



**Universidad
de La Laguna**

**Nuevos métodos analíticos de la estructura del
universo a gran escala: aplicaciones de la
aproximación de Zeldovich completa**

MÁSTER UNIVERSITARIO EN ASTROFÍSICA
FACULTAD DE FÍSICA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
Carles Sanchis Caroz

Supervisado por
Dr. Juan Betancort Rijo

Septiembre de 2020

Abstract

The structure formation in the universe is a subject of a great interest since last century and it is directly linked to the evolution of the universe. During this time different models have been proposed and nowadays the paradigm is that quantum density fluctuations grew since the inflationary epoch until they become non-linear and are virialized. These initial fluctuations are described by the Harrison Zeldovich power spectra which is modified by some physical effects until the separation between radiation and matter at the moment of recombination ($z = 1100$). From that moment on only gravity affects these fluctuations increasing their amplitude but not modifying the shape of power spectra. The radiation escaping at recombination which is observed now reflects the fluctuations at that moment and it allows us to determine that the cold dark matter (CDM) is necessary to explain the acceleration of the growth of the barionic fluctuations. The consideration of the CDM, that produces the bottom-up formation of the structures, and the accelerated expansion of the universe leads to the Λ CDM model.

The growth of the density fluctuations is given by the linear theory in the newtonian approximation, but in the non-linear regime there is no analytical treatment and we need the N-body simulations that are the most accurate method but tedious. In 1970, knowing the necessity of a faster method, Zeldovich presented an approximation (ZA) based on the linear regime and postulated its validity in the non-linear regime assuming a certain error but generally explaining the structure formation. This approximation expresses the proper coordinates in terms of the initial coordinates (Lagrangian) with a perturbation in the peculiar velocity field, which implies a linear displacement field, that leads to the density fluctuations. Then, considering the conservation of mass, these fluctuations in the proper system can be expressed in function of the proper values (λ_i) of the local strain tensor given by the linear theory in terms of the initial coordinates. After this approximation, some others came out as the ones based on the Lagrangian perturbation theory (LPT). These approximations are generally non-local, which means that the strain tensor is not a unique function of the proper values, making them more complex but more accurate. But local approximations as the MZA (Reisenegger & Miralda-Escudé, 1995), the LTA (Hui & Bertschinger, 1996) or the DTA (Audit & Alimi, 1996) were presented as well as the complete Zeldovich approximation (CZA) (Betancort-Rijo & López-Corredoira, 2000) that only depend on the linear proper values like the ZA but they are substantially more accurate. The difference between the latter and the rest is that the CZA has an explicit expression on the proper values while in the others the solution of differential equations is needed. The ZA is exact to first order while the CZA is exact to second order. The linear density field given by ZA is equal to minus the divergence of the linear displacement field and equal to the addition of the λ_i . In the same way, the divergence of the displacement field of the CZA can be expressed as minus the addition of the $r_i\lambda_i$ product, giving the real displacement, where the function r_i is the fact that distinguishes both approximations. Therefore, the aim of this work is to determine the general algorithm of the CZA and obtain the density field and its displacement field that gives the final positions, i.e. eulerian coordinates.

To do that, a program in Fortran 90 has been developed to generate a realization of the gaussian random field in a cubic volume with size L as an example of the input parameters. First of all, we generate the gaussian random field in the present day, using the power spectra of the cold dark matter obtained from the observations, as well as the linear displacement field and the linear strain tensor. We express these quantities as Fourier series and compute them with a certain number of modes as another input parameter. Due to the fact that the linear strain tensor is a symmetric matrix with real coefficients, it can be diagonalized and then we obtain its proper values λ_i that are the key values in what the approximation is based. A few checks are made to ensure that the gaussian random field, the linear displacement field and the linear strain tensor are well generated. Some of these checks are: the recovery of the amplitude of the density fluctuations in the Fourier space with which we have already generated the gaussian field in the real space, that the addition of the three λ_i of every point is equal to the linear density field and that its shape is a gaussian, that the λ_i fulfill the Doroshkevich distribution and that the calculation of the strain tensor by finite differences agrees with the analytic expression.

We consider the shell crossing effect, which consists in the overtaking of one shell of matter over another one, that implies the equilibrium between the inner and outer fluxes of matter when an object is collapsing. The result is constant density in the physical space, that implies the increase of density fluctuations with time due to the background density decays because of the expansion of the universe. This treatment restricts the value of the $r_i\lambda_i$ in every point making the CZA expression valid everywhere. Before we treat this effect, we have to determine the function r_i to be valid for any value of the λ_i . For positive values of λ_i the expression used in Betancort-Rijo & López-Corredoira (2000) works perfectly but has problems for negative values. We find for points with three negative λ_i a modification of this expression and for points with at least one negative λ_i we use an approximation that works indetically for small absolute values and it is better for big absolute values. The program works for any value of the input parameters Ω_{m0} , Ω_{r0} and $\Omega_{\Lambda0}$. With the correct values of $r_i\lambda_i$ we obtain the density field in the proper coordinates with the expression of CZA and also the real displacement field that gives the final positions of the particles. For the calculation of the latter in a specific point, we have solved a differential equation that implies an integral that we calculate as the addition of the contribution of every point of the mesh. In the same way, the linear displacement field have been obtained. To test the accuracy of these calculations, the root of the mean squared fractional error (RMSE) between the linear displacement field obtained analytically and the one mentioned now is computed. The more RMSE approaches to zero the more accurate is the calculation because they should always be equal. We have obtained it at three different σ (1.88, 0.46 and 2.49), and the result is less than 0.1 (10 % of error) that corresponds to the numerical error. The root of the mean squared value of the modulus of the difference between the displacement field provided by the CZA and the one provided by the ZA (or the linear theory) divided by the root of the mean squared value of the linear displacement field is computed for these three cases and differs in 0.5 (50 %) for $\sigma = 1,88$, 0.1 (10 %) for $\sigma = 0,46$ and 0.6 (60 %) for $\sigma = 2,49$. The non-linearities are the responsible for this divergence with time between the real and the linear displacement fields.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 7 |
| 1.1. Motivación y objetivos | 7 |
| 1.2. Marco teórico | 8 |
| 1.2.1. Modelo cosmológico | 8 |
| 1.2.2. Condiciones iniciales | 8 |
| 1.2.3. Dinámica de partículas en el sistema en expansión | 9 |
| 1.2.4. Mecánica de fluidos en el sistema en expansión | 10 |
| 1.2.5. Aproximación de Zeldovich (ZA) | 12 |
| 1.2.6. Aproximación de Zeldovich completa (CZA) | 14 |
| 2. Metodología | 16 |
| 2.1. Realización de un campo gaussiano | 16 |
| 2.2. Vector desplazamiento lineal y tensor de deformación | 19 |
| 2.3. Cruce de capas | 20 |
| 2.4. Campo de desplazamiento según la CZA | 23 |
| 3. Resultados y discusión | 25 |
| 3.1. Comprobaciones del campo gaussiano | 25 |
| 3.2. Ajuste de la CZA | 29 |
| 3.3. Cruce de capas: dependencia en el modelo cosmológico | 32 |
| 3.4. Campos de densidad y de desplazamiento según la CZA | 34 |
| 3.5. Algoritmo de resolución de la CZA | 36 |
| 4. Conclusiones del trabajo y sus posibles aplicaciones | 38 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y objetivos

La formación de estructuras ha sido un tema abierto en astrofísica durante el pasado siglo con diferentes propuestas de modelos con tal de explicar el origen de las estructuras que vemos hoy en día. Actualmente, el modelo paradigmático es el de Λ CDM que implica la formación de estructuras más grandes a partir de las más pequeñas, en inglés '*bottom-up*', considerando la expansión acelerada del universo debido a la todavía desconocida energía oscura. Partiendo de que las simulaciones de N-cuerpos son las más precisas en cuanto a resultados, se usan aproximaciones menos costosas computacionalmente para obtener las estructuras mencionadas, que se comparan con dichas simulaciones con tal de determinar como de buenas son. Una aproximación que ha sido muy usada por ser pionera en la explicación de la formación de estructuras es la de Zeldovich (1970), la cual es exacta a primer orden y expresa la fluctuación en la densidad como función única de los valores propios del tensor de deformación local dado por la teoría lineal. A estas aproximaciones que dependen solamente de estas cantidades se les llama locales. Por otra parte, tenemos las perturbaciones lagrangianas a distinto orden donde el tensor de deformación es exacto pero no depende únicamente de los valores propios, habiendo mejoras de éstas combinándolas con el efecto de cruce de capas a pequeñas escalas (ALPT) (Kitaura & Heß, 2013). Por lo tanto, es de interés encontrar aproximaciones locales más precisas que la ZA como, por ejemplo, la MZA (Reisenegger & Miralda-Escudé, 1995), la LTA (Hui & Bertschinger, 1996) o la DTA (Audit & Alimi, 1996), así como la aproximación en la que se centra este trabajo, la aproximación de Zeldovich completa (CZA) (Betancort-Rijo & López-Corredoira, 2000). Estas aproximaciones locales presentan una expresión para las fluctuaciones en la densidad explícita

en los valores propios del tensor de deformación local, pero la CZA tiene la ventaja de que para encontrar estos últimos no es necesaria la resolución de ecuaciones diferenciales (Makler et al., 2001). El objetivo del trabajo es determinar el algoritmo general de la CZA para obtener el campo de fluctuaciones de la densidad en coordenadas eulerianas (i.e. el campo observable).

1.2. Marco teórico

1.2.1. Modelo cosmológico

Hoy en día, en la estructura a gran escala, el universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) es el modelo cosmológico paradigmático. Éste consta de la métrica de Robertson-Walker (RW) que describe un universo en expansión (o contracción) y que se basa en el principio cosmológico que, fundamentándose en observaciones, postula que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo. Esta expansión (o contracción) se expresa mediante el factor de escala $a(t)$ que depende únicamente del tiempo debido, precisamente, al principio cosmológico. Su relación con el corrimiento al rojo z (más conocido como *redshift* en inglés) debido a la expansión viene dada por la expresión

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{1}{1 + z(t)}, \quad (1.1)$$

donde $a(t_0)$ es el factor de escala en el instante actual t_0 y por comodidad lo expresaremos como $a_0 = 1$. A partir de la métrica de RW y las ecuaciones de la relatividad general de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann. Con lo cual, la cosmología métrica de FRW está basada en el principio cosmológico y cumple la física de Einstein pero presenta fluctuaciones en la densidad. Para explicar la evolución del espectro de potencias de estas fluctuaciones observadas es necesaria la materia oscura, ya que si el universo estuviera compuesto únicamente por materia bariónica sería distinta.

1.2.2. Condiciones iniciales

El fondo cósmico de microondas (CMB de las siglas en inglés), que corresponde a la radiación que se escapa cuando se produce el desacoplamiento radiación-materia ($z \sim 1100$), muestra las perturbaciones de densidad primordiales de origen cuántico que alcanzan escalas cósmicas debido a la inflación. Estas condiciones iniciales no deben describir ningún campo de fluctuaciones en

concreto y, por lo tanto, son estadísticas. Es decir, no están bien definidas (no son únicas) sino que tenemos un colectivo gaussiano de condiciones iniciales. El universo observado procede de una realización concreta de este colectivo gaussiano, que corresponde a coger un elemento del colectivo al azar. Con lo cual las condiciones iniciales son un campo gaussiano aleatorio en tres dimensiones caracterizadas por el espectro de potencias de Harrison-Zeldovich

$$P(k) \propto k. \quad (1.2)$$

Estas condiciones iniciales se ven alteradas por procesos físicos como el amortiguamiento de Silk y el efecto Mészáros (o de expansión estancada), que modifican la forma del espectro de potencias, además de la gravedad, que no lo hace. Es a partir del desacoplamiento radiación-materia que los procesos físicos terminan y únicamente actúa la gravedad que sólo produce el aumento de la amplitud del espectro, es decir aumenta las fluctuaciones de densidad con el tiempo. Entonces, es a partir de este momento ($z \sim 1100$) que podemos usar la teoría lineal hasta que las fluctuaciones han crecido tanto que se producen las no linealidades. Estas fluctuaciones en la densidad δ en un instante de tiempo t se expresan en función de la densidad media del universo $\rho_b(t)$, que va disminuyendo debido a la expansión, de la siguiente forma:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \rho_b(t)}{\rho_b(t)}, \quad (1.3)$$

donde \vec{x} son las coordenadas comóviles, es decir las que siguen la expansión del universo, aunque esta expresión también es válida para las coordenadas propias \vec{r} .

1.2.3. Dinámica de partículas en el sistema en expansión

Es conveniente describir la distribución de materia y el movimiento en el sistema de referencia en expansión (Peebles, 1980), donde la distancia propia viene dada por

$$\vec{r} = a(t) \vec{x} \quad (1.4)$$

y la velocidad propia de una partícula con respecto al origen por

$$\vec{u} = \dot{a} \vec{x} + a \dot{\vec{x}} = \vec{v}_H + \vec{v}, \quad (1.5)$$

donde \vec{v}_H es la velocidad del flujo de Hubble y \vec{v} la velocidad peculiar de la partícula respecto

las coordenadas comóviles. Con lo cual, el lagrangiano para el movimiento de la partícula es el siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}})^2 - m\Phi(\vec{x}, t), \quad (1.6)$$

con Φ el potencial en el sistema de coordenadas propias, que cumple la ecuación de Newton

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.7)$$

Mediante la transformación

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - \frac{d\psi}{dt} \quad \text{con} \quad \psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}|\vec{x}|^2, \quad (1.8)$$

teniendo en cuenta que el sustraer la derivada total temporal de una función al lagrangiano no modifica las ecuaciones, se reduce a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m|a\dot{\vec{x}}|^2 - m\phi \quad \text{con} \quad \phi = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}|\vec{x}|^2. \quad (1.9)$$

Aplicando el laplaciano a ϕ , teniendo en cuenta que $\nabla_{\vec{x}}^2 = a^2\nabla_{\vec{r}}^2$ y usando la ecuación de Friedmann para la aceleración, llegamos a la expresión que nos interesa:

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi Ga^2[\rho(\vec{x}, t) - \rho_b(t)] = 4\pi Ga^2\rho_b \delta. \quad (1.10)$$

Por otra parte, resolviendo la ecuación de Lagrange obtenemos la ecuación del movimiento

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\frac{\nabla_{\vec{x}}\phi}{a} \equiv \vec{g}, \quad (1.11)$$

donde el segundo término del lado izquierdo de la igualdad aparece debido al cambio de coordenadas y \vec{g} es la gravedad peculiar. Con lo cual, las fluctuaciones en la densidad son la fuente de campo ϕ (1.10) y éste a su vez genera velocidades que producen concentraciones de materia (1.11). Si no hay inhomogeneidades cada partícula se mantiene sin perturbar en la posición \vec{x} .

1.2.4. Mecánica de fluidos en el sistema en expansión

De la misma forma que en el apartado anterior, nos interesa obtener las ecuaciones de continuidad (1.12) y de conservación del momento (1.13) en el sistema en expansión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = \rho \vec{g} - \nabla p. \quad (1.13)$$

A partir de estas dos ecuaciones en el sistema de coordenadas propio, usando la ecuación (1.5), el cambio de variable (1.4), la relación (1.3) y desarrollando, llegamos a las expresiones en el sistema de interés (Peebles, 1980):

$$\left. \frac{\partial \delta}{\partial t} \right|_{\vec{x}} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} (1 + \delta) \vec{v} = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \vec{v} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{a} \frac{\nabla_{\vec{x}} p}{\rho}. \quad (1.15)$$

Como podemos ver, las ecuaciones tienen los términos de segundo orden $\nabla_{\vec{x}}(\delta \vec{v})/a$ y $(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}})\vec{v}/a$. Entonces, si consideramos el régimen lineal ($\delta \ll 1$) donde según (1.3) $\rho = \rho_b$, tenemos las ecuaciones siguientes que son en las que se basa la teoría lineal de la estructura a gran escala que, a su vez, es en la que se basan las aproximaciones ZA y CZA:

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{x}} \vec{v} = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{a} \frac{\nabla_{\vec{x}} p}{\rho_b}. \quad (1.17)$$

En la ecuación (1.16) podemos ver que lo que produce la variación en la densidad es la parte irrotacional del campo de velocidades. Con lo cual, si hay unas fluctuaciones iniciales δ , éstas generan campo ϕ (1.10) que a su vez produce campo de velocidades (1.11), que cambian la densidad (1.16). Si aplicamos la divergencia en la ecuación (1.17) y usamos la expresión (1.16), teniendo en cuenta (1.10) obtenemos la ecuación lineal del crecimiento de fluctuaciones de densidad gravitatorias

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \rho_b \delta + \frac{1}{a^2} \frac{\nabla_{\vec{x}}^2 p}{\rho_b}, \quad (1.18)$$

donde podemos ver que la presión también crea campo gravitatorio cuando es similar a la densidad $p/c^2 \sim \rho$. En el caso que trabajamos, después de la recombinación, el universo está

dominado por la materia y con lo cual el término de la presión es despreciable

$$\ddot{\delta} + \frac{2\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\rho_b\delta. \quad (1.19)$$

De esta forma tenemos una ecuación que no contiene derivadas espaciales y, por lo tanto, la evolución de las fluctuaciones del campo no depende de la forma de éste, es decir que su crecimiento es igual en todos los puntos del espacio. Podemos postular una solución para (1.19) del tipo $\delta \propto t^\alpha$ con la que obtenemos dos valores de α posibles, el modo creciente D (con $\alpha > 0$) y el modo decreciente D_D (con $\alpha < 0$). Con lo cual podemos escribir δ como combinación lineal de ambos modos

$$\delta = AD + BD_D. \quad (1.20)$$

Con el paso del tiempo el modo decreciente se diluye y con lo cual las fluctuaciones de densidad se pueden expresar a partir del modo creciente. De esta forma, sabiendo el campo en un determinado instante, como por ejemplo en la actualidad $\delta(\vec{x}, t_0)$, podemos determinarlo en el instante que deseemos ya que conocemos la expresión de D para cualquier instante:

$$\delta(\vec{x}, t) \propto D(t) \longrightarrow \delta(\vec{x}, t) = \frac{D(t)}{D(t_0)} \delta(\vec{x}, t_0). \quad (1.21)$$

1.2.5. Aproximación de Zeldovich (ZA)

La primera solución aproximada a nivel histórico que encontramos para el problema del crecimiento de perturbaciones es la que propuso Zeldovich (1970). Esta solución se basa en la teoría lineal a partir de la recombinación, donde el término de presión es despreciable (1.19), y con lo cual es exacta cuando las perturbaciones son pequeñas ($\delta \ll 1$). Pero lo interesante es que es cualitativamente correcta cuando las perturbaciones no son pequeñas. Expresa la posición propia en términos de las coordenadas lagrangianas \vec{q} (posición inicial) (Padmanabhan, 1993):

$$\vec{r}(t) \equiv a(t)\vec{x}(t) = a(t) \left[\vec{q} + b(t)\vec{d}(\vec{q}) \right], \quad (1.22)$$

donde el primer término $a(t)\vec{q}$ describe la expansión del universo y el segundo término $b(t)\vec{d}(\vec{q})$ el cambio de posición debido a las fluctuaciones de densidad. La función $b(t)$ corresponde al cociente $D(t)/D(t_i)$, con t_i tiempo inicial, y $\vec{d}(\vec{q})$ es el vector desplazamiento. La expresión

(1.22) es exacta en el régimen lineal pero la ZA consiste en extrapolarla para las regiones donde las perturbaciones δ no son pequeñas. La conservación de la masa implica que se debe cumplir

$$\rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = \bar{\rho} d^3\vec{q}, \quad (1.23)$$

donde ρ es la densidad perturbada y $\bar{\rho}$ la densidad inicial no perturbada (independiente de \vec{q}). Por lo tanto, la densidad del *background* escala como $\rho_b = \bar{\rho}/a^3$ y teniendo en cuenta (1.22) llegamos a la siguiente expresión:

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho} \left| \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \right| = \frac{\bar{\rho}/a^3}{|\partial x_j / \partial q_i|} = \frac{\rho_b(t)}{|\delta_{ij} + b(t) (\partial d_j / \partial q_i)|}, \quad (1.24)$$

donde la expansión a primer orden del jacobiano $|\partial x_j / \partial q_i|$ para un cierto \vec{q} es

$$|\delta_{ij} + b(t) (\partial d_j / \partial q_i)| = 1 + b(t) \nabla_{\vec{q}} \vec{d}. \quad (1.25)$$

Por lo tanto, en el régimen lineal ($b(t) \nabla_{\vec{q}} \vec{d} \ll 1$) obtenemos que las fluctuaciones de densidad son proporcionales a la divergencia (en el sistema de coordenadas lagrangianas) del vector desplazamiento:

$$\delta_l = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho - \rho_b}{\rho_b} \simeq -b(t) \nabla_{\vec{q}} \vec{d}. \quad (1.26)$$

Debido a que la matriz correspondiente al jacobiano de (1.24) es cuadrada simétrica de coeficientes reales, es diagonalizable en cada punto \vec{q} . Si los valores propios del tensor de deformación $b(t)(\partial d_j / \partial q_i)$ son $[-\lambda_1(\vec{q}), -\lambda_2(\vec{q}), -\lambda_3(\vec{q})]$, podemos expresar la fluctuación en la densidad en el régimen no lineal a partir de (1.24) y de (1.3) como

$$(1 + \delta)^{-1} = \prod_{i=1}^3 (1 - \lambda_i), \quad (1.27)$$

donde los λ_i contienen el factor temporal correspondiente a $b(t)$ y, consecuentemente, la expresión (1.27) proporciona las fluctuaciones en la densidad en un cierto instante en el punto que tengamos los λ_i en ese instante. Si hacemos la misma consideración con $b(t)$ en (1.26) y la relacionamos con (1.27), tenemos que la divergencia del vector desplazamiento es la suma de los $-\lambda_i$:

$$\delta_l = -\nabla_{\vec{q}} \vec{d} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i, \quad (1.28)$$

esto es debido a que los $-\lambda_i$ son los valores propios de $b(t)(\partial d_j/\partial q_i)$ y $b(t)\nabla_{\vec{q}}\vec{d}$ es la suma de los elementos de la diagonal. El signo de λ_i indica que la dirección i se expande ($\lambda_i < 0$) o se contrae ($\lambda_i > 0$) en coordenadas lagrangianas.

1.2.6. Aproximación de Zeldovich completa (CZA)

Como hemos visto en el apartado anterior, la ZA es exacta a primer orden debido a que el tensor de deformación local es el dado por la teoría lineal y, además, es función únicamente de los valores propios λ_i de éste. Por otro lado tenemos las aproximaciones basadas en el desarrollo perturbativo lagrangiano donde el tensor de deformación local es exacto (Bouchet et al., 1995) pero no es una función única de λ_i , con lo cual son aproximaciones más precisas que la ZA pero más complejas. Aquí es donde entra la CZA (Betancort-Rijo & López-Corredoira, 2000), que presenta una expresión que depende sólo de los λ_i y es más precisa que la ZA (es exacta a segundo orden):

$$(1 + \delta)^{-1} = \prod_{i=1}^3 [1 - r_i(\boldsymbol{\lambda})\lambda_i], \quad (1.29)$$

donde $r_i(\boldsymbol{\lambda})$ es una cierta función de los λ_i y la ZA corresponde al orden zero de esta aproximación ($r_i = 1$). Esta expresión sólo es válida para $r_i\lambda_i < 1$, con lo cual la fluctuación de densidad se encuentra en el rango $\delta \in (-1, \infty)$. La derivación de esta función se detalla en el artículo mencionado, donde para un universo de Friedmann plano encuentran que r_i sigue la expresión

$$\begin{aligned} r_i(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = & 1 + \frac{3}{14}(\lambda_j + \lambda_k) + \frac{18}{245}(\lambda_j + \lambda_k)^2 + \frac{157}{4410}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i + \frac{3}{245}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \\ & + 0,03371(\lambda_j + \lambda_k)^3 + 1,63 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^2\lambda_i + 2,75 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i^2 \\ & + 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^2\lambda_i + 1,2 \times 10^{-2}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k) + 1,94 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^4 \\ & + 9,4 \times 10^{-3}(\lambda_j + \lambda_k)^3\lambda_i + 1,58 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^2\lambda_i^2 + 1,3 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i^3 \\ & + 4,3 \times 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^4 + 8,4 \times 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k)^2 \\ & + 7,2 \times 10^{-4}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i + R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k), \end{aligned} \quad (1.30)$$

que incluye términos hasta cuarto orden, ya que los de orden superior son muy pequeños. Vemos que el orden de los λ es importante, ya que r_i representa la deformación del eje i debido a la deformación en los otros dos ejes j y k , lo que no tiene en cuenta la ZA. Los términos de orden mayor se aproximan mediante la función residuo R

$$R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = \left[1 - 9 \left(\lambda_i - \frac{\lambda_j + \lambda_k}{2} \right) \left(1 - \frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k}{1,3} \right) \right] \left[V_{sp}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) - V_{sp}(\lambda_i) + V_{sp} \left(\frac{\lambda_j + \lambda_k}{2} \right) \right], \quad (1.31)$$

$$V_{sp}(x) \equiv r_{sp}(x) - \left(1 + \frac{x}{7} + \frac{23}{567}x^2 + \frac{13}{900}x^3 + 5,86 \times 10^{-3}x^4 \right), \quad (1.32)$$

donde la función $V_{sp}(x)$ corresponde al residuo de $r_{sp}(x)$ (r_i del caso esférico). Para encontrar esta función, tenemos en cuenta que en el caso esférico $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y entonces $r_1 = r_2 = r_3$, con lo cual la expresión (1.29) tiene la forma siguiente:

$$1 + \delta_{sp} = \left[1 - r_{sp}(\delta_l) \frac{\delta_l}{3} \right]^{-3}. \quad (1.33)$$

Por otro lado, tenemos una aproximación que relaciona el campo de densidad real δ con el campo de densidad lineal δ_l en el colapso esférico (Betancort-Rijo & López-Corredoira, 2001):

$$1 + \delta_{sp} = \left[1 - \frac{\delta_l}{1,66} \right]^{-1,66}. \quad (1.34)$$

Combinando las dos expresiones anteriores llegamos a la función para $r_{sp}(x)$, que será válida hasta $\delta_l = 1,65$, a partir del cual tendrá un valor fijo, y donde en $x = 0$ tenemos una indeterminación que resolvemos mediante la regla de l'Hôpital obteniendo que $\lim_{x \rightarrow 0} r_{sp}(x) = 1$.

$$r_{sp}(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{x}{1,66} \right)^{0,5533} \right] & \text{si } x \leq 1,65 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ r_{sp}(1,65) = 1,71 & \text{si } x > 1,65 \end{cases} \quad (1.35)$$

La CZA es una generalización de la ZA y es exacta en el caso planar ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$), cilíndrico ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$) y esférico ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$). Análogamente a la ZA, podemos expresar la relación entre la divergencia del vector desplazamiento real (no lineal) y los λ_i como

$$\nabla_{\vec{q}} \vec{d}_r = - \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{\lambda}) \lambda_i. \quad (1.36)$$

Capítulo 2

Metodología

Se ha elaborado un programa en Fortran 90 que calcula el campo de densidad y las nuevas coordenadas de una malla de puntos en una caja de lado L para un *redshift* determinado.

2.1. Realización de un campo gaussiano

Primero comenzamos generando el campo de densidad lineal, que con el formalismo de Fourier podemos descomponer en distintos modos, donde para un volumen infinito se expresa como la antitransformada de Fourier del campo en el espacio transformado $\delta_{\vec{k}}$:

$$\delta_l(\vec{q}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \delta_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{q}} d^3\vec{k}. \quad (2.1)$$

Por lo tanto, su transformada de Fourier nos devuelve al espacio de \vec{k} :

$$\delta_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \delta_l(\vec{q}, t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}} d^3\vec{q}. \quad (2.2)$$

Pero para resolver el problema computacionalmente es necesario hacer una realización en un volumen finito L^3 usando un número de modos finito N , i.e. usar la serie de Fourier

$$\delta_l(\vec{q}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{l,m,n=-N}^N \delta_{\vec{k}_{l,m,n}} e^{i\vec{k}_{l,m,n}\cdot\vec{q}} \quad \text{con} \quad \vec{k}_{l,m,n} = \frac{2\pi}{L}(l, m, n). \quad (2.3)$$

Cuanto N más grande significa que tenemos más modos y mejor resolución λ_r (más pequeña), que viene dada por el cociente $\lambda_r = L/N$. A partir de ésta se define el modo máximo $k_{max} = 2\pi/\lambda_r = 2\pi N/L$ y el rango dinámico $L/\lambda_r = N$, que es el cociente entre la escala más grande y la más pequeña que se puede resolver.

Con lo cual, para generar una realización del campo δ_l tenemos que caracterizarlo en el dominio transformado $\delta_{\vec{k}}$ para cada uno de los modos

$$\delta_{\vec{k}} = |\delta_{\vec{k}}| e^{i\theta_{\vec{k}}}, \quad (2.4)$$

donde $|\delta_{\vec{k}}|$ es el módulo y $\theta_{\vec{k}}$ la fase correspondientes a \vec{k} . Esto significa que para cada modo \vec{k} tenemos que hacer una realización de $|\delta_{\vec{k}}|$ y $\theta_{\vec{k}}$. La forma general de realización de una variable aleatoria ω distribuida uniformemente entre 0 y 1 es

$$\omega_i = \int_{x_i}^{\infty} P(x) dx, \quad (2.5)$$

donde x_i es la realización i-ésima de la variable x y ω_i la realización i-ésima de ω . En el programa utilizamos la rutina de fortran *RANDOM_NUMBER* para obtener para cada modo un número aleatorio entre 0 y 1. Como hemos comentado en el apartado 1.2.2, se consideran las condiciones iniciales como un campo gaussiano aleatorio. Una de sus propiedades es que las fases son aleatorias, es decir que $\theta_{\vec{k}}$ es independiente de $\theta_{\vec{k}'}$. Tenemos pues que $\theta_{\vec{k}}$ es una variable uniformemente distribuida entre 0 y 2π ($P(\theta_{\vec{k}}) = 1/2\pi$), con lo cual su realización para cada modo viene dada por

$$\theta_{\vec{k}} = 2\pi\omega_{\vec{k}}. \quad (2.6)$$

En el caso de considerar un volumen infinito el campo gaussiano viene caracterizado unívocamente por el espectro de potencias, es decir que es el mismo en todas las realizaciones

$$|\delta_{\vec{k}}|^2 = P(k), \quad (2.7)$$

donde $P(k)$ depende del módulo de \vec{k} , y no de la dirección, por isotropía. Pero si consideramos un volumen finito, $|\delta_{\vec{k}}|$ fluctúa de una realización a otra según la distribución de Rayleigh

$$P(|\delta_{\vec{k}}|) = 2 \frac{|\delta_{\vec{k}}|}{P(k)} e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{P(k)}} \quad (2.8)$$

y lo que se cumple entonces es que

$$\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = P(k). \quad (2.9)$$

De esta forma, si introducimos la distribución de Rayleigh (2.8) en (2.5) tenemos que la realización de $|\delta_{\vec{k}}|$ para cada modo \vec{k} viene dada por

$$|\delta_{\vec{k}}|^2 = -P(k) \ln \omega'_{\vec{k}}, \quad (2.10)$$

donde distinguimos $\omega'_{\vec{k}}$ de $\omega_{\vec{k}}$ porque son realizaciones independientes. Hemos usado la siguiente aproximación para el espectro de potencias actual de la materia oscura fría

$$P(k) = \sigma_8^2 19843 [\ln(1 + 11,14k)]^2 (1 + 18,5k + 5880k^2 + 17580k^3 + 1,04 \cdot 10^6 k^4)^{-1/2} k^{-1}, \quad (2.11)$$

donde $\sigma_8 = 0,83$ es la constante de normalización. Debido a que estamos usando el espectro de potencias evaluado en el presente ($z = 0$), estamos obteniendo el campo de densidad lineal en el instante actual $\delta_l(\vec{q}, t_0)$ mediante (2.3) en una malla de puntos equiespaciados a partir de los $\delta_{\vec{k}}$ realizados (2.4). Para comprobar que está bien generado el campo de densidad debemos recuperar los $\delta_{\vec{k}}$ a partir de los δ_l obtenidos anteriormente en el volumen considerado

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} \iiint_V \delta_l e^{-i\vec{k}\cdot\vec{q}} d^3\vec{q}. \quad (2.12)$$

Por definición el modo con $|\vec{k}| = 0$ ($l = m = n = 0$) no genera fluctuaciones. Además, para que el campo δ_l sea real se debe cumplir que $\delta_{\vec{k}}^* = \delta_{-\vec{k}}$, que a su vez implica que $|\delta_{-\vec{k}}| = |\delta_{\vec{k}}|$ y que $\theta_{-\vec{k}} = -\theta_{\vec{k}}$. Con lo cual tenemos realmente n modos independientes

$$n = \frac{(2N + 1)^3 - 1}{2}. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, agrupando los términos de \vec{k} y $-\vec{k}$ podemos expresar el campo de densidad de la siguiente forma, reduciendo así el tiempo de cómputo

$$\delta_l(\vec{q}) = \frac{1}{L^{3/2}} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m,n=-N}^N + (l=0) \sum_{m=1}^N \sum_{n=-N}^N + (l=m=0) \sum_{n=1}^N \right) 2 \operatorname{Re} \left(\delta_{\vec{k}_{l,m,n}} e^{i\vec{k}_{l,m,n}\cdot\vec{q}} \right), \quad (2.14)$$

y entonces, el valor medio de las fluctuaciones al cuadrado debe ser

$$\langle \delta_l^2 \rangle = \frac{1}{V} \left[\left(\sum_{l=1}^N \sum_{m,n=-N}^N + (l=0) \sum_{m=1}^N \sum_{n=-N}^N + (l=m=0) \sum_{n=1}^N \right) 2 \left| \delta_{\vec{k}_{l,m,n}} \right|^2 \right]. \quad (2.15)$$

Todas estas comprobaciones que se mencionan, se presentan en la sección 3.1 del siguiente capítulo de resultados.

2.2. Vector desplazamiento lineal y tensor de deformación

Hemos visto que en la teoría lineal se cumple la relación (1.28), con lo cual el vector de desplazamiento lineal y las componentes del tensor de deformación lineal en cada punto de la malla se pueden descomponer en modos de Fourier y vienen dados por las siguientes expresiones (Betancort-Rijo, 2019):

$$\vec{d}(\vec{q}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{l,m,n=-N}^N i \delta_{\vec{k}_{l,m,n}} \frac{\vec{k}_{l,m,n}}{k^2} e^{i \vec{k}_{l,m,n} \cdot \vec{q}}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial d_i}{\partial q_j} = -\frac{1}{L^{3/2}} \sum_{l,m,n=-N}^N \delta_{\vec{k}_{l,m,n}} \frac{k_i k_j}{k^2} e^{i \vec{k}_{l,m,n} \cdot \vec{q}}. \quad (2.17)$$

Si lo expresamos en función de los modos independientes, como nos interesa, aplicando las condiciones de realidad tenemos

$$\vec{d}(\vec{q}) = -\frac{1}{L^{3/2}} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m,n=-N}^N + (l=0) \sum_{m=1}^N \sum_{n=-N}^N + (l=m=0) \sum_{n=1}^N \right) 2 \operatorname{Im} \left(\delta_{\vec{k}_{l,m,n}} e^{i \vec{k}_{l,m,n} \cdot \vec{q}} \right) \frac{\vec{k}_{l,m,n}}{k^2}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial d_i}{\partial q_j} = -\frac{1}{L^{3/2}} \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m,n=-N}^N + (l=0) \sum_{m=1}^N \sum_{n=-N}^N + (l=m=0) \sum_{n=1}^N \right) 2 \operatorname{Re} \left(\delta_{\vec{k}_{l,m,n}} e^{i \vec{k}_{l,m,n} \cdot \vec{q}} \right) \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (2.19)$$

Como hemos mencionado en la introducción y se puede ver en (2.17) y (2.19), el tensor de deformación es una matriz cuadrada simétrica de coeficientes reales y por lo tanto es diagonalizable. Encontramos sus valores propios λ_i , que nos indican la deformación en las tres dimensiones espaciales, mediante el método de Jacobi. Los vectores propios no son necesarios.

2.3. Cruce de capas

En la formación de estructuras en realidad nunca se da un colapso estricto en el que la densidad se hace infinita, es decir que las expresiones (1.27) y (1.29) no son válidas para $\lambda_i \geq 1$ ni para $r_i(\boldsymbol{\lambda})\lambda_i \geq 1$ respectivamente, sino que poco antes de estos límites se desarrolla un multifujo de materia que produce que la densidad permanezca constante. En el caso más simple, el esférico, el cruce de flujo de materia se produce debido a que las capas interiores colapsan antes y producen flujo saliente de materia que contrarresta al flujo entrante de capas exteriores. Por lo tanto si seguimos una capa con masa constante que está colapsando, ésta se contrae antes que se de el cruce de capas en t_{sc} pero después de éste, cuando los flujos saliente y entrante se compensan, queda estabilizada en un tamaño físico determinado. Esto produce que la densidad en el sistema físico deje de aumentar y sea constante, produciéndose así la virialización de la estructura. En el colapso esférico, que es un buen modelo para explicar la formación de estructuras, este cruce de capas se da unos instantes antes del momento de colapso estricto sin cruce de capas ($\rho \rightarrow \infty$) (Sánchez-Conde et al., 2007). Con lo cual, las fluctuaciones de densidad δ siguen creciendo con el tiempo debido a que $\rho(\vec{r}, t > t_{sc}) = cte$ y la densidad del *background* ρ_b sigue disminuyendo debido a la expansión del universo. Pero el cruce de capas no ocurre únicamente en las sobredensidades, sino también en los vacíos. Cuando estos se extienden debido a la expansión del universo, llega un momento en el que se encuentran produciendo el efecto mencionado y dando como resultado los planos (*sheets* en inglés) y, en la intersección de éstos, los filamentos de la red cósmica. Pero en este caso lo que permanece constante es el contraste de densidad ya que el vacío sigue expandiéndose con el factor de escala, es decir el tamaño comóvil permanece fijo. De esta forma, debemos incluir el tratamiento del cruce de capas para que la expresión de la CZA sea válida en general y lo hacemos según el siguiente esquema (Betancort-Rijo, 2020):

$$(1 - r_i(\boldsymbol{\lambda})\lambda_i)^* \equiv \begin{cases} 1 - r_i\lambda_i & \text{si } s_1 \leq (1 - r_i\lambda_i) \leq s_2 \\ s_1 a_i & \text{si } (1 - r_i\lambda_i) < s_1 \\ s_2 & \text{si } (1 - r_i\lambda_i) > s_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$(1 + \delta)^{-1} = \prod_{i=1}^3 (1 - r_i(\boldsymbol{\lambda})\lambda_i)^*.$$

Para ello definimos dos parámetros que modelan el cruce de capas positivo s_1 (colapso) y el negativo s_2 (expansión de los vacíos). Para definir el parámetro s_1 nos basamos en que el cruce

de capas para el colapso esférico se da cuando se llega a $\rho \approx 100\rho_b$, lo que significa prácticamente $\delta \approx 100$, que corresponde según la aproximación (1.34) a $\delta_l \approx 1,56$. Por lo tanto $\lambda_{sp} = \delta_l/3 = 0,52$ y, según (1.35), $r_{sp}(1,56) \approx 1,52$. Finalmente tenemos que el cruce de capas positivo se produce en $s_1 = 1 - r_{sp}(1,56)\lambda_{sp} = 0,2$. El significado físico es que si tenemos un elemento de volumen con arista 1 inicialmente ($\lambda_i = 0$), con el paso del tiempo (aumento de λ_i) ésta disminuye como $1 - r_i\lambda_i$. Con lo cual, $1 - r_i\lambda_i = 0,2$ significa que la arista es un 20% del tamaño físico inicial y es el instante en el que adquiere un tamaño físico constante. Con lo cual, para valores $1 - r_i\lambda_i \geq s_1$ no hay cruce de capas y para valores $1 - r_i\lambda_i < s_1$ se tiene en cuenta este efecto multiplicando s_1 (tamaño físico constante a partir del cruce de capas) por a_i (el factor de escala en el momento que se produce el cruce de capas en la dirección i) para obtener el tamaño comóvil del elemento en el presente. El parámetro s_2 viene de considerar que el cruce de capas negativo en el caso esférico se da cuando $\rho = 0,1\rho_b$, es decir $\delta \approx -0,90$, que corresponde a $\delta_l = -5$ y $r_{sp}(-5) = 0,694$. Entonces tenemos que $\lambda_{sp} = -5/3$ y, por lo tanto, el valor de $s_2 = 1 - r_{sp}(-5)\lambda_{sp} = 2,15$. Con lo cual, para valores $1 - r_i\lambda_i \leq s_2$ no hay cruce de capas y para valores $1 - r_i\lambda_i > s_2$ sí que lo hay. En este caso, no multiplicamos s_2 por a_i ya que el tamaño comóvil permanece constante a partir del cruce de capas. Estos valores de s_1 y s_2 son los que funcionan para $\Omega_m = 1$ y, con lo cual, nos parece razonable usarlos por lo expuesto anteriormente.

La función r_i (1.30) es siempre positiva y tiene valores en torno a 1 según el signo de los λ_i . Por ejemplo, si los tres son positivos los tres r_i son mayores que 1, lo que significa que la compresión en una dirección es acelerada por la compresión en las otras direcciones (en la ZA no se da este efecto). Esto es debido a dos efectos: uno es que en este caso en que $\delta > 0$ la divergencia del campo de velocidades es negativa (1.16) y entonces se produce una compresión, y el otro es el aumento de la gravedad debido a esta compresión que produce la disminución de las distancias entre partes de la fluctuación, potenciando el crecimiento de δ . Si los tres son negativos los r_i son menores que 1, hecho que no acelera la expansión respecto la ZA sino que la reduce. En este caso, los dos efectos mencionados anteriormente se contrarrestan: $\delta < 0$ y la divergencia del campo de velocidades es positiva, consecuentemente se produce una expansión que aumenta las distancias entre partes de la fluctuación y que produce una reducción de la gravedad ($\vec{g} > 0$) (expresiones 1.10 y 1.11) en el sentido de la expansión, desacelerándola. Los casos con mezcla de signo en los λ_i dan r_i mayores o menores que 1 según la relación entre los λ_i .

La función r_i es buena para valores de λ_i reales, es decir de puntos en los que no se haya dado el cruce de capas donde es válida la CZA. Pero cuando los λ_i son grandes en valor absoluto la

función da valores problemáticos ($r_i < 0$ o $r_i \gg 1$) cuando hay λ_i negativos, como se menciona en Makler et al. (2001) donde se comparan distintas aproximaciones que pretenden explicar la formación de estructuras. Entonces debemos introducir criterios para regular r_i antes de resolver el cruce de capas. Estas modificaciones se comentan en la sección 3.2 del capítulo de resultados. La rutina que resuelve el tratamiento del cruce de capas sigue los siguientes pasos:

1. Ordena λ_i de mayor (λ_1) a menor (λ_3).
2. Si $(1 - r_1\lambda_1) < s_1$ buscamos el instante x_1 en que se da el colapso en esta dirección multiplicando los λ_i por esta cantidad:

$$r_1(x_1\lambda_1, x_1\lambda_2, x_1\lambda_3) x_1\lambda_1 - (1 - s_1) = 0. \quad (2.21)$$

Donde x_1 es el cociente entre los factores de crecimiento correspondientes al instante en que se produce el cruce de capas (t_1) y al presente (t_0). Obtenemos a partir de x_1 el factor de escala a_1 correspondiente según el modelo cosmológico considerado (2.24). Tenemos entonces $(1 - r_1\lambda_1)^* = s_1 a_1$.

3. Si $s_1 \leq (1 - r_1\lambda_1) \leq s_2 \rightarrow (1 - r_1\lambda_1)^* = 1 - r_1\lambda_1$.
4. Si $(1 - r_1\lambda_1) > s_2 \rightarrow (1 - r_1\lambda_1)^* = s_2$.
5. Las condiciones 2, 3 y 4 están ordenadas debido a la causalidad. Para un λ_i determinado se cumple la condición 2, 3 o 4 dependiendo de cuál cumpla el λ_i anterior. Es decir si λ_1 cumple la condición 2, λ_2 y λ_3 pueden cumplirla también, así como, alternativamente, las condiciones 3 y 4. Pero a su vez λ_3 sólo puede cumplir la misma condición que λ_2 o inferior. Es decir que si λ_2 cumple 3, λ_3 sólo puede cumplir 3 o 4. En el caso que λ_2 y λ_3 también cumplan la condición 2 encontramos los instantes x_2 y x_3 en el que se da el cruce de capas respectivamente:

$$r_2(x_2\lambda_2, x_2\lambda_3, x_1\lambda_1) x_2\lambda_2 - (1 - s_1) = 0, \quad (2.22)$$

$$r_3(x_3\lambda_3, x_1\lambda_1, x_2\lambda_2) x_3\lambda_3 - (1 - s_1) = 0. \quad (2.23)$$

En estos dos casos se tiene en cuenta que el o los λ_i anteriores (λ_1 o λ_1 y λ_2 respectivamente) han quedado congelados debido al cruce de capas previo en sus direcciones (con valores: $x_1\lambda_1$ o $x_1\lambda_1$ y $x_2\lambda_2$).

Para encontrar el instante en el que se da el cruce de capas x_i hemos elaborado una rutina que encuentra la raíz de las ecuaciones (2.21-2.23) por el método de la bisección o el de Newton-Raphson. Por otro lado, tenemos que x_i viene dado por el siguiente cociente

$$\frac{D(a_i)}{D(a_0 = 1)} = x_i. \quad (2.24)$$

Si consideramos un universo dominado por la materia ($\Omega_m = 1$) tenemos que $D(a) \propto a$ y, directamente, $a_i = x_i$. En el caso de un universo Λ CDM con Ω_{m0} , Ω_{r0} y $\Omega_{\Lambda0}$ como parámetros de entrada, usamos la expresión general de $D(a)$ (2.25) (Heath, 1977) para encontrar el valor de a_i que cumple (2.24) de la misma forma que hemos encontrado x_i .

$$D(a) = \frac{1}{2af(a)} \int_0^a f^3(a') da' \quad (2.25)$$

$$f(a) = \left[1 + \Omega_{m0} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \Omega_{r0} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) + \Omega_{\Lambda0} (a^2 - 1) \right]^{-1/2} \quad (2.26)$$

La rutina que calcula el valor de $D(a)$ resuelve la integral mediante el método de los trapecios o el de Simpson. En $a = 0$ hay una indeterminación que se resuelve aplicando la regla de l'Hôpital obteniendo que $\lim_{a \rightarrow 0} D(a) = 0$.

Por último, calculamos el producto de los $(1 - r_i \lambda_i)^*$ para cada punto inicial \vec{q} de la malla (coordenadas lagrangianas) y obtenemos la fluctuación de densidad correspondiente $\delta(\vec{r}, t)$ mediante

$$(1 + \delta)^{-1} = \prod_{i=1}^3 (1 - r_i(\boldsymbol{\lambda}) \lambda_i)^*. \quad (2.27)$$

Ahora sólo falta encontrar la nueva posición \vec{r} (coordenadas eulerianas) del punto inicial considerado \vec{q} a partir del desplazamiento que ha sufrido, según la expresión

$$\vec{r}(t) \equiv a(t) \vec{x}(t) = a(t) \left[\vec{q} + \vec{d}_r(\vec{q}, t) \right]. \quad (2.28)$$

2.4. Campo de desplazamiento según la CZA

Obtener el vector desplazamiento de un punto con coordenadas lagrangianas \vec{q} es lo que nos permite encontrar la coordenada comóvil euleriana \vec{x} y la coordenada propia \vec{r} . Para calcular el campo de desplazamiento correspondiente a la CZA, $\vec{d}_r(\vec{q}, t)$, usamos la expresión (1.36) que

nos permite llegar a la integral de volumen siguiente (Betancort-Rijo, 2019):

$$\vec{d}_r(\vec{q}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{F(\vec{q}', t)}{|\vec{q} - \vec{q}'|^3} (\vec{q} - \vec{q}') d^3\vec{q}', \quad (2.29)$$

donde la función $F(\vec{q}', t)$ en cada punto \vec{q}' de la malla corresponde a la divergencia del vector desplazamiento, que anteriormente (1.36) hemos visto que equivale a

$$F(\vec{q}', t) = \vec{\nabla}_{\vec{q}'} \cdot \vec{d}_r = - \sum_{i=1}^3 r_i(\boldsymbol{\lambda}) \lambda_i. \quad (2.30)$$

Podemos ver que los puntos \vec{q}' con $\vec{\nabla}_{\vec{q}'} \cdot \vec{d}_r < 0$ ($\sum_{i=1}^3 r_i \lambda_i > 0$) generan atracción sobre \vec{q} y los puntos con $\vec{\nabla}_{\vec{q}'} \cdot \vec{d}_r > 0$ ($\sum_{i=1}^3 r_i \lambda_i < 0$) repulsión. Calculando la integral (2.29), i.e. la suma de todas las contribuciones de los puntos de la malla, obtenemos el desplazamiento en el punto \vec{q} , y a partir de (2.28) sus coordenadas eulerianas.

Capítulo 3

Resultados y discusión

A continuación se presentan los resultados obtenidos y su discusión. Primero se muestran ciertas comprobaciones hechas para confirmar la correcta generación del campo gaussiano, posteriormente las modificaciones necesarias en la función r_i , seguido de los valores que obtenemos de $r_i \lambda_i$ del cruce de capas y, a continuación, los valores de los campos de densidad y de desplazamiento. Finalmente se presenta un resumen del algoritmo empleado con las ecuaciones correspondientes.

3.1. Comprobaciones del campo gaussiano

En esta sección comprobamos algunas propiedades del campo gaussiano para verificar que está bien generado. En primer lugar, miramos que para un determinado \vec{k} su $|\delta_{\vec{k}}|$ obtenido en distintas realizaciones mediante (2.10) sigue la distribución de Rayleigh (2.8) debido a que consideramos un volumen finito, como muestra la figura 3.1. Hemos considerado $k = 2\pi/L$ que según el espectro de potencias dado por (2.11) tiene un valor de $P(2\pi/L) = 13102,93 \text{ (Mpc/h)}^3$ para $L = 200 \text{ Mpc/h}$. El valor más probable de $|\delta_{\vec{k}}|$ se encuentra en $80,96 \text{ (Mpc/h)}^{3/2}$ y el valor medio de $|\delta_{\vec{k}}|^2$ que según (2.9) tiene que ser $P(k)$ da un valor de $\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle = 13126,56 \text{ (Mpc/h)}^3$. Con lo cual, el error relativo es de $1,8 \cdot 10^{-3}$. Esto depende claramente del número de realizaciones que hagamos, cuantas menos sean menos se parecerán $P(k)$ y $\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle$, y viceversa.

Otra comprobación que debemos hacer es que el campo lineal generado δ_l (2.14) tenga forma gaussiana, como muestra la figura 3.2, y que sea igual a la suma de los valores propios $\delta_l = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ como predice la expresión de la teoría lineal (1.28). En la tabla 3.1 se presentan dos ejemplos. Entonces también se cumple que $\langle \delta_l^2 \rangle = \langle (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \rangle$ y obtenemos que su valor en una realización coincide con el valor teórico proporcionado por (2.15).

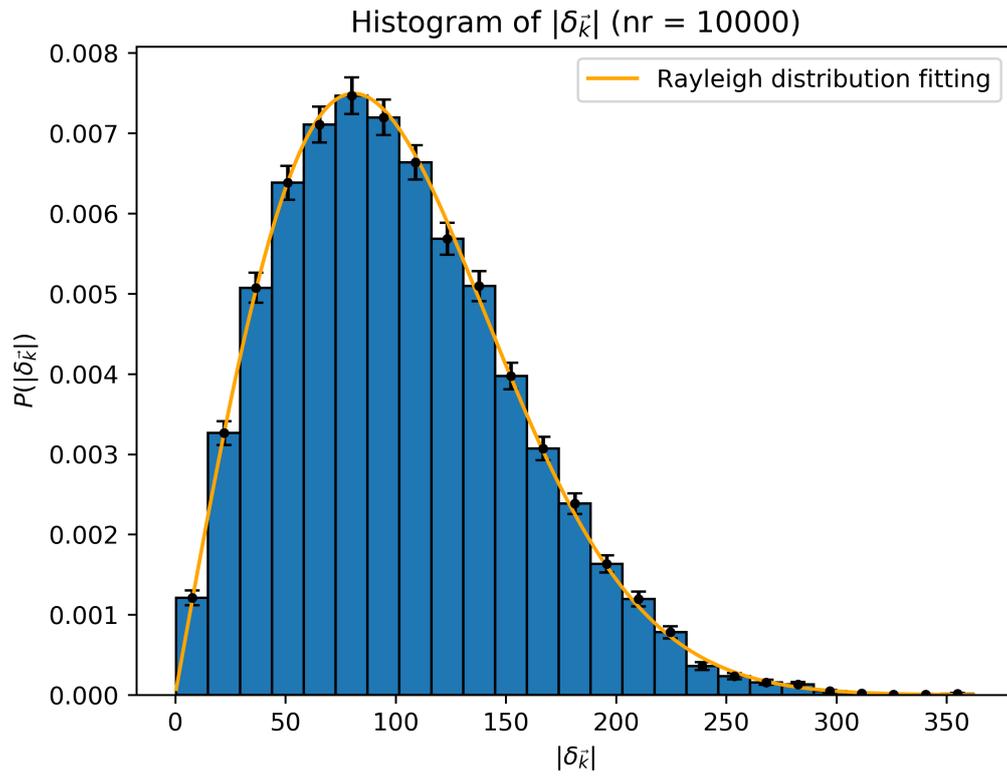


Figura 3.1: Distribución de $|\delta_{\vec{k}}|$ con $k = \pi/100$ (Mpc/h) $^{-1}$ en 10^4 realizaciones.

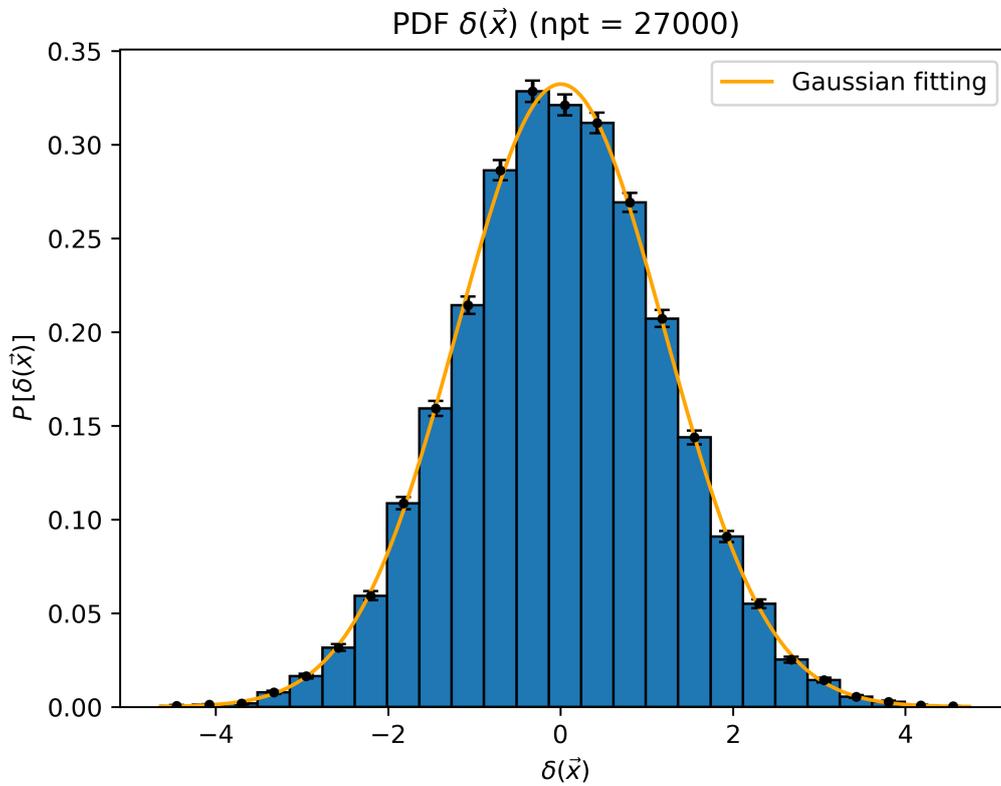


Figura 3.2: Distribución gaussiana de $\delta(\vec{q})$ con $N = 30$ y $n_{pt} = N^3$.

| δ_l | λ_1 | λ_2 | λ_3 | $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------------------------------|
| 1.1625 | 1.6983 | 0.2181 | -0.7539 | 1.1625 |
| -0.6401 | 0.7448 | 0.1895 | -1.5744 | -0.6401 |

Cuadro 3.1: Fluctuaciones de densidad lineales y valores propios del tensor de deformación lineal en dos puntos.

Además, de la distribución de Doroshkevich (1970) en un punto al azar, teniendo en cuenta que $\sigma^2 \equiv \langle \delta_l^2 \rangle = \langle (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \rangle$, se ve que el valor medio de λ^2 debe cumplir la expresión (3.1). Esto se usa como un test más de que la realización es correcta.

$$\langle \lambda^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \right\rangle = \frac{1}{npt} \sum_{j=1}^{npt} \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \right) = \frac{\langle \delta_l^2 \rangle}{3} = \frac{\sigma^2}{3} \quad (3.1)$$

En la tabla 3.2 se presentan dos realizaciones con distinta resolución, ya que σ depende de ésta. Esto es debido a que cuanto mayor resolución, el δ_l será mayor en valor absoluto porque contribuyen más escalas (el filtrado es a una escala menor).

| $L(\text{Mpc/h})$ | N | $\lambda_r(\text{Mpc/h})$ | $\langle \lambda^2 \rangle$ | σ | $\sigma^2/3$ |
|-------------------|-----|---------------------------|-----------------------------|----------|--------------|
| 200 | 10 | 20 | 0.475 | 1.172 | 0.457 |
| 100 | 10 | 10 | 1.033 | 1.725 | 0.992 |

Cuadro 3.2: Comprobación de la distribución de Doroshkevich para dos realizaciones.

Otro aspecto a tener en cuenta es comparar las densidades de probabilidad (PDF de las siglas en inglés) de la ZA y la CZA. En la actualidad, que estamos en el régimen no lineal ($\sigma \sim 1$), las PDF de la ZA y la CZA presentan diferencias. Mientras que a *redshifts* elevados, donde nos encontramos en el régimen lineal, las PDF se aproximan. Esto es debido a que los λ_i son menores y los r_i tienden a 1, haciendo que las expresiones (1.27) y (1.29) tiendan a coincidir. En la figura 3.3 se muestran las PDF de los puntos no colapsados para la ZA y CZA para $z = 0$ y $z = 2$ respectivamente. Hemos considerado una volumen de lado $L = 200 \text{ Mpc/h}$ con $N = 10$, con lo cual la resolución es de $\lambda_r = 20 \text{ Mpc/h}$ y los *redshifts* $z = 0$ y $z = 2$ corresponden a $\sigma = 1,20$ y $\sigma = 0,50$ respectivamente.

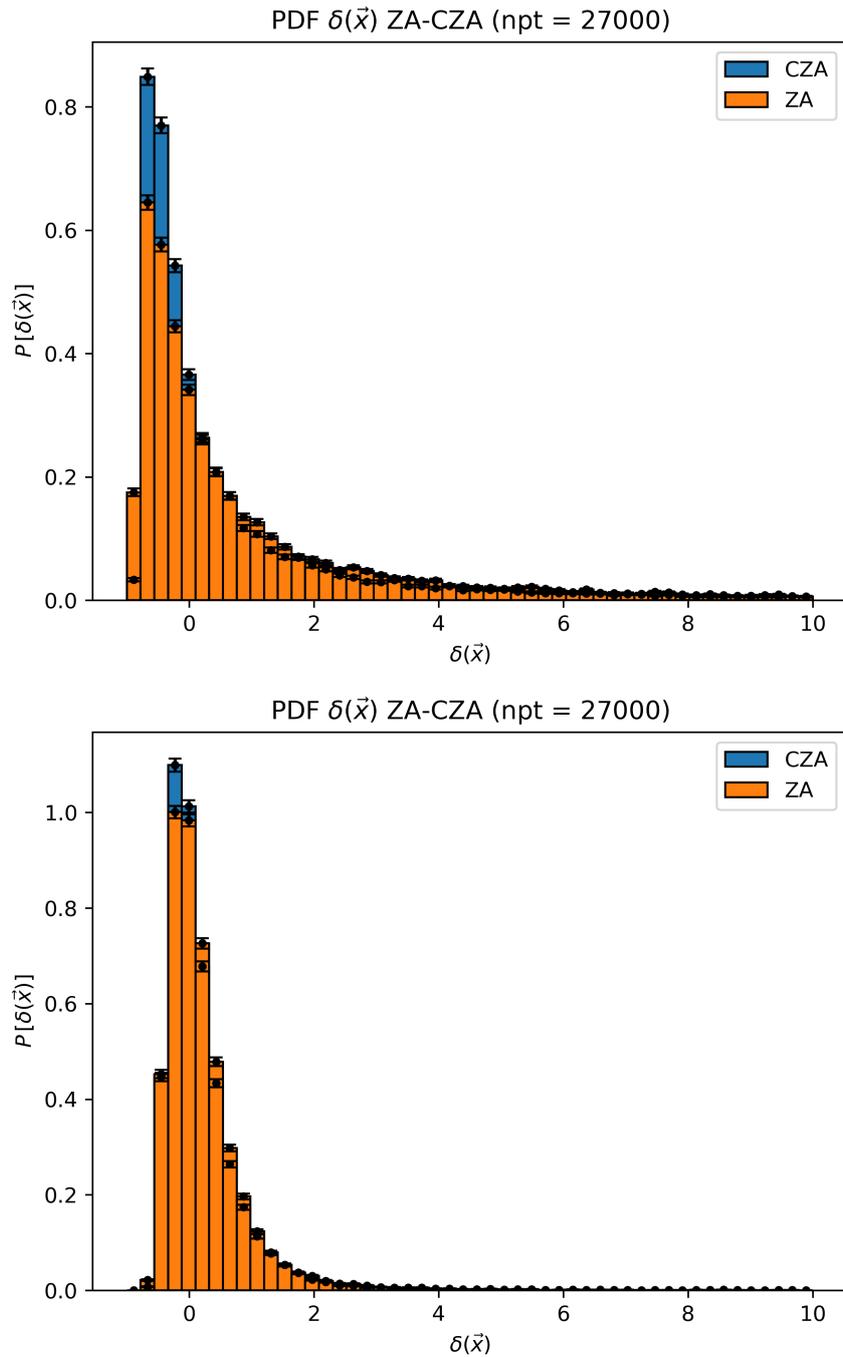


Figura 3.3: PDF de la ZA y la CZA en $z = 0$ (arriba) y $z = 2$ (abajo).

Hemos hecho otras comprobaciones, como recuperar los $\delta_{\vec{k}}$ generados con (2.4) a partir de la integral (2.12) y obtenemos que la diferencia entre los generados y los recuperados es menor que $1(\text{Mpc}/h)^{3/2}$. En la expresión (2.3) se puede ver que las unidades de $\delta_{\vec{k}}$ son $[V^{3/2}]$ ya que δ_l es adimensional. Por otra parte hemos calculado las derivadas espaciales del vector de desplazamiento lineal con diferencias finitas y hemos comprobado que es igual que el tensor de deformación lineal. Lo hemos hecho considerando el desplazamiento lineal (2.18) en un punto

concreto y calculándolo en tres puntos situados a un incremento $\Delta = \lambda_r/f$ de éste en las tres direcciones espaciales, donde f es un factor que nos dará la precisión. Con $L = 100$ Mpc/h y $N = 10$, si usamos $f = 20$ tenemos un error en las componentes del tensor de deformación de $\pm 0,05$, mientras que con $f = 200$ el error es de $\pm 0,01$. Con lo cual el campo de desplazamiento está bien generado. Además, hemos calculado el promedio del cuadrado de los elementos del tensor de deformación antes de la diagonalización y hemos obtenido que todos los elementos de la diagonal son estadísticamente iguales pero diferentes a los no diagonales, que entre ellos también son iguales. Con lo cual, tanto el campo gaussiano como el de desplazamiento y los tensores de deformación están bien generados y aseguramos que los valores propios λ_i , que son la clave de las aproximaciones usadas, son correctos.

3.2. Ajuste de la CZA

Como hemos comentado anteriormente, la función r_i da ciertos problemas algunas veces. Para ello vamos a analizar los cuatro casos posibles según el signo de λ_i comparando el r_i de (1.30) con las dos siguientes aproximaciones que numeramos con 1 y 2, con tal de ver si tenemos un buen valor. Ambas son exactas para los casos esférico y planar pero no en el cilíndrico, aunque son muy similares.

$$r_{i,1} = 1 + r_{sp}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) - r_{sp} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_j + \lambda_k}{2} \right), \quad (3.2)$$

$$r_{i,2} = r_{sp} \left(\frac{3}{2}(\lambda_j + \lambda_k) \right). \quad (3.3)$$

También hemos probado los dos siguientes restos como alternativa al dado por (1.31). Donde el primero es exacto en los casos esférico y planar pero no en el cilíndrico, y el segundo es exacto en los casos esférico y cilíndrico pero no en el planar. Ambos son especialmente útiles en los casos con algún $\lambda_i < 0$ porque reducen el valor del resto, que debe ser pequeño por definición.

$$R_1(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = V_{sp} \left(\frac{3}{2}(\lambda_j + \lambda_k) \right), \quad (3.4)$$

$$R_2(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = V_{sp}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k). \quad (3.5)$$

Entonces procedemos al análisis de la función r_i y presentamos la forma final que nos permite

proceder a un correcto tratamiento del cruce de capas. Recordemos que los λ_i se ordenan tal que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

1. Caso $\lambda_i > 0$: Los r_1 (r_i de λ_1) siempre son positivos, esto es buena señal porque recordemos que r_i es un valor en torno a 1, en este caso por encima de dicho valor. Esto lo hemos testeado multiplicando los λ_i obtenidos del tensor de deformación por un factor mayor a 1 que simularía los valores propios en situaciones con σ cada vez mayor, es decir más no lineales. Y lo que ocurre es que los r_1 cada vez se hacen mayores con el aumento de dicho factor, dando valores de r_1 muy grandes e incorrectos ($r_1 \gg 1$). Para los λ_i pequeños, de puntos no colapsados, la expresión (1.30) es exacta y no da ningún problema. El inconveniente de que r_1 sea mucho mayor al valor que debería es que haría colapsar antes esa dirección del espacio. Pero como esto sólo ocurre con los λ_1 que producen colapso ($\lambda_1 > 1$ y por lo tanto $r_1\lambda_1 > 1$), el problema lo soluciona el tratamiento de cruce de capas que encuentra el momento x_1 en el que se dio ese cruce de capas cuando los λ_i eran suficientemente bajos ($x_1\lambda_i$). Cuanto mayores sean los valores propios, x_1 será más pequeño. Lo mismo ocurre con las direcciones 2 y 3. Con lo cual, en este caso la función r_i no necesita ninguna modificación y se usa la expresión (1.30) con el resto (1.31). Como vemos, es importante el valor sobre todo de r_1 porque es el que inicia la rutina para el tratamiento de cruce de capas.

2. Caso $\lambda_i < 0$: recordemos que en este caso los r_i son inferiores a 1 y que, al contrario que para λ_i positivos, se cumple que $r_1 < r_2 < r_3$. Si usamos la expresión (1.30) tenemos valores de r_1 muy grandes, mayores que 1, cuando deberían ser menores. Con lo cual, al ser $\lambda_1 < 0$ y el más pequeño en valor absoluto, podría dar cruce de capas negativo ($r_1\lambda_1 \leq -1,15$) cuando no debería (λ_1 pequeños). Si usamos los restos R_1 y R_2 pueden darse valores de r_1 muy cercanos a 0 e incluso negativos. Con lo cual, vemos que el resto tiene un valor suficientemente importante como para cambiar el valor de r_i . Entonces aplicamos la condición de que cuando el resto es más pequeño que la suma de todos los órdenes $|R| < |r_i - 1 - R|$ se use la expresión (1.30) y si no una de las aproximaciones. Usando el resto (1.31) los valores de r_i son inferiores a 1, pero algunos valores de r_1 son mayores que los de r_2 y r_3 , lo que no puede ser. Estos valores incorrectos son de puntos que cumplen el criterio y no son substituidos por la aproximación. Si usamos los restos R_1 y R_2 con $r_{i,1}$, hay puntos donde se toma la aproximación donde los r_1 son muy pequeños o negativos,

pero con $r_{i,2}$ dan valores cercanos y por debajo de 1 donde se cumple $r_1 < r_2 < r_3$. Con lo cual, podemos decir que los restos buenos en este caso son R_1 y R_2 y la aproximación buena es $r_{i,2}$. Pero si aumentamos los λ_i encontramos $r_2 > 1$ que podrían dar cruce de capas negativo en la dirección 2 cuando no deberían. El problema principal está en la no convergencia de la serie (1.30) cuando los $\lambda_i < 0$ son grandes en valor absoluto (Makler et al., 2001). Entonces aplicamos el criterio de que cuando $Q = \left| \frac{4^{\text{orden}}}{3^r \text{orden}} \right|$ sea inferior o igual a una cantidad que fijamos P , usamos la expresión (1.30) y si no la aproximación. Considerando que $P = 1$ se solucionan todos los problemas comentados teniendo que $|r_i - r_{i,aprox}| < 10^{-1}$ para cualquier punto. El resto R_1 es mejor que el R_2 porque hace que haya más puntos con menor diferencia respecto la aproximación. Finalmente tenemos que para este caso se usa la expresión de r_i (1.30) con R_1 (3.4) cuando se cumple que $Q \leq 1$ y $|R| < |r_i - 1 - R|$, si no se usa la aproximación $r_{i,2}$ (3.3).

3. Caso $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_{2,3} < 0$: en este caso $r_1 < 1$, ya que λ_2 y λ_3 son negativos, y r_2 y r_3 pueden ser mayores o menores que 1 según los otros λ_i . Usando la expresión (1.30) tenemos $r_1 \gg 1$ pudiendo dar cruce de capas positivo que no debería ocurrir para λ_1 pequeños. Con los restos R_1 y R_2 da valores de r_1 muy pequeños o negativos que darían valores de $r_1 \lambda_1$ incorrectos, evitando el colapso de λ_1 grandes. Añadiendo el criterio $|R| < |r_i - 1 - R|$ la aproximación $r_{i,1}$ da valores muy bajos de r_1 para cualquier resto, mientras que $r_{i,2}$ da valores más coherentes. Por lo tanto tenemos que $r_{i,2}$ es mejor. Si aplicamos el criterio de $Q \leq P$ no soluciona nada por mucho que disminuyamos el valor de P , esto es debido a que hay puntos con $\lambda_1 > 1$ que tienen $Q \sim 0,1 - 0,2$, dando $r_1 < 0$ que evitarían el colapso y darían $r_1 \lambda_1$ incorrectos. Esto ocurre para todos los residuos y no tiene sentido bajar $P \rightarrow 0$ porque es como si no se aplicase casi nunca. Entonces está claro que para λ_i grandes en valor absoluto debemos usar la aproximación $r_{i,2}$. Para $\sigma \sim 1,20$ (régimen no lineal) la diferencia máxima $|r_i - r_{i,aprox}|$ es 10^{-1} y podemos intuir que a partir de aquí ya habrá puntos con r_i (1.30) incorrecta, pero como r_i es tan sensible a la combinación de los λ_i y como los criterios de Q y R no sirven, no podemos determinar la zona en la que la expresión (1.30) deja de ser válida. Por lo tanto usaremos siempre la aproximación, ya que para el régimen lineal (λ_i pequeños) la diferencia $|r_i - r_{i,aprox}|$ es pequeña ($10^{-3} - 10^{-4}$).
4. Caso $\lambda_{1,2} > 0$ y $\lambda_3 < 0$: ocurre lo mismo que en el caso anterior. Por lo tanto, usamos siempre la aproximación.

$$r_i(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = \begin{cases} \lambda_i > 0 : r_i \text{ dado por (1.30) con } R \text{ dado por (1.31)} \\ \lambda_i < 0 : r_i \text{ dado por (1.30) con } R \text{ dado por (3.4) si } |R| < |r_i - 1 - R| \text{ y } Q \leq 1 \\ \text{si no, } r_i \text{ dado por (3.3)} \\ \lambda_1 > 0 \text{ y } \lambda_{2,3} < 0 : r_i \text{ dado por (3.3)} \\ \lambda_{1,2} > 0 \text{ y } \lambda_3 < 0 : r_i \text{ dado por (3.3)} \end{cases} \quad (3.6)$$

3.3. Cruce de capas: dependencia en el modelo cosmológico

En esta sección vemos la diferencia entre hacer el tratamiento del cruce de capas considerando un universo dominado por la materia (UDM) o considerando un universo Λ CDM. Tenemos que el factor que relaciona las fluctuaciones de densidad en distinto tiempo (1.21) viene dado por la expresión (2.24), con lo cual si dividimos los cocientes de ambos modelos tenemos que

$$\frac{[D(a_i)/D(a_0 = 1)]_{\Lambda\text{CDM}}}{[D(a_i)/D(a_0 = 1)]_{\text{UDM}}} = \frac{(x_i)_{\Lambda\text{CDM}}}{(x_i)_{\text{UDM}}} = \frac{(x_i)_{\Lambda\text{CDM}}}{a_i}, \quad (3.7)$$

donde hemos considerado el mismo instante de tiempo a_i y sabemos que en un UDM el factor de crecimiento es proporcional al factor de escala $D(a) \propto a$, por lo tanto $(x_i)_{\text{UDM}} = a_i$. En la figura 3.4 podemos ver representados $(x_i)_{\text{UDM}}$ y $(x_i)_{\Lambda\text{CDM}}$ en función del factor de escala, donde x_i muestra el ritmo al que crecen las fluctuaciones de densidad.

Cuanto más grande sea x_i , menos habrán cambiado las fluctuaciones de densidad desde el instante a_i al presente. En la figura 3.4 podemos ver que $(x_i)_{\Lambda\text{CDM}} > (x_i)_{\text{UDM}}$, lo que significa que en Λ CDM las estructuras colapsan más tarde que en UDM. Pero en nuestro caso que tenemos un mismo x_i , entonces $(a_i)_{\Lambda\text{CDM}} < (a_i)_{\text{UDM}}$, es decir que para que las fluctuaciones de densidad sean x_i veces más pequeñas que en la actualidad tenemos que ir más atrás en el tiempo porque tardan más en crecer. Con lo cual, $1 - r_i \lambda_i = 0,2 a_i$ será más pequeño para un universo Λ CDM que para un UDM y $(r_i \lambda_i)_{\Lambda\text{CDM}} > (r_i \lambda_i)_{\text{UDM}}$. En la tabla 3.3 se muestran ejemplos de cada caso según el signo de λ_i para una realización de una caja $L = 100$ Mpc/h con $N = 10$ modos. Como podemos ver, sólo se puede dar cruce de capas (positivo o negativo) en una dirección i si en las direcciones con λ mayor en valor absoluto se ha dado. Los x_i corresponden al factor de escala en un UDM y los a_i al factor de escala en un universo Λ CDM.

Debido a que x_i no puede ser 0, porque se deben cumplir (2.21-2.23), a_i tampoco lo puede ser

porque se debe cumplir (2.24). Entonces $r_i \lambda_i$ nunca será igual a 1, de esta forma (1.29) siempre es válida, y tenemos que $-1,15 \leq r_i \lambda_i < 1$ y, por lo tanto, que $-3 < \nabla_{\vec{q}} \vec{d}_r \leq 3,45$.

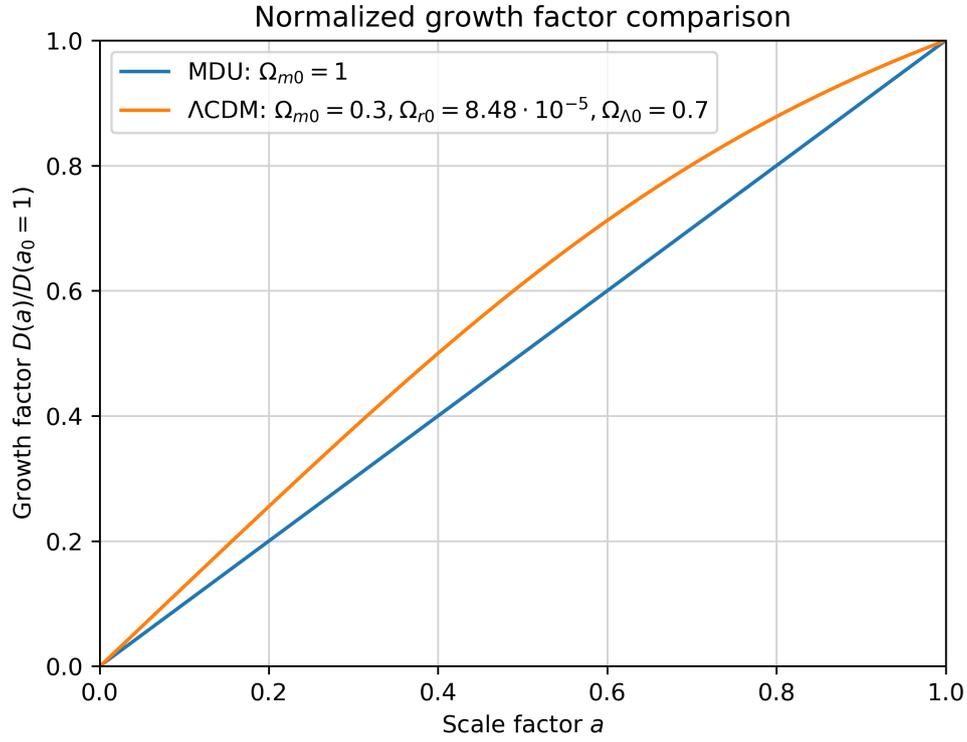


Figura 3.4: Comparación entre cocientes x_i en un UDM y un universo Λ CDM en función de a_i .

| λ_1 | λ_2 | λ_3 | x_1 | x_2 | x_3 | a_1 | a_2 | a_3 | $r_1 \lambda_1$ | $r_2 \lambda_2$ | $r_3 \lambda_3$ |
|-------------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2.739 | 1.920 | 0.996 | 0.233 | 0.292 | 0.476 | 0.183 | 0.229 | 0.380 | 0.963 | 0.954 | 0.924 |
| 2.639 | 1.027 | 0.101 | 0.277 | 0.586 | - | 0.217 | 0.476 | - | 0.957 | 0.905 | 0.160 |
| 0.881 | 0.494 | 0.039 | 0.800 | - | - | 0.699 | - | - | 0.860 | 0.627 | 0.058 |
| -0.278 | -1.845 | -2.227 | - | - | - | - | - | - | -0.184 | -1.15 | -1.15 |
| 1.209 | -0.371 | -1.505 | 0.822 | - | - | 0.726 | - | - | 0.855 | -0.339 | -1.15 |
| 0.694 | -0.096 | -1.494 | - | - | - | - | - | - | 0.556 | -0.084 | -1.15 |
| 2.005 | 1.214 | -0.028 | 0.360 | 0.541 | - | 0.284 | 0.435 | - | 0.943 | 0.913 | -0.048 |
| 1.317 | 0.599 | -1.152 | 0.648 | - | - | 0.535 | - | - | 0.893 | 0.567 | -1.15 |
| 0.665 | 0.054 | -1.194 | - | - | - | - | - | - | 0.559 | 0.050 | -1.15 |

Cuadro 3.3: Valores propios del tensor de deformación lineal y sus respectivos x_i , a_i y $r_i \lambda_i$.

3.4. Campos de densidad y de desplazamiento según la CZA

Finalmente, a partir de los resultados de la sección anterior (3.3), podemos obtener los campos de densidad y de desplazamiento que eran el objetivo de este trabajo. Lo hemos hecho para un universo Λ CDM con parámetros cosmológicos $\Omega_{m0} = 0,3$, $\Omega_{r0} = 8,48 \cdot 10^{-5}$ y $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7$. Teniendo en cuenta que la separación entre puntos de la malla por definición es $\Delta = L/(npt - 1)$ y la expresión vista anteriormente $\Delta = \lambda_r/f$, llegamos a que necesitamos el número de puntos (o celdas) $npt = f \cdot N + 1$ en una dimensión para calcular la integral numérica (2.29) que proporciona el vector desplazamiento. Por lo tanto, considerando $f = 20$ y $N = 10$ necesitamos una malla con $(npt)^3 \sim 8 \cdot 10^6$ puntos. Usamos sólo $N = 10$, que son $(2N + 1)^3 = 9261$ modos y $n = 4630$ modos independientes, porque usar más implicaría muchas más horas de cómputo. Pero para extraer información más relevante deberíamos aumentar la resolución mediante el aumento del número de modos para que contribuyeran las escalas más pequeñas. Necesitamos pues utilizar técnicas de programación ventajosas como las *Fast Fourier Transforms* (FFT) para generar el campo gaussiano y obtener el campo de desplazamiento.

Teniendo en cuenta la expresión (2.29) obtenemos el vector desplazamiento en un punto con coordenadas lagrangianas \vec{q} calculando la integral como la suma de las contribuciones de los puntos \vec{q}' sobre el punto \vec{q} . Hemos visto en la sección anterior que $-3 < \nabla_{\vec{q}} \vec{d}_r \leq 3,45$, con lo cual la contribución en valor absoluto de cada celda con punto central \vec{q}' es del orden

$$\sim \frac{1}{4\pi} \frac{|\vec{\nabla}_{\vec{q}'} \vec{d}_r|}{|\vec{q} - \vec{q}'|^2} d^3 \vec{q}' \lesssim \frac{1}{4} \frac{d^3 \vec{q}'}{|\vec{q} - \vec{q}'|^2}, \quad (3.8)$$

donde hemos tenido en cuenta que el diferencial de volumen $d^3 \vec{q}' = \Delta^3 = 0,125 \text{ (Mpc/h)}^3$, ya que $L = 100 \text{ Mpc/h}$, $N = 10$ y $f = 20$. Lógicamente los puntos más cercanos a \vec{q} son los que contribuyen mayormente al valor de $\vec{d}(\vec{q})$.

| q_1 | q_2 | q_3 | d_{r1} | d_{r2} | d_{r3} | x_1 | x_2 | x_3 | δ |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|----------|
| 42.0 | 60.0 | 58.0 | -0.258 | -0.158 | 1.471 | 41.742 | 59.842 | 59.471 | 10.524 |
| 56.0 | 44.0 | 60.0 | 0.995 | -0.939 | 0.202 | 56.995 | 43.061 | 60.202 | -0.452 |

Cuadro 3.4: Coordenadas lagrangianas \vec{q} , vector de desplazamiento \vec{d}_r y coordenadas comóviles eulerianas \vec{x} en unidades de Mpc/h y la correspondiente fluctuación en la densidad de dos puntos distintos, para $\sigma = 0,46$ ($z = 4$).

| q_1 | q_2 | q_3 | d_{r1} | d_{r2} | d_{r3} | x_1 | x_2 | x_3 | δ |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|----------|
| 60.0 | 54.0 | 46.0 | 0.495 | -2.241 | 0.297 | 60.495 | 51.759 | 46.297 | 0.044 |
| 43.5 | 50.5 | 56.0 | -3.876 | 0.650 | -2.791 | 39.624 | 51.150 | 53.209 | -0.812 |
| 40.0 | 43.0 | 47.0 | 2.971 | 0.469 | -1.208 | 42.971 | 43.469 | 45.792 | 454.559 |

Cuadro 3.5: Coordenadas lagrangianas \vec{q} , vector de desplazamiento \vec{d}_r y coordenadas comóviles eulerianas \vec{x} en unidades de Mpc/h y la correspondiente fluctuación en la densidad de tres puntos distintos, para $\sigma = 1,88$ ($z = 0$).

| q_1 | q_2 | q_3 | d_{r1} | d_{r2} | d_{r3} | x_1 | x_2 | x_3 | δ |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|--------|--------|--------|----------|
| 50.5 | 49.5 | 40.0 | 1.517 | -2.700 | -3.552 | 52.017 | 46.800 | 36.448 | 8694.293 |
| 54.0 | 45.5 | 50.5 | 0.437 | -2.435 | -4.094 | 54.437 | 43.065 | 46.406 | -0.877 |

Cuadro 3.6: Coordenadas lagrangianas \vec{q} , vector de desplazamiento \vec{d}_r y coordenadas comóviles eulerianas \vec{x} en unidades de Mpc/h y la correspondiente fluctuación en la densidad de dos puntos distintos, para $\sigma = 2,49$ ($z = -0,9$).

En las tablas 3.5, 3.4 y 3.6 se muestran las coordenadas iniciales lagrangianas \vec{q} , el vector desplazamiento real \vec{d}_r , las coordenadas comóviles eulerianas \vec{x} y la fluctuación de la densidad obtenida con la CZA en algunos puntos para $\sigma = 1,88$, $\sigma = 0,46$ y $\sigma = 2,49$, que según los parámetros L y N introducidos corresponden a los *redshifts* $z = 0$, $z = 4$ y $z = -0,9$ (futuro) respectivamente. Para obtener las coordenadas propias simplemente tenemos que multiplicar las comóviles \vec{x} por el factor de escala $a(z)$ (1.1).

Recordemos que el campo de densidad puede tener unos valores de $\delta \in (-1, \infty)$, donde $\delta = -1$ significa el vacío ($\rho = 0$) y $\delta = 0$ significa que la densidad es la misma que la del *background* ($\rho = \rho_b$). Como podemos ver para $\sigma = 1,88$ ($z = 0$) tenemos el primer punto donde la densidad es prácticamente la del *background* ($\delta = 0,044$), el segundo punto que representa un vacío donde la densidad tiende a ser nula ($\delta = -0,812$) y el tercer punto con una densidad muy elevada que representa un nudo de la red cósmica. Para $\sigma = 0,46$ ($z = 4$) no encontramos valores tan extremos de δ debido a que nos acercamos más al régimen lineal donde la materia está distribuida más homogéneamente. El valor de $\delta = 10,524$ es uno de los más grandes que encontramos y $\delta = -0,452$ uno de los más pequeños. Cuanto mayor es la no linealidad mayores

son los valores que puede alcanzar la fluctuación de densidad δ positivamente y más cercanos a $\delta = -1$ negativamente (en este caso $\delta = -0,9$ debido al parámetro s_2 usado), como podemos ver para $\sigma = 2,49$ con un valor máximo encontrado de $\delta = 8694,293$ y un mínimo de $\delta = -0,877$.

Hemos calculado la raíz del error cuadrático medio (RMSE) entre el desplazamiento lineal \vec{d}_a calculado mediante (2.18) y el desplazamiento lineal \vec{d}_b calculado si en la expresión (2.29) introducimos $F(\vec{q}) = \vec{\nabla}_{\vec{q}} \vec{d} = -\sum_{i=1}^3 \lambda_i$, y obtenemos:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\langle |\vec{d}_b - \vec{d}_a|^2 \rangle}{\langle |\vec{d}_a|^2 \rangle}} \lesssim 0,1, \quad (3.9)$$

lo que significa que es del orden o menor al 10% para cualquier σ (*redshift*). Este valor nos da una idea de lo buenos que son los cálculos, porque ambos deben ser siempre iguales, y por lo tanto es el error numérico en la integración. En cambio, si calculamos la RMSE entre el vector desplazamiento según la CZA y el desplazamiento lineal (correspondiente a la ZA) sí que cambia según σ , porque a medida que pasa el tiempo las no linealidades crecen haciendo diverger ambos vectores. Para $\sigma = 1,88$ ($z = 0$) encontramos que $\text{RMSE} = 0,5$, para $\sigma = 0,46$ ($z = 4$) que $\text{RMSE} = 0,1$ y para $\sigma = 2,49$ ($z = -0,9$) que $\text{RMSE} = 0,6$, con lo cual la diferencia entre el campo de desplazamiento de la ZA y la CZA es del 50%, el 10% y el 60% respectivamente. En el caso con $\sigma = 0,46$ la RMSE es del orden del error numérico, por lo que es compatible con cero.

3.5. Algoritmo de resolución de la CZA

El código elaborado en Fortran 90 para determinar el algoritmo general de la CZA cuenta con distintos parámetros de entrada. Por un lado tenemos el tamaño de la caja L en la que vamos a hacer la realización, así como el número de modos empleados N y el número de celdas que forman la malla en la que dividimos el volumen considerado. Por otra parte tenemos los parámetros s_1 y s_2 que gobiernan el cruce de capas, comentado en la sección 2.3, y el *redshift* al que queremos hacer la realización. Existe la opción de ejecutar el código para un universo dominado por materia ($\Omega_m = 1$) y para un universo Λ CDM con parámetros cosmológicos Ω_{m0} , Ω_{r0} y $\Omega_{\Lambda0}$.

Primero se genera el campo gaussiano en el espacio transformado $\delta_{\vec{k}}$ a partir de las expresiones (2.4), (2.6) y (2.10) y, con éste, se obtienen el campo gaussiano en el espacio real δ_l (2.14),

el vector desplazamiento lineal \vec{d} (2.18) y el tensor de deformación lineal (2.19) en todas las celdas de la malla. Estas cantidades son las correspondientes a la actualidad debido a que se usa el espectro de potencias actual de la materia oscura fría (2.11). Seguidamente se obtienen los valores propios λ_i del tensor de deformación lineal en cada celda a partir de la diagonalización de este último.

Entonces, a partir de estos valores de λ_i , se procede a resolver la CZA. Se aplica el tratamiento del cruce de capas (2.20) teniendo en cuenta que la función r_i viene dada por (3.6). Para un universo Λ CDM, cuando en una dirección i se produce el cruce de capas se encuentra el factor x_i mediante las expresiones (2.21-2.23), que permiten obtener el factor de escala a_i en el que ocurre a partir de la expresión (2.24). Finalmente, con los valores de $(1 - r_i \lambda_i)^*$ se obtienen los campos de densidad (2.27) y de desplazamiento (2.29) según la CZA y, con este último, se llega a la posición final de las celdas (coordenadas eulerianas) a partir de la expresión (2.28).

Capítulo 4

Conclusiones del trabajo y sus posibles aplicaciones

Como muestran los autores de la aproximación de Zeldovich completa (CZA) esta aproximación mejora la original de Zeldovich (ZA), debido a que es exacta a segundo orden a diferencia de la ZA que lo es a primer orden porque se basa en la teoría lineal. De acuerdo con esto, la convierte en mejor para determinar los campos de densidad y de desplazamiento en el régimen no lineal. La función r_i es importante debido a que es lo que caracteriza la CZA y la distingue de la ZA. En este trabajo hemos ajustado la expresión de esta función, que es exacta para λ_i positivos pero da problemas cuando hay λ_i negativos, con tal de poder aplicar el tratamiento del cruce de capas que se produce cuando se comprime la materia y se forman las estructuras. El aplicar este efecto hace que la expresión de la CZA sea siempre válida, porque limita superiormente el valor de $r_i\lambda_i$, a diferencia de si no tuviésemos en cuenta el cruce de capas que para valores mayores a $r_i\lambda_i = 1$ podríamos obtener densidades negativas. Por lo tanto, podemos calcular el campo de densidad y el de desplazamiento en cualquier punto del volumen considerado, donde la obtención de este último con la CZA es algo que no se había hecho hasta la fecha. La resolución aplicada a la solución del problema es baja, es decir que no hemos tenido en cuenta las escalas más pequeñas, ya que hemos usado un número de modos bajo para el volumen de interés. Esto es debido al alto coste computacional en cuanto a tiempo, pero para el objetivo de este trabajo no es necesaria más resolución ya que sólo estamos poniendo a punto la CZA y no estudiando la estructura a gran escala del universo. De esta forma, se pueden mejorar los resultados invirtiendo más horas de cálculo o, como opción óptima, mejorar las técnicas de programación usadas en la generación del campo gaussiano y el cálculo del vector desplazamiento. Existen programas como PATCHY

de Francisco-Shu Kitaura que son mucho más eficientes al realizar estos cálculos, con el que he empezado a trabajar pero se escapa del tiempo disponible en la realización de este trabajo. En resumen, este trabajo determina el algoritmo general de la CZA con sus parámetros libres.

El siguiente paso es determinar los valores óptimos de estos parámetros libres (s_1, s_2) y su dependencia en los parámetros cosmológicos usando simulaciones numéricas, así como la comprobación de cómo de buena es la CZA mediante la comparación con estas simulaciones de N-cuerpos, debido a que son las más precisas pero con un elevado coste computacional. Otro objeto de estudio futuro tiene que ver con el hecho de que en las realizaciones de la estructura a gran escala, aparte de la generación del campo hay que emplazar los halos de materia oscura de acuerdo con la función de masa cósmica local (FMCL), y se ha visto (Balaguera-Antolínez et al., 2020) que la dependencia de ésta en el campo de marea es importante. Entonces se podrían obtener analíticamente funciones de masa cósmica condicionada (Rubiño-Martín et al., 2008) de forma que incluya la dependencia en el campo de marea lineal. Luego, usando la CZA para obtener el campo de marea real en función del lineal se obtendría la FMCL como función del campo de marea local.

Bibliografía

Audit, E., & Alimi, J.-M. 1996, A&A, 315, 11

Balaguera-Antolínez, A., et al. 2020, MNRAS, 491, 2565

Betancort-Rijo, J., & López-Corredoira, M. 2000, ApJ, 534, L117

Betancort-Rijo, J., & López-Corredoira, M. 2002, ApJ, 566, 623

Betancort-Rijo, J. 2019, Comunicación personal

Betancort-Rijo, J. 2020, Comunicación personal

Bouchet, F. R., Colombi, S., Hivon, E., & Juszkiewicz, R. 1995, A&A, 296, 575

Doroshkevich, A. G. 1970, Astrofizika, 6, 581

Heath, D. J. 1977, MNRAS, 179, 351

Hui, L., & Bertschinger, E. 1996, ApJ, 471, 1

Kitaura, F.-S., & Heß, S. 2013, MNRAS, 435, L78

Makler, M., Kodama, T., & Calvão, M. O. 2001, ApJ, 556, 88

Padmanabhan, T. 1993, Structure formation in the Universe, Cambridge University Press, Cambridge

Peebles, P. J. E. 1980, The Large-Scale Structure of the Universe, Princeton University Press, Princeton

Reisenegger, A., & Miralda-Escudé, J. 1995, ApJ, 449, 476

Rubiño-Martín, J. A., Betancort-Rijo, J., & Patiri, S. G. 2008, MNRAS, 386, 2181

Sánchez-Conde, M. A., Betancort-Rijo, J., & Prada, F. 2007, MNRAS, 378, 339

Zeldovich, Ya. B. 1970, A&A, 5, 84