Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Elena Espino Sánchez

Teoremas de interpolación en espacios de Lebesgue

Interpolation theorems in Lebesgue spaces

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, junio de 2021

DIRIGIDO POR
Lourdes Rodríguez Mesa

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi familia, especialmente a mis padres, por brindarme la oportunidad de vivir esta experiencia y hacerme crecer como matemática y como persona.

A todos los profesores y compañeros que me han ayudado en esta exigente, aunque bonita carrera. Y en especial, a mi tutora Lourdes, por su tiempo y dedicación, su admirable capacidad para enseñar matemáticas y por ser, para mí, un ejemplo a seguir como profesora y persona.

Elena Espino Sánchez
La Laguna, 9 de junio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria analizamos los dos teoremas de interpolación clásicos: el Teorema de Riesz-Thorin y el Teorema de Marcinkiewicz. En el estudio de estos resultados son fundamentales los espacios de Lebesgue en espacios de medidas, tanto los clásicos como los espacios de Lebesgue de tipo débil. Desarrollamos los principales aspectos de la teoría en torno a las clases de Lebesgue. Entre ellos, probamos las desigualdades de Hölder y de Minkowski y establecemos que los espacios de Lebesgue son completos. Asimismo estudiamos diferentes relaciones entre los espacios de Lebesgue y algunos resultados de aproximación. La convolución en los espacios de Lebesgue es otro de los temas que abordamos resaltando la importancia de los núcleos de sumabilidad. Por último demostramos los teoremas de interpolación mencionados y mostramos su utilidad en la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood.

Palabras clave: *Interpolación – Espacios de Lebesgue – Desigualdad de Hölder – Desigualdad de Minkowski – Función de distribución – Operadores de tipo fuerte – Operadores de tipo débil – Función maximal de Hardy-Littlewood.*

Abstract

In this work we analyze the two classical interpolation theorems: The Riesz-Thorin Theorem and the Marcinkiewicz Theorem. In the analysis of these two results the Lebesgue spaces on measure spaces are essential, both the classical and the weak type ones. We develop the main aspects in the theory of the Lebesgue classes. Among them, we prove the Hölder and the Minkowski inequalities and establish that the Lebesgue spaces are complete. In addition we study different relations between Lebesgue spaces and give some approximation results. The convolution on the Lebesgue spaces is another of the issues we address, highlighting the importance of the summability kernels. Finally we prove the aforementioned interpolation theorems and show their utility in the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator.

Keywords: *Interpolation – Lebesgue spaces – Hölder inequality – Minkowski inequality – Distribution function – Strong type operators – Weak tpe operators – Hardy-Littlewood maximal function.*

Contenido

Introducción

La teoría de interpolación de operadores en espacios de Lebesgue es un tema de gran importancia en análisis y, en concreto, encuentra numerosas aplicaciones en el análisis funcional y armónico. El primer resultado de interpolación de operadores aparece en el año 1911 con un resultado de Schur que afirma que si T es un operador lineal y continuo en los espacios de Lebesgue discretos ℓ^1 y ℓ^∞, entonces también es acotado de ℓ^p en sí mismo, para todo $p \geq 1$. Un par de años más tarde Young establece un resultado del mismo tipo para operadores definidos a partir de un núcleo $\mathscr{K}$ y en el contexto de los espacios de Lebesgue continuos. El desarrollo de la teoría de la medida e integración en diferentes espacios y los problemas desarrollados en este campo han puesto de manifiesto la importancia que tiene el desarrollo de la interpolación de operadores. Durante la primera mitad del siglo XX, matemáticos de la talla de Riesz, Thorin y Marcinkiewicz extendieron los resultados anteriores a operadores lineales y sublineales entre espacios de Lebesgue generales, y a partir de sus trabajos, la teoría de interpolación ha conseguido una importante evolución.

El objetivo principal en esta memoria es analizar los dos teoremas de interpolación clásicos: el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin y el de Marcinkiewicz. En ellos están involucrados los espacios de Lebesgue clásicos, así como los espacios de Lebesgue de tipo débil, a los que dedicamos también parte de nuestro estudio.

Hemos dividido el trabajo en tres capítulos. El primero de ellos lo dedicamos a hacer un repaso de los principales aspectos de la teoría de la medida necesarios para desarrollar el resto de la memoria. Señalamos que en el tercer curso del actual Grado de Matemáticas existe una asignatura obligatoria de seis créditos, Medida e Integración, que se dedica al desarrollo de la teoría de la medida y la integración abstracta. Es por ello que en este primer capítulo solo presentamos los resultados e indicamos los textos donde pueden encontrarse desarrollados. Después de introducir el concepto de espacios de medida y presentar sus propiedades básicas, describimos la técnica habitual para construir una medida a partir de una medida exterior, como así sucede en el caso de la medida de Lebesgue, y que se sintetiza en el Teorema de Carathéodory. Pasamos a continuación a dar la noción de función medible, mostrando, en particular, los resultados de aproximación por funciones simples tan útiles a la hora de obtener conclusiones sobre funciones medibles generales. Por último, introducimos el concepto de integración abstracta y recogemos los principales teoremas de convergencia: el Teorema de la convergencia monótona, el Lema de Fatou y el Teorema de la convergencia dominada, que resaltan, en el caso de $\mathbb{R}^n$, las ventajas de la integración de Lebesgue frente a la de Riemann.

Es en el segundo capítulo donde desarrollamos la teoría fundamental en torno a los espacios de Lebesgue. En primer lugar tratamos los espacios de Lebesgue clásicos sobre un espacio de medida general, la clase que denotamos por $L^p(X,\mu)$, $0 < p \leq \infty$. Probamos en primer lugar dos de las desigualdades más conocidas, la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Minkowski. Esta última nos permite demostrar que el espacio $L^p(X,\mu)$ es un espacio de Banach cuando $p \geq 1$. En el caso de que $0 < p < 1$ establecemos que es un espacio métrico completo. Además presentamos diversas e importantes relaciones entre diferentes espacios de Lebesgue, así como algunos resultados de aproximación en esta clase de funciones.

En el siguiente apartado definimos y analizamos los principales aspectos de los espacios de Lebesgue de tipo débil, una clase más amplia que permite obtener conclusiones a partir de condiciones menos restrictivas. Para ello introducimos primero la conocida función de distribución y mostramos sus principales propiedades. Asimismo, al igual que con los espacios de Lebesgue clásicos, analizamos algunas relaciones útiles entre este tipo de espacios de Lebesgue y presentamos una desigualdad de tipo Hölder generalizada en este contexto.

La última sección del capítulo se dedica al estudio de la convolución para las funciones en los espacios de Lebesgue introducidos, una operación que permite "regularizar" en cierto sentido las funciones implicadas. Principalmente examinamos bajo qué condiciones la convolución de dos funciones en determinados espacios de Lebesgue nos devuelve una función que también pertenece a una clase de Lebesgue. Otra cuestión que tratamos en este apartado es la de los núcleos de sumabilidad o aproximaciones de la identidad, funciones que, en cierto sentido, hacen el papel de elemento unidad para la operación de convolución. Estos núcleos son esenciales en la obtención de resultados de aproximación en espacios de Lebesgue.

El capítulo tres lo dedicamos al desarrollo de los dos teoremas de interpolación básicos en el contexto de los espacios de Lebesgue considerados: el de Riesz-Thorin, que utiliza el método de variable compleja, y el de Marcinkiewicz, que usa el método real. Exponemos con detalle la demostración de ambos teoremas y vemos cómo las condiciones en cada uno hacen de ellos resultados independientes. Como muestra de la utilidad de los teoremas de interpolación mostramos la acotación para el conocido operador maximal de Hardy-Littlewood, al que dedicamos la última sección del capítulo.

Para el desarrollo de este trabajo nos hemos apoyado en las referencias indicadas en la bibliografía, considerando, además de las secciones propias de cada tema, algunos de los ejercicios propuestos en ellas. En concreto, nos hemos guiado principalmente por los textos de Folland [3], de Grafakos [4] y de Stein y Shakarchi [11] para el estudio de los espacios de Lebesgue y los teoremas de interpolación, completándolo con las referencias [5] y [9]. Para las cuestiones relacionadas con la teoría de la medida, las obras de Cohn [1] y de Stein y Shakarchi [12] han sido las que hemos consultado. Por último, señalamos que el libro de Duoandikoetxea [2] ha sido también un texto al que hemos acudido para el análisis de la función maximal de Hardy-Littlewood.

1

Elementos básicos de teoría de la medida

Uno de los conceptos matemáticos que presenta una larga historia es el de medida, una noción que surge de la necesidad de calcular longitudes, áreas y volúmenes. El cálculo integral aparece como una herramienta útil para tal fin cuando las regiones están acotadas por curvas o superficies que son, en cierto sentido, regulares, pero no resulta adecuado cuando tratamos conjuntos más complejos. A partir de la segunda mitad del siglo XIX, importantes matemáticos como Cantor, Peano o Borel desarrollan una nueva teoría que generaliza el concepto de medida y permite abordar algunas cuestiones en diferentes áreas, por ejemplo, en probabilidad o en problemas físicos que involucran distribuciones de masas.

Una de las aportaciones fundamentales de esta teoría es la de ser la base del trabajo desarrollado por Lebesgue, a partir de su tesis en 1902, sobre una nueva noción de integración. Además de extender el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones, esta teoría de integración abstracta permitió resolver algunos problemas que presentaba la integral de Riemann, como el paso al límite de la integral o la validez del teorema fundamental del cálculo.

En este primer capítulo nuestro objetivo es presentar los principales elementos de la teoría de la medida abstracta que constituyen la base para definir los espacios de Lebesgue y analizar sus propiedades.

1.1. Espacios de medida

Comenzamos definiendo las familias de conjuntos que actuarán como conjunto dominio de una medida. Sean Ω un conjunto arbitrario no vacío y $\mathscr{A}$ una colección de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathscr{A}$ es una *σ-álgebra* cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$.

(ii) Para todo conjunto $A \in \mathscr{A}$, se tiene que $\Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.

(iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathscr{A}$, entonces se tiene que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$.

Al par $(\Omega, \mathscr{A})$ se le denomina *espacio medible* y a los conjuntos de $\mathscr{A}$, *conjuntos medibles*.
Es claro que la clase $\mathscr{P}(\Omega)$ constituida por todos los subconjuntos de Ω y $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ son σ-álgebras en Ω (la mayor y la menor σ-álgebra en Ω, respectivamente). Si Ω es un conjunto no numerable, la colección

$$\mathscr{A} = \Big\{A \subset \Omega : A \text{ ó } \Omega \setminus A \text{ es numerable}\Big\} \tag{1.1}$$

es también un ejemplo de σ-álgebra.

Asimismo es fácil ver que la intersección de cualquier familia de σ-álgebras en Ω es de nuevo una σ-álgebra. De aquí se sigue que si $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, entonces existe la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathscr{C}$, concretamente, la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathscr{C}$ (nótese que al menos existe una que lo cumple, a saber, $\mathscr{P}(\Omega)$). Esta mínima σ-álgebra, claramente única, se conoce como la σ-álgebra generada por $\mathscr{C}$ y se denota por $\sigma(\mathscr{C})$.

Esta última propiedad permite definir una familia importante de σ-álgebras. Supongamos que Ω es un espacio topológico. Se llama *σ-álgebra de Borel* en Ω a la generada por los conjuntos abiertos de Ω (equivalentemente, por la familia de los conjuntos cerrados en Ω). Se denota por $\mathscr{B}(\Omega)$ y a sus elementos se les denomina *conjuntos de Borel*. Es claro que $\mathscr{B}(\Omega)$ contiene a los abiertos y cerrados, así como a los conjuntos G_δ (intersecciones numerables de abiertos) y F_σ (unión numerable de cerrados). En el caso de $\Omega = \mathbb{R}^n$ con la topología usual se prueba que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ puede generarse a partir de la colección de todos los rectángulos en $\mathbb{R}^n$ de la forma $[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$, con $a_i<b_i$, $i=1,...,n$. En el caso unidimensional cuando consideramos la recta real extendida $\Omega=\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ definimos los conjuntos de Borel mediante $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})=\{A\subset\overline{\mathbb{R}}: A\cap\mathbb{R}\in\mathscr{B}(\mathbb{R})\}$.

Introducimos ahora el concepto de medida abstracta. Sea $(\Omega,\mathscr{A})$ un espacio medible. Una *medida en* Ω es una función $\mu:\mathscr{A}\longrightarrow[0,\infty]$ que verifica:

(i) $\mu(\emptyset)=0$;

(ii) es *numerablemente aditiva*, esto es, si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos disjuntos en $\mathscr{A}$, entonces $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$.

A la terna $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ se le denomina *espacio de medida*. Cuando $\mu(\Omega)<\infty$ decimos que μ es *finita* y, en particular, cuando $\mu(\Omega)=1$ la llamamos *medida de probabilidad*. Por otro lado, si $\mu(\Omega)=\infty$ pero podemos escribir $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, con $E_k\in\mathscr{A}$ y $\mu(E_k)<\infty$, entonces diremos que μ es *σ- finita*.

Algunos ejemplos de espacios de medida son los siguientes. Consideramos Ω un conjunto no vacío y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra en Ω. La función μ definida como $\mu(A)=m$, cuando A es un conjunto finito de m elementos y $\mu(A)=\infty$, en otro caso, es una medida que se conoce como *medida cardinal o de conteo*. Por otro lado, dado $x\in\Omega$, la *medida de Dirac* δ_x se define como sigue: para cada $A\in\mathscr{A}$, $\delta_x(A)=1$, si $x\in A$, y $\delta_x(A)=0$, cuando $x\notin A$. También puede verse fácilmente que si Ω es no numerable, $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra dada por (1.1) y μ es la función definida por $\mu(A)=0$, si A es numerable y $\mu(A)=1$, si $\Omega\setminus A$ es numerable, entonces $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida. Cuando Ω es un espacio topológico, se dice que μ es una *medida de Borel* cuando está definida en la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(\Omega)$.

En el siguiente resultado recogemos las propiedades básicas de las medidas.

Proposición 1.1. *([3, Theorem 1.8]) Sea $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) (Monotonía) Si $A,B\in\mathscr{A}$ y $A\subset B$, entonces $\mu(A)\le\mu(B)$.

(b) (Subaditividad) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$, entonces $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$.

(c) (Continuidad por debajo) Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$ una sucesión no decreciente, esto es, $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots$. Si $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ entonces

$$\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

(d) (Continuidad por arriba) Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{A}$ una sucesión no creciente, esto es, $A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots$. Si $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ y $\mu(A_1)<\infty$ entonces

$$\mu(A)=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k).$$

Observamos que la condición $\mu(A_1)<\infty$ en la propiedad (d) puede sustituirse por $\mu(A_k)<\infty$ para algún $k\in\mathbb{N}$, pues los primeros $k-1$ términos pueden eliminarse sin que afecte a la intersección. Además esta condición resulta necesaria pues puede ocurrir que $\mu(A_k)=\infty$, $k\in\mathbb{N}$, y sin embargo $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)<\infty$. Por ejemplo, cuando consideramos la medida cardinal en el espacio medible $(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ y tomamos $A_k=\{m\in\mathbb{N}: m\ge k\}$; entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\emptyset$.

En un espacio de medida $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, decimos que una propiedad se verifica *en μ-casi todo punto de* Ω (μ- c.t.p. Ω) cuando el conjunto de puntos de Ω donde no se cumple la propiedad tiene medida nula, es decir, cuando existe $N\in\mathscr{A}$ tal que $\mu(N)=0$ y contiene a todos los puntos que no verifican la propiedad. Si el conjunto Ω y la medida μ están claras en el contexto, se utiliza simplemente la notación c.t.p. para la expresión en casi todo punto.

Observamos que si $\mu(A)=0$ y $E\subseteq A$, entonces por la propiedad de monotonía, $\mu(E)=0$ siempre que $E\in\mathscr{A}$. Pero en general, E no tiene por qué ser un conjunto medible. Cuando en un espacio de medida la σ-álgebra contiene todos los subconjuntos de los conjuntos de medida nula se dice que el espacio de medida es *completo*. A partir de un espacio de medida es posible extender el dominio de la medida para conseguir un espacio de medida completo como se indica en el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *([3, Theorem 1.9]) Sea $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Consideramos $\mathscr{N}=\{N\in\mathscr{A}:\mu(N)=0\}$ y $\overline{\mathscr{A}}=\{A\cup E: A\in\mathscr{A}$ y $E\subseteq N$, para algún $N\in\mathscr{N}\}$. Entonces, $\overline{\mathscr{A}}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{A}$. Además existe una única medida $\overline{\mu}$ definida en $\overline{\mathscr{A}}$ que extiende a μ y tal que $(\Omega,\overline{\mathscr{A}},\overline{\mu})$ es un espacio de medida completo.*

Llamamos *compleción de* μ a la medida $\overline{\mu}$ y *compleción de* $\mathscr{A}$ *respecto a* μ a la σ-álgebra $\overline{\mathscr{A}}$. La medida $\overline{\mu}$ viene dada por $\overline{\mu}(A\cup E)=\mu(A)$, donde $A\in\mathscr{A}$ y $E\in\mathscr{N}$. Puede verse que es una buena definición pues si $A_1\cup E_1=A_2\cup E_2$ donde $A_1,A_2\in\mathscr{A}$ y $E_1,E_2\in\mathscr{N}$, entonces $A_1\subset A_2\cup E_2$ y, por tanto, $\mu(A_1)\leq\mu(A_2)+\mu(E_2)=\mu(A_2)$. Y de igual forma, $\mu(A_2)\leq\mu(A_1)$.

1.2. Medidas exteriores

En esta sección vamos a describir una de las técnicas usuales para construir medidas, entre ellas, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para motivar el procedimiento, supongamos que queremos calcular el área de una región acotada A del plano. Podemos pensar en dibujar una malla de rectángulos que rellene el plano y aproximar el área de nuestra región por debajo usando la suma de las áreas de los rectángulos que están contenidos en A, y por arriba mediante la suma de las áreas de aquellos que tengan intersección con A. Haciendo la malla cada vez más y más "fina" obtendremos el área "interior" y "exterior" de A, respectivamente. Y si el valor es común, tomaremos este como el área de nuestra región. La idea clave para extender este procedimiento es que partiendo del área exterior de A, podemos ver su área interior como el área de un rectángulo R que contenga a A menos el área exterior de $R\setminus A$.

La generalización abstracta del concepto de área exterior es la medida exterior. Sea Ω un conjunto no vacío. Una *medida exterior* en Ω es una función $\mu^*:\mathscr{P}(\Omega)\longrightarrow[0,\infty]$ que satisface:

(i) $\mu^*(\emptyset)=0$;

(ii) Si $A\subseteq B\subseteq\Omega$, entonces $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$;

(iii) Para cualquier colección numerable $\{A_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathscr{P}(\Omega)$ se tiene que $\mu^*(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)\leq\sum_{k=1}^\infty\mu^*(A_k)$.

De esta manera, una medida exterior en Ω es una función monótona y numerablemente subditiva definida de $\mathscr{P}(\Omega)$ en $[0,\infty]$ y cuyo valor en $\emptyset$ es 0. Observamos que una medida puede no ser una medida exterior; de hecho, una medida es una medida exterior si y solo si su dominio es la σ-álgebra $\mathscr{P}(\Omega)$. Por otro lado, una medida exterior no es, en general, una medida pues no verifica la aditividad numerable.

Se puede generar una medida exterior a partir de una familia $\mathscr{E}$ de subconjuntos de Ω sobre los que se tenga definida una cierta noción de medida como se recoge a continuación.

Proposición 1.3. *Sea* Ω *un conjunto no vacío. Consideramos* $\mathscr{E}\subset\mathscr{P}(\Omega)$ *y* $\rho:\mathscr{E}\longrightarrow[0,\infty]$ *una función tal que* $\emptyset,\Omega\in\mathscr{E}$ *y* $\rho(\emptyset)=0$. *Definimos la función* μ_ρ *mediante*

$$\mu_\rho^*(A)=\text{ínf}\Big\{\sum_{k=1}^\infty\rho(E_k):E_k\in\mathscr{E}\text{ y }A\subset\bigcup_{k=1}^\infty E_k\Big\},\quad A\subset\Omega.$$

Entonces, μ_ρ^* *es una medida exterior.*

La conocida medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ se construye de esta manera. Consideramos la clase $\mathscr{E}$ constituida por los rectángulos R en $\mathbb{R}^n$ de la forma $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$, donde I_i, $i=1,\ldots,n$, son intervalos abiertos y acotados en $\mathbb{R}$. El volumen de R es el producto de las longitudes de los intervalos I_i y lo denotamos por $\mathrm{vol}(R)$. La medida exterior de Lebesgue m^* se define entonces por

$$m^*(A)=\inf_{\{R_k\}_{k=1}^\infty\in\mathscr{E}_A}\sum_{k=1}^\infty\mathrm{vol}(R_i),\quad A\subseteq\mathbb{R}^n,\tag{1.2}$$

donde $\mathscr{E}_A$ está constituido por colecciones $\{R_k\}_{k=1}^\infty$ de rectángulos en $\mathscr{E}$ que recubren a A. Se puede probar que, en particular, la medida exterior de Lebesgue de un rectángulo coincide con su volumen ([1, Proposition 1.3.2]), y esto hace que podamos ver la medida exterior como una generalización del concepto intuitivo de "medida" en $\mathbb{R}^n$.

Como ya fue comentado, una medida exterior no es, en general, numerablemente aditiva y, por tanto, no es una medida. Sin embargo, a partir de una medida exterior μ^* podemos obtener una σ-álgebra $\mathscr{A}^*$ de manera que la restricción $\mu^*_{|\mathscr{A}^*}$ sí es una medida. Veamos cómo.

Sea μ^* una medida exterior en Ω. Decimos que $E\subseteq\Omega$ es μ^**-medible* si

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap(\Omega\setminus E)),\quad A\subseteq\Omega,$$

esto es, E es μ^*-medible si divide a cada subconjunto de Ω en dos partes de manera que la suma del tamaño de estas divisiones, medido respecto a μ^*, coincide con el tamaño del subconjunto.

Observamos que de la subaditividad se tiene la desigualdad $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus E))$, para cualesquiera $A, E \subset \Omega$, y que la desigualdad inversa es trivial cuando $\mu^*(A) = \infty$. Por lo tanto, E es μ^*-medible si, y solo si,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap (\Omega \setminus E)), \quad A \subseteq \Omega,\ \mu^*(A) < \infty.$$

Es claro que los conjuntos Ω y $\emptyset$ son conjuntos μ^*-medibles para cualquier medida exterior.

El resultado del siguiente teorema ([3, Theorem 1.11, p. 29]) es la clave para la construcción de muchas medidas.

Teorema 1.4 (Teorema de Carathéodory). *Sean Ω un conjunto y μ^* una medida exterior en Ω. Denotamos por $\mathscr{A}^*$ la colección de los conjuntos μ^*-medibles de Ω. Se tiene que $\mathscr{A}^*$ es una σ-álgebra y que la restricción de μ^* a $\mathscr{A}^*$ es una medida completa.*

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ se define haciendo uso de este teorema, a partir de la medida exterior dada por (1.2). En este caso, a los elementos de la σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ de los conjuntos m^*-medibles se les llama conjuntos medibles Lebesgue, y la medida de Lebesgue m viene dada por $m = m^*_{|\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.

Se tiene que los conjuntos de Borel son conjuntos medibles Lebesgue ([1, Proposition 1.3.6]), esto es, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Este contenido es estricto; existen conjuntos medibles Lebesgue que no son de Borel ([1, p. 55]). También es posible encontrar conjuntos que no son medibles Lebesgue (ver, por ejemplo, [1, Theorem 1.4.7]). Dentro de las propiedades más importantes de la medida de Lebesgue tenemos su invarianza por traslaciones y su comportamiento frente a las dilataciones: si A es un conjunto medible Lebesgue, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $x + A$ y αA son medibles Lebesgue y se verifica que $m(A + x) = m(A)$ y $m(\alpha A) = |\alpha| m(A)$. Además es la única medida que podemos definir sobre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ que asigna a cada rectángulo R de $\mathbb{R}^n$ su volumen ([1, Proposition 1.4.3]).

1.3. Funciones medibles. Integración de funciones medibles.

Establecidos los principios básicos de los espacios de medidas, dedicamos esta sección a la teoría de la integración abstracta que incluye particularmente la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y $D \subset \Omega$. Decimos que $f : D \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es $\mathscr{A}$-*medible* (o medible cuando por el contexto esté clara la σ-álgebra con la que se está trabajando) si se tiene que

$$\{x \in D : f(x) \leq r\} \in \mathscr{A}, \text{ esto es, } f^{-1}([-\infty, r]) \text{ es } \mathscr{A} - \text{medible}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Se puede probar fácilmente que esta condición es equivalente a las análogas que se obtienen al sustituir los conjuntos $[-\infty, r]$ por los intervalos de la forma $[r, +\infty]$, $[-\infty, r)$ o $(r, +\infty]$ (ver [1, Proposition 2.1.1]).

Si la función f toma valores complejos, entonces se tiene que f es medible si y solo si, $\mathrm{Re} f$ y $\mathrm{Im} f$ son medibles ([3, Corollary 2.5]). Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$ diremos que una función es *Borel medible* o *Lebesgue medible*, cuando sea medible respecto a la σ-álgebra de Borel o a los conjuntos medibles Lebesgue, respectivamente.

Es fácil ver que dado un conjunto $A \subset \Omega$, la función característica $\mathscr{X}_A$ es medible si y solo si $A \in \mathscr{A}$. Tomando combinaciones lineales finitas de funciones características de conjuntos medibles se obtienen las conocidas como *funciones simples*, funciones medibles que toman un número finito de valores y que son los bloques sobre los que se construye la teoría de integración. Observamos también que si Ω es un espacio topológico y $\mathscr{A}$ es la σ-álgebra de Borel asociada, entonces cualquier función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continua es medible. En el caso particular de $\mathbb{R}^n$ se tiene que si f es continua entonces es medible Borel y, por tanto, medible Lebesgue.

Se pueden obtener funciones medibles a partir de otras dadas como recogemos en el siguiente resultado ([1, Proposition 2.1.3, 2.1.4 and 2.1.6]).

Proposición 1.5. *Sean $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y $D \subset \Omega$. Se tiene que:*
Si $f, g : D \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ son dos funciones medibles y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
(i) $f + g$, αf, fg, $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son funciones medibles.
Si $\{f_k : D \longrightarrow [-\infty, +\infty]\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles entonces,
(ii) $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$ son funciones medibles y, por tanto, también lo son las funciones $\limsup_k f_k$ y $\liminf_k f_k$.
(iii) Si $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existe para cada $x \in D_0 \subset D$, entonces se tiene que la función $f : D_0 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible.

Observación 1.6. Ya que las funciones f, g de la proposición anterior toman valores en $[-\infty, +\infty]$ debemos tener cuidado con las expresiones indeterminadas $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$ que pueden aparecer al tratar $f + g$ y fg. Por convenio siempre definimos $0 \cdot \infty = 0$. Y en el caso de que existan $x \in D$ tales que $f(x) = -g(x) = \pm\infty$, entonces, fijamos $a \in [-\infty, +\infty]$ y definimos $h(x) = a$, cuando $f(x) = -g(x) = \pm\infty$, y $h(x) = f(x) + g(x)$, en otro caso. Se tiene entonces que h es medible y en este sentido decimos que $f + g$ es medible. □

En general, en el contexto de las funciones medibles, el hecho de que las propiedades se verifiquen en casi todo punto no marca diferencias a la hora de obtener los resultados que se tendrían si esas propiedades se cumplen para todos los puntos. A este respecto se recoge la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *([1, Proposition 2.2.1 and Corollary 2.2.2]) Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida completo*[1].

(a) Si $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es medible y $f = g$ en c.t.p., entonces g es medible.

(b) Sea $\left\{f_k : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]\right\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles tales que existe

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{para c.t. } x \in \Omega.$$

Entonces f es medible.

Como ya mencionamos, las funciones simples constituyen la base para introducir la integral de una función medible como veremos luego. La clave está en el hecho de que una función medible puede ser aproximada de manera adecuada por funciones simples.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la función escalonada $s_k : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$s_k(r) = \sum_{\ell=1}^{2^{2k}} \frac{\ell - 1}{2^k} \mathscr{X}_{I_{k,\ell}}(r) + 2^k \mathscr{X}_{I_k}(r), \quad r \in [0, \infty],$$

donde $I_{k,\ell} = \left[\frac{\ell-1}{2^k}, \frac{\ell}{2^k}\right)$ y $I_k = [2^k, \infty]$. En la Figura 1.1 está representada la función s_1. Observamos que $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente y para todo $k \in \mathbb{N}$, $s_k(r) \le r$, $r \in [0, \infty)$, y $r - \frac{1}{2^r} \le s_k(r)$, $r \in [0, 2^k]$. Se sigue entonces que $s_k(r) \longrightarrow r$, cuando $k \to \infty$.

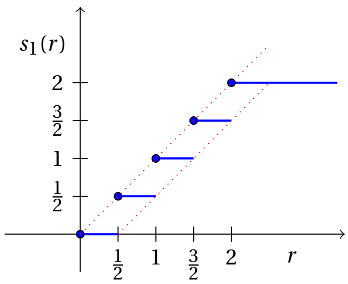

Figura 1.1: Función s_1

Si f es una función medible no negativa en un espacio medible, entonces la familia $\{f_k = s_k \circ f\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples que converge a f en los términos que se indican a continuación (ver [3, Theorem 2.10]).

Proposición 1.8. *Sean $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio medible y $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ una función no negativa. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \cdots \le f$ y $\phi_k(x) \longrightarrow f(x)$, $x \in \Omega$. Además la convergencia es uniforme en cualquier conjunto donde f es acotada.*

Observación 1.9. Cuando f es una función compleja podemos asegurar que existe una sucesión $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$ de manera que $\phi_k \to f$, cuando $k \to \infty$, puntualmente, y uniformemente en cualquier conjunto donde f sea acotada.

[1] La propiedad en [3, Proposition 2.12] nos dice que la condición de completitud para la medida no es tan relevante, pues siempre se puede trabajar con la compleción del espacio.

Terminamos esta sección presentando los principales aspectos relativos a las integración de funciones medibles.

Sea $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para construir el concepto de integral seguiremos varias etapas. Comenzamos dando la noción de integral para una función simple no negativa. Sea $\phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathscr{X}_{A_k}$, donde $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m} \subset (0,\infty)$ y $\{A_k\}_{k=1}^{m}$ son conjuntos medibles disjuntos. Entonces definimos la integral de ϕ respecto a μ mediante

$$\int_\Omega \phi d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k).$$

Nótese que el valor de esta suma es un número real no negativo o bien $+\infty$. Se tiene además que el valor de la integral no depende de la representación elegida para f. En efecto, supongamos que también podemos escribir $f = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \mathscr{X}_{B_\ell}$, donde $\{\beta_\ell\}_{\ell=1}^{n} \subset (0,\infty)$ y $\{B_\ell\}_{\ell=1}^{n}$ son conjuntos medibles y disjuntos. Entonces, ya que $\alpha_k = \beta_\ell$ cuando $A_k \cap B_\ell \neq \emptyset$, usando la aditividad de la medida μ se sigue que

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap B_\ell) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \mu(A_k \cap B_\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \mu(B_\ell).$$

Es fácil ver que $\int_\Omega (\alpha\phi + \beta\psi) d\mu = \alpha \int_\Omega \phi d\mu + \beta \int_\Omega \psi d\mu$, $\alpha, \beta \geq 0$, ϕ, ψ funciones simples. Además si $\phi \leq \psi$, se tiene que $\int_\Omega \phi d\mu \leq \int_\Omega \psi d\mu$.

Extendemos ahora esta definición a las funciones medibles no negativas. Sea $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ una función medible. Se define

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\left\{ \int_\Omega \phi d\mu : \phi \text{ es una función simple y } 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

Usando la monotonía de la integral de las funciones simples se sigue que esta nueva definición coincide con la anterior cuando f es una función simple, pues, en ese caso, la propia función f se incluye en el conjunto que se toma para calcular el supremo. De la definición también se deduce la monotonía y la linealidad (con los valores de las constantes en $[0,\infty)$) para esta nueva integral.

Consideramos ahora una función medible f con valores en $[-\infty, +\infty]$ y la descomponemos en sus partes positiva y negativa, f_+ y f_- como es usual, esto es, $f = f_+ - f_-$, donde $f_+ = \text{máx}\{f, 0\}$ y $f_- = \text{máx}\{-f, 0\}$ son funciones medibles no negativas. Decimos que f es μ-integrable, o simplemente integrable, cuando las integrales $\int_\Omega f_+ d\mu$ y $\int_\Omega f_- d\mu$ son finitas y, en ese caso, se define la integral $\int_\Omega f d\mu$ por

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu.$$

Cuando tratamos con funciones f complejas, el concepto de integrabilidad se define a partir de la integrabilidad de sus partes real e imaginaria, o equivalentemente, de la integrabilidad de la función $|f|$ y en este caso, $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \text{Re} f d\mu + i \int_\Omega \text{Im} g d\mu$.

Por último, si $A \subset \Omega$ es un conjunto medible podemos hablar de la integrabilidad en A de una función medible (real o compleja). Diremos que f es integrable en A cuando la función medible $f\mathscr{X}_A$ es integrable en Ω y se define $\int_A f d\mu = \int_\Omega f \mathscr{X}_A d\mu$. Señalamos que en el caso de que se sobrentienda cuál es el espacio sobre el que se está definiendo la integral podemos escribir simplemente $\int f d\mu$.

Es sencillo ver que el espacio de las funciones reales (complejas) es un espacio vectorial real (complejo) y que la integral es un funcional lineal sobre este espacio. Otras propiedades básicas de la integral se recogen a continuación.

Proposición 1.10. *Sean $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$.*

(i) Si $f \geq 0$ entonces $\int_\Omega f d\mu = 0$ si, y solo si, $f = 0$ en μ-casi todo punto.

(ii) Si f es una función integrable entonces $|f(x)| < \infty$ en casi todo $x \in \Omega$.

(iii) $\int_\Omega f d\mu \leq \int_\Omega g d\mu$, cuando $f \leq g$.

(iv) f es integrable si, y solo si, $|f|$ es integrable y además $|\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu$.

Terminamos el capítulo presentando tres de los grandes resultados de convergencia en la teoría de integración que son extremadamente útiles y que dan cuenta de las grandes ventajas de la integral de Lebesgue frente a la integral de Riemann.

Teorema 1.11 (Teorema de la convergencia monótona). *Sean* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* f *una función medible no negativa. Supongamos que* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles verificando:*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$*, c.t.* $x \in \Omega$*,*

(b) $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$*, c.t.* $x \in \Omega$*.*

Entonces se tiene que $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$

Una consecuencia inmediata de este teorema es el hecho de que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas entonces

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$$

El siguiente resultado se usa a menudo para probar que una función es integrable o para dar una cota superior del valor de una integral.

Teorema 1.12 (Lema de Fatou). *Sean* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en* Ω*. Se tiene que*

$$\int_\Omega \liminf_k f_k d\mu \leq \liminf_k \int_\Omega f_k d\mu.$$

Y terminamos enunciando otro de los grandes teoremas de convergencia.

Teorema 1.13 (Teorema de la convergencia dominada). *Sean* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$*. Supongamos que* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles con valores en* $[-\infty, +\infty]$ *y* g *una función integrable no negativa tales que*

(i) $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$*, c.t.* $x \in \Omega$*,*

(ii) $|f_k(x)| \leq g(x)$*, c.t.* $x \in \Omega$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Entonces f *y* f_k*,* $k \in \mathbb{N}$*, son funciones integrables y se tiene que*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k d\mu.$$

2

Espacios de Lebesgue

Los espacios de funciones juegan un papel muy importante dentro del análisis matemático y, entre ellos, los espacios de Lebesgue constituyen una clase fundamental en el ámbito del análisis funcional. Además de poseer interesantes propiedades en sí mismos, son la base de muchos conceptos en matemáticas.

Ya en el primer capítulo aparecieron los elementos fundamentales del espacio de Lebesgue L^1, a saber, las funciones integrables. Ahora generalizamos este concepto a otros valores de p y tratamos con funciones que tienen potencia p-integrable. Asimismo, consideramos la versión débil de estos espacios, clases más amplias que permiten obtener los resultados a partir de condiciones menos restrictivas.

Nuestro objetivo en este capítulo es analizar la estructura de los espacios de Lebesgue y sus principales características, lo que servirá para abordar el estudio de la acotación de operadores y la interpolación que se trata en el capítulo 3.

2.1. Espacios $L^p(X,\mu)$

Aunque en muchas ocasiones trabajaremos en el contexto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ vamos a definir los espacios de Lebesgue para espacios de medida arbitrarios. A lo largo del capítulo usaremos la notación (X,μ) para expresar un espacio de medida $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ arbitrario.

Sea (X,μ) un espacio de medida y $0<p\le\infty$. Denotamos por $L^p(X,\mu)$ la clase constituida por las funciones complejas medibles en X tales que

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{cuando } 0<p<\infty,$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} := \operatorname{esssup}_{x\in X}|f(x)| = \operatorname{ínf}\Big\{a\ge 0 : \mu\big(\{x\in X : |f(x)|>a\}\big)=0\Big\}.$$

En el caso de que $p=\infty$, entendemos por convenio que $\operatorname{ínf}\emptyset=\infty$.

Para simplificar la notación escribiremos $L^p(X)$ y $\|\cdot\|_p$ cuando la medida y el espacio involucrados estén claros en el texto.

Notamos en primer lugar que $L^p(X,\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Es claro para $p=\infty$ y cuando $0<p<\infty$, se deduce fácilmente pues si $f,g\in L^p(X,\mu)$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\big|\alpha f(x)+\beta g(x)\big|^p &\le \big(|\alpha f(x)|+|\beta g(x)|\big)^p \le \big(2\operatorname{máx}\{|\alpha f(x)|,|\beta g(x)|\}\big)^p\\ &\le 2^p\big(|\alpha|^p|f(x)|^p+|\beta|^p|g(x)|^p\big), \quad x\in X.\end{aligned}$$

La definición precisa de los espacios de Lebesgue requiere tener en cuenta la siguiente observación: el hecho de que $\|f\|_p=0$ no implica, en general, que $f\equiv 0$. Y, por tanto, $\|\cdot\|_p$ no es, en general, una norma para $L^p(X,\mu)$ aunque la notación así lo sugiera. Con el fin de resolver esta cuestión se establece la siguiente relación de equivalencia entre las funciones de $L^p(X)$: sean f y $g\in L^p(X,\mu)$,

$$\text{se dice que } f\sim g \text{ cuando } f=g \text{ en } \mu- \text{ casi todo punto.}$$

El *espacio de Lebesgue* se define entonces como el espacio cociente $L^p(X,\mu)/\sim$, constituido por las clases de equivalencia $[f]$, $f \in L^p(X,\mu)$. Una vez aclarado este punto, seguiremos denotando por $L^p(X,\mu)$, como es habitual, al espacio de las clases de equivalencia y si escribimos f para un elemento en $L^p(X,\mu)$ podemos referirnos tanto a la función como a su clase de equivalencia lo cual quedará claro por el contexto.

Uno de los ejemplos más característicos se obtiene cuando consideramos $X = \mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. También son conocidos los espacios de Lebesgue discretos, $\ell^p(\mathbb{Z})$ (o simplemente ℓ^p), $0 < p \leq \infty$, y que se definen tomando como $X = \mathbb{Z}$ y como medida μ, la medida del cardinal. En este caso, las funciones medibles son sucesiones de números complejos, $f = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|, & p = \infty. \end{cases}$$

Como ya vimos, $L^p(X,\mu)$, $0 < p \leq \infty$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Nos preguntamos ahora si podemos además darle estructura de espacio vectorial normado.

Recordamos que dado un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, una *norma en* V es una aplicación $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0,\infty]$ que verifica las siguientes propiedades:

(i) $\|v\| = 0$ si, y solo si, $v = 0$;
(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$;
(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $u, v \in V$.

Cuando en lugar de (iii) se cumple

(iii)' existe $C > 1$ de manera que $\|u + v\| \leq C(\|u\| + \|v\|)$, $u, v \in V$,

entonces se dice que $\|\cdot\|$ es una *cuasinorma*.

En el caso particular de los espacios vectoriales $L^p(X,\mu)$, $0 < p \leq \infty$, es claro que $\|\cdot\|_p$ verifica las condiciones (i) y (ii). (Nótese que para (i) es importante haber considerado las clases de equivalencia). La cuestión entonces radica en comprobar si se satisface la desigualdad triangular (propiedad (iii)). Veremos que la respuesta es afirmativa solo cuando $1 \leq p \leq \infty$. Esta es una de las razones por las que el rango de p que tiene interés en la mayoría de aplicaciones sea el intervalo $[1,\infty]$.

Antes de probar que $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio vectorial normado, veamos por qué la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$ falla cuando $0 < p < 1$.

Sea $0 < p < 1$. No es difícil ver que

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p, \quad a, b \geq 0, \tag{2.1}$$

siendo la desigualdad estricta, cuando $a, b > 0$. Basta considerar $a, b > 0$ y la función positiva $\phi(t) = t^{p-1} - (a + t)^{p-1}$, $t > 0$. Integrando esta función de 0 a b se deduce la desigualdad.

Consideramos (X,μ) un espacio de medida y E y F dos conjuntos disjuntos de medida positiva. Tomando $a = \mu(E)^{1/p}$ y $b = \mu(F)^{1/p}$ en (2.1), y teniendo en cuenta que E y F son disjuntos podemos escribir

$$\|\mathscr{X}_E\|_p + \|\mathscr{X}_F\|_p = a + b < (a^p + b^p)^{1/p} = \|\mathscr{X}_E + \mathscr{X}_F\|_p,$$

y, por tanto, no se cumple la propiedad (iii).

La situación es diferente cuando $1 \leq p \leq \infty$. Para estos valores $\|\cdot\|_p$ verifica la desigualdad triangular, o como es más conocida en este contexto, la desigualdad de Minkowski. Su demostración se basa en otra de las desigualdades relevantes de la teoría, la desigualdad de Hölder.

Introducimos primero la noción de exponentes conjugados. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$. Decimos que p y q son *exponentes conjugados* cuando se verifica la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2.2}$$

donde por convenio $1/\infty = 0$. En muchas ocasiones, dado $1 \leq p \leq \infty$ usaremos la notación p' para su exponente conjugado; de esta manera queda clara su relación con p. Nótese que $p = p' = 2$ y que el conjugado de $p = 1$ (resp., $p = \infty$) es $p' = \infty$ (resp., $p' = 1$). Observamos también que la relación (2.2) implica que $p + q = pq$. El siguiente lema es clave en la demostración de la desigualdad de Hölder que veremos luego.

Lema 2.1 (Desigualdad de Young). *Sean* $1 < p, q < \infty$ *exponentes conjugados. Se tiene que*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad x, y \geq 0.$$

La igualdad se tiene si, y solo si, $x^p = y^q$.

Demostración. Cuando $x = 0$ ó $y = 0$ la desigualdad es trivial, así que podemos suponer $x, y > 0$. Además, tomando $t = x^p/y^q = x^p/y^{(q-1)p}$, la desigualdad que queremos probar es equivalente a

$$t^{1/p} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}, \quad t > 0.$$

Usando cálculo elemental puede verse que la función $\phi(t) = \frac{t}{p} + \frac{1}{q} - t^{1/p}$, $t \geq 0$, tiene un mínimo en $t = 1$ donde la función vale 0, y $\phi(t) > 0$, $t \neq 1$. Observamos que esta circunstancia nos dice además que la igualdad se obtiene si, y solo si, $t = 1$, esto es, cuando $x^p = y^q$. Concluimos así la prueba. □

Observación 2.2. Una prueba gráfica de este resultado es la siguiente. La curva que está representada se corresponde con la gráfica de la función $t = s^{p-1}$ o, equivalentemente (ya que son exponentes conjugados), $s = t^{q-1}$. Entonces fijados $x, y > 0$, el área en azul es x^p/p y el área en rojo, y^q/q. Es claro que la suma de estas áreas es mayor que el área del rectángulo de lados x e y. □

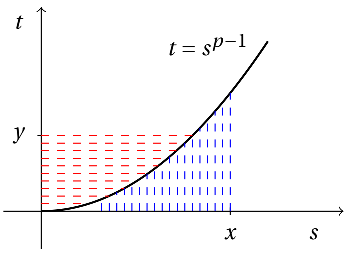

Figura 2.1: Prueba gráfica del Lema 2.1

Proposición 2.3 (Desigualdad de Hölder[1]). *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $f \in L^p(X,\mu)$ y $g \in L^{p'}(X,\mu)$ se tiene que $fg \in L^1(X,\mu)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \tag{2.3}$$

La igualdad se cumple si, y solo si, $a|f(x)|^p = b|g(x)|^{p'}$, c.t. $x \in X$, para ciertas constantes a,b con $ab \neq 0$.

Demostración. Supongamos primero $p = 1$ y $p' = \infty$. Si $f \in L^1(X,\mu)$ y $g \in L^\infty(X,\mu)$ se tiene que $|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|$, c.t. $x \in X$, y entonces, $fg \in L^1(X,\mu)$ y

$$\|fg\|_1 = \int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f(x)|d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Cuando $p = \infty$ la desigualdad se sigue de la misma forma, intercambiando el papel de f y g.

Ahora asumimos que $1 < p < \infty$. Sean $f \in L^p(X,\mu)$ y $g \in L^{p'}(X,\mu)$. Ya que la desigualdad es trivial si $\|f\|_p = 0$ ó $\|g\|_{p'} = 0$, podemos suponer que estos valores son no nulos. Entonces, si $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$, haciendo uso del Lema 2.1 se sigue que

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'}, \quad x \in X, \tag{2.4}$$

y entonces,

$$\|fg\|_1 \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_{p'}^{p'}}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

[1] El caso particular $p = 2$ se reduce a la conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Podemos aplicar esta estimación a las funciones $\frac{f}{\|f\|_p}$ y $\frac{g}{\|g\|_{p'}}$ para deducir la desigualdad de Hölder en el caso general.

Por último, observamos que la igualdad (2.3) se tiene cuando se cumple la igualdad c.t. $x \in X$ en (2.4). Teniendo en cuenta de nuevo el Lema 2.1 esto ocurre si, y solo si, $|f|^p = |g|^{p'}$ c.t.p. de X. De la homogeneidad de la norma se concluye entonces que la igualdad en (2.3) se satisface si, y solo si, $a|f(x)|^p = b|g(x)|^{p'}$, c.t. $x \in X$, $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$. □

Observación 2.4. Otra forma de presentar la desigualdad de Hölder es la siguiente. Sean $0 < p, p_1, p_2 \le \infty$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ y $f_k \in L^{p_k}(X,\mu)$, $k = 1,2$. Entonces $f_1 f_2 \in L^p(X,\mu)$ y

$$\|f_1 f_2\|_p \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}.$$

Basta aplicar (2.3) a los exponentes conjugados p_1/p y p_2/p y a las funciones f_1^p y f_2^p. Nótese que de la relación entre p, p_1 y p_2 se deduce que $p_1/p \ge 1$ y $p_2/p \ge 1$. Usando inducción podemos generalizar fácilmente esta propiedad.

Supongamos $0 < p, p_1, ..., p_m \le \infty$, siendo $m \ge 2$, y $\{f_k\}_{k=1}^m$ tales que $f_k \in L^{p_k}(X,\mu)$, $k = 1, ..., m$. Si $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$, entonces $f_1 \cdots f_m \in L^p(X,\mu)$ y

$$\|f_1 \cdots f_m\|_p \le \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_m\|_{p_m}.$$

□

Observación 2.5. Cuando $0 < p < 1$ se puede hablar de una desigualdad inversa a (2.3) en cierto sentido. Sea $0 < p < 1$. Denotamos por $\overline{p}$ el valor conjugado de p en el sentido dado anteriormente, esto es, el que cumple $\frac{1}{p} + \frac{1}{\overline{p}} = 1$. Nótese que al ser $0 < p < 1$, $\overline{p} = p/(p-1)$ es un valor negativo. Para $r < 0$, escribimos $L^r(X,\mu)$ para representar el espacio de las funciones g definidas en (X,μ) tales que $g > 0$ en c.t.p. y

$$\|g\|_r := \frac{1}{\|g^{-1}\|_{|r|}} < \infty.$$

Entonces, se tiene que si $f \in L^p(X,\mu)$, y $g \in L^{\overline{p}}(X,\mu)$, entonces

$$\|fg\|_1 \ge \|f\|_p \|g\|_{\overline{p}}. \tag{2.5}$$

Para probar esta desigualdad aplicamos (2.3) con exponentes $r = 1/p > 1$, $r' = 1/(1-p)$ para obtener

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p g^p g^{-p} d\mu \le \left(\int_X |f| g\, d\mu\right)^p \left(\int_X g^{-|\overline{p}|} d\mu\right)^{1-p} = \|fg\|_1^p \|g^{-1}\|_{|\overline{p}|}^p,$$

de donde se sigue que $\|fg\|_1 \ge \|f\|_p \|g\|_{\overline{p}}$. □

Proposición 2.6 (Desigualdad de Minkowski). *Sea* $1 \le p \le \infty$. *Si* $f, g \in L^p(X,\mu)$ *entonces*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración. Sean $p = \infty$ y $f, g \in L^\infty(X,\mu)$. Se tiene que

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad \text{c.t. } x \in X,$$

y, por tanto, $f+g \in L^\infty(X,\mu)$ y $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Es claro también que $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$, $f, g \in L^1(X,\mu)$.

Fijamos ahora $1 < p < \infty$ y $f, g \in L^p(X,\mu)$. Sabemos que $f+g \in L^p(X,\mu)$. Ya que $p-1 = p/p'$, usando la desigualdad de Hölder, podemos escribir

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p d\mu \le \int_X |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) d\mu \\ &= \int_X |f+g|^{p/p'} |f| d\mu + \int_X |f+g|^{p/p'} |g| d\mu \le \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p).\end{aligned}$$

De esta estimación, cuando $\|f+g\|_p \neq 0$, se sigue la desigualdad de Minkowski. Cuando $\|f+g\|_p = 0$ la desigualdad es obvia, por lo que se termina así la prueba. □

Ya vimos que, cuando $0 < p < 1$, la desigualdad de Minkowski no se verifica, pero en este caso tenemos la siguiente variante.

Proposición 2.7. *Sean* $0 < p < 1$ *y* $f, g \in L^p(X,\mu)$. *Se tiene que*

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p.$$

Demostración. Basta tener en cuenta (2.1) con $a = |f(x)|$ y $b = |g(x)|$, $x \in X$, e integrar respecto a x. □

De este resultado se deduce que $\|\cdot\|_p$ es una cuasinorma cuando $0 < p < 1$. De hecho, si $f, g \in L^p(X,\mu)$ y $f, g \geq 0$ [2], podemos ver que

$$2^{1-1/p}(\|f\|_p + \|g\|_p) \leq \|f+g\|_p \leq 2^{1/p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Para ello basta hacer un análisis de la función $\phi_r(t) = \frac{1+t^r}{(1+t)^r}$, $t \geq 0$, donde $r > 0$. Es fácil comprobar que, cuando $r \in (0,1)$, ϕ tiene un mínimo en $t = 0$ y un máximo en $t = 1$, por lo que $1 \leq \phi_r(t) \leq 2^{1-r}$, $t \geq 0$, lo que conduce a que $(1+t)^r \leq 1 + t^r \leq 2^{1-r}(1+t)^r$, $t \geq 0$. Y de aquí se sigue que, cuando $r \in (0,1)$,

$$(a+b)^r \leq a^r + b^r \leq 2^{1-r}(a+b)^r, \quad a, b \geq 0. \tag{2.6}$$

Si $r > 1$, entonces ocurre lo contrario: el máximo se alcanza en $t = 0$ y el mínimo en $t = 1$ por lo que en este caso se verifica

$$a^r + b^r \leq (a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r), \quad a, b \geq 0. \tag{2.7}$$

Entonces, dados $0 < p < 1$ y $f, g \in L^p(X,\mu)$, haciendo uso de (2.6) para $r = p$ (ó Proposición 2.7) y (2.7) para $r = 1/p$, podemos escribir

$$\|f+g\|_p \leq \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/p} \leq 2^{1/p-1}(\|f\|_p + \|g\|_p),$$

y, análogamente,

$$\|f+g\|_p \geq 2^{1-1/p}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{1/p} \geq 2^{1-1/p}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Observación 2.8. Usando la estimación (2.5) de la Observación 2.5 y procediendo como en la prueba de la desigualdad de Minkowski (Proposition 2.6) se puede ver que cuando $0 < p < 1$ se tiene que $\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$, para $f, g \in L^p(X,\mu)$, $f, g \geq 0$. □

De los resultados vistos se obtiene que $L^p(X,\mu)$ es un espacio vectorial normado cuando $1 \leq p \leq \infty$ y cuasinormado para $0 < p < 1$.

Analizamos ahora la completitud de estos espacios, una propiedad importante a la hora de tratar problemas que involucran el paso al límite. Recordamos que un espacio métrico (X, d) es *completo* cuando toda sucesión de Cauchy respecto a la métrica es convergente y decimos que es un espacio *Banach* cuando es completo con la distancia generada por una norma.

Sabemos que la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, define la métrica en $L^p(X,\mu)$ dada por $d(f,g) = \|f-g\|_p$, $f, g \in L^p(X,\mu)$. Y aunque $\|\cdot\|_p$ no es una norma para $0 < p < 1$, en virtud de la Proposición 2.7 se tiene que $\rho(f,g) = \|f-g\|_p^p$ define una métrica en $L^p(X,\mu)$.

Teorema 2.9. *Sea* $0 < p < \infty$. *Se tiene que*

(i) El espacio $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ *es un espacio de Banach cuando* $1 \leq p \leq \infty$;

(ii) Cuando $0 < p < 1$, $L^p(X,\mu)$ *con la métrica* $\rho(f,g) = \|f-g\|_p^p$, $f, g \in L^p(X,\mu)$, *es un espacio métrico completo.*

Demostración. (i) Suponemos que $1 \leq p \leq \infty$. Ya hemos visto que en este caso $\|\cdot\|_p$ es una norma para $L^p(X,\mu)$. Para establecer la completitud consideramos $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X,\mu)$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $k_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_k - f_{k_m}\|_p \leq \frac{1}{2^m}, \quad k \geq k_m. \tag{2.8}$$

[2] La condición de no negatividad para las funciones solo es necesaria para la primera de las desigualdades.

Podemos elegir la sucesión $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $k_m < k_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, y entonces se tiene

$$\|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\|_p \le \frac{1}{2^m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Definimos ahora la función g mediante

$$g(x) = |f_{k_1}(x)| + \sum_{m=1}^{\infty} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)|, \quad x \in X.$$

Esta serie converge en casi todo punto y define una función en $L^p(X,\mu)$. En efecto, sea $\{g_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sumas parciales, esto es,

$$g_N(x) = |f_{k_1}(x| + \sum_{m=1}^{N} |f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)|, \quad x \in X.$$

De la desigualdad de Minkowski y de (2.9) se sigue que

$$\|g_N\|_p \le \|f_{k_1}\|_p + \sum_{m=1}^{N} \|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\|_p \le \|f_{k_1}\|_p + \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Luego, en virtud del Teorema de convergencia monótona (Teorema 1.11) se sigue que

$$\|g\|_p \le \|f_{k_1}\|_p + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty.$$

Entonces, $g \in L^p(X,\mu)$ y, por tanto, $g(x) < \infty$, c.t. $x \in X$, (ver Proposición 1.10 (ii)).

Se sigue que la función f dada por

$$f(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} (f_{k_{m+1}}(x) - f_{k_m}(x)), \quad x \in X,$$

está definida por una serie que converge en casi todo punto y $f \in L^p(X,\mu)$.

Veamos que f es la función límite que buscamos. Observamos que, por construcción, la serie que define a f es una serie telescópica y por tanto se tiene que

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x), \qquad \text{c.t. } x \in X.$$

Hemos encontrado así una subsucesión que converge a f en casi todo punto. Veamos que se tiene además la convergencia de la sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en la norma $\|\cdot\|_p$.

Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m_0} < \varepsilon$ y consideramos el valor $k_{m_0} \in \mathbb{N}$ que satisface (2.8) con $m = m_0$. Entonces, teniendo en cuenta (2.9) podemos escribir

$$\begin{aligned}\|f_k - f\|_p &\le \|f_k - f_{k_{m_0}}\|_p + \|f_{k_{m_0}} - f\|_p \le \|f_k - f_{k_{m_0}}\|_p + \sum_{m=m_0}^{\infty} \left\|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\right\|_p \\ &\le \frac{1}{2^{m_0}} + \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{3}{2^{m_0}} < 3\varepsilon, \quad k \ge k_{m_0}.\end{aligned}$$

(ii) Para establecer la completitud del espacio cuando $0 < p < 1$ razonamos análogamente sustituyendo la norma $\|\cdot\|_p$ por la métrica ρ y usando la Proposición 2.7 en lugar de la desigualdad de Minkowski. □

El caso $p = 2$ es de especial interés pues $L^2(X,\mu)$ resulta ser un espacio de Hilbert. Los espacios de Hilbert son, dentro de los espacios de Banach, los más importantes. Poseen una estructura que hacen de ellos la generalización natural de los espacios euclídeos. Recordamos su definición.

Sea H un espacio vectorial complejo. Un *producto interior o escalar* en H es una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifica:

(i) $\langle x, x\rangle \ge 0$, $x \in H$.

(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ si, y solo si, $x = 0$;

(ii) $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$, $x, y, z \in H$, $a, b \in \mathbb{C}$;

(iii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, $x,y\in H$.
Es fácil comprobar que un producto interior genera una norma $\|\cdot\|$ en H mediante $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, $x\in H$. Cuando el espacio H es completo con respecto a esta norma se dice que H es un *espacio de Hilbert*.

En $L^2(X,\mu)$ podemos definir un producto interior asociado a la norma $\|\cdot\|_2$ de la siguiente forma

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu, \quad f,g\in L^2(X,\mu).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz la integral siempre existe y se puede probar fácilmente que esta aplicación satisface las propiedades de producto escalar. Además, $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$, $f\in L^2(X,\mu)$. Ya que, según el Teorema 2.9, el espacio $L^2(X,\mu)$ es completo con respecto a $\|\cdot\|_2$, se deduce que $(L^2(X,\mu),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Analizamos en lo que sigue la relación entre los diferentes espacios de Lebesgue. En general, $L^p(X,\mu)\not\subseteq L^q(X,\mu)$ cuando $p\neq q$. Veamos un ejemplo que lo confirma.

Consideramos el espacio $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y f_0, f_1 las funciones definidas por

$$f_0(x) = |x|^{-\alpha}\mathscr{X}_{\{0<|z|<1\}}(x) \quad \text{y} \quad f_1(x) = |x|^{-\alpha}\mathscr{X}_{\{|z|\geq 1\}}(x), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Entonces, dado $0<p<\infty$ se tiene que $f_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $\alpha p<n$ y $f_1\in L^p(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $n<\alpha p$. En efecto, basta observar que

$$\|f_0\|_p^p = \int_{\{0<|z|<1\}} |x|^{-\alpha p}dx = v_n\int_0^1 r^{-\alpha p+n-1}dr,$$

y

$$\|f_1\|_p^p = \int_{\{|z|\geq 1\}} |x|^{-\alpha p}dx = v_n\int_1^\infty r^{-\alpha p+n-1}dr,$$

donde v_n es la medida de superficie de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$. Así, si $0<p<q$, y $\frac{n}{q}<\alpha<\frac{n}{p}$, entonces, $f_0\in L^p(\mathbb{R})\setminus L^q(\mathbb{R}^n)$ y $f_1\in L^q(\mathbb{R}^n)\setminus L^p(\mathbb{R}^n)$.

En este ejemplo el espacio considerado tiene medida infinita. Veamos que cuando el espacio X tiene medida finita podemos asegurar la inclusión entre ciertos espacios de Lebesgue.

Proposición 2.10. *Sea (X,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X)<\infty$. Si $0<p\leq q\leq\infty$ entonces $L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)$, y*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q\mu(X)^{1/p-1/q}, \quad f\in L^q(X,\mu).$$

Demostración. Si $p=q$ es obvio. Suponemos entonces $0<p<q\leq\infty$. Cuando $q=\infty$ se sigue fácilmente pues

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p\int_X d\mu = \|f\|_\infty^p\mu(X).$$

Si $q<\infty$, aplicando la desigualdad de Hölder con exponente $r=q/p$ (nótese que $r>1$) se tiene que $r'=q/(q-p)$ y

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p\cdot 1 d\mu \leq \left(\int_X |f|^q\right)^{p/q}\left(\int_X d\mu\right)^{(q-p)/q} = \|f\|_q^p\mu(X)^{1-p/q},$$

de donde se deduce el resultado de la proposición. □

Observamos que cuando X es un espacio de medida finita entonces el espacio $L^\infty(X,\mu)$ está contenido en cualquier $L^p(X,\mu)$, $0<p<\infty$, y su norma controla el valor de $\|\cdot\|_p$. Podemos afinar un poco más esta relación y ver al espacio $L^\infty(X,\mu)$ como caso límite de los espacios $L^p(X,\mu)$ cuando $p\to\infty$ en el sentido siguiente.

Proposición 2.11. *Para cada $f\in L^\infty(X,\mu)$ con soporte en un conjunto de medida finita*[3] *se tiene que $f\in L^p(X,\mu)$, $0<p<\infty$, y*

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

[3] Nótese que si (X,μ) es un espacio de medida finita este resultado se tiene para todas las funciones en $L^\infty(X,\mu)$.

Demostración. Sea $f \in L^\infty(X,\mu)$ y $E \subset X$ un conjunto medible con $\mu(E) < \infty$ tal que $f(x) = 0$, $x \in X \setminus E$.

Si $\mu(E) = 0$ entonces $\|f\|_\infty = \|f\|_p = 0$, $0 < p < \infty$, y no habría nada que probar. Supongamos entonces $\mu(E) > 0$. Como antes, se obtiene que

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \|f\|_\infty \mu(E)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Y dado que $\mu(E)^{1/p} \longrightarrow 1$, cuando $p \to \infty$, se sigue que

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty. \tag{2.10}$$

Por otro lado, dado $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, de la definición de $\|f\|_\infty$ se tiene que existe $\delta > 0$ de manera que

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon\}\big) \ge \delta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \ge \left(\int_{\{x\in X:|f(x)|\ge\|f\|_\infty-\varepsilon\}} |f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &\ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\Big(\mu\big(\{x \in X : |f(x)| \ge \|f\|_\infty - \varepsilon\}\big)\Big)^{1/p} \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\delta^{1/p}.\end{aligned}$$

Y se obtiene así que $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \varepsilon$. La arbitrariedad de ε y (2.10) permiten concluir que existe el límite $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p$ y que es igual a $\|f\|_\infty$. □

Existe un caso especial donde se verifica la inclusión inversa a la recogida en la Proposición 2.10.

Proposición 2.12. *Consideramos el conjunto $X = \mathbb{Z}$ dotado con la medida del cardinal y $0 < p \le q \le \infty$. Entonces, $\ell^p(\mathbb{Z}) \subseteq \ell^q(\mathbb{Z})$ y $\|f\|_q \le \|f\|_p$, $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$.*

Demostración. De nuevo, cuando $p = q$ no hay nada que probar, así que suponemos entonces que $p < q$. Sea $f = \{f(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\ell^p(\mathbb{Z})$.
Claramente cuando $q = \infty$ se sigue que $\|f\|_\infty \le \|f\|_p$ pues

$$\|f\|_\infty^p = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^p \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^p = \|f\|_p^p.$$

Asumimos ahora $q < \infty$. Podemos escribir

$$\|f\|_q^q = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^q = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^{q-p}|f(m)|^p \le \|f\|_\infty^{q-p} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m)|^p = \|f\|_\infty^{q-p}\|f\|_p^p,$$

y aplicando el caso anterior ($q = \infty$) se concluye que $\|f\|_q \le \|f\|_p$. □

Presentamos otros dos resultados que recogen algunas relaciones interesantes entre los espacios de Lebesgue.

Proposición 2.13. *Sean $0 < p < q < r \le \infty$. Se tiene que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu) + L^r(X,\mu)$, esto es, toda función $f \in L^q(X,\mu)$ puede descomponerse como suma de una función en $L^p(X,\mu)$ y una función en $L^r(X,\mu)$.*

Demostración. Sea $f \in L^q(X,\mu)$ y consideramos el conjunto $A = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$. Tomando $g = f\mathscr{X}_A$ y $h = f\mathscr{X}_{X\setminus A}$ es obvio que $f = g + h$. Por otro lado, como $p < q$ y $|f(x)| > 1$ cuando $x \in A$, se tiene que

$$|g(x)|^p = |f(x)|^p \mathscr{X}_A(x) \le |f(x)|^q \mathscr{X}_A(x), \quad x \in X,$$

y, entonces, $\|g\|_p \le \|f\|_q$ y se sigue que $g \in L^p(X,\mu)$.

De forma análoga, si $r < \infty$, al ser $q < r$ y $|f(x)| \le 1$, $x \in X \setminus A$,

$$|h(x)|^r = |f(x)|^r \mathscr{X}_{X\setminus A}(x) \le |f(x)|^q \mathscr{X}_{X\setminus A}(x), \quad x \in X,$$

y se obtiene que $h \in L^r(X,\mu)$. Observamos que para $r = \infty$ es claro que $h \in L^\infty(X,\mu)$ pues $\|h\|_\infty \le 1$. □

Proposición 2.14. *Sean* $0<p<q<r\le\infty$. *Se verifica que* $L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu)\subseteq L^q(X,\mu)$. *Además,*

$$\|f\|_q\le \|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda},\quad f\in L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu),$$

siendo $\lambda\in(0,1)$ *tal que* $\frac{1}{q}=\frac{\lambda}{p}+\frac{1-\lambda}{r}$, *esto es* $\lambda=(1/q-1/r)/(1/p-1/r)$.

Demostración. Cuando $r=\infty$, se tiene que $\lambda=p/q$ y ya que

$$|f(x)|^q=|f(x)|^{q-p}|f(x)|^p\le\|f\|_\infty^{q-p}|f(x)|^p,\quad x\in X,$$

se sigue que $\|f\|_q\le\|f\|_\infty^{1-p/q}\|f\|_p^{p/q}=\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|f\|_p^{\lambda}$.

Por otro lado, supongamos que $r<\infty$. Teniendo en cuenta la relación entre p,q,r y λ se tiene que

$$1=\frac{\lambda q}{p}+\frac{(1-\lambda)q}{r}.$$

Entonces $s=p/(\lambda q)$ y tiene como exponente conjugado a $s'=r/((1-\lambda)q)$. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes s y s' se llega a que

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q&=\int_X|f|^{\lambda q}|f|^{(1-\lambda)q}d\mu\le\||f|^{\lambda q}\|_s\||f|^{(1-\lambda)q}\|_{s'}=\left(\int_X|f|^{\lambda qs}d\mu\right)^{1/s}\left(\int_X|f|^{(1-\lambda)qs'd\mu}\right)^{1/s'}\\&=\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{\lambda q/p}\left(\int_X|f|^r d\mu\right)^{(1-\lambda)q/r}=\|f\|_p^{\lambda q}\|f\|_r^{(1-\lambda)q}.\end{aligned}$$

Se concluye entonces que $\|f\|_q\le\|f\|_p^{\lambda}\|f\|_r^{1-\lambda}$. □

De especial interés son los resultados de aproximación que permiten establecer las propiedades para las funciones en $L^p(X,\mu)$ verificando que se cumplen para una clase densa de funciones más sencillas o con mejores características.

Proposición 2.15. *Sea* $1\le p\le\infty$. *La clase de las de las funciones simples en* $L^p(X,\mu)$ *es densa en* $L^p(X,\mu)$.

Observación 2.16. Antes de probar este resultado queremos indicar que el espacio de las funciones simples no es necesariamente un subconjunto de $L^p(X,\mu)$ cuando $1\le p<\infty$. Por ejemplo, si $\mu(X)=\infty$, la función simple $\phi=\mathscr{X}_X$ no pertenece a $L^p(X,\mu)$ para ningún $1\le p<\infty$. Es por esta razón que consideramos la clase de las funciones simples que pertenecen a $L^p(X,\mu)$, esto es, el espacio constituido por las funciones simples ϕ tales que $\mu(\{x\in X:\phi\ne0\})<\infty$. Nótese que, sin embargo, cuando $p=\infty$, cualquier función simple pertenece a $L^\infty(X,\mu)$. □

Demostración. Asumamos primero $1\le p<\infty$. Sea f una función en $L^p(X,\mu)$ que podemos considerar real. (Si es compleja podemos obtener el resultado separando en sus partes real e imaginaria).

Sean f_+ y f_- las partes positiva y negativa de f, respectivamente. En virtud de la Proposición 1.8, podemos tomar dos sucesiones no decrecientes $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas tales que

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f_+(x)\quad\text{y}\quad\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=f_-(x),\quad x\in X.$$

Definimos la sucesión de funciones simples $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde $\phi_k=\varphi_k-\psi_k$, $k\in\mathbb{N}$. Se tiene que $|\phi_k|\le|\varphi_k|+|\psi_k|\le f_++f_-=|f|$, $k\in\mathbb{N}$, por lo que $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^p(X,\mu)$.

Además,

$$\lim_{k\to\infty}\phi_k(x)=f_+(x)-f_-(x)=f(x),\quad x\in X,$$

y

$$|\phi_k-f|^p\le 2^p|f|^p,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Estamos entonces en las condiciones del Teorema de la convergencia dominada y se concluye que

$$\lim_{k\to\infty}\|\phi_k-f\|_p=0.$$

Consideramos ahora $p=\infty$ y $f\in L^\infty(X,\mu)$ que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer no nula. Fijamos $\varepsilon>0$, y tomamos una partición $\{a_j\}_{j=0}^m$ del intervalo acotado $[-\|f\|_\infty,\|f\|_\infty]$, de tal forma que $a_0=-\|f\|_\infty<a_1<\cdots<a_m=\|f\|_\infty$ y $a_{j+1}-a_j<\varepsilon$. Nótese que $m\in\mathbb{N}$ depende de ε.

Sean $A_j=f^{-1}([a_j,a_{j+1}))$, $j=0,\dots,m$, y definimos $\phi_\varepsilon=\sum_{j=1}^m a_j\mathscr{X}_{A_j}$. Entonces, ϕ_ε es una función simple que verifica $\|f-\phi_\varepsilon\|_\infty\le\varepsilon$. Basta observar que si $x\in A_j$ para $j=1,\dots,m$, entonces $f(x)\in[a_j,a_{j+1})$ y $|f(x)-a_j|\le a_{j+1}-a_j<\varepsilon$. □

Cuando $X = \mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue podemos aproximar las funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$ mediante funciones continuas[4].

Proposición 2.17. *El espacio $C_c(\mathbb{R}^n)$ de las funciones continuas y de soporte compacto es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, cuando $1 \le p < \infty$.*

Demostración. Sean $1 \le p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 2.15 existe una función simple ϕ con soporte de medida finita de manera que $\|f - \phi\|_p < \varepsilon$.

Ya que el soporte de ϕ tiene medida finita, por el Teorema de Lusin (ver [9, Theorem 2.24]) podemos encontrar una función $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, siendo E un conjunto en $\mathbb{R}^n$ de medida menor que ε y además, $|g| \le \|\phi\|_\infty$. Entonces,

$$\|f - g\|_p \le \|f - \phi\|_p + \|\phi - g\|_p < \varepsilon + \left(\int_E |\phi(x) - g(x)|^p dx\right)^{1/p} \le \varepsilon + 2\|\phi\|_\infty \varepsilon^{1/p},$$

lo que permite concluir la prueba. □

Observación 2.18. En el caso $p = \infty$ la situación es diferente pues el espacio $C_c(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ no es denso en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Lo que podemos asegurar en este caso es que la L^∞-compleción de $C_c(\mathbb{R}^n)$ es la clase de las funciones continuas que se anulan en el infinito, esto es, que convergen a 0 cuando $|x| \to \infty$. □

Terminamos esta sección presentando una propiedad de dualidad muy útil que nos da la expresión de la norma p de una función en $L^p(X,\mu)$ en términos de los elementos de $L^{p'}(X,\mu)$.

Si $1 \le p \le \infty$ entonces la desigualdad de Hölder muestra que para cada $g \in L^{p'}(X,\mu)$ podemos definir un funcional lineal acotado T_g en $L^p(X,\mu)$ mediante

$$T_g(f) = \int_X f\overline{g}\,d\mu, \quad f \in L^p(X,\mu),$$

y además, la norma del operador T_g está acotada por $\|g\|_{p'}$. Entonces, si asociamos a cada $g \in L^{p'}(X,\mu)$ el operador T_g podemos escribir que $L^{p'}(X,\mu) \subset (L^p(X,\mu))^*$, donde $(L^p(X,\mu))^*$ representa el espacio dual de $L^p(X,\mu)$, esto es, el conjunto constituido por las aplicaciones $T : L^p(X,\mu) \longrightarrow \mathbb{C}$ lineales y continuas.

Aunque no es nuestro propósito en este trabajo profundizar en los espacios duales de $L^p(X,\mu)$, comentamos que un hecho fundamental es que, cuando $1 \le p < \infty$, cualquier funcional lineal y continuo en $L^p(X,\mu)$ es de la forma T_g para alguna función $g \in L^{p'}(X,\mu)$, esto es, $L^{p'}(X,\mu) = (L^p(X,\mu))^*$ (ver, por ejemplo, [5, Theorem 6.9]). El resultado no es cierto para $p = \infty$, pues el dual de $L^\infty(X,\mu)$ contiene a $L^1(X,\mu)$, pero es, en general, un conjunto mayor (ver [11, p. 23]).

Proposición 2.19. *Sea $1 \le p < \infty$. Para cada $f \in L^p(X,\mu)$ se verifica*

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \left|\int_X f\overline{g}\,d\mu\right|.$$

Además, si la medida μ es σ-finita entonces la propiedad también se cumple para $p = \infty$.

Demostración. Si $f = 0$ el resultado es trivial, así que suponemos que $f \ne 0$ y, por tanto, $\|f\|_p \ne 0$. Como ya mencionamos, la desigualdad de Hölder nos dice que, para todo $1 \le p \le \infty$,

$$\|f\|_p \ge \sup_{\|g\|_{p'} \le 1} \left|\int_X f\overline{g}\,d\mu\right|.$$

Veamos entonces la desigualdad inversa, es decir, que se alcanza el supremo sobre las funciones $g \in L^{p'}(X,\mu)$ con $\|g\|_{p'} \le 1$. Distinguimos según los valores de p.

- Si $p = 1$, entonces $p' = \infty$. Consideramos la función $g = f/|f|$. Es claro entonces que $g \in L^{p'}(X,\mu)$ y $\|g\|_{p'} = 1$. Además, puesto que $|f|^2 = f\overline{f}$ podemos escribir

$$\|f\|_1 = \int_X |f|\,d\mu = \int_X f\overline{g}\,d\mu.$$

[4] El resultado se tiene en el marco general de los espacios de Hausdorff localmente compactos ([9, Theorem 3.14])

- Si $1 < p < \infty$ consideramos la función
$$g(x) = \|f\|_p^{1-p} |f(x)|^{p-2} f(x), \quad x \in X.$$
Entonces,
$$\|g\|_{p'}^{p'} = \|f\|_p^{(1-p)p'} \int_X |f(x)|^{(p-1)p'} d\mu = \|f\|_p^{-p} \|f\|_p^p = 1,$$
y, como antes, se sigue que
$$\left| \int_X f \overline{g} d\mu \right| = \|f\|_p^{1-p} \int_X |f(x)|^p d\mu = \|f\|_p.$$

- Por último, cuando $p = \infty$ procedemos de la siguiente forma. En este caso, como veremos, es importante que la medida sea σ-finita, esto es, $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, siendo $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos medibles de medida finita.
Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Es claro, de la definición de $\|f\|_\infty$, que $\mu(A) > 0$. Por otro lado, $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A \cap E_k)$ y entonces, podemos encontrar $B = A \cap E_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, de forma que $0 < \mu(B) < \infty$.
Consideramos $g = \frac{1}{\mu(B)} \frac{f}{|f|} \mathscr{X}_B$. Se tiene que $g \in L^1(X,\mu)$ y $\|g\|_1 = \frac{1}{\mu(B)} \int_B d\mu = 1$. Además, ya que $B \subset A$,
$$\int_X f \overline{g} d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu \geq \frac{\|f\|_\infty - \varepsilon}{\mu(B)} \int_B d\mu = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$
La arbitrariedad de ε permite terminar la prueba. □

2.2. Espacios $L^p(X,\mu)$-débiles

En esta sección introducimos una variante de los espacios de Lebesgue ya estudiados que son más generales y que aparecen con bastante frecuencia en el contexto del análisis matemático. Son de especial importancia en el estudio de la acotación de operadores y, como veremos, intervienen en la teoría de interpolación para obtener resultados que parten de condiciones más débiles.

Comenzamos definiendo la función de distribución. Sea f una función compleja medible definida en el espacio de medida (X,μ). La *función distribución* de f es la aplicación $d_f : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ dada por
$$d_f(\alpha) = \mu\Big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\Big), \quad \alpha > 0.$$
Observamos que d_f proporciona información sobre la medida del conjunto imagen de f y no del comportamiento de f cerca de un punto dado. Por lo que si pensamos, por ejemplo, en una función definida en $\mathbb{R}^n$ y en una traslación de ella, las funciones de distribución de ambas coinciden.

Recogemos, en primer lugar, algunas propiedades básicas de la función distribución.

Proposición 2.20. *Sean f, g y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funciones medibles en (X,μ). Se verifican las siguientes propiedades:*
(i) d_f es una función decreciente y continua a la derecha;
(ii) Si $|f| \leq |g|$ en c.t.p. entonces $d_f \leq d_g$;
(iii) Si $|f_n| \uparrow |f|$ en c.t.p., cuando $n \to \infty$, entonces $d_{f_n}(\alpha) \longrightarrow d_f(\alpha)$, $\alpha > 0$;
(iv) Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $d_{af}(\alpha) = d_f(\alpha/|a|)$, $\alpha > 0$;
(v) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$, $\alpha, \beta > 0$;
(vi) $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$, $\alpha, \beta > 0$.

Demostración. Estas propiedades son sencillas de probar. Denotemos por $E_f(\alpha)$, $\alpha > 0$, el conjunto $E_f(\alpha) = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$.

Es claro que $E_f(\alpha) \supseteq E_f(\beta)$, cuando $\alpha \leq \beta$, y que $E_f(\alpha) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_f(\alpha + 1/k)$, $\alpha > 0$, por lo que se deduce que d_f es decreciente y que, en virtud de la Proposición 1.1 (c),
$$d_f(\alpha) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_f\big(\alpha + \frac{1}{k}\big)\Big) = \lim_{k\to\infty} d_f\big(\alpha + \frac{1}{k}\big), \quad \alpha > 0,$$

esto es, que es continua a la derecha.

También es obvio que si $|f| \le |g|$ en c.t.p. entonces $E_f(\alpha) \setminus A \subset E_g(\alpha) \setminus A$, $\alpha > 0$, para cierto $A \subset X$ de medida nula. Y, por tanto, $d_f(\alpha) \le d_g(\alpha)$, $\alpha > 0$.

La propiedad (iii) se sigue del hecho de que $E_f(\alpha) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{f_k}(\alpha)$ y de que, por (ii), la colección de conjuntos $\{E_{f_k}(\alpha)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Por otro lado, $E_{af}(\alpha) = E_f(\alpha/|a|)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$, lo que implica (iv). Y para establecer (v) y (vi) basta tener en cuenta que si $\alpha, \beta > 0$ y $|f(x) + g(x)| > \alpha + \beta$ ó $|f(x)g(x)| > \alpha\beta$, entonces se tiene que $|f(x)| > \alpha$ o bien $|g(x)| > \beta$. Y esto nos dice que $E_{f+g}(\alpha+\beta)$ y $E_{fg}(\alpha\beta)$ están contenidos en $E_f(\alpha) \bigcup E_g(\beta)$, $\alpha, \beta > 0$. □

Un aspecto importante de la función de distribución es que permite dar una expresión para $\|\cdot\|_p$ en términos de ella como vemos a continuación.

Proposición 2.21. *Sean* $0 < p < \infty$ *y* $f \in L^p(X,\mu)$. *Se verifica*

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\,d\alpha.$$

Demostración. Usando el Teorema de Fubini ([9, Theorem 8.8]) podemos escribir

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_f(\alpha)\,d\alpha &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\int_X \mathscr{X}_{E_f(\alpha)}\,d\mu\,d\alpha = \int_X\int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\,d\alpha\,d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)|^p\,d\mu(x) = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Introducimos ahora los espacios de Lebesgue de tipo débil. Sean (X,μ) un espacio de medida y $0 < p < \infty$. Denotamos por $L^{p,\infty}(X,\mu)$ al espacio constituido por las funciones complejas medibles definidas en (X,μ) tales que

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, d_f(\alpha)^{1/p} < \infty.$$

Al igual que con los espacios de Lebesgue usuales, de nuevo consideramos que dos funciones en $L^{p,\infty}(X,\mu)$ son iguales si lo son en casi todo punto. También indicamos que tomamos, por definición, $L^{\infty,\infty}(X,\mu) = L^\infty(X,\mu)$.

El espacio $(L^{p,\infty}(X,\mu), \|\cdot\|_{p,\infty})$ es un espacio cuasinormado para todo $0 < p < \infty$. En efecto, sean $0 < p < \infty$ y $f, g \in L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Es claro que $\|f\|_{p,\infty} = 0$ si, y solo si, $d_f(\alpha) = 0$, $\alpha > 0$, esto es, $f = 0$ en casi todo punto. Por otro lado, de *(iv)* en la Proposición 2.20 se sigue que

$$\|af\|_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, d_f\left(\frac{\alpha}{|a|}\right)^{1/p} = |a| \sup_{\beta>0} \beta\, d_f(\beta)^{1/p} = |a|\,\|f\|_{p,\infty}, \quad a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

De la misma forma, usando la Proposición 2.20 *(v)* se obtiene

$$\|f+g\|_{p,\infty} \le 2\sup_{\alpha>0} \frac{\alpha}{2}\left(d_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{1/p},$$

y teniendo en cuenta (2.6) y (2.7) se sigue que

$$\|f+g\|_{p,\infty} \le \text{máx}\left\{2, 2^{1/p}\right\}\left(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}\right).$$

Con respecto a la completitud de estos espacios se cumple que $L^{p,\infty}(X,\mu)$ son espacios completos con respecto a la cuasinorma $\|\cdot\|_{p,\infty}$, lo que puede verse como caso particular del correspondiente resultado en el contexto más general de los espacios de Lorentz que se recoge en [4, Theorem 1.4.11]. Puesto que estos espacios quedan fuera de los objetivos de la memoria, nos hemos limitado a indicar que se cumple la propiedad.

La siguiente pregunta natural que surge es qué relación tienen estos nuevos espacios de Lebesgue con los estudiados en la sección anterior. El primer resultado en este sentido es una consecuencia de la desigualdad de Chebyshev.

Proposición 2.22. *Sea* $0<p<\infty$. *Se tiene que* $L^p(X,\mu)\subset L^{p,\infty}(X,\mu)$ *y*

$$\|f\|_{p,\infty}\le\|f\|_p,\quad f\in L^p(X,\mu). \tag{2.11}$$

Demostración. Sea $f\in L^p(X,\mu)$. Podemos escribir

$$\alpha^p d_f(\alpha)=\alpha^p\int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}d\mu\le\int_{\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}}|f|^p d\mu\le\|f\|_p^p,\quad \alpha>0.$$

Luego, $\|f\|_{p,\infty}\le\|f\|_p$. □

Observación 2.23. El contenido entre los espacios indicado en la proposición anterior es, en general, estricto. Basta considerar, por ejemplo, $X=\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, $0<p<\infty$ y la función $f(x)=|x|^{-n/p}$, $x\in\mathbb{R}^n$. Se tiene que la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx=c_n\int_0^\infty r^{n(1-1/p)-1}dr$$

es divergente para cualquier p pues o tiene problemas en el origen o bien en el infinito.

Sin embargo, usando de nuevo coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$, podemos escribir, para cada $\alpha>0$,

$$d_f(\alpha)=\mu\Big(\big\{x\in\mathbb{R}^n:|x|^{-n/p}>\alpha\big\}\Big)=\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<\alpha^{-p/n}\}}dx=w_{n-1}\int_0^{\alpha^{-p/n}}r^{n-1}dr=\frac{v_n}{\alpha^p},$$

lo que nos dice que $\|f\|_{p,\infty}^p=v_n$. Aquí v_n representa el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$ y $w_{n-1}=nv_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ el área de la esfera $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1\}$. □

Podemos hacer un breve análisis de por qué no funciona, en general, la desigualdad inversa en (2.11). Supongamos que $f\in L^{p,\infty}(X,\mu)$. Si tenemos en cuenta la Proposición 2.21 y que $d_f(\alpha)\le(\|f\|_{p,\infty}/\alpha)^p$, $\alpha>0$, y escribimos

$$\|f\|_p^p=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}d_f(\alpha)d\alpha\le p\|f\|_{p,\infty}^p\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\alpha},$$

se llega a una integral que es divergente, tanto en 0 como en ∞. Pero podríamos decir que "por poco", pues sería convergente en el origen si en el integrando el exponente de α fuera un poco menor y, en el infinito, si fuera ligeramente mayor. Por tanto, parece que si existen condiciones que mejoren las estimaciones de la función distribución en el origen y en el infinito podríamos obtener que $f\in L^p(X,\mu)$.

En este sentido presentamos los enunciados siguientes.

Proposición 2.24. *Sean* $0<q<\infty$ *y* $f\in L^{q,\infty}(X,\mu)$.

(i) Supongamos que $\mu(\{x\in X:f(x)\neq 0\})<\infty$. *Entonces* $f\in L^p(X,\mu)$, *para todo* $0<p<q$.

(ii) Si f *es, además, una función en* $L^\infty(X,\mu)$, *entonces,* $f\in L^p(X,\mu)$, *cuando* $p>q$.

Demostración. (i) Denotamos por $E=\{x\in X:f(x)\neq 0\}$ y fijamos $0<p<q$. Observamos que

$$d_f(\alpha)\le\frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{\alpha^q}\quad\text{y}\quad d_f(\alpha)\le\mu(E),\quad\alpha>0.$$

Luego, haciendo uso de la Proposición 2.21,

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p&=p\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\alpha^{p-1}d_f(\alpha)d\alpha\le p\left(\mu(E)\int_0^1\alpha^{p-1}d\alpha+\|f\|_{q,\infty}^q\int_1^\infty\alpha^{p-q-1}d\alpha\right)\\&=\mu(E)+\frac{p}{q-p}\|f\|_{q,\infty}<\infty.\end{aligned}$$

(ii) Si suponemos que $f\in L^\infty(X,\mu)$ entonces $d_f(\alpha)=0$, para todo $\alpha>\|f\|_\infty$. Por tanto, cuando $q>p$,

$$\|f\|_p^p=p\int_0^{\|f\|_\infty}\alpha^{p-1}d_f(\alpha)d\alpha\le q\|f\|_{q,\infty}^q\int_0^{\|f\|_\infty}\alpha^{p-q-1}d\alpha=\frac{p}{p-q}\|f\|_{q,\infty}^q\|f\|_\infty^{p-q}<\infty.$$

□

Mostramos a continuación dos resultados que completan los recogidos en la Proposiciones 2.13 y 2.14.

Proposición 2.25. *Sean* $0<p<q<r\le\infty$. *Entonces,* $L^{q,\infty}(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$.

Demostración. Consideramos $f\in L^{q,\infty}(X,\mu)$. Fijamos $s>0$ y definimos las funciones f_s y f^s como

$$f_s=f\mathscr{X}_{\{x\in X:|f(x)|>s\}}\quad \text{y}\quad f^s=f\mathscr{X}_{\{x\in X:|f(x)|\le s\}}.$$

Veamos primero que son funciones que pertenecen al espacio $L^{q,\infty}(X,\mu)$. Afirmamos que

$$d_{f_s}(\alpha)=\begin{cases} d_f(s), & 0<\alpha\le s,\\ d_f(\alpha), & \alpha>s,\end{cases}\quad \text{y}\quad d_{f^s}(\alpha)=\begin{cases} d_f(\alpha)-d_f(s), & 0<\alpha<s,\\ 0, & \alpha\ge s.\end{cases}\tag{2.12}$$

En efecto, para cada $\alpha>0$ se tiene que

$$|f_s(x)|=|f(x)|\mathscr{X}_{\{x\in X:|f(x)|>s\}}(x)>\alpha \quad \text{si, y solo si,}\quad |f(x)|>\alpha \text{ y } |f(x)|>s,$$

y

$$|f^s(x)|=|f(x)|\mathscr{X}_{\{x\in X|f(x)|\le s\}}(x)>\alpha \quad \text{si, y solo si,}\quad \alpha<|f(x)|\le s.$$

Entonces, $E_{f_s}(\alpha)=E_f(s)$, cuando $0<\alpha\le s$, y $E_{f_s}(\alpha)=E_f(\alpha)$, si $\alpha>s$. Por otro lado, $E_{f^s}(\alpha)=E_f(\alpha)\setminus E_f(s)$, si $0<\alpha<s$, y $E_{f^s}(\alpha)=\emptyset$, cuando $\alpha\ge s$. De aquí se sigue sin dificultad que se cumple (2.12). Por tanto,

$$\|f_s\|_{q,\infty}=\sup_{\alpha>0}\alpha d_{f_s}(\alpha)^{1/q}\le \sup_{0<\alpha\le s}\alpha d_f(s)^{1/q}+\sup_{\alpha>s}\alpha d_f(\alpha)^{1/q}=sd_f(s)^{1/q}+\|f\|_{q,\infty}<\infty,$$

y análogamente,

$$\|f^s\|_{q,\infty}=\sup_{0<\alpha<s}\alpha(d_f(\alpha)-d_f(s))^{1/q}\le c_q\Big(sd_f(s)^{1/q}+\|f\|_{q,\infty}\Big)<\infty,$$

donde $c_q=\text{máx}\{1,2^{1/q-1}\}$ (ver (2.6) y (2.7)). Queda probado así que f_s y $f^s\in L^{q,\infty}(X,\mu)$.

Ahora observamos que

$$\mu\Big(\{x\in X:|f_s(x)|\ne 0\}\Big)\le\mu\Big(\{x\in X:|f(x)|>s\}\Big)=d_f(s)\le\frac{\|f\|_{q,\infty}^q}{s^q}<\infty,$$

y $\|f^s\|_\infty\le s$. Por tanto, f_s y f^s verifican las condiciones de la Proposición 2.24 *(i)* y *(ii)*, respectivamente. Se deduce entonces que $f_s\in L^p(X,\mu)$ y $f^s\in L^r(X,\mu)$. Y es claro que $f=f_s+f^s$, por lo que se termina la prueba. □

Proposición 2.26. *Sean* $0<p<q<r\le\infty$. *Se tiene que* $L^{p,\infty}(X,\mu)\cap L^{r,\infty}(X,\mu)\subseteq L^q(X,\mu)$. *Además, para cada* $f\in L^q(X,\mu)$,

$$\|f\|_q\le C_{p,q,r}\|f\|_{p,\infty}^{\alpha_{p,q,r}}\|f\|_{r,\infty}^{\beta_{p,q,r}},$$

donde

$$C_{p,q,r}=\left(\frac{q}{q-p}+\frac{q}{r-q}\right)^{1/q},\quad \alpha_{p,q,r}=\frac{1/q-1/r}{1/p-1/q},\quad \beta_{p,q,r}=\frac{1/p-1/q}{1/p-1/r},$$

cuando $r<\infty$, *y* $C_{p,q,\infty}=1$, $\alpha_{p,q,\infty}=p/q$, $\beta_{p,q,\infty}=1-p/q$.

Demostración. Sea $f\in L^{p,\infty}(X,\mu)\cap L^{r,\infty}(X,\mu)$.
Consideramos primero $r<\infty$. Por definición de la cuasinorma débil se tiene que

$$d_f(\alpha)\le\text{mín}\left\{\frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p},\frac{\|f\|_{r,\infty}^r}{\alpha^r}\right\},\quad \alpha>0.$$

Entonces, para un cierto $B>0$ que será fijado más tarde podemos escribir, usando la Proposición 2.21,

$$\|f\|_q^q\le q\int_0^\infty\alpha^{q-1}\,\text{mín}\left\{\frac{\|f\|_{p,\infty}^p}{\alpha^p},\frac{\|f\|_{r,\infty}^r}{\alpha^r}\right\}d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&\leq q\|f\|_{p,\infty}^p \int_0^B \alpha^{q-p-1}\,d\alpha + q\|f\|_{r,\infty}^r \int_B^\infty \alpha^{q-r-1}\,d\alpha \\
&= \frac{q}{q-p} B^{q-p}\|f\|_{p,\infty}^p + \frac{q}{r-q} B^{q-r}\|f\|_{r,\infty}^r,
\end{aligned}$$

Ahora elegimos B para que $B^{q-p}\|f\|_{p,\infty}^p = B^{q-r}\|f\|_{r,\infty}^r$, esto es,

$$B = \left(\frac{\|f\|_{r,\infty}^r}{\|f\|_{p,\infty}^p}\right)^{1/(r-p)}.$$

Se consigue así

$$\|f\|_q^q \leq \left(\frac{q}{q-p} + \frac{q}{r-q}\right) B^{q-p}\|f\|_{p,\infty}^p = C_{p,q,r}^q \|f\|_{p,\infty}^{p(1-\frac{q-p}{r-p})} \|f\|_r^{r\frac{q-p}{r-p}}$$

□

Finalizamos el estudio de los espacios de Lebesgue de tipo débil presentando una desigualdad de Hölder en este contexto y que completa el resultado visto en la Observación 2.4.

Proposición 2.27. *Sean $\{p_k\}_{k=1}^m \subset (0,\infty)$ y $\{f_k\}_{k=1}^m$ funciones tales que $f_k \in L^{p_k,\infty}(X,\mu)$, $k = 1,\dots,m$. Consideramos $0 < p < \infty$ tal que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m}. \tag{2.13}$$

Entonces se tiene que $f_1\cdots f_m$ es una función en $L^{p,\infty}(X,\mu)$ y

$$\left\|f_1\cdots f_m\right\|_{p,\infty} \leq p^{-1/p} p_1^{1/p_1}\cdots p_m^{1/p_m} \|f_1\|_{p_1,\infty}\cdots\|f_m\|_{p_m,\infty}.$$

Demostración. Podemos suponer, por la homogeneidad de la cuasinorma $\|\cdot\|_{p,\infty}$, que $\|f\|_{p_k,\infty} = 1$, $k = 1,\dots,m$. Luego nuestro objetivo es establecer

$$\left\|f_1\cdots f_m\right\|_{p,\infty} \leq p^{-1/p} p_1^{1/p_1}\cdots p_m^{1/p_m}. \tag{2.14}$$

En virtud de la Proposición 2.20 *(vi)*, y de que $f_k \in L^{p_k,\infty}(X,\mu)$, $k = 1,\dots,m$, para cada $\alpha > 0$ podemos escribir

$$d_{f_1\cdots f_m}(\alpha) \leq d_{f_1}(\alpha_1) + \cdots + d_{f_m}(\alpha_m) \leq \frac{1}{\alpha_1^{p_1}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_m^{p_m}},$$

para cualesquiera $\alpha_k > 0$, $k = 1,\dots,m$, verificando $\alpha = \alpha_1\cdots\alpha_m$. Luego, una manera de probar (2.14) consiste en minimizar la función $F(x_1,\dots,x_m) = x_1^{p_1} + \cdots + x_m^{p_m}$, bajo la condición $x_1\cdots x_m = 1/\alpha$. Usando los multiplicadores de Lagrange se puede ver que los puntos críticos $(x_1,\dots,x_m)$ verifican

$$p_1 x_1^{p_1} = \cdots = p_m x_m^{p_m} =: A. \tag{2.15}$$

El valor de F en estos puntos viene dado por

$$F(x_1,\dots,x_m) = \frac{A}{p_1} + \cdots + \frac{A}{p_m} = \frac{A}{p} = \frac{1}{p} A^{p/p_1}\cdots A^{p/p_m},$$

donde hemos usado además la hipótesis (2.13). Luego, de (2.15) se deduce que

$$F(x_1,\dots,x_m) = \frac{1}{p} p_1^{p/p_1}\cdots p_m^{p/p_m} (x_1\cdots x_m)^p = \frac{p_1^{p/p_1}\cdots p_m^{p/p_m}}{p\alpha^p}.$$

Entonces podemos concluir que

$$d_{f_1\cdots f_m}(\alpha) \leq \frac{p_1^{p/p_1}\cdots p_m^{p/p_m}}{p\alpha^p}, \quad \alpha > 0,$$

y (2.14) queda así probado. □

2.3. La convolución en espacios de Lebesgue.

Estudiamos en esta sección propiedades de los espacios de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ que involucran a la operación de convolución, una operación que tiene un papel relevante en muchas ramas del análisis, en particular, en el contexto del análisis de Fourier. Consideramos a lo largo de este apartado el espacio $X = \mathbb{R}^n$ con la medida m de Lebesgue.

Dadas dos funciones f, g medibles en $\mathbb{R}^n$ se define la convolución $f * g$ de f y g mediante

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dm(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

siempre y cuando la integral exista.

Veamos que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces la integral es finita en casi todo punto.

Proposición 2.28. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Demostración. De la definición de la convolución se sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|\,dm(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dm(y)\,dm(x),$$

y aplicando el Teorema de Fubini-Tonelli ([5, Theorem 5.7]) y la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue se obtiene que

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|\,dm(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dm(x) \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dm(y) = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

esto es, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y, por tanto, $f * g(x)$ existe en c.t.$x \in \mathbb{R}^n$. □

La operación de convolución tiene la cualidad de "regularizar" a las funciones involucradas, en el sentido de que la función $f * g$ es más regular que f y g. Ilustramos esta propiedad con un sencillo ejemplo. Consideramos en $\mathbb{R}$ la función $f = \mathscr{X}_{[-1,1]}$. Veamos que $f * f(x) = (2-|x|)\mathscr{X}_{[-2,2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que $x - y \in [-1,1]$ si, y solo si, $y \in [x-1, x+1]$, obtenemos

$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{X}_{[-1,1]}(x-y)\mathscr{X}_{[-1,1]}(y)\,dm(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{X}_{[x-1,x+1]\cap[-1,1]}(y)\,dm(y),$$

esto es, $f * f(x) = m([x-1,x+1]\cap[-1,1])$, $x \in \mathbb{R}$.

Ahora observamos que si $|x| \geq 2$, entonces $[x-1,x+1]\cap[-1,1] = \emptyset$, por lo que $f * f(x) = 0$, $|x| \geq 2$. Por otra parte, $[x-1,x+1]\cap[-1,1] = [x-1,1]$, cuando $0 \leq x \leq 2$, y $[x-1,x+1]\cap[-1,1] = [-1,x+1]$, si $-2 \leq x \leq 0$. Por tanto, $f * f(x) = 2 - |x|$, $|x| \leq 2$.

Repitiendo el argumento podemos escribir

$$\begin{aligned} f * f * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} (2-|y|)\mathscr{X}_{[-2,2]}(y)\mathscr{X}_{[-1,1]}(x-y)\,dm(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (2-|y|)\mathscr{X}_{[-2,2]\cap[x-1,x+1]}(y)\,dm(y), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Cuando $|x| \geq 3$, $[-2,2]\cap[x-1,x+1] = \emptyset$, y entonces $f * f * f(x) = 0$. Si $|x| \leq 1$, se tiene $[x-1,x+1] \subseteq [-2,2]$ y, por tanto,

$$f * f * f(x) = \int_{x-1}^{x+1} (2-|y|)\,dm(y) = 3 - x^2, \quad |x| \leq 1.$$

Por último, cuando $1 \leq |x| \leq 3$, se verifica que $[-2,2]\cap[x-1,x+1] = [x-1,2]$, si $1 \leq x \leq 3$, y $[-2,2]\cap[x-1,x+1] = [-2,x+1]$, si $-3 \leq x \leq -1$. Es fácil ver entonces que $f * f * f(x) = (3-|x|)^2/2$, $1 \leq |x| \leq 3$. Se obtiene así que

$$f * f * f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & |x| \leq 1, \\ \dfrac{(3-|x|)^2}{2}, & 1 \leq |x| \leq 3, \\ 0, & |x| \geq 3. \end{cases}$$

En la Figura 2.2 se puede apreciar cómo la convolución mejora la regularidad de la función f.

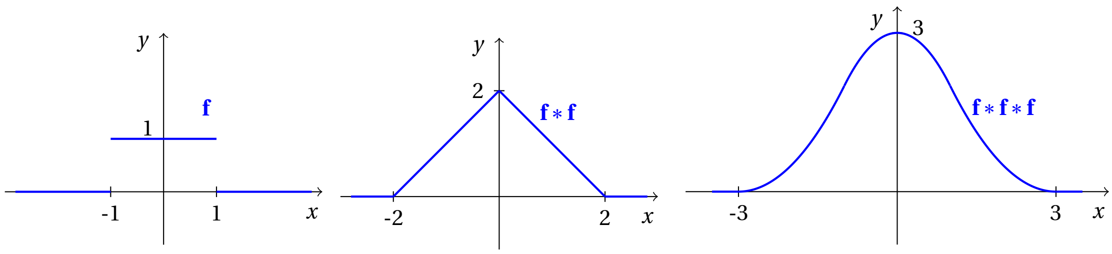

Figura 2.2: Regularidad

La convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ satisface las siguientes propiedades básicas.

Proposición 2.29. *Sean $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene:*
(i) $f * g = g * f$ (conmutatividad);
(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (asociatividad);
(iii) $f * (g + h) = f * h + g * h$ (propiedad distributiva).

Demostración. Es fácil probar estas propiedades. Basta hacer uso de la linealidad de la integral, la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue y el teorema de Fubini-Tonelli para intercambiar el orden de integración. □

Observación 2.30. El espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con la operación de convolución tiene estructura de álgebra de Banach[5] conmutativa, pues es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_1$, y se cumplen las propiedades descritas en la Proposiciones 2.28 y 2.29 para la convolución. □

El resultado dado en la Proposición 2.28 puede generalizarse de manera sencilla como indicamos a continuación.

Proposición 2.31. *Sea $1 \le p \le \infty$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\|f * g\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p. \tag{2.16}$$

Demostración. El caso $p = 1$ es el que se recoge en la Proposición 2.28 y cuando $p = \infty$ se sigue fácilmente pues si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$|f * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dm(y) \le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dm(y) = \|f\|_\infty \|g\|_1, \quad \text{c.t.} x \in \mathbb{R}^n.$$

Supongamos entonces que $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aplicando la desigualdad de Hölder con exponente p se obtiene

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y||g(y)|^{1/p}|g(y)|^{1/p'} dm(y) \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|dm(y)\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dm(y)\right)^{1/p'}, \quad \text{c.t.} x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

y, por tanto, en virtud del Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|dm(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dm(y)\right)^{p/p'} dm(x) \\ &= \|g\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dm(x)dm(y) = \|g\|_1^{p/p'} \|g\|_1 \|f\|_p^p = \|g\|_1^p \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

completando de esta forma la prueba. □

[5] En [10, Capítulos 10 y 11] podemos encontrar un exhaustivo análisis de las álgebras de Banach.

La desigualdad en (2.16) es un caso especial de otra aún más general, conocida como desigualdad de Young (para la convolución).

Proposición 2.32. *Sean* $1 \le p, q, r \le \infty$ *tales que*

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}. \tag{2.17}$$

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $f * g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *y* $\|f * g\|_q \le \|f\|_p \|g\|_r$.

Demostración. Primero observamos que si $r = \infty$, entonces de la relación (2.17) se tiene que $p = 1$ y $q = \infty$ y este caso ya está incluido en (2.16). Ocurre lo mismo cuando $p = \infty$, pues, en ese caso, $r = 1$ y $q = \infty$. Cuando $q = \infty$, entonces p y r son exponentes conjugados y la propiedad se sigue de la desigualdad de Hölder.
Asumimos entonces $1 \le p, q, r < \infty$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Usando de nuevo (2.17) obtenemos

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Y así, podemos escribir

$$|f * g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{p/r'} \Big(|f(x-y)|^{p/q} |g(y)|^{r/q}\Big) |g(y)|^{r/p'} \, dm(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Hölder generalizada (ver Observación 2.4) con exponentes r', q y p' a las funciones $f_1(y) = |f(x-y)|^{p/r'}$, $f_2(y) = |f(x-y)|^{p/q}|g(y)|^{r/q}$ y $f_3 = |g(y)|^{r/p'}$, $y \in \mathbb{R}^n$, y llegamos a que

$$|f * g(x)| \le \|f\|_p^{p/r'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^r \, dm(y) \right)^{1/q} \|g\|_r^{r/p'}.$$

Luego, tomando norma L^q y usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} \|f * g\|_q &\le \|f\|_p^{p/r'} \|g\|_r^{r/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |g(y)|^r \, dm(y) dm(x) \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p^{p/r'} \|g\|_r^{r/p'} \|f\|_p^{p/q} \|g\|_r^{r/q} = \|f\|_p \|g\|_r. \end{aligned}$$

□

El resultado de esta última proposición tiene una versión para espacios L^p de tipo débil.

Proposición 2.33. *Consideramos* $1 \le p < \infty$ *y* $1 < q, r < \infty$ *tales que*

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

Existe $C_{p,r} > 0$ *tal que si* $f \in L^p(X, \mu)$ *y* $g \in L^{r,\infty}(X, \mu)$ *entonces* $f * g \in L^{q,\infty}(X, \mu)$ *y*

$$\|f * g\|_{q,\infty} \le C_{p,q,r} \|f\|_p \|g\|_{r,\infty}.$$

Demostración. Sean $f \in L^p(X, \mu)$ y $g \in L^{r,\infty}(X, \mu)$. Nuestro objetivo es probar que existe $C_{p,q,r} > 0$ tal que

$$d_{f*g}(\alpha) \le C_{p,q,r}^q \|f\|_p^q \|g\|_{r,\infty}^q, \quad \alpha > 0. \tag{2.18}$$

Fijamos $\alpha > 0$ y al igual que hicimos en la demostración de la Proposición 2.25 descomponemos la función $g = g^s + g_s$, donde $g^s = g\mathscr{X}_{\{x \in X : |x| \le s\}}$ y $g_s = g\mathscr{X}_{\{x \in X : |x| > s\}}$. Aquí $s > 0$ es una constante que puede depender de α y que será elegida más tarde.

Ya que $d_{f*g}(\alpha) \le d_{f*g^s}(\alpha/2) + d_{f*g_s}(\alpha/2)$ (Proposición 2.20 (v)), será suficiente estimar $d_{f*g^s}(\alpha/2)$ y $d_{f*g_s}(\alpha/2)$.
Veamos en primer lugar que eligiendo s adecuadamente se tiene que $d_{f*g^s}(\alpha/2) = 0$.

Para ello, comenzamos viendo que $g^s \in L^u(\mathbb{R}^n)$ cuando $u > r$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.21 y (2.12) podemos escribir, para cada $u \in (r, \infty)$,

$$\begin{aligned}\|g^s\|_u^u &= u\int_0^\infty \sigma^{u-1} d_{g^s}(\sigma)d\sigma = u\int_0^s \sigma^{u-1}(d_g(\sigma)-d_g(s))d\sigma\\ &\le u\|g\|_{r,\infty}^r \int_0^s \sigma^{u-1-r}d\sigma - u d_g(s)\int_0^s \sigma^{u-1}d\sigma\\ &= \frac{u}{u-r}s^{u-r}\|g\|_{r,\infty}^r - s^u d_g(s) \le \frac{u}{u-r}s^{u-r}\|g\|_{r,\infty}^r. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ya que $1/r = 1/q + 1/p'$, por la desigualdad de Hölder (ver Observación 2.4) se sigue que $|f * g^s(x)| \le \|f\|_p \|g^s\|_{p'}$. Luego, si $p = 1$, se tiene que

$$|f * g^s(x)| \le \|f\|_1 \|g^s\|_\infty \le s\|f\|_1, \quad \text{c.t.} x \in \mathbb{R}^n,$$

y eligiendo $s = \alpha/(2\|f\|_1)$ llegamos a que $|f * g^s(x)| \le \alpha/2$, c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que $d_{f*g^s}(\alpha/2) = 0$. Cuando $1 < p < \infty$, tomamos $u = p'$ en (2.19) (nótese que $p' \in (r,\infty)$) y obtenemos que

$$|f * g^s(x)| \le \left(\frac{p'}{p'-r}\right)^{1/p'} s^{1-r/p'}\|f\|_p\|g\|_{r,\infty}^{r/p'}, \quad \text{c.t.} x \in \mathbb{R}^n.$$

Elegimos ahora s de manera que el término de la derecha sea igual a $\alpha/2$, esto es,

$$s = \left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p'}\frac{r}{q}\|f\|_p^{-p'}\|g\|_{r,\infty}^{-r}\right)^{1/(p'-r)} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{q/r}\left(\frac{r}{q}\right)^{q/(rp')}\|f\|_p^{-q/r}\|g\|_{r,\infty}^{q/p'}, \tag{2.20}$$

y, como antes, se deduce que $d_{f*g^s}(\alpha/2) = 0$.

Analizamos ahora el término $d_{f*g_s}(\alpha/2)$, para el valor s que hemos escogido. Procediendo como en (2.19) conseguimos la siguiente estimación para $1 \le u < r$,

$$\begin{aligned}\|g_s\|_u^u &= u\int_0^\infty \sigma^{u-1}d_{g_s}(\sigma)d\sigma = u d_g(s)\int_0^s \sigma^{u-1}d\sigma + u\int_s^\infty \sigma^{u-1}d_g(\sigma)d\sigma\\ &\le s^u d_g(s) + u\|g\|_{r,\infty}^r\int_s^\infty \sigma^{u-1-r}d\sigma \le s^{u-r}\|g\|_{r,\infty}^r + \frac{u}{r-u}s^{u-r}\|g\|_{r,\infty}^r\\ &= \frac{r}{r-u}s^{u-r}\|g\|_{r,\infty}^r.\end{aligned} \tag{2.21}$$

En virtud de (2.16) y tomando $u = 1$ se sigue que

$$\|f * g_s\|_p \le \|f\|_p\|g_s\|_1 \le \frac{r}{r-1}s^{1-r}\|f\|_p\|g\|_{r,\infty}^r = r's^{1-r}\|f\|_p\|g\|_{r,\infty}^r,$$

y, usando (2.11), obtenemos entonces que

$$d_{f*g_s}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \left(\frac{2}{\alpha}\|f*g_s\|_p\right)^p \le \left(\frac{2r'}{\alpha}s^{1-r}\|f\|_p\|g\|_{r,\infty}^r\right)^p.$$

Sustituimos ahora el valor de s que habíamos elegido según p. De esta forma se consiguen las siguientes estimaciones. Cuando $p = 1$, $s = \alpha/(2\|f\|_1)$, y, entonces,

$$d_{f*g_s}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le r'\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-r}\|f\|_1^r\|g\|_{r,\infty}^r = r'\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-q}\|f\|_1^q\|g\|_{r,\infty}^q,$$

donde se ha tenido en cuenta que, en este caso, $r = q$.

Por otro lado, cuando $1 < p < \infty$, s toma el valor dado en (2.20), y escribiendo $(1-r)p = -rp/r'$, de la relación entre p, q y r se tiene que

$$\begin{aligned}s^{(1-r)p} &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-pq/r'}\left(\frac{r}{q}\right)^{-pq/(p'r')}\|f\|_p^{pq/r'}\|g\|_{r,\infty}^{pqr/(p'r')}\\ &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p-q}\left(\frac{r}{q}\right)^{(p-q)/p'}\|f\|_p^{q-p}\|g\|_{r,\infty}^{(q-p)r/p'}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$d_{f*g_s}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le 2^q(r')^p\left(\frac{r}{q}\right)^{(p-q)/p'}\alpha^{-q}\|f\|_p^q\|g\|_{r,\infty}^{rp+(q-p)r/p'}$$

$$= C_{p,q,r}^{q} \alpha^{-q} \|f\|_p^q \|g\|_{r,\infty}^q.$$

Nótese que

$$rp + \frac{(q-p)r}{p'} = rp\Big(1 - \frac{1}{p'}\Big) + \frac{qr}{p'} = r + \frac{qr}{p'} = q.$$

Recopilando todas las estimaciones vistas se deduce que

$$d_{f*g}(\alpha) \le d_{f*g_s}\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \le C_{p,q,r}^q \|f\|_p^q \|g\|_{r,\infty}^q,$$

donde la constante $C_{p,q,r}$ es independiente de α. La arbitrariedad de $\alpha > 0$ permite concluir (2.18). □

Observación 2.34. cuando $p = 1$ y $q = r = \infty$, el resultado de esta proposición es cierto (ver la Proposición 2.32). Sin embargo, como ilustran los siguientes ejemplos, en general, no se cumple para los valores extremos de p, q y r.

En primer lugar consideramos $f = \mathscr{X}_{[0,1]}$ y $g(x) = \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Claramente $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ y $g \in L^{1,\infty}(\mathbb{R})$ pues

$$d_g(\alpha) = m\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x|} > \alpha\Big\}\Big) = \frac{2}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Pero $f * g \notin L^\infty(\mathbb{R})$ ya que

$$f * g(x) = \int_0^1 \frac{1}{|x-y|} dy = \infty, \quad x \in [0,1].$$

De la misma forma, sean $1 < p < \infty$, $r = p'$, $f(x) = |x|^{-1/p} \ln^{-1}(|x|) \mathscr{X}_{\mathbb{R}\setminus(-2,2)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = |x|^{-1/r}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se tiene que

$$\|f\|_p^p = 2\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^p(x)} = 2^{2-p},$$

y

$$d_g(\alpha) = m\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : |x|^{-1/r} > \alpha\Big\}\Big) = m\Big(\Big\{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{\alpha^r}\Big\}\Big) = \frac{2}{\alpha^r}, \quad \alpha > 0.$$

Por tanto, $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^{r,\infty}(\mathbb{R})$. Sin embargo, para $|x| \le 1$, $y^{1/p}|y-x|^{1/p'} \ln y \le (y+1)\ln(y+1)$, $y > 0$. Luego,

$$f * g(x) = 2\int_2^\infty \frac{dy}{y^{1/p}|x-y|^{1/p'} \log(y)} \ge 2\int_2^\infty \frac{dy}{(y+1)\ln(y+1)} = \infty,$$

y $f * g \notin L^\infty(\mathbb{R})$. □

Para terminar la sección introducimos y analizamos la utilidad de las conocidas como aproximaciones de la identidad o núcleos de sumabilidad. Como vimos en la Observación 2.30, el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ con la operación de convolución es un álgebra de Banach conmutativa. Sin embargo, no tiene elemento unidad, es decir, no existe una función $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de manera que $f * u = u * f = f$, para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$[6]. Sin embargo, sí podemos encontrar una sucesión $\{u_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que, para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $u_r * f$ converge a f en $L^1(\mathbb{R}^n)$, esto es, $\|u_r * f - f\|_1 \longrightarrow 0$, cuando $r \to \infty$.

Decimos que la familia $\{\mathscr{K}_t\}_{t>0} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ es una *aproximación de la identidad* o un *núcleo de sumabilidad* cuando se cumplen las siguientes condiciones:

(S1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{K}_t(x)\,dm(x) = 1;$

(S2) Existe $C_0 > 0$ tal que $\|\mathscr{K}_t\|_1 \le C_0$, para todo $t > 0$;

(S3) Para cada $\delta > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |\mathscr{K}_t(x)|\,dm(x) = 0.$$

Una forma sencilla de generar núcleos de sumabilidad es la siguiente.

---

6 Este hecho puede verse usando la transformación integral de Fourier ([5, Problem 8.4]). Además se sabe que el único elemento que actúa como unidad para la convolución no es una función sino una distribución, la *delta de Dirac*.

Proposición 2.35. *Sea $\mathcal{K} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}\, dm = 1$. Para cada $t > 0$ denotamos por $\mathcal{K}_t$ a la función*

$$\mathcal{K}_t(x) = \frac{1}{t^n}\mathcal{K}\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $\{\mathcal{K}_t\}_{t>0}$ es una aproximación de la identidad.

Demostración. Dado $t > 0$, haciendo el cambio de variables $y = x/t$ se obtiene fácilmente que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_t(x)dm(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x)dm(x) = 1 \quad \text{y} \quad \|\mathcal{K}_t\|_1 = \|\mathcal{K}\|_1 =: C_0.$$

Por otro lado, ya que $\mathcal{K}$ es una función integrable, para cada $\delta > 0$ se sigue que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta} |\mathcal{K}_t(x)|dm(x) = \lim_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta/tn} |\mathcal{K}(x)|dm(x) = 0.$$

Se cumplen así las propiedades (S1), (S2) y (S3). □

Veamos algunos ejemplos importantes de aproximaciones de la identidad que se aplican especialmente en la teoría de distribuciones y en el análisis de Fourier.

Mencionamos en primer lugar el *núcleo de Poisson* en $\mathbb{R}^n$. Se considera la función

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde $c_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma((n+1)/2)$. Veamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dm(x) = 1.$$

Usando el cambio a coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dm(x) = c_n w_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}dr,$$

donde $w_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ es el área de la esfera n-dimensional. Haciendo el cambio de variables $t = r^2/(1+r^2)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dm(x) &= \frac{c_n w_{n-1}}{2}\int_0^1 t^{n/2-1}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{c_n w_{n-1}}{2}B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)\\ &= c_n w_{n-1}\frac{\Gamma(n/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n+1)/2)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1.\end{aligned}$$

Aquí $B(p,q)$, $p,q > 0$, representa la función Beta de Euler (ver [5, Appendix B.1]). La función positiva P verifica entonces las condiciones de la Proposición 2.35, y, por tanto, la familia $\{P_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad, siendo para cada $t > 0$,

$$P_t(x) = \frac{1}{t^n}P\left(\frac{x}{t}\right) = c_n\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Otro de los núcleos de sumabilidad relevantes es el *núcleo del calor* $\{W_t\}_{t>0}$ que se define de forma análoga a partir de la función

$$W(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}e^{-|x|^2/4}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

esto es, para cada $t > 0$,

$$W_t(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-|x|^2/(4t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

También ahora resulta fácil ver que W satisface las condiciones de la Proposición 2.35 pues es una función positiva y

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x)dm(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2/4}dx_i = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Por último consideramos una aproximación de la identidad que resulta muy útil en la práctica pues está constituida por funciones en la clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, esto es, funciones de clase C^∞ con soporte compacto. Como en los casos anteriores se genera a partir de una función $\mathcal{K}$ no negativa y de integral 1. Sea

$$\mathcal{K}(x) = \alpha_n \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)}, & |x| \le 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo $\alpha_n > 0$ una constante que se elegirá adecuadamente.
Es claro que $\mathcal{K}$ tiene soporte compacto y podemos descomponerla como $\mathcal{K} = \alpha_n g \circ f$, donde f es la función de clase C^∞, $f(x) = 1 - |x|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$, y $g(u) = e^{-1/u}\mathcal{X}_{(0,\infty)}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Luego, basta probar que g es una función en $C^\infty(\mathbb{R})$ para establecer que $\mathcal{K} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observamos en primer lugar que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^k}{du^k} g(u) = P_k\left(\frac{1}{u}\right) g(u), \quad u > 0, \tag{2.22}$$

para cierto polinomio P_k. Es claro para $k = 0, 1$, con $P_0(z) = 1$ y $P_1(z) = z^2$, $z \in \mathbb{R}$. Supongamos que para cierto k se cumple (2.22). Entonces,

$$\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} g(u) = -\frac{1}{u^2} P_k'\left(\frac{1}{u}\right) g(u) + P_k\left(\frac{1}{u}\right) P_1\left(\frac{1}{u}\right) g(u) = P_{k+1}\left(\frac{1}{u}\right) g(u), \quad u > 0,$$

siendo $P_{k+1}(z) = z^2 P_k'(z) + P_k(z) P_1(z)$, $z \in \mathbb{R}$, un polinomio de grado $k+1$. Así, (2.22) queda establecido.

Teniendo en cuenta ahora que, para todo $\alpha > 0$, $\sup_{z>0} z^\alpha e^{-z} < \infty$, se tiene que si P es un polinomio de grado m y $a > m$, entonces

$$\left| P\left(\frac{1}{u}\right) g(u) \right| \le C u^a \left(\frac{1}{u}\right)^{m+a} e^{-1/u} \le C u^a, \quad u \in (0,1),$$

de donde se deduce que $\lim_{u \to 0^+} P(1/u) g(u) = 0$. Es obvio que también el límite cuando $u \to 0^-$ es 0. Por tanto, para $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{du^k} g(u) \longrightarrow 0$, cuando $u \to 0$.

Queda por establecer entonces que $\frac{d^k}{du^k} g(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, lo que hacemos de nuevo usando inducción. Para $k = 0$ es cierto, así que supongamos que para algún $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{du^k} g(0) = 0$. Escribimos

$$\frac{d^{k+1}}{du^{k+1}} g(0) = \lim_{u \to 0} \frac{\frac{d^k}{du^k} g(t) - \frac{d^k}{du^k} g(0)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} \frac{d^k}{du^k} g(u), \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Es evidente que el $\lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} \frac{d^k}{du^k} g(u) = 0$. Y de (2.22), usando el razonamiento anterior para el polinomio $P(z) = z P_k(z)$, $z \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \frac{d^k}{du^k} g(u) = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} P_k\left(\frac{1}{u}\right) g(u) = 0.$$

Ya que $g \circ f \ge 0$ es una función no nula en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que es integrable y $\int_{\mathbb{R}^n} (g \circ f) dm > 0$. Luego, tomando $\alpha_n = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (g \circ f) dm \right)^{-1}$ se consigue que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K} dm = 1$.

En virtud de la Proposición 2.35, la familia $\{\mathcal{K}_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad[7].

La importancia de las aproximaciones de la identidad en los espacios L^p radica en el resultado de aproximación siguiente.

Teorema 2.36. *Sea $\{\mathcal{K}_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad.*

(i) Si $1 \le p < \infty$, entonces, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_p \longrightarrow 0, \quad \textit{cuando } t \to 0^+.$$

(ii) Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, esto es, una función continua en $\mathbb{R}^n$ tal que $|f(x)| \longrightarrow 0$, cuando $|x| \to \infty$. Entonces

$$\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_\infty \longrightarrow 0, \quad \textit{cuando } t \to 0^+.$$

[7] La función $\mathcal{K}_t$, $t > 0$, es conocida como *"mollifier"* ó *función "bump"*.

Demostración. (i) Sean $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Teniendo en cuenta que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_t dm = 1$ y aplicando la desigualdad de Hölder y la propiedad (S2) podemos escribir

$$\begin{aligned}|f * \mathcal{K}_t(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\mathcal{K}_t(y) dm(y) \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \right)^{1/p} \|\mathcal{K}_t\|_1^{1/p'} \\ &\leq C_0^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.\end{aligned}$$

Entonces, si para cada $y \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\tau_y f$ la función dada por $\tau_y f(x) = f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_p^p &\leq C_0^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) dm(x) \\ &= C_0^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dm(x) |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \\ &= C_0^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\mathcal{K}_t(y)| dm(y), \quad t > 0.\end{aligned}$$

Afirmamos que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de manera que

$$\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon, \quad |y| \leq \delta. \tag{2.23}$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la Proposición 2.17 asegura que existe una función $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Nótese que también $\|\tau_y f - \tau_y g\|_p = \|f - g\|_p < \varepsilon/3$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, al ser g una función continua de soporte K compacto, es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Pongamos que $K \subset B(0,N)$, para cierto $N \in \mathbb{N}$. Existe $0 < \delta < 1$ de manera que

$$|g(x-y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(m(B(0,N+1)))^{1/p}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ |y| \leq \delta.$$

Observamos que $g(x-y) - g(x) = 0$, cuando $x \notin B(0,N+1)$ e $|y| \leq \delta$. Luego,

$$\|\tau_y g - g\|_p = \left(\int_{B(0,N+1)} |g(x-y) - g(x)|^p dm(x) \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |y| \leq \delta.$$

Por tanto, cuando $|y| \leq \delta$ se tiene que

$$\|\tau_y f - f\|_p \leq \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\|_p + \|f - g\|_p < \varepsilon,$$

y (2.23) queda establecido.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando (2.23) y que $\|\tau_y f - f\|_p \leq \|\tau_y f\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p$, $y \in \mathbb{R}^n$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_p^p &\leq C \left(\int_{|y| \leq \delta} + \int_{|y| > \delta} \right) \|\tau_y f - f\|_p^p |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \\ &\leq C \left(\varepsilon^p \int_{|y| \leq \delta} |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \delta} |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \right) \\ &\leq C \left(\varepsilon^p \|\mathcal{K}_t\|_1 + \int_{|y| > \delta} |\mathcal{K}_t(y)| dm(y) \right).\end{aligned}$$

De las propiedades (S2) y (S3) podemos finalmente inferir que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_p \leq C\varepsilon, \quad 0 < t < t_0.$$

(ii) Sean $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$ podemos elegir $0 < \delta < 1$ de manera que

$$\|\tau_y f - f\|_\infty < \varepsilon, \quad |y| \leq \delta.$$

Y procediendo como en el caso (i) escribimos

$$
\begin{aligned}
|(f * \mathcal{K}_t)(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)||\mathcal{K}_t(y)|dm(y) \\
&\le \left(\int_{|y|\le\delta} + \int_{|y|>\delta} \right) \|\tau_y f - f\|_\infty |\mathcal{K}_t(y)|dm(y) \\
&\le \varepsilon \|\mathcal{K}_t\|_1 + 2\|f\|_\infty \int_{|y|>\delta} |\mathcal{K}_t(y)|dm(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

y usamos las propiedades (S2) y (S3) para concluir que

$$
\|(f * \mathcal{K}_t) - f\|_\infty < C\varepsilon, \quad 0 < t < t_0,
$$

para cierto $t_0 > 0$. □

3

Teoremas de interpolación.

Dedicamos este tercer capítulo de la memoria a un tema de gran importancia en análisis y que, en particular, encuentra diversas aplicaciones en el análisis funcional y armónico: la interpolación de operadores.

A grosso modo, un teorema de interpolación puede ser descrito del siguiente modo. Dado un operador $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ entre dos espacios vectoriales y A_i, B_i, $i = 1,2$, espacios de Banach tales que $A_i \subset \mathscr{A}$ y $B_i \subset \mathscr{B}$, $i = 1,2$, y de manera que T restringido a A_i es un operador continuo de A_i en B_i, entonces existen pares de espacios de Banach (A, B) "intermedios" con $A \subset \mathscr{A}$ y $B \subset \mathscr{B}$ para los que T restringido a A es un operador acotado de A en B.

Para abordar estos teoremas de interpolación se usan normalmente dos tipos de técnicas, las que emplean la variable real (método real) y la que hacen uso de la varible compleja (método complejo).

En este trabajo analizamos la teoría de interpolación en el contexto de los espacios de Lebesgue considerando dos de los teoremas de interpolación más relevantes y que son el fundamento de la teoría: el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, que utiliza el método real, y el de Riesz-Thorin que se prueba con técnicas de análisis complejo.

Estos teoremas son la clave para establecer la acotación de muchos operadores importantes, entre ellos, el conocido operador maximal de Hardy-Littlewood, al que dedicamos una sección de este capítulo, y que juega un papel fundamental en teoría de diferenciación y en el análisis de Fourier.

Antes de profundizar en cada uno de estos teoremas introducimos algunos conceptos fundamentales.

Sean (X,μ) y (Y,ν) dos espacios de medida y T un operador definido sobre un subespacio vectorial $\mathscr{D}$ de funciones complejas μ-medibles en X y con imagen en el espacio de las funciones ν-medibles en Y.

El operador T es *lineal* si

$$T(f+g) = Tf + Tg \quad \text{y} \quad T(\lambda f) = \lambda T(f), \quad f, g \in \mathscr{D},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Decimos que T es *sublineal* cuando

$$|T(f+g)| \le |Tf| + |Tg| \quad \text{y} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \quad f, g \in \mathscr{D},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

y *cuasilineal*, cuando para algún $C > 0$,

$$|T(f+g)| \le C\big(|Tf| + |Tg|\big) \quad \text{y} \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \quad f, g \in \mathscr{D},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Nótese que los operadores sublineales son casos particulares de operadores cuasilineales.
Si $0 < p, q \le \infty$ y $L^p(X,\mu) \subset \mathscr{D}$, se dice que T es de *tipo fuerte* (p,q) cuando $Tf \in L^q(Y,\nu)$, para $f \in L^p(X,\mu)$, y existe $C_{p,q} > 0$ tal que

$$\|Tf\|_{L^q(Y,\nu)} \le C_{p,q}\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X,\mu),$$

esto es, cuando T es un operador continuo de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$ siendo la norma como operador $\|T\|_{p\to q} \le C_{p,q}$.

Por otro lado, T es de *tipo débil* (p,q) cuando T es un operador acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^{q,\infty}(Y,\nu)$, es decir, existe $C_{p,q} > 0$ de manera que

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y,\nu)} \le C_{p,q}\|f\|_{L^p(X,\mu)}, \quad f \in L^p(X,\mu),$$

Cuando $q=\infty$, T es de tipo débil (p,∞) si, y solo si, es de tipo fuete (p,∞).

En lo que sigue y para simplificar la notación, si $f \in L^p(X,\mu)$ y $g \in L^{p,\infty}(X,\mu)$ escribiremos $\|f\|_{p,\mu}$ para denotar $\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ y $\|g\|_{p,\infty,\mu}$ para denotar $\|g\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)}$. El espacio X, asociado a μ, quedará claro entonces en el contexto.

3.1. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

En virtud de las Proposiciones 2.13 y 2.14, cuando $0<p<q<r\le\infty$, se tiene que $L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu)\subseteq L^q(X,\mu)\subseteq L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$. Es natural entonces preguntarse que si dado un operador lineal T definido en $L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$ y que es acotado tanto en $L^p(X,\mu)$ como en $L^r(X,\mu)$, entonces se tiene que también es continuo en $L^q(X,\mu)$.

La respuesta, afirmativa, la tenemos en el teorema que establecemos en esta sección, cuya versión original fue establecida por Riesz en 1927 ([7]) y que fue generalizada casi 10 años después por su estudiante Thorin usando variable compleja. Fue tras la Segunda Guerra Mundial cuando Thorin publicó su tesis. En ella aparecen los fundamentos de la teoría de interpolación junto con una gran variedad de aplicaciones.

El Teorema de interpolación de Riesz-Thorin usa el método complejo para su prueba. La demostración se fundamenta en el resultado sobre funciones de variable compleja conocido como el Lema de las tres líneas de Hadamard[1].

Lema 3.1 (Lema de las tres líneas de Hadamard). *Sea F una función continua y acotada en la banda $S=\{z\in\mathbb{C}:0\le \operatorname{Re} z\le 1\}$ y analítica en su interior. Supongamos que para ciertas constantes $A_0, A_1>0$ se verifica*

$$|F(z)|\le A_0,\ \operatorname{Re} z=0 \quad y \quad |F(z)|\le A_1,\ \operatorname{Re} z=1. \tag{3.1}$$

Entonces, para todo $0\le\theta\le 1$ se tiene que

$$|F(z)|\le A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}, \quad \operatorname{Re} z=\theta.$$

Demostración. Para cada $k\in\mathbb{N}$ definimos la función

$$G_k(z)=F(z)A_0^{z-1}A_1^{-z}e^{(z^2-1)/k}, \quad z\in S.$$

G_k, $k\in\mathbb{N}$, es continua en S y analítica en su interior. Además, ya que F es acotada en S y $\sup_{x\in[0,1]}A_0^{x-1}A_1^{-x}<\infty$, obtenemos la estimación

$$|G_k(z)|=|F(z)|A_0^{\operatorname{Re} z-1}A_1^{-\operatorname{Re} z}e^{((\operatorname{Re} z)^2-1-(\operatorname{Im} z)^2)/k}\le Ce^{-(\operatorname{Im} z)^2/k}, \quad z\in S.$$

Se sigue que para cada $k\in\mathbb{N}$, $G_k(z)\longrightarrow 0$, cuando $|\operatorname{Im} z|\longrightarrow+\infty$, uniformemente en $0\le\operatorname{Re} z\le 1$. Luego, podemos encontrar una sucesión $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$ creciente de manera que

$$|G_k(z)|\le 1, \quad 0\le\operatorname{Re} z\le 1,\ |\operatorname{Im} z|\ge N_k.$$

Por otro lado, de las hipótesis (3.1) se obtiene que, para cada $k\in\mathbb{N}$,

$$|G_k(z)|\le|F(z)|A_0^{-1}\le 1,\ \operatorname{Re} z=0, \quad \text{y} \quad |G_k(z)|\le|F(z)|A_1^{-1}\le 1,\ \operatorname{Re} z=1.$$

entonces, $|G_k(z)|\le 1$, $k\in\mathbb{N}$, en la frontera del rectángulo $[0,1]\times[-N_k,N_k]$ y, por el principio del módulo máximo,

$$|G_k(z)|\le 1, \quad 0\le\operatorname{Re} z\le 1,\ |\operatorname{Im} z|\le N_k.$$

Se sigue así que $|G_k(z)|\le 1$, $z\in S$, $k\in\mathbb{N}$.
Tomando límite cuando $k\to\infty$ se concluye que

$$|F(z)A_0^{z-1}A_1^{-z}|=\lim_{k\to\infty}|G_k(z)|\le 1, \quad z\in S,$$

esto es,

$$|F(z)|\le A_0^{1-\operatorname{Re} z}A_1^{\operatorname{Re} z}, \quad z\in S.$$

□

[1] El término de las tres líneas alude al hecho de que el valor de la función sobre la línea $\operatorname{Re} z=\theta$, $0<\theta<1$, está controlado por las cotas de la función en las líneas frontera $\operatorname{Re} z=0$ y $\operatorname{Re} z=1$.

Observación 3.2. La condición de acotación para F es relevante para obtener el resultado del Lema de las tres líneas. Basta observar que si tomamos la función $F(z) = e^{-i\psi(z)}$, $z \in S$, donde $\psi(z) = e^{i\pi z}$, $z \in S$, entonces se tiene que F es continua en la banda S y

$$|F(z)| = e^{\operatorname{Im}\psi(z)} = \exp\left(e^{-\pi \operatorname{Im} z}\operatorname{sen}(\pi \operatorname{Re} z)\right).$$

Luego $|F(z)| = 1$, cuando $\operatorname{Re} z = 0$ ó $\operatorname{Re} z = 1$, pero F no está acotada en S. □

Teorema 3.3 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin). *Sean (X,μ), (Y,ν) dos espacios de medida y $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$. Supongamos que T es un operador lineal de $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ en $L^{q_0}(Y,\nu) + L^{q_1}(Y,\nu)$ tal que, para ciertas constantes $A_0, A_1 > 0$ se verifica*

$$\|Tf\|_{q_0,\nu} \le A_0\|f\|_{p_0,\mu} \quad y \quad \|Tf\|_{q_1,\nu} \le A_0\|f\|_{p_1,\mu}. \tag{3.2}$$

Entonces, para cada $0 \le \theta \le 1$, T es un operador acotado de $L^{p_\theta}(X,\mu)$ en $L^{q_\theta}(Y,\nu)$, siendo

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Además,

$$\|Tf\|_{q_\theta,\nu} \le A_\theta\|f\|_{p_\theta,\mu}, \quad f \in L^{p_\theta}(X,\mu), \tag{3.3}$$

siendo $A_\theta \le A_0^{1-\theta}A_1^\theta$.

Demostración. Fijamos $0 \le \theta \le 1$. Supongamos primero que $p_\theta = \infty$. En este caso $p_0 = p_1 = \infty$ y las hipótesis sobre T nos dicen que

$$\|Tf\|_{q_0,\nu} \le A_0\|f\|_{\infty,\mu} \quad \text{y} \quad \|Tf\|_{q_1,\nu} \le A_1\|f\|_{\infty,\mu}.$$

Entonces, usando la desigualdad de Hölder (ver Observación 2.4), ya que $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{q_\theta,\nu} &= \|(Tf)^{1-\theta}(Tf)^\theta\|_{q_\theta,\nu} \le \|(Tf)^{1-\theta}\|_{q_0/(1-\theta),\nu}\|(Tf)^\theta\|_{q_1/\theta,\nu}\\ &= \|Tf\|_{q_0,\nu}^{1-\theta}\|Tf\|_{q_1,\nu}^\theta \le A_0^{1-\theta}A_1^\theta\|f\|_{\infty,\mu}, \quad f \in L^\infty(X,\mu).\end{aligned}$$

Asumamos ahora que $1 \le p_\theta < \infty$ y $q_\theta > 1$. Vamos a probar pimero que se cumple (3.3) cuando f es una función simple en $L^{p_\theta}(X,\mu)$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que $\|f\|_{p_\theta,\mu} = 1$. Pongamos $f = \sum_{k=1}^N a_k\mathscr{X}_{E_k}$, con $a_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $\{E_k\}_{k=1}^N$ una colección finita y disjunta de conjuntos medibles en X con medida finita.

De acuerdo a [**?**, Theorem 6.14],

$$\|Tf\|_{q_\theta,\nu} = \sup_{g\in S_{q'_\theta}(Y)}\left|\int_Y Tfg\,d\nu\right|,$$

donde $S_{q'_\theta}$ representa la clase constituida por las funciones simples g en $L^{q'_\theta}(Y,\nu)$ con $\|g\|_{q'_\theta,\nu} \le 1$. Luego, nuestro objetivo es probar que

$$\left|\int_Y Tfg\,d\nu\right| \le A_0^{1-\theta}A_1^\theta\|f\|_{p_\theta,\mu}\|g\|_{q'_\theta,\nu}, \quad g \in S_{q'_\theta}(Y). \tag{3.4}$$

Sea $g \in S_{q'_\theta}(Y)$, esto es, g es una función simple en $L^{q'_\theta}(Y,\nu)$ tal que $\|g\|_{q'_\theta,\nu} \le 1$ y que representamos mediante $g = \sum_{\ell=1}^M b_\ell\mathscr{X}_{F_\ell}$, siendo $b_\ell \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\ell = 1,\dots,M$ y $\{F_\ell\}_{\ell=1}^M$ una colección disjunta de conjuntos medibles en Y con medida finita.

Para cada $z \in S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$ definimos las funciones

$$f_z = |f|^{P(z)}\frac{f}{|f|} \quad \text{y} \quad g_z = |g(z)|^{Q(z)}\frac{g}{|g|},$$

donde

$$P(z)=\frac{p_\theta}{p_0}(1-z)+\frac{p_\theta}{p_1}z \quad \text{y} \quad Q(z)=\frac{q'_\theta}{q'_0}(1-z)+\frac{q'_\theta}{q'_1}z.$$

Observamos que $f_\theta = f$ y $g_\theta = g$ (nótese que de $\frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$ se sigue que $\frac{1}{q'_\theta}=\frac{1-\theta}{q'_0}+\frac{\theta}{q'_1}$). Además, cuando $\operatorname{Re} z = 0$,

$$\|f_z\|_{p_0,\mu}^{p_0}=\int_X \left||f|^{P(z)}\right|^{p_0} d\mu=\int_X |f|^{p_0 \operatorname{Re} P(z)} d\mu=\int_X |f|^{p_\theta} d\mu = 1, \tag{3.5}$$

y

$$\|g_z\|_{q'_0,\mu}^{q'_0}=\int_Y \left||g|^{q(z)}\right|^{q'_0} d\mu=\int_Y |g|^{q'_0 \operatorname{Re} Q(z)} d\mu=\int_Y |g|^{q'_\theta} d\mu = 1. \tag{3.6}$$

De la misma forma,

$$\|f_z\|_{p_1,\mu}=\|g_z\|_{q'_1,\nu}=1, \quad \text{cuando } \operatorname{Re} z = 1. \tag{3.7}$$

Consideramos ahora la función

$$F(z)=\int_Y T f_z g_z d\nu, \quad z\in S.$$

Se tiene que $f_z=\sum_{k=1}^N |a_k|^{P(z)}\frac{a_k}{|a_k|}\mathscr{X}_{E_k}$ y $g_z=\sum_{\ell=1}^M |b_\ell|^{Q(z)}\frac{b_\ell}{|b_\ell|}\mathscr{X}_{F_\ell}$ (para escribir f_z y g_z de esta forma es esencial que las familias $\{E_k\}_{k=1}^N$ y $\{F_\ell\}_{\ell=1}^M$ sean disjuntas). Por tanto,

$$F(z)=\sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^M |a_k|^{P(z)}|b_\ell|^{Q(z)}\frac{a_k b_\ell}{|a_k b_\ell|}\int_Y T(\mathscr{X}_{E_k})\mathscr{X}_{F_\ell} d\nu, \quad z\in S.$$

Como $a_k, b_\ell \neq 0$, F es una función continua y acotada en S y analítica en su interior.

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder con exponente q_0 y q_1, y teniendo en cuenta (3.2) obtenemos

$$|F(z)|\le \|Tf_z\|_{q_0,\nu}\|g_z\|_{q'_0,\nu}\le A_0\|f_z\|_{p_0,\mu}\|g_z\|_{q'_0,\nu}, \quad \operatorname{Re} z=0,$$

y

$$|F(z)|\le \|Tf_z\|_{q_1,\nu}\|g_z\|_{q'_1,\nu}\le A_1\|f_z\|_{p_1,\mu}\|g_z\|_{q'_1,\nu}, \quad \operatorname{Re} z=1.$$

Usando ahora las estimaciones (3.5), (3.6) y (3.7) se deduce que

$$|F(z)|\le A_0,\ \operatorname{Re} z=0, \quad \text{y} \quad |F(z)|\le A_1,\ \operatorname{Re} z=1.$$

En virtud del Lema de las tres líneas se concluye que

$$|F(z)|\le A_0^{1-\theta}A_1^\theta, \quad \operatorname{Re} z=\theta,$$

Y en particular, $F(\theta)|\le A_0^{1-\theta}A_1^\theta$, $0\le\theta\le 1$. Ya que $P(\theta)=Q(\theta)=1$, se tiene entonces que

$$|F(\theta)|=\left|\int_Y Tfg\,d\nu\right|\le A_0^{1-\theta}A_1^\theta,$$

y el resultado queda establecido para funciones simples en $L^{p_\theta}(X,\mu)$.

Sea ahora $f\in L^{p_\theta}(X,\mu)$. Por la Proposición 2.15, sabemos que existe una sucesión $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ de funciones simples en $L^{p_\theta}(X,\mu)$ tales que $\|\phi_k - f\|_{p_\theta,\mu}\longrightarrow 0$, cuando $k\to\infty$. Además, por lo que acabamos de probar, para todo $k\in\mathbb{N}$,

$$\|T\phi_k\|_{q_\theta}\le A_0^{1-\theta}A_1^\theta\|\phi_k\|_{p_\theta}.$$

Sea $E=\{x\in X : |f(x)>1\}$. Escribimos $g=f\mathscr{E}$ y $h=f-g$. También consideramos, para cada $k\in\mathbb{N}$, las funciones $g_k=\phi_k\mathscr{X}_E$ y $h_k=\phi_k-g_k$.

Supongamos que $p_0\le p_1$ (el caso $p_0\ge p_1$ es análogo). Se tiene que $g\in L^{p_0}(X,\mu)$ y $h\in L^{p_1}(X,\mu)$, pues

$$\|g\|_{p_0,\mu}^{p_0}=\int_E |f|^{p_0}d\mu\le\int_E |f|^{p_\theta}d\mu\le\|f\|_{p_\theta},$$

y

$$\|h\|_{p_1,\mu}^{p_1}=\int_X |f-g|^{p_1}d\mu=\int_{X\setminus E}|f|^{p_1}d\mu\le\|f\|_{p_\theta}.$$

Asimismo, puesto que $\phi_k\longrightarrow f$, cuando $k\to\infty$, en $L^{p_\theta}(X,\mu)$, se sigue que $g_k\longrightarrow g$ en $L^{p_0}(X,\mu)$ y $h_k\longrightarrow h$ en $L^{p_1}(X,\mu)$, cuando $k\to\infty$.

Las condiciones (3.2) llevan a que $Tg_k \longrightarrow Tg$ en $L^{q_0}(Y,\nu)$ y $Th_k \longrightarrow Th$ en $L^{q_1}(Y,\nu)$. Luego, podemos encontrar subsucesión $\{\phi_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} = \{g_{k_m} + h_{m_k}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $T\phi_k = Tg_k + Th_k \longrightarrow Tg + Th = Tf$, en c.t.p. Obsérvese que en este punto la linealidad del operador es importante.

Por el lema de Fatou,

$$\|Tf\|_{q_\theta} \le \liminf_{m\to\infty} \|Tf_{k_m}\|_{q_\theta} \le \liminf_{k\to\infty} A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f_{k_m}\|_{p_\theta} = A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{p_\theta}.$$

Por último, suponemos que $1 \le p_\theta < \infty$ y $q_\theta = 1$. En este caso, $q_0 = q_1 = 1$ y podemos tomar $g_z = g$, $z \in S$, y repetir el argumento anterior cuando $q_\theta > 1$ para establecer el resultado. □

Observación 3.4. El Teorema de Riesz-Thorin también es conocido como Teorema de convexidad de Riesz. Uno de los motivos para ello es que si A_{p_θ,q_θ} representa la norma del operador T del Teorema 3.3, como operador acotado de $L^{p_\theta}(X,\mu)$ en $L^{q_\theta}(Y,\nu)$, entonces la función $\varphi(\theta) = \log(M_{p_\theta,q_\theta})$, $\theta \in (0,1)$, es una función convexa. Basta tener en cuenta que $M_{p_\theta,q_\theta} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ y, en consecuencia,

$$\varphi(\theta) \le (1-\theta)\log A_0 + \theta \log A_1,$$

de lo que se concluye que $\varphi(\theta) \le (1-\theta)\varphi(0) + \theta\varphi(1)$, $\theta \in (0,1)$. □

Una aplicación sencilla del Teorema de interpolación de Riesz-Thorin es la prueba de la desigualdad de Young para la convolución (Proposición 2.32).

Sean $1 \le p, q, r \le \infty$ tales que $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Fijamos $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y consideramos el operador T definido en $L^1(\mathbb{R}^n) + L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ mediante $Tf = f * g$.

T es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^r(\mathbb{R}^n)$, pues, de acuerdo a la Proposición 2.31, $\|Tf\|_r = \|f*g\|_r \le \|f\|_1 \|g\|_r$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Asimismo, en virtud de la desigualdad de Hölder, T es un operador continuo de $L^{r'}(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ya que

$$\|Tf\|_\infty = \|f*g\|_\infty \le \|f\|_{r'} \|g\|_r, \quad f \in L^{r'}(\mathbb{R}^n).$$

Estamos, por tanto, en las condiciones del Teorema 3.3, con $p_0 = 1$, $q_0 = r$, $p_1 = r'$, $q_1 = \infty$ y $A_0 = A_1 = \|g\|_r$ y podemos deducir que

$$\|Tf\|_{q_\theta} \le A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_{p_\theta} = \|g\|_r \|f\|_{p_\theta},$$

siendo

$$\frac{1}{p_\theta} = 1 - \theta + \frac{\theta}{r'} = 1 - \frac{\theta}{r} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{r}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Observamos que, entonces, $\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q_\theta} + 1$. Luego, en particular, para $p_\theta = p$ y $q_\theta = q$ se obtiene que $\|f*g\|_q \le \|g\|_r \|f\|_p$.

3.2. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Como ya hemos mencionado, en esta sección usaremos el método real para establecer uno de los teoremas de interpolación fundamentales. El enunciado del resultado en su versión original se debe al matemático polaco Marcinkiewickz [6] quien, siendo prisionero de guerra de los nazis, envió una carta personal a su profesor Zygmund, anunciando el teorema. Después de su temprana muerte durante la Segunda Guerra Mundial, Zygmund completó el trabajo probando el resultado bajo condiciones más generales y presentando importantes aplicaciones [13]. No obstante, el teorema lleva el nombre de su primer autor.

Teorema 3.5 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz). *Sean (X,μ) e (Y,ν) espacios de medida y $0 < p_0 < p_1 \le \infty$. Asumimos que T es un operador sublineal definido en $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ y con valores en los espacios de funciones medibles en Y. Supongamos además que, para ciertas constantes $A_0, A_1 > 0$ se verifica*

$$\|Tf\|_{p_0,\infty,\nu} \le A_0 \|f\|_{p_0,\mu}, \quad f \in L^{p_0}(X,\mu), \tag{3.8}$$

$$\|Tf\|_{p_1,\infty,\nu} \le A_1 \|f\|_{p_1,\mu}, \quad f \in L^{p_1}(X,\mu). \tag{3.9}$$

Entonces, para cada $p_0 < p < p_1$,

$$\|Tf\|_{p,\nu} \leq A\|f\|_{p,\mu}, \quad f \in L^p(X,\mu),$$

siendo

$$A = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{1/p} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1},$$

y

$$\alpha_0 = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \quad y \quad \alpha_1 = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}.$$

Demostración. Comenzamos analizando el caso $p_1 < \infty$.

Sean $p_0 < p < p_1$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Fijamos $\alpha > 0$ y descomponemos la función f como $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$, donde

$$f_0^\alpha = f\mathscr{X}_{\{x\in X:|f(x)|>r\alpha\}} \quad \text{y} \quad f_1^\alpha = f\mathscr{X}_{\{x\in X:|f(x)|\leq r\alpha\}},$$

y siendo $r > 0$ una constante que será fijada más adelante.

Se tiene que $f_0^\alpha \in L^{p_0}(X,\mu)$ y $f_1^\alpha \in L^{p_1}(X,\mu)$. En efecto, ya que $p_0 < p$,

$$\|f_0^\alpha\|_{p_0,\mu}^{p_0} = \int_X |f_0^\alpha|^{p_0-p+p} d\mu \leq (r\alpha)^{p_0-p}\|f\|_p^p < \infty,$$

y, de manera análoga, como $p < p_1$ se sigue que

$$\|f_1^\alpha\|_{p_1,\mu}^{p_1} = \int_X |f_1^\alpha|^{p_1-p+p} d\mu \leq (r\alpha)^{p_1-p}\|f\|_p^p < \infty.$$

Por ser T sublineal, $|Tf| \leq |Tf_0^\alpha| + |Tf_1^\alpha|$ y, entonces,

$$\left\{x\in X: |Tf(x)| > \alpha\right\} \subseteq \left\{x\in X: \left|Tf_0^\alpha(x)\right| > \frac{\alpha}{2}\right\} \bigcup \left\{x\in X: \left|Tf_1^\alpha(x)\right| > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

En virtud de (3.8) y (3.9) se obtiene que

$$\begin{aligned} d_{Tf}(\alpha) &\leq d_{Tf_0^\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + d_{Tf_1^\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\leq \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{\{x:|f(x)|>r\alpha\}} |f|^{p_0} d\mu + \frac{(2A_1)^{p_1}}{\alpha^{p_1}} \int_{\{x:|f(x)|\leq r\alpha\}} |f|^{p_1} d\mu. \end{aligned}$$

Usamos ahora la Proposición (2.21) y tenemos en cuenta de nuevo que $p_0 < p < p_1$ para escribir

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{p,\nu}^p &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Tf}(\alpha) d\alpha \leq p(A_0)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{x:|f(x)|>r\alpha\}} |f|^{p_0} d\mu d\alpha \\ &\quad + (2A_1)^{p_1} \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} \int_{\{x:|f(x)|\leq r\alpha\}} |f|^{p_1} d\mu d\alpha \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/r} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu \\ &\quad + p(2A_1)^{p_1} \int_X |f|^{p_1} \int_{|f(x)|/r}^\infty \alpha^{p-p_1-1} d\alpha d\mu \\ &= \left(\frac{p(2A_0)^{p_0}}{(p-p_0)r^{p-p_0}} + \frac{p(2A_1)^{p_1} r^{p_1-p}}{p-p_1}\right) \|f\|_{p,\mu}^p. \end{aligned}$$

Elegimos r de manera que

$$\frac{(2A_0)^{p_0}}{r^{p-p_0}} = (2A_1)^{p_1} r^{p_1-p},$$

esto es, $r = \frac{1}{2} A_0^{p_0/(p_1-p_0)} A_1^{-p_1/(p_1-p_0)}$. Se deduce así que

$$\|Tf\|_{p,\nu}^p \leq \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p-p_1}\right) \frac{(2A_0)^{p_0}}{r^{p-p_0}} \|f\|_{p,\mu}^p$$

$$= 2^p \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p-p_1} \right) A_0^{p_0(p_1-p)/(p_1-p_0)} A_1^{p_1(p-p_0)/(p_1-p_0)} \|f\|_{p,\mu}^p$$
$$= 2^p \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p-p_1} \right) A_0^{(1-p/p_1)/(1/p_0-1/p_1)} A_1^{(p/p_0-1)/(1/p_0-1/p_1)} \|f\|_{p,\mu}^p,$$

y, por tanto,

$$\|Tf\|_{p,\nu} \leq 2 \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p-p_1} \right)^{1/p} A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \|f\|_{p,\mu},$$

terminando así la demostración para el caso $p_1 < \infty$.

Asumimos ahora $p_1 = \infty$. De nuevo, consideramos para cada $\alpha > 0$ la descomposición $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ anterior, esta vez con el valor $r = 1/(2A_1)$. Entonces, de (3.9) se tiene que

$$\|Tf_1^\alpha\|_{\infty,\nu} \leq A_1 \|f\|_{\infty,\mu} \leq A_1 r \alpha = \frac{\alpha}{2}.$$

Por tanto,

$$d_{Tf_1^\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \nu\left(\left\{y \in Y : |Tf_1^\alpha(y)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right) = 0.$$

Por otro lado, de la propiedad de acotación (3.8) tenemos que

$$d_{Tf_0^\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \left(\frac{2A_0}{\alpha}\|f\|_{p_0,\mu}\right)^{p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{\alpha^{p_0}} \int_{\{x\in X: |f(x)|>\alpha/(2A_1)\}} |f|^{p_0}\, d\mu.$$

Usando de nuevo la Proposición 2.21 escribimos

$$\|Tf\|_p^p \leq p \int_0^\infty \alpha^{p-1} d_{Tf_0^\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha \leq p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{x\in X: |f(x)|>\alpha/(2A_1)\}} |f|^{p_0}\, d\mu\, d\alpha$$
$$= p(2A_0)^{p_0} \int_X |f|^{p_0} \int_0^{2A_1|f|} \alpha^{p-p_0-1}\, d\alpha\, d\mu = p(2A_0)^{p_0} \frac{(2A_1)^{p-p_0}}{p-p_0} \|f\|_p^p.$$

Se concluye que

$$\|Tf\|_{p,\nu} \leq 2 \left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{p_0/p} A_1^{1-p_0/p} \|f\|_{p,\mu}.$$

Nótese que la constante que acota la norma del operador T coincide con la dada en el enunciado del teorema para $p_1 = \infty$. □

Observación 3.6. Si en el Teorema 3.5 el operador T fuera lineal, entonces podríamos debilitar las hipótesis pidiendo que las condiciones (3.8) y (3.9) se verificaran solo para funciones simples. Se obtendría entonces la conclusión del teorema para las funciones simples en $L^p(X,\mu)$ y usaríamos la densidad de estas funciones en el espacio $L^p(X,\mu)$ para concluir que T admite una única extensión a $L^p(X,\mu)$ que es continua de $L^p(X,\mu)$ en $L^p(Y,\nu)$.

Precisamos el argumento de densidad que se sigue en este caso para obtener la extensión del operador lineal T a $L^p(X,\mu)$.

Supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 3.5, pero siendo T un operador lineal y sustituyendo (3.8) y (3.9) por las mismas estimaciones, pero para funciones simples en los espacios de Lebesgue correspondientes. La prueba del teorema nos dice que, para si $p_0 < p < p_1$, entonces

$$\|T\phi\|_{p,\nu} \leq A\|\phi\|_{p,\mu},$$

para toda función simple ϕ en $L^p(X,\mu)$.

Veamos que podemos extender T a $L^p(X,\mu)$, $p_0 < p < p_1$, de manera continua. Consideramos $f \in L^p(X,\mu)$, con $p_0 < p < p_1$. Sabemos por la Proposición 2.15 que existe $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ sucesión de funciones simples en $L^p(X,\mu)$ tales que

$$\|\phi_k - f\|_p \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Además, del Teorema 3.5

$$\|T\phi_k\|_{p,\nu} \leq A\|\phi_k\|_{p,\mu}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Se sigue entonces que $\{T\phi_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(Y,\nu)$. En efecto, al ser T lineal y usando (3.10) se tiene que

$$\|T\phi_k - T\phi_m\|_{p,\nu} \le \|T(\phi_k - \phi_m)\|_{p,\nu} \le A\|\phi_k - \phi_m\|_{p,\nu},$$

y dado que $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en $L^p(X,\mu)$ se concluye que $\{T\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(Y,\nu)$. Usando la completitud de $L^p(Y,\nu)$, obtenemos que $\{T\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente en $L^p(Y,\nu)$, esto es, existe $F \in L^p(Y,\nu)$ de manera que $\|T\phi_k - F\|_{p,\nu} \longrightarrow 0$, cuando $k \to \infty$. Definimos $Tf = F$.

Se verifica además que $\|Tf\|_{p,\nu} \le A\|f\|_{p,\mu}$. Basta observar que

$$\|Tf\|_{p,\nu} \le \|Tf - T\phi_k\|_{p,\nu} + \|T\phi_k\|_{p,\nu} \le \|Tf - T\phi_k\|_{p,\nu} + A(\|\phi_k - f\|_{p,\mu} + \|f\|_{p,\mu}),$$

y tomar límite cuando $k \to \infty$. □

Observación 3.7. Cuando el operador T del Teorema 3.5 verifica además que

$$|Tf| \le T(|f|), \quad f \in L^1(X,\mu) + L^{\infty}(X,\mu), \tag{3.11}$$

entonces se puede mejorar la cota para la norma de T como operador acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^p(Y,\nu)$ cuando $1 < p < \infty$.

Supongamos que estamos en las condiciones del Teorema 3.5 a las que añadimos la propiedad (3.11). Sean $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Podemos suponer, en virtud de (3.11), que $f \ge 0$.

Fijamos $\alpha > 0$ y consideramos $\lambda > 0$. Descomponemos f como $f = f_0 + f_1$ siendo

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) - \dfrac{\lambda\alpha}{A_1}, & \text{si } f(x) \ge \dfrac{\lambda\alpha}{A_1}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\alpha}{A_1}, & \text{si } f(x) \ge \dfrac{\lambda\alpha}{A_1}, \\ f(x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos ver que $f_0 \in L^1(X,\mu)$ y $f_1 \in L^{\infty}(X,\mu)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{1,\mu} &= \int_{\{x\in X:\, f(x)\ge\lambda\alpha/A_1\}} \Big(f(x) - \frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big) d\mu \le 2\int_{\{x\in X:\, f(x)\ge\lambda\alpha/A_1\}} f(x)\,d\mu \\ &= 2\int_{\{x\in X:\, f(x)\ge\lambda\alpha/A_1\}} f(x)^{1-p} f(x)^p\,d\mu \le 2\Big(\frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big)^{1-p} \|f\|_{p,\mu}^p < \infty, \end{aligned}$$

y $\|f_1\|_{\infty,\mu} \le \lambda\alpha/A_1 < \infty$. Entonces, por las condiciones (3.8) y (3.9) (con $p_0 = 1$ y $p_1 = \infty$) se sigue que

$$\|Tf_0\|_{1,\infty,\nu} \le A_0\|f\|_{1,\mu} \quad \text{y} \quad \|Tf_1\|_{\infty,\nu} \le A_1\|f_1\|_{\infty,\mu} \le \lambda\alpha.$$

Por otro lado, ya que se cumple (3.11), usando la Proposición 2.20 *(v)* podemos escribir

$$d_{Tf}(\alpha) \le d_{Tf_0}((1-\lambda)\alpha)) + d_{Tf_1}(\lambda\alpha) = d_{Tf_0}((1-\lambda)\alpha)) \le \frac{A_0}{(1-\lambda)\alpha}\|f_0\|_{1,\mu}.$$

Nótese que $d_{Tf_1}(\lambda\alpha) = 0$ porque $\|Tf_1\|_{\infty,\nu} \le \lambda\alpha$. Además, podemos precisar el valor de $\|f_0\|_{1,\mu}$ de la siguiente manera,

$$\|f_0\|_{1,\mu} = \int_{\{x\in X:\, f(x)\ge\lambda\alpha/A_1\}} f(x)\,d\mu - \frac{\lambda\alpha}{A_1} d_f\Big(\frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big).$$

Entonces, usando la Proposición 2.21 se obtiene que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &\le \frac{pA_0}{1-\lambda}\int_0^{\infty} \alpha^{p-2}\int_{\{x\in X:\, f(x)\ge\lambda\alpha/A_1\}} f(x)\,d\alpha\,d\mu - \frac{pA_0\lambda}{(1-\lambda)A_1}\int_0^{\infty} \alpha^{p-1} d_f\Big(\frac{\lambda\alpha}{A_1}\Big) d\alpha \\ &= \frac{pA_0}{1-\lambda}\int_X f(x)\int_0^{A_1 f(x)/\lambda} \alpha^{p-2}\,d\alpha\,d\mu - \frac{pA_0}{1-\lambda}\int_0^{\infty} \Big(\frac{A_1 u}{\lambda}\Big)^{p-1} d_f(u)\,du \\ &= \frac{pA_0}{(1-\lambda)(p-1)}\int_X f(x)\Big(\frac{A_1 f(x)}{\lambda}\Big)^{p-1} d\mu - \frac{A_0 A_1^{p-1}}{(1-\lambda)\lambda^{p-1}}\|f\|_p^p \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{pA_0A_1^{p-1}}{(1-\lambda)\lambda^{p-1}(p-1)} - \frac{A_0A_1^{p-1}}{(1-\lambda)\lambda^{p-1}} \right) \|f\|_p^p = \frac{A_0A_1^{p-1}}{p-1} \frac{1}{(1-\lambda)\lambda^{p-1}} \|f\|_p^p.$$

De aquí obtenemos la estimación

$$\|Tf\|_p \le \frac{A_0^{1/p}A_1^{1-1/p}}{(p-1)^{1/p}} \inf_{\lambda\in(0,1)} \frac{1}{(1-\lambda)^{1/p}\lambda^{1-1/p}} \|f\|_p.$$

Cálculos directos muestran que el máximo de la función $h(\lambda) = (1-\lambda)^{1/p}\lambda^{1-1/p}$, $\lambda \in [0,1]$, se alcanza en $\lambda = 1/p'$, siendo $h(1/p') = p^{-1/p}(p')^{-1/p'}$, de donde concluimos que

$$\|Tf\|_p \le A_0^{1/p}A_1^{1-1/p} \frac{p^{1/p}(p')^{1/p'}}{(p-1)^{1/p}} \|f\|_p = A_0^{1/p}A_1^{1-1/p} p' \|f\|_p,$$

y por tanto, $\|T\|_{p\to p} \le \frac{p}{p-1} A_0^{1/p}A_1^{1-1/p}$. □

Terminamos esta sección señalando que los dos teoremas de interpolación estudiados son independientes y no se incluyen uno en el otro. Aunque la conclusión en los dos teoremas sea que el operador T es de tipo fuerte, las condiciones en el Teorema de Marcinkiewicz son menos restrictivas, pues se asume que T es sublineal en lugar de lineal y solo necesita condiciones para T de tipo débil en los puntos extremos. Sin embargo, las estimaciones para la norma del operador T como operador de tipo fuerte (p,p) son mejores en el caso del Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.

Nótese que si en el Teorema de Riesz-Thorin $q_0 = p_0$, $q_1 = p_1$ y $p_0 < p < p_1$, entonces

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{siendo } \theta = \frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}.$$

La cota que da el Teorema de Riesz-Thorin para $\|T\|_{p\to p}$ es $A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}$, mientras que el Teorema de Marcinkiewicz nos dice que

$$\|T\|_{p\to p} \le 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p_0} \right)^{1/p} A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}.$$

3.3. Operador maximal de Hardy-Littlewood.

Dedicamos la última sección a analizar algunas de las propiedades de la conocida como función maximal de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$. Haremos uso del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz para establecer que, como operador, es de tipo fuerte (p,p) cuando $1 < p < \infty$, para lo cual se probará que es de tipo débil $(1,1)$. Este hecho va a permitir establecer la acotación en espacios de Lebesgue para otros operadores. Las funciones maximales también juegan un papel relevante en la teoría de diferenciación, pues la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood implica la convergencia en c.t.p. para una gran variedad de familias de funciones.

Consideramos el espacio de las *funciones localmente integrables* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ constituido por las funciones complejas definidas en $\mathbb{R}^n$ que verifican

$$\int_K |f|\,dm < \infty, \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto.}$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ denotamos por $B(x,r)$ la bola de centro x y radio r y escribimos $|B(x,r)|$ para su medida. Recordamos que $|B(x,r)| = r^n|B(0,1)|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ se define la *función maximal centrada de Hardy-Littlewood* M_cf mediante

$$M_cf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|\,dm, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Observamos en primer lugar que M_cf, $f \in L^1_{\text{loc}}$, es una función medible pues es supremo de funciones medibles, concretamente $M_cf = \sup_{r>0} F_r$ donde

$$F_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f|\,dm, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede ver que para cada $r > 0$, F_r es una función continua en $\mathbb{R}^n$ y por tanto, medible Lebesgue. En efecto, sea $r > 0$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} \mathscr{X}_{B(x,r)}(y) = \mathscr{X}_{B(x_0,r)}(y), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \partial B(x_0,r).$$

Aquí $\partial B(X_0,r)$ representa la frontera de la bola $B(x_0,r)$. Obsérvese que tomando $|x-x_0| < ||y-x_0|-r|$, podemos asegurar que $y \in B(x_0,r)$ si, y solo si, $y \in B(x,r)$. Además, si $|x-x_0| < 1$ e $y \in B(x,r)$, entonces $y \in B(x_0,r+1)$, por lo que

$$|f|\mathscr{X}_{B(x,r)} \le |f|\mathscr{X}_{B(x_0,r+1)}.$$

Aplicando entonces el Teorema de la convergencia dominada se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} F_r(x) &= \frac{1}{r^n|B(0,1)|}\lim_{x\to x_0}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathscr{X}_{B(x,r)}(y)\,dm(y)\\ &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} |f(y)|\,dy = F_r(x_0).\end{aligned}$$

De la definición de la función maximal se deduce que M_c es un operador positivo. Nótese que $M_c(f) = M_c(|f|) \ge 0$ y, además, si $M_c f(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $f(x) = 0$ en c.t.$x \in \mathbb{R}^n$.

Por otro lado, es claro que M_c es un operador de tipo fuerte (∞,∞), pues

$$\|M_c f\|_\infty \le \|f\|_\infty \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} dm = \|f\|_\infty. \tag{3.12}$$

El término "centrada" que se le asigna a la función maximal de Hardy-Littlewood M_c alude al hecho de tomar en la definición bolas centradas en x. Otra versión habitual para esta maximal es la que se define a partir de bolas que contienen a x y que no son necesariamente centradas. Denotamos por M al operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado que viene dado por

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\sup_{y\in B(x,r)}\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} |f|\,dm, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$[2].

Es obvio que $M_c f \le Mf$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Pero, la función Mf está controlada por $M_c f$, lo que las hace equivalentes. En concreto,

$$2^{-n}Mf \le M_c f \le Mf, \quad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Para ver esta relación es suficiente tener en cuenta que si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces podemos asegurar que $B(y,r) \subseteq B(x,2r)$ cuando $y \in B(x,r)$. Y puesto que $|B(x,2r)| = 2^n|B(x,r)|$ se obtiene

$$\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} |f|\,dm \le \frac{|B(x,2r)|}{|B(y,r)|}\frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} |f|\,dm \le 2^n M_c f(x), \quad y \in B(x,r),$$

de donde se concluye que $Mf(x) \le 2^n M_c f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

La equivalencia entre las dos funciones maximales hace que en la mayoría de los resultados sobre el operador maximal de Hardy-Littlewood, entre ellos los que involucran propiedades de acotación, podamos tomar la función maximal en cualquiera de las dos versiones, centrada o no centrada, para establecer la propiedad. Se usará la más conveniente en cada caso.

A continuación vamos a calcular explícitamente la función maximal de Hardy Littlewood, en sus dos versiones, para una función concreta. En $\mathbb{R}$ consideramos la función característica del intervalo (a,b), $0 < a < b < \infty$, $f = \mathscr{X}_{(a,b)}$.

La función maximal centrada $M_c f$ viene dada por

---

[2] En los textos encontramos las funciones maximales de Hardy-Littlewood que se definen de manera análoga con cubos en lugar de bolas. También resultan equivalentes a M_c y M ([2, Chap. 2]).

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \mathscr{X}_{(a,b)}(y)\,dy = \sup_{r>0} \frac{|(x-r,x+r)\cap(a,b)|}{2r}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observamos que $(x-r,x+r)\cap(a,b) = \emptyset$ cuando $x+r \le a$ o bien $x-r \ge b$. Por tanto, dado $x \in \mathbb{R}$ consideramos el supremo en el conjunto $R_x = \{r > 0 : a-x < r,\ x-b < r\}$. Asimismo, ya que $|(x-r,x+r)\cap(a,b)| \le 2r$, $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se tiene que $Mf \le 1$.

Si $x \in (a,b)$, es posible encontrar $r > 0$ de manera que $(x-r,x+r) \subseteq (a,b)$ de lo que se deduce que $Mf(x) = 1$, $x \in (a,b)$.

Supongamos ahora $x \le a$. En este caso, para $r \in R_x$,

$$I(r) = \frac{|(x-r,x+r)\cap(a,b)|}{2r} = \frac{|(a,\min\{x+r,b\})|}{2r} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{a-x}{2r}, & a-x \le r \le b-x, \\ \frac{b-a}{2r}, & b-x \le r. \end{cases}$$

Esta función alcanza un máximo en $r = b-x$ (ver Figura 3.1) lo que permite inferir que $M_c f(x) = \frac{b-a}{2(b-x)}$, $x \le a$. Análogamente, cuando $x \ge b$ y $r \in R_x$, se tiene que

$$I(r) = \frac{|(\max\{a,x-r\},b)|}{2r} = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-b}{2r}, & x-b \le r \le x-a, \\ \frac{b-a}{2r}, & x-a \le r. \end{cases}$$

Ahora el máximo de la función I se alcanza en $r = x-a$ (Figura 3.2). Se sigue entonces que $M_c f(x) = \frac{b-a}{2(x-a)}$, $x \ge b$.

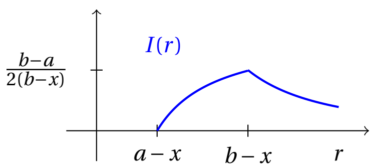

Figura 3.1: $I(r)$, $x \le a$

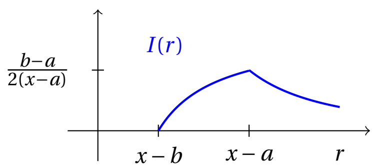

Figura 3.2: $I(r)$, $x \ge b$

Hemos obtenido entonces que

$$M_c\mathscr{X}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} \frac{b-a}{2(b-x)}, & x \le a, \\ 1, & a < x < b, \\ \frac{b-a}{2(x-a)}, & x \ge b. \end{cases} \tag{3.13}$$

Analizamos ahora $M\mathscr{X}_{(a,b)}$. En esta ocasión tenemos que

$$M\mathscr{X}_{(a,b)}(x) = \sup_{r>0} \sup_{y \in B(x,r)} \frac{|(y-r,y+r)\cap(a,b)|}{2r}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De la misma forma que con M_c, si $I(r,y) = \frac{|(y-r,y+r)\cap(a,b)|}{2r}$, $r > 0$, $y \in \mathbb{R}$, entonces, cuando $y + r \le a$, o bien, $y - r \ge b$, se tiene que $I(r,y) = 0$. Por tanto, basta calcular el supremo de la función $I(r,y)$ en la región $R = \{(r,y) : r > 0,\ x-r \le y \le x+r,\ a-r \le y \le b+r\}$.

También como antes es obvio que $M\mathscr{X}_{(a,b)} \le 1$. Y en el caso de que $x \in (a,b)$ podemos encontrar $r > 0$ e $y \in B(x,r)$ de manera que $(y-r,y+r) \subset (a,b)$, con lo que se obtiene que $M\mathscr{X}_{(a,b)}(x) = 1$, $x \in (a,b)$.

Fijamos ahora $x \le a$. En este caso $R = \{(r,y) : r > 0,\ a-r \le y \le x+r\}$ Podemos dividir la región R en tres zonas como indicamos en la Figura 3.3.

En la región $R_1 = \{(r,y) \in R : b-r \le y \le x+r\}$, $I(r,y) = (b-a)/(2r)$, y ya que en R_1 se verifica que $2r \ge b-x$ se sigue que $\sup_{(r,y)\in R_1} I(r,y) = \frac{b-a}{b-x}$.

Por otro lado, cuando $(r,y)\in R_2=\{(r,y)\in R : r\geq \frac{b-x}{2},\ a-r\leq y\leq b-r\}$, tenemos que $a\leq y+r\leq b$, y al estar en R, también $y\leq x+r$ por lo que

$$I(r,y)=\frac{y+r-a}{2r}\leq\frac{b-a}{b-x}.$$

Por último, en la zona $R_3=\{(r,y)\in R : r<\frac{b-x}{2},\ a-r\leq y\leq x+r\}$, también se tiene que

$$I(r,y)=\frac{y+r-a}{2r}.$$

La función $I(r,y)$ no tiene puntos críticos en el interior de R_3 y alcanza el máximo en la frontera. Puede verse que el valor de ese máximo se alcanza en el punto $P=(\frac{b-x}{2},\frac{b+x}{2})$ con valor $(b-a)/(b-x)$.

Se concluye así que $M\mathcal{X}_{(a,b)}(x)=\frac{b-a}{b-x}$, $x\leq a$.

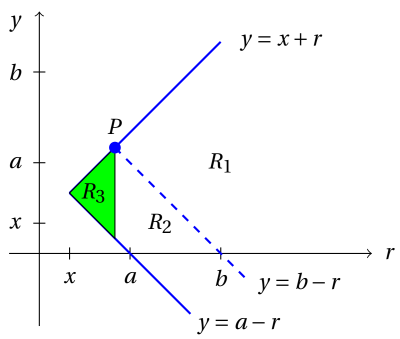

Figura 3.3: $x\leq a$

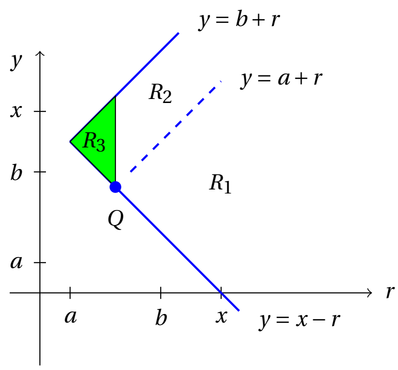

Figura 3.4: $x\geq b$

Razonando de la misma forma con la región $R=\{(r,y): r>0, x-r\leq y\leq b+r\}$ y la Figura 3.4 se tiene que en el punto $Q=(\frac{x-a}{2},\frac{x+a}{2})$ se alcanza el supremo y se obtiene que $M\mathcal{X}_{(a,b)}(x)=\frac{b-a}{x-a}$, $x\geq b$. Luego

$$M\mathcal{X}_{(a,b)}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-a}{b-x}, & x\leq a,\\ 1, & a<x<b,\\ \dfrac{b-a}{x-a}, & x\geq b.\end{cases}\tag{3.14}$$

Si comparamos las funciones (3.13) y (3.14) nos damos cuenta de que mientras Mf es una función continua, M_cf presenta una discontinuidad de salto finito en $x=a$ y $x=b$. Sin embargo, las dos verifican que son funciones en $L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leq\infty$. Específicamente, $\|Mf\|_\infty=\|M_cf\|_\infty=1$ y, cuando $1<p<\infty$,

$$\begin{aligned}\|M_cf\|_p^p&=\left(\frac{b-a}{2}\right)^p\left(\int_{-\infty}^a\frac{dx}{(b-x)^p}+\int_b^{+\infty}\frac{dx}{(x-a)^p}\right)+b-a\\&=\left(\frac{b-a}{2}\right)^p\left(\frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}+\frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}\right)+b-a\\&=\frac{b-a}{2^{p-1}(p-1)}+b-a=\left(\frac{1}{2^{p-1}(p-1)}+1\right)(b-a).\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que

$$\|Mf\|_p^p=\frac{p+1}{p-1}(b-a).$$

En este ejemplo particular también se observa que la integral que define a $\|M_cf\|_1$ ó $\|Mf\|_1$ es divergente, por lo que $M_cf, Mf\notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Veamos que, sin embargo, sí son funciones en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\alpha>0$. Ya que $M_c(f)\leq 1$, se tiene que $d_{M_cf}(\alpha)=0$, cuando $\alpha\geq 1$. Por otro lado, si $0<\alpha<1$, podemos escribir

$$d_{M_c f}(\alpha) = m\Big(\{x \in \mathbb{R}^n : M_c f(x) > \alpha\}\Big) = \Big|\Big(b - \frac{b-a}{2\alpha}, a + \frac{b-a}{2\alpha}\Big)\Big| = (b-a)\Big(\frac{1}{\alpha} - 1\Big) \le \frac{b-a}{\alpha},$$

luego, $\|M_c f\|_{1,\infty} \le b - a$. De manera similar se ve que $\|Mf\|_{1,\infty} \le 2(b-a)$.

Que la función maximal en este caso no sea una función integrable no es algo excepcional. Realmente, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces $M_c f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si, y solo si, $f = 0$ en casi todo punto.

Sean $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_N = f\mathscr{X}_{B(0,N)}$. Es claro entonces que $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, si $|x| \ge N$, entonces $B(0,N) \subset B(x,|x|+N)$ y dado que el soporte de f_N está contenido en $B(0,N)$ se puede escribir

$$\begin{aligned} M(f_N)(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f_N|\,dm \ge \frac{1}{|B(x,|x|+N)|}\int_{B(x,|x|+N)} |f_N|\,dm \\ &= \frac{\|f_N\|_1}{|B(0,1)|}\frac{1}{(|x|+N)^n}, \quad |x| \ge N. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\int_{|x|\ge N}(|x|+N)^{-n}dx = \infty$, se infiere que si $Mf_N \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces debe ser $\|f_N\|_1 = 0$, y, por tanto, $f = 0$, en c.t.p. de $B(0,N)$. Así, $f = 0$ en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$.

Hemos visto que para cualquier $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \ne 0$, su función maximal de Hardy-Littlewood no pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Probaremos que, sin embargo, se puede asegurar que $Mf \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.8. *El operador maximal de Hardy-Littlewood es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que*

$$\|Mf\|_{1,\infty} \le 3^n \|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Además es de tipo fuerte (p,p), cuando $1 < p \le \infty$, verificando

$$\|Mf\|_p \le \frac{3^{n/p}p}{p-1}\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

si $1 < p < \infty$, y $\|Mf\|_\infty \le \|f\|_\infty$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

El mismo resultado se tiene para el operador maximal centrado de Hardy-Littlewood.

Para probar ese teorema necesitamos el siguiente lema de cubrimiento. Su importancia reside en que, a partir de una colección finita cualquiera de bolas en $\mathbb{R}^n$, es posible encontrar una subcolección disjunta cuya medida puede compararse con la medida de la colección original.

Lema 3.9. *Sea $\{B_k\}_{k=1}^N$ una colección finita de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. Existe una subcolección $\{B_{j_r}\}_{r=1}^m$ de bolas disjuntas dos a dos de manera que*

$$\sum_{r=1}^m |B_{j_r}| \ge 3^{-n}\Big|\bigcup_{k=1}^N B_k\Big|.$$

Demostración. Sin duda podemos suponer que $|B_1| \ge |B_2| \ge \cdots \ge |B_N|$. Tomamos $B_{j_1} = B_1$. A continuación, buscamos el menor índice j_2 en $\{2,\dots,N\}$ de manera que $B_{j_2} \cap B_{j_1} = \emptyset$. Repetimos el proceso de forma que si ya hemos elegido $\{j_1,\dots,j_r\}$, entonces j_{r+1} será el menor índice en $\{j_r+1,\dots,N\}$ tal que

$$B_{j_{r+1}} \bigcap \Big(\bigcup_{k=1}^r B_{j_k}\Big) = \emptyset.$$

Como partimos de una colección finita, este proceso termina en m pasos. Hemos conseguido así una colección $\{B_{j_r}\}_{r=1}^m$ de bolas disjuntas dos a dos. Veamos ahora que

$$\bigcup_{k=1}^N B_k \subseteq \bigcup_{r=1}^m 3B_{j_r}. \tag{3.15}$$

Es claro que si B_k es una de las bolas escogidas $B_k \subseteq \bigcup_{r=1}^m 3B_{j_r}$. Si B_k no fue elegida, entonces para algún $r_0 \in \{1,\dots,k-1\}$ se verifica que $B_k \cap B_{j_{r_0}} \ne \emptyset$, y, además, $|B_k| \le |B_{j_{r_0}}|$. De esta forma, $B_k \subseteq 3B_{j_{r_0}}$. En efecto, basta tomar $z_0 \in B_k \cap B_{j_{r_0}}$. Si $B_k = B(x_k, r_k)$ y $B_{j_{r_o}} = B(x_{j_{r_0}}, r_{j_{r_0}})$ entonces, para cada $x \in B_k$ se tiene que

$$|x - x_{j_{r_0}}| \le |x - x_k| + |x_k - z_0| + |z_0 - x_{j_{r_0}}| < r_k + r_k + r_{j_{r_0}} \le 3r_{j_{r_0}},$$

esto es, $x \in 3B_{j_{r_0}}$. De (3.15) y del hecho de que la subcolección es disjunta se concluye que

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{N} B_k\Big| \le \Big|\bigcup_{r=1}^{m} 3B_{j_r}\Big| \le \sum_{r=1}^{m} |3B_{j_r}| = 3^n \sum_{r=1}^{m} |B_{j_r}|.$$

□

Pasamos a demostrar el Teorema 3.8.

Demostración. Dada la relación entre M y M_c que hemos mencionado, basta demostrar el teorema para el operador maximal M. Por otro lado, vimos que M es un operador acotado de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo por lo que, en virtud del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, el principal objetivo de la prueba es establecer la acotación tipo débil (1,1), esto es,

$$m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\big\}\Big) \le \frac{3^n \|f\|_1}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{3.16}$$

Sea $\alpha > 0$. Denotamos por $E_\alpha = \big\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\big\}$. El conjunto E_α es abierto. En efecto, sea $x \in E_\alpha$. Al ser $Mf(x) > \alpha$, existe una bola B_x que contiene a x y tal que

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f| dm > \alpha. \tag{3.17}$$

Por tanto, si $y \in B_x$, también $Mf(y) > \alpha$. Luego $B_x \subseteq E_\alpha$, y se obtiene así que E_α es un conjunto abierto.

Para calcular $m(E_\alpha)$ podemos tomar la medida regular interior, esto es, $m(E_\alpha) = \sup_{K \subset E_\alpha} m(K)$, donde el supremo se toma sobre los conjuntos compactos K contenidos en E_α. Luego basta establecer (3.16) para todo conjunto compacto $K \subset E_\alpha$.

Sea $K \subset E_\alpha$ un conjunto compacto. Para cada $x \in K$ consideramos la bola B_x como antes. Ya que $K \subset \bigcup_{x\in K} B_x$ y K es compacto, existe una familia finita $\{B_{x_k}\}_{k=1}^N$ de bolas abiertas que recubren a K. Usando el Lema 3.9 podemos extraer una subcolección $\{B_{x_{j_r}}\}_{r=1}^m$ para la que se tiene que

$$m(K) \le \Big|\bigcup_{k=1}^{N} B_{x_k}\Big| \le 3^n \sum_{r=1}^{m} |B_{x_{j_r}}| \le \frac{3^n}{\alpha}\sum_{r=1}^{m}\int_{B_{x_{j_r}}} |f| dm \le \frac{3^n}{\alpha}\int_{E_\alpha} |f| dm \le \frac{3^n\|f\|_1}{\alpha},$$

donde hemos usado (3.17) y el hecho de que la colección $\{B_{x_{j_r}}\}_{r=1}^m$ es disjunta y contenida en E_α. Queda establecida así la estimación (3.16) para $K \subset E_\alpha$ compacto, y la acotación de tipo débil (1,1) para M queda probada.

Usando el Teorema de interpolación de Marcinkiewickz (Teorema 3.5) podemos inferir que M es un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, cuando $1 < p < \infty$, y si tenemos en cuenta además la Observación 3.7 obtenemos que

$$\|M\|_{p\to p} \le \frac{3^{n/p} p}{p-1}.$$

□

Como ya comentamos, el operador maximal de Hardy-Littlewood resulta útil en el estudio de la acotación de otros operadores. Una de las características del operador M_c que le permiten controlar a otros operadores es el hecho de que podemos escribir el operador M_c como un operador maximal de convolución con un núcleo de sumabilidad. Concretamente, si consideramos la función $\mathcal{K}(x) = |B(0,1)|^{-1}\mathcal{X}_{B(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica que, para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} M_c f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|\mathcal{X}_{B(x,r)}(u) dm(u) \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{r^n|B(0,1)|}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\mathcal{X}_{B(0,1)}\Big(\frac{y}{r}\Big) dm(y) = \sup_{r>0}(|f| * \mathcal{K}_r)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Observamos que $\mathcal{K}$ es una función no negativa con integral 1, por lo que, de acuerdo a la Proposición 2.35, $\{\mathcal{K}_r\}_{r>0}$ es una aproximación de la identidad.

Bibliografía

[1] COHN, D.L., *Measure theory*, Birhäuser, Boston, 1980.

[2] DUOANDIKOETXEA, J., *Fourier analysis.* Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, 2001.

[3] FOLLAND, G.B., *Real analysis.* John Wiley, New York, 1984.

[4] GRAFAKOS, L., *Classical Fourier analysis.* Springer, New York, 2008.

[5] IGARI, S., *Real analysis - with an introduction to wavelet theory.* Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

[6] MARCINKIEWICZ, J., Sur l'interpolation d'opérateurs, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **208** (1939), 1272–1273.

[7] RIESZ, M., Sur les maxima des formes bilineaires et sur les fonctionnelles linéaires, *Acta Math.*, **49** (1927), 465–497.

[8] RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Singapoure, 1976.

[9] RUDIN, W., *Real and complex analysis.* 3rd Edition. McGraw-Hill, Singapoure, 1987.

[10] RUDIN, W., *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[11] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Functional analysis.* Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press, Princeton, 2011.

[12] STEIN, E.M. Y SHAKARCHI, R., *Real analysis: measure theory, integration and Hilbert spaces.* Princeton Lectures in Analysis III. Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

[13] ZYGMUND, A., On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, *J. Math. Pures Appl.*, **35** (1956), 223-248.

Interpolation theorems in Lebesgue spaces

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Elena Espino Sánchez
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101063324@ull.edu.es

Abstract

In this work we analyze the two classical interpolation theorems: The Riesz-Thorin Theorem and the Marcinkiewicz Theorem. In the analysis of these two results the Lebesgue spaces on measure spaces are essential, both the classical and the weak type ones. We develop the main aspects in the theory of the Lebesgue classes. Among them, we prove the Hölder and the Minkowski inequalities and establish that the Lebesgue spaces are complete. In addition we study different relations between Lebesgue spaces and give some approximation results. The convolution on the Lebesgue spaces is another of the issues we address, highlighting the importance of the summability kernels. Finally we prove the aforementioned interpolation theorems and show their utility in the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator.

1. Introduction

The theory of interpolation of operators in Lebesgue spaces is a topic of great importance in analysis and, in particular, it finds numerous applications in functional and harmonic analysis. The development of the theory of measurement and integration in different spaces and the problems developed in this field have shown the importance of the theory of the interpolation of operators.
The main objective of this work is to analyze the two classic interpolation theorems: the Riesz-Thorin interpolation theorem and the Marcinkiewicz theorem. Classical Lebesgue spaces are involved in them, as well as the so-called Lebesgue spaces of weak type.

2. Outline of the first chapter

In the first chapter is introduced the basic elements of the abstract measure theory that constitute the base for defining Lebesgue spaces and analyzing their properties. Some of these elements are the measurement spaces, the exterior measurements and measurable functions. We see the construction of the Lebesgue exterior measure in $\mathbb{R}^n$ and close the chapter by introducing the theory of abstract integration that particularly includes the Lebesgue integral, and we preesent the three great convergence results: Monotone convergence Theorem, Fatou's Lemma and Dominated convergence Theorem.

3. Outline of the second chapter

In the second chapter we introduce the spaces constituted by p-integrable functions and, the corresponding weak versions. Let (X,μ) a measure space and $0<p\le\infty$. We denote by $L^p(X,\mu)$ the class constituted by the measurable complex functions in X such that

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{when } 0<p<\infty,$$

and $\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} := \operatorname{esssup}_{x\in X}|f(x)| = \inf\Big\{a\ge 0 : \mu\big(\{x\in X : |f(x)|>a\}\big)=0\Big\}$.

Theorem Let $0<p<\infty$.
(i) The space $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ is a Banach space, when $1\le p\le\infty$;
(ii) If $0<p<1$, $L^p(X,\mu)$ with the metric $\rho(f,g)=\|f-g\|_p^p$, $f,g\in L^p(X,\mu)$, is a complete metric space.

The following inequality is fundamental in the proof of this theorem.

Hölder's inequality Let $1\le p\le\infty$. For each $f\in L^p(X,\mu)$ and $g\in L^{p'}(X,\mu)$ you have that $fg\in L^1(X,\mu)$ and $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_{p'}$. The equality is true if, and only if, $a|f(x)|^p = b|g(x)|^{p'}, a.e. x\in X$, for certain constants a,b with $ab\ne 0$.

We establish some relations between the given Lebesgue spaces, amongst them the following useful one.

Proposition Let $0<p<q<r\le\infty$. We have that $L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu)\subset L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$.

The approximation results are of special interest in this context because they allow us to establish properties for general functions in the Lebesgue spaces from the corresponding ones for simple functions. The relevance of this class of functions is that it is dense in the Lebesgue spaces.

Proposition Let $1\le p\le\infty$. The space of simple functions in $L^p(X,\mu)$ is dense in $L^p(X,\mu)$.

The weak Lebesgue space $L^{p,\infty}(X,\mu)$, $0<p<\infty$ is constituted by the measurable complex functions such that $\|f\|_{p,\infty}=\sup_{\alpha>0}\alpha d_f(\alpha)^{1/p}<\infty$, where d_f is the distribution function given by $d_f(\alpha)=\mu(\{x\in X : |f(x)|>\alpha\}$, $\alpha>0$.
It can be seen that $L^p(X,\mu)\subset L^{p,\infty}(X,\mu)$ and that $\|f|_{p,\infty}\le\|f\|_p$, $f\in L^p(X,\mu)$. Moreover,

Proposition Let $0<p<q<r\le\infty$. We have that $L^{p,\infty}(X,\mu)\cap L^{r,\infty}(X,\mu)\subset L^{q,\infty}(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$.

Furthermore, we study an operation that plays an important role in the branch of analysis, the convolution of two measurable function in $\mathbb{R}^n$. We show results as Young's inequality for the convolution: let $1\le p,q,r\le\infty$ such that $\frac{1}{q}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}$. Then $f*g\in L^q(\mathbb{R}^n)$ and $\|f*g\|_q\le\|f\|_p\|g\|_r$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^r(\mathbb{R}^n)$.
We close the chapter with the study of what is known as approximation of the identity, as the Poisson kernel or the heat kernel. We establish the following relevant approximation theorem.

Theorem Let $\{\mathscr{K}_t\}_{t>0}$ an approximation of the identity.
(i) If $1\le p<\infty$, then, for each $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|(f*\mathscr{K}_t)-f\|_p\longrightarrow 0$, when $t\to 0^+$.
(ii) Let $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$, that is, a continuous function in $\mathbb{R}^n$ such that $|f(x)|\longrightarrow 0$, when $|x|\to\infty$. Then $\|(f*\mathscr{K}_t)-f\|_\infty\longrightarrow 0$, when $t\to 0^+$.

4. Outline of the third chapter

In the third chapter we analyze the interpolation theory in the context of Lebesgue spaces, taking two of the most relevant interpolation theorems which are the foundation of the theory: the Riesz-Thorin interpolation theorem, which is tested with complex analysis techniques and the Marcinkiewicz interpolation theorem, which uses the real method.

Riesz-Thorin theorem Let (X,μ), (Y,ν) two measure spaces and $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$. Let's suppose that T is a linear operator from $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ into $L^{q_0}(Y,\nu)+L^{q_1}(Y,\nu)$ such that, for certain constants $A_0,A_1>0$ it's verified

$$\|Tf\|_{q_0,\nu}\le A_0\|f\|_{p_0,\mu} \quad \text{and} \quad \|Tf\|_{q_1,\nu}\le A_0\|f\|_{p_1,\mu}.$$

Then, for each $0\le\theta\le 1$, T is a bounded operator from $L^{p_\theta}(X,\mu)$ into $L^{q_\theta}(Y,\nu)$, where

$$\frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1} \quad \text{and} \quad \frac{1}{q_\theta}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Furthermore, $\|Tf\|_{q_\theta,\nu}\le A_\theta\|f\|_{p_\theta,\mu}$, $\quad f\in L^{p_\theta}(X,\mu)$, where $A_\theta\le A_0^{1-\theta}A_1^\theta$.

Marcinkiewicz theorem Let (X,μ) and (Y,ν) measure spaces and $0<p_0<p_1\le\infty$. We assume that T is a sublinear operator defined in $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ with values in the measure functions spaces in Y. Suppose also that for certain constant $A_0,A_1>0$ it's verified

$$\|Tf\|_{p_0,\infty,\nu}\le A_0\|f\|_{p_0,\mu}, \quad f\in L^{p_0}(X,\mu),$$
$$\|Tf\|_{p_1,\infty,\nu}\le A_1\|f\|_{p_1,\mu}, \quad f\in L^{p_1}(X,\mu).$$

Then, for each $p_0<p<p_1$, $\|Tf\|_{p,\nu}\le A\|f\|_{p,\mu}$, $\quad f\in L^p(X,\mu)$, where

$$A=2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{1/p}A_0^{\alpha_0}A_1^{\alpha_1}, \quad \alpha_0=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}} \quad \text{and} \quad \alpha_1=\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}.$$

We close the work with the so-called maximal Hardy-Littlewood function in $\mathbb{R}^n$, which plays relevant role in the theory of differentation. Given $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, the Hardy-Littlewood centered maximal function is defined by

$$M_c f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f|dm, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

and the non-centered Hardy-Littlewood maximal function Mf is defined in an analogous way by considering balls that contain the point but not necessarily centered. They are equivalent: we have the relation $2^{-n}Mf\le M_cf\le Mf$, $f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. The main result obtained from the Marcinkiewicz interpolation theorem is the following.

Theorem The Hardy-Littlewood maximal operator is a bounded operator from $L^p(\mathbb{R}^n)$ into itself, when $1<p\le\infty$ and it is of weak type (1,1). Moreover, $\|M\|_{p\to p}\le\frac{3^{n/p}p}{p-1}$, $1<p<\infty$, and $\|M\|_{\infty\to\infty}\le 1$. The same result holds for the Hardy-Littlewood centered maximal operator.

References

[1] Duoandikoetxea, J., *Fourier analysis.* Graduate Studies in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, 2001.

[2] Folland, G.B., *Real analysis.* John Wiley, New York, 1984.

[3] Grafakos, L., *Classical Fourier analysis.* Springer, New York, 2008.

[4] Igari, S., *Real analysis - with an introduction to wavelet theory.* Amer. Math. Soc., Providence, 1996.

[5] Stein, E.M. y Shakarchi, R., *Functional analysis.* Princeton Lectures in Analysis I. Princeton Univ. Press, Princeton, 2011.