Escuela de Doctorado
y Estudios de Posgrado
Universidad de La Laguna

José Fabrizio Pineda Ramos

Enseñanza y Aprendizaje de los Números Complejos a través de la Historia y la Geometría Dinámica

Teaching and Learning of Complex Numbers through History and Dynamic Geometry

Trabajo Fin de Máster

Máster Interuniversitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas

La Laguna, septiembre de 2020

Dirigido por
Dra. Teresa J. Bermúdez de León
Dr. Juan Agustín Noda Gómez

Dra. Teresa J. Bermúdez de León
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Dr. Juan Agustín Noda Gómez
IES Güímar
Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes
38071 Santa Cruz de Tenerife

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que han participado directa o indirectamente en la elaboración de esta memoria.

En primer lugar a mis tutores, Teresa Bermúdez y Juan Agustín Noda, por proponer esta interesante línea y por su extraordinaria labor e implicación como directores. Asimismo, les agradezco la gran calidad docente y personal con la que acometen sus proyectos y que me han transmitido durante los meses de trabajo.

A la profesora Alicia Bruno, por su inestimable ayuda, por el interés mostrado en el desarrollo del trabajo y por su agradable trato personal.

A Alejandro González Martín, por su colaboración en la Encuesta de Control, sus valiosas aportaciones en el diseño de las preguntas y por la gran cantidad de referencias que nos ha facilitado para la elaboración de esta memoria.

A los profesores de Secundaria que realizaron la Encuesta de Control, por encontrar un momento para contestar a las preguntas y haber participado en su mejora.

A los alumnos de primer curso de los grados de Física y Matemáticas que participaron en la Encuesta de Control, por aportarnos su visión y su experiencia en el tema de los Números Complejos.

A Sara, Jessica y Ana, por compartir conmigo este curso académico tan particular y por hacerlo tan divertido y llevadero.

A mis amigos de siempre, por acompañarme en todos los caminos que emprendo.

A mi familia, por el aliento con el que me impulsa.

Muchas gracias a todos.

José Fabrizio Pineda Ramos
La Laguna, 6 de septiembre de 2020

Resumen · Abstract

Resumen

En la tradición didáctica, los números complejos han tenido un enfoque frío, descontextualizado y puramente formal que contrasta con su desarrollo histórico-epistemológico. Su presencia en el currículo de Bachillerato es anecdótica, carente de aplicaciones y de referencias en el currículo de asignaturas posteriores y afines. Todo esto provoca que los estudiantes se queden con una visión superficial de los números complejos y no los valoren como uno de los mayores descubrimientos matemáticos de la Historia.

En este trabajo se pretende hacer una aproximación amplia a los números complejos, introduciéndolos como una ampliación de algo conocido (los puntos en el plano cartesiano), mostrando la trayectoria histórica de los conceptos fundamentales en esta materia y utilizando software de Geometría Dinámica para desarrollar la teoría por medio de applets. Con esto buscamos que los estudiantes construyan los conceptos a través de la manipulación y valoren las implicaciones de los números complejos en la propia matemática.

Palabras clave: *número complejo, historia, geometría dinámica, modos de pensamientos, aplicaciones.*

Abstract

In the didactic tradition, complex numbers approaches have been out of context and their development purely formal. These approaches contrast with the real, historic and epistemologic development of the concept of complex number. Their presence in study programmes are anecdotic, without applications nor references in subsequent programmes. All this causes students to adquire a perfunctory vision of complex numbers and disown them as one of the most relevant discoveries in mathematics.

In this dissertation we aim to make a widespread approach to complex numbers, introducing them as an extension of something known (the cartesian coordinate system), showing the historical trajectory of their fundamental concepts in this matter and using Dynamic Geometric software in order to develop theory through applets. The main objective is for students to build concepts handling mechanisms and valuing the implications of complex numbers in mathematics itself.

Keywords: *complex number, history, dynamic geometry, ways of thinking, applications.*

Contenido

Anexo I: Rúbrica de Evaluación . . . 87

Introducción

Los Números Complejos conforman uno de los **grandes temas** de la Matemática moderna. Desde su formalización hasta la actualidad, han constituido una herramienta importante, tanto en la **investigación matemática** como en el ámbito de las **aplicaciones en otras ciencias**.

En lo referente a su enseñanza, en España se han estudiado tradicionalmente en **Bachillerato**, aunque en los últimos planes de estudio, las recurrentes reformas educativas los han suprimido ocasionalmente del temario.

Actualmente, los Números Complejos **se imparten** en la asignatura de modalidad **Matemáticas I** de 1º de Bachillerato de Ciencias de la LOMCE. Pertenecen al **Bloque de Aprendizaje II: Números y Álgebra**. Concretamente, se desarrollan en el Criterio de Evaluación número 3, explícitamente en el contenido número 4.

Los Estándares de Aprendizaje Evaluables correspondientes a la redacción de dicho criterio y en relación con en el tema de Números Complejos son los siguientes:

- 41. Reconoce los distintos tipos de números (reales y complejos) y los utiliza para representar e interpretar adecuadamente información cuantitativa.

- 47. Valora los números complejos como ampliación del concepto de números reales y los utiliza para obtener la solución de ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales sin solución real.

- 48. Opera con números complejos, los representa gráficamente y utiliza la fórmula de Moivre en el caso de las potencias.

Criterio de evaluación **3. Identificar y utilizar los números reales sus operaciones y propiedades, así como representarlos en la recta para recoger, interpretar, transformar e intercambiar información cuantitativa y resolver problemas de la vida cotidiana, eligiendo la forma de cálculo más apropiada en cada caso. asimismo valorar críticamente las soluciones obtenidas, analizar su adecuación al contexto y expresarlas según la precisión exigida (aproximación, redondeo, notación científica…) determinando el error cometido cuando sea necesario; además, conocer y utilizar los números complejos y sus operaciones para resolver ecuaciones de segundo grado, el valor absoluto para calcular distancias y el número e y los logaritmos decimales y neperianos para resolver problemas extraídos de contextos reales.** Este criterio trata de comprobar si el alumnado representa en la recta los números reales y realiza operaciones entre ellos, con la posible intervención de la notación científica, los logaritmos decimales o neperianos, el valor absoluto...; que le permitan tratar información cuantitativa de distintas fuentes (prensa escrita, Internet…), y resolver problemas reales, eligiendo la forma de cálculo más adecuada en cada momento (mental, escrita, mediante medios tecnológicos…). También se trata de comprobar si el alumnado expresa los resultados obtenidos mediante la precisión necesaria, calculando y minimizando el error cometido y utiliza los números complejos y sus operaciones así como el número e, y los logaritmos decimales y neperianos y sus propiedades, como herramientas para resolver problemas sacados de contextos reales.	COMPETENCIAS: CMCT, CD, AA	BLOQUE DE APRENDIZAJE II: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Estándares de aprendizaje evaluables relacionados 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.	**Contenidos** 1. Significado y utilización de los números reales para la comprensión de la realidad. Valor absoluto. 2. Uso de desigualdades. Cálculo de distancias en la recta real y representación de intervalos y entornos. 3. Realización de aproximaciones y cálculo de errores. Uso de la notación científica. 4. Significado de los números complejos como ampliación de los reales y representación en forma binómica, polar y gráfica. Operaciones elementales entre números complejos y aplicación de la fórmula de Moivre. 5. Sucesiones numéricas: cálculo del término general, estudio de la monotonía y la acotación. El número e. 6. Uso de logaritmos decimales y neperianos.		

Figura 0.1: Extracto del currículo de Matemáticas I de Canarias.

Pasamos a describir el contenido de los capítulos que componen la memoria.

En el **primer capítulo** plantearemos el Problema de Innovación, delimitaremos las causas que nos han llevado a realizar el presente trabajo de Innovación y fundamentaremos teóricamente nuestras propuestas, citando algunos autores relevantes que hayan tratado el tema con anterioridad. Determinaremos los motivos por los que proponemos un aprendizaje a través de la Historia y de la Geometría Dinámica.

Además, estableceremos un **enfoque de aprendizaje** concreto al que haremos referencia durante la memoria: la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska.

Anna Sierpinska es profesora en la Universidad de Concordia y experta en Epistemología Matemática. Su teoría de los modos de pensamiento aporta una perspectiva pedagógica de la manera en que los estudiantes se aproximan a los conceptos matemáticos. Dicha teoría nos permitirá etiquetar los razonamientos que los estudiantes puedan seguir para llevar a cabo nuestra propuesta.

Posteriormente, presentaremos las preguntas que diseñamos para llevar a cabo una **encuesta** dirigida al profesorado de Secundaria y a estudiantes que hubieran estudiado los Números Complejos con nuestra propuesta. Agruparemos las preguntas según su naturaleza y extraeremos algunas conclusiones de las respuestas. Dichas respuestas nos servirán para fijarnos pautas a la hora del diseño de la Propuesta de Innovación: incidir en asuntos concretos, motivar conceptos, ordenar secuencias de aprendizaje, etc.

En el **segundo capítulo**, estableceremos los objetivos didácticos que perseguimos con este trabajo.

En el **tercer capítulo**, presentamos una propuesta de Intervención donde ofrecemos una mirada histórica tratando los números complejos desde una **perspectiva cronológica**.

Comenzaremos con una sección sobre **dificultades didácticas** en conjuntos numéricos previos al conjunto de los números complejos. Con esto, trataremos de buscar **analogías** en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con los que ayudarnos para deducir la noción de unidad imaginaria y de número complejo.

Posteriormente, en la Sección *Duelos y cúbicas: Tartaglia y Cardano*, veremos el **origen histórico** de los números complejos, que no es otro que la resolución de cúbicas en el contexto del siglo XVI, donde los matemáticos, como cualquier colectivo de la época, no se movían exclusivamente por intereses puramente académicos, sino por motivos tan comunes y banales como dinero, prestigio o envidia. Analizaremos los problemas matemáticos a los que se enfrentaban y el intrincado desarrollo de los acontecimientos que tuvo como consecuencia la **resolución de cúbicas generales**.

En la Sección *Imaginando lo Imposible: Descartes y Euler*, recorreremos la **trayectoria** que tuvo la idea intuitiva de número complejo, desde sus primeras concepciones hasta su manejo en fórmulas y ecuaciones. Destacaremos algunas ideas sobre la **aceptación** de $\sqrt{-1}$ como un verdadero número, así como ideas sobre su representación y localización.

En la Sección *La formalización: Gauss y Cauchy*, destacaremos las aportaciones de estos dos matemáticos al avance en el estudio y la comprensión de los números complejos. Determinaremos la entrada definitiva de los números complejos a las matemáticas, su posterior desarrollo vía la **Teoría de Funciones de Variable Compleja**, así como algunos ejemplos y **aplicaciones**.
Terminaremos el capítulo con algunas pautas para utilizar la Historia como he-

rramienta didáctica en el aula.

En el **cuarto capítulo** presentamos una propuesta de Intervención sobre el uso de programa GeoGebra con los números complejos, donde desarollamos pormenorizadamente la secuencia de aprendizaje objeto de esta memoria.

En la Sección *Primeros pasos* adjuntamos un enlace para acceder al Libro de GeoGebra que utilizaremos para abordar la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Tratamos el problema de resolver ecuaciones y la aparición de radicales de índice par y radicando negativo. Además, comenzamos a representar números complejos partiendo de la idea de puntos en el plano.

Posteriormente, en la secciones *El espejo en el eje OX* y *Salvando las Distancias*, se trabajan los conceptos de complejo conjugado y módulo a partir de la intuición y la manipulación mediante una serie de cuestiones que los estudiantes deberán realizar con ayuda del GeoGebra.

La Sección *¿Cómo se comportan?* es la más extensa y abarca las operaciones que se pueden hacer con números complejos con la forma binómica. El planteamiento es el siguiente: los estudiantes **experimentan** con el GeoGebra y tratan de lanzar **hipótesis** sobre la operación, su definición y propiedades para finalmente **formalizar** las intuiciones despertadas en los estudiantes con una fórmula. De este modo invertimos la secuencia tradicional y fomentamos la **curiosidad** del alumnado.

En la Sección de *Representaciones* trabajaremos la forma polar de un número complejo, que servirá para motivar la forma trigonométrica del mismo y que a su vez facilitará la comprensión de la fórmula de Moivre. Se seguirá la misma metodología que para la sección anterior.

Para concluir el capítulo, en la Sección *Aplicaciones* se mostrarán 5 temas en los que los números complejos juegan un papel relevante.

El **quinto capítulo** daremos una propuesta de Temporalización y algunas actividades evaluables, así como una propuesta de seguimiento de las mismas.

La memoria concluirá con el **sexto capítulo**, en el que discutiremos las **conclusiones** finales extraídas a lo largo del período de realización de este trabajo.

1

Planteamiento del Problema de Innovación

En los Estándares de Aprendizaje Evaluables expuestos en la Introducción, creemos que hay ciertos desenfoques y deficiencias que condicionan la enseñanza y por lo tanto, el aprendizaje de los números complejos.

- El estándar 41 nos parece **desenfocado**. Creemos que es más acertado centrarse en la información **cualitativa**. Los números complejos supusieron un cambio de paradigma en las Matemáticas y esto debe quedar claro a los estudiantes mediante una perspectiva epistemológica.

- El estándar 47 nos parece **deficiente**. Consideramos que la resolución de ecuaciones no debe ser el fin último de la enseñanza y aprendizaje de números complejos, sino una herramienta para extraer información cualitativa sobre ceros de polinomios.

- El estándar 48 nos parece **deficiente**. Operar con números complejos y representarlos gráficamente debe servir para extraer conclusiones algo más profundas, así como para comprender los cambios de representación de números complejos.

Además, consideramos que el tema de Números Complejos no se aborda desde la perspectiva adecuada. Se presenta a los estudiantes en **pocas semanas**, lo que fomenta que su desarrollo sea esencialmente algebraico, que las ideas no se motiven con la suficiente claridad y que su evaluación se limite a aspectos puramente **procedimentales**. Al finalizar el tema, no vuelve a hacerse referencia a él hasta el primer curso de algunos grados como Física, Matemáticas e Ingenierías. Esto provoca que el contenido sea **fácilmente olvidado** por los estudiantes, que **no reutilizan** sus conocimientos en este tema ni encuentran aplicaciones en las que apreciar la importancia y la belleza de estos números.

Analizando los **conocimientos previos** de los que deben partir los estudiantes a la hora de abordar este tema, observamos que durante la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, los estudiantes se enfrentan repetidas veces a las **ecuaciones cuadráticas**

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0. \tag{1.1}$$

Resolviendo dicha ecuación, se llega a la fórmula que despeja la x,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Luego se estudia el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces (1.1) tiene 2 soluciones reales.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces (1.1) tiene 1 solución real doble.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces (1.1) **no tiene solución real**.

En este punto, el alumnado se queda con la idea de que buscar raíces de índice par de números negativos es **absurdo**. De hecho, es frecuente que se utilice la fórmula para la ecuación de segundo grado precisamente para **cegar la curiosidad** de los estudiantes, en lugar de utilizarla como una vía para que descubran el conjunto de los números complejos de manera guiada.

Bajo nuestro punto de vista, los números complejos son algo que los estudiantes ya manejaban implícitamente al trabajar con puntos en el plano cartesiano. La teoría de números complejos es por tanto, una **ampliación de conocimiento** que se sustenta en la superación de la comprensión de la unidad imaginaria. Tras discutir y aceptar i como un número, surge una nueva perspectiva con la que descubrir otras realidades en matemáticas.

Al llegar a Matemáticas I de 1º de Bachillerato, los estudiantes pueden desarrollar un **conflicto cognitivo** a la hora de ampliar el conjunto de los números reales, ya que, si el docente no motiva el tema, pueden verse manejando expresiones que el curso anterior se adjetivaban de absurdas, incongruentes o impensables.

Esta concepción de los números complejos fue determinante a lo largo de la Historia. Los matemáticos tuvieron que lidiar con la raíz cuadrada de un número negativo, buscarle sentido, propiedades y formalidad. Sin embargo, la enseñanza suele limitarse a la exposición directa de propiedades que costó mucho tiempo llegar a comprender.

Expuestos estos motivos, creemos que hay un **margen de mejora** razonable para enseñar números complejos desde una perspectiva innovadora, aprovechando la dilatada trayectoria histórica del concepto de número complejo y las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). Estas últimas están presentes en el currículo de Matemáticas como **competencia transversal**, por lo que su aplicación a este tema entra dentro de lo previsto en la legislación vigente como elemento dinamizador del aprendizaje.

Nuestra propuesta tendrá base en dos tipos de aproximación a los números complejos:

- Una **aproximación epistemológica** hacia los números complejos que recorra las dificultades históricas que hubo a la hora de comprenderlos.
- Una **aproximación geométrica y dinámica**, centrada en la manipulación de objetos matemáticos por medio de las TIC, que fomenten el interés de los estudiantes, así como una mayor comprensión de los conceptos y un recuerdo más nítido de ellos en cursos posteriores.

Para exponer la propuesta didáctica objeto de esta memoria, nos fundamentaremos en investigaciones previas.

En cuanto a la metodología que planteamos para llevar a cabo nuestra propuesta, se usarán los siguientes modelos de enseñanza:

- **Expositivo:** El docente proporcionará información de manera clara y ordenada, para poder explicar de la manera más sencilla posible los conceptos más complicados.
- **Inductivo básico:** A partir de ejemplos concretos, el alumnado y el docente trabajarán de manera conjunta para generalizar los resultados y formular reglas y principios.

1.1. Antecedentes

El estudio de la enseñanza y aprendizaje de los números complejos, ya sea a nivel de la educación en Bachillerato como en los primeros cursos de Universidad en distintos grados, ha sido el tema de investigación de diversos autores. A continuación citaremos algunos trabajos realizados por diferentes grupos de investigación.

En 2001, Bagni publica el estudio [2] sobre una prueba con 73 alumnos con edades entre los 16 y 18 años de edad. A los diferentes grupos se le propone la resolución de ecuaciones de segundo grado y algunas de grado tres.

Se plantean dos problemas: uno en el que se da la resolución de una ecuación de grado tres sin término en x^2 y otro sobre la resolución de $x^2 = -1$. Los estudiantes **aceptaban en mayor medida** la resolución de la cúbica, con un 30 %, que la resolución de la ecuación cuadrada con un 13 %. Parece sorprendente que los estudiantes asimilen mejor el ejemplo de la cúbica que el de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$.

En 2006, Merino hace un **recorrido histórico** por los principales matemáticos que desarrollaron los números complejos. En el artículo [15], el autor destaca las ideas más relevantes de cada matemático, elaborando una línea temporal que resume la trayectoria de los números complejos desde las cúbicas estudiadas por Al-Khawarizmi en el siglo IX hasta la Teoría de Funciones de Variable Compleja iniciada por Cauchy a mediados del siglo XIX.

En 2007, Pardo y Gómez estudian en [17] la relación entre el desarrollo histórico y las dificultades en el aprendizaje de los números complejos.

Los autores comentan lo siguiente,

"El estudio ha tratado de buscar en el desarrollo histórico de los números complejos algunas de las dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas que han tenido que sortear los matemáticos y que la enseñanza actual no está teniendo en cuenta. Una revisión histórica preliminar, permitió identificar cuatro grandes etapas caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos: algebraica, analítica, geométrica y formal."

El trabajo se basa en un estudio con una muestra de 19 estudiantes del primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Valencia. Pardo y Gómez concluyen,

"El análisis confirma que la enseñanza y aprendizaje de los números complejos no está teniendo en cuenta las dificultades identificadas que han estado presentes a lo largo de la historia y que los estudiantes las reproducen y, en algunos casos, agravadas."

En 2012, Canal-Martínez en [4] hace una aproximación a los números complejos a partir de la historia de las matemáticas, uso de las TIC (en particular, GeoGebra) y aplicaciones tales como fasores y fractales.

También en 2012, Cortas y Edvard investigan la diversidad de concepciones sobre números complejos y sus representaciones que manifiesta una muestra de estudiantes suecos. En el artículo [16], los autores indagan a través de una encuesta en las ideas intuitivas y formales que tienen los estudiantes y clasifican las respuestas en diversas categorías para identificar las principales dificultades que se presentan al abordar los números complejos. El estudio hace hincapié en el hecho de que muchos estudiantes tratan los conceptos de número real y número complejo como conceptos excluyentes y trata de esclarecer en qué medida ocurre esto. Una de las conclusiones del estudio es que la falta de visualización puede desembocar en **graves problemas de entendimiento** de este materia.

Sobre representación de números complejos, en 2013 Hui y Lam estudian en [10] una aproximación a los números complejos a través de **métodos geométricos**. En este estudio se analiza la conveniencia de explicar los números complejos con vectores, compara la realización geométrica de la suma y el producto del caso real con la del caso complejo y propone material elaborado con los siguientes objetivos:

- **Provocar aprendizaje a partir de conocimientos previos.**
  Los autores señalan que el uso de **métodos geométricos** para extender el concepto de recta real al de plano complejo provoca que los estudiantes **modifiquen sus esquemas mentales** en el sentido de Piaget, es decir: **incorporan** nueva información a sus **conocimientos previos** y esto lleva a una **acomodación** de los conceptos.

- **Provocar aprendizaje conceptual y fomentar el conocimiento estructural.**
  Discutir las operaciones entre números complejos alternando números, símbolos y geometría conecta dichos modos de representación, permitiendo a los estudiantes elaborar un conocimiento más profundo sobre los números complejos.

- **Dar herramientas útiles para que los estudiantes sean resolutivos.**
  Señalan también los autores que el hecho de plantear la enseñanza de números complejos en forma de **tutoriales** en los que los estudiantes puedan interactuar entre ellos (**zona de desarollo próximo**) y tener el *feedback* del docente, puede mejorar la **concentración** de los estudiantes y repercutir positivamente en el proceso de aprendizaje.

También en 2013, Soon y Tin integran la Historia y las representaciones visuales en [22] en un estudio en el que organizan la enseñanza de la representación de los números complejos en el diagrama de Argand; exponen dificultades, errores y conceptos erróneos en el aprendizaje de los números complejos.

Los autores presentan **diferentes acercamientos** a la enseñanza de los números complejos (tradicional, con vectores, TIC, *storytelling*, fractales, aprendizaje por descubrimiento guiado y comparando la geometría de la recta real y el diagrama Argand). Concretamente, en el artículo se analizan los acercamientos con vectores, con TIC, con fractales y mediante descubrimiento guiado. Además, sugieren la utilización de la Historia para **provocar la curiosidad** en los estudiantes.

En 2014, Gotoman da una propuesta de intervención didáctica en la que trata aspectos históricos de los números complejos, propone actividades para trabajar las **representaciones geométricas** y muestra algunas **aplicaciones** de los números complejos. En las conclusiones de [8], la autora desaconseja el método tradicional para enseñar los números complejos, puesto que dicho método no promueve que los estudiantes obtengan un conocimiento profundo ni los motiva a aprender. Gotoman apunta que los métodos de enseñanza geométricos dan mejores resultados, siempre y cuando no se limiten a representar puntos en el plano de Argand, sino que se utilicen para explicar conceptos más avanzados como operaciones o aplicaciones de los números complejos. Además, recomienda a los profesores conocer su **origen histórico** y proponer ejercicios basados en problemas clásicos.

La autora destaca también, ciertos puntos conflictivos a la hora de enseñar y aprender los números complejos. El primero es la propia **existencia** de i y su propiedad definitoria $i^2 = -1$. Le sigue la **desafortunada elección** de los adjetivos “imaginario” o “complejo”, que pueden causar **escepticismo** o incredulidad en los estudiantes.

Indica Gotoman que la **mezcla de ideas** algebraicas y geométricas puede provocar que los estudiantes se desubiquen. Por último, Gotoman señala el **desconocimiento** generalizado de la **Historia** y del origen y las aplicaciones de los números complejos. Concluye que es **deber del docente** eliminar el posible escepticismo que los estudiantes puedan haber desarrollado hacia esta materia.

En 2015, Torcuato da una propuesta didáctica [24] para introducir los números complejos utilizando una **situación real**. Concretamente, se trata el problema de extinción del búho manchado a partir de actividades con el software de NetLogo (GeoGebra y Logo). Dicha experiencia fue llevada a cabo por 10 alumnos de Bachillerato.

Un problema que se detectó en dicha aproximación a los números complejos fue la necesidad de conocer sobre la marcha conceptos ajenos al currículo correspondiente. Para introducir los números complejos como los autovalores de una matriz se requerían conceptos nuevos, tales como diagonalización o dinámica de poblaciones. Estas nociones **requieren un alto grado de comprensión**, por lo que podrían **desviar la atención** del objetivo principal: provocar el aprendizaje de números complejos. Además, tener que familiarizarse con el software de NetLogo requiere tiempo y consume la atención de los estudiantes.

En el mismo año, Maumary y Maumary presentan en [13] un estudio para impartir los números complejos a estudiantes de ingeniería utilizando las **aplicaciones**. La idea era captar el interés del alumnado a través de dichas aplicaciones. Concretamente, se estudió la impedancia de un circuito eléctrico. La intervención no tuvo éxito dado que los estudiantes carecían de ciertas nociones previas de electricidad. Además, los encuestados **no recordaron** las aplicaciones.

Las autoras concluyen lo siguiente,

"Teniendo en cuenta lo analizado y los resultados de la encuesta nos preguntamos ahora, si el surgimiento de errores en las operaciones, el no poder incorporar la definición del número complejo e interpretarlo como una adición de dos objetos disociados y no pensarlo como un solo objeto matemático es consecuencia de no trabajar en paralelo todas las operaciones con su representación gráfica (las únicas que se ven son las de la suma y la resta)."

Nuestra intención es plantear una propuesta de intervención que integre diversas cuestiones analizadas en este apartado.

1.2. La Historia como herramienta didáctica

En esta sección trataremos la importancia de enseñar matemáticas haciendo uso de la Historia. Para ello hablaremos primero de la **dimensión histórica** de la Matemática, que muestra los beneficios de motivar los conceptos en matemáticas por medio de acontecimientos históricos, anécdotas o la concepción de un objeto matemático a lo largo del tiempo. Posteriormente estableceremos tres categorías de implementación: variantes con las que se puede aplicar la dimensión histórica en una clase de matemáticas.

1.2.1. La dimensión histórica de la Matemática

¿Por qué es importante conocer la dimensión histórica de los conceptos matemáticos? Martínez y Chavarría abordan esta cuestión en [12]. Las autoras indican que el conocimiento de la historia de la matemática ha permitido cuestionar las relaciones existentes entre la Matemática y la Enseñanza, así como concretar aquellos elementos que dinamizan la contrucción de los conceptos.
Barbin aporta en [3] dos razones fundamentales para incluir la dimensión histórica en la enseñanza de las Matemáticas:

- La Historia explica la perspectiva humana de la Matemática y muestra su verdera naturaleza, condicionada por las personas que se dedicaban a ella.
- Permite una mayor comprensión de conceptos y teorías.

El autor indica que la Historia, como fuente de reflexión, condiciona la percepción que el docente tiene sobre la Matemática, permitiéndole una **mayor**

solvencia a la hora de enseñar. El tiempo de dedicación que requiere a un tema concreto puede verse influido por aspectos históricos como por ejemplo, la dificultad que tuvieron los matemáticos de la época para llegar a un concepto. Las secuencias, el orden de exposición o las distintas perspectivas de enseñanza de las matemáticas pueden resultar más o menos pertinentes en función de la dimensión histórica de los conceptos.

Además, la riqueza histórica probablemente anticipe respuestas que los estudiantes propongan, permitiendo al docente conectar su enseñanza con experiencias del pasado, generar variedad de respuestas y usar el desarrollo histórico como hilo conductor para promover un **aprendizaje significativo**.

Desde la perspectiva competencial, Guacaneme señala en [9] que al indicar los avances en matemáticas realizados por diversas culturas, se promueven valores como la tolerancia y la diversidad, visibilizando la labor científica de sociedades y culturas distintas de la propia.

Martínez y Chavarría en [12] concluyen lo siguiente:

"Las posibilidades en cuanto al uso de historia son variadas y aportan no sólo a la enseñanza de la matemática, sino que permite estimular en nuestros estudiantes la curiosidad, creatividad, interés, deseo por aprender. Además, potencia un cambio en la percepción del estudiante hacia la materia y del docente hacia su forma de enseñanza."

1.2.2. Categorías de implementación

A la luz de las ventajas que podría traer la Historia a la enseñanza de las Matemáticas, diversos organismos internacionales como el *National Council of Teachers of Mathematics* han propuesto tres categorías de implementación de la historia como herramienta didáctica: cronológica, lógica y pedagógica (consultar [12]).

La categoría de implementación **cronológica** consiste en recorrer la trayectoria histórica sobre un concepto, señalando sus diversas concepciones, las distintas estrategias que fueron propuestas para resolver problemas relacionados con dicho concepto, aportaciones concretas de matemáticos relevantes de la época, etc.

La categoría de implementación **lógica** trata sobre el análisis histórico del desarrollo de la intuición matemática, la pertinencia de las soluciones a distintos problemas históricos, los mecanismos mentales que entran en juego en una demostración, etc.

La categoría de implementación **pedagógica** que pone en valor la historia de la Matemática como una fuente de recursos para el profesorado, con anécdotas, circunstancias y situaciones que contextualizaban los avances en Matemáticas y les dan valor humano.

1.2.3. ¿Cómo utilizar la Historia?

Los hechos históricos pueden aportar al alumnado una perspectiva más humana de las matemáticas, pero tal y como indica Canal-Martínez en [4], la Historia no debe reducirse a simples historias para distraer al alumnado. Así, Guzmán [6] habla de objetivos didácticos alcanzables por medio de la Historia como herramienta. A continuación nombraremos dichos objetivos y trataremos de contextualizarlos en los hechos a los que aludimos en esta memoria.

- **Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas.**
  Es importante tener en cuenta que hay conceptos que tenemos asimilados hoy en día, tales como encontrar raíces de ecuaciones y que sin embargo, eran temas poco explorados y sobre los que había un gran desconocimiento. Resolver ecuaciones con coeficientes en un determinado conjunto numérico para encontrar nuevos tipos de números era algo inconcebible en la época. El paso que dió Descartes de definir una cantidad desconocida como $i = \sqrt{-1}$ fue una idea sorprendentemente sencilla pero eficaz, que facilitó la construcción del plano complejo y evidenció que no es necesario que un número represente algo físico o real para poder desarrollar una teoría consistente.

- **Enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas y problemas, junto a su motivación y precedentes.**
  Guzmán indica en 2007 que,

  "La visión histórica transforma meros hechos y detrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente -en muchas ocasiones con genuina pasión-, por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando dieron con ellas por primera vez."

  Tal y como comentábamos en la Sección 3.2 las ideas en matemáticas no vienen exclusivamente de la disciplina académica, sino que muchas veces surgen de dispustas, duelos o venganzas entre matemáticos que viven en unas circunstancias concretas (riqueza, pobreza, prestigio, etc) que les animan a actuar.

- **Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución y la situación en la que se encuentran actualmente.**

La Matemática que conocemos actualmente ha sido el resultado de siglos de Historia. En cada época los matemáticos tenían unos determinados intereses y partían de un conocimiento mucho menos extenso del que tenemos ahora. Muchos problemas se han ido solucionando mientras que otros siguen abiertos actualmente. Un ejemplo de esto es el problema actualmente abierto de la trascendencia de $\pi + e$. Decía también Guzmán en [6],

"Quien sepa que ni Euler ni Gauss llegaron a dar ese rigor a los números complejos y que, a pesar de ello, pudieron hacer cosas maravillosas relacionados con ellos, se preguntará muy seriamente acerca de la conveniencia de tratar de introducir los complejos en la estructura cristalizada, antinatural y difícil de tragar, que sólo después de varios siglos de trabajo llegaron a tener."

- **Apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.**
  El descubrimiento y la formalización de los números complejos han tenido implicaciones en otras ciencias. En Física han permitido modelizar desde vibraciones mecánicas hasta circuitos eléctricos. Además son fundamentales a la hora de entender el principio de incertidumbre de Heisenberg de la Mecánica Cuántica y para su posterior desarrollo teórico.

1.3. Representaciones visuales como herramienta didáctica

La interacción, manipulación y visualización de conceptos matemáticos como pasos previos para llegar a la representación visual, suponen una gran ayuda a la hora de comprender la Matemática. El pensamiento puramente abstracto y algebraico no es igual de accesible para todo el alumnado, por lo que algún sector del mismo puede verse en dificultades graves al no ser capaz de concretizar las ideas expuestas en una clase en algo físico o en un dibujo. En lo referente a los números complejos, la evidente dificultad que presentan a nivel didáctico a veces se agrava con el desarollo puramente teórico del tema, en el que el alumnado percibe estos números como un invento de los matemáticos que solo tiene sentido en el nivel abstracto y no en el aplicado.

En los primeros cursos de la ESO, los temas relativos a la rama de la Geometría tienen una mayor aceptación por parte del alumnado, ya que todo lo que se explica tiene una representación visual asociada y es posible relacionar la escritura matemática con medidas, proporciones o transformaciones. Sin embargo, en cursos académicos superiores los temas se desarrollan cada vez con un mayor nivel de abstracción dejando al alumnado desprovisto de soportes visuales a los que recurrir en caso de perderse con la escritura matemática.

Para hablar de comprensión de conceptos matemáticos mediante representaciones geométricas introducimos a continuación la teoría de los modos de pensamiento de Sierpinska.

1.3.1. Modos de pensamiento

Los modos de pensamiento de Sierpinska [20] nos informan, según Randolph y Parraguez en [19], de cómo se conforma la mente durante los procesos de aprendizaje matemático.

Esta teoría se sustenta en dos pilares fundamentales, el **pensamiento práctico** y el **pensamiento teórico**. El objetivo es que estos dos pilares se complementen (en lugar de ser polos opuestos) y que los estudiantes sepan desenvolverse en ambos aspectos para llegar a la máxima comprensión posible de un concepto matemático. Sierpinska, Nnadozie y Oktac establecen en [21] que lo práctico (geométrico) se refiere a una **acción inmediata** y lo teórico (analítico) se refiere a **conexiones conceptuales**.

La superación del dilema teórico-práctico pasa por las tres categorías establecidas por Sierpinska en el año 2000 [20],

- el modo Sintético-Geométrico (SG),
- el modo Analítico-Aritmético (AA),
- el modo Analítico-Estructural (AE).

Según Randolph y Parraguez en [19], estos modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos en función de las relaciones y objetos que el estudiante evoque cuando esté inmerso en un razonamiento matemático.

El modo de pensamiento SG formaría parte del pensamiento práctico y consiste en la **aproximación geométrica e intuitiva** por parte del estudiante, que se vale de la visualización mental para llegar a una solución inmediata del problema. El modo de pensamiento AA va un paso más allá, haciendo uso de **representaciones numéricas o simbólicas** para dejar patente que se conoce el comportamiento del objeto matemático. Por último, el modo de pensamiento AE consiste en la **reflexión** sobre las propiedades del objeto matemático que son consecuencia de los axiomas de partida. En este último nivel, las aproximaciones mentales del modo SG pasan a un segundo plano, cobrando mayor importancia la construcción formal y abstracta del objeto.

Estos modos de pensamiento no sólo son formas de pensar, sino que constituyen herramientas que los alumnos usan de manera heurística, tal y como indica

Parraguez en [18]. El paso de un modo a otro resulta fundamental a la hora de describir un concepto matemático en su totalidad.

1.3.2. Modos de pensamiento y números complejos

La teoría de los modos de pensamiento es aplicable a cualquier ámbito de las matemáticas. Nos centramos ahora en el caso particular de su aplicación al aprendizaje de los números complejos.

En el proceso de aprendizaje de números complejos, el modo SG constaría de la representación geométrica del plano de Argand, de la representación de un número complejo z, de su conjugado $\bar{z}$ y de las transformaciones geométricas que se ponen de manifiesto al operar con complejos.

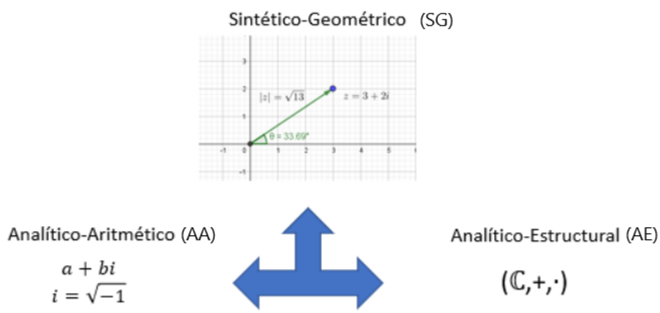


Figura 1.1: Modos de pensamiento.

El modo AA aparecería cuando el alumando tratase de “capturar” la intuición y la geometría mediante números o símbolos, por ejemplo, representando números complejos concretos en el plano de Argand o bien operándolos, obteniendo su módulo, etc.

Por último, el modo AE podría ponerse de manifiesto si el alumando comienza a reflexionar sobre propiedades generales que se cumplen en el sistema de los números complejos tales como la conmutatividad, la estructura de cuerpo, el concepto de orden, etc (ver Figura 1.1).

La iniciación a los números complejos suele comenzar por la descripción numérica del conjunto $\mathbb{C}$, sin embargo, esto forma parte del modo AA. En esta memoria propondremos un giro en los modos de aprendizaje, para que el alumnado se introduzca en ellos de una manera práctica mediante aproximaciones geométricas.

La visualización de los conceptos matemáticos son una gran herramienta didáctica, sin embargo, los dibujos a mano alzada que pueda realizar el profesor en la pizarra a veces no son del todo claros debido a que dichos dibujos son estáticos y no todo el alumnado es capaz de detectar en ellos conceptos como dimensión, homotecias, abatimientos, etc.

Camacho y Santos en [25] estudian la relación entre el uso de software de Geometría Dinámica y el desarollo del sentido geométrico. Consideramos que es vital el uso de las TIC para que el alumnado observe la robustez de los resultados mediante la manipulación de parámetros o la construcción de los mecanismos que le posibiliten intuir propiedades que le permitan dar el salto al modo AA.

Figura 1.2: Logo de GeoGebra.

Para mostrar los contenidos de manera dinámica, optamos por GeoGebra (Figura 1.2). Se trata de un software interactivo libre utilizado en colegios y universidades. Es un procesador geométrico y algebraico que reúne elementos de Geometría, Álgebra, Cálculo y Estadística que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas, la representación de funciones y el tratamiento de funciones.

1.4. Actualidad en las aulas

Para obtener datos concretos sobre las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos en Bachillerato, hemos elaborado dos encuestas. Una de ellas dirigida a profesores de Secundaria que hayan impartido números complejos. En el siguiente enlace se encuentra dicha encuesta:

Enlace:
https://docs.google.com/forms/d/1eYcJCvv7oQIrvpeOPS1K2vdZGkxwRLOVqHsvruk4xow/edit?usp=sharing.

Otra encuesta, dividida en dos partes, fue enviada a algunos estudiantes de primer curso de la Universidad de La Laguna de los grados en Matemáticas, Física e Ingeniería Informática. En los siguientes enlaces se encuestran dichas encuestas.

Enlace 1:
https://docs.google.com/forms/d/1IivOaOZWE37PZkLT5ACdJnm0uPJqO55BEp2TMr2ji9A/edit?usp=sharing,

Enlace 2:
https://docs.google.com/forms/d/1fLnNppXEuoXrSzFmyXGozWI4lMKMMbPru9iAkNfejMw/edit?usp=sharing.

La idea inicial era pasar esta encuesta a un número significativo de alumnos y profesores para extraer conclusiones.
Disponíamos de una conformidad para impartir el tema de Números Complejos en el centro de prácticas IES La Laboral de La Laguna. Con lo que nuestra intención era impartir los números complejos en una clase de 1º de Bachillerato, así como realizar las encuestas después de la evaluación. Además existía la posibilidad de pasar dicha encuesta a otra clase donde ya se habían impartido los números complejos y por tanto poder valorar la **diferencia de resultados** según la forma de enseñanza.

Por otra parte un objetivo importante en el estudio es la **experiencia** de los profesores de Secundaria que hubiesen impartido dicho tema. Por lo que una vez perfeccionada la encuesta de control se pensaba pasar a un colectivo muy amplio de profesores, concretamente a los docentes miembros de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Sin embargo, las circunstancias vividas en el confinamiento y el exceso de trabajo al que muchos profesores se vieron sometidos en dicho periodo, impuso grandes e importantes condicionantes que no pudimos sobrellevar y que provocó que no tuviésemos éxito en algunas partes y lo que es más importante, obtener conclusiones y por tanto presentar mejoras.

Debido a la crisis del COVID-19, únicamente hemos podido realizar satisfactoriamente una encuesta a un grupo de control. Con esto, la encuesta no es significativa. No obstante, incluimos en este apartado la encuesta y comentaremos algunas conclusiones extraídas de ella.

La encuesta tiene un doble objetivo:

- Generar ideas para tratarlas en la Propuesta de Intervención.
- Tener la encuesta preparada para una posible implementación con los estudiantes de Bachillerato y posiblemente con una muestra más amplia de alumnos de primer curso de diferentes grados de la Universidad de La Laguna.

1.4.1. ¿Qué dice el Alumnado?

Para esta encuesta, diseñamos unas preguntas iniciales sobre **aprendizaje** de números complejos atendiendo a criterios **conceptuales** frente a los **procedimentales**. Es decir, nos interesa recabar información sobre ideas generales y concepciones de los números complejos que tengan los estudiantes.

La encuesta fue enviada en el mes de marzo de 2020 a un grupo de control de profesores de Secundaria y a un experto en Didáctica de la Matemática. Solicitamos a dicho grupo que revisaran las preguntas y propusieran matizaciones, correcciones y nuevas preguntas. Las respuestas del grupo de control nos permitieron mejorar cualitativamente la calidad de las preguntas de la encuesta.

Con las preguntas ya diseñadas, separamos la encuesta en dos partes: una con preguntas de contenido **didáctico** y otra de contenido **matemático**. El día 1 de abril enviamos ambas encuestas al alumnado voluntario de primer curso de Física, Matemáticas e Ingeniería Informática. Obtuvimos 8 respuestas en la primera parte y 6 en la segunda.

Parte didáctica

En las preguntas diseñadas bajo el criterio conceptual, hemos clasificado las respuestas en dos **categorías** excluyentes; la categoría de las respuestas con representaciones geométricas y la categoría de las respuestas sin representaciones geométricas. Las preguntas 1, 2 y 3 están diseñadas para que los estudiantes aporten la visión que tienen sobre los números complejos. Para extraer esta información los ponemos en la situación de contar lo que saben a un compañero.

De este grupo de preguntas destacamos que, a pesar de haber indicado que se pueden realizar anotaciones en un folio aparte, veinte de las veinticuatro respuestas fueron desarrolladas totalmente con un **texto**, dos fueron acompañadas de anotaciones de tipo **simbólico** y únicamente en dos respuestas se optó por **representar** los ejes cartesianos y representar los números complejos en el plano.

En las preguntas 5 y 6 pedimos expresamente una representación gráfica.

En este caso, cinco de dieciséis respuestas tuvieron representaciones gráficas. Sorprende que tantas otras respuestas sigan siendo mediante el uso exclusivo del texto.

Parte matemática

En este apartado clasificamos las categorías de respuesta correcta y respuesta incorrecta.

Las preguntas 1, 3 y 7 tienen que ver con los números complejos como **solución de ecuaciones** con coeficientes reales.

De este grupo de preguntas, la 1 y la 3 fueron contestadas correctamente por todos los encuestados. Sin embargo, es llamativo que la pregunta 7 tuvo variabilidad de respuestas a pesar de que la muestra de estudiantes tienen un nivel por encima de la media. Esto nos hace pensar que los estudiantes no tienen del todo claro que los números reales son un caso particular de los números complejos o que no consideran las soluciones complejas como verdaderas soluciones.

Las preguntas 4 y 5 están relacionadas con aspectos conceptuales tales como el módulo o la parte imaginaria.

Ninguno de los estudiantes tuvo problemas en identificar el módulo (un concepto con un claro referente visual) como un número real. Sin embargo, no identificaron bien la parte imaginaria (la cual tiene una visualización menos llamativa). Parece ser que la palabra *imaginario* induce a error. Por una parte, se define la parte imaginaria como un número real y por otra, cuando pedimos un imaginario puro, es de la forma bi. Dicha notación crea bastante confusión.

La pregunta 8 tenía el objetivo de encontrar fallos de concepto a la hora de identificar los números reales como un caso particular de los números complejos. Se propuso una serie de números que los estudiantes deben clasificar con etiquetas no excluyentes.

Nos llama la atención que conforme los estudiantes avanzan en esta pregunta, indican con menos frecuencia la casilla de *es complejo*. Aunque la muestra de estudiantes tenga un nivel alto, si tuvieran claro el concepto de número complejo marcarían dicha casilla en todos los números complejos que aparecen.

Las preguntas 2 y 11 buscan obtener información sobre el modo de pensamiento AE. Son cuestiones que normalmente no se tratan en el tema de números complejos en Bachillerato, incluso en algunos Grados en la Universidad, quizás por involucrar un razonamiento más profundo.

En la pregunta 2, uno de los encuestados realizó una demostración. El resto de encuestados asumió la conmutatividad del producto o simplemente no entendió la pregunta. En la pregunta 11, las respuestas se dividieron entre los que señalaron que la tercera igualdad es falsa y los que indicaron que no se estaba teniendo en cuenta la raíz cuadrada negativa.

1.4.2. ¿Qué dice el Profesorado?

Para la encuesta al Profesorado, diseñamos unas preguntas iniciales sobre **enseñanza** de números complejos atendiendo a dos criterios: el criterio **didáctico** y el criterio **epistemológico**. La encuesta fue enviada al mismo grupo de profesores de control que la encuesta anterior. Solicitamos a dicho grupo que contestase a las preguntas y que propusiese matizaciones de manera crítica, correcciones e incluso nuevas preguntas. El objetivo era tener unas encuestas lo más cercanas a lo que el profesorado con experiencia en dicho tema nos pudiese orientar y ayudar. Recibimos 8 respuestas del grupo de control. Dichas respuestas nos permitieron **mejorar cualitativamente** la calidad de las preguntas de la encuestas.

El día 1 de abril enviamos la encuesta a los miembros de la Sociedad “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas. Debido a la situación de emergencia sanitaria, el Profesorado de Secundaria se vio desbordado y solo dos profesores contestaron la encuesta. No obstante, teniendo en cuenta que los encuestados de control son profesores con un buen número de alumnos y que no hemos podido obtener nada más por la situación vivida con el COVID-19, decidimos hacer un breve estudio con los pocos datos de los que disponemos.

Bajo el criterio **didáctico**, nos interesamos por aspectos como el número de horas dedicado a dar el tema de Números Complejos o por los materiales usados por los docentes. En este sentido se agrupan las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La media de horas dedicadas por los encuestados es de 9.6 horas. Podríamos dividir a los encuestados entre los que le dedican menos de dos semanas y los que le dedican más de dos semanas. No obstante, algunos encuestados del grupo de menos de dos semanas señalan que para un correcto desarrollo del tema se **requiere más tiempo**.

A la hora de elegir herramientas, todos optan por el método tradicional, aunque no todos usan vectores. Tres de los docentes indican que usan la Historia para motivar el origen de los números complejos. Cuatro de ellos indican que utilizan el GeoGebra y videos ilustrativos para mejorar la atención del alumnado. Los encuestados tienden a **apoyarse en un libro de texto** y a complementarlo con recursos web y/o apuntes del departamento. Esto coincide con el ánimo de esta memoria: una guía para el Profesorado que involucre recursos digitales.

Bajo el criterio **epistemológico** agrupamos las preguntas 8 y 9, que tienen que ver con la percepción del profesorado sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números complejos.

Respecto a estas dos preguntas, resulta llamativo que los encuestados no manifiestan tener especiales dificultades para enseñarlo, pero entre todos señalan diversas dificultades en el aprendizaje por parte de los estudiantes. Dos de los encuestados indican que el poco dominio del álgebra condiciona a los estudiantes y otros dos señalan la dificultad del alumnado para manipular números complejos expresados en su forma polar. Un profesor manifestó que a los estudiantes les cuesta generalizar y asimilar la estructura de cuerpo. Estos aspectos están relacionados con el modo de pensamiento AE de Sierpinska y no se suelen trabajar en Bachillerato ni, incluso, en algunos Grados en la Universidad.

Las preguntas 7, 12, 13, 14 y 15 pertenecen a un grupo sobre técnicas o estrategias concretas para enseñar el tema de Números complejos.

Respecto a la primera pregunta, sorprende la respuesta de uno de los docentes, que indica tajantemente que no es posible plantear este tipo de dinámicas dada la amplitud del currículo de 1º de Bachillerato. En la segunda pregunta, dos docentes declaran que no y tres que sí. Respecto a las tres últimas preguntas, solamente hay respuestas afirmativas en la última, donde algunos docentes señalan que lo hacen sin contextualizar.

Por último, agrupamos las preguntas 16, 17, 19 y 11 sobre impresiones y consideraciones de los docentes sobre los números complejos.
Respecto a las dos primeras preguntas, 3 docentes contestan que sí y 3 que no en cada una de ellas. Esto nos hace pensar que no hay unanimidad en estas cuestiones. En la tercera pregunta 4 docentes contestan que no y 2 que sí.

Por último, en la pregunta 20 todos los docentes aportan las herramientas que consideran útiles. Nombran los siguientes recursos: Motivación histórica, GeoGebra, manejo de representaciones visuales y manipulación algebraica. Uno de los encuestados indica que la clave no está tanto en los medios concretos, sino que estriba en la **forma** de transmitir los conocimientos: Crear la necesidad de definir los números, definirlos, darles estructura y **aplicarlos**. Además, un docente señala que para que un concepto sea verdaderamente aprendido, es necesario **reutilizarlo** y **aplicarlo** a situaciones de la vida cotidiana. Esto nos parece fundamental.

2

Objetivos

El objetivo fundamental de esta memoria es realizar una propuesta educativa para la enseñanza de los números complejos que muestre estos contenidos de una manera más profunda, partiendo del conocimiento previo del que disponen los estudiantes (coordenadas cartesianas) y llegando por sí mismos a los conceptos de manera guiada y motivados por el desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos.

Para ello, hemos establecido que la propuesta contemple los siguientes aspectos:

- La **dimensión histórica** de los números complejos: su origen, primeras concepciones, evolución, discusión y formalización. Así como el recorrido por los principales autores que han contribuido a su desarrollo.

  La historia de los números complejos muestra el **gran desafío** que supuso comprenderlos. Sin embargo, es frecuente que la enseñanza de los números complejos se lleve a cabo sin poner en valor la **trayectoria histórica** de los mismos, las primeras concepciones que se tuvo de ellos, e incluso el **poco futuro** que les auguraban algunos matemáticos célebres.

  En esta memoria pretendemos contextualizar históricamente el tema de los números complejos, poniendo de relieve su dificultad epistemológica, problemas resueltos con ideas que fueron precursoras de los complejos y anécdotas históricas notables. De esta manera buscamos humanizar la visión de las Matemáticas y mejorar la disposición de los estudiantes a aprenderlas.

  La información histórica queda en manos del docente para aproximarse a los conceptos desde una perspectiva humana, no necesariamente en el orden o en la profundidad tratados en esta memoria. Aunque el desarrollo de la dimensión histórica sea cronológico, la categoría de implementación que proponemos es sobre todo lógica, es decir, nos valdremos de la historia para destacar los procesos de razonamiento que llevaba a cabo la comunidad matemática de la época con el conocimiento del que disponía.

- Las **dificultades didácticas** y epistemológicas que se presentan a la hora de enseñar y aprender los números complejos.

  En este trabajo mostraremos un resumen del desarrollo histórico-epistemológico de los conjuntos númericos previos al conjunto de los números complejos. Con esto buscamos que el profesorado posea herramientas con las que hacer comparativas y contrastar los conceptos relativos a los números complejos con sus conceptos análogos en los conjuntos previos.

- Las **representaciones visuales** mediante el uso de sofware de Geometría Dinámica y los cambios de representaciones.

  Damos una propuesta de exposición de contenidos cercana a la intuición del alumnado por medio de numerosas representaciones gráficas trazadas con software de Geometría Dinámica que precedan a la definición de conceptos y propiedades. De esta manera, los estudiantes partirán de algo conocido (la intuición geométrica), para darle sentido a las propiedades de los números complejos, plantear hipótesis y contrastarlas con las definiciones formales. Para conseguir esto, las cuestiones se plantean desde una metodología constructivista [11] en forma de desafíos, de manera que el alumnado tenga momentos de reflexión en los que pueda proponer soluciones a los desafíos, transitando entre los modos de pensamiento de Sierpinska [20].

- El **autoaprendizaje guiado** por medio de cuestiones que motiven la definición de conceptos e incentiven la curiosidad del alumnado.

En este trabajo hemos tratado Historia y Geometría Dinámica por separado, aunque queda bajo el criterio del docente combinarlas del modo que mejor le convenga. Nosotros daremos una propuesta de impartición de contenidos en el Capítulo 4.

3

Propuesta de Intervención I: Una mirada histórica de los números complejos

3.1. Dificultades didácticas en conjuntos numéricos

A lo largo de la Historia, el uso de los números ha precedido siempre a su formalización.

Los números naturales son los primeros que surgen en la mente humana dada la necesidad de medida y de conteo. Estos números son aprendidos desde etapas muy tempranas sin hacernos conscientes de sus propiedades axiomáticas, por lo que no presentan una gran dificultad en la vida académica del alumno medio (ver Figura 3.1).

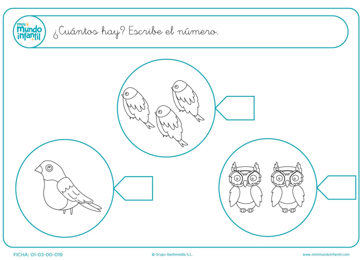
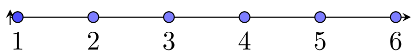


Figura 3.1: Enumeración y conteo.

Los números naturales se han usado a lo largo de la historia de la Humanidad sin necesidad de su formalización. En [23] se resalta la naturaleza **discreta**, **creciente** e **infinita** del conjunto de los números naturales; propiedades que el alumnado conoce de cierta forma pero sobre las que no suele reflexionar.



Estos números están separados unos de otros. Además, sumando 1 infinitas veces se pueden recorrer todos ellos. Esto no ocurrirá con otros conjuntos numéricos.

Observación 3.1. El concepto de número natural está tan asimilado que es muy probable que el alumnado no pueda detectar y verbalizar sus propiedades. Es conveniente que el docente aproveche esto para generar conflicto cognitivo en el alumnado, a fin de que este proponga propiedades y dilucide la naturaleza de estos números.

Los **números enteros** fueron todo un desafío para los matemáticos. A pesar de ser ampliamente usados para representar deudas (tanto cotidianas como mercantiles), no eran aceptados por la comunidad matemática. La formalización

matemática fue ardua. Era preciso definir una suma y un producto. Las leyes de los signos que usamos actualmente fueron demostrándose poco a poco.
En particular, la ley: *menos por menos es más*, fue especialmente complicada de probar.

La formalización del conjunto de los números enteros fue posterior incluso a la de los irracionales positivos. Históricamente, tras los números naturales surgió la necesidad de comparar magnitudes y representar medidas en relación con otras.

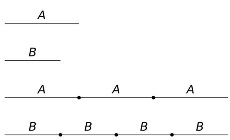
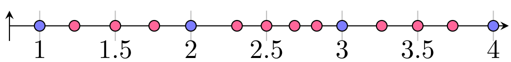


Figura 3.2: Medidas conmensurables.

La necesidad humana de dividir la tierra y repartir equitativamente los recursos dió lugar al concepto de **proporción**. Las medidas importaban en función de su reparto, del grado en el que una era más grande que otra. De modo que pronto surgió la necesidad de comparar medidas. Dichas medidas se asociaron a números originando los **números racionales**.

Encontrar relaciones de proporcionalidad (ver 3.2) parecía responder a leyes naturales, de modo que se relacionó con la **perfección**. Esto motivó diversas corrientes artísticas e incluso una manera de concebir el mundo, por lo que los racionales tuvieron una rápida y amplia aceptación por parte de la comunidad matemática.

Los números racionales se ubican en una recta gracias a los naturales que los conforman.



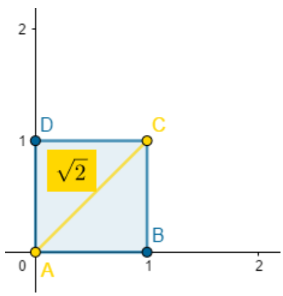
Observación 3.2. En azul los naturales, en rojo los racionales no naturales.

Los números racionales surgen de manera natural en la resolución de ecuaciones con coeficientes enteros.

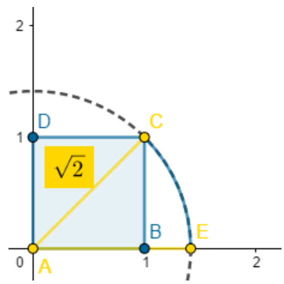
$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$
$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Esto nos dice que las ecuaciones se pueden utilizar para encontrar nuevos números, en este caso, encontramos los racionales $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. El conjunto de los números racionales engloba los números enteros, a los que tienen un número finito de decimales y a los que tienen un número infinito de decimales pero con un patrón concreto de repetición llamado período. En este conjunto, la suma y el producto de dos racionales vuelve a ser un racional. Esto agradaba mucho a los matemáticos de la época y a su concepción racional de las matemáticas.

Los matemáticos conjeturaron que la naturaleza era racional, y con esta mentalidad pretendían modelizar el mundo. Pronto se encontraron con un obstáculo: **la diagonal del cuadrado**.
Esta diagonal (ver Figura 3.3a) no se puede medir en función de los lados del cuadrado, de hecho, suponiendo que cada lado mida 1, el Teorema de Pitágoras indica que la diagonal debe medir **"un número cuyo cuadrado resulte 2"**, lo cual fue visto por los matemáticos como una longitud imposible, impensable o *irracional*. Sin embargo, se le puso el nombre de **raíz de dos** y se denotó por $\sqrt{2}$ para poder trabajar con ella.



(a) Diagonal del cuadrado.



(b) Abatimiento de la diagonal del cuadrado.

Con el abatimiento del segmento AC (ver Figura 3.3b) es posible ubicar $\sqrt{2}$ en la recta. La posición del punto E no coincide con la de ningún número racional; es pues, un número irracional. Luego no puede expresarse como una fracción de dos enteros.

Los matemáticos de siglo XVII, en su empeño por dar un sentido "racional" a los números irracionales descubrieron que, del mismo modo que todo número racional puede escribirse de la siguiente manera,

$$3'245 = 3 + \frac{49}{200} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}.$$

Observación 3.3. Al ser $3'245$ un número racional, el proceso de fraccionamiento acaba.

Los irracionales podían ser expresados como una fracción **infinita** o **continua**. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\dots}}}}.$$

Observación 3.4. En este caso obtenemos un desarrollo infinito.

De este modo se consiguió dar un sentido "racional" a este tipo de longitudes, dado que aparece un patrón de repetición de fracción infinita en su desarrollo. Sin embargo, estos números **no** son racionales.
En **Secundaria** es usual definir los números racionales como "aquellos números con un número finito de decimales o bien una infinidad de decimales que se repiten". Esta definición motiva el uso de los números con finitos decimales para encontrar una sucesión cuyo límite no sea racional.
En la sucesión

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2,\ 2'7,\ 2'71,\ 2'718,\ 2'7182, \dots\},$$

todos los elementos son racionales, ya que sus expresiones decimales tienen un número finito de cifras. Sin embargo, el límite de la sucesión tiene un número infinito de cifras que no se repiten a partir de ningún n y, por tanto, **no es racional**. Se define el **número de Euler** como el límite de la sucesión,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Los números $\sqrt{2}$ y e son ambos irracionales, sin embargo, $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación polinómica con coeficientes enteros $x^2 - 2 = 0$ mientras que e **no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales**. Se dice pues que $\sqrt{2}$ es algebraico, mientras que e es trascendente.

La trascendencia de e fue probada por Hermite, mientras que la trascendencia de π es consecuencia del Teorema de Lindemann-Weierstrass. Actualmente, se desconoce si $\pi + e$ es trascendente o algebraico.

Observación 3.5. La existencia de problemas abiertos en matemáticas puede ser un recurso didáctico útil para que el alumnado no perciba las matemáticas como algo cerrado, completo y totalmente conocido.

La unión de los racionales con los irracionales dio lugar a los números reales. Así, se completó la cadena conjuntos numéricos de la Figura 3.4.

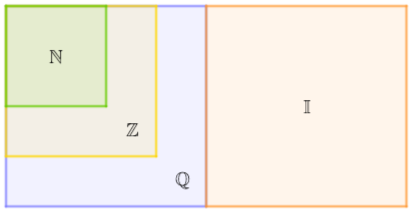


Figura 3.4: Relación entre conjuntos numéricos.

Hemos visto que tanto el concepto de número irracional como el de número negativo fueron vistos con recelo, puesto que no se podían comprender bien. Con la construcción del conjunto de los números reales parecía que todo estaba solucionado. Sin embargo, del mismo modo que la resolución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros daba como resultado un número no entero, al resolver las ecuaciones con coeficientes reales surge un nuevo tipo de número,

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1}.$$

3.2. Duelos y cúbicas: Tartaglia y Cardano

La búsqueda de raíces de polinomios ha sido uno de los mayores desafíos de la Historia de las Matemáticas. Dada una ecuación polinómica, las soluciones que involucraban raíces pares de números negativos no eran aceptadas por la comunidad matemática o bien, se asociaban a sucesos inverosímiles. Aunque los números complejos aparecen rápidamente a la hora de resolver ecuaciones cuadráticas como $x^2 + 1 = 0$, su origen histórico es otro. Tal y como indica Rivero-Mendoza en [14]:

"Es completamente incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debió a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, pues los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas."

En el siglo XVI, el algebrista italiano Scipcione del Ferro, en su empeño de hallar la raíz real de una ecuación cúbica, comienza a experimentar con el "germen" de lo que posteriormente se consolidaría como número complejo.

Sea la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$ (ver Figura 3.5).
Es fácil comprobar que $x = 4$ es solución de $x^3 - 15x - 4 = 0$,

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0.$$

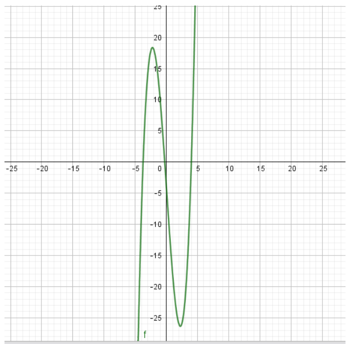


Figura 3.5: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 15x - 4$.

Conociendo esta solución, Del Ferro planteó el cambio de variable, $x = u + v$. Sustituyendo,

$$x^3 - 15x - 4 = (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 15) - 4 = 0.$$

Suponiendo que $3uv - 15 = 0$, y por tanto $v = \frac{5}{u}$, reescribimos

$$x^3 - 15x - 4 = u^3 + v^3 - 4 = u^3 + \left(\frac{5}{u}\right)^3 - 4 = 0.$$

Multiplicando por u^3,

$$u^6 - 4u^3 + 125 = 0$$

Despejando u^3,

$$u^3 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 500}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-484}}{2} = 2 \pm \sqrt{-121}.$$

Hallamos v^3,

$$v^3 = 4 - u^3 = 4 - (2 \pm \sqrt{-121}) = 2 \mp \sqrt{-121}.$$

Luego, si elegimos $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$,

$$u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

En este punto, Del Ferro intuyó con acierto que las raíces $\sqrt{-121}$ se cancelarían resultando la solución real ya conocida $x = 4$. Para ver esto, planteó lo siguiente,

$$4 = u+v = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1} = 2a \Rightarrow a = 2,$$

y como

$$(a + b\sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}.$$

Desarollando el cubo y sustituyendo $a = 2$, obtenemos $b = 1$ y concluimos

$$a + b\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1}.$$

Por tanto,

$$4 = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1}.$$

Niccòlo Fontana Tartaglia (1501-1557).

La suposición de del Ferro de escribir $x = u + v$ era puramente formal. En aquel momento la teoría de números complejos no estaba desarrollada y las raíces que aparecen en sus razonamientos, tales como $\sqrt{-121}$, pueden tener radicando negativo. Sin embargo, había conseguido escribir la solución $x = 4$ como suma de dos objetos matemáticos desconocidos hasta el momento.

Del Ferro estuvo a punto de llevarse su método para resolver cúbicas a la tumba. Sin embargo, poco antes de morir le contó su secreto a su discípulo, Antonio Maria del Fiore, quien, posteriormente, fue alardeando de saber resolver ecuaciones cúbicas por el norte de Italia. Llegó a oídos de del Fiore que un tal **Niccòlo Tartaglia** estaba trabajando con cierto éxito en la resolución de la ecuación cúbica general y decidió retarlo a un duelo. En la Bolonia de la época eran muy frecuentes los debates públicos entre matemáticos, que influían en el prestigio y en la ocupación de plazas en la Universidad.

La comunidad matemática estaba expectante ante tal duelo, que consistía en que cada contrincante debía proponer una lista de 30 problemas a resolver por el adversario en un plazo de 50 días. Del Fiore, que como matemático era mediocre, solamente era capaz de resolver problemas con las ecuaciones cúbicas estudiadas por del Ferro y la lista de problemas que propuso estaba plagada en su totalidad de cuestiones sobre cúbicas.Tartaglia resolvió todos los problemas planteados por del Fiore, ya que él había descubierto por su cuenta un método para resolver las cúbicas de del Ferro tan solo 8 días antes del duelo. Fiore no supo responder a ninguna de las cuestiones planteadas por Tartaglia.

Fiore no fue rival para Tartaglia, pero una década después, este tuvo un encontronazo con el médico y también matemático **Gerolamo Cardano**. Cardano, que vivía en Venecia, envía a un emisario para contactar con Tartaglia, con el objetivo de que le contase todos sus secretos sobre cúbicas. Tartaglia se muestra rehacio pero finalmente cede ante el poder y las riquezas de Cardano. La única condición que puso Tartaglia a Cardano fue mantener el secreto de sus resultados, prohibiéndole hacerlo público mediante un juramento.
Cardano accede y obtiene los resultados de Tartaglia, con los que avanza en sus investigaciones sobre cúbicas, obteniendo importantes resultados tal como la resolución de la cúbica general.

Sea una ecuación cúbica $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, con $a \neq 0$. Cardano consigue reducir la ecuación cúbica general a una ecuación de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Demostración. Partiendo de $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$. Dividiendo ambos términos entre a tenemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Realizando el cambio de variable $x = z - \dfrac{b}{3a}$,

$$\left(z - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(z - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} =$$
$$z^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)z + \left(\frac{2b^3}{3^3a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Se concluye que toda ecuación cúbica se puede reducir a una ecuación cúbica de la forma

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{3.1}$$

donde

$$p = \frac{c}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

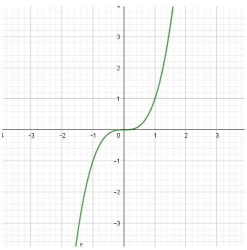
$$q = \frac{2}{3^3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}\frac{c}{a} + \frac{d}{a}.$$

$\square$

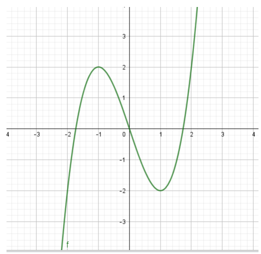
Por tanto, el estudio de una ecuación cúbica queda reducido al estudio de una ecuación de la forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

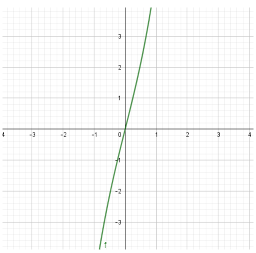
Esta ecuación es una cúbica donde el término cuadrático está ausente. La forma de la traza sólo depende de p, puesto que q es una traslación. En la Figura 3.6 se muestran cuatro situaciones en función de los valores que tomen p y q.



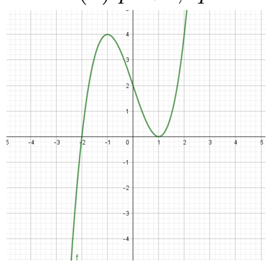
(a) $p = q = 0$.



(b) $p < 0,\ q = 0$.



(c) $p > 0,\ q = 0$.



(d) $p < 0,\ q > 0$.

Figura 3.6: $f(x) = x^3 + px + q$.

En este punto, del Ferro supone que la solución puede escribirse como suma de dos términos $x = u + v$.

$$x^3 + px + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q.$$

Suponiendo que $3uv + p = 0$, y por tanto $uv = -\dfrac{p}{3}$.

$$x^3 + px + q = u^3 + v^3 + q = u^3 - \frac{p^3}{3^3 u^3} + q = 0,$$

y multiplicando por u^3,

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{3^3} = 0.$$

Resolviendo,

$$u^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2}.$$

Además,

$$v^3 = -q - u^3 = -q - \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2} = \frac{-q \mp \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2}.$$

Luego,

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q \mp \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{3^3}}}{2}}.$$

De este modo, del Ferro llega a la solución escribiendo x como suma de dos cantidades que, en función de los coeficientes p y q, pueden ser o no números reales.

Gerolamo Cardano (1501-1576).

Cardano y su discípulo Ludovico Ferrari, consiguen resolver la ecuación cuártica general reduciéndola a una cúbica. Cardano y Ferrari ansíaban poder publicar todos los resultados de sus investigaciones, pero Cardano estaba atado al juramento que le había hecho a Tartaglia.
Fiore, que buscaba venganza por su derrota ante Tartaglia y sabe de la voluntad de Cardano de publicar los nuevos resultados, menciona que del Ferro descubrió antes que Tartaglia el método para resolver ciertos tipos de cúbicas y que estaba todo anotado en un documento del difunto. Dicho documento se hizo público y Cardano no se vió atado por el juramento que le hizo a Tartaglia.

Tras esto, en 1545 Cardano publica "*Ars Magna*"(*El gran arte del Álgebra*), texto precursor del álgebra moderna que impulsa la carrera del matemático. En él, Cardano reconoce la autoría de las ideas de Tartaglia, sin embargo, este no se lo toma nada bien y comienza una campaña de desprestigio y una cadena de desafíos públicos contra Cardano. Sin embargo, Ferrari respondió a un duelo público en nombre de su maestro, saliendo victorioso. Esto acaba con la carrera de Tartaglia, quien muere en 1557 en Venecia sin ápice alguno de prestigio ni dinero (ver [7]).

La Historia ha tratado mal a Cardano, al que se le acusa de plagio, esto no es exacto puesto que en "*Ars Magna*", numerosos resultados eran del propio Cardano y de su discípulo Ferrari, entre ellos destaca la posibilidad de que las soluciones de las ecuaciones pudieran ser negativas, irracionales o **raíces de índice par y radicando negativo**.

3.3. Imaginando lo imposible: Descartes y Euler

Vista la inconsistencia de la resolución de la ecuación cúbica por parte de del Ferro, era necesario dar sentido a las raíces de radicando negativo que, hasta entonces, se veían con escepticismo. El problema se reducía a encontrar un número que multiplicado por sí mismo diera negativo o, más simple, un número que multiplicado por sí mismo diera -1.

René Descartes (1596-1650).

Leonard Euler (1707-1783).

[1]

[1] Imágenes extraídas de

- http://creatividades.rba.es/pdfs/mx/Grandes-Pensadores-MX.pdf
- Calinger, Ronald (1996). «Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727-1741)». Historia Mathematica 23 (2): 154-155.

El célebre matemático francés **René Descartes** es el primero en utilizar el término *imaginario* para referirse a aquellas soluciones de ecuaciones polinómicas que involucran raíces de índice par y exponente negativo. Además intuye que todo polinomio debe tener tantas soluciones como indique su grado, aunque algunas sean *imaginarias*. En el mismo siglo, Gottfried Von Leibniz (1646-1716) trabajó con igualdades como

$$4 = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Esto suscita un gran asombro en Christian Huygens (1629-1695), con quien mantenía habitual correspondencia. Este le responde a Leibniz en una carta.

"Lo que me escribes sobre cantidades imaginarias que, no obstante, cuando son sumadas da una cantidad real, me es sorprendente y totalmente nuevo. Uno nunca creería que esto es cierto y debe haber algo escondido en ello que es incomprensible para mí."[5]

Observación 3.6. El asombro que muestra Huygens podría utilizarse con **fines didácticos**. Como se indica en [26], el alumnado podría llegar a **empatizar** con la labor científica de personajes históricos a los que la Historia y la cultura popular da apariencia de genios, pero nunca resalta las dificultades que tuvieron para desarrollar sus trabajos, así como sus **frustraciones** o **los grandes logros** que marcaron sus carreras.

El primero en aceptar plenamente $\sqrt{-1}$ como un número fue el ingeniero italiano **Rafael Bombelli** (1526-1572) quien, tal y como indica Rivero-Mendoza en [14], desarrolla también el álgebra necesaria para manipular expresiones del tipo $a + b\sqrt{-1}$.

En 1673 el matemático inglés **John Wallis** (1616-1703) da una interpretación geométrica de los números complejos razonando de la siguiente manera:
Sea la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2bx + c^2 = 0,$$

su solución es

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Nótese que b sería la hipotenusa de un triángulo rectángulo, mientras que c sería uno de los catetos. Como b podría completar el triángulo de dos formas (ver 3.8a), fijamos S_1 y S_2 como los dos posibles extremos del segmento de longitud b (izquierdo y derecho respectivamente).

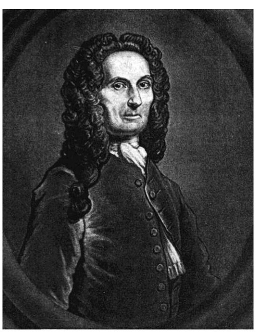
- Si $b^2 \geq c^2$, las soluciones son reales y se pueden representar con un triángulo con base en la recta real (ver Figura 3.8a).

(a) Caso $b^2 \geq c^2$. (b) Caso $b^2 < c^2$.

Figura 3.8: Interpretación geométrica de Bombelli.

- Si $b^2 < c^2$, las soluciones no son reales puesto que siguen en el extremo del segmento de longitud b, que en este caso es más corto (ver Figura 3.8b).

Con esto, quedó claro que las soluciones estaban fuera de la recta real. Esta idea fue fundamental para poder definir números en el plano.
La aparición de estos nuevos números suscitaba muchas preguntas: ¿Sería posible hallar el logaritmo de un número negativo?¿Tendrían relación estos números con las funciones trigonométricas? **Leonard Euler** fue el primero en utilizar la notación $i = \sqrt{-1}$ y descubrió la identidad $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$ y el caso particular $e^{i\pi} + 1 = 0$ que tuvo como consecuencia la resolución de dichos enigmas.



Abraham De Moivre (1667-1754).

En 1707, el matemático francés Abraham de Moivre, amigo de Newton y Leibniz, introdujo la fórmula que lleva su nombre

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\,\mathrm{sen}(nx)$$

que integra la Geometría con el Cálculo y permite el desarrollo de la aritmética de los números complejos, tal y como indica Aznar en [1].

De Moivre aportó importantes resultados en Teoría de la Probabilidad y en Geometría Analítica. A pesar de su brillantez y de haber sido nombrado miembro de la Academia de las Ciencias de París, nunca obtuvo plaza en ninguna universidad.

Cuenta la leyenda que De Moivre **predijo la fecha de su propia muerte** mediante cálculos estadísticos y analizando su patrón de sueño, acertando para la perplejidad de sus amigos.

3.4. La formalización: Gauss y Cauchy

Carl Friedrich Gauss dio la primera prueba correcta del Teorema Fundamental del Álgebra en su tesis doctoral.

"Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $n > 0$ tiene, al menos, una raíz."

o equivalentemente

"Todo polinomio con coeficientes complejos de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces complejas contando sus multiplicidades."

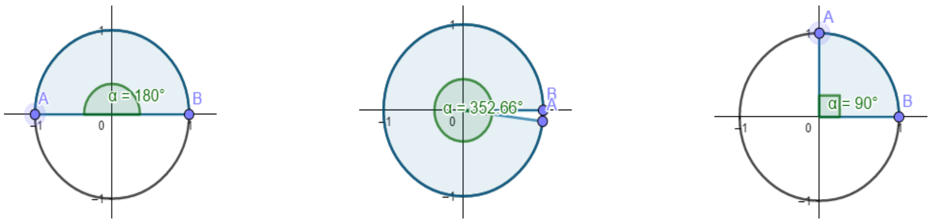
Con este resultado, Gauss descubre que las raíces de un polinomio pueden "repetirse" o incluso ser complejas. Aún así, quedaban muchas dudas por solventar y Gauss trató de establecer reglas que se verificasen tales como la conmutatividad entre i y un real o el producto de raíces de radicandos negativos.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Había costado mucho esfuerzo demostrar que, en el conjunto de los números enteros, el producto de dos números negativos es siempre positivo. Por lo tanto, pensar en "la raíz cuadrada de menos uno" era todo un desafío que contaba con el rechazo frontal de la comunidad matemática. Sin embargo, el matemático francés Jean-Robert Argand (1768-1822), ubicó por primera vez la raíz cuadrada de menos uno razonando de la siguiente manera.
Situando los enteros en la recta real y centrándonos en el punto $x = 1$. La multiplicación de $x = 1$ por -1 equivale a un giro de 180° (ver Figura 3.10a) con respecto al origen. Más aún, si volvemos a realizar una multiplicación por -1, otro giro de 180° llevará el -1 nuevamente al 1 tal y como se ve en la Figura 3.10b.

Entonces, ¿dónde se encontraría un número que multiplicado por sí mismo resulte -1? Argand llegó a la conclusión de que $\sqrt{-1}$ se encontraba en el punto D de la Figura 3.10c, ya que, otro giro de $90°$ llevaría D al -1.



(a) Multiplicación de 1 por -1.

(b) Multiplicación de -1 por -1.

(c) Multiplicación de 1 por $\sqrt{-1}$.

Figura 3.10: Diagrama de Argand para la localización de i.

Con esto quedaba por fin localizada la raíz de menos uno y con ella, todo el plano complejo. La formalización de los números complejos viene de la mano de William Rowan Hamilton (1805-1865), quien demuestra la correspondencia biunívoca de los complejos con el plano real.

Con los números complejos bien definidos, Gauss publica un trabajo donde explica exhaustivamente sus propiedades. De este modo los números complejos dejaron de ser algo *imposible* o *impensable* para ser aceptados por la comunidad matemática de la mano de Gauss. Por razones históricas siguen conservando el nombre de *imaginarios*. A este respecto apuntaba Gauss:

> *"Que este tema* [los números complejos] *haya estado rodeado hasta ahora de una misteriosa oscuridad debe ser atribuido en gran medida a una notación mal adaptada. Si por ejemplo,* $+1$ *y* -1 *y la raíz cuadrada de* -1 *hubieran sido llamadas unidades directa, inversa y lateral, en vez de positiva, negativa e imaginaria (o imposible), tal oscuridad podría haber desaparecido."*

En la actualidad, los números complejos con coordenadas enteras se conocen como los **enteros de Gauss**:

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

En este punto, queda bien definido el conjunto de los números complejos,

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Augustin Louis Cauchy desarrolla enormemente los números complejos al introducir las funciones de variable compleja siendo uno de los fundadores de la teoría moderna de Variable Compleja junto a Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann (1826-1866) y Karl Weierstrass (1815-1897).

(a) Función real.

(b) Función compleja.

Figura 3.11: Comparación de una función de variable real y una función de variable compleja.

A diferencia de las funciones reales como en la Figura 3.11a, que transforman el eje OX; las funciones complejas transforman el plano complejo como en la Figura 3.11b, pudiendo trazar formas infinitas y autosimilares (ver Figura 3.12). Estas funciones tienen propiedades asombrosas. Por ejemplo, si son diferenciables son siempre infinitamente diferenciables.

(a) Conjunto de Mandelbrot.

(b) Triángulo de Sierpinsky.

Figura 3.12: Ejemplos de fractales.

Los números complejos aportaron un conjunto numérico algebraicamente cerrado que solventó muchas dudas en el Álgebra. También impulsó la Geometría Fractal (ver Figura 3.12) y aportó una base matemática sólida con la que describir fenómenos físicos como la electricidad.

Por último, los números complejos forman parte esencial de la investigación científica actual, aportando la base matemática de la Mecánica Cuántica.

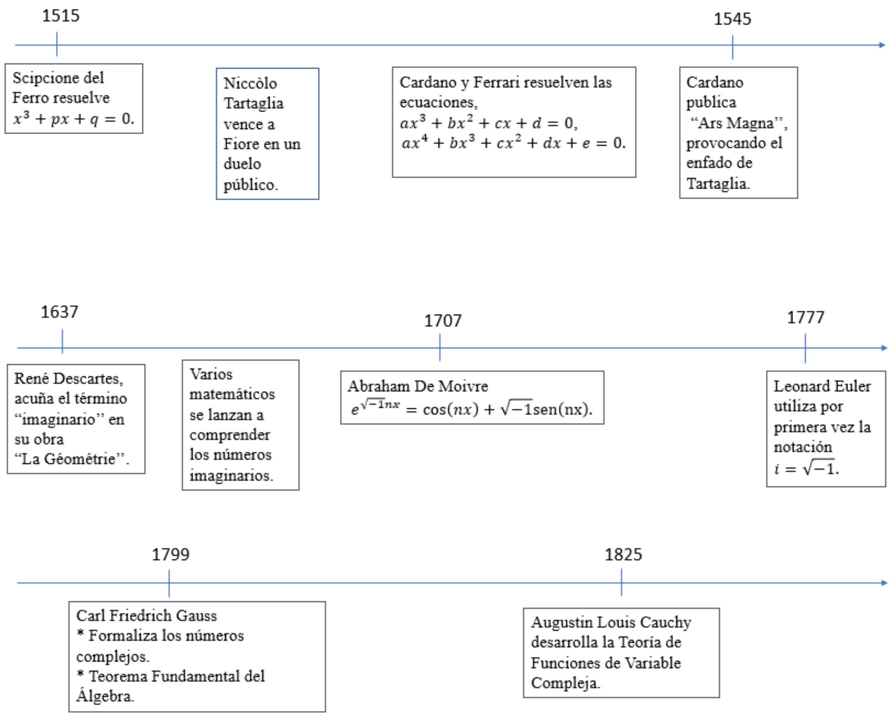


Figura 3.13: Eje cronológico con los acontecimientos históricos.

4

Propuesta de Intervención II: Conociendo a los complejos

El material que se desarolla en este capítulo conforma un libro de Geogebra disponible en el enlace https://www.geogebra.org/m/vkhn8pyb.
La presente propuesta didáctica consiste en dar un fuerte soporte visual a los números complejos. Pero antes de comenzar con su definición y propiedades, el alumnado debe llegar a la necesidad de definirlos. Para ello es posible recurrir a la Historia para hacer ver al alumnado que los números que ya manejan con soltura (enteros, racionales,...) no siempre han estado perfectamente conocidos y formalizados.

4.1. ¿Dónde se esconden?

La necesidad didáctica de definir el conjunto de los números complejos no tiene por qué coincidir con la histórica; al igual que los enteros y los racionales, los números complejos surgen de la necesidad de resolver ecuaciones con coeficientes en un conjunto numérico ya conocido. Basta con usar la ecuación $x^2 + 1 = 0$ o cualquier ecuación de segundo grado con discriminante negativo que, hasta el momento, el estudiante ha concluido con la frase: *no existe solución real.*

Comenzamos por la resolución de una ecuación de primer grado con coeficientes enteros:

$$2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}. \tag{4.1}$$

Notamos que esta ecuación tiene coeficientes enteros, sin embargo, su solución **no es entera**. Luego, podemos usar la resolución de ecuaciones para "detectar"nuevos números.

El **conocimiento previo** del que partirán los estudiantes serán las **ecuaciones de segundo grado** y las **coordenadas cartesianas**. Así, consideramos la ecuación

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$

En este punto, el alumno terminaba el ejercicio indicando que no existe solución real, pero la expresión que resulta se puede manipular para que tenga, al menos, una parte comprensible por el alumno

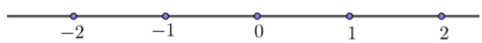
$$\frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

La expresión $\sqrt{-1}$ es desconocida hasta ahora, pero se puede manipular con las reglas del Álgebra que los estudiantes ya usan.
Por lo que se tienen dos soluciones,

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2 \cdot \sqrt{-1} \\ x_2 = 1 - 2 \cdot \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Observación 4.1. Es importante destacar al alumnado que estas soluciones tienen el mismo sentido que tenía $x = -\frac{5}{2}$ en la ecuación (4.1).

El primer reto para los estudiantes será **ubicar** estas dos expresiones viendo únicamente la recta real.



Ayudándose de la parte real que ya conocen y de la noción de coordenadas cartesianas, deben ubicar $1 + 2\sqrt{-1}$ en el punto $(1, 2)$. Para ello, deben hacer uso del modo de pensamiento AA para encontrar la siguiente equivalencia,

$$1 + 2\sqrt{-1} \equiv (1, 2).$$

De este modo se debe llegar a la situación de la Figura 4.1.

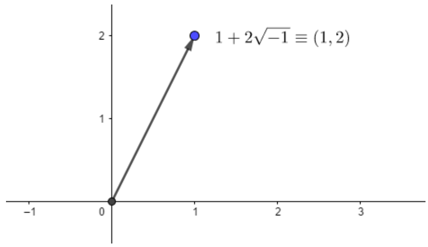


Figura 4.1: Identificación de un número complejo como un punto en el plano.

Del mismo modo se ubica $1-2\sqrt{-1}$. Estas cantidades, como indicaba Huygens en la Sección 3.3, no son reales, sin embargo, al sumarse se obtiene un número real (ver Figura 4.2).

Se debe destacar que la expresión $1+2\sqrt{-1}$ es un número al igual que 1, $\frac{3}{4}$ o π y que por **comodidad**, en adelante llamaremos i a $\sqrt{-1}$. En consecuencia, $1+2\sqrt{-1} = 1+2i$.

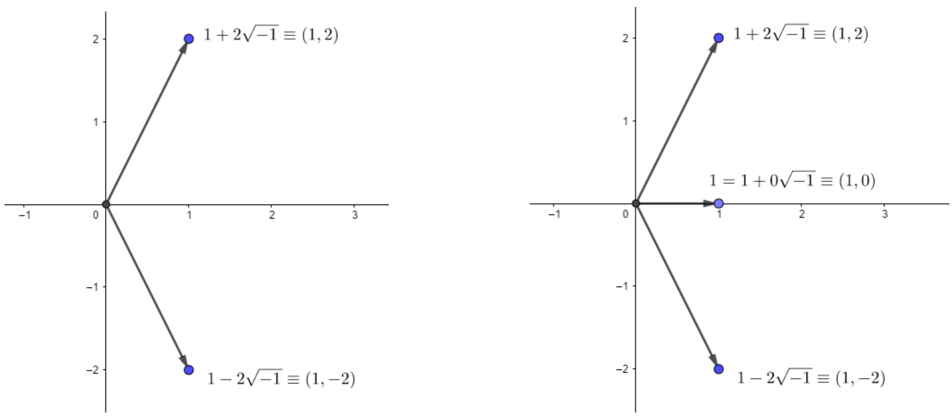


Figura 4.2: La suma de las soluciones es real.

Llega el momento de la definición. Un número complejo no es un concepto totalmente nuevo para los estudiantes, que ya han trabajado con puntos en el plano e incluso los han operado. Con la ubicación de $1+2\sqrt{-1}$ en el plano, debe quedar claro que un número complejo es, simplemente, un punto en el plano, con unas determinadas coordenadas.

Lo que cambia con respecto a los puntos en el plano cartesiano es la **notación**. Este cambio viene motivado por simple comodidad a la hora de manipular dichos puntos o números complejos.

Observación 4.2. El adjetivo *complejo* se debe a **razones históricas**. Es crucial que los estudiantes comprendan esto para evitar reticencias a la hora de estudiarlos.

Con esto, el esquema (1.1) del Capítulo 1 queda de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0, \tag{4.2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4.3}$$

Estudiando el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces (4.2) tiene 2 soluciones reales (y por lo tanto, **complejas**),
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces (4.2) tiene 1 solución real (y por lo tanto, **compleja**) doble,
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces (4.2) tiene 2 soluciones **complejas** (no reales),
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}.$$

4.2. Navegando por sitios conocidos

Tal y como vimos en la Sección 3.1, siempre existe un período de tiempo entre el uso de los números y su formalización.

Del mismo modo que los enteros -2, 0 o 23 pertenecen a $\mathbb{Z}$ y los racionales $\frac{2}{3}$, $\frac{-1}{7}$ o $\frac{9}{13}$ pertenecen a $\mathbb{Q}$; existe un conjunto $\mathbb{C}$ que contiene a todos los números complejos.

$$1 + 2i, 1 - 2i \text{ pertenecen a } \mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Este conjunto funciona igual que el plano cartesiano, por lo que siempre podemos pensar en coordenadas cartesianas.

$$(a, b) \leftrightarrow a + bi \text{ donde } i = \sqrt{-1} \text{ y por tanto } i^2 = -1.$$

Esta nueva forma de ver un punto en el plano **nos permitirá definir la operación producto** más adelante.

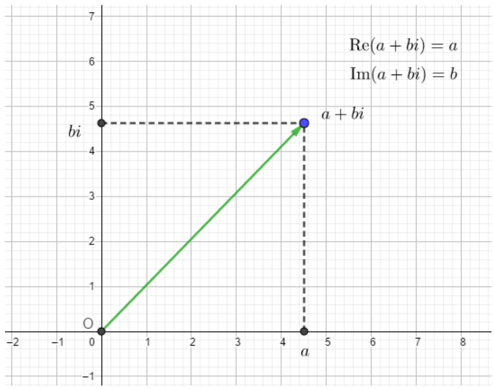


Figura 4.3: Partes real e imaginaria de un número complejo.

Sea $a + bi \in \mathbb{C}$, se definen (ver Figura 4.3)

- La parte real de z como $\text{Re}(a + bi) = a$.
- La parte imaginaria de z como $\text{Im}(a + bi) = b$.

Observación 4.3. Un fallo de concepto muy común entre los estudiantes es creer que la parte imaginaria de un número complejo $a + bi$ es bi. Es importante hacer hincapié en que esto **no es correcto**, tanto la parte real como la parte imaginaria son **números reales**.

Es importante que los estudiantes vean los números complejos como extensión de los reales, es decir, que vean los números reales como **caso particular** de los números complejos. Para ello, pueden ayudarse del GeoGebra y el modo de pensamiento SG para detectar que cualquier número real r se puede escribir como $r+0i$ encontrando casos particulares como $1 = 1+0i$, $-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}+0i$, o $\pi = \pi+0i$.

Una vez superado este hecho, se procederá a la definición de número real e imaginario puro.

Se dirá que $a + bi$ es

- **real** si $\mathrm{Im}(a+bi)=0$,
- **imaginario puro** si $\mathrm{Re}(a+bi)=0$.

Cuestión: Indica cuáles de los siguientes números son complejos.

1. $3e$,
2. $3ei$,
3. $1+4i$,
4. $5i$,
5. -3,
6. $-i^2$,
7. $i-i$,
8. $\cos(\pi)-i$,
9. $\dfrac{\pi}{3}-e$.

Con esta cuestión debe quedar claro a los estudiantes que todos los números que conocen son complejos, es decir, que real y complejo **no son conceptos excluyentes**.

4.3. Salvando las distancias

En el plano complejo, cada número está a cierta distancia del origen $0+0i$. Para calcular dicha distancia razonaremos como Pitágoras. Del mismo modo que se calcula el módulo de un vector (a,b) en el plano cartesiano,

$$\|(a,b)\|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Dado que los números complejos son puntos en el plano con otra notación, se propone a los estudiantes la siguiente cuestión.

¿Cómo podríamos redefinir el módulo para aplicarlo a los números complejos?

1. $\|a+bi\|=\sqrt{a^2+(bi)^2}$,
2. $\|a+bi\|=\sqrt{a^2+b^2}$,
3. $\|a+bi\|=\sqrt{(a+bi)^2}$.

Esta cuestión tiene como objetivo que los estudiantes distingan la parte imaginaria de un número complejo de bi mediante la identificación del plano complejo con el plano cartesiano. Es importante que los estudiantes lleguen por sí mismos a que las respuestas 1 y 3 son incorrectas.

Cuesiones:

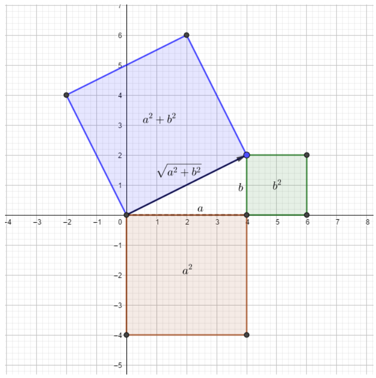


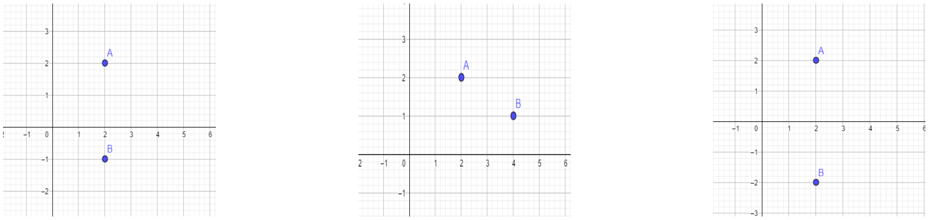
Figura 4.4: Relación pitagórica entre el módulo de un número complejo y sus partes reales e imaginarias.

1. Calcula el módulo de los siguientes números complejos:
   a) $1+i$,
   b) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$,
   c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$,
   d) $\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}+\dfrac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}i$,
2. Sea $x \in \mathbb{R}$. Hallar x para que el módulo de $3+xi$ sea $\sqrt{13}$.
3. Dado un número complejo $a+bi$ de módulo 1. ¿Qué relación existe entre su parte real y su parte imaginaria?

4.4. El espejo en el eje OX

En esta sección trataremos de presentar el conjugado de un número complejo. Para ello, nos basaremos en el conocimiento previo que los estudiantes tienen sobre **simetrías**.

¿Cuándo dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son simétricos respecto al eje de abscisas?
Esta pregunta debe ser lanzada a los estudiantes para que, partiendo de la noción intuitiva que ya tienen sobre simetrías, determinen si, por ejemplo, los pares de puntos de la Figura 4.5, son simétricos respecto al eje OX o no (modo de pensamiento SG). Posteriormente, deben llegar a la relación formal entre pares de puntos simétricos (modo de pensamiento AA).



(a) Puntos $A(2,2)$ y $B(2,-1)$.

(b) Puntos $A(2,2)$ y $B(4,1)$.

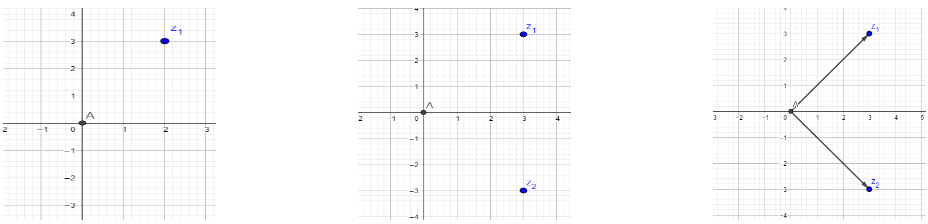
(c) Puntos $A(2,2)$ y $B(2,-2)$.

Figura 4.5: Ejemplos para mostrar a los estudiantes.

Dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano se dirán simétricos respecto al eje OX si sus abscisas coinciden y sus ordenadas son opuestas, es decir, $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$.
Una vez los estudiantes adquieran destreza con esta noción pasando del modo de pensamiento SG al AA, se identifica el plano cartesiano con el plano complejo.

$$(x, y) \leftrightarrow x + yi$$

De esta manera, motivamos la definición de conjugado de un número complejo.



(a) Trazado del punto.

(b) Trazado del simétrico con respecto al eje OX.

(c) Trazado de los vectores.

Figura 4.6: Conjugado de un número complejo con GeoGebra.

Con esto, los estudiantes deben llegar a que el conjugado de un número complejo $a + bi$ es su simétrico con respecto al eje OX $a - bi$ (ver Figura 4.6).

Sea $a + bi$ un número complejo, se define el **conjugado de** $a + bi$ como $a - bi$ y escribimos

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Gracias al software de geometría dinámica, los alumnos podrán observar y controlar un número complejo móvil, representar diversos números complejos y descubrir sus propiedades. Ver Figura 4.3.
Se plantean tres cuestiones con las que el alumnado deberá tratar. El objetivo es que los alumnos entiendan el plano complejo como una extensión del eje real y que represente algunos números complejos valiéndose de sus conocimientos previos sobre coordenadas cartesianas.

Cuestiones

1. Da el conjugado de los siguientes números complejos
   a) $1 + 3i$,
   b) $-1 - \pi i$,
   c) $i + i$,
   d) $i - i$,
   e) -3,
   f) $-3 + 7$,
   g) $i + 9$,
   h) $i + 4$.

2. ¿Qué relación guarda el complejo z con su conjugado?
   En esta cuestión el alumnado debe descubrir que un número complejo y su conjugado tienen el mismo módulo y ángulos opuestos respecto al semieje real positivo.

3. ¿Puede coincidir z con su conjugado?¿Y con su opuesto?¿Cuándo?
   En esta cuestión el alumnado debe ver el conjugado como un concepto que surge al explorar el plano complejo fuera del eje real y que, dentro de este, número y conjugado coincide. Además, se pretende que los estudiantes noten que el concepto de conjugado solo se distingue en el caso de los complejos no reales, ya que en el caso de los reales los números coinciden con sus conjugados.

4. ¿Pueden coincidir opuesto y conjugado?¿Cuándo?
   Con esta cuestión se espera que los estudiantes noten que esto solo ocurre cuando z es imaginario puro.

5. Sean $z_1 = 7 - i$, $z_2 = 3 + 3i$ y $z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}i$. Calcula sus módulos y los módulos de sus conjugados. ¿Qué ocurre?
   En esta pregunta se pretende que los estudiantes vean que un número y complejo y su conjugado **tienen el mismo módulo**.

4.5. Jugamos con los números complejos

En esta sección el alumnado manipulará las distintas operaciones con números complejos, constatará que efectivamente son extensiones de las operaciones de números reales y realizarán cuestiones de indagación.
En primer lugar, es necesario determinar cuándo dos números complejos son iguales, por lo que se plantea como cuestión al alumnado:

¿Cuándo dos números complejos son iguales?

Los estudiantes pueden recurrir a conjuntos numéricos anteriores como los racionales, donde determinar la igualdad de los números es incluso más complicado que en el conjunto de los números complejos. Esto puede servir como aliciente para quitar las posibles malas expectativas del alumnado hacia los números complejos.

Ejercicio:
Determinar $x \in \mathbb{R}$ y/o $y \in \mathbb{R}$ para que se den las siguientes igualdades.

1. $3 + i = x + i$,
2. $-7 - i = xi - 7$,
3. $2 + x^2 i = 2 + 9i$,
4. $i + xi^2 = 5 + y$,
5. $3y + \frac{x}{3} i = 2 + i$,
6. $2 + 11i = x + yi$,
7. $3x + 8yi = 1 + i$,
8. $x\pi + \pi i = 5yi$.

Es importante indicar que no tiene que despejar como si se tratara de ecuaciones de primer grado, sino que traten de manejar el concepto de igualdad entre números.
Una vez lleguen a la solución, se formaliza haciendo uso del modo AA. Sean dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, dichos números son iguales si sus partes reales coinciden y sus partes imaginarias coinciden, es decir,

$$z = w \iff a = c,\ b = d.$$

4.5.1. Suma y resta

La siguiente construcción de Manuel Sada representa la suma de dos números complejos como vectores. El alumnado podrá ver cómo se verifica la regla de paralelogramo aunque varíen los sumandos. Además es posible activar la animación que construye el paralelogramo (ver Figura 4.7).
Tras una primera toma de contacto con la construcción, se plantea una serie de cuestiones al alumnado para que practiquen e indaguen con la suma de números

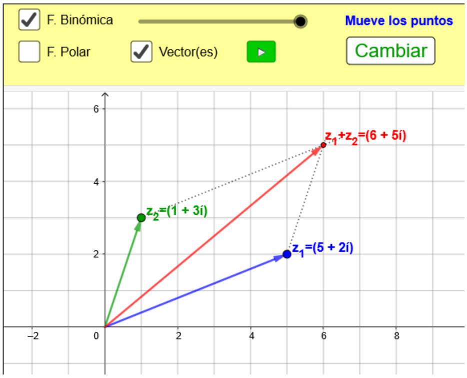


Figura 4.7: Suma de números complejos con GeoGebra.

complejos.

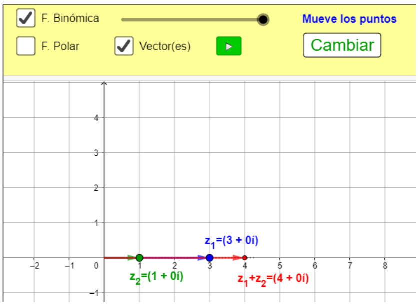
Cuestiones

1. Realiza y visualiza las siguientes sumas de números complejos:
   a) $(5+3i)+(6+4i)$
   b) $(-3+i)+(1-3i)$
   c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}i\right)$
   d) $(0.5-4i)+(-1.5-i)$
   e) $(7-4i)+(7+4i)$
   f) $(2-11i)+(-2+11i)$

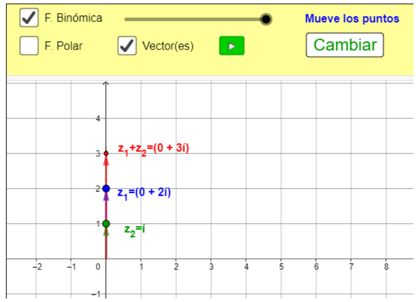
2. ¿Qué ocurre al sumar dos reales?¿Siempre resulta real?¿Puede resultar imaginario?

3. ¿Qué ocurre al sumar dos imaginarios puros?¿Siempre resulta imaginario puro?¿Puede resultar real?
   Las cuestiones 2 y 3 están diseñadas para que el alumnado observe que, en particular, la suma de reales es de nuevo un real (ver Figura 4.8a), y esto se da también en la recta imaginaria (ver Figura 4.8b).
4. ¿Qué ocurre al sumar real e imaginario puro?

5. ¿Qué ocurre al sumar dos complejos que no sean reales ni imaginarios puros? Explica el proceso.
   En esta cuestión se pretende que el alumno observe cómo es la geometría de



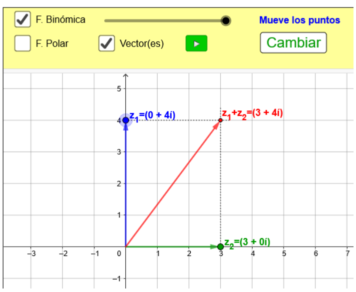
(a) Suma en $\mathbb{R}$.



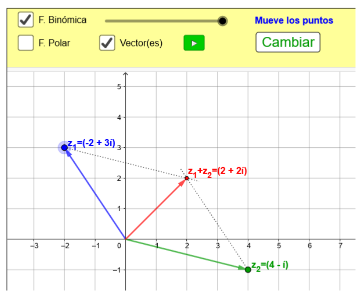
(b) Suma en $\mathbb{R}i$.

Figura 4.8: Suma de dos reales y suma de dos imaginarios puros.

la suma de números complejos. En primer lugar con una situación sencilla: suma de un real y un imaginario puro, donde la suma se realiza trazando un rectángulo; y en segundo lugar el caso más general: suma de dos complejos no reales ni imaginarios puros, donde verán que deben usar la ley del paralelogramo para situar la suma.



(a) Suma de dos complejos en ejes distintos.



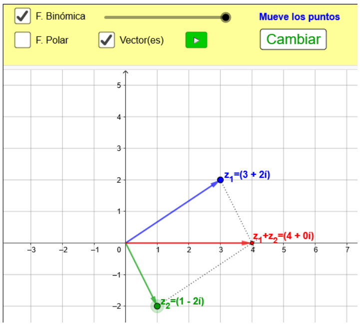
(b) Suma de dos complejos no situados en ejes.

Figura 4.9: Ley del Paralelogramo.

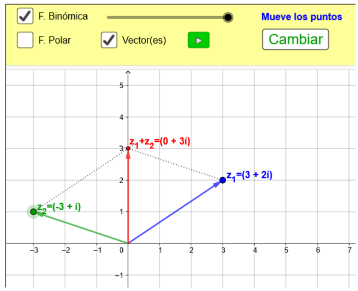
6. ¿Existen dos complejos no reales ni imaginarios puros cuya suma resulta un número real?¿Qué ocurre con un número y su conjugado?

7. ¿Existen dos complejos no reales ni imaginarios puros cuya suma resulta un número imaginario puro?
Con esta última cuestión se busca que el alumnado observe que la suma

de dos complejos no reales ni imaginarios puros puede ser real o imaginario puro. También deben observar que el caso particular del conjugado no es el único para el que se verifica esto.



(a) Suma de dos complejos no reales que resulta real.



(b) Suma de dos complejos no imaginarios puros que resulta imaginario puro.

8. ¿La suma de números complejos es conmutativa?
En esta cuestión los alumnos comprobarán que cambiando z_1 por z_2, siempre se verifica que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. La prueba es

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i \\
&= (c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1.
\end{aligned}
$$

Una vez el alumnado haya explorado las cuestiones, el profesor señala que lo aprendido debe ser formalizado. Para ello se valdrá de lo que los alumnos ya intuyan y puedan escribir hasta llegar a la definición deseada.

Sean los números complejos $z = a + bi \in \mathbb{C}$ y $w = c + di \in \mathbb{C}$. Se define la suma

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (bi + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Nótese que

- $\mathrm{Re}(z + w) = a + c$,
- $\mathrm{Im}(z + w) = b + d$.

Para la resta de números complejos se proponen las mismas cuestiones que para la suma pero con restas. El alumnado debe observar que la operación resta es sumar el opuesto que siempre estará visible en la construcción de la Figura 4.11.

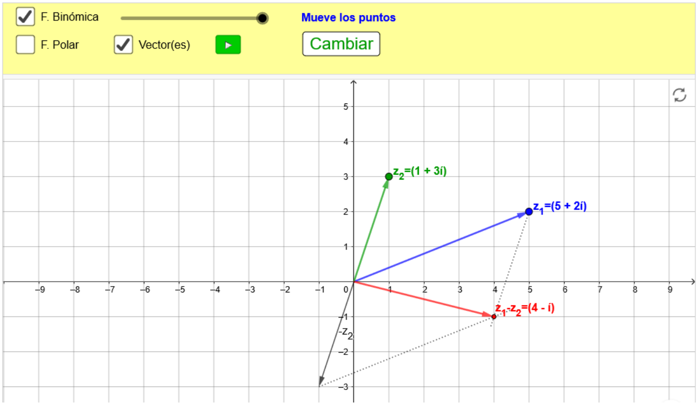


Figura 4.11: Resta de números complejos con GeoGebra.

4.5.2. Una nueva operación entre puntos

Antes de definir y trabajar con el producto de números complejos, es necesario ver que, dado un número real b y la unidad imaginaria i, se cumple que $bi = ib$ y, por lo tanto $a + bi = a + ib$.
Es importante que los estudiantes no asuman que $bi = ib$ desde el principio. La propiedad conmutativa que conocen hasta el momento funciona en los números reales. Al explorar un nuevo conjunto numérico, es necesario verificar que se cumplen las propiedades usuales. Sea $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. Entonces

$$bi = -i^2 bi = -i(ib)i = -ii(ib) = -i^2 ib = ib.$$

Ejemplos:

- $2i = i2$,
- $3 + 7i = 3 + i7$.

La identificación de los números complejos con pares en el plano permite una visualización rápida para la suma y resta. Sin embargo, no hay definida una operación producto entre puntos del plano. Esta es la novedad que traen consigo los números complejos: una **segunda operación** con la que trabajar con los puntos en el plano. Al igual que para la suma, tras una primera toma de contacto con la construcción de la Figura 4.12, se plantea una serie de cuestiones para que los alumnos investiguen el comportamiento de los números complejos cuando son multiplicados.

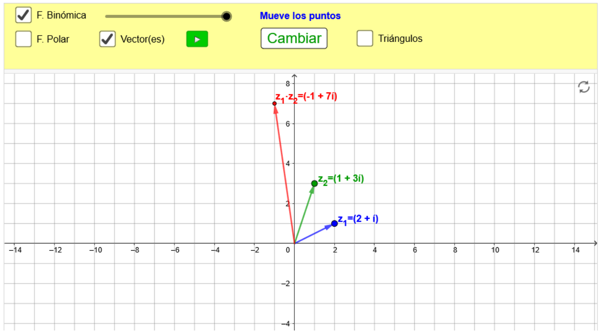
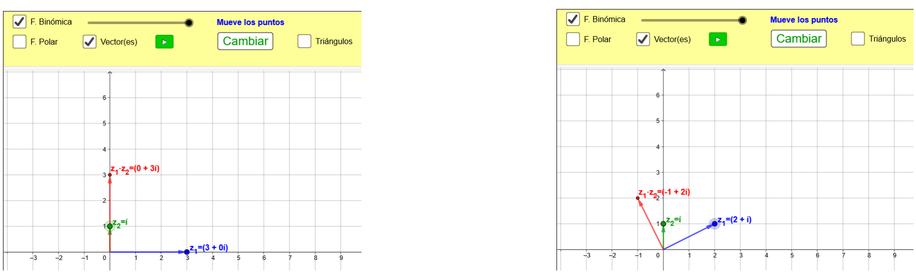


Figura 4.12: Multiplicación de números complejos con GeoGebra.

Cuestiones

1. Visualiza los siguientes productos de números complejos:
   a) $(-2-2i)\cdot(1+3i)$
   b) $(2+3i)\cdot(3-6i)$
   c) $5\cdot(-2+i)$
   d) $(3+8i)\cdot i$
   e) $(-1-2i)\cdot(-1+2i)$.

2. Investiga y explica qué ocurre cuando
   a) se multiplica un complejo cualquiera por el número i.



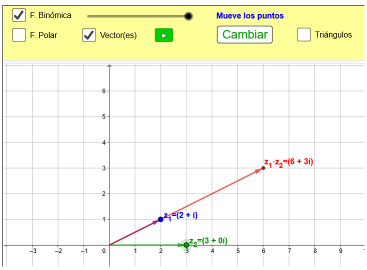
(a) Multiplicación de un número real por i.

(b) Multiplicación de un número no real por i.

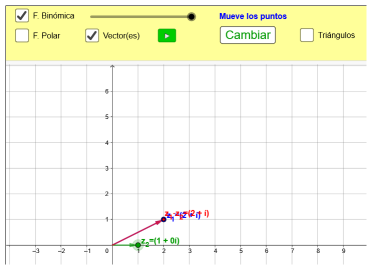
Figura 4.13: Multiplicación de un número complejo por i.

Multiplicar un número complejo z cualquiera por i equivale a aplicar un giro de 90° a z. Esto se ve claramente cuando z es real (ver Figura 4.13a) y es sencillo verlo de manera general (ver Figura 4.13b).
Cambiar i por ki con k un número real sólo incrementa el módulo del producto k veces.

b) se multiplica un complejo cualquiera por un número real (con parte imaginaria nula).



(a) Multiplicación de un número complejo por un real.



(b) Multiplicación de un número complejo por 1.

Multiplicar un número complejo cualquiera z por un número real k equivale a aumentar el módulo de z k veces (ver Figura 4.14a). En caso de que el número real sea 1, el número complejo se queda invariante (ver Figura 4.14b).

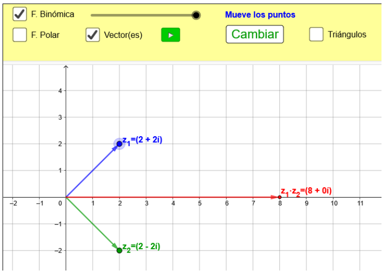
c) se multiplica un complejo cualquiera por su conjugado.
El resultado de hacer esto es siempre un número real positivo, incluso cuando z se encuentre en el tercer o en el cuarto cuadrante, de hecho coincide con la distancia del punto z al origen (ver Figura 4.15).

Una vez tratadas todas las cuestiones se define el producto de complejos y verificamos que efectivamente se cumplen las propiedades que hemos visto.
Sean dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$. Se define el producto como

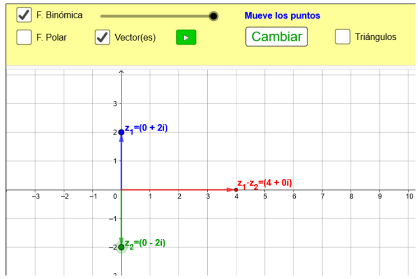
$$z{\cdot}w = (a{+}bi){\cdot}(c{+}di) = ac{+}adi{+}bic{+}bidi = ac{+}adi{+}bci{+}bdi^2 = (ac{-}bd){+}(ad{+}bc)i.$$

Nótese que

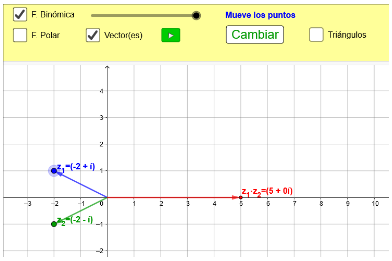
- $\mathrm{Re}(z \cdot w) = ac - bd$,
- $\mathrm{Im}(z \cdot w) = ad + bc.$



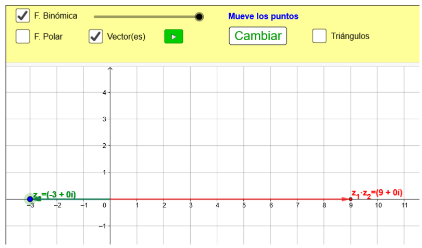
(a) Caso $a > 0,\ b > 0$.



(b) Caso $a = 0,\ b > 0$.



(c) Caso $a < 0,\ b > 0$.



(d) Caso $a < 0,\ b = 0$.

Figura 4.15: Productos de números complejos por su conjugado.

4.5.3. Cociente

Los números complejos se pueden dividir, siempre y cuando el divisor no sea nulo y el resultado siempre resulta otro número complejo. Se plantea como un desafío definir la división de números complejos. Los estudiantes deben percatarse del uso de la última propiedad vista en el apartado anterior $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ para evitar la unidad imaginaria i en el denominador. Deben llegar a lo siguiente:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i.$$

Tras esto, los estudiantes tendrán que implementarlo en GeoGebra de manera guiada.

Implementación

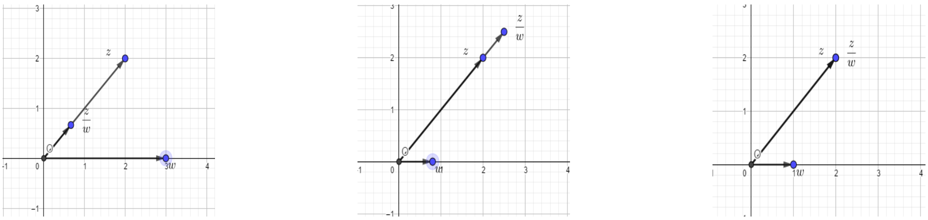
1. Se abre una hoja de GeoGebra.
2. Se determina el origen y se le llama O.
3. Se declaran los deslizadores a, b, c, y d que oscilen entre los valores -15 y 15.

4. Se invocan dos puntos llamados z y w. Se reconfiguran para que sus coordenadas sean (a, b) y (c, d) respectivamente.
5. Se invoca un tercer punto llamado $\frac{z}{w}$ y se reconfigura con las coordenadas calculadas en el apartado anterior: $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

Cuestiones

1. Explora el caso real. Realiza las siguientes divisiones: $\frac{8}{4}, \frac{10}{-5}, \frac{7}{7}, \frac{-3}{-3}$.¿Qué ocurre?
2. Realiza las siguientes divisiones.
   a) $\frac{i}{2}$.
   b) $\frac{i}{4}$.
   c) $\frac{i}{-7}$.
   d) $\frac{i}{i}$.
   e) $\frac{-2+i}{1}$.
   f) $\frac{-2+i}{2}$.
   g) $\frac{-2+i}{10}$.
   h) $\frac{-2+i}{-2+i}$.
   i) $\frac{-2+i}{1}$.
   j) $\frac{-5+3i}{i}$.
   k) $\frac{-5+3i}{2i}$.
   l) $\frac{-5+3i}{7i}$.
3. ¿Qué ocurre al dividir un número entre un número real mayor que 1?¿Y menor que 1?¿Y entre 1?
   Con esta cuestión los estudiantes deber ver que esto se traduce en una homotecia inversa a la del producto (ver Figura 4.16).

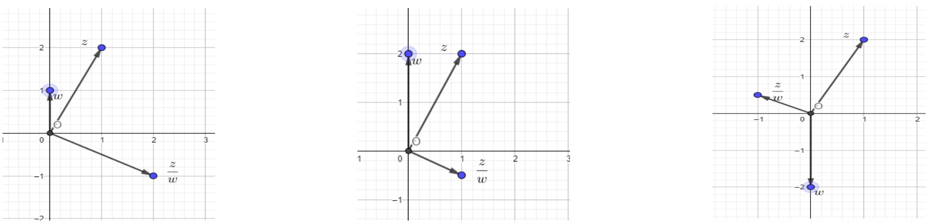
4. ¿Qué ocurre al dividir un número entre -1?
5. ¿Qué ocurre al dividir un número entre i?¿Y entre un múltiplo de i?
   Con estas preguntas se busca que el alumnado descubra que dividir es tanto como girar en sentido contrario al producto y que cuando mayor sea el



(a) Caso $w > 1$. (b) Caso $w < 1$. (c) Caso $w = 1$.

Figura 4.16: Homotecia inversa a la del producto.

módulo del divisor, menor será el módulo del resultado (ver Figura 4.17).

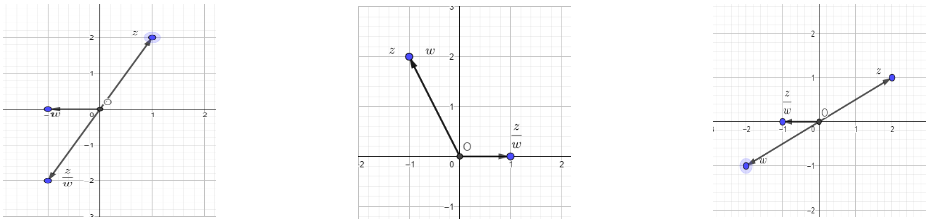


(a) Cociente $\frac{z}{i}$. (b) Cociente $\frac{z}{2i}$. (c) Cociente $\frac{z}{-2i}$.

Figura 4.17: Cociente entre múltiplos de i.

6. ¿Qué ocurre al dividir un número entre sí mismo? (ver Figura 4.18b)
7. ¿Qué ocurre al dividir un número entre su opuesto? (ver Figura 4.18c)
   Con estas dos preguntas se pretende que los estudiantes noten que la división de números complejos sigue conservando sus propiedades esenciales: la división entre sí mismo es el entero 1 y entre su opuesto resulta -1 (ver Figura 4.18).

Además, todo número complejo no nulo tiene inverso, es decir, dado un número complejo $z \neq 0 + 0i$, siempre existe otro número complejo $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.
No es posible visualizar este hecho, veámoslo analíticamente.
Sea $z = a + bi \neq 0 + 0i$.
Tomando el número complejo $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}i$, se verifica que



(a) $\dfrac{z}{-1} = -z$. (b) $\dfrac{z}{z} = 1$. (c) $\dfrac{z}{-z} = -1$.

Figura 4.18: Extensión del cociente de números reales.

$$z \cdot z^{-1} = (a+bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i \right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1 + 0i.$$

Es posible que algún estudiante apunte que

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i.$$

Este hecho, aunque sea útil, no es un buen razonamiento, puesto que *a priori* el inverso de un elemento no se obtiene dividiendo 1 entre dicho elemento.

Cuestiones

1. Calcula

   a) $\dfrac{1+2i}{3+3i}$,
   b) $\dfrac{-1-i}{-4+i}$,
   c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}$,
   d) $\dfrac{2+5i}{i}$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}$, $z = \dfrac{x+i}{1-i}$, hallar x para que $|z| = \sqrt{5}$.
   Solución

$$\left| \frac{x+i}{1-i} \right| = \left| \frac{x+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right| = \left| \frac{(x-1)+(x+1)i}{2} \right| = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{4}} = \sqrt{5},$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{4} = 5 \Rightarrow \frac{2x^2+2}{4} = 5 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

4.6. Representaciones

En la encuesta realizada al alumnado se realizó la siguiente pregunta.

7. ¿Hay algún concepto relacionado con los números complejos que te parezca especialmente complicado? ¿Cuál? Explica tu respuesta.

A lo que un alumno contestó:

“La relación entre los números complejos y la trigonometría. Al dar la Fórmula de Moivre de forma prácticamente anecdótica, no hay una relación clara entre ambos elementos.”

Otro de ellos afirmó:

“Creo que facilitaría mucho a la hora de entender las formas de expresar un número complejo el manejo de otros tipos de coordenadas como las polares, que normalmente se empieza a ver más a fondo posteriormente a los complejos.”

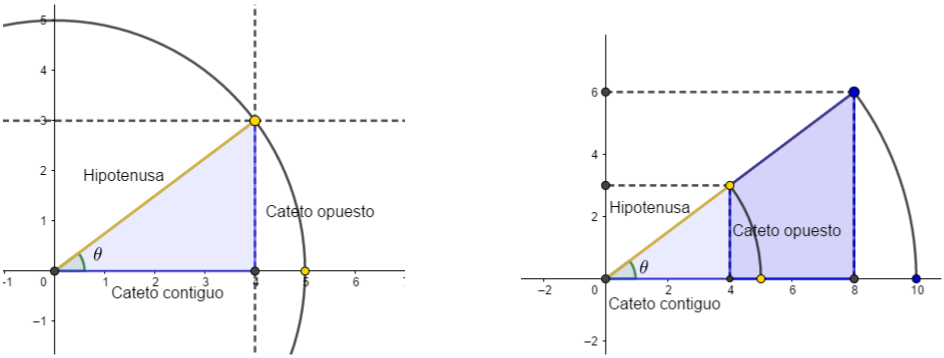
En esta sección trataremos de establecer las principales representaciones de números complejos y plantear cuestiones que favorezcan que los estudiantes pasen de una representación a otra y, con ello, de un modo de pensamiento a otro.

Para desarrollar con éxito esta parte, es necesario que los estudiantes tengan nociones recientes de trigonometría. Proponemos un pequeño recordatorio de las razones fundamentales y sus relaciones más relevantes.

Se dice que un triángulo es **rectángulo** si tiene un ángulo de $90°$. Los matemáticos se dieron cuenta de que, al aumentar un triángulo rectángulo por medio de triángulos semejantes, se producía un cambio en las dimensiones del triángulo, pero no las relaciones entre ellas. En particular, notaron que la relación entre cada cateto con la hipotenusa permanecía invariante ante homotecias. En definitiva, dichas relaciones dependían únicamente de uno de los ángulos no rectos del triángulo.

Fijado un triángulo rectángulo como en la Figura 4.19a, entonces la relación entre el cateto opuesto y la hipotenusa es de $\frac{3}{5}$. Si aumentamos las dimensiones de los catetos **proporcionalmente**, los triángulos resultantes serán **semejantes** (ver Figura 4.19b). Con esto, la relación entre catetos opuestos a θ con respecto a las hipotenusas es **invariante**, es decir,

$$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{hip}} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \ldots$$



(a) Triángulo rectángulo de base 4 y altura 3.

(b) Triángulos semejantes.

Dado que la relación se repetía en todos los triángulos semejantes, se definió el **seno** de un ángulo θ como la relación entre el cateto opuesto de θ y la hipotenusa, y se escribe

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{hip}}.$$

Del mismo modo, observamos que la relación entre el cateto contiguo y la hipotenusa es también invariante al aumentar proporcionalmente las dimensiones.

$$\frac{\mathrm{CC}}{\mathrm{hip}} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{16}{20} = \dots$$

A este invariante se le llamó **coseno** del ángulo θ, y se escribe

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{CC}}{\mathrm{hip}}.$$

Dado que fijado un ángulo θ, las razones $\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ son constantes, su cociente también es constante y se le llamó **tangente** de θ,

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{hip}}}{\frac{\mathrm{CC}}{\mathrm{hip}}} = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CC}} = \frac{|\overline{AB}|}{\mathrm{hip}}.$$

donde $|\overline{AB}|$ es la longitud del segmento $\overline{AB}$ (ver Figura 4.20).

Con estas tres razones fundamentales podemos estudiar los números complejos con unas nuevas coordenadas.

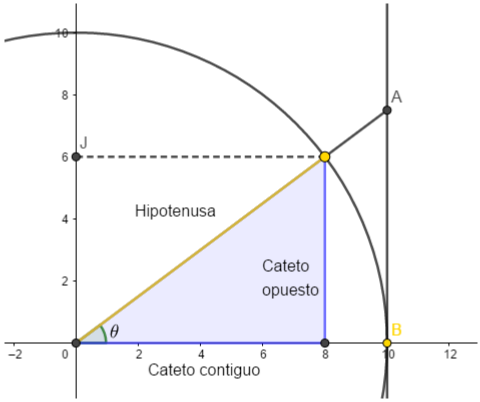


Figura 4.20: Construcción de la tangente.

4.6.1. La forma polar

Un mismo número complejo puede ser representado de múltiples formas, la que hemos visto hasta ahora (binómica y cartesiana) es análoga a la representación de puntos con coordenadas cartesianas donde los parámetros a y b determinan el número complejo $z = a + bi$.

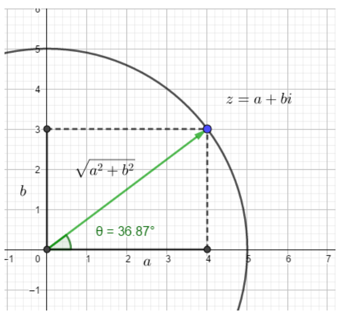


Figura 4.21: Módulo y argumento de un número complejo z.

Sin embargo, z viene determinado de manera única también por su módulo y el ángulo que forma con el semieje real positivo OX. Un buen ejercicio para introducir esto es proponer al alumnado que determine un número complejo z sin utilizar las coordenadas cartesianas.

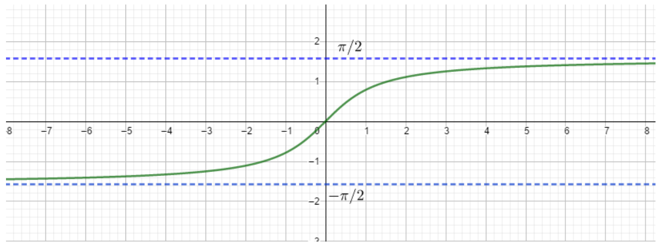


Figura 4.22: Función arcotangente.

Dicho ejercicio se puede plantear como la resolución de un caso particular sencillo, por ejemplo, obtener geométricamente el módulo y el argumento de $z = 1+i$ y tratar de caracterizar z mediante tales parámetros.

Una vez el alumnado vea que es posible ver un número complejo usando su módulo y el ángulo, **se plantea como un reto** descubrir la relación entre las coordenadas cartesianas (a, b) y la forma polar de un número complejo (r, θ).

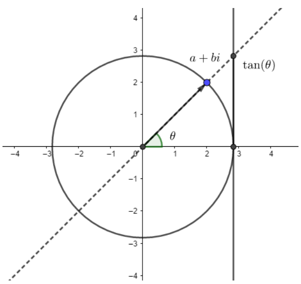
Los estudiantes deben percartarse de que pueden aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar el módulo y la definición de $\tan(\theta) = \dfrac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CC}}$ para relacionar las coordenadas de la forma binómica con el ángulo (ver Figura 4.26). Con esto, el alumnado tendría que pasar del modo SG al modo de pensamiento AA.

Se debe llegar a que $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$.

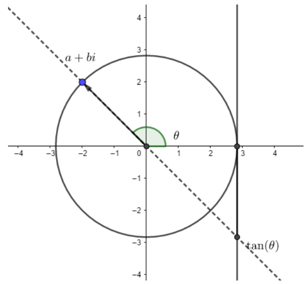
4.6.2. Despejar la tangente

Para despejar θ es necesario utilizar la función arcotangente (ver Figura 4.22). Dada la relación del ángulo con la tangente en función de su cuadrante, el ángulo θ se despeja de la siguiente manera,

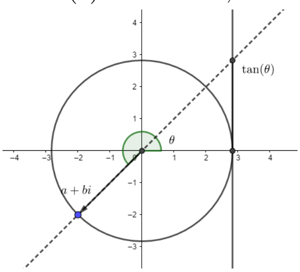
$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & si \quad a > 0,\ b > 0 \ \text{(Primer cuadrante)}, \\[2ex] \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & si \ a < 0,\ b \in \mathbb{R} \ \text{(Segundo y tercer cuadrante)}, \\[2ex] \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + 2\pi & si \quad a > 0,\ b < 0 \ \text{(Cuarto cuadrante)}. \end{cases}$$



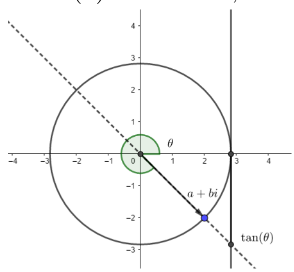
(a) Caso $a > 0,\ b > 0$.



(b) Caso $a < 0,\ b > 0$.



(c) Caso $a < 0,\ b < 0$.



(d) Caso $a > 0,\ b < 0$.

Figura 4.23: Expresión de los ángulos según el cuadrante.

Calcular el argumento suele ser una cuestión difícil para los estudiantes. Proponemos visualizar con el GeoGebra para que el alumnado ubique el arcotangente de θ y note que hay que sumar las cantidades π y 2π según el cuadrante (ver Figura 4.23) en el que se ubique el número complejo.

Una vez encontrado el ángulo, se le bautiza como **argumento de** z y se debe concluir lo siguiente,

$$z = a + bi = |z|_{\arg(z)}.$$

A esta última expresión se la llama **forma polar** de un número complejo z.

Cuestiones:

1. Convertir los siguientes números complejos en su forma binómica a su forma polar.
   a) i,
   b) $2i$,
   c) $3i$,
   d) $-i$,

e) $-2i$,
f) 1,
g) 2,
h) $1+2i$,
i) $-1+3i$,
j) $-\frac{1}{2}-i$,
k) $-1-2i$,
l) $3-\pi i$.

2. ¿Qué relación ves entre los números complejos que tienen el mismo argumento?
   Con esta cuestión se pretende que el alumnado observe que los números complejos que tienen el mismo argumento están en la misma semirrecta que pasa por el origen, es decir, uno es homotecia del otro.

3. ¿Qué relación hay entre los módulos de z_1, z_2 y $z_1 \cdot z_2$?¿Y entre sus argumentos?
   El alumnado debe encontrar, al menos, la relación que se da entre los ángulos de los números complejos que se están multiplicando. La relación entre los módulos la pueden hallar probando números enteros sencillos como módulo de los vectores.

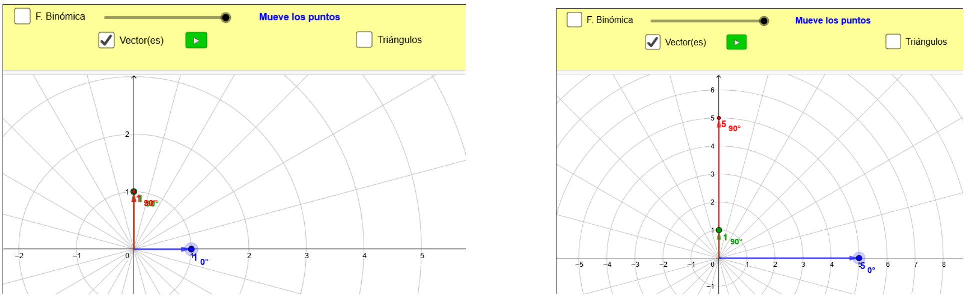
4. Visualiza y comprueba el resultado de los siguientes productos de números complejos:
   a) $5_{30^\circ} \cdot 1_{150^\circ}$
   b) $3_{15^\circ} \cdot 2_{75^\circ}$
   c) $8_{15^\circ} \cdot 1_{90^\circ}$
   d) $5_{0^\circ} \cdot 2_{45^\circ}$
   e) 4_{60° por su conjugado.
   f) 3_{150° por su opuesto.

5. Sabrías ahora explicar el motivo de lo que ocurre cuando
   a) se multiplica un complejo cualquiera por el número i.
   b) se multiplica un complejo cualquiera por un número real (con parte imaginaria nula).
   c) se multiplica un complejo cualquiera por su conjugado.

Con estas cuestiones se espera que el alumnado llegue a las siguientes conclusiones.

Sea un número complejo $z \in \mathbb{C}$.

- Multiplicar z por la unidad imaginaria i equivale a incrementar 90° el argumento de z (ver Figura 4.24).



(a) Multiplicación de 1 por i.

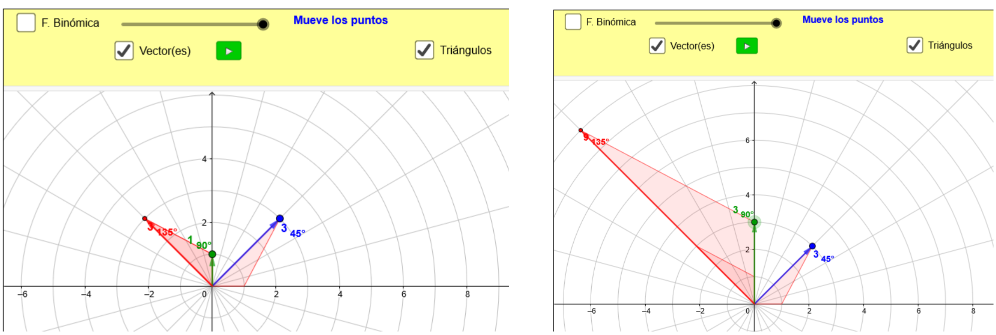
(b) Multiplicación de un número real por i.

Figura 4.24: Multiplicación de un número complejo por i en forma polar.

- Multiplicar z por un número real a equivale a incrementar el módulo de z. (Homotecia)

Una vez el alumnado observe el comportamiento de la forma polar y note su conveniencia para multiplicar números complejos el alumnado deberá plantear fórmulas candidatas hasta que alguien dé con el resultado.

Sean dos números complejos en forma polar $|z|_\alpha$, $|w|_\beta$. El producto de ambos se realiza multplicando sus módulos y sumando sus argumentos, es decir,



(a) Multiplicación de 1 por i.

(b) Multiplicación de un número real por i.

Figura 4.25: Relación entre los factores y el producto.

$$|z|_\alpha \cdot |w|_\beta = (|z| \cdot |w|)_{\alpha+\beta}.$$

Llegados a este punto, sería interesante que el alumnado reflexionase sobre la potenciación de números complejos con el objetivo de que la vean como un caso particular de producto (al igual que ocurre con el producto en conjuntos numéricos ya conocidos). Para ver esto se puede recurrir a la visualiación geométrica. En caso de que el alumnado haya adquirido destreza usando el modo de pensamiento AE se puede ver rápidamente que si $|z|_\alpha = |w|_\beta$, entonces

$$|z|_\alpha \cdot |w|_\beta = |z|_\alpha \cdot |z|_\alpha = (|z| \cdot |z|)_{\alpha+\alpha} = |z|^2_{2\alpha}.$$

4.6.3. La forma trigonométrica. Fórmula de De Moivre y potencias

Hemos visto que, al salir de la recta real, los conceptos están muy relacionados con la geometría del plano. En particular la Trigonometría juega un papel importante a la hora de estudiar los números complejos. De hecho, las razones trigonométricas aportan una nueva forma de representación de números complejos.
En la sección anterior se proponía que el alumnado obtuviese las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \arg(z) &= \theta, \end{aligned}$$

donde $\tan(\theta) = \dfrac{b}{a}$.
Si de estas ecuaciones despejamos a y b en función de $|z|$ y de $\arg(z)$ (modo de pensamiento AA) se obtiene

$$\begin{aligned} a &= |z| \cos(\theta) \\ b &= |z| \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

donde $\theta = \arg(z)$.
También puede obtenerse usando el modo de pensamiento SG con las definiciones de seno y coseno de un ángulo (ver Figura 4.26).
Si sustituimos en la forma binómica de z obtenemos

$$z = a + bi = |z| \cos(\theta) + |z| \operatorname{sen}(\theta) i = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

Así, tenemos la expresión trigonométrica de un número complejo

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

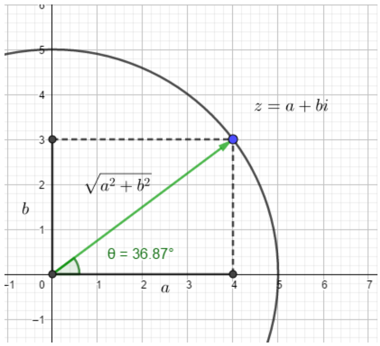


Figura 4.26: Deducción de a y b.

Esta representación puede servir como un puente entre el modo de pensamiento SG y el modo de pensamiento AA, ya que combina la visualización geométrica con representaciones simbólicas que tienen que ver con los ángulos.

¿Cuándo son iguales dos números en su forma trigonométrica?
Esta pregunta puede ser planteada por el docente para la reflexión por parte del alumnado. Por analogía con la forma polar, esto ocurre cuando sus módulos son iguales y sus argumentos se diferencian en múltiplos de 2π, es decir,

$$|z|(\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha)) = |w|(\cos(\beta)+i\operatorname{sen}(\beta)) \iff |z| = |w|,\ \alpha = \beta+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

La forma trigonométrica es una representación que involucra al seno y al coseno del argumento. Es conveniente su uso para multiplicar complejos dado que es análoga a la forma polar: los módulos se multiplican y los argumentos se suman (modo de pensamiento SG).

$$|z|(\cos(\alpha)+i\operatorname{sen}(\alpha))\cdot|w|(\cos(\beta)+i\operatorname{sen}(\beta)) = |z|\cdot|w|(\cos(\alpha+\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)).$$

Consecuencia de esto es la Fórmula de Moivre para calcular potencias de números complejos.
Sea $z = |z|(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$z^n = |z|^n(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))^n = |z|^n(\cos(n\theta)+i\operatorname{sen}(n\theta)).$$

Cuestiones

1. ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$,

b) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

c) $3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Calcula las siguientes potencias

   a) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{20}$,

   b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$,

   c) $(1-\sqrt{3}i)^5$.

3. Utilizar la Fórmula de Moivre para deducir las fórmulas para las **razones trigonométricas del ángulo doble**: $\operatorname{sen}(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$.
   Esta cuestión puede resolverse en caso de que los estudiantes no puedan hacerlo. En tal caso, servirá de motivación para la siguiente.

   Solución
   Según la Fórmula de Moivre:

   $$(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))^2 = \cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha).$$

   Por otro lado, utilizando el Binomio de Newton,

   $$(\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))^2 = \cos^2(\alpha) + 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)i + i^2\operatorname{sen}^2(\alpha).$$

   Igualando ambas expresiones y agrupando partes reales e imaginarias,

   $$\cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha) = (\cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)) + 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)i.$$

   En este punto, los estudiantes deben notar que pueden hacer uso de la **igualdad de números complejos** en forma binómica. Puede ser una pista en caso de que los estudiantes no sepan avanzar.

   $$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha),\\ \operatorname{sen}(2\alpha) &= 2\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha).\end{aligned}$$

   □

4. Utilizar la Fórmula de Moivre para deducir $\operatorname{sen}(3\alpha)$ y $\cos(3\alpha)$.
   Con este tipo de ejercicios se muestra a los estudiantes que los números complejos aportan también resultados en otras ramas de la Matemática. Estas cuestiones se pueden reutilizar en temas o cursos posteriores para que los

estudiantes tengan que volver a emplear los complejos y fomentar así que el tema no se olvide.

5. Escribir en forma trigonométrica el siguiente número:

$$z = \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4} + \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}i,$$

y calcular z^3, expresándolo en forma binómica.

4.7. Radicación de números complejos

La idea del cálculo de raíces enésimas puede extenderse al conjunto de los números complejos, donde un radical de índice n tiene siempre n raíces distintas. Se plantea como un desafío llegar a la fórmula de las raíces enésimas de un número complejo. Se muestran dos manera de presentar este concepto.

- Usando la fórmula de Moivre (modo de pensamiento AA).
- Manipulando las raíces complejas con el GeoGebra (modo de pensamiento SG).

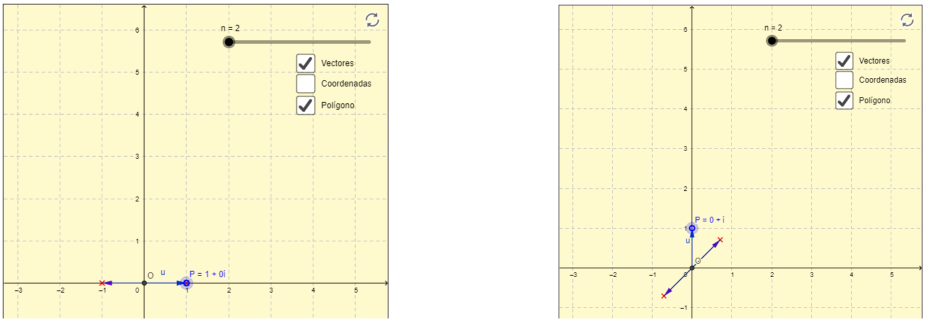
Sean $z = |z|(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $n \in \mathbb{N}$, usando la fórmula de Moivre y teniendo en cuenta que el seno y el coseno son funciones 2π-periódicas:

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \left\{ |z|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \,\middle|\, 0 \leq k \leq n-1 \right\}. \tag{4.4}$$

Manipulando las raíces complejas con las siguientes cuestiones se puede razonar geométricamente.

Cuestiones

1. Obtén las raíces cuadradas de 1. ¿Qué ocurre? (ver Figura 4.27a)
2. Obtén las raíces cuadradas de i. ¿Qué ocurre? (ver Figura 4.27b)
Con estas cuestiones se pretende que los estudiantes partan de lo que ya conocen (raíces cuadradas reales) y extiendan dicho concepto a cualquier número complejo, comenzando por 1, continuando con i y acabando con diversos números complejos. Además, si z_0 es una de las raíces complejas de z, entonces girar z_0 un ángulo de 180°, es decir, $|z_0|(\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi))$ es la otra raíz cuadrada de z.



(a) Raíces cuadradas de 1. (b) Raíces cuadradas de i.

Figura 4.27: Mecanismo de David Andino para la radicación de números complejos.

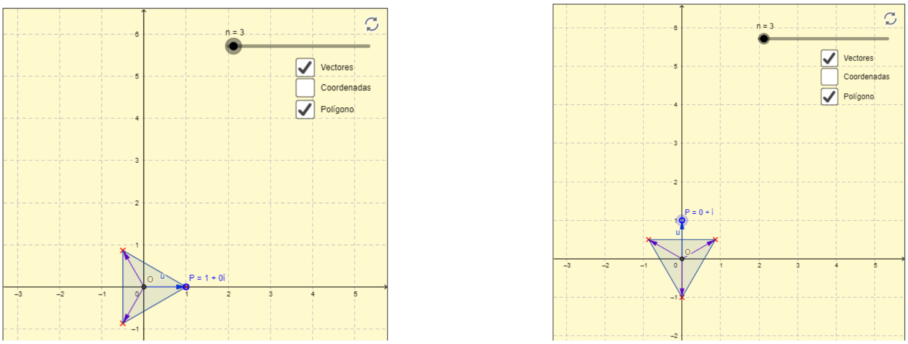
3. ¿Qué tienen en común las raíces cuadradas de 1 con las de i?
   En esta cuestión los estudiantes deben notar que las raíces de ambos números tienen el mismo módulo.

4. Obtén las raíces cúbicas de 1. ¿Qué ocurre? (ver Figura 4.28a) Comprueba que las raíces cúbicas determinan los vértices de un un triángulo equilátero en el plano de Argand.
   Con esta pregunta trabajamos el modo de pensamiento SG.

5. Obtén las raíces cúbicas de i. ¿Qué ocurre? (ver Figura 4.28b) Verifica que efectivamente son raíces.
   En esta cuestión los estudiantes deben descubir las dos raíces cúbicas de 1 que desconocían hasta el momento y calcular las tres raíces cúbicas de la unidad imaginaria. Además, si z_0 es una de las raíces complejas de z, entonces girar z_0 un ángulo de 130°, es decir,

$$z_1 = |z_0| \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) \right),$$
$$z_2 = |z_0| \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) \right),$$

   son las otras raíces cúbicas de z.
6. ¿Qué geometría representan las n raíces enésimas de cualquier número complejo?



(a) Raíces cúbicas de 1. (b) Raíces cúbicas de i.

Figura 4.28: Radicación de números complejos.

En esta última cuestión los estudiantes deben notar que el índice n del radical determina el número de vértices del polígono regular que determinan las raíces.

7. Calcula
   a) $\sqrt[5]{1+i}$,
   b) $\sqrt[4]{-16}$,
   c) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$,
   d) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$,
   e) $\sqrt[3]{\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)}$.

Sabiendo que el índice de la raíz indica el número de partes iguales en las que tenemos que dividir el ángulo, que siempre se forma un polígono regular y que el seno y el coseno son funciones 2π-periódicas, se tiene también la ecuación (4.4).

4.8. Aplicaciones

En esta sección propondremos algunas aplicaciones de los números complejos. Serán fáciles de resolver mediante el modo de pensamiento AA, pero servirán como introducción a cuestiones relacionadas con el modo de pensamiento AE.

4.8.1. Raíces cúbicas conjugadas

"Si dos números complejos son conjugados, las raíces cúbicas de uno serán conjugadas del otro (y viceversa)".

Supongamos que u^3 y v^3 son complejos conjugados,

$$u^3 = a + bi, \; v^3 = a - bi \tag{4.5}$$

es decir,

$$u \in \left\{ u_0 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{\theta}{3}}, \; u_1 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{\theta+2\pi}{3}}, \; u_2 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{\theta+4\pi}{3}} \right\}$$

por otro lado,

$$v \in \left\{ v_0 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{-\theta}{3}}, \; v_1 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{-\theta+2\pi}{3}}, \; v_2 = \sqrt[3]{|a+bi|}_{\frac{-\theta+4\pi}{3}} \right\}$$

Veamos que cada raíz u_0, u_1, u_2 es conjugada de alguna raíz v_0, v_1, v_2.
Es claro que $\bar{u}_0 = v_0$. Por otra parte,

$$-\frac{\theta + 2\pi}{3} = \frac{-\theta - 2\pi}{3} + 2\pi = \frac{-\theta + 4\pi}{3} \Rightarrow \bar{u}_1 = v_2$$

y por último,

$$-\frac{\theta + 4\pi}{3} = \frac{-\theta - 4\pi}{3} + 2\pi = \frac{-\theta + 2\pi}{3} \Rightarrow \bar{u}_2 = v_1.$$

Concluimos así que las soluciones u y v de (4.5) son complejos conjugados.

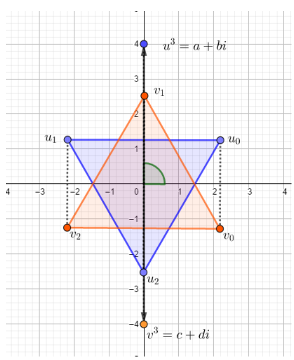


Figura 4.29: Dos complejos conjugados y sus raíces cúbicas.

4.8.2. Recintos imposibles: El Problema de Cardano

El Problema de Cardano dice lo siguiente:

“Encontrar dos números de tal forma que su suma sea 10 y su producto 40.”

Un enunciado equivalente para estudiantes que piensen de una manera más geométrica (ver Figura 4.30) sería:

“Determinar las dimensiones de un cuadrilátero tal que su perímetro sea de 20 unidades y su área de 40 unidades cuadradas.”

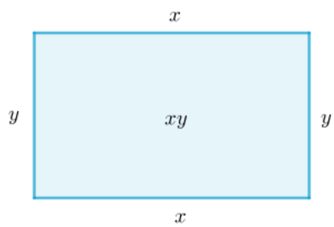


Figura 4.30: Planteamiento geométrico del Problema de Cardano.

Solución
Planteamos las ecuaciones que determinan las dimensiones del cuadrilátero,

$$\begin{cases} 2(x+y) = 20, \\ \\ xy = 40. \end{cases} \tag{4.6}$$

Despejando y de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obtenemos la ecuación cuadrática,

$$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Resolviendo,

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Tomando $x = 5+\sqrt{-15}$, se tiene que $y = 10-x = 10-(5+\sqrt{-15}) = 5-\sqrt{-15}$. Comprobamos que efectivamente el par $(x, y) = (5+\sqrt{-15}, 5-\sqrt{-15})$ es solución.

$$\begin{cases} 2(x+y) = 2(5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}) = 2 \cdot 10 = 20, \\ \\ xy = (5+\sqrt{-15}) \cdot (5-\sqrt{-15}) = 5^2 + 15 = 40. \end{cases}$$

Es decir, las “medidas” del cuadrilátero son complejos no reales, por lo que **no existe** un rectángulo como el de la Figura 4.30 satisfaciendo (4.6).

4.8.3. Siempre existe solución

El hecho de poder extraer todas las raíces de un radical permite resolver ecuaciones de segundo y tercer grado donde los coeficientes son números complejos.

En particular, **cuando los coeficientes son reales**, las soluciones complejas no reales aparecen **por pares**, es decir, si un número complejo no real z es solución de una ecuación, entonces su conjugado $\bar{z}$ también es solución de dicha ecuación. Este hecho puede utilizarse para **consolidar** el conocimiento que los estudiantes tengan sobre la resolución de ecuaciones y el estudio de funciones polinómicas.

Cuestiones

1. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Resuelve las siguientes ecuaciones. Especifica si las soluciones son reales y/o complejas y resuelve si es posible.
   a) $x^2 + 1 = 0$,
   b) $x^2 - 2x + 5 = 0$,
   c) $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0$,
   d) $z^2 + 25 - 2(z - 5i) = 0$,
   e) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$.

2. Factoriza los polinomios de la cuestión anterior.
   Estas dos cuestiones tratan de que los estudiantes comiencen a resolver ecuaciones algebraicas de todo tipo y que analicen sus soluciones.

3. Sabiendo que $x = -1$ es solución de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$, calcula sus otras soluciones. ¿Qué puedes decir de ellas?

4. Sabiendo que una ecuación de tercer grado con coeficientes reales tiene dos raíces reales. ¿Qué se puede decir de la tercera solución?

5. Sabiendo que una ecuación de tercer grado con coeficientes reales tiene dos raíces complejas no reales. ¿Qué se puede decir de la tercera solución?

6. Si z_0 es una solución compleja no real de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, ¿qué se puede decir del resto de raíces?

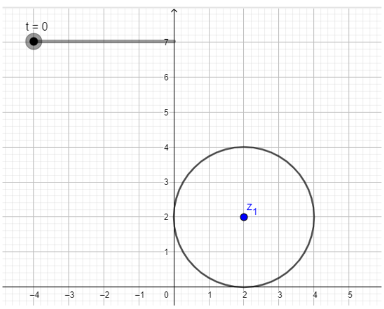
7. Da un polinomio de grado 3 con coeficientes reales tal que $z = -1 - i$ sea cero de dicho polinomio y tenga coeficiente principal 3.

8. Da un polinomio con un cero real y dos complejos que no sean complejos conjugados. ¿Qué ocurre?

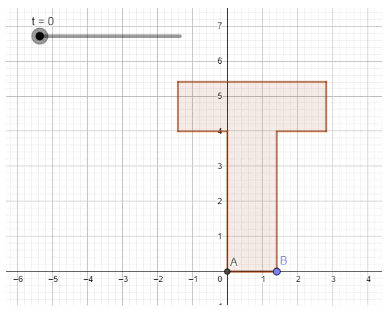
El objetivo fundamental de estas preguntas es que los estudiantes noten que al solucionar ecuaciones polinómicas con coeficientes reales de cualquier grado, las soluciones no reales aparecen por pares, por lo que es posible obtener información de las ecuaciones de tercer grado con coeficientes reales conocida una solución. Además, es posible construir polinomios con coeficientes reales combinando adecuadamente los binomios que los componen.

4.8.4. Movimientos en el plano

Una vez vistas las propiedades de las operaciones con números complejos (traslación, giro y homotecia), veremos una aplicación directa moviendo objetos en el plano.



(a) Pelota y deslizador t.



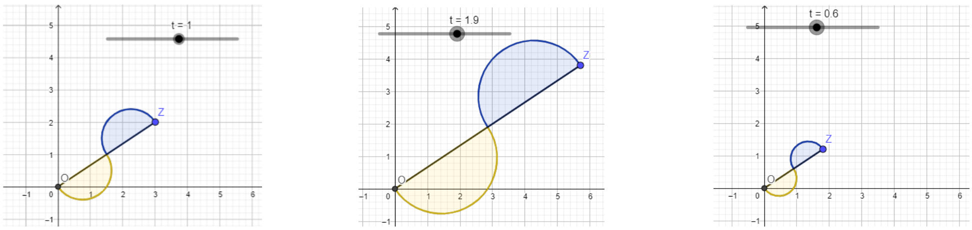
(b) Martillo y deslizador t.

Figura 4.31: Movimientos en el plano con las applets de GeoGebra.

En la primera applet: *Rebote*, se muestra a los estudiantes una circunferencia y se les pide que reconfiguren su centro sumándole $i \cdot t$, siendo t un deslizador definido entre 0 y 1 (ver Figura 4.31a). Con esto, la "pelota" oscila en el rango $[0, i]$.

En la segunda applet: *Martillo*, se muestra la construcción de un martillo que depende de un punto (número complejo) z. Se pide a los estudiantes que reconfiguren z multiplicándolo por i^t, de manera que cuando $t = 0$, $i^t = i^0 = 1$ y cuando $t = 1$, $i^t = i^1 = i$ (ver Figura 4.31b). Así, se consigue una transformación continua (en este caso, un giro) que simula un martillazo.

En la tercera applet: *Homotecia*, se muestra la construcción de una figura geométrica que depende de un punto (número complejo) z. Se pide a los estudiantes que reconfiguren z multiplicándolo por t, parámetro que varía entre 0 y 10. De este modo la figura aumenta o disminuye dependiendo de si $t \in (0,1)$ o si $t > 1$) (Ver Figura 4.32).



(a) Caso $t = 1$. (b) Caso $t > 1$. (c) Caso $t \in (0,1)$.

Figura 4.32: Homotecias dependientes del parámetro t.

De este modo, los estudiantes relacionarán los números complejos con la **dinámica**.

4.8.5. Los conjuntos de Mandelbrot y de Julia

Para cerrar el Libro, introduciremos el concepto de **fractal** mediante dos applets en las que se definirá el conjunto de Mandelbrot como una región en el plano complejo en la que se cumple cierta propiedad.

Vamos a **crear un fractal** utilizando la función $F_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$ (se podrían utilizar otras funciones).
Esta función puede iterarse tantas veces como queramos.

$$
\begin{array}{lr}
F_c^0(z) = z, & \text{Se aplica cero veces.} \\
F_c^1(z) = z^2 + c, & \text{Se aplica una vez.} \\
F_c^2(z) = (z^2 + c)^2 + c, & \text{Se aplica dos veces.} \\
F_c^3(z) = ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c, & \text{Se aplica tres veces.} \\
\dots & \dots \\
F_c^n(z). & \text{Se aplica } n \text{ veces.}
\end{array}
$$

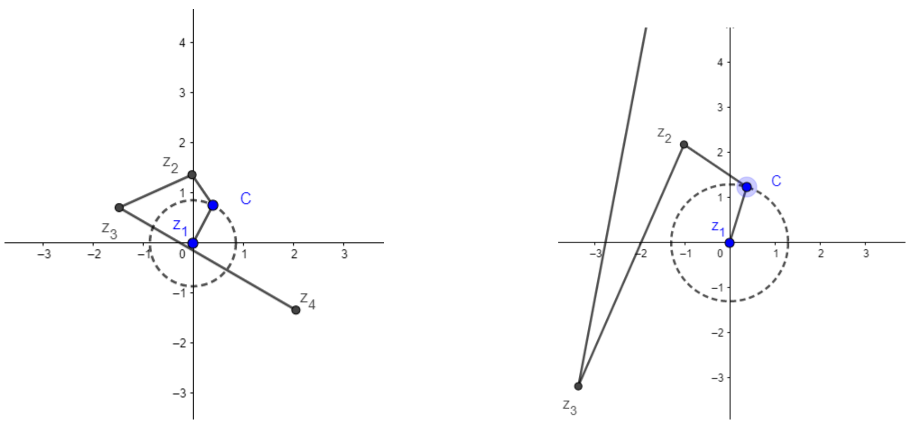
Orbitamos el cero

Veamos qué ocurre con $F_c^n(z)$ cuando $z = 0 + 0i$ y en sus proximidades.

Elegimos $z = 0 + 0i$, c un número complejo libre en el plano de Argand. Definimos los primeros términos de la sucesión $\{F_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ y conectamos mediante la herramienta Segmento los complejos z_1, z_2, z_3, z_4.

Estos primeros términos no son la sucesión entera, pero nos permitirán intuir el comportamiento de la misma orbitando el cero.

Manipulando c y orbitando alrededor de $z = 0 + 0i$ observamos qué ocurre con la sucesión. ¿Cuándo está acotada?



(a) Órbita acotada. (b) Órbita no acotada.

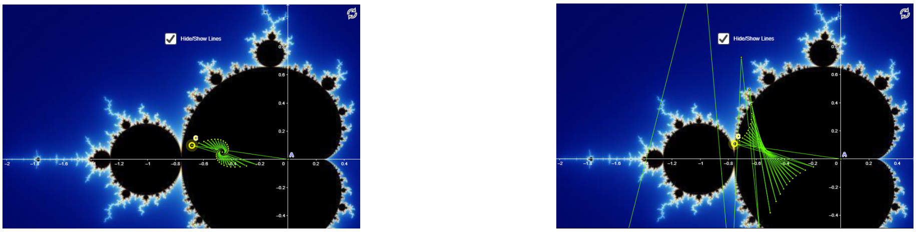
Figura 4.33: Orbitando el origen con los primeros términos de una sucesión.

Es sencillo notar que cuando $|c| \geq 1$, la sucesión $F_c^n(0)$ se dispara, tal y como se ve en la Figura 4.33b. Si investigásemos rigurosamente dónde se encuentra la frontera a partir de la cual la órbita se dispara, encontraríamos el **Conjunto de Mandelbrot**.

De este modo, se define el conjunto de Mandelbrot como

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \{F_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotada}\},$$

que coincide con la región del plano complejo de la Figura 4.34, en la que podemos apreciar la órbita completa.



(a) La órbita está acotada si c está dentro del conjunto de Mandelbrot.

(b) La órbita se dispara si c está fuera del conjunto de Mandelbrot .

Figura 4.34: Comportamiento de la órbita $\{F_c^n(0)\}_{n=0}^{\infty}$.

Conjuntos de Julia

Por cada $c \in M$ podemos definir un conjunto J_c, también fractal. Estos conjuntos se llamarán **conjuntos de Julia**.

$$J_c = \{z \in \mathbb{C} \mid \{F_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

Las propiedades de cada J_c dependen de la órbita del conjunto de Mandelbrot.

Por ejemplo, para calcular el conjunto de Julia de parámetro $c = 0 + 0i$, tenemos que ver para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ está acotada la sucesión $F_{0+0i}^n(z) = z^{2n}$.

$$J_{0+0i} = \{z \in \mathbb{C} \mid \{F_{0+0i}^n(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotada}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \{z^{2n}\}_{n=0}^{\infty} \text{ está acotada}\}.$$

En este caso, J_{0+0i} es la circunferencia compleja de radio 1.

Para visualizar otros conjuntos de Julia, podemos utilizar la última applet del Libro de GeoGebra.

Una propiedad interesante que se puede observar es que el conjunto de Julia es **conexo** (de una pieza, no separado en varias partes) cuando c pertenece al conjunto de Mandelbrot.

5

Plan de Seguimiento y Evaluación

5.1. Temporalización

Como adelantamos en la Capítulo 2, daremos una propuesta de temporalización. Dado que nos interesa que los estudiantes aprendan el tema de manera guiada, no nos interesa que las cuestiones queden pendientes, sino que las resuelvan en la clase con la ayuda del docente. Por esto, en los temas en que las cuestiones puedan abarcar un tiempo extenso, se proponen dos horas; mientras que en el resto se propone solo una.

En cada apartado se describe el contenido teórico, la motivación histórica cuando proceda y el contenido a trabajar con GeoGebra. También se establece una hora final de reflexión sobre lo aprendido y recapitulación de los contenidos de manera que los estudiantes noten la importancia del tema y se vean capaces de seguir utilizando los números complejos.

Horas (20)	Contenidos
1	**Teoría**: Introducción. El problema de las raíces de radicando negativo. Cuádricas de discriminante negativo. Uso de ecuaciones para “detectar” nuevos tipos de números. **Motivación histórica**: La cúbica de Del Ferro. Tartaglia y Cardano.
2	**Teoría**: Introducción de los números complejos como ampliación de los puntos en el plano cartesiano. Forma binómica, conjugado y módulo. Planteamiento de incógnitas sobre los números complejos: ¿Se podrán operar?¿Se podrán ordenar?¿Conmutarán? **GeoGebra**: ¿Quiénes son los números complejos? Navegando por sitios conocidos. El espejo en el eje OX. Salvando las Distancias.
2	**Teoría**: Planteamiento del desafío: ¿Cuándo dos números complejos son iguales? Comparación con la igualdad de números racionales. Resolución del ejercicio de la Sección 4.5. Suma de números complejos con GeoGebra y resolución las cuestiones de la Subsección 4.5.1. **GeoGebra**: Jugamos con los números complejos. Suma de números complejos.

1	**Teoría**: Opuesto de un número complejo. El opuesto de un complejo como extensión del opuesto de un real. Resta y resolución de las cuestiones de la Subsección 4.5.1 relativas a la resta. **GeoGebra**: Jugamos con los números complejos. Resta de números complejos.
2	**Teoría**: Producto de un número real por la unidad imaginaria. Producto de números complejos con GeoGebra y resolución de las cuestiones de la Subsección 4.5.2. **GeoGebra**: Jugamos con los números complejos. Multiplicamos números complejos
2	**Teoría**: Cociente e inverso. Resolución de las cuestiones de la Subsección 4.5.3. **GeoGebra**: Jugamos con números complejos. Dividimos números complejos.
2	**Teoría**: Forma polar. Módulo y argumento. La función arcotangente. Operaciones y resolución de las cuestiones de la Subsección 4.6.1. **GeoGebra**: La forma polar. Despejar la tangente. Una forma más sencilla de operar.
2	**Teoría**: Forma trigonométrica y Fórmula de Moivre. Operaciones, potencias y resolución de las cuestiones de la Subsección 4.6.3. **GeoGebra**: Representaciones. La forma trigonométrica.
2	**Teoría**: Radicación de números complejos. Operaciones y resolución de las cuestiones de la Subsección 4.6.3. **GeoGebra**: Manejo del mecanismo de David Andino para visualizar las raíces de un número complejo. Radicación de números complejos.
1	**Teoría**: **GeoGebra**: Aplicaciones: Raíces cúbicas conjugadas. El Problema de Cardano. Movimientos en el plano. **Motivación histórica**: Tartaglia y Cardano.
1	**Teoría**: **GeoGebra**: Aplicaciones: Siempre existe solucioón. Los conjutnos de Mandelbrot y Julia. **Motivación histórica**: La formalización: Gauss y Cauchy 3.4.
1	**Examen**
1	**Conclusiones**: Kahoot! Atender a los posibles fallos que hayan cometido los estudiantes. Mapa conceptual. Recapitulación de los resultados conocidos, balance de lo aprendido y comparación con los conocimientos previos.

5.2. Propuesta de Evaluación

Como Propuesta de Evaluación planteamos que los estudiantes entreguen las cuestiones respondidas en las **applets de GeoGebra**. Esto tendrá un peso en la nota final calculada a partir de la Rúbrica de Evaluación incluida en el Anexo I. Recomendamos que el trabajo en GeoGebra tenga un valor del 40 % de la calificación final.

En la penúltima sesión, planteamos un **examen tradicional teórico** (adjuntamos una propuesta de examen en el Anexo II) que supondrá otro 40 % de la nota final. De este modo, con el correcto desarrollo teórico-práctico de la propuesta por parte de los estudiantes, podrían alcanzar la calificación 8 (Notable).

En la última sesión, planteamos la realización de un **Kahoot!** para comprobar que los estudiantes han comprendido los aspectos más generales sobre Números Complejos. Sugerimos que esto cuente un 10 % de la nota final. Aportamos una propuesta de Kahoot en el siguiente enlace: `https://create.kahoot.it/share/numeros-complejos/1f8702f7-c4c0-45ea-a9dc-6de29c672439`

También en la última sesión, se propone realizar el mapa conceptual *in situ*, que refleje **la idea general** que tiene cada estudiante del tema y que tendrá un valor del 10 % de la calificación final. Aportamos una propuesta de mapa conceptual en el siguiente enlace: `https://cmapscloud.ihmc.us:443/rid=1W1JMPTXC-D2YGMG-380J51`.

Es importante que dicho examen sea corregido en un máximo de dos días para poder llevar a cabo la última sesión.

Proponemos, por tanto, la siguiente fórmula para calcular la calificación.

$$\text{Calificación} = \text{GG} \cdot 0.4 + \text{EX} \cdot 0.4 + \text{KH} \cdot 0.1 + \text{MC} \cdot 0.1,$$

donde

- GG = Nota de GeoGebra
- EX = Nota del Examen
- KH = Nota del Kahoot!
- MC = Nota del Mapa Conceptual

Acaba nuestra propuesta con un pequeño balance de lo aprendido en las 20 sesiones de Secuencia, conceptos antes desonocidos y ahora conocidos, perspectivas futuras sobre este contenido, curiosidades, etc.

A aquellos alumnos que obtengan una calificación menor que 5 se les dará la oportunidad de aprobar mediante las medidas de Atención a la Diversidad.

5.3. Atención a la Diversidad

En relación a las medidas de Atención a la Diversidad, consideramos que es necesario atender tanto a los estudiantes que muestren especiales dificultades para entender los conceptos, como a aquellos que manifiesten mayor capacidad, así como curiosidad por aprender más.

Para el alumnado con dificultad que suspenda, proponemos la realización de una sesión más en la que se atienda a las dificultades específicas, se refuercen los conceptos fundamentales mediante la visualización geométrica y se proponga otro examen de dificultad similar que permita alcanzar calificación de Aprobado.

Para los estudiantes que manifiesten mayor capacidad y curiosidad planteamos un posible trabajo sobre fractales en el que, por grupos o individualmente, los alumnos tuvieran que elaborar una breve memoria en la que se explicaran las ideas más básicas sobre Geometría Fractal y su relación con los números complejos. Para ello contarían con la guía del docente y con Bibliografía que este pueda recomendarles.

Se propone la visualización de los siguientes tres vídeos, ordenados de menor a mayor dificultad, como iniciación.

1. https://www.youtube.com/watch?v=q2iCNjYpo_Y
2. https://www.youtube.com/watch?v=Wea_1L-C9Xo
3. https://www.youtube.com/watch?v=yzSSBlKERNI

Los estudiantes tendrían que pasar por los aspectos más importantes de los fractales.

1. Perímetros y áreas.
2. Características. Autosimilaridad.
3. Construcción de ejemplos.
4. Fractales en el arte y la naturaleza.

El resto de conceptos quedan bajo el criterio de los alumnos participantes.

El trabajo debe exponerse en una presentación en la que los participantes deberán defender su trabajo mostrando los aspectos más relevantes. Con esto se trabajan las competencias en Comunicación Lingüística, Competencia Digital, Aprender a Aprender y, en caso de que se trabaje en grupo, Competencias Sociales y Cívicas y Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor.

6

Discusión y Conclusiones

Comenzaremos por comentar algunas conclusiones extraídas de las encuestas que enviamos al Alumnado de primer curso de Física y de Matemáticas y al grupo de control de Profesores de Secundaria.

Las preguntas iniciales que planteamos para la encuesta no tenían la visión del profesorado de Secundaria que suele ser el encargado de presentar y desarrollar el tema de Números Complejos por primera vez a los estudiantes. Las aportaciones del Profesorado nos permitieron perfilar preguntas que resultaban ambiguas en un primer momento, concretar cuestiones demasiado amplias, especificar detalles que en un primer momento pasamos por alto, etc.

Los estudiantes que contestaron nos permitieron extraer algunas conclusiones. A pesar de ser estudiantes con una nota muy alta en la asignatura de Fundamentos Matemáticos, presentaban errores conceptuales comunes en Números Complejos y **pocas veces se apoyaban en representaciones visuales** cuando no se les exigía explícitamente.

También hemos observado que eran **hábiles en cuestiones operacionales** que tenían más que ver con el modo de pensamiento AA de Sierpinska que con el AE. Cuando preguntábamos cuestiones en el que se hacía necesario el modo de pensamiento AE, ciertos estudiantes contestaron que no entendían la pregunta o forzaban conceptos ya conocidos para contestar algo.

El tema de Números Complejos se presta para explorar este modo de pensamiento con cuestiones que el alumnado se pueda plantear al finalizar el tema.

- ¿Hay algún conjunto numérico más grande que $\mathbb{C}$?
- ¿Es el producto siempre conmutativo?
- ¿Se pueden ordenar los números complejos?

- ¿Existen funciones de variable compleja?

Planteando estas preguntas se podría tratar de ampliar las perspectivas futuras a los estudiantes, que están acostumbrados a mecanizar problemas y ejercicios para ejecutarlos en el examen y rara vez reflexionan sobre conceptos que ya tienen asimilados.

En ciertas preguntas de la encuesta relacionadas con conceptos algo elevados como orden o conmutatividad, muchos estudiantes contestaban incongruencias o directamente decían no entender la pregunta. Este hecho nos hace pensar que las cuestiones relativas al modo de pensamiento AE no se trabajan prácticamente nada.

Los estudiantes asumen, en conjuntos numéricos que desconocen, las propiedades de conjuntos que ya conocen.

Un razonamiento ilustrativo sería el siguiente:

Los naturales conmutan. $\Rightarrow$ Los enteros conmutan. $\Rightarrow$ Los racionales conmutan. $\Rightarrow$ Los reales conmutan. $\Rightarrow$ Los complejos conmutan.

Aunque esta tendencia sea algo natural, consideramos que es deber del docente **advertir a los alumnos** de que este razonamiento no es correcto. Sin embargo, sí que puede utilizarse para fomentar la intuición de los estudiantes. La secuencia ideal sería preguntar a los estudiantes si creen que los números complejos conmutarán o no, de esta manera queda claro que no lo asumimos desde el principio, sino que llegamos a ello.

La Historia, bien utilizada, puede favorecer el aprendizaje por parte de los estudiantes. Sin embargo, no es conveniente desarrollar lo cronológico en forma de contenido tradicional de manera que los estudiantes lo perciban como temario tradicional. La Historia debe ser un **elemento dinamizador**, que permita al alumnado encontrar una vía cercana con la que aproximarse al conocimiento. Es conveniente seleccionar aspectos que puedan llamar la atención de los estudiantes. Por ejemplo, situaciones con las que puedan empatizar y descubrir que los matemáticos célebres se veían envueltos en contextos rutinarios o incluso conflictivos.

La Geometría Dinámica es también un elemento dinamizador del aprendizaje. Muchos de los conceptos explicados en matemáticas suelen tener una traducción geométrica que enlaza rápidamente con la intuición de los estudiantes. El movimiento y las transformaciones dinámicas que ofrecen los softwares como GeoGebra aportan una gran conexión entre lo intuitivo y lo simbólico. Además, la posibilidad de manipular los elementos matemáticos y encontrar mecanismos atractivos para los estudiantes favorece la atención y curiosidad del alumnado.

En lo referente a la didáctica de los números complejos, consideramos que es fundamental que el docente trate de eliminar, desde el inicio, los posibles prejuicios que puedan suscitar los adjetivos *imaginario* o *complejo.* Para ello, creemos que es importante plantear siempre los números complejo como una **reformulación** de los puntos en plano cartesiano. De este modo, los estudiantes tienen siempre un recurso al que acudir cuando se sientan perdidos. Además, conviene comparar el adjetivo *imaginario* con *irracional* para hacer hincapié en que, el hecho de que se llamen de una determinada manera, **no implica que que su nombre determine su naturaleza**.

Respecto a la situación de los números complejos en el temario de Bachillerato, creemos conveniente impartirlos tras haber dado los contenidos de Álgebra y de Geometría. De este modo los estudiantes poseerán las herramientas necesarias para abordar los números complejos y solamente será necesario saber cómo conjugar dichas ramas correctamente.

Presentamos además una propuesta de mejora para los Estándares de Aprendizaje Evaluables:

- 41. Reconoce los distintos tipos de números (reales y complejos). Comprende la necesidad de utilizar dos números reales para determinar un número complejo y lo reconoce como verdadero número, valorando su desarrollo epistemológico.

- 47. Valora los números complejos como ampliación de los números reales y como reformulación de los puntos en el plano cartesiano. Los utiliza para obtener soluciones de ecuaciones de segundo grado. Extrae información de ceros de polinomios de tercer grado a partir de otros ceros.

- 48. Opera con números complejos, los representa gráficamente. Conoce la equivalencia entre las distintas formas de un número complejo. Conoce la fórmula de De Moivre, sus implicaciones geométricas y la utiliza para calcular potencias y raíces.

Además, proponemos un estándar nuevo:

Conoce algunas aplicaciones de los números complejos en el mundo real y en la propia matemática.

Para finalizar, hemos comprobado que desarrollar adecuadamente contenidos en Matemáticas (y, probablemente, en cualquier área) requiere un trabajo exhaustivo para poder enfocarlos desde distintas perspectivas. Seguramente, con los currículos actuales, sea **muy complicado** dar todos los contenidos de una materia al nivel de detalle que seguimos en esta propuesta. Por esto, creemos que sería conveniente **repensar** la manera en que las leyes enfocan la enseñanza, aliviando los currículos de la elevada carga que tienen hoy en día y **primando lo conceptual** frente a lo procedimental (que sin duda, también es importante), sin perjuicio de las medidas de Atención a la Diversidad que puedan adoptarse para salvar desigualdades.

7

Anexo I: Rúbrica de Evaluación

Contenido	Deficiente	Insuficiente	Bien	Excelente
Operaciones	No realiza correctamente los ejercicios y no extrae ninguna idea general.	Realiza correctamente algunos ejercicios pero no extrae ninguna idea general.	Realiza correctamente la mayoría de los ejercicios y extrae alguna idea general.	Realiza correctamente todos los ejercicios y extrae varias ideas generales.
Forma polar	No calcula bien ni el módulo ni el argumento de un número complejo.	Calcula bien el módulo pero no comprende el argumento.	Calcula correctamente módulo y argumentos en el primer y el cuarto cuadrante.	Calcula correctamente módulo y argumentos en cualquier cuadrante.
Forma trigonométrica	No comprende ningún aspecto de la forma trigonométrica.	Escribe el número pero no opera correctamente	Escribe el número y opera correctamente.	Escribe el número, opera correctamente y comprende la igualdad.
Fórmula de De Moivre	No comprende ningún aspecto de la fórmula de De Moivre.	Aplica mal la fórmula de De Moivre	Aplica correctamente la fórmula de De Moivre para calcular potencias o raíces complejas.	Aplica correctamente la fórmula de De Moivre para operar y demostrar otras fórmulas.
El Problema de Cardano	No comprende ni resuelve el Problema de Cardano.	Plantea el Problema de Cardano pero no resuleve correctamente.	Plantea y resuelve correctamente el Problema de Cardano pero no interpreta el resultado correctamente.	Plantea, resuleve e interpreta correctamente el Problema de Cardano.
Teorema Fundamental del Álgebra	No resuelve correctamente las ecuaciones y no entiende las relaciones entre los ceros de una ecuación.	Resuelve ecuaciones sin comprender las relaciones entre los ceros.	Resuelve las ecuaciones y comprende alguna relación entre los ceros de una ecuación.	Resuelve correctamente las ecuaciones y comprende todas las relaciones entre los ceros de una ecuación.

Matemáticas I
Números Complejos

Nombre: ____________________

Curso: ____________________

Fecha:
Tiempo: 1 hora

Expón tus afirmaciones razonadamente, de manera ordenada, clara y presentable.

1. (1 punto) Determina x para que la siguiente igualdad de números complejos

$$x + 2xi = x + (-1 - x^2)i$$

se verifique.

Observación: La incógnita x es un número real.

2. (1 punto) ¿Qué figura determinan los números complejos de módulo 5?

3. (1 punto) Sean los números complejos $z = 1 - i$ y $w = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$. Calcula y expresa en forma binómica

   1. Su suma.
   2. Sus conjugados.
   3. El conjugado de su suma.
   4. La suma de sus conjugados.

   ¿Qué ocurre?

4. (1 punto) Elige un número complejo distinto de cero y dibújalo en el plano de Argand.

   1. Multiplícalo por i y dibuja el resultado. ¿Qué ha ocurrido?
   2. Repite el proceso hasta que obtengas el número complejo de partida. ¿Qué ocurre?

5. (1 punto) Halla la forma binómica de $\dfrac{1}{1+\pi i}$.

6. (1 punto) Sean los números complejos $z = -\sqrt{3} + i$ y $w = -2 - 2i$.
   Calcula $\dfrac{z^6}{w^4}$ y expresa el resultado en forma binómica.

7. (2 puntos) Utiliza la Fórmula de De Moivre para

   1. calcular la décima potencia de $1 + 3i$ en forma binómica.
   2. calcular las raíces quintas de $1 + 3i$.

8. (2 puntos) Sabiendo que toda ecuación polinómica de grado n tiene n soluciones complejas.

   1. Comprueba que $x = 2i$ es solución de la ecuación $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$. ¿Son reales sus otras raíces? Justifica tu respuesta.
   2. Da un polinomio de tercer grado con coeficientes reales tal que $x = \sqrt{2} - i$ sea solución y tenga coeficiente principal 7.

Bibliografía

[1] https://www.ugr.es/~eaznar/moivre.htm

[2] Bagni, G. (2001) La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Relime Vol. 4, Núm,1, marzo, pp 45-61.*

[3] Barbin, E. (2000). The historical dimension: from teacher to learner. *History in mathematics education: the ICMI study, 66-70.*

[4] Canal-Martínez, I. (2012). La enseñanza de los números complejos en el Bachillerato. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Cantabria.

[5] Cipriano, A. Zaragoza, S. (2013). El análisis complejo y su historia. *Liber Factory, 2).*

[6] De Guzmán, M. (2007). *Y la matemática. Revista Iberoamericana de Educación, 43, 19-58.*

[7] Feldmann, R. (1961). The Cardano-Tartaglia dispute. *The Mathematics Teacher, 54(3), 160-163. Retrieved April 5, 2020, from www.jstor.org/stable/27956338.*

[8] Chavez, E. G. (2014). Teaching complex numbers in high school. LSU Master's Theses. Lousiana State University.

[9] Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor?. *Revista Virtual Educyt, 2, 1-13.*

[10] Hui, T., Lam, T. T. (2013). On the Teaching of the Representation of Complex Numbers in the Argand Diagram. *National Institute of Education.*

[11] Manrique, C. R. C., Puente, R. M. T. (1999). El constructivismo y sus implicancias en educación. *Educación, 8(16), 217-244.*

[12] Martínez, M., Chavarría, J. (2012). Usos de la historia en la enseñanza de la matemática. *Ponencia presentada en el VIII festival internacional de matemática, 7-9.*

[13] Maumary, C. Maumary, M. (2015), Las tribulaciones que generan los números complejos en nuestros alumnos y en nosotros, los docentes, *Actas IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación.* Universidad Nacional de La Plata. http://jornadasceyn.fahce.unlp.edu.ar/convocatoria.

[14] Mendoza, F. R. (2001). Una Introducción a los Números Complejos. Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela

[15] Merino, O. (2006). A short history of complex numbers. University of Rhode Island.

[16] Nordlander, M. C., Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. *International journal of mathematical education in science and technology, 43(5), 627-641.*

[17] Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. PNA, 2(1), 3-15.

[18] Parraguez, M. La teoría modos de pensamiento de Sierpinska. Nuevos enfoques y tendencias. ACTA DE RESÚMENES, 90.

[19] Randolph, V., Parraguez, M. (2015). Comprensión de los números complejos desde los modos de pensamiento. *En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 401-409).* México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

[20] Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. *In On the teaching of linear algebra (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.*

[21] Sierpinska, A., Nnadozie, A., Oktaç, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. *Retrieved May, Vol. 2, 2011.*

[22] Soon, T., Tin, T. (2013) On the teaching of the representation of complex numbers in the Argand diagram, Learning Science and Mathematics. *Issue 8, 75-86.*

[23] Stern, C. (1949). The Natural Way to Numbers. *The Journal of Education, 132(9), 248-250.* Retrieved April 5, 2020, from www.jstor.org/stable/42767656.

[24] Torcuato, J. C. (2015). Secuencia didáctica con apoyo tecnológico para introducir el uso de los números complejos, a través de un problema de población animal. Tesis de Maestría. México: Cinvestav-IPN, Depto. de Matemática Educativa.

[25] Trigo, L. M. S., Machín, M. C. (2006). Sobre el desarrollo del sentido geométrico y el uso del software dinámico. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, (42), 20-33.*

[26] Urbaneja, P. M. G.(2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45, 17-28.*