.2.10) sabemos que existe una función holomorfa f en $D(z, r)$ tal que $u = \Re f$. Por la fórmula integral de Cauchy (1.4) se sigue que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \, d\theta.$$

Es suficiente tomar la parte real de cada parte para llegar al resultado que buscábamos.

Proposición 1.2.8 Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dos abiertos, sea f una función holomorfa en Ω_1 y supongamos que $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y supongamos también que $u \in H(\Omega_2)$. Entonces $u \circ f$ es una función armónica en Ω_1 . Esto es, la composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica.

Demostración. Vamos a ver que $u \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$, para todo $a \in \Omega_1$. Fijamos a y tomamos $b = f(a)$ y $r > 0$ de manera que $D(b, r) \subset \Omega_2$. Ahora, como u es armónica sabemos que existe una función holomorfa, g , en $D(b, r)$ tal que $\Re g(z) = u(z)$. Como f es abierta, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $f(D(a, \delta)) \subset D(b, r)$. Podemos asegurar entonces que $g \circ f|_{D(a, \delta)}$ es holomorfa en $D(a, \delta)$ y también $\Re(g \circ f|_{D(a, \delta)}) = u \circ f|_{D(a, \delta)}$ por lo que concluimos que $u \circ f$ es armónica.

Definición 1.2.9 Sea $u \in H(\Omega)$. Si existe $v \in H(\Omega)$ de manera que $f = u + iv$ es holomorfa, se dice que v es una función **armónica conjugada** de u en Ω .

Proposición 1.2.10 Si u es una función armónica en un dominio simplemente conexo Ω entonces $u = \Re f$ para alguna función f holomorfa en Ω . Además, f es única salvo constantes.

Demostración. Supongamos $u = \Re f$ para alguna función holomorfa $f = u + iv$. Como u es una función armónica en Ω

$$f' = u_x + iv_x = u_x - iu_y. \tag{1.10}$$

De esta forma, si existe f , su derivada f' está completamente determinada por u , con lo que f es única salvo constantes. En base a la ecuación (1.10) definimos $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$g = u_x - iu_y.$$

Así, $g \in C^1(\Omega)$ y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann ya que

$$u_{xx} = -u_{yy} \text{ y } u_{xy} = u_{yx}.$$

Por tanto g es holomorfa en Ω . Fijamos ahora $z_0 \in \Omega$ y definimos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$f(z) = u(z_0) + \int_{z_0}^z g(w)dw,$$

donde la integral se toma desde cualquier camino en Ω que una z_0 con z . Ahora, como Ω es simplemente conexo, aplicando el teorema 1.1.13, la integral es independiente del

camino escogido. Sigue así que f es holomorfa en Ω y $f' = g = u_x - iu_y$. Escribiendo $\tilde{u} = \Re f$ tenemos que

$$\tilde{u}_x - i\tilde{u}_y = f' = u_x - iu_y$$

de manera que $(\tilde{u} - u)_x \equiv 0$ y $(\tilde{u} - u)_y \equiv 0$. De esta forma, $(\tilde{u} - u)$ es constante en Ω y tomando $z = z_0$ se concluye que la constante es cero. Queda probado así que $u = \Re f$.

Definición 1.2.11 *Si g es holomorfa en un dominio Ω y si $f = e^g$, entonces g se conoce como logaritmo de f en Ω y se denota como $g(z) = \log f(z)$. La función g está unicamente determinada por su valor en un punto $z_0 \in \Omega$.*

Finalizamos probando que en todo dominio simplemente conexos se pueden definir logaritmos holomorfos de función holomorfa y sin ceros en Ω .

Corolario 1.2.12 *Toda función f holomorfa y no nula en un dominio simplemente conexo $\Omega \in \mathbb{C}$ tiene logaritmo en Ω .*

Demostración. Tomamos $h = \log |f|$, que es armónica en Ω ya que f es holomorfa y no nula. Ahora, por la proposición (1.2.10) existe una función g holomorfa en Ω de manera que $h = \Re g$. En otras palabras, $fe^{-g} = 1$ en Ω . Aplicando ahora el principio del máximo 1.1.2 para funciones holomorfas se sigue que fe^{-g} es una constante, C . Es suficiente con añadir una constante adecuada a g y tomar $C = 1$ para poder concluir que $f = e^g$.

1.3. El problema de Dirichlet en el disco y la integral de Poisson

El problema de Dirichlet consiste en encontrar una función armónica en un dominio Ω prefijando los valores frontera. En el capítulo 2 veremos que tiene solución en dominios simplemente conexos acotados del plano.

Definición 1.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El problema de Dirichlet consiste en encontrar una función $u(z)$ armónica en Ω tal que*

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = f(\zeta),$$

para todo $\zeta \in \partial\Omega$.

Como consecuencia del principio del máximo 1.1.2, las soluciones para el problema de Dirichlet (1.3.1) verifican el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El problema de Dirichlet con dato de frontera f tiene a lo sumo una única solución.*

Demostración. Es consecuencia directa del principio del máximo para funciones armónicas, pues si u y v son soluciones del problema de Dirichlet, $u - v = 0$ en $\partial\Omega$, luego $u = v$.

La existencia de soluciones para el problema de Dirichlet es, en general, un problema difícil para dominios arbitrarios $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sin embargo, cuando el dominio es un disco, podemos resolverlo explícitamente.

Definición 1.3.3 Se define el *núcleo de Poisson* en \mathbb{D} a la función

$$P(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad |z| < 1, \quad |\zeta| = 1.$$

Definición 1.3.4 Dada una función continua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, se define la *integral de Poisson* en \mathbb{D} de f como

$$P(f)(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} P(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta \tag{1.11}$$

Teorema 1.3.5 (Schwarz) Para toda función continua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, se verifica que $P(f)$ es armónica en \mathbb{D} y además

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} P(f)(z) = f(\zeta), \quad |z| < 1, \quad |\zeta| = 1.$$

Demostración. Denotamos $\zeta = e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. La función

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} f(e^{i\theta}) dt$$

es holomorfa en \mathbb{D} . Basta desarrollar el núcleo, resultado en serie geométrica

$$\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 + e^{i\theta}z}{1 - e^{i\theta}z} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} e^{-ni\theta} z^n,$$

e intercambiar el orden entre la suma y la integral. Ahora, la identidad

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \Re \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right)$$

muestra que $P(f)(z) = \Re G$ con lo que $P(f)(z)$ es armónica. Nótese que si $f \equiv 1$, luego $G \equiv 1$ ya que $\int e^{-int} dt = 0$ si $n \neq 0$. De esta forma, para todo $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} dt = 1 \tag{1.12}$$

Veamos ahora que

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} P(f)(z) = f(\zeta), \quad |z| < 1, \quad |\zeta| = 1.$$

Para ello, fijamos ζ_0 y $\epsilon > 0$ y tomamos $\delta > 0$ de manera que $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| < \epsilon$ si $\zeta = e^{i\theta}$ y $\theta \in I_\delta = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta\}$. Ahora, usando (1.12) sigue que

$$\begin{aligned} |P(f)(z) - f(\zeta_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} (f(\zeta) - f(\zeta_0)) dt \right| \\ &\leq \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{I_\delta} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta + M(z) \int_{[0, 2\pi] \setminus I_\delta} |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\theta_0})| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

pues se verifica (1.12) y además si

$$M(z) = \sup_{\{\theta: |\theta - \theta_0| \geq \delta\}} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2},$$

se tiene que $M(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow e^{i\theta_0}$, ya que $|e^{i\theta} - z|$ está acotada inferiormente por δ . De esta forma, $u(z) \rightarrow f(e^{i\theta_0})$ cuando $z \rightarrow e^{i\theta_0}$.

Como consecuencias de este teorema:

Corolario 1.3.6 Si u es una función armónica en \mathbb{D} y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces $u = P(u|_{\partial\mathbb{D}})$.

Demostración. Sea $U(z) = P(u|_{\partial\mathbb{D}})$. Por el teorema de Schwarz se sigue que $u - U$ es armónica en \mathbb{D} , continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y vale 0 en $\partial\mathbb{D}$. Ahora, por el principio del máximo aplicado a $u - U$ y $U - u$ obtenemos que $u = U$.

Corolario 1.3.7 Si u es una función armónica en \mathbb{D} y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta$$

es la única función holomorfa en \mathbb{D} que satisface $\Re f = u$ y $\Im f(0) = 0$.

Demostración. Por la primera parte de la demostración del teorema de Schwarz 1.1.4, f es holomorfa. La parte real de f es igual a u , por el corolario 1.3.6. Si g es otra función holomorfa de manera que $\Re g = u$, entonces $f - g$ es imaginario puro, con lo que no puede ser una aplicación abierta. Luego, $f - g$ es constante. Finalmente, se tiene que

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt$$

es real por lo que si $g(0)$ es real, $f = g$.

Observación 1.3.1 La función

$$\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$$

se denomina núcleo de Herglotz.

Observación 1.3.2 El núcleo de Poisson en el disco arbitrario $D = \{|z - c| = r\}$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ viene dado por

$$P_D = \frac{1 - |(z - c)/r|^2}{|\zeta - (z - c)/r|^2}, \quad |z - c| < r, \quad |\zeta - c| = r.$$

En efecto, basta aplicar el cambio de variable $z = \frac{z - c}{r}$.

Teorema 1.3.8 Supongamos que la función continua $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica la propiedad de la media

$$f(0) = \int_{\partial\mathbb{D}} u(r\zeta) d\zeta, \quad 0 < r < 1.$$

Entonces f es armónica en \mathbb{D} .

Demostración. Es suficiente ver que f es armónica en un disco abierto D con $\overline{D} \subset \mathbb{D}$. Definimos ahora $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$g = \begin{cases} f - P_D f, & \text{en } D \\ 0, & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Sigue entonces que g es continua en \overline{D} y verifica localmente la propiedad del valor medio en D . Además, \overline{D} es compacto, con lo que g toma su valor máximo, M , en algún punto de \overline{D} . Definimos:

$$A = \{z \in D : g(z) < M\}$$

$$B = \{z \in D : g(z) = M\}$$

Ahora A es abierto, ya que g es continua. Por otro lado, B también es abierto ya que si $g(w) = M$, la propiedad del valor medio obliga a g a ser igual a M en todo en todos los círculos lo suficientemente pequeños que rodean a w . Ahora, como A y B son abiertos conexos cuya unión es D , sigue que o bien $A = D$, en cuyo caso g alcanza su máximo en ∂D y $M = 0$, o bien $B = D$, con lo que $g \equiv M$ y también $M = 0$. De esta forma, $g \leq 0$ y empleando un razonamiento similar $g \geq 0$. Por lo tanto, concluimos que $f = P_D f$ en D y como $P_D f$ es armónica se sigue que f también lo es.

Definición 1.3.9 Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simétrico respecto a \mathbb{R} si $\bar{z} \in \Omega$ cuando $z \in \Omega$.

Si Ω es un dominio simétrico respecto a \mathbb{R} y $f(z)$ es una función holomorfa en Ω , entonces $\overline{f(\bar{z})}$ también es holomorfa en Ω . Si además se tiene que $f(z) \in \mathbb{R}$ cuando $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$, por el principio de indentidad

$$f(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}.$$

Teorema 1.3.10 (principio de reflexión de Schwarz) Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio simétrico respecto a \mathbb{R} . Sean $\Omega^+ = \Omega \cap \{\Im z > 0\}$ y $\Omega^- = \Omega \cap \{\Im z < 0\}$. Si la función v es armónica en Ω^+ , continua en $\Omega^+ \cup (\Omega \cap \mathbb{R})$ entonces la función definida por

$$V(z) = \begin{cases} v(z), & z \in \Omega \setminus \Omega^- \\ -v(\bar{z}), & z \in \Omega^- \end{cases}$$

es armónica en Ω . Si además $v(z) = \Im f(z)$, donde $f(z)$ es holomorfa en $\Omega \cap \{\Im z > 0\}$, entonces la función

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

extiende a una función holomorfa en Ω .

Demostración. Se tiene que V es una función continua en Ω . Para probar el primer resultado es suficiente con probar que V verifica la propiedad del valor medio para círculos suficientemente pequeños centrados en $\Omega \cap \mathbb{R}$. Sin embargo, para $x_0 \in \mathbb{R} \cap \Omega$,

$$V(x_0 + re^{it}) = -V(x_0 + re^{-it})$$

con lo que el valor medio sobre un círculo centrado en x_0 contenido en Ω es cero, al igual que el valor de V en x_0 . De esta forma concluimos que V es armónica en Ω .

Por otra parte, supongamos que $v = \Im f$, donde f es holomorfa en Ω^+ . Si D es un disco contenido en Ω y centrado en \mathbb{R} entonces $V = \Im h$ para alguna función h holomorfa en D que además está determinada de forma única si exigimos que $h = f$ en $\Omega^+ \cap D$. Por tanto podemos concluir que

$$h(z) = \overline{h(\bar{z})}$$

en D y también $h = g$ en $D \cap \Omega \setminus \mathbb{R}$. De esta forma, h proporciona la única extensión holomorfa de g a todo D , con lo que g se extiende para ser holomorfa en Ω .

Corolario 1.3.11 *Si la función f en el teorema de reflexión de Schwarz es además inyectiva en Ω^+ y $\Im f > 0$ en Ω^+ entonces la extensión $g(z)$ también es inyectiva.*

Demostración. Por definición se tiene que g es inyectiva en Ω^- con $\Im g < 0$ en Ω^- . Por tanto si $g(z_1) = g(z_2)$, entonces $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Dado que g es abierta, transforma discos suficientemente pequeños centrados en z_j , $j = 1, 2$, en un entorno de $g(z_1) = g(z_2)$. Si $z_1 \neq z_2$ entonces existen dos puntos $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega^+$, cerca de z_1, z_2 respectivamente, con $g(\zeta_1) = g(\zeta_2)$. Esto contradice la hipótesis de que f es inyectiva en Ω^+ .

Definición 1.3.12 *Sea $I = (0, 1)$. Un arco analítico y abierto contenido en la frontera de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice un **arco con un único lado** si existe una función g holomorfa e inyectiva en un entorno \mathcal{U} de I verificando $g(I) = \gamma$, $g(\mathcal{U} \cap \{\Im z > 0\}) \subset \Omega$ y $\mathcal{U} \setminus \{\Im z \geq 0\} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si $g(\mathcal{U} \setminus I) \subset \Omega$ entonces γ se denomina **arco con doble lado**.*

Corolario 1.3.13 *Sea Ω un dominio simplemente conexo y supongamos que $\gamma \subset \partial\Omega$ es un arco con un solo lado. Sea f una aplicación conforme de Ω en \mathbb{D} . Entonces f extiende a una función holomorfa e inyectiva en un entorno de $\Omega \cup \gamma$.*

Demostración. En primer lugar $f : \Omega \rightarrow D$ es un homeomorfismo luego una aplicación propia. Usando la proposición 1.1.3, $|f(z)| \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow \partial\Omega$.

Si $\gamma \neq \partial\Omega$ elegimos g y U como en la definición 1.3.12. Luego, $f \circ g$ es holomorfa en $I \cap \Im z$. Reduciendo I si fuera necesario, podemos suponer que I es simétrico sobre \mathbb{R} , $I \cap \Im z$ es simplemente conexo y $f \circ g \neq 0$ en I . Ahora, podemos definir $h = i \log f \circ g$, que es holomorfa en $I \cap \Im z$ y además

$$\lim_{z \in I \rightarrow (0,1)} \Im h(z) = \lim_{z \in I \rightarrow (0,1)} -\log |f(g(z))| = 0.$$

Luego, aplicando el corolario 1.3.11, h extiende de manera inyectiva y holomorfa en I . Luego f extiende también a una función inyectiva y holomorfa en $\Omega \cup g(I)$.

1.4. Funciones armónicas positivas. Desigualdad y principio de Harnack

Las funciones armónicas no negativas no pueden crecer demasiado rápido en el disco unidad como muestra el siguiente resultado, conocido como la **desigualdad de Harnack**.

Teorema 1.4.1 *Supongamos que u es una función armónica positiva en \mathbb{D} . Entonces*

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right) u(0) \leq u(z) \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right) u(0).$$

para $|z| = r$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u es una función armónica en $\overline{\mathbb{D}}$ (basta reemplazar u por $u(sz)$, $s < 1$, y tomar límite cuando $s \rightarrow 1$). Como u satisface la fórmula integral de Poisson, estimamos primeramente el núcleo de Poisson:

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1-r^2}{(1+r)^2} \leq \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \frac{1+r}{1-r}$$

Ahora, como u es positiva y verifica la propiedad del valor medio sigue que:

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right) u(0) \leq \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right) u(0)$$

y por tanto

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right) u(0) \leq u(z) \leq \left(\frac{1+r}{1-r}\right) u(0).$$

Observación 1.4.1 Sea $D = D(z, R)$ un disco arbitrario. Mediante una traslación y dilatación del disco podemos concluir

$$\left(\frac{R-r}{R+r}\right) u(z_0) \leq u(z_0 + re^{i\theta}) \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right) u(z_0).$$

para u armónica positiva en D

Como consecuencia de la desigualdad de Harnack se tiene el teorema de Liouville.

Teorema 1.4.2 (Teorema de Liouville.) Toda función armónica en \mathbb{C} acotada (superior o inferiormente) es constante.

Demostración. Es suficiente con demostrar que toda función armónica positiva f en \mathbb{C} es constante. Tomando $z \in \mathbb{C}$ y definiendo $r = |z|$ y $R > r$ se tiene que, aplicando la desigualdad de Harnack a f en $\Delta(0, R)$,

$$f(z) \leq \frac{R+r}{R-r} f(0).$$

Haciendo que $R \rightarrow \infty$, se sigue que $f(z) \leq f(0)$. Así, f alcanza un máximo en 0 y, por el principio del máximo, f es constante.

Teorema 1.4.3 (desigualdad de Harnack.) Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $K \Subset \Omega$ un conjunto relativamente compacto. Entonces existe una constante C que depende únicamente de Ω y de K tal que si u es armónica y positiva en Ω , entonces

$$\frac{1}{C} u(w) \leq u(z) \leq C u(w), \quad \text{para todo } z, w \in \Omega. \tag{1.13}$$

Demostración. Si D es un disco, denotamos por $2D$ al disco con el mismo centro que D y el doble de radio. Supongamos entonces que D es un disco de manera que $2D \subset \Omega$ y sea

φ una aplicación lineal de \mathbb{D} sobre $2D$. Entonces, por la desigualdad de Harnack aplicada a $u \circ \varphi$, concluimos que (1.13) se cumple para $z \in D$ y w como el centro de D , tomando $C = 3$. Por tanto, (1.13) se verifica para $z, w \in D$, con $C = 9$. Cubrimos K por una colección finita de discos $\mathcal{B} = \{D_j\}$ con $2D_j \subset \Omega$. Añadimos los discos necesarios para que $\cup D_j$ sea conexa. Si $D_j, D_k \in \mathcal{B}_j$ con $D_j \cap D_k \neq \emptyset$ entonces (1.13) se sigue verificando, para $C = 81$. Como tenemos un número finito de discos y como su unión es conexa, (1.13) se mantiene en $\cup\{D_j : D_j \in \mathcal{B}\}$ y, por lo tanto, en K . Además, C solo va a depender del número de discos en \mathcal{B} y no en u .

Finalizamos el capítulo con el principio de Harnack. Sucesiones monótonas crecientes de funciones armónicas o bien divergen o bien convergen a una función armónica.

Teorema 1.4.4 (principio de Harnack) *Supongamos $\{u_n\}$ una sucesión creciente de funciones armónicas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces se verifica la siguiente alternativa:*

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) \equiv u(z)$ existe y es armónico en Ω , o bien
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z) = \infty$.

Demostración. Por suposición, si $n > m$ entonces $u_n - u_m \geq 0$ y, por el principio del máximo, $u_n - u_m$ es estrictamente positiva o idénticamente 0. Fijando $z_0 \in K$, donde K es un compacto, por el teorema 1.4.3, existe una constante C de manera que:

$$\frac{1}{C}(u_n(z_0) - u_m(z_0)) \leq u_n(z) - u_m(z) \leq C(u_n(z_0) - u_m(z_0))$$

para todo $z \in K$. Así, $\{u_n(z_0)\}$ es de Cauchy si, y solo si, $\{u_n\}$ es uniformemente de Cauchy en K . Por lo tanto, si la sucesión creciente $\{u_n(z_0)\}$ converge, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos cerrados de Ω . Del mismo modo, si $u_n(z_0) \rightarrow \infty$ entonces $u_n(z) \rightarrow \infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω . De esta forma, por la propiedad del valor medio, u es armónica.

El problema de Dirichlet

En este capítulo nos centramos en el estudio del problema de Dirichlet en dominios $\Omega \subset \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in \Omega \\ u(\zeta) = f(\zeta), & z \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

para funciones f continuas en $\partial\Omega$. Emplearemos el esquema de Perron para construir, por maximalidad, una función armónica asociada al dato f . Previamente, introducimos las funciones subarmónicas y establecemos algunas de sus propiedades. La función que proporciona el método de Perron es el candidato natural a solución de (2.1). Para ver cuándo la solución de Perron es efectivamente una solución de (2.1) se introducirá el concepto de punto regular y función barrera local. Veremos que en dominios regulares la solución de Perron es una genuina solución de (2.1). Finalizaremos con el resultado fundamental, y que emplearemos en el capítulo 3, que garantiza que (2.1) siempre admite solución en dominios Ω simplemente conexos y acotados de \mathbb{C} . Las referencias que se han seguido en el desarrollo de este capítulo han sido: [3, Cap. 9], [11, Cap. 7 y 13], [6, Cap. 9 y 15] y [13, Cap. 2].

2.1. Funciones subarmónicas

Definición 2.1.1 *Sea $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ una función continua. Decimos que u es subarmónica si para todo $z_0 \in \Omega$, existe $\epsilon = \epsilon(z_0) > 0$ tal que $u(z)$ verifica la **propiedad del valor medio***

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta, \quad 0 < r < \epsilon. \quad (2.2)$$

Observación 2.1.1 La desigualdad (2.2) es conocida también como la desigualdad del valor medio o subpropiedad del valor medio. En esta memoria nos referiremos a ella, tanto en el contexto de funciones armónicas como subarmónicas, como la propiedad del valor medio. Nótese que en la definición 2.1.1 se permite que una función subarmónica puede tomar el valor $-\infty$, pero no $+\infty$. La desigualdad de valor medio se verifica trivialmente para cada z tal que $u(z) = -\infty$. Además si u es continua y $u(z) > -\infty$ entonces u está acotada en algún entorno \mathcal{U} de z y la integral en (2.2) está bien definida. En otro caso entenderemos la integral como límite de la integral de la sucesión de truncamientos inferiores

$$u_n(z) = \max\{-n, u(z)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta.$$

puediendo además tomar el valor $-\infty$.

Ejemplos 2.1.2 Obviamente toda función armónica en Ω es subarmónica. Además, si u es armónica, verifica la propiedad de la media

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta,$$

luego

$$|u(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0 + re^{i\theta})| \, d\theta.$$

Por tanto $|u|$ es subarmónica en Ω . Podemos concluir además que dada f holomorfa en Ω , $|f|$ y $\log |f|$ son subarmónicas en Ω . Como $\log |f| = \Re \log f$ y $\log f$ es una función holomorfa en cada punto donde $f \neq 0$ sigue que $\log |f|$ es armónica en $\Omega \setminus \{f = 0\}$. Esto prueba que $\log |f|$ está en las hipótesis de la definición 2.1.1 y concluimos que es subarmónica en Ω .

Proposición 2.1.2 Si $u_1(z)$ y $u_2(z)$ son funciones subarmónicas en el dominio Ω , entonces:

- i) $u_1(z) + u_2(z)$ es subarmónica.
- ii) $c u_1(z)$ es subarmónica para toda constante $c \geq 0$.
- iii) $v(z) = \max\{u_1(z), u_2(z)\}$ es subarmónica.

Demostración. Tanto i) como ii) son evidentes a partir de la propia definición 2.1.1. Veamos iii). Supongamos que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ y, sin pérdida de generalidad, $u_1(z) > u_2(z)$. Entonces

$$u_j(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta, \quad j = 1, 2,$$

y por lo tanto, $v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta$.

2.2. El principio del máximo.

Tanto las funciones holomorfas como las funciones armónicas satisfacen el principio del máximo, un resultado fundamental en ambas clases de funciones. En esta sección veremos que las funciones subarmónicas satisfacen también el principio del máximo y estudiaremos sus consecuencias.

Teorema 2.2.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y u una función subarmónica en Ω . Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que

$$u(z_0) = \sup_{z \in \Omega} u(z) \tag{2.3}$$

entonces u es constante.

Demostración. Supongamos que (2.3) se verifica. Definimos el conjunto

$$A = \{z \in \Omega : u(z) = u(z_0)\}.$$

Por hipótesis, A es no vacío ya que $z_0 \in A$. Además, como u es continua el conjunto A es cerrado. Veamos que A es abierto. Para ello, tomamos $z_1 \in A$ y consideramos un disco $\overline{D}(z_1, r_{z_1}) \subset \Omega$. Para $0 < r < r_{z_1}$,

$$u(z_1 + re^{i\theta}) \leq u(z_1)$$

por hipótesis. Por tanto

$$u(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1 + re^{i\theta}) \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1) \, d\theta \leq u(z_1).$$

Obtemos

$$u(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1 + re^{i\theta}) \, d\theta,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(z_1) - u(z_1 + re^{i\theta})) \, d\theta = 0.$$

Como el integrando es positivo, sigue que

$$u(z_1) = u(z_1 + re^{i\theta}), \text{ para todo } 0 < r < r_{z_1} \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Luego $D(z_1, r) \subset A$. En consecuencia, A es abierto y, por conexidad, u constante.

El principio del máximo 2.2.1 obliga a una función subarmónica no constante en un dominio Ω a que su valor máximo (si existe) se tome en un punto de $\partial\Omega$. En particular, para dominios acotados:

Corolario 2.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado no vacío y u subarmónica no constante en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

En particular, si $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces $u \leq 0$ en $\overline{\Omega}$.

Demostración. Por el teorema de Weierstrass, al ser $\overline{\Omega}$ compacto, u alcanza sus extremos absolutos en $\overline{\Omega}$, en particular su máximo. Además, el principio del máximo 2.2.1 fuerza a que necesariamente dicho máximo se tome en $\partial\Omega$.

Observación 2.2.1 Si u es subarmónica no constante en el dominio Ω entonces

$$\limsup_{z \rightarrow \partial\Omega} u(z) = \sup_{\Omega} u(z). \quad (2.4)$$

Si el dominio Ω es no acotado, entendemos $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ y el punto ∞ se entiende como parte de $\partial\Omega$. Un ejemplo del comportamiento en dominios no acotados viene dado por $u(z) = \Re z$, que es armónica en el semiplano superior $\Omega = \{\Re z > 0\}$, verifica $u = 0$ en el eje real $\partial\Omega \cap \mathbb{C}$ pero no es acotada.

Una consecuencia del principio del máximo lo constituye el siguiente corolario, que representa una versión débil del principio del máximo y es análogo al que presentan las funciones convexas de una variable real.

Corolario 2.2.3 *Sea u una función armónica en el dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$, continua en $\overline{\Omega}$ y sea además v una función subarmónica en Ω tal que*

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq u(\zeta), \quad \text{para todo } \zeta \in \partial\Omega,$$

entonces $v(z) \leq u(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Como $v - u$ es subarmónica podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq 0, \quad \text{para todo } \zeta \in \partial\Omega,$$

y bastaría probar que $v(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Consideramos la función

$$w(z) = \max\{v(z), 0\}, \quad z \in \Omega$$

que, por la propiedad 2.1.2, *iii*), es subarmónica y satisface

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} w(z) = 0, \quad \text{para todo } \zeta \in \partial\Omega.$$

Como $w \geq 0$ concluimos

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} w(z) = 0, \quad \text{para todo } \zeta \in \partial\Omega.$$

Consideramos la extensión

$$\hat{w}(z) = \begin{cases} w(z), & z \in \Omega \\ 0, & z \in \partial\Omega \end{cases}$$

que es por tanto continua en $\overline{\Omega}$. Además \hat{w} es subarmónica en Ω . Por el teorema de Weierstrass, \hat{w} ha de tener un máximo en algún punto $z_0 \in \overline{\Omega}$. Si $\hat{w}(z_0) > 0$, sigue que $z_0 \in \Omega$. Por el principio del máximo 2.2.1, w es constante en $\overline{\Omega}$, lo que contradice que $\hat{w} = 0$ en $\partial\Omega$. Luego $\hat{w}(z_0) = 0$ y podemos afirmar que $\hat{w}|_{\Omega} = w = 0$. De esta forma, $v \leq 0$ en Ω .

El siguiente lema, consecuencia del principio del máximo, proporciona una técnica sencilla para construir funciones subarmónicas.

Lema 2.2.4 *Sea $v(z)$ subarmónica en el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea D un disco tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y tal que $v(z) \neq -\infty$ sobre ∂D . Definimos la función*

$$\hat{v}(z) = \begin{cases} v(z) & z \in \Omega \setminus \overline{D} \\ P_D(u|_{\partial D})(z) & z \in \overline{D} \end{cases}$$

Entonces $\hat{v}(z)$ es subarmónica en Ω , y $v(z) \leq \hat{v}(z)$ en Ω .

Demostración. En primer lugar observamos que cuando $z \in D$, $\hat{v}(z)$ es la integral de Poisson en D de $v|_{\partial D}$. Luego \hat{v} es armónica en D y continua en \overline{D} . Por el teorema 2.2.3

se tiene que $v(z) \leq \hat{v}(z)$, si $z \in D$. Por tanto $v(z) \leq \hat{v}(z)$, para $z \in \Omega$. Además, por construcción, $\hat{v}(z)$ es continua en Ω . Si $z_0 \in D$, tomando $r > 0$ suficientemente pequeño, se tiene

$$\hat{v}(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{v}(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta$$

ya que \hat{v} es armónica en Ω . Ahora, si $z_0 \notin D$ y $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega \setminus D$, para cierto $r > 0$ suficientemente pequeño

$$\hat{v}(z_0) = v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{v}(z_0 + re^{i\theta}) \, d\theta$$

concluyendo así que \hat{v} es subarmónica en Ω .

Teorema 2.2.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ continua en Ω . Son equivalentes:*

- i) u es subarmónica en Ω .*
- ii) Para todo disco $D \subset \overline{D} \subset \Omega$*

$$u \leq P_D(u|_D) \quad \text{en } D.$$

- iii) Para todo disco $D \subset \overline{D} \subset \Omega$ y f una función armónica en D que verifica:*

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} (u - f)(z) \leq 0 \quad \text{para } \zeta \in \partial D,$$

entonces $u \leq f$ en D .

Demostración. Veamos en primer lugar la implicación *i) \rightarrow iii)*: Sean D y f verificando las hipótesis en *iii)*. Como \overline{D} es compacto, por el principio del máximo 2.2.3 podemos concluir *iii)*.

Para la implicación *iii) \rightarrow ii)*: Tomamos $f = P_D(u|_{\partial D})$ la extensión armónica de $u|_D$. Como

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} (u - P_D(u|_D))(z) \leq u(\zeta) - u(\zeta) \leq 0 \quad \text{para } \zeta \in \partial D,$$

sigue que $u \leq P_D(f) = P_D(u|_D)$ en D .

Finalmente *ii) \rightarrow i)* es consecuencia directa de la definición de función subarmónica.

Las funciones holomorfas e inyectivas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, también se denominan **aplicaciones conformes** (ver capítulo 3). Análogamente al caso armónico (proposición 1.2.8), se tiene de la caracterización anterior:

Corolario 2.2.6 *Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una aplicación conforme entre los dominios Ω_1 y Ω_2 de \mathbb{C} y si u es subarmónica en Ω_2 , entonces $f \circ u$ es subarmónica en Ω_1 .*

Sabemos que una función de una variable real v es convexa si, y solo si, $v'' > 0$, al menos en el caso de que v sea dos veces diferenciable. Finalizamos la sección con el siguiente teorema, donde se prueba que un comportamiento similar al de las funciones convexas regulares sucede también para las funciones subarmónicas.

Teorema 2.2.7 *Sea Ω un dominio de \mathbb{C} y $u \in C^2(\Omega)$. Entonces, u es subarmónica en Ω si, y solo si, $\Delta u \geq 0$ en Ω .*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\Delta u \geq 0$ en Ω . Usaremos la caracterización de las funciones subarmónicas que proporciona el teorema 2.2.5 para demostrar que u es subarmónica. Para ello, sea D un disco tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y supongamos que f es una función armónica en Ω de manera que

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} (u - f)(z) \leq 0, \quad \text{para todo } \zeta \in \partial D.$$

Tenemos que ver que $u \leq f$ en D . Tomamos $\epsilon > 0$ y definimos

$$v_\epsilon(z) = \begin{cases} u(z) - f(z) + \epsilon|z|^2, & z \in D \\ \epsilon|z|^2, & z \in \partial D. \end{cases}$$

De esta forma, v_ϵ es continua en \overline{D} con lo que alcanza un máximo en \overline{D} . Sin embargo, no tiene un máximo local en D ya que $\Delta v_\epsilon = \Delta u + 4\epsilon > 0$, en D . Así, el máximo se alcanza en ∂D y, por lo tanto,

$$u - f \leq \sup_{\partial D} \epsilon|z|^2 \quad \text{en } D.$$

El resultado se obtiene tomando $\epsilon \rightarrow 0$.

Recíprocamente, sea u subarmónica en Ω y $\Delta u(w) < 0$ para algún $w \in \Omega$. Por continuidad, existe $r > 0$ de manera que $\Delta u \leq 0$ en $D(w, r)$. De esta forma, $-u$ es subarmónica en $D(w, \rho)$. Luego u es armónica en Ω . En particular, $\Delta u = 0$ en Ω , contradiciendo que $\Delta u(w) < 0$. Por lo tanto $\Delta u \geq 0$ en Ω .

2.3. Método de Perron

Definición 2.3.1 *Una familia \mathcal{F} de funciones subarmónicas en una región Ω se denomina una **familia de Perron** si satisface:*

- i) Si $v_1, v_2 \in \mathcal{F}$ entonces $\max\{v_1, v_2\} \in \mathcal{F}$.
- ii) Si $v \in \mathcal{F}$ y D es un disco con $\overline{D} \subset \Omega$, y si $v > -\infty$ en ∂D , entonces $P(u|_{\partial D}) \in \mathcal{F}$.
- iii) Para cada $z \in \Omega$ existe $v \in \mathcal{F}$ tal que $v(z) > -\infty$.

Para cada $z \in \Omega$, el supremo de los valores que toman las funciones de la familia de Perron en el punto z tiene un carácter especial. En primer lugar:

Definición 2.3.2 *Si \mathcal{F} es una familia de Perron en la región $\Omega \subset \mathbb{C}$ definimos*

$$u_{\mathcal{F}}(z) \equiv \sup_{v \in \mathcal{F}} v(z).$$

Teorema 2.3.3 *Si \mathcal{F} es una familia de Perron en la región $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces $u_{\mathcal{F}}$ es armónica en Ω o $u_{\mathcal{F}}(z) \equiv \infty$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Fijamos $z_0 \in \Omega$. Por definición de $u_{\mathcal{F}}$ existen funciones $v_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \dots$ de manera que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j(z_0) = u_{\mathcal{F}}(z_0).$$

Tomamos

$$v'_j = \max\{v_1, v_2, \dots, v_j\}.$$

Por *i*) de la definición 2.3.2 e inducción matemática se tiene que

$$v'_j \in \mathcal{F}, \quad v'_j \leq v'_{j+1} \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} v'_j(z_0) = u_{\mathcal{F}}(z_0).$$

Supongamos ahora que D es un disco con $z_0 \in D \subset \bar{D} \subset \Omega$. Por *i*) y *iii*) de la definición 2.3.2 y por continuidad de las funciones subarmónicas podemos suponer que es v'_j es continua y también $v'_j > \infty$ en ∂D . Consideramos ahora las funciones

$$v''_j(z) = \begin{cases} v'_j(z) & z \in \Omega \setminus \bar{D} \\ P_D(v'_j|_{\partial D})(z) & z \in \bar{D} \end{cases}$$

Entonces, por *ii*) de la definición 2.3.2, $v''_j \in \mathcal{F}$. Además, por el lema 2.2.4,

$$v'_j \leq v''_j.$$

La fórmula integral de Poisson en D de la función no negativa $v'_{j+1} - v'_j$ es no negativa con lo que

$$v''_j \leq v''_{j+1}.$$

Ahora, tomamos

$$V = \lim_{j \rightarrow \infty} v''_j.$$

Por el principio de Harnack 1.4.4, $V \equiv +\infty$ en D o V es armónica en D . Nótese que debido a la elección de v_j y la maximidad de $u_{\mathcal{F}}(z_0)$,

$$V(z_0) = u_{\mathcal{F}}(z_0).$$

Tomamos ahora $z_1 \in D$, $w_j \in \mathcal{F}$ con $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j(z_1) = u_{\mathcal{F}}(z_1)$. Sea

$$w'_j = \max\{v''_j, w_1, w_2, \dots, w_j\}$$

y análogamente consideramos $w''_j \in \mathcal{F}$ definidas por

$$w''_j(z) = \begin{cases} w'_j(z) & z \in \Omega \setminus \bar{D} \\ P_D(w'_j|_{\partial D})(z) & z \in \bar{D} \end{cases}$$

Como antes, $w'_j \leq w''_j \leq w'_{j+1}$. y consideramos

$$W = \lim_{j \rightarrow \infty} w''_j.$$

El principio de Harnack 1.4.4 concluye como antes que W es armónica en D ó $W \equiv +\infty$ en D y $W(z_1) = u_{\mathcal{F}}(z_1)$. Como $v''_j \leq w'_j \leq w''_j$ entonces tenemos que $V \leq W$. Pero también

$$u_{\mathcal{F}}(z_0) = V(z_0) \leq W(z_0) \leq u_{\mathcal{F}}(z_0)$$

por lo que $V(z_0) = W(z_0)$. Ahora, si $u_{\mathcal{F}}(z_0) < \infty$ entonces $V - W$ es armónica en D y alcanza su valor máximo, que es igual a 0 en z_0 . Por el principio del máximo, debe ser igual a 0 en D . Como z_1 es arbitrario en D , tenemos dos posibilidades:

$$u_{\mathcal{F}} \equiv \infty \text{ en } D \quad \text{o} \quad u_{\mathcal{F}} = V \text{ en } D,$$

y, por lo tanto, es armónica en D . Ya que z_0 es un punto arbitrario en Ω el conjunto

$$\{z : u_{\mathcal{F}}(z) = +\infty\}$$

es abierto y cerrado en Ω . Al ser Ω conexo, $u_{\mathcal{F}} \equiv +\infty$ en Ω o $u_{\mathcal{F}}$ es armónica en Ω .

Observación 2.3.1 En la demostración del teorema 2.3.3 únicamente se usan propiedades locales de la familia \mathcal{F} , la propiedad del valor medio y el principio del máximo en discos contenidos en la región.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\partial\Omega$ tal que $|f| \leq M < \infty$. Consideramos la familia

$$\mathcal{F}_f = \{v \text{ subarmónica en } \Omega : \limsup_{z \rightarrow \zeta} v(z) \leq f(\zeta), \text{ para todo } \zeta \in \partial\Omega\}.$$

En primer lugar, $\mathcal{F}_f \neq \emptyset$ pues la función constante $-M \in \mathcal{F}_f$. Por tanto \mathcal{F}_f es una familia de Perron. Cabe notar además que por el principio del máximo, cada $v \in \mathcal{F}_f$ está acotada por M . Como consecuencia del teorema 2.3.3

$$u_f(z) \equiv \sup_{v \in \mathcal{F}_f} v(z), \quad z \in \Omega,$$

es armónica en Ω .

Observación 2.3.2 La función u_f es el candidato natural a solución del problema de Dirichlet. En efecto, supongamos que el problema de Dirichlet 2.1 con f continua en $\partial\Omega$ tiene solución $u(z)$. Entonces $u(z) = u_f(z)$, puesto que si $u(z)$ es la solución al problema de Dirichlet, entonces $u \in \mathcal{F}_f$ y por tanto $u(z) \leq u_f(z)$. Por otro lado, cada función $v \in \mathcal{F}_f$ verifica

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq f(\zeta) = u(\zeta), \quad \text{si } \zeta \in \partial\Omega.$$

El principio del máximo garantiza que $v(z) \leq u(z)$ y por tanto $u_f(z) \leq u(z)$. Luego $u_f(z) = u(z)$.

Algunas propiedades de la solución de Perron u_f vienen recogidas en el siguiente lema.

Proposición 2.3.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio, $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\partial\Omega$. Entonces:

- i) Si $|f(\zeta)| \leq M$ en $\partial\Omega$, entonces $|u_f(z)| \leq M$ en Ω .
- ii) Si $f_1(\zeta) \leq f_2(\zeta)$ en $\partial\Omega$, entonces $u_{f_1}(z) \leq u_{f_2}(z)$ en Ω .
- iii) $u_{\alpha f}(z) = \alpha u_f(z)$ para todo $\alpha > 0$.
- iv) $u_{f_1}(z) + u_{f_2}(z) \leq u_{(f_1+f_2)}(z)$ en Ω .
- v) $u_{(f+v)}(z) = u_f(z) + v(z)$ en Ω cuando $v(z)$ es continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω .

Demostración. Teniendo en cuenta que las constantes son funciones subarmónicas:

- i) Como $-M \leq f(\zeta)$ y como $-M \in \mathcal{F}_f$ sigue que $-M \leq u_f(z)$. Por otra parte, si $f(\zeta) \leq M$, por el principio del máximo sigue que $u_f(z) < M$ con lo que concluimos que $|u_f(z)| \leq M$.
- ii) Se tiene que $\mathcal{F}_{f_1} \subseteq \mathcal{F}_{f_2} \subseteq \dots$ y $\mathcal{F}_{\alpha f} = \alpha \mathcal{F}_f$, si $\alpha > 0$. El resultado sigue tomando supremos.
- iv) Sean $u_1 \in \mathcal{F}_{f_1}$ y $u_2 \in \mathcal{F}_{f_2}$. Entonces $u_1 + u_2 \in \mathcal{F}_{f_1+f_2}$ pues

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u_1 + u_2)(z) \leq f_1(\zeta) + f_2(\zeta) = (f_1 + f_2)(\zeta), \quad \text{para todo } \zeta \in \partial\Omega.$$

Como en *i*), es suficiente con aplicar el principio del máximo para obtener el resultado.

- v) Como en *ii*) y *iii*) el resultado sigue de $\mathcal{F}_{f+u} = \mathcal{F}_f + u$.

2.4. Funciones barrera

Con el objetivo de resolver el problema de Dirichlet con f continua en $\partial\Omega$, hemos de abordar la cuestión de la existencia del

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u(z) = f(\zeta).$$

Para ello introducimos en primer lugar la siguiente definición.

Definición 2.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un dominio. Un punto frontera $\zeta_0 \in \partial\Omega$ se denomina **punto frontera regular** para Ω si

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} u_f(z) = f(\zeta_0)$$

para toda función continua f en $\partial\Omega$. En otro caso, $\zeta_0 \in \partial\Omega$ se denomina **irregular**. Si todo punto de $\partial\Omega$ es regular, el dominio Ω se denomina **regular**.

En primer lugar, y para determinar condiciones que satisfagan un punto regular $\zeta_0 \in \partial\Omega$, consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4.1 Supongamos $\zeta_0 \in \partial\Omega$ es un punto regular. Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in \Omega \\ u(\zeta) = f(\zeta) = |\zeta - \zeta_0|, & z \in \partial\Omega \end{cases}$$

Sea $u_f(z)$ la correspondiente solución de Perron. En primer lugar, como $f(z)$ es subarmónica, $f \in \mathcal{F}_f$ entonces

$$u_f(z) \geq |z - \zeta_0|, \quad z \in \Omega.$$

Tomando $g(z) = -u_f(z)$, sigue que $g(z)$ es armónica en Ω y verifica

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} g(z) = -f(\zeta_0) = 0, \tag{2.5}$$

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} g(z) \leq -f(\zeta) < 0, \quad \text{para } \zeta \in \partial\Omega, \zeta \neq \zeta_0. \tag{2.6}$$

En conclusión, la función $g(z)$ es armónica en Ω , nula en ζ_0 y estrictamente negativa en puntos de $\partial\Omega$ distintos de ζ_0 .

En general veremos que basta suponer que g sea subarmónica en (2.5) y en (2.6) cerca del punto $\zeta_0 \in \partial\Omega$ para concluir que este es regular. Definimos en primer lugar:

Definición 2.4.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ una dominio y $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Una **barrera local** en ζ_0 para Ω es una función $b(z)$ que verifica:

- i) b está definida y es subarmónica en $\Omega \cap D$, para algún disco abierto D , tal que $\zeta_0 \in D$.
- ii) $b(z) < 0$, para $z \in \Omega \cap D$.
- iii) $\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} b(z) = 0$.

Nótese que la función b toma su supremo en $\Omega \cap D$ cuando z tiende a ζ_0 , aunque puede alcanzar dicho valor en cualquier otro punto de $\partial(\Omega \cap D)$. El siguiente resultado permite construir barreras globales en Ω a partir de barreras locales definidas en $\Omega \cap D$.

Lema 2.4.3 (Bouligand) Supongamos que ζ_0 es un punto regular de $\partial\Omega$ y supongamos que b es una barrera local en ζ_0 definida en $\Omega \cap B(\zeta_0, \epsilon)$. Dado $0 < \delta < \epsilon$, existe b_δ subarmónica en Ω que satisface las propiedades:

- i) $b_\delta < 0$ en Ω .
- ii) $b_\delta \equiv 1$ en $\Omega \setminus B(\zeta_0, \epsilon)$.
- iii) $\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} b_\delta(z) \geq -\delta$.

Demostración. Denotamos por $B = B(\zeta_0, r)$ para cierto $r < \epsilon$. Entonces

$$\partial B \cap \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

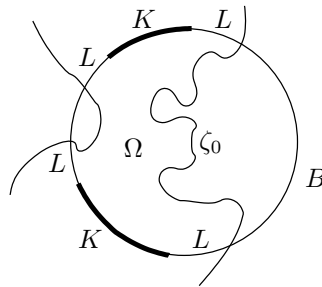
donde cada I_k es un arco abierto de ∂B . Elegimos $n < \infty$ y subarcos compactos

$$J_k \subset I_k, \quad k = 1, \dots, n$$

de manera que si

$$K = \bigcup_{k=1}^n J_k \quad \text{y} \quad L = (\partial B \cap \Omega) \setminus K,$$

la longitud de L sea menor que $\pi\delta r$.



Sea $\omega = P_B(\chi_L)$ la integral de Poisson de la función característica de L en el conjunto B . Luego, ω es armónica en B y $0 < \omega < 1$ en B . Ahora bien, como L es abierto en ∂B ,

$$\omega(z) \rightarrow 1 \quad \text{cuando } z \in B \rightarrow \eta \in L.$$

Por otra parte, al ser b continua y $b < 0$ en $\Omega \cap B(\zeta_0, \epsilon)$ y además $K \subset \Omega \cap B(\zeta_0, \epsilon)$ compacto, existe $-m < 0$ de manera que $b \leq -m$ en K . Por tanto, si $\eta \in K \cup L$ se tiene:

$$\lim_{z \in B \rightarrow \eta} \left(\frac{b(z)}{m} - \omega(z) \right) \leq -1. \quad (2.7)$$

Definimos ahora

$$b_\delta(z) = \begin{cases} \text{máx} \left(2 \left(\frac{b(z)}{m} - \omega(z) \right), 1 \right), & z \in \Omega \cap B \\ -1, & z \in \Omega \setminus B \end{cases}$$

Por (2.7), $b_\delta \equiv -1$ en un entorno de $K \cup L$ en Ω . Además, como

$$2 \left(\frac{b}{m} - \omega \right)$$

es subarmónica en $B \cap \Omega$, sigue de (2.7) y *iii*) del lema 2.1.2 que b_δ es subarmónica en Ω y $b_\delta < 0$ en Ω . Finalmente,

$$\omega(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_L |dz| = \frac{\ell(L)}{2\pi r} < \frac{\delta}{2},$$

y

$$\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} b_\delta(z) = -2\omega(\zeta_0) \geq -2\delta/2 = -\delta.$$

Una vez hemos extendido la barrera local, estamos en condiciones de probar la siguiente condición suficiente para la existencia de soluciones del problema de Dirichlet.

Teorema 2.4.4 *Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ un dominio acotado y $\zeta_0 \in \partial\Omega$. Si existe una barrera local en ζ_0 , entonces ζ_0 es un punto regular de Ω .*

Demostración. Sea b_δ la barrera construida mediante el lema de Bouligand 2.4.3. La idea de la prueba consiste en usar la barrera b_δ , que sabemos que es pequeña cerca de z_0 y negativa lejos de z_0 , para construir una función armónica que sea aproximadamente $f(\zeta_0)$ cerca de ζ_0 , pero más pequeña que f lejos de ζ_0 . Para ello tomamos $\epsilon > 0$ de manera que

$$|f(z) - f(\zeta_0)| < \delta, \quad \text{para } \delta \in \overline{B} \cap \partial\Omega,$$

donde $B = B(\zeta_0, \epsilon)$.

Definimos

$$v(z) = f(\zeta_0) - \delta + (M + f(\zeta_0))b_\delta(z),$$

que es subarmónica en Ω y para $\zeta \in \partial\Omega \cap \overline{B}$,

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} v(z) \leq f(\zeta_0) - \delta \leq f(\zeta),$$

ya que $M + f(\zeta_0) \geq 0$ y $b_\delta < 0$. También, si $z \in \Omega \setminus \overline{B}$ entonces

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} v(z) = f(\zeta_0) - \delta - (M + f(\zeta_0)) \leq f(\zeta),$$

ya que $b_\delta = -1$ en $\Omega \setminus \bar{B}$. Así, $v \in \mathcal{F}_f$. Por el lema 2.4.3

$$\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} u_f(z) \geq \liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} v(z) \geq f(\zeta_0) - \delta + (M + f(\zeta_0))(-\delta)$$

Como $\delta > 0$ es arbitrario,

$$\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} u_f(z) \geq f(\zeta_0).$$

Reemplazando f por $-f$, obtenemos de manera análoga que

$$\liminf_{z \rightarrow \zeta_0} u_{-f}(z) \geq -f(\zeta_0).$$

Finalmente, por la proposición 2.3.4, *iv*) (tomando $f_2 = -f$),

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} u_f(z) \leq \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} (-u_{-f}(z)) = -\liminf_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta_0} u_{-f}(z) \leq f(\zeta_0).$$

El objetivo de esta memoria es el teorema de representación conforme de Riemann: Un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conforme equivalente al disco unidad \mathbb{D} . Veremos en el capítulo 3 que, sin pérdida de generalidad, Ω se puede suponer acotado. Es por ello que finalizaremos resolviendo el problema de Dirichlet en dominios Ω acotados. Por el teorema 2.4.4 basta encontrar barreras locales en $\partial\Omega$.

Lema 2.4.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado simplemente conexo. Entonces existe una barrera en cada punto de $\partial\Omega$.*

Demostración. Fijamos $\zeta_0 \in \partial\Omega$ y construimos explícitamente una barrera en ζ_0 . Para ello, sea $\zeta_1 \in \mathbb{C} \setminus \omega$ un punto suficientemente alejado de Ω . El disco

$$D = \left\{ \frac{|z - \zeta_0|}{|z - \zeta_1|} < \frac{1}{e} \right\}$$

es abierto y además $\Omega \subset D$. Como $\mathbb{C}^* \setminus \omega$ es simplemente conexo, podemos definir el logaritmo holomorfo

$$f(z) = \log \left(\frac{z - \zeta_0}{z - \zeta_1} \right)$$

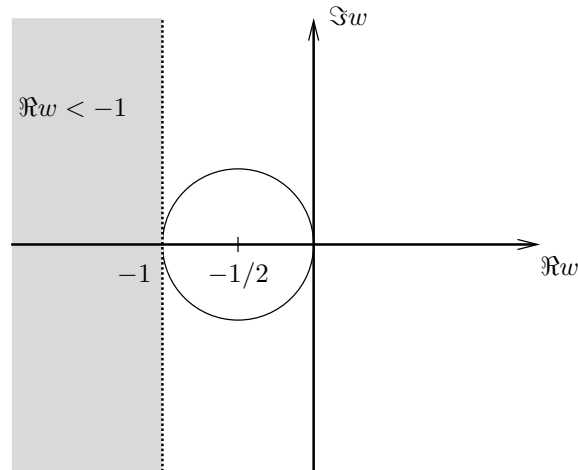
en $\mathbb{C} \setminus \omega$. Además si $z \in \Omega \subset D$ se verifica

$$\Re f(z) = \log \left| \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta_1} \right| < -1,$$

esto es, $f(z)$ toma valores en el semiplano $\{\Re w < -1\}$.

La función $g(w) = \frac{1}{w}$ transforma dicho semiplano en el disco $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y, por tanto, la función $\frac{1}{f(z)}$, que es holomorfa en Ω , toma sus valores en $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Finalmente, la función



$$b(z) = \Re \left(\frac{1}{f(z)} \right)$$

es armónica en Ω y además

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} b(z) \leq 0, \quad \text{para } \zeta \in \partial\Omega,$$

pues

$$\limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} b(z) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \limsup_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} \Re b(z) = 0,$$

y esto ocurre si, y solo si, $\zeta = \zeta_0$.

Corolario 2.4.6 *El problema de Dirichlet admite una única solución en cualquier dominio acotado y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

*Observación 2.4.2 Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es un **continuo** si E es compacto, conexo y E no se reduce a un único punto. Nótese que si E es un continuo entonces $\mathbb{C}^* \setminus E$ es simplemente conexo por conexidad de E . Al contrario, sea E un conjunto compacto tal que $\mathbb{C}^* \setminus E$ es simplemente conexo. Si E tiene más de un punto entonces necesariamente E es un continuo. En \mathbb{C} se puede probar que el problema de Dirichlet en dominios acotados $\Omega \in \mathbb{C}$ admite solución siempre y cuando las componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no se reduzcan a un punto.*

Los teoremas de Riemann y Carathéodory

En este capítulo estudiaremos los teoremas de representación conforme de Riemann y el teorema de Carathéodory. Primeramente definimos las aplicaciones conformes de \mathbb{C} . Veremos que estas localmente son las funciones holomorfas con derivada no nula. Imponiendo la condición de inyectividad global se tienen las aplicaciones conformes o biholomorfismos. El teorema de representación conforme de Riemann identifica el representante canónico en la clase de dominios simplemente conexos propios de \mathbb{C} bajo biholomorfismos, el disco unidad \mathbb{D} . Finalmente veremos que si la frontera del dominio simplemente conexo y propio Ω es una curva de Jordan, la aplicación de Riemann extiende a un homeomorfismo entre sus clausuras. Las referencias que se han seguido en el desarrollo de este capítulo han sido: [3, Cap. 1 y 2], [11, Cap. 8 y 12], [4, Cap. 3] y [6].

3.1. Aplicaciones conformes

Definición 3.1.1 Una aplicación \mathbb{R} -lineal e invertible $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina **conforme** si conserva el tamaño y la orientación de ángulos, es decir, si para algún $z, w \in \mathbb{C}$ el ángulo entre z y w es el mismo que el ángulo entre Tz, Tw . Analíticamente, T es tal que

$$\arg Tz - \arg Tw = \arg z - \arg w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

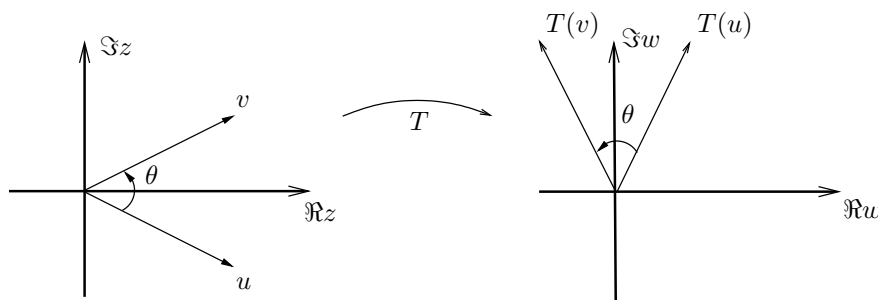


Figura 3.1: Aplicación \mathbb{R} -lineal conforme.

Las aplicaciones \mathbb{R} -lineales y conformes son precisamente aquellas que son \mathbb{C} -lineales.

Proposición 3.1.2 Sea T una aplicación \mathbb{R} -lineal e invertible $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes:

1. T es conforme.
2. $Tz = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, esto es, T es \mathbb{C} -lineal.

Demostración. Supongamos que T es conforme. Por definición

$$\arg Tz - \arg Tw = \arg z - \arg w, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C},$$

esto es

$$\arg Tz - \arg z = \arg Tw - \arg w, \quad \text{para todo } z, w \in \mathbb{C}.$$

De esta forma, la función $\arg Tz - \arg z$ es constante con respecto a z evaluando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Por otra parte como

$$\arg Tz - \arg z = \arg \frac{Tz}{z},$$

todos los puntos $\frac{Tz}{z}$, $z \neq 0$ están en una recta que contiene al origen. Sin embargo, escribiendo

$$Tz = \alpha z + \beta \bar{z}, \quad \text{para } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

y tomando $z \neq 0$,

$$\frac{Tz}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$$

que describe la ecuación de la circunferencia de centro α y radio $|\beta|$. Por tanto, está claro que los puntos de dicha circunferencia están en la línea sólo si la circunferencia es degenerada, esto es, $|\beta| = 0$ y $\beta = 0$.

Teorema 3.1.3 Una aplicación \mathbb{R} -lineal e invertible $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es conforme si, y sólo si, $T = \lambda O$, donde O es una transformación ortogonal y $\lambda > 0$.

Demostración. En primer lugar, una aplicación \mathbb{R} -lineal T conserva el tamaño de los ángulos si, y solo si, conserva los cosenos de éstos, es decir, se verifica

$$\frac{\langle Tu, Tv \rangle}{|Tu||Tv|} = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}, \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{C}.$$

Además conserva la orientación si el determinante de la matriz asociada es positivo.

Supongamos primeramente que $T = \lambda O$. Una transformación ortogonal O conserva tanto el producto escalar como el módulo, luego

$$\frac{\langle Tu, Tv \rangle}{|Tu||Tv|} = \frac{\langle \lambda^2 Ou, Ov \rangle}{\lambda^2 |Ou||Ov|} = \frac{\langle Ou, Ov \rangle}{|Ou||Ov|} = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

Identificando la transformaciones con sus respectivas matrices, como $\det(O) = 1$, concluimos que $\lambda > 0$ pues $\det(T) > 0$.

Recíprocamente, supongamos que T conserva el tamaño y orientación de ángulos. Denotemos por $e_1 = 1$, $e_2 = i$ la base canónica de \mathbb{C} . Definimos la transformación O en los elementos de la base por:

$$Oe_i = \frac{Te_i}{|Te_i|}, \quad i = 1, 2.$$

Al ser Te_1 y Te_2 ortogonales y unitarios concluimos que O es una transformación ortogonal. Veamos que $T = \lambda O$. Para ello $R = O^{-1}T$ que es invertible y conserva ángulos. Además en los elementos de la base

$$Re_i = c_i e_i, \quad i = 1, 2,$$

donde $c_i = |Te_i|$. Como R conserva ángulos

$$\frac{\langle Ru, Rv \rangle}{|Ru||Rv|} = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}.$$

En particular para $u = e_1 + e_2$ y $v = e_2$,

$$\frac{(c_1 e_1 + c_2 e_2) \cdot c_2 e_2}{(c_1^2 + c_2^2)^{1/2} c_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Entonces, $2c_2^2 = c_1^2 + c_2^2$, con lo que $c_1 = c_2 = \lambda$. Esto quiere decir que $R = \lambda I$, por lo que $T = \lambda O$. Las transformaciones conformes corresponden a $\det O = +1$.

Supongamos que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación diferenciable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Es bien conocido del cálculo diferencial multidimensional que

$$f(z) = f(z_0) + df(z_0)(z - z_0) + r(z - z_0) \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0.$$

con $|r(z - z_0)| \leq c|z - z_0|$ con $c > 0$ constante cuando $z \rightarrow z_0$. Ahora, si f es diferenciable en un punto $z_0 \in \Omega$, la diferencial $df(z_0)$ puede ser identificada con la matriz jacobiana de f en z_0 .

Definición 3.1.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Una función diferenciable $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es **localmente conforme** en el punto $z \in \Omega$ si $df(z)$ es invertible y conserva la orientación y tamaño de ángulos.

Definición 3.1.5 El ángulo entre las curvas regulares γ_1 y γ_2 en $z_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ es el ángulo que determinan sus respectivos vectores tangentes $\gamma_1'(0)$ y $\gamma_2'(0)$.

En la definición anterior entendemos la orientación del ángulo en el sentido estándar. Así el ángulo entre las curvas γ_1 y γ_2 en z_0 es opuesto al ángulo entre las curvas γ_2 y γ_1 en z_0 .

Observación 3.1.1 Teniendo en cuenta el significado geométrico de la diferencial $df(z)$, el hecho de que f sea localmente conforme en z significa que si dos curvas γ_1, γ_2 forman un ángulo θ en el punto z entonces las curvas $f(\gamma_1), f(\gamma_2)$ determinan un ángulo θ en el punto $f(z)$. La proposición 3.1.2 implica que f es localmente conforme en z si, y solo si, es \mathbb{C} -diferenciable en z y $f'(z) \neq 0$ (en este caso $df(z) \cdot w, w \in \mathbb{C}$, que es invertible, puede identificarse la multiplicación de números complejo $f'(z)w$).

Suponiendo que la curva regular γ tiene vector tangente $\gamma'(0) \in \mathbb{C}$ en $z = \gamma(0)$, sigue por la regla de la cadena que el vector tangente de la curva $f(\gamma(z))$ en $f(z)$ es

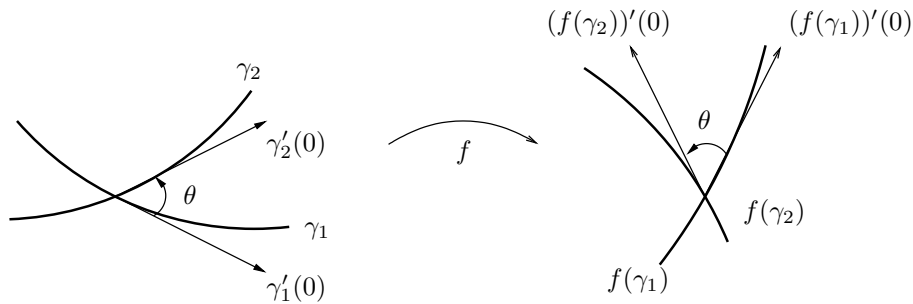
$$(f(\gamma)(t))'(0) = df(z) \cdot \gamma'(0) = f'(z) \gamma'(0).$$

Denotando $f'(z) = |f'(z)| e^{i \arg f'(z)}$ observamos que, en el vector $(f(\gamma)(t))'(0)$ tangente a $f(\gamma)$ en $f(z)$, se produce una rotación de ángulo $\arg f'(z)$ y una dilatación por el factor

$|f'(z)|$. Si todos los vectores tangentes rotan de forma similar concluimos, por tanto, que la orientación de los ángulos se conserva. Analíticamente, la invarianza los ángulos mediante la aplicación conforme f significa que dadas dos curvas regulares γ_1, γ_2 con vectores tangentes en el punto $z = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ se verifica la ecuación

$$\langle f(\gamma_1)'(0), \overline{(f(\gamma_2))'(0)} \rangle = f(\gamma_1)'(0) \overline{(f(\gamma_2))'(0)} = |f'(z)|^2 \gamma_1'(0) \overline{\gamma_2'(0)}$$

representa .



En resumen, se tiene el teorema:

Teorema 3.1.6 Si f es una función diferenciable alrededor del punto z_0 , f es localmente conforme en z_0 si, y solo si, tiene derivada compleja en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. En este caso, la función lineal tangente $df(z_0)$ es una rotación del ángulo $\arg f'(z_0)$ seguida de una dilatación por el factor $|f'(z_0)|$.

Observación 3.1.2 La clase de aplicaciones localmente conformes es por tanto la de las funciones holomorfas con derivada no nula. Por el teorema de la función inversa esto implica que hay inyectividad local pero no global, siendo la función e^z el clásico ejemplo de función holomorfa no inyectiva pero con derivada no nula..

Definición 3.1.7 Sea Ω un dominio de \mathbb{C} . Una función holomorfa e inyectiva $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina una **aplicación conforme** de Ω sobre el conjunto abierto $f(\Omega)$. Dos dominios $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ se dicen **conformemente equivalentes** si existe una aplicación conforme de Ω_1 sobre Ω_2 .

Observación 3.1.3 Como hay inyectividad global, la función inversa es conforme. También dichas aplicaciones se denominan biholomorfas y en particular cuando $\Omega_1 = \Omega_2$ también se suele hablar de automorfismos.

Ejemplos 3.1.4 Entre los ejemplos fundamentales de aplicaciones conformes están los automorfismos de \mathbb{C}^* y los automorfismos de \mathbb{D} . Los automorfismos de \mathbb{C}^* están dados por

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } ad - bz \neq 0$$

y se conocen como transformaciones de Möbius. Entre otras propiedades que verifican las transformaciones de Möbius cabe mencionar: toda transformación de Möbius lleva círculos de \mathbb{C}^* a círculos de \mathbb{C} , entendiendo las rectas en \mathbb{C} como círculos en \mathbb{C}^* que pasan por $\{\infty\}$.

Los automorfismos de \mathbb{D} vienen dadas por:

$$\phi_w(z) = \lambda \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}, \quad |\lambda| = 1.$$

Se verifica

$$\phi'_w(z) = \lambda \frac{1 - |w|^2}{(1 - \bar{w}z)^2}.$$

Dominios que sean homeomorfos como espacios topológicos no son necesariamente biholomorfos como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.5 El disco unidad \mathbb{D} y el plano complejo \mathbb{C} no son conformemente equivalentes, esto es biholomorfos, aunque son homeomorfos. En efecto, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa (esto es, entera) el teorema de Liouville garantiza que f ha de ser constante, luego no es inyectiva. Por otro lado, $f(z) = \frac{z}{1 + |z|}$ es un homeomorfismo desde \mathbb{C} sobre \mathbb{D} .

El ejemplo anterior sugiere la pregunta de qué dominios de \mathbb{C} son conformemente equivalentes a \mathbb{D} . Una condición necesaria que han de satisfacer los supuestos dominios es:

Proposición 3.1.8 Sea f una aplicación conforme de un dominio Ω sobre \mathbb{D} . Entonces Ω es simplemente conexa.

Demostración. Supongamos que γ es una curva cerrada contenida en Ω y sea $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Consideremos $g = f^{-1}$ que es holomorfa en \mathbb{D} . La función $\frac{f'}{f - w}$ es holomorfa en \mathbb{D} y por el teorema de Cauchy 1.1.10 y el índice de γ respecto del punto w ,

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = 0.$$

Ahora, por el teorema 1.1.25, Ω es simplemente conexo.

En la siguiente sección estudiaremos el teorema de representación conforme de Riemann y veremos que precisamente son los conjuntos simplemente conexos y propios de \mathbb{C} (en el sentido de que su complementario en \mathbb{C} consta de más de un punto).

3.2. El teorema de la aplicación de Riemann

Teorema 3.2.1 Todo dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, es conformemente equivalente a un dominio acotado de \mathbb{D} .

Demostración. Por hipótesis existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Como Ω es un dominio simplemente conexo podemos definir $\log(z - z_0)$, analítica en Ω . Consideramos la raíz cuadrada

$$g_1(z) = \sqrt{z - z_0} \equiv e^{\frac{1}{2} \log(z - z_0)}.$$

En primer lugar, g_1 es inyectiva en Ω . En efecto, si $g_1(z) = g_1(w)$ entonces $z = g_1^2(z) + z_0 = g_1^2(w) + z_0 = w$. Por otra parte y empleando un razonamiento similar, si $w \in g_1(\Omega)$,

$w \neq 0$, entonces $-w \notin g_1(\Omega)$ pues en caso contrario sea $w = g_1(z_1)$ y $-w = g_1(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Omega$, se sigue que $g_1^2(z_1) = g_1^2(z_2)$, luego $z_1 = z_2$ y por tanto $g(z_1) = w = 0$. Consideramos ahora la función holomorfa

$$g_2(z) = \frac{C}{g_1(z) + g_1(z_1)}, \quad C > 0$$

que es inyectiva en Ω y además

$$|g_2(z)| < \frac{C}{|g_1(z) + g_1(z_1)|} < \infty$$

Tomando C suficientemente pequeño sigue el resultado.

Proposición 3.2.2 *Supóngase que el dominio Ω es conformemente equivalente al disco unidad \mathbb{D} . Entonces para cada $z_0 \in \Omega$ existe una única aplicación conforme f de Ω sobre \mathbb{D} tal que*

$$f(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(z_0) > 0.$$

Demostración. Sea g la aplicación conforme de Ω sobre \mathbb{D} que proporciona la proposición 3.2.1 y consideramos el punto $z_1 = g(z_0)$. Entonces el automorfismo de \mathbb{D}

$$f(z) = c \frac{z - g(z_1)}{1 - \overline{g(z_1)}g_1(z)}, \quad |c| = 1,$$

verifica $f(z_0) = 0$. De esta forma se sigue (3.1.3),

$$f'(z_0) = c \frac{g'(z_0)}{1 - |g(z_0)|^2},$$

Eligiendo apropiadamente el argumento de c obtenemos por tanto que $f'(z_0) > 0$. Veamos ahora que la aplicación es única. Para ello supongamos previamente que k sea una aplicación conforme de Ω sobre \mathbb{D} verificando $k(z_0) = 0$ y $k'(z_0) > 0$. Definimos la aplicación $H(z) = k(f^{-1}(z))$, $z \in \Omega$ que también es una aplicación conforme sobre \mathbb{D} y satisface $H(0) = 0$. Aplicando el lema de Schwarz, 1.1.4

$$|H(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad H'(0) \leq 1.$$

Razonando análogamente con la función inversa H^{-1} ,

$$|H^{-1}(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad (H^{-1})'(0) \leq 1.$$

Por tanto $|H(z)| = |z|$ y $H'(0) = 1$. Podemos concluir por tanto que $H(z) = \lambda z$, con $|\lambda| = 1$ y además

$$H'(0) = \lambda = \frac{k'(z_0)}{f'(z_0)} = 1$$

Por tanto $H(z) = z$, esto es, $k = f$.

Teorema 3.2.3 *Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces existe una aplicación conforme φ de Ω sobre \mathbb{D} .*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que Ω es acotado y $0 \in \Omega$. Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z \in \Omega \\ u(\zeta) = f(\zeta), & \zeta \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

para $f(z) = \log|z|$ que es continua en $\partial\Omega$. Sea u_f la solución de Perron de (3.1). Los teoremas 2.3.3, 2.4.4 y lema 2.4.5 garantizan que u_f es armónica en Ω , continua en $\overline{\Omega}$ y

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} u_f(z) = \log|\zeta|. \quad (3.2)$$

Por el teorema 1.2.10 existe una función analítica g en Ω tal que $u_f = \Re g$. Definimos la función

$$\varphi(z) = ze^{-g(z)}, \quad z \in \Omega,$$

que es analítica en Ω , $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(z) \neq 0$ si $z \neq 0$. Además, como

$$|\varphi(z)| = |z|e^{-\Re g(z)} = e^{\log|z|}e^{-u_f(z)} = e^{\log|z| - u_f(z)},$$

podemos garantizar, por (3.2), que φ es propia pues

$$|\varphi(z)| \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad \Omega \ni z \rightarrow \partial\Omega.$$

Además, por el principio del máximo, $|\varphi(z)| < 1$ para $z \in \Omega$. Luego $\varphi(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Fijamos ahora w tal que $|w| < 1$ y $\epsilon > 0$. Definimos el conjunto $K_\epsilon = \varphi^{-1}(|w| \leq 1 - \epsilon) \subset \Omega$ que es compacto, pues φ es propia como vimos anteriormente. Por el lema 1.1.15 podemos construir una curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ tal que

$$n(\gamma, z) = 1 \quad \text{cuando} \quad z \in K_\epsilon.$$

Sabemos además que $n(\varphi(\gamma), w)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \varphi(\gamma)$, luego por construcción de γ

$$|\varphi(z)| > 1 - \epsilon,$$

si $|w| < 1 - \epsilon$, podemos concluir que

$$n(\varphi(\gamma), w) = n(\varphi, 0).$$

Por el principio del argumento 1.1.23, el número de ceros de $\varphi - w$ debe ser igual al número de ceros de φ , que sabemos tiene un único cero simple en $z = 0$. Haciendo tender ahora $\epsilon \rightarrow 0$ concluimos que

$$\varphi(z) = w$$

posee una única solución en $|w| < 1$. Es decir φ es biyectiva.

Observación 3.2.1 La función $\log|z| - u_f(z)$ que aparece en la prueba anterior se denomina la **función de Green del disco unidad**.

Entre dominios de \mathbb{C} , el ser conformemente equivalentes, o biholomorfos, es claramente una relación de equivalencia. Esto es consecuencia de que dominios propios simplemente conexos son biholomorfos y el representante canónico de tales dominios es \mathbb{D} .

3.3. El teorema de Carathéodory

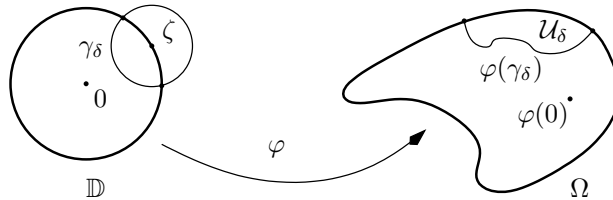
Todo dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan es necesariamente simplemente conexo ya que, por el teorema de la curva de Jordan, la frontera divide al plano en dos componentes conexas disjuntas. Por otra parte, sea $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ la aplicación de Riemann. Si suponemos que φ extiende a un homeomorfismo $\hat{\varphi} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$, necesariamente $\partial\Omega = \hat{\varphi}(\partial\mathbb{D})$ es una curva de Jordan. El teorema de Carathéodory prueba el recíproco

Teorema 3.3.1 *Sea φ una aplicación conforme de \mathbb{D} sobre una región de Jordan Ω . Entonces φ extiende a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ sobre $\overline{\Omega}$. En particular $\varphi(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es una parametrización de $\partial\Omega$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Ω es acotado como aplicación del teorema 3.2.1. Veamos en primer lugar que φ puede ser extendida con continuidad en cada $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Para ello tomamos $0 < \delta < 1$ y definimos el arco circular

$$\gamma_\delta = \mathbb{D} \cap \{z : |z - \zeta| = \delta\}.$$

La idea general de la prueba es la siguiente: $\varphi(\gamma_\delta)$ determina una región $\mathcal{U}_\delta \subset \Omega$ cuya clausura $\overline{\mathcal{U}_\delta} \subset \overline{\Omega}$ se contrae en un punto cuando $\delta \rightarrow 0$. Demostraremos que el diámetro de $\partial\mathcal{U}_\delta$ tiende a 0, con lo cual el diámetro de \mathcal{U}_δ también tiende a 0. De aquí se concluirá la existencia y continuidad de la extensión.



El arco, analítico y abierto, $\varphi(\gamma_\delta)$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$ y su longitud viene dada por:

$$L(\delta) = \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| |dz|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$L^2(\delta) = \left(\int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)| |dz| \right)^2 \leq \left(\int_{\gamma_\delta} |dz| \right) \left(\int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 |dz| \right) \leq \pi\delta \int_{\gamma_\delta} |\varphi'(z)|^2 |dz|,$$

de modo que para $r < 1$,

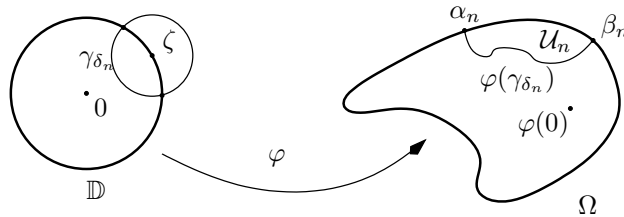
$$\int_0^r \frac{L^2(\delta)}{\delta} d\delta \leq \pi \iint_{\mathbb{D} \cap D(\zeta, r)} |\varphi'(z)|^2 dx dy = \pi \text{área}(\varphi(\mathbb{D} \cap D(\zeta, r))) < \infty \quad (3.3)$$

pues Ω es acotado.

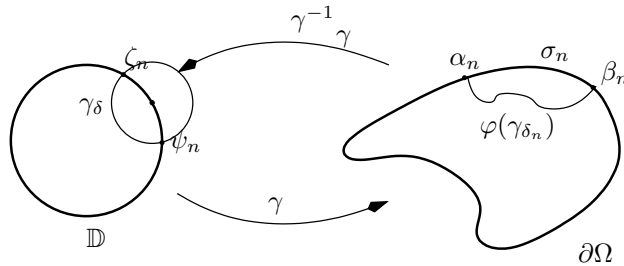
De esta forma podemos tomar una sucesión decreciente $\delta_n \rightarrow 0$ de manera que $L(\delta_n) \rightarrow 0$. Cuando $L(\delta_n) < \infty$, la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$ tiene dos puntos finales α_n, β_n , y ambos

están en $\partial\Omega$ puesto que por la proposición 1.1.3, φ es propia. Además,

$$|\alpha_n - \beta_n| \leq L(\delta_n) \rightarrow 0$$



Sea γ un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$ sobre $\partial\Omega$. Escribimos $\alpha_n = \gamma(\zeta_n)$ y $\beta_n = \gamma(\psi_n)$. Como γ es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $|\zeta_n - \psi_n| < \delta$ entonces $|\gamma(\zeta_n) - \gamma(\psi_n)| < \epsilon$. Sin embargo, γ^{-1} también es uniformemente continua, es decir, existe $\eta > 0$ tal que si $|\alpha_n - \beta_n| < \eta$ entonces $|\zeta_n - \psi_n| < \delta$.



De esta forma, si denotamos por σ_n el subarco cerrado en $\partial\Omega$ con el menor diámetro y puntos finales α_n y β_n , podemos concluir por (3.3) que,

$$\text{diam}(\sigma_n) \rightarrow 0.$$

Por el teorema de la curva de Jordan, la curva $\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})$ divide el plano en dos regiones, y una de ellas, que denotamos \mathcal{U}_n , es acotada.

La componente no acotada \mathcal{V} del complementario de $\partial\Omega$ es abierta y conexa, luego arco-conexa, así que si $z \in \mathcal{U}_n \cap \mathcal{V}$ entonces existe una curva γ_z desde z hasta ∞ contenida en \mathcal{V} . Ahora, como $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y $\sigma_n \subset \partial\Omega$, γ_z no se encuentra en $\partial\mathcal{U}_n$ contradiciendo que \mathcal{U}_n es acotada. Luego, $\mathcal{U}_n \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y, por lo tanto, $\mathcal{U}_n \cap \partial\mathcal{V} = \emptyset$. Por el teorema de la curva de Jordan, aplicado sobre $\partial\Omega$, se sigue que $\mathcal{U}_n \subset \Omega$. Ahora,

$$\text{diam}(\partial\mathcal{U}_n) = \text{diam}(\sigma_n \cup \varphi(\gamma_{\delta_n})) \rightarrow 0,$$

por lo que podemos concluir que

$$\text{diam}(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0. \tag{3.4}$$

Definimos

$$D_n = \mathbb{D} \cap \{z : |z - \zeta| < \delta_n\}.$$

Se tiene que $\varphi(D_n)$ y $\varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n})$ son conjuntos conexos que no cortan la curva $\varphi(\gamma_{\delta_n})$. Además como $\varphi(\mathbb{D}) = \Omega$, se verifica la alternativa:

$$\varphi(D_n) = \mathcal{U}_n \quad \text{o} \quad \varphi(\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}) = \mathcal{U}_n.$$

Para n suficientemente grande,

$$\text{diam}(\varphi(\mathbb{D} \setminus D_n)) \geq \text{diam}(\varphi(D(0, 1/2))) > 0$$

y por (3.4)

$$\text{diam}(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0.$$

Luego $\varphi(D_n) = \mathcal{U}_n$ para n suficientemente grande.

Dado que δ_n es decreciente y $\varphi(D_{n+1}) \subset \varphi(D_n)$, concluimos por el teorema de Cantor (veáse [4, 3.7, p. 19]) que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi(D_n)}$$

determina un único punto y por tanto φ extiende con continuidad a $\mathbb{D} \cup \{\zeta\}$.

Denotamos $\hat{\varphi} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\Omega}$ a la extensión de φ , esto es $\hat{\varphi}(z) = \varphi(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Veamos que φ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Consideramos sucesiones $z_n, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$ que converge a $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y supongamos que $\hat{\varphi}(z_n) \rightarrow \zeta$ mientras que $\hat{\varphi}(w_n) \rightarrow \eta$ con $\zeta \neq \eta$, $\zeta, \eta \in \partial\Omega$. Un razonamiento análogo al empleado anteriormente muestra que para n suficientemente grande las sucesiones $\hat{\varphi}(z_n)$ y $\hat{\varphi}(w_n)$ están en \mathcal{U}_n cuyo diámetro tiende a cero, lo cual sería imposible si $\zeta \neq \eta$. Luego $\hat{\varphi}$ es continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

Finalmente veamos que la extensión $\hat{\varphi}$ es biyectiva. Para demostrar en primer lugar que es inyectiva basta comprobar que si $\hat{\varphi}(\zeta_1) = \hat{\varphi}(\zeta_2)$ entonces $\zeta_1 = \zeta_2$. En primer lugar, como $\hat{\varphi}$ está bien definida, $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\Omega$. Basta por tanto comprobar la inyectividad de $\hat{\varphi}$ en $\partial\mathbb{D}$. Supongamos que $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}, j = 1, 2$. La curva de Jordan que se obtiene como conjunto imagen bajo $\hat{\varphi}$ de los radios que determinan ζ_1 y ζ_2 (Figura 3.2),

$$\{\varphi(r\zeta_1) : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\varphi(r\zeta_2) : 0 \leq r \leq 1\}$$

delimita una región acotada en Ω que denominamos \mathcal{W} .

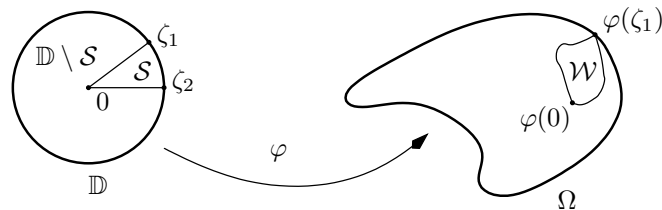


Figura 3.2: Figura

Empleando el razonamiento anterior pero reemplazando ahora las componentes \mathcal{U}_n , D_n y $\mathbb{D} \setminus \overline{D_n}$ por \mathcal{W} y las dos componentes conexas, \mathcal{S} y $\mathbb{D} \setminus \mathcal{S}$ que determinan los radios

anteriores en el disco unidad, esto es las componentes de

$$\mathbb{D} \setminus (\{r\zeta_1 : 0 \leq r \leq 1\} \cup \{r\zeta_2 : 0 \leq r \leq 1\}),$$

podemos afirmar que $\mathcal{W} \subset \Omega$ y $\varphi^{-1}(\mathcal{W})$ es una de estas dos componentes conexas. Además, como $\varphi(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\Omega$, concluimos:

$$\varphi(\partial\mathbb{D} \cap \partial\varphi^{-1}(W)) \subset \partial\Omega \cap \partial W = \{\varphi(\zeta_1)\}.$$

De esta forma, φ es constante en un arco de $\partial\mathbb{D}$. Por el principio de reflexión de Schwarz en arcos analíticos 1.3.13 y el teorema de unicidad se sigue que $\varphi - \varphi(\zeta_1) \equiv 0$. Esta contradicción muestra que φ debe ser inyectiva. La sobreyectividad sigue pues $\hat{\varphi}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\Omega$ y por ser inyectiva, $\hat{\varphi}(\partial\mathbb{D})$ es una curva de Jordan.

Una consecuencia del teorema de Carathéodory es el siguiente:

Corolario 3.3.2 *Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva cerrada de Jordan. Entonces Γ puede ser orientada de tal forma que*

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 0, & z \text{ pertenece a la componente no acotada de } \mathbb{C} \setminus \Gamma \\ 1, & z \text{ pertenece a la componente acotada de } \mathbb{C} \setminus \Gamma \end{cases}$$

Demostración. Sea φ la aplicación conforme de Riemann desde \mathbb{D} sobre la componente acotada Ω de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Por el teorema de Carathéodory φ extiende a un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$. Esto equivale a que las funciones

$$\varphi_{r_n}(z) = \varphi(r_n z)$$

converjan uniformemente a $\varphi(z)$ en $\partial\mathbb{D}$ cuando $r_n \rightarrow 1$.

Fijamos ahora $w \in \Omega$ y consideramos las curvas

$$\Gamma(t) = \varphi(e^{it}) \quad \text{y} \quad \Gamma_{r_n}(t) = \varphi(re^{it}).$$

De manera similar a la demostración del lema 1.1.15 cubrimos Γ por un número N finito de discos de la forma

$$B_j = \{z : |z - \Gamma(t_j)| < \text{dist}(\Gamma, w)\}, \quad j = 1, \dots, N$$

de manera que $\Gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j$ para una partición $\{t_j\}_{j=1}^N$ del intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, para r_n lo suficientemente cercano a 1,

$$\Gamma_{r_n}([t_{j-1}, t_j]) \cup \Gamma([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j.$$

Ahora, añadiendo segmentos rectilíneos (B_j es un conjunto convexo) entre los puntos finales de estos arcos, podemos escribir el ciclo

$$\Gamma - \Gamma_{r_n} = \sum_{j=1}^{4N} \beta_j,$$

donde cada β_j es una curva cerrada contenida en B_j . Por tanto, para r_n cercano a 1

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z-w} dz - \int_{\Gamma_{r_n}} \frac{1}{z-w} dz = \sum_{j=1}^{4N} \int_{\beta_j} \frac{1}{z-w} dz = 0,$$

y por tanto

$$\Gamma \sim \Gamma_{r_n}. \quad (3.5)$$

Como $\varphi(z) - w$ tiene un único cero simple en $r\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < r\}$ podemos concluir, por el principio del argumento 1.1.23 y (3.5), que

$$1 = n(\Gamma_{r_n}, w) = \int_{\Gamma_{r_n}} \frac{1}{z-w} dz = \int_{\Gamma} \frac{1}{z-w} dz = n(\Gamma, w),$$

donde hemos considerado la orientación habitual en $\partial(r\mathbb{D})$. Así, $\varphi(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, es una parametrización de Γ que es homeomorfa a $\partial\mathbb{D}$. Luego

$$n(\Gamma, w) = 1 \quad \text{cuando } w \in \Omega.$$

Finalmente $n(\Gamma, w) = 0$ para cada w en la componente no acotada $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Bibliografia

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [2] Umberto Bottazzini and Jeremy Gray. *Hidden harmony—geometric fantasies*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2013. The rise of complex function theory.
- [3] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex analysis*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013. Translated from the Catalan by Ignacio Monreal.
- [4] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.
- [5] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformization of Riemann surfaces*. Heritage of European Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016.
- [6] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] P. R. Garabedian. A simple proof of a simple version of the Riemann mapping theorem by simple functional analysis. *Amer. Math. Monthly*, 98(9):824–826, 1991.
- [8] Jeremy Gray. On the history of the Riemann mapping theorem. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, (34):47–94, 1994.
- [9] Robert E. Greene and Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variable*, volume 40 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 2006.
- [10] Mark Levi. Riemann mapping theorem by steepest descent. *Amer. Math. Monthly*, 114(3):246–251, 2007.
- [11] Donald E. Marshall. *Complex analysis*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2019.
- [12] H. P. McKean. A quick proof of Riemann’s mapping theorem. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(3):405–409, 1999.
- [13] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [14] J. L. Walsh. History of the Riemann mapping theorem. *Amer. Math. Monthly*, 80:270–276, 1973.

Complex analysis: Riemann mapping theorem.

Abstract

THIS MEMOIR concerned with *Real and Complex Analysis*. It is divided into three chapters. The first one deals with harmonic and holomorphic functions. We introduce the index of a closed curve with respect to a point. The index induces an equivalence relation in the set of closed curves inside domains. We will extend the Cauchy's theorem as well as the argument principle to the homological setting. Properties of harmonic functions are studied and the Dirichlet's problem is solved in the unit disc by means of Poisson's integral formula. For nonnegative harmonic functions, Harnack's inequality and Harnack's principle will be proved.

In the second chapter we will consider the Dirichlet's problem for bounded domains in the plane. We introduce subharmonic functions and we give a characterization of subharmonic functions involving the maximum principle and its harmonic majorant. Motivated by the behaviour of convex functions of one real variable, Perron's method is introduced. It allows to obtain a canonical solution to the Dirichlet's problem in any bounded domain. Boundary behaviour of Perron's solution is studied at regular boundary points. Such points admit subharmonic barriers. From there we obtain the desired boundary behaviour. Simply connected bounded domains in the plane are shown to be regular.

Finally, in the last chapter we introduced conformal mappings from a geometrical point of view. We show that they are precisely the injective holomorphic mappings with nonzero derivative. The rest of the chapter is devoted to the proof of Riemann's mapping theorem as well as Carathéodory's theorem on the extension to the boundary of the Riemann's map in case of domains bounded by Jordan curves.

1. Introduction

The first chapter collects fundamental properties of holomorphic functions. Harmonic functions are introduced and the relationship between holomorphic and harmonic functions will be studied on simply connected domains. We define an equivalence relation in the set of closed curves inside a given domain, the homology of curves, through the so-called index of a closed curve. Dirichlet's problem in the unit disc \mathbb{D} is shown to have a solution given by the Poisson's integral formula. We end the chapter with Harnack's principle which will take a fundamental role in the development of the second chapter. In this second chapter, we deal with the Dirichlet's problem in general bounded domains. Subharmonic functions are defined and the maximum principle is proved. Perron's method allows to construct a solution to the Dirichlet's problem. The convergence of the solution to the boundary data depends on the geometry of the boundary of the domain. Regular points are the ones where the convergence is satisfied. A sufficient condition on a boundary point is given in terms of subharmonic functions. We finish the chapter by showing that bounded simply connected domains are regular.

Finally, in the third chapter, we define the conformal mapping and conformally equivalent applications to then study Riemann's conformal representation theorem. To finish the memoir we study Carathéodory's theorem, extending the conformal maps to the boundary.

2. Outline of the first chapter.

Harmonic functions appear in practice as solutions of Laplace's **TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de Septiembre, 2020**

equation:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

These in turn share properties similar to the properties possessed by holomorphic functions. In particular, in simply connected domains one class can be recovered from the other and viceversa. Starting from the concept of the index of a closed curve, known results in the subject of complex variable such as Cauchy's theorem and the argument principle will be generalized to the homological setting.

Dirichlet's problem in the unit disc \mathbb{D} is solved through Poisson's integral formula. We finish the chapter by studying the class of non-negative harmonic functions. Using Harnack's inequality, we prove Harnack's principle. Such result will be used in the solution of Dirichlet's problem on general bounded domains.

3. Outline of the second chapter.

In this chapter, we will deal with Dirichlet's problem in bounded domains of \mathbb{C} . To achieve a solution to the problem we use Perron's method about the maximality of a certain family of subharmonic functions associated with the Dirichlet's. The maximum principle for subharmonic will pervade through the proof over the all chapter. Finally we will introduce regular boundary points and give a sufficient condition, in terms of subharmonic functions, on the boundary point such that Perron's solutions will converge to the boundary data. Such condition on boundary is satisfied by simply connected bounded domains.

4. Outline of the third chapter.

WE finish the memoir with this chapter. In the first section, we will begin by introducing conformal mappings as the ones that preserves angles and orientation. Imposing injectivity they are precisely the functions which are holomorphic with nonzero derivative.

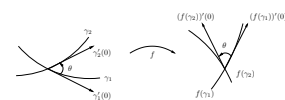


Figure 1: Conformal mapping.

The second section contains the proof of Riemann's mapping theorem:

Any simply connected bounded domain $\Omega \subset \mathbb{C}$ is conformally equivalent to \mathbb{D} .

We finish the memoir with Carathéodory's theorem on the extension to the boundary of the Riemann's map. The proof presented in the memoir depends heavily on the Jordan curve theorem.

References

- [1] Joaquim Bruna and Julià Cufí. *Complex analysis*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013. Translated from the Catalan by Ignacio Monreal.
- [2] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [3] Donald E. Marshall. *Complex analysis*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 2019.