Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Alejandra López Cruz

Teoremas clásicos de Geometría haciendo uso de un libro interactivo de GeoGebra, para la formación de profesores de Educación Secundaria

Classical Geometry theorems using an interactive GeoGebra book, for the training of secondary education teachers

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2021

Dirigido por
Matías Camacho Machín
Rodrigo Francisco Trujillo González

Matías Camacho Machín
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Rodrigo Francisco Trujillo González
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a mis tutores, Rodrigo Trujillo González y Matías Camacho Machín, por su tiempo y dedicación, y por haber reafirmado mi vocación por la didáctica de la matemática; y quiero agradecer, en especial, a mi profesora de matemáticas de secundaria, Fefi Martín González (licenciada en Matemáticas en la Universidad de La Laguna), por descubrirme la pasión por las matemáticas. Y cómo olvidar a mi familia, la cual siempre me apoya y está a mi lado.

Alejandra López Cruz
La Laguna, 9 de junio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado, organizado en cinco capítulos, es revisar desde una perspectiva dinámica algunos teoremas clásicos de Geometría y elaborar un material interactivo en forma de Libro de GeoGebra que pueda ser utilizado para la formación de profesores de Educación Secundaria. Como resultado de este trabajo, se construyen una serie de actividades que se incorporan en un LIGG (Libro Interactivo de GeoGebra) con diferentes actividades basadas en applets que tratan de facilitar la comprensión y el lugar que pueden ocupar estos teoremas en la Educación Secundaria actual.

Abstract

The objective of this Final Degree Project, organized in five chapters, is to revise from a dynamic perspective some classical theorems of Geometry and elaborate an interactive material in the form of a GeoGebra Book that can be used for the training of secondary education teachers. As a result of this work, a series of activities are built that are incorporated into a GG-book (GeoGebra Interactive Book) with different activities based on applets that try to facilitate the understanding and the place that these theorems can occupy in the current Secondary Education.

Contenido

Introducción

El plan de estudios de Matemáticas en los centros de secundaria, incluye un único curso de geometría plana durante un año o, en algunos casos, un curso de geometría y geometría analítica elemental en matemáticas de 4° ESO. Este curso, que se presenta a los alumnos de Educación Secundaria, suele consistir en una mera presentación de la asignatura. Sin embargo, los estudiantes de matemáticas estudian más en profundidad otras ramas de las matemáticas, como puede ser el álgebra.

Una de las principales razones para enseñar geometría era que su método axiomático estaba considerado como la mejor introducción para el razonamiento deductivo, pero claramente en la actualidad se insiste mucho más en una enseñanza tradicional, clases expositivas y explicación de ejercicios para posterior replicación de los estudiantes, por motivos de eficacia educacional.

Tal vez el estudio escaso de la geometría en el programa escolar se debe a una falta de familiaridad por parte de los educadores con la esencia de la geometría y con los avances que se han producido en su desarrollo.

Desde que las tecnologías digitales forman parte del entorno de trabajo de los estudiantes de todos los niveles educativos, se ha venido haciendo necesaria una reflexión y toma de decisiones sobre su incorporación en las aulas. Santos-Trigo y Camacho [6] se preguntan, entre otras cosas,

¿Cómo el uso de tecnologías digitales incide en la formación de los estudiantes? ¿Qué transformaciones son importantes en los contenidos que se estudian en los ambientes escolares y en las formas de concebir y estructurar los escenarios de enseñanza? La irrupción de las tecnologías digitales en las actividades de los estudiantes demanda una discusión sistemática y sustentada sobre cómo incorporarlas en el estudio de las disciplinas y en los escenarios de enseñanza. ¿Seguirán siendo trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias en la educación preuniversitaria? o ¿habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras o un álgebra con poco énfasis en las operaciones o cálculos algebraicos y su significado? (pp. 22 y 23) [6]

Ahora bien, el papel del profesorado es fundamental para aportar respuestas efectivas a gran parte de estas preguntas. Leung [7] señala que los profesores deben experimentar por sí mismos, no sólo el potencial sino las dificultades de empleo de las tecnologías digitales para el aprendizaje de los conceptos y como consecuencia, entender cómo los ambientes de trabajo digital influyen en el aprendizaje. Es evidente que el profesorado debe ser capaz de evaluar la calidad de los múltiples recursos digitales que están disponibles.

Santos-Trigo y Camacho [6] destacan la importancia de la resolución de problemas y presentan un ejemplo de libro interactivo que facilita analizar el dinamismo de los elementos que intervienen en el problema y que puede servir de ayuda para entender la importancia que puede tener el diseño de tareas haciendo uso de tales recursos digitales y añaden que:

...es fundamental identificar y analizar el tipo de tareas que se pueden diseñar a partir de un uso coordinado de diversas tecnologías y desarrollos digitales. ¿Qué tecnologías digitales ofrecen a los estudiantes oportunidades para construir conocimiento matemático y competencias de resolución de problemas? ¿Qué se promueve en el diseño de las tareas matemáticas a partir de los procesos matemáticos que los estudiantes pueden desarrollar en sus acercamientos o soluciones? ¿Cómo implementar esas tareas en los escenarios de enseñanza? (p. 25)[6]

Con el diseño de los libros interactivos que se presentan en este TFG se ha tratado de aportar algunas respuestas a algunas de las cuestiones que se han señalado en los párrafos anteriores.

Este Trabajo de Fin de Grado está organizado en cinco capítulos, en el Capítulo 1 presentamos los objetivos de este trabajo de investigación didáctica, en el Capítulo 2 abordamos la metodología llevada a cabo en este proyecto para alcanzar los objetivos, en el Capítulo 3 se estudian y se discuten los resultados obtenidos en cinco teoremas seleccionados, en el Capítulo 4 se expresan las conclusiones de este trabajo, y, por último, en el Capítulo 5 se proponen trabajos futuros relacionados con el actual.

1

Objetivos

Sin duda, la geometría sintética y elemental ha venido sufriendo un descuido importante en las últimas décadas en el ámbito de la Educación Secundaria, e incluso en los estudios del Grado de Matemáticas. Las tecnologías digitales que invaden actualmente nuestra sociedad pueden constituir una gran oportunidad para tratar de retomar muchos conceptos, procedimientos y resultados que han ido diluyéndose poco a poco en la formación, no sólo del alumnado de Educación Secundaria, sino del profesorado que impartirá dicha materia en el futuro.

Objetivo general:

Contribuir a la formación del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria elaborando un conjunto de applets con el Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra que configuren un libro interactivo en el que se presentarán, comprobarán y se resolverán problemas relacionados.

La idea principal es la de acercar al futuro profesor las herramientas libres que están disponibles en la red, pensando en la mejora en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria.

En definitiva se tratará de alcanzar los siguientes objetivos específicos:

Objetivos específicos:

- Revisar algunos textos de Geometría clásicos con la intención de seleccionar aquellos Teoremas y actividades que puedan adaptarse fácilmente para trabajar desde una perspectiva dinámica. [1] [2] [3] [4] [5]

- Analizar la viabilidad de incorporar como elementos de aprendizaje algunos Teoremas que no aparecen en la actualidad en la Educación Secundaria, así como revisar desde el punto de vista dinámico algunos que se encuentran en el currículum actual.

- Diseñar un esquema de organizadores para configurar un conjunto de actividades de aprendizaje de los Teoremas seleccionados pensando en la enseñanza y el aprendizaje de los Teoremas seleccionados.

- Elaborar un Libro Interactivo de GeoGebra (LIGG) que incorpore una serie de applets dinámicos que permitan manipular con los resultados así como facilitar la construir de esas y otras applets al objeto de que el usuario manipule y descubra los resultados que se presentan.

-Facilitar la formación previa del profesorado de Matemáticas de la Educación Secundaria.

2

Metodología

Para alcanzar los objetivos propuestos, se ha dividido el trabajo en varias fases:

- Fase 1: Revisión y análisis de la literatura.

  A lo largo de los siglos, la geometría ha ido creciendo. Se han desarrollado nuevos conceptos y nuevos métodos de procedimiento, los cuales resultarán desafiantes y sorprendentes a los estudiantes. Usando los medios que mejor se adapten a nuestros propósitos, retornemos a la geometría euclídea y descubramos por nosotros mismos algunos de los resultados más recientes que aparecen en la obra Retorno a la Geometría [1], y en su versión en inglés Geometry Revisited [2], el cual es el libro en el que se basa fundamentalmente este trabajo.

  El libro Retorno a la Geometría [1] está escrito por matemáticos profesionales para hacer interesantes y comprensibles algunas de las ideas matemáticas más importantes para una gran audiencia formada por estudiantes de secundaria y profanos. Se trata de una obra de exposiciones matemáticas breves y de nivel asequible a los estudiantes de secundaria, y tiene como objetivo ofrecer un acceso fácil a los estudiantes hacia materias de áreas de la matemática generalmente no incluidas entre los contenidos de la enseñanza secundaria. Tal y como se cita en el libro [1], "la mejor forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas", por ello en él se incluye una serie de problemas, de los cuales algunos conllevan un ejercicio de reflexión.

  "La edición española constituye una gran oportunidad de enriquecimiento de nuestros profesores y de todos los usuarios de la matemática, además ejercerá una profunda influencia en la tarea de renovación de nuestro sistema educativo en este área"[1], según Miguel de Guzmán (Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid y presidente del

Comité Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas).

Los autores de esta obra literaria son H.S.M Coxeter (9 de febrero de 1907-31 de marzo de 2003), que es considerado un importante geómetra del siglo XX, destacando en teoría de polítopos, geometría no euclídea, teoría de grupos y en teoría combinatoria; y Samuel L. Greitzer (10 de agosto de 1905 - 22 de febrero de 1988) un matemático estadounidense, presidente fundador de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos de América y editor de la revista de matemáticas preuniversitaria *Arbelos*. En 1967, publicaron juntos el bien recibido libro de texto *Geometry Revisited*, el cual estamos revisando y que ha permanecido impreso durante más de 40 años.

Según los autores, H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer, "la geometría posee aún todas esas virtudes que los educadores le atribuían hace una generación. Todavía existe una geometría en esencia a la espera de ser reconocida y apreciada, es más, ahora incluso es más útil y necesaria para los científicos y matemáticos aplicados."[2]

Por otro lado, también forman parte de la literatura Famous problems of Geometry and how to solve them [3], Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective [4] y Excursions in Geometry [5], los cuales fueron usados con el propósito de seleccionar ejercicios para los cinco teoremas seleccionados, que permitan deducir y comprobar relaciones, propiedades y resultados a partir de la observación directa.

- Fase 2: Selección de los Teoremas para incorporar al trabajo

A la hora de elegir cuáles serían los teoremas elegidos, se intentó tomar aquellos que no presentaran demasiadas dificultades en su comprensión. Además, deberían ser teoremas cercanos a otros que si se estudian actualmente en la Educación Secundaria. Esto es, teoremas relacionados con triángulos, puntos y rectas notables de los triángulos relaciones, colinealidad, paralelismo, perpendicularidad, razones entre longitudes y que tengan alguna relación entre ellos. Los Teoremas elegidos fueron: Teorema de Ceva, Teorema de los senos generalizados, Teorema de Menelao, Teorema de Morley y Teorema de Pascal.

- Fase 3: Estudio detallado de los teoremas y selección de problemas.

En este trabajo de investigación didáctica, en primer lugar se comenzó mirando y trabajando diez resultados del libro "Retorno a la Geometría". Luego, se seleccionaron los que no tenían conceptos muy complicados de entender y los que eran adaptables para trabajar con alumnado de Educación Secundaria. Como resultado de este análisis desarrollado se seleccionaron cinco teoremas, que además de aparecer en algunos libros antiguos de Matemáticas de la Educación Secundaria o de Geometría Clásica, se pueden encontrar en el libro de Matemáticas de Curso de Preuniversitario del año 1964 [8], en concreto, el Teorema de Ceva y el Teorema de Menelao.

- Fase 4: Hacia la búsqueda de un diseño

Después de diferentes versiones, se decidió finalmente que:

1.- Cada Teorema debe tener un LIGG independiente. Siendo sus ventanjas, por ejemplo, la comodidad y simplicidad de uso; y su única deventanja es que cuando había mucho material audiovisual se encontraban problemas de memoria

2.- La estructura será igual para todos. Se barajaron distintas posibilidades, pero se consideraron que algunos elementos fundamentales a tener en cuenta eran:

3.- La manipulación para comprobar los resultados deberían incorporar el mayor número de casos posibles.

4.- El usuario debe interactuar directamente con GeoGebra y debe construir, él mismo, el resultado a analizar.

5.- Debe reflexionar sobre varios aspectos que se derivan más o menos directamente del Teorema.

6.- Debe incorporar el anclaje curricular que podría tener en el Currículum actual de Educación Secundaria.

- Fase 5: Elaboración de los LIGG siguiendo la misma estructura

Se hicieron varios intentos para buscar el esquema que se debía utilizar para los LIGG y la estructura sigue el siguiente formato:

ESTRUCTURA
Introducción
Conocimientos previos
Enunciado formal del teorema
Actividad de comprobación
Actividad de demostración
Relación con el currículum de Educación Secundaria
Ejercicios

A continuación vamos a explicar brevemente en qué consiste cada punto de la estructura:

- INTRODUCCIÓN

En este primer apartado se comenta la importancia del teorema, por quién fue descubierto, así como su utilidad junto con otros teoremas relacionados, y finalmente quéestablece el teorema.

- CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para realizar las actividades y comprender bien las situaciones que se presentan se recuerdan algunas definiciones, en orden alfabético, y resultados, los cuales se comprueban gráficamente o se demuestran, necesarios para su demostración o ejercicios.

- ENUNCIADO FORMAL DEL TEOREMA

Se enuncia de forma clara y concisa lo que establece el resultado, junto con un applet para facilitar su comprensión.

- ACTIVIDAD DE COMPROBACIÓN

Se indican unas instrucciones para que el usuario puede construir de forma independiente la figura, y se añade un vídeo de ayuda para la construcción del applet.

- ACTIVIDAD DE DEMOSTRACIÓN

En ella se demuestra el teorema teniendo en cuenta los conocimientos previos y apoyándose en un applet ilustrativo de la situación.

- RELACIÓN CON EL CURRÍCULUM DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Teniendo en cuenta los criterios de evaluación y los contenidos del BOC se estudia en el currículo de qué curso tiene importancia y por qué.

- EJERCICIOS

Se plantean unos ejercicios con la intención de que el usuario, de forma independiente, pueda manejar esta herramienta para probar y visualizar los respectivos problemas de geometría propuestos, desconocidos hasta el momento para ellos. que tendrán, que responder para fijar sus conocimientos, pudiendo comprobar su respuesta.

- Fase 6: Análisis retrospectivo del trabajo hecho, escritura final de la Memoria y establecimiento de las conclusiones del trabajo.

  En esta última fase del trabajo se trata de expresar la sensación general de la construcción de este trabajo de investigación enfocado a la docencia, esta se explicarára en en las conclusiones, en el capítulo 5.

3

Resultados y discusión

Como resultados del estudio realizado a lo largo de este trabajo, se presentarán a continuación los cinco Teoremas seleccionados con sus respectivos libros interactivos LIGGs que se han elaborado.

Se ha optado por incorporar a la Memoria todas las actividades con la misma estructura diseñada para el LIGG. Se incorporarán además los enlaces que llevan a la actividad general del libro interactivo, pero no a cada uno de los applets.

3.1. Teorema de los senos generalizado

3.1.1. Introducción

En este capítulo se presentará una generalización del Teorema de los Senos, el cual es uno de los teoremas más recurridos en la Educación Secundaria. En particular, es uno de los teoremas de la trigonometría más usados para la resolución de triángulos. Se usa conjuntamente con el Teorema del Coseno y el Teorema de Pitágoras.

Se va a estudiar el denominado Teorema de los Senos Generalizado, que incorpora el valor de la razón entre los lados de un triángulo cualquiera y los senos de los ángulos opuestos.

El teorema establece que dado un triángulo cualquiera, la proporción entre las longitudes de los lados del triángulo y los senos de sus correspondientes ángulos opuestos es siempre constante, y dicha constante es dos veces la longitud del radio, esto es, el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.1:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

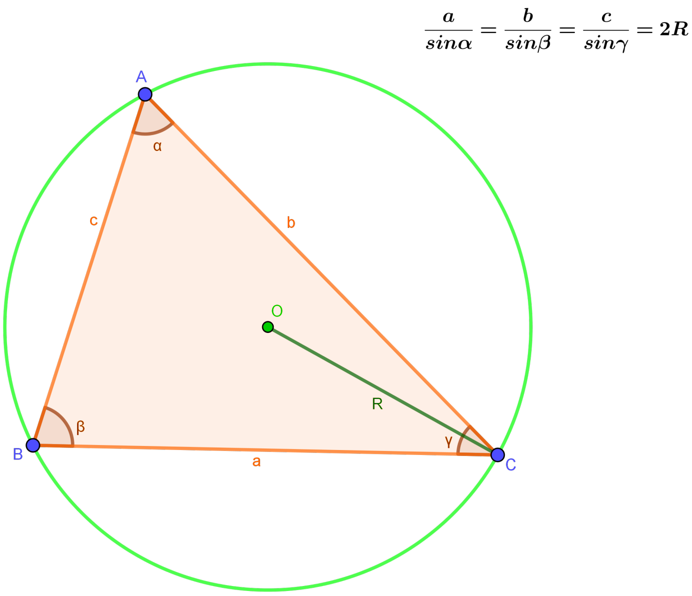


Figura 3.1. Representación visual del Teorema de los Senos Generalizado

3.1.2. Conocimientos previos

Para realizar las siguientes actividades y comprender bien las situaciones que se presentan serán necesarios los resultados que siguen a continuación:

Propiedad 3.1.1: *El ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad que el ángulo central que abarca el mismo arco.*

Sabemos que el ángulo inscrito en una circunferencia cualquiera es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos rectas secantes, y por otro lado el ángulo central en una circunferencia es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son el radio de ella.

En la Figura 3.2 observamos que el valor del ángulo inscrito α es la mitad del ángulo central β correspondiente.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.2:
`https://www.geogebra.org/m/j3xmqper`

Como consecuencia de la propiedad 3.1.1 se tienen los dos siguientes resultados:

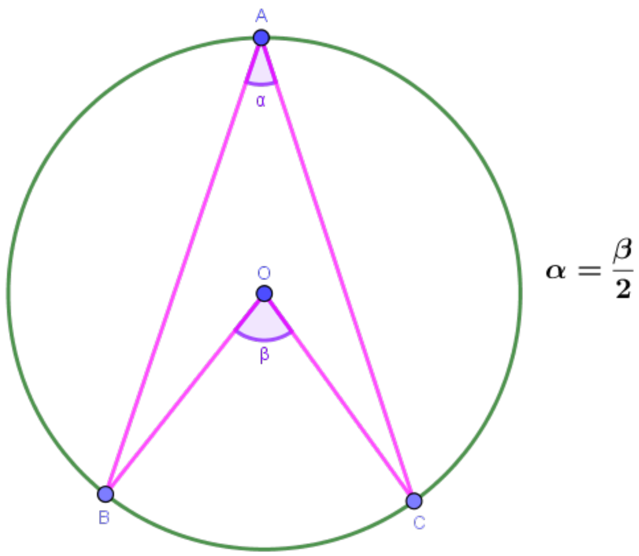


Figura 3.2. Representación visual de la Propiedad 3.1.1

Propiedad 3.1.2: *Dos ángulos inscritos en el mismo arco de la circunferencia son iguales.*

En una circunferencia, una cuerda subtiende ángulos iguales cuando los vértices están en cualquier punto de uno de los dos arcos que determina la cuerda.

En la Figura 3.3, observe como los ángulos α y β son iguales.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.3:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

Propiedad 3.1.3: *Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

Demostración:

Observamos en la Figura 3.4 que el ángulo γ está inscrito en una semicircunferencia y que el valor del ángulo central adscrito θ es 180°, luego por la propiedad 3.1.1 tenemos que $\gamma = 90°$.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.4:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

Propiedad 3.1.4: *Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.*

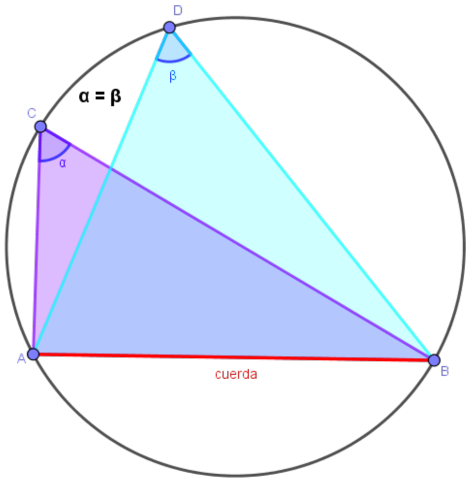


Figura 3.3. Representación visual de la Propiedad 3.1.2

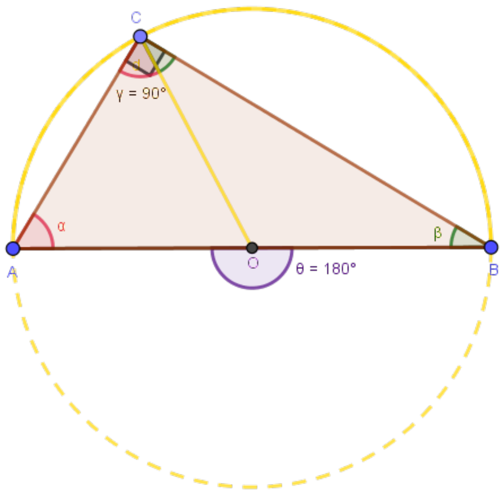


Figura 3.4. Representación visual de la Propiedad 3.1.3

Demostración:

Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrilátero inscrito y O el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero, teniendo en cuenta la propiedad 3.1.1 se tiene que: $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB$ y $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$.

Sumando miembro a miembro: $\angle DAB + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle DOB + \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$

Luego, aplicando la propiedad 3.1.3, resulta que los ángulos $\angle DAB$ y $\angle BCD$ son suplementarios. De manera similar se demuestra que $\angle CDA$ y $\angle ABC$ también son suplementarios. Así, se concluye que para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia los ángulos opuestos deben ser suplementarios, tal y como se muestra en la Figura 3.5.

$\square$

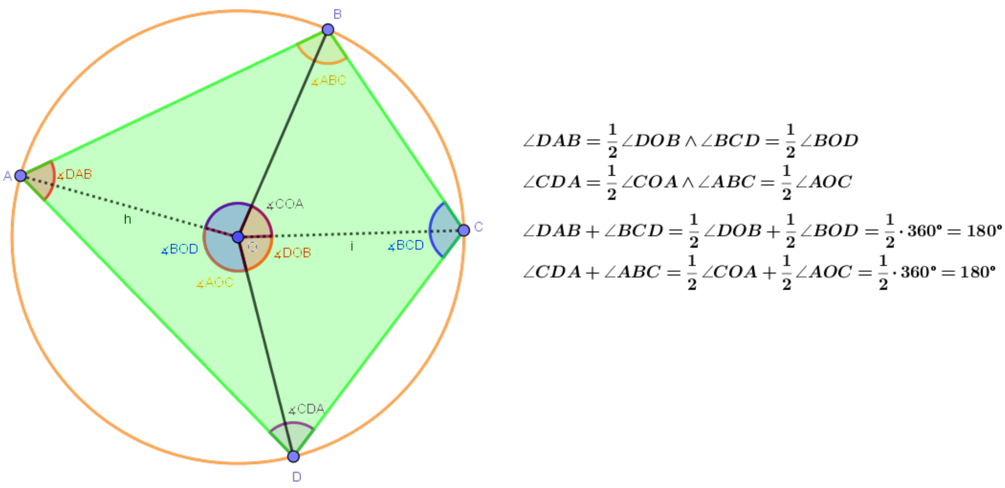


Figura 3.5. Representación visual de la Propiedad 3.1.4

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.5:
`https://www.geogebra.org/m/j3xmqper`

Propiedad 3.1.5: $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$

Se prueba de forma gráfica muy sencilla sobre la circunferencia goniométrica que vemos en la Figura 3.6.

Para ello, representemos un ángulo α y $180° - \alpha$, al que denotamos β, en la circunferencia goniométrica.

Observamos que la diferencia entre el ángulo $\beta = 180° - \alpha$ y $180°$ coincide con α.

Los catetos CB y GD, que definen el seno de ambos ángulos, miden lo mismo y tienen la misma orientación y, por otro lado, los catetos ED y EB, que definen el coseno de ambos ángulos, son de la misma longitud, pero con distinto signo.

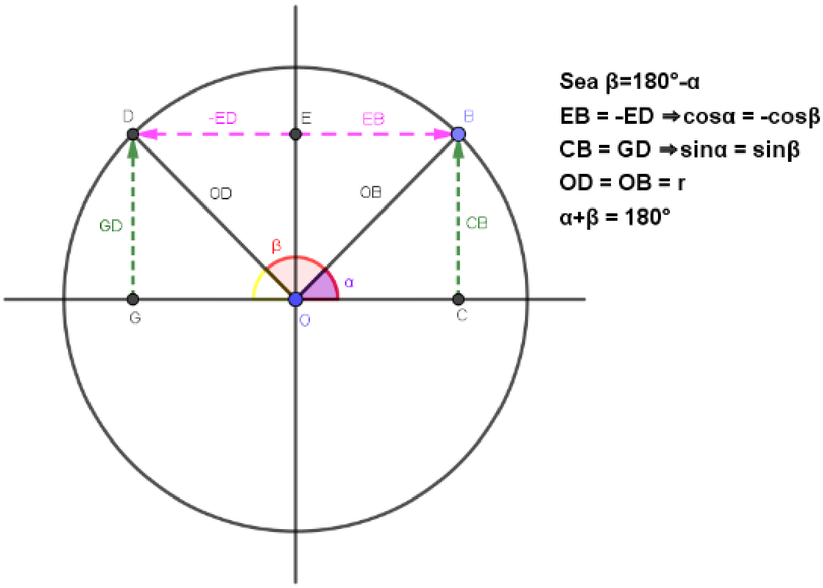


Figura 3.6. Representación visual de la Propiedad 3.1.5

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.6: `https://www.geogebra.org/m/j3xmqper`

Teorema del Coseno: *Sea ABC un triángulo cualquiera y sean a, b y c sus lados y α, β y γ los ángulos opuestos a los lados respectivamente, entonces se sigue que:*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.7: `https://www.geogebra.org/m/j3xmqper`

<u>Demostración:</u>

Dividiendo el triángulo de partida en dos triángulos rectángulos tal y como se muestra en la Figura 3.7 se tiene que:

$a^2 = h^2 + (c-m)^2 \;\Rightarrow\; a^2 = h^2 + c^2 + m^2 - 2cm$ (1)

Y por otro lado:

$h^2 = b^2 - m^2$ y $m = b \cdot \cos\alpha$ (2)

Luego, sustituyendo (2) en (1) se sigue que:

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + m^2 - 2cb \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow\; a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

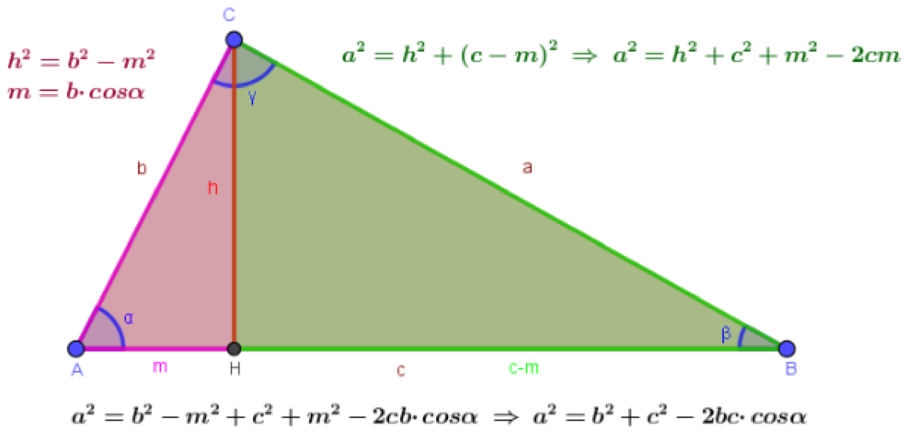


Figura 3.7. Representación visual del Teorema del Coseno

Análogamente ocurre con los otros lados.

□

Notación:
(ABC)=Área del triángulo ABC.
$\angle ABC$=Ángulo formado por los vértices A, B y C (en este orden).

3.1.3. Enunciado formal del Teorema de los Senos Generalizado

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean a, b y c sus lados y α, β y γ los ángulos opuestos a los lados respectivamente, entonces $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.8:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

3.1.4. Actividad de comprobación

En esta actividad se tratará de hacer una comprobación dinámica del resultado.

Realizar de forma autónoma la construcción de la figura en una ventana de Geogebra en blanco, siguiendo los pasos indicados a continuación. Acceder al siguiente enlace para manipular la ventana de Geogebra en blanco:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

Se puede utilizar el vídeo para resolver las posibles dudas que puedan surgir en la construcción de la actividad. Acceder al siguiente enlace para ver el vídeo:
https://youtu.be/VQtFGexN5oY

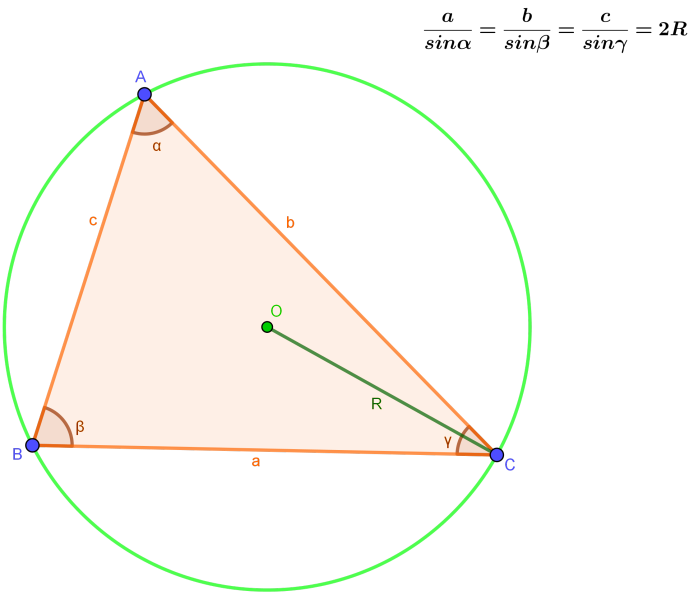
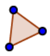
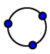


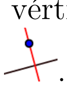
Figura 3.8. Representación visual del Teorema de los Senos Generalizado

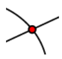
1.- Construir un triángulo ABC, usando el comando .

2.- Utilizar la herramienta  para construir los ángulos de los vértices A, B y C.

3.- Construir la circunferencia circunscrita al triángulo ABC haciendo uso de la herramienta , y posteriormente para hallar su centro O utiliza el icono .

4.- Trazar el segmento, utilizando , que une el vértice C con el centro O, que representa el radio R de la circunferencia.

5.- Trazar la recta que pasa por el vértice B perpendicular a la longitud del lado a del triángulo ABC, mediante .

6.- Construir el punto J, que se obtiene de intersectar la circunferencia circunscrita y la recta perpendicular, para ello usamos  y a continuación el triángulo CBJ usando la misma herramienta que en el primer paso.

7.- Construir los ángulos $\angle J$ y $\angle CBJ$, utilizando el mismo comando que en el segundo paso.

8.- Obtén las razones entre los lados del triángulo y los senos de sus ángulos opuestos $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$ y $\frac{c}{\sin\gamma}$ y comprueba que son iguales.

9.- Observa la variación de la igualdad a medida que arrastras los distintos vértices del triángulo de partida. Investiga si se cumple el teorema para cualquier triángulo ABC.

3.1.5. Actividad de demostración

En esta actividad se verá la demostración del teorema y se comprobarán los resultados anteriores. Utiliza los enlaces que aparecen a continuación de cada caso.

Sea ABC un triángulo cualquiera, cuya circunferencia circunscrita tiene radio R, y sean a, b y c sus lados y α, β y γ los ángulos opuestos a los lados respectivamente, entonces se verifica la igualdad de las siguientes razones $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Demostración:

Existen dos posibles casos:

Caso 1: El centro de la circunferencia circunscrita es interior al triángulo.

Sea ΔABC y circunscribamos en él una circunferencia con centro O y radio igual a R unidades.

Sea J el punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo y del segmento perpendicular al lado BC del triángulo, dibujamos el diámetro CJ, y la cuerda BJ. Se tiene que $\angle CBJ$ es un ángulo recto, por la propiedad 3.1.3. Por tanto, $\sin\varepsilon = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}$.

Tenemos que $\angle J = \angle A$ porque ambos están inscritos en el mismo arco de la circunferencia.

Sabemos que, en general, $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$, luego se tiene que $\sin\varepsilon = \sin\alpha$.

Por lo que, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, es decir, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Análogamente, el mismo procedimiento aplicado a los otros ángulos del ΔABC conduce a $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ y $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Por tanto, se concluye que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet del caso 1:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

Caso 2: El centro de la circunferencia circunscrita es exterior al triángulo.

En primer lugar, construimos una circunferencia circunscrita alrededor del ΔABC, de centro O y radio R.

Dibujamos el diámetro CJ, y la cuerda BJ. Tenemos que $\angle CBJ$ es un ángulo recto, aplicando la propiedad 3.1.3. Por ello, $\sin\varepsilon = \frac{a}{CJ} = \frac{a}{2R}$.

Se tiene que $\angle J = 180° - \angle A = \zeta$, pues los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.

Usando de nuevo que, en general, $\sin\theta = \sin(180° - \theta)$, se obtiene que $\sin\varepsilon = \sin\alpha$.

Por tanto, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$, esto es, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

Aplicando el mismo procedimiento a los otros ángulos del ΔABC tenemos que $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$ y $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Luego, concluimos que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet del caso 2:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

3.1.6. Relación con el currículum de Educación Secundaria

Este Teorema es importante porque aparece en el Currículum de Bachillerato, en concreto en el bloque de Geometría de Matemáticas Académicas de 1° de Bachillerato, y permite abordar los criterios y contenidos siguientes:

- Criterio de evaluación:

Utilizar las razones trigonométricas de un ángulo, los teoremas del seno y coseno, y las fórmulas trigonométricas para aplicarlas en la resolución de ecuaciones, de triángulos o de problemas geométricos del mund tecnológico.

- Contenidos:
1. Calcular razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
2. Resolución de triángulos y de ecuaciones trigonométricas sencillas.
3. Resolución de problemas geométricos diversos y contextualizados.

Concretamente estos contenidos de Educación Secundaria se han utilizado tanto en los contenidos previos, en las actividades de comprobación y demostración, en la demostración del propio teorema y en la resolución de los ejercicios, porque son necesarios para hacer un análisis exhaustivo del Teorema de los Senos Generalizado.

3.1.7. Ejercicios

En el libro interactivo se pueden encontrar las soluciones de los siguientes ejercicios:

1.- Comprobar numéricamente en el applet 1.11 del libro interactivo, que para cualquier triángulo ABC, incluso si β o γ es un ángulo obtuso, $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$. Del mismo modo comprueba la "fórmula de adición" $\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cdot\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\cos\beta$.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 1 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

2.- Probar que en cualquier triángulo ABC se verifica que $a\cdot(\sin\beta-\sin\gamma)+b\cdot(\sin\gamma-\sin\alpha)+c\cdot(\sin\alpha-\sin\beta)=0$.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 2 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

3.- Probar que para cualquier triángulo ABC se cumple que: $(ABC)=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 3 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

4.- En la figura del applet 1.11 del libro interactivo comprobar si se cumple el Teorema del Coseno.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 4 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

Observación
-Si en la relación del teorema de los senos cambiáramos el seno por el coseno no se cumple la relación: $\frac{a}{\cos\alpha}\neq\frac{b}{\cos\beta}\neq\frac{c}{\cos\gamma}$.
Acceder al siguiente enlace para manipular la observación en el applet:
https://www.geogebra.org/m/j3xmqper

3.2. Teorema de Ceva

3.2.1. Introducción

En este capítulo se presentará el Teorema de Ceva, un teorema que se estudió durante mucho tiempo en la Educación Secundaria y que desapareció del currículum en los años setenta. Fue publicado por el matemático italiano Giovanni Ceva en 1678. Se usa conjuntamente con el Teorema de Menelao.

El teorema establece que dado un triángulo cualquiera ABC y siendo X, Y, Z puntos cualesquiera sobre los lados BC, CA y AB del triángulo, la condición necesaria y suficiente para que las cevianas AX, BY y CZ sean concurrentes es que el producto de las razones sea la unidad.
Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.9:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

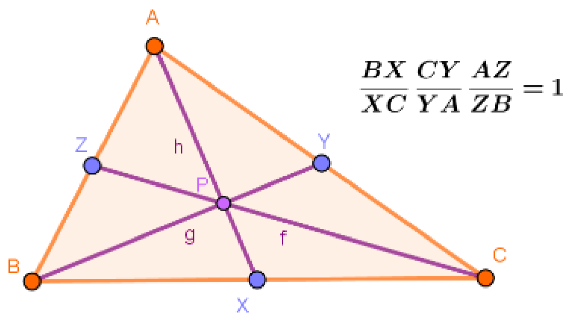


Figura 3.9. Representación visual del Teorema de Ceva

3.2.2. Conocimientos previos

Para realizar las siguientes actividades y comprender bien las situaciones que se presentan será necesario recordar las siguientes definiciones:

- Altura de un triángulo
- Baricentro de un triángulo
- Bisectriz de un 'angulo
- Ceviana
- Circuncentro de un triángulo
- Exincentros de un triángulo
- Incentro de un triángulo
- Mediana de un triángulo
- Mediatriz de un triángulo
- Ortocentro de un triángulo
- Punto de Gergonne de un triángulo
- Recta de Euler del un triángulo
- Triángulos homotéticos

Además, se necesitan los resultados que siguen a continuación:

Propiedad 3.2.1: *Dado un triángulo ABC y sea X un punto cualquiera del lado BC. Si P es un punto del triángulo no perteneciente al lado BC, entonces* $\frac{(PBX)}{(PXC)} = \frac{BX}{XC}$.

En particular, para el vértice A opuesto al lado BC, se cumple que $\frac{(ABX)}{(AXC)} = \frac{BX}{XC}$.

Sean h_a la altura del lado BC, h_b la altura del lado AC y h_c la altura del lado AB.

En la Figura 3.10 se tiene que las áreas de los triángulos PBX y PXC son:

$(PBX) = \frac{BX \cdot h_p}{2}$
$(PXC) = \frac{XC \cdot h_p}{2}$
Luego, dividiendo ambas expresiones obtenemos:
$\frac{(PBX)}{(PXC)} = \frac{BX}{XC}$
Además,
$(ABX) = \frac{BX \cdot h_a}{2}$
$(AXC) = \frac{XC \cdot h_a}{2}$
Por lo que, se sigue que:
$\frac{(ABX)}{(AXC)} = \frac{BX}{XC}$
Análogamente, ocurrirá para h_b y h_c, ed decir, es indiferente la altura que se use para probar el resultado.

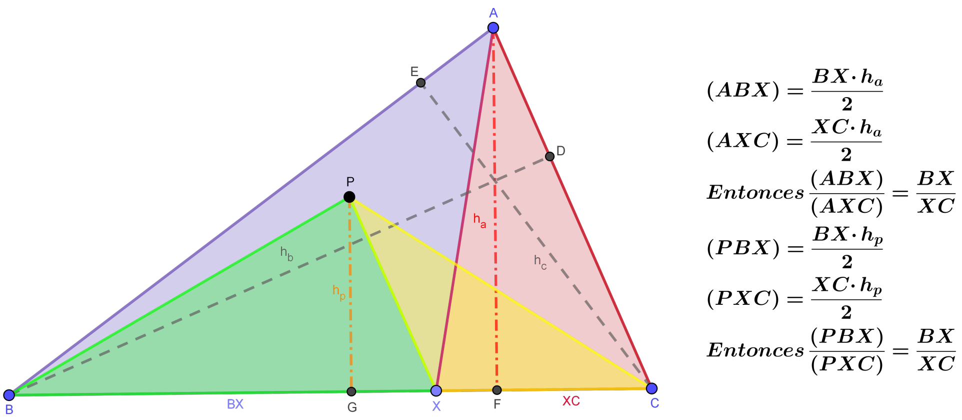


Figura 3.10. Representación visual de la Propiedad 3.2.1

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.10:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

Propiedad 3.2.2: *Sea ABC un triángulo cualquiera, se verifica que si un segmento DE es paralelo al lado AB del triángulo, entonces los lados del triángulo CDE son proporcionales a los lados del triángulo de partida.*

En la Figura 3.11 se observa que se cumple $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE}$.

Notación:
(ABC)=Área del triángulo ABC.

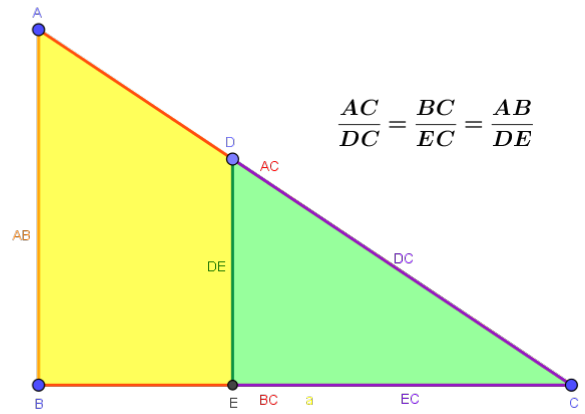


Figura 3.11. Representación visual de la Propiedad 3.2.2

3.2.3. Enunciado formal del Teorema de Ceva

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean X, Y, Z los puntos seleccionados sobre los lados BC, CA y AB del triángulo respectivamente, tres cevianas AX, BY,CZ son concurrentes, si y solo si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

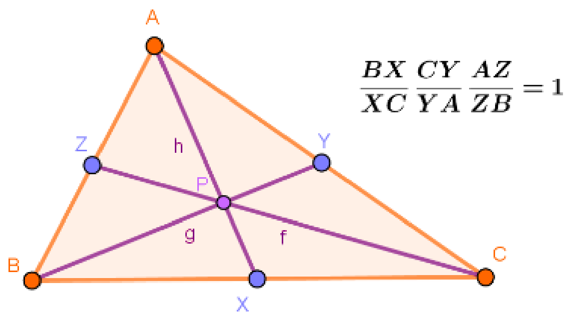


Figura 3.12. Representación visual del Teorema de Ceva

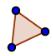
Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.12:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

3.2.4. Actividad de comprobación

En esta actividad se tratará de hacer una comprobación dinámica del resultado.

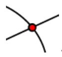
Realizar de forma autónoma la construcción de la figura en una ventana de Geogebra en blanco, siguiendo los pasos indicados a continuación. Acceder al siguiente enlace para manipular la ventana de Geogebra en blanco:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

Se puede utilizar el vídeo para resolver las posibles dudas que puedan surgir en la construcción de la actividad. Acceder al siguiente enlace para ver el vídeo:
https://youtu.be/FpAqSlRxyWo

1.- Construir un triángulo ABC, usando el comando .

2.- Utilizar la herramienta  para construir un punto X del lado a, un punto Y del lado b y un punto Z del lado c del triángulo ABC.

3.- Trazar los semirrectas, utilizando , que unen el vértice A con el punto X, el vértice B con el punto Y y el vértice C con el punto Z, que representan las cevianas del triángulo.

4.- Construir el punto P, que se obtiene de intersectar dos de las cevianas, mediante .

5.- Obtén las razones: $\frac{BX}{XC}$, $\frac{CY}{YA}$ y $\frac{AZ}{ZB}$. y calcula sus productos.

6.- Observa la variación del producto a medida que arrastras los distintos vértices del triángulo de partida. Investiga si se cumple el teorema para cualquier triángulo ABC.

3.2.5. Actividad de demostación

En esta actividad se verá la demostración del teorema y se comprobarán los resultados anteriores. Utiliza el enlace que aparece a continuación de la demostración.

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean X, Y, Z los puntos seleccionados sobre los lados BC, CA y AB del triángulo respectivamente, tres cevianas AX, BY,CZ son concurrentes, si y solo si $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

<u>Demostración</u>
"$\Longrightarrow$"
Sea P el punto de intersección de dos de las cevianas.

Veamos que las áreas de los triángulos con alturas iguales son proporcionales a las bases de los triángulos. Aplicando la propiedad 3.2.1 tenemos que:

$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABX)}{(AXC)}$ y $\frac{BX}{XC} = \frac{(PBX)}{(PXC)}$

Luego,

$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABX)-(PBX)}{(AXC)-(PXC)} = \frac{(ABP)}{(CAP)}$

De igual forma se obtienen $\frac{CY}{YA} = \frac{(BCP)}{(ABP)}$ y $\frac{AZ}{ZB} = \frac{(CAP)}{(BCP)}$

Por tanto, multiplicando las igualdades obtenidas previamente llegamos a lo que queríamos probar

$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{(ABP)}{(CAP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)} \cdot \frac{(CAP)}{(BCP)} = 1.$

“$\Longleftarrow$”

En este caso, vamos a suponer que las dos primeras cevianas se cortan en P, y que la tercera ceviana que pasa por ese punto P es CZ' para probar que $Z = Z'$. Luego, teniendo en cuenta la condición suficiente del teorema de Ceva se sigue que

$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1$ (1)

Además, teníamos como hipótesis que

$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$ (2)

Entonces igualando (1) y (2) obtenemos

$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$

esto es, observamos que los segmentos AZ' y AZ tienen el mismo origen, el vértice A, que los segmentos BZ' y BZ tienen ambos como origen el vértice B y que tienen la misma razón, por lo que, Z' coincide con Z, por lo que queda probado que AZ, BY, CZ se cortan en un punto.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la demostraciÃ^3n :
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

3.2.6. Relación con el currículum de Educación Secundaria

Este Teorema es importante porque se relaciona con el Currículum de Bachillerato, en concreto con el bloque de Geometría de Matemáticas Académicas de 1° de Bachillerato , y permite abordar los criterios y contenidos siguientes:

- Criterio de evaluación:

1. Utilizar las razones de proporcionalidad y semejanza para aplicarlas en la resolución de ecuaciones, de triángulos o de problemas geométricos del mundo tecnológico.

2. Identificar y construir las distintas ecuaciones de la recta y los lugares geométricos, reconociendo sus características y elementos.

- Contenidos:

1. Resolución de triángulos.

2. Resolución de problemas geométricos diversos y contextualizados.

3. Resolución de problemas de geometría métrica plana con el cálculo de las ecuaciones de la recta, posiciones relativas, distancias y ángulos.

4. Estudio de lugares geométricos del plano.

Dichos contenidos de Educación Secundaria se han empleado tanto en los contenidos previos, en las actividades de comprobación y demostración, en la demostración del propio teorema y en la resolución de los ejercicios, porque son necesarios para hacer un análisis detallado del Teorema de Ceva.

3.2.7. Ejercicios

En el libro interactivo se pueden encontrar las soluciones de los siguientes ejercicios:

1.- Si X, Y, Z son los puntos medios de los lados, las tres cevianas se cortan en un punto.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 1 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

2.- Las cevianas perpendiculares a los lados opuestos se cortan en un punto.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 2 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

3.- Demuestra que las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 3 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

4.- Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos desiguales, cuyos lados respectivos son paralelos, como en la figura. Entonces las tres rectas AA', BB', CC' (prolongadas) se cortan en un punto.(Tales triángulos se dicen homotéticos).

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 4 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

Observaciones

-Las tres bisectrices exteriores de un triángulo se cortan en tres puntos, llamados exincentros.

-Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un único punto, denominado circuncentro. Además, en la figura podemos observar el circuncírculo del triángulo.

-La recta de Euler de un triángulo es la recta en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo.

Acceder al siguiente enlace para manipular las observaciones en el applet: https://www.geogebra.org/m/pmvk6gbh

3.3. Teorema de Morley

3.3.1. Introducción

En este capítulo se presentará el Teorema de Morley, el cual es uno de los teoremas más sorprendentes de la geometría elemental. Fue descubierto por Frank Morley alrededor del año 1904. El autor lo dio a conocer a sus conocidos en Cambridge, Inglaterra, y lo publicó veinte años después en Japón, entre tanto, fue redescubierto y presentado en forma de problema a resolver en *Educational Times*. Tras cierto tiempo le fueron remitidas dos soluciones al autor, una de las cuales, de M.T. Naraniengar, es mucho más clara que las otras muchas decenas que se han ideado como tal.

El teorema establece que dado un triángulo cualquiera, se verifica que los puntos de intersección de los trisectores de los ángulos adyacentes a los lados del triángulo determinan un triángulo equilátero.

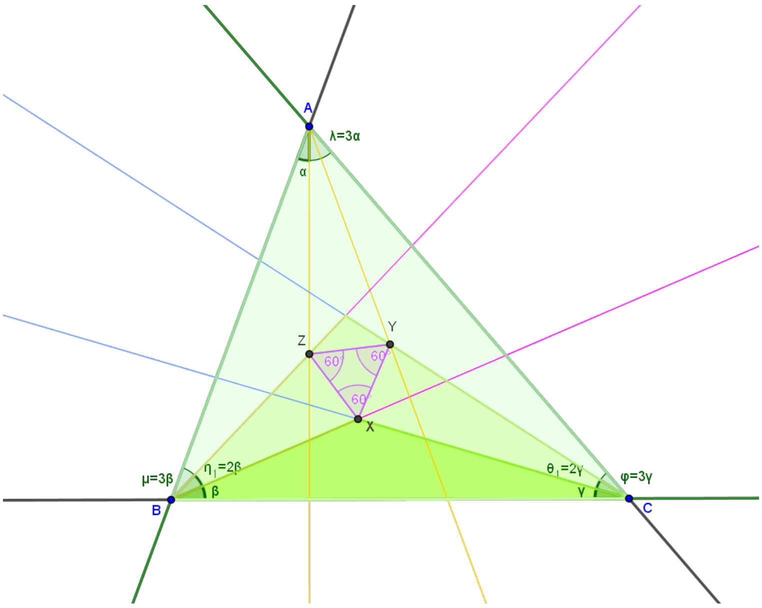


Figura 3.13. Representación visual del Teorema de Morley

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.13:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

3.3.2. Conocimientos previos

Para realizar las siguientes actividades y comprender bien las situaciones que se presentan será necesario recordar las siguientes definiciones:

- Bisectriz de un ángulo.
- Polígono regular
- Rotación o giro
- Triángulos homotéticos
- Trisección de un ángulo

3.3.3. Enunciado formal del Teorema de Morley

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean X, Y y Z los puntos de intersección de los trisectores de los ángulos adyacentes a los lados del triángulo, entonces X, Y y Z son los vértices de un triángulo equilátero.

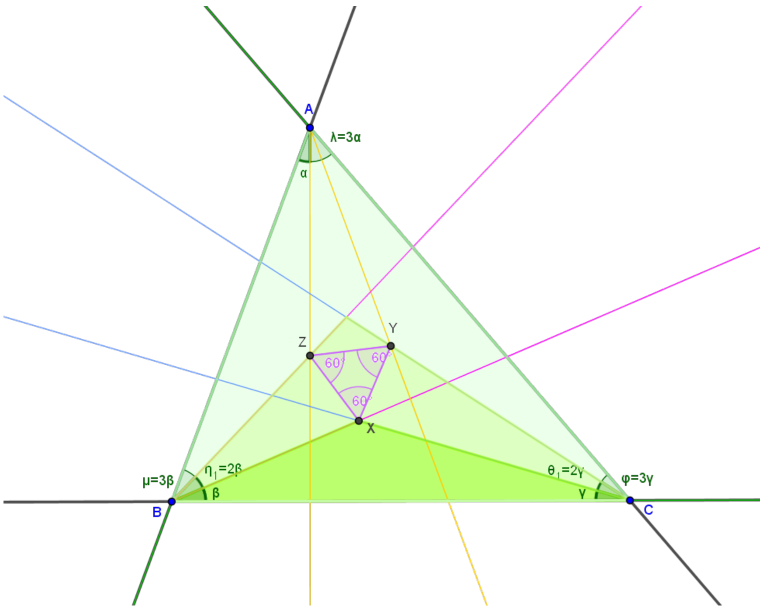


Figura 3.14. Representación visual del Teorema de Morley

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.14:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

3.3.4. Actividad de comprobación

En esta actividad se tratará de hacer una comprobación dinámica del resultado.

Realizar de forma autónoma la construcción de la figura en una ventana de Geogebra en blanco, siguiendo los pasos indicados a continuación. Acceder al siguiente enlace para manipular la ventana de Geogebra en blanco:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

Se puede utilizar el vídeo para resolver las posibles dudas que puedan surgir en la construcción de la actividad. Acceder al siguiente enlace para ver el vídeo:
https://youtu.be/JYF9iRLPOx8

1.- Construimos tres puntos A, B y C, usando el comando 

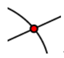
.

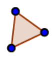
2.-Trazar las rectas, utilizando , que unen el punto A con el punto B, el punto B con el punto C y el punto C con el punto A.

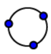
3.- Utilizar la herramienta 

para construir los ángulos de los puntos A, B y C.

4.- Transformar, tomando como centro A y amplitud $\frac{\angle A}{3}$ la recta AB, mediante . Tomando el mismo centro y la misma amplitud transformar la recta AC. Repetir este proceso con los otros vértices B y C.

5.- Construir los puntos X, Y, Z y U que se obtienen de intersectar las rectas obtenidas en el paso anterior, mediante .

6.- Construir el triángulo equilátero XYZ, usando el icono .

7.- Construir la circunferencia que pasa por los puntos A, Y y Z, haciendo uso de la herramienta .

8.- Construir los puntos Y' y Z' que se obtienen de intersectar los lados c y b del triángulo con la circunferencia respectivamente , usando el mismo comando que en el quinto paso.

9.- Trazar los segmentos $Y'Z$, ZY y YZ', utilizando .

10.- Observa si el triángulo XYZ sigue siendo equilátero cuando se modifican los lados del triángulo de partida a medida que arrastras sus distintos vértices. Investiga si se cumple el teorema si el triángulo ABC deja de ser acutángulo.

3.3.5. Actividad de demostración

En esta actividad se verá la demostración del teorema y se comprobarán los resultados anteriores. Utiliza el enlace que aparece a continuación de la demostración.

Sea ABC un triángulo cualquiera y sean X, Y y Z los puntos de intersección de los trisectores de los ángulos adyacentes a los lados del triángulo, entonces X, Y y Z son los vértices de un triángulo equilátero.

Para demostrarlo requerimos el siguiente lema:

Si los cuatro puntos Y', Z, Y, Z', *como los de la siguiente figura, satisfacen las condiciones* $Y'Z = ZY = YZ'$ *y* $\angle YZY' = \angle Z'YZ = 180° - 2\alpha > 60°$ *entonces, están situados en una circunferencia. Además, si un punto* A *está situado en el semiplano determinado por la recta* $Y'Z'$ *en el que no está* Y, *de manera que* $\angle Y'AZ' = 3\alpha$, *entonces este quinto punto* A *está situado también sobre la misma circunferencia.*

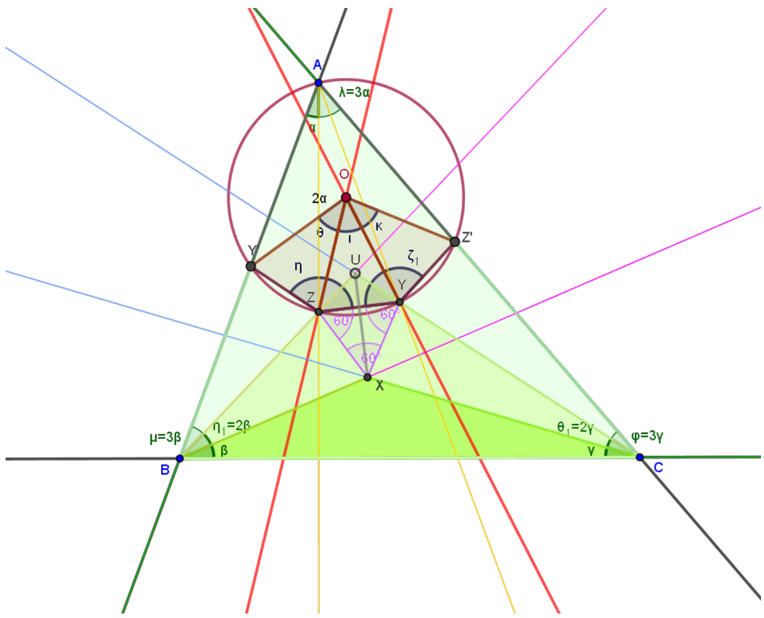


Figura 3.15. Representación visual del Lema

<u>Demostración del lema</u>:

Consideramos las bisectrices interiores de los ángulos iguales YZY' y $Z'YZ$, los cuales se cortan en O. Entonces, $OY'Z$, OZY, OYZ' son tres triángulos isásceles iguales que tienen ángulos en la base $90° - \alpha$. Sus lados iguales OY', OZ, OY, OZ' son radios de una circunferencia de centro O, y sus ángulos en dicho vértice común es 2α. Esto es, cada una de las cuerdas iguales $Y'Z$, ZY, YZ' subtiende un ángulo 2α en el centro O, por lo que, subtiende un ángulo α en cualquier punto del arco $Y'Z'$ que no contiene al punto Y. Dicho arco es el lugar geométrico de los puntos en el semiplano determinado por la recta $Y'Z'$ desde los que la cuerda $Y'Z'$ subtiende un ángulo 3α. En particular, uno de esos puntos es A, por lo que, está situado en la circunferencia, tal y como queríamos probar.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la demostración del lema, que se corresponde con la Figura 3.15:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

Demostración del teorema:

En el siguiente enlace se observa que las rectas que dividen en tres partes iguales los ángulos $\mu = 3\beta$ y $\varphi = 3\gamma$ se cortan, en los puntos U y X. En el ΔBCU, los ángulos μ y φ tienen por bisectrices BX y CX; por lo que, X es el centro de la circunferencia inscrita, y el ángulo ζ tiene por bisectriz UX. Tomamos los puntos Y y Z sobre las rectas CU y BU tales que XY y XZ forman ángulos de 30°con XU en los lados opuestos, por consiguiente $\Delta UXY = \Delta UXZ$, $XY = XZ$, y como el ángulo en X es de 60°, el ΔXYZ es equilátero.

Por otro lado, el ΔUZY también es isósceles. El ángulo que se forma en el vértice Ude dicho triángulo es el mismo que el del ΔUBC, cuyos otros ángulos son $\eta_1 = 2\beta$ y $\theta_1 = 2\gamma$; por tanto, los ángulos iguales del ΔUYZ son $\angle Y = \kappa_1$ y $\angle Z = \iota_1$, y el valor de cada uno de ellos es $\beta + \gamma$.

Teniendo en cuenta que $\alpha = \lambda/3$, de $\lambda + \mu + \varphi = 180°$ se deduce que $\alpha + \beta + \gamma = 60°$, entonces $\beta + \gamma = 60° - \alpha$.

De aquí, $\angle YZU = 60° - \alpha$ y $\angle XZU = \rho_1 = 120° - \alpha$. Además, BY' sobre BA es igual a BX, y CZ' sobre CA es igual a CX. Ahora tenemos $\Delta BZX = \Delta BZY'$ y $\Delta CYX = \Delta CYZ'$ por ello $Y'Z = ZX = ZY = YX = YZ'$.

Veamos cuanto miden los ángulos $\angle YZY'$y $\angle Z'YZ$, antes de aplicar el lema. Como los ángulos $\angle BZY' = \tau_1$ y $\angle BZX = \upsilon_1$ tienen ángulos suplementarios iguales, podemos escribir

$\angle UZY' = \phi_1 = \angle XZU = \rho_1 = 120° - \alpha$ y $\angle YZY' = \eta = \angle YZU + \angle UZY' = (60° - \alpha) + (120° - \alpha) = 180° - 2\alpha$

Análogamente, $\angle Z'YZ = \zeta_1 = 180° - 2\alpha$; y, evidentemente $\alpha = \lambda/3 < 60°$.

Por el lema se tiene que estos cinco puntos Y', Z, Y, Z',A, están todos situados sobre una circunferencia. Puesto que las cuerdas iguales $Y'Z$, ZY, YZ' subtienden ángulos iguales α en A, las rectas AZ y AY dividen en tres partes iguales al ángulo λ del ΔABC. Por tanto, los puntos X, Y, Z efectivamente forman un triángulo equilátero.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet la demostración del teorema:

https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

3.3.6. Relación con el currículum de Educación Secundaria

Este Teorema es importante porque se relaciona con el Currículum de 3° ESO, en concreto con el bloque de Geometría tanto de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas como de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas de 3° ESO, y permite abordar los criterios y contenidos siguientes en ambos casos:

- Criterios de evaluación:
1. Reconocer y utilizar transformaciones de una figura geométrica a otra.
2. Utilizar las razones de proporcionalidad y semejanza para aplicarlas en la resolución de ecuaciones, de triángulos o de problemas geométricos del mundo tecnológico.

-Contenidos:
1. Reconocimiento de giros en el plano.
2. Resolución de problemas geométricos diversos y contextualizados.
3. Resolución de problemas de geometría métrica plana con el cálculo de las ecuaciones de la recta, posiciones relativas, distancias y ángulos.

Concretamente estos contenidos de Educación Secundaria se han utilizado tanto en los contenidos previos, en las actividades de comprobación y demostración, en la demostración del propio teorema y en la resolución de los ejercicios, porque son necesarios para hacer un análisis exhaustivo del Teorema de Morley.

3.3.7. Ejercicios

En el libro interactivo se pueden encontrar las soluciones de los siguientes ejercicios:

1.- Sean AZ y CX las semirrectas tales que dividen a un ángulo en tres partes iguales, y que se cortan en V; y BX y AY las semirrectas que se cortan en W. Comprobar en el applet 3.4 del libro interactivo que las tres rectas UX, VY, WZ son concurrentes y que, en general, UVW no es equilátero.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 1 en el applet:

https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

2.- ¿Para qué tipo de triángulo ABC será regular el pentágono $AY'ZYZ'$?
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 2 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

3.- (Método de Arquímedes) Comprobar en el applet 3.6 del libro interactivo que el ángulo $\angle D$ es un tercio del ángulo $\angle AOB$.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 3 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

4.- (Método de Nicomedes) Comprobar en el applet 3.7 que el ángulo β trisecta el $\angle AOP$.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 4 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

5.- Los estudiantes muy a menudo muestran a sus profesores de geometría el siguiente método para trisecar un ángulo: En primer lugar, marcar las longitudes iguales AB y AC en los lados del ángulo dado $\angle A = \alpha$. Luego, dividir el segmento de recta BC en tres partes iguales. Y a continuación, dibujar AD y AE, las cuales trisecan el ángulo $\angle A = \alpha$. Probar que AD y AE no trisecan el ángulo $\angle A = \alpha$.
Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 5 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

Observación También se puede trisecar los ángulos exteriores mediante el teorema de Morley.

Acceder al siguiente enlace para manipular la observación en el applet:
https://www.geogebra.org/m/rrvzba4g

3.4. Teorema de Menelao

3.4.1. Introducción

En este capítulo se presentará el Teorema de Menelao. Menelao de Alejandría escribió alrededor de 100 a.C. un tratado denominado *Sphaerica,* en el que utilizó cierta propiedad de los triángulos esféricos. Aunque no se tiene constancia de que dicha propiedad de los triángulos planos fuera bien conocida en esa época, se le asignó a este resultado su nombre. Se usa conjuntamente con el

Teorema de Ceva.

El teorema establece que dado un triángulo cualquiera ABC, la condición necesaria y suficiente para que los puntos X, Y y Z construidos sobre las prolongaciones de los lados BC, CA y AB del triángulo estén alineados es que el producto de las razones sea la unidad.

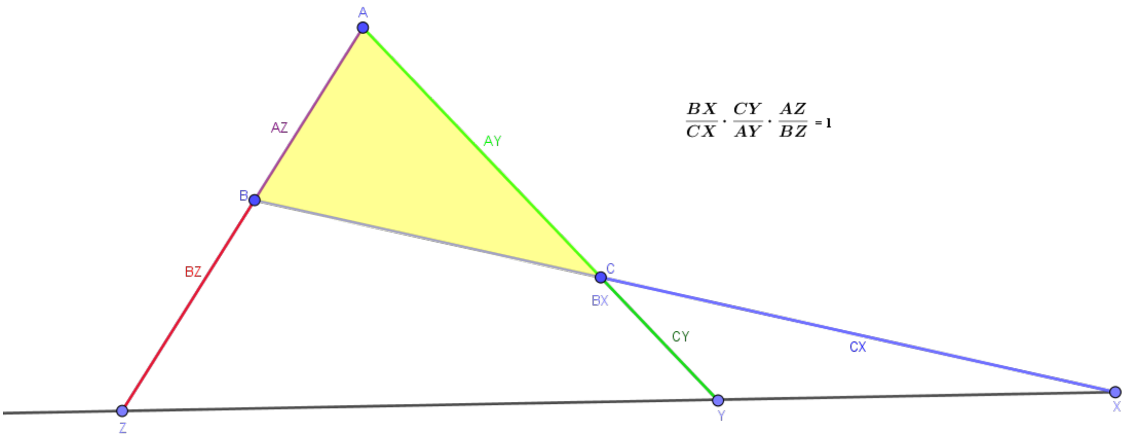


Figura 3.16. Representación visual del Teorema de Menelao

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.16:
https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

3.4.2. Conocimientos previos

Para realizar las siguientes actividades y comprender bien las situaciones que se presentan será necesario recordar las siguientes definiciones:

- Bisectriz de un ángulo
- Ceviana

Además, se necesita el resultado que sigue a continuación:

Teorema de Ceva: *Sea ABC un triángulo cualquiera y sean X, Y, Z* los puntos *construidos sobre los lados BC, CA y AB del triángulo, tres cevianas AX, BY,CZ son concurrentes, si y solo si* $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$.

En el applet 4.2 del libro interactivo se muestra un caso del Teorema de Ceva, arrastra para comprobar el resultado.

Para una actividad completa relacionada con el Teorema de Ceva ir al apartado 3.2 de este capítulo.

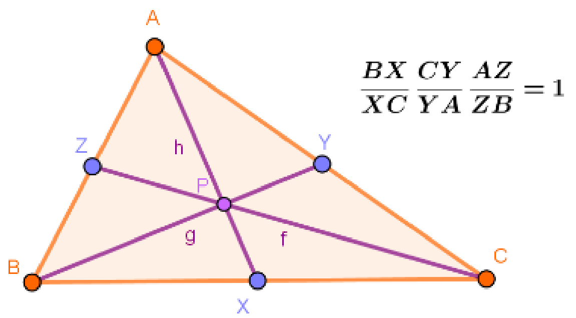


Figura 3.17. Representación visual del Teorema de Ceva

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.17:
https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

Propiedad 3.4.1: *Sea ABC un triángulo cualquiera, se verifica que si un segmento DE es paralelo al lado AB del triángulo, entonces los lados del triángulo CDE son proporcionales a los lados del triángulo de partida.*

En la Figura 3.18 se observa que se cumple $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE}$.

3.4.3. Enunciado formal del Teorema de Menelao

Sea ABC un triángulo cualquiera, los puntos X, Y, Z construidos sobre las prolongaciones de los lados BC, CA y AB del triángulo respectivamente están alineados, si y solo si $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$.

Nota:

Si en lugar de segmentos se consideran consideran segmentos orientados (o vectores) el producto de esas razones es $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = -1$, en vez de $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.19:
https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

3.4.4. Actividad de comprobación

En esta actividad se tratará de hacer una comprobación dinámica del resultado.

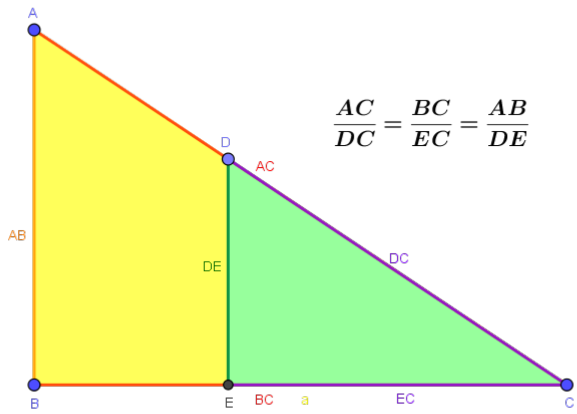


Figura 3.18. Representación visual de la Propiedad 3.4.1

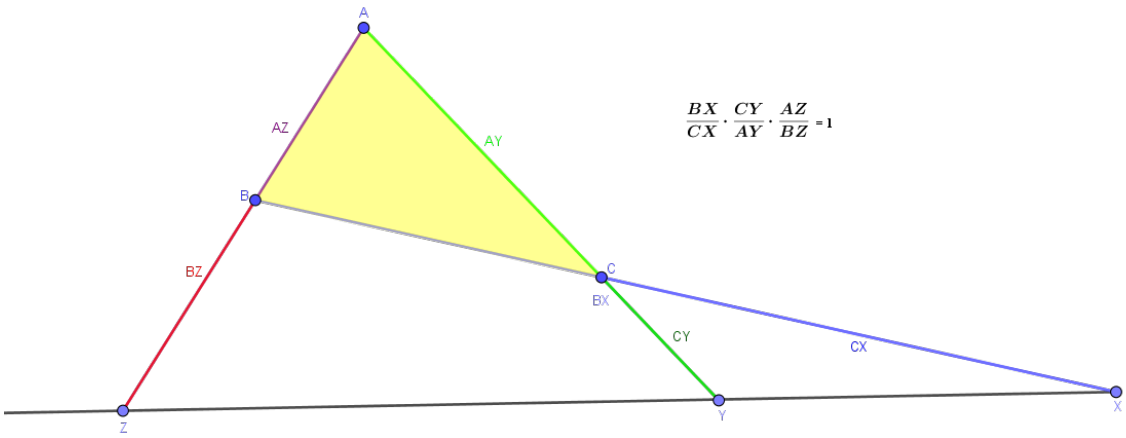


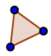
Figura 3.19. Representación visual del Teorema de Menelao

Realizar de forma autónoma la construcción de la figura en la ventana de Geogebra en blanco, siguiendo los pasos indicados a continuación. Acceder al siguiente enlace para manipular la ventana de Geogebra en blanco::

https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

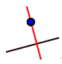
Se puede utilizar el vídeo para resolver las posibles dudas que puedan surgir en la construcción de la actividad. Acceder al siguiente enlace para ver el vídeo.

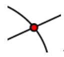
https://youtu.be/6P1rE4BeoHA

1.- Construir un triángulo ABC, usando el comando .

2.- Trazar las semirrectas BC, AC y AB, haciendo uso de la herramienta , y posteriormente para construir los puntos X, Y y Z que pasan por dichas semirrectas, respectivamente, utilizar el icono .

3.- Trazar la semirrecta XZ, utilizando la misma herramienta que en el segundo paso.

4.- Trazar la recta que pasa por el vértice A perpendicular a la semirrecta XZ, mediante .

5.- Construir un punto que intersecte la semirrecta XZ con la recta obtenida en el cuarto paso, usando la herramienta , y a continuación trazar el segmento h_1 de extremos A y dicho punto, usando .

6.- Repetir el proceso del cuarto paso y del quinto paso con los otros vértices B y C del triángulo, obteniendo los segmentos h_2 y h_3, respectivamente.

7.- Utilizar la herramienta , para construir los ángulos rectos de las alturas h_1, h_2 y h_3.

8.- Obtén las razones: $\frac{BX}{CX}$, $\frac{CY}{AY}$ y $\frac{AZ}{BZ}$ y calcula sus productos.

9.- Observe como el valor de $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ}$ va variando a medida que se mueve el punto Y sobre la semirrecta AC y que dicho punto solamente se alinea cuando $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$. Investiga si se cumple el teorema para cualquier triángulo ABC.

3.4.5. Actividad de demostración

En esta actividad se verá la demostración del teorema y se comprobarán los resultados anteriores. Utiliza el enlace que aparece a continuación de cada implicación de la demostración.

Sea ABC un triángulo cualquiera, los puntos X, Y, Z construidos sobre las prolongaciones de los lados BC, CA y AB del triángulo respectivamente están alineados, si y solo si $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$.

Demostración:

“$\Longrightarrow$”

Tenemos como hipótesis que los puntos X, Y, Z están alineados.

Sean h_1, h_2, h_3 las longitudes de los segmentos perpendiculares desde los vértices A, B, C hasta la recta XY, respectivamente.

Consideremos los triángulos rectángulos BHX y CJX que están en posición de Tales, luego aplicando la propiedad 3.4.1 tendremos que $\frac{BX}{CX} = \frac{HX}{JX} = \frac{h_2}{h_3}$. Lo mismo ocurre para los triángulos rectángulos AIY y CJY, por lo que, $\frac{CY}{AY} = \frac{JY}{IY} = \frac{h_3}{h_1}$, y para los triángulos rectángulos AIZ y BHZ se tiene que $\frac{AZ}{BZ} = \frac{IZ}{HZ} = \frac{h_1}{h_2}$.

Multiplicando las tres igualdades anteriores queda probada esta implicación, pues, $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_2}{h_3}\frac{h_3}{h_1}\frac{h_1}{h_2} = 1$

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la condición suficiente de la demostración:

https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

“ $\Longleftarrow$”

Ahora partimos de que X, Y, Z están en cada uno de los tres lados del triángulo de manera que:

$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$ (1)

Consideramos Z' el punto de intersección de los segmentos AB y YZ, luego teniendo en cuenta el mismo argumento que usamos previamente, podemos escribir

$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{BZ'} = 1$ (2)

Igualando (1) y (2) obtenemos

$\frac{AZ'}{BZ'} = \frac{AZ}{BZ}$,

es decir, observamos que los segmentos AZ' y AZ tienen el mismo origen, el vértice A, que los segmentos BZ' y BZ tienen ambos como origen el vértice B y que tienen la misma razón. por tanto, Z' coincide con Z, lo cual implica que X, Y, Z están alineados.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la condición necesaria de la demostración:

https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

3.4.6. Relación con el currículum de Educación Secundaria

Este teorema es importante porque se relaciona con el Currículum de Bachillerato, en concreto con el bloque de Geometría de Matemáticas Académicas de 1° de Bachillerato, y permite abordar los criterios y contenidos siguientes:

- Criterio de evaluación:

1. Utilizar las razones de proporcionalidad y semejanza para aplicarlas en la resolución de ecuaciones, de triángulos o de problemas geométricos del mundo tecnológico.

2. Utilizar los vectores en el plano, sus operaciones y propiedades, para resolver problemas geométricos contextualizados, interpretando los resultados; además, identificar y construir las distintas ecuaciones de la recta y los lugares geométricos, reconociendo sus características y elementos.

- Contenidos:

1. Resolución de triángulos.
2. Resolución de problemas geométricos diversos y contextualizados.
3. Resolución de problemas de geometría métrica plana con el cálculo de las ecuaciones de la recta, posiciones relativas, distancias y ángulos.
4. Estudio de lugares geométricos del plano, en particular, la bisectriz de un ángulo.

Dichos contenidos de Educación Secundaria se han empleado tanto en los contenidos previos, en las actividades de comprobación y demostración, en la demostración del propio teorema y en la resolución de los ejercicios, porque son necesarios para hacer un análisis detallado del Teorema de Menelao.

3.4.7. Ejercicios

En el libro interactivo se pueden encontrar las soluciones de los siguientes ejercicios:

1.- En la figura del applet 4.7, probar que las bisectrices exteriores de los tres ángulos de un triángulo escaleno cortan a sus tres respectivos lados opuestos en tres puntos que están alineados.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 1 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

2.- Demuestra que el teorema de Menelao implica el teorema de Ceva.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 2 en el applet:
https://www.geogebra.org/m/h94v3snh

3.5. Teorema de Pascal

3.5.1. Introducción

En este capítulo se presentará el Teorema de Pascal, el cual es un teorema importante. Fue descubierto por el filósofo y matemático Blaise Pascal a la edad de dieciséis años. En este teorema se utiliza el teorema de Menelao, y su demostración fue conocida y alabada por G.W. Leibniz.

Este teorema se verifica para la construcción de cualquier hexágono estrellado o no, de los sesenta posibles hexágonos que tenemos al combinar seis puntos sobre una circunferencia, y de igual manera, se cumple para cualquier cónica. En particular, en esta actividad se toma un hexágono estrellado $ABCDEFA$ inscrito en una circunferencia. Luego, si se elige otro polígono estrellado se necesitará usar otros argumentos análogos a este para poder hacer la demostración.

El teorema establece que dado un hexágono cualquiera $ABCDEFA$ inscrito en una circunferencia, la condición necesaria y suficiente para que los tres pares de lados opuestos se extienden hasta que se cortan es que los tres puntos de intersección L, M y N de los lados del hexágono estén alineados.

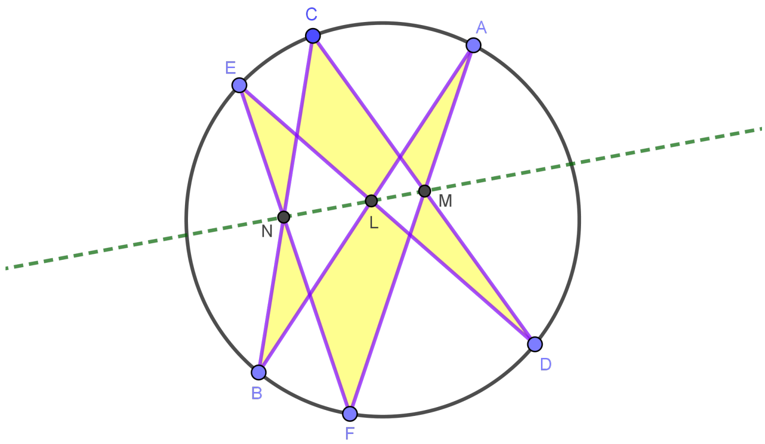


Figura 3.20. Representación visual del Teorema de Pascal

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.20:
`https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5`

3.5.2. Conocimientos previos

Para realizar las siguientes actividades y comprender bien las situaciones que se presentan será necesario recordar las siguientes definiciones:

- Cónica.
- Cuadrilátero cruzado o complejo
- Cuadrilátero cíclico

- Recta de Pascal en un hexágono inscrito en una circunferencia o en cualquier cónica)

Además, se necesita el resultado que sigue a continuación:

Propiedad 3.5.1: *Si dos rectas desde un punto P cortan a la circunferencia en los puntos A y A' (que pueden coincidir) y B y B' (que pueden coincidir), respectivamente, entonces $PA \times PA' = PB \times PB'$.*

Demostración:

Se diferencian tres casos:

Si el punto de intersección P está sobre la circunferencia ambos miembros de la ecuación son cero, ya que P coincide con A o A' y con B o B', y en tal caso la igualdad es inmediata.

Por otro lado, si P se encuentra en el interior de la circunferencia, como se muestra a la izquierda de la Figura 3.21, los triángulos PAB' y PBA' son semejantes, dado que los ángulos $\angle PAB'$ y $\angle PBA'$ son iguales, por subtender el mismo arco, y por la misma razón los ángulos $\angle PB'A$ y $\angle PA'B$ son iguales. Luego, la semejanza de triángulos garantiza que $\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'}$, es decir, que los lados son proporcionales, entonces $PA \times PA' = PB \times PB'$.

Por último, si P se encuentra en el exterior de la circunferencia, tal y como se muestra a la derecha de la Figura 3.21, los triángulos PAB' y PBA' son semejantes, puesto que los ángulos $\angle PAB'$ y $\angle PBA'$ son iguales, por ser cíclico el cuadrilátero $AA'BB'$. Análogamente los ángulos $\angle PB'A$ y $\angle PA'B$ serán iguales. Por la semejanza de triángulos, igual que en el caso anterior, se tiene que $\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'}$, esto es, $PA \times PA' = PB \times PB'$.

$\square$

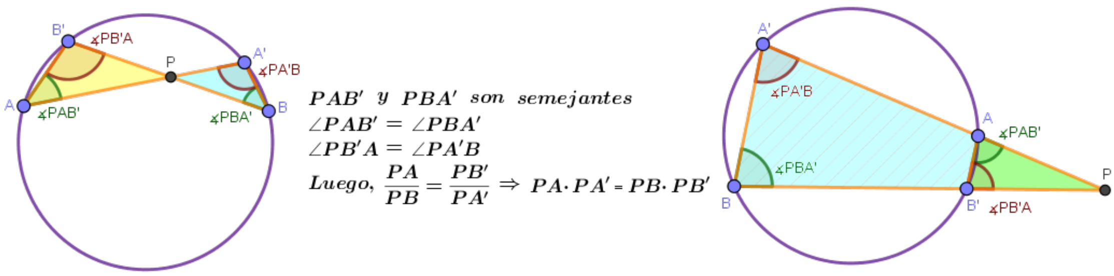


Figura 3.21. Representación visual de la Propiedad 3.5.1

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.21: https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

Teorema de Menelao: Sea ABC un triángulo cualquiera, los puntos X, Y, Z construidos sobre las prolongaciones de los lados BC, CA y AB del triángulo están alineados, si y solo si $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$.

En el applet 5.4 del libro interactivo se muestra un caso del Teorema de Menelao, arrastra para comprobar el resultado.

Para una actividad completa relacionada con el Teorema de Menelao ir al apartado 3.4 de este capítulo.

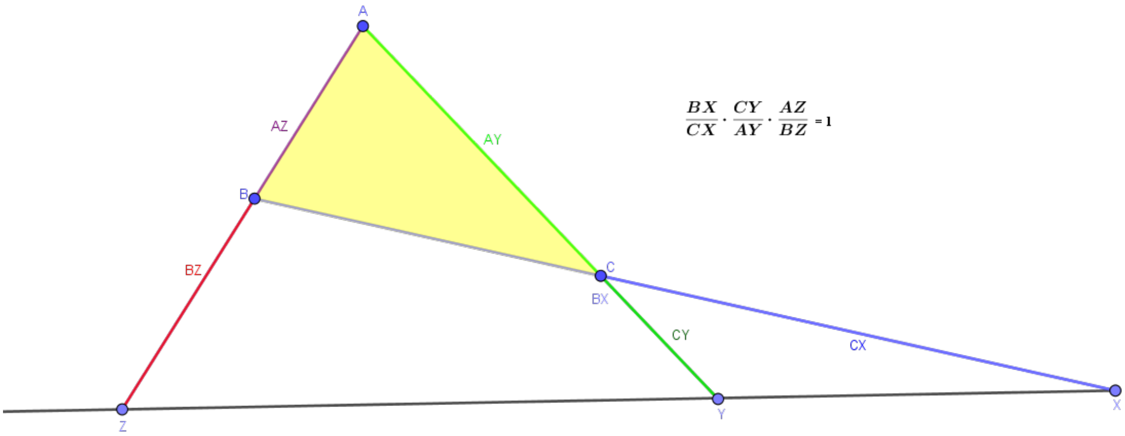


Figura 3.22. Representación visual del Teorema de Menelao

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.22:
https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

3.5.3. Enunciado formal del Teorema de Pascal

Sea $ABCDEF$ un hexágono cualquiera inscrito en una circunferencia, los tres pares de lados opuestos se cortan, si y solo si los tres puntos de intersección L, M y N están alineados.

Nota: En general, este teorema se puede enunciar como sigue:

Si un hexágono arbitrario $ABCDEFA$ se encuentra inscrito en alguna sección cónica, y se extienden los pares de lados opuestos hasta que se cruzan, los tres puntos LMN en los que se intersecan se encontrarán ubicados sobre una línea recta, denominada la recta de Pascal de esta configuración.

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la Figura 3.23:

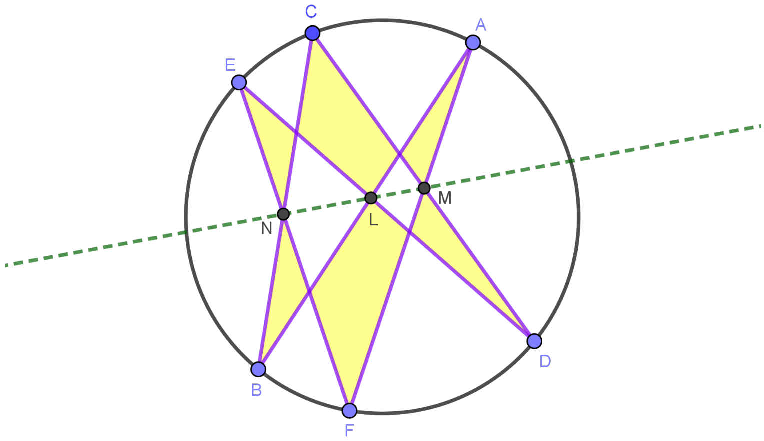


Figura 3.23. Representación visual del Teorema de Pascal

https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

3.5.4. Actividad de comprobación

En esta actividad se tratará de hacer una comprobación dinámica del resultado.

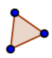
Realizar de forma autónoma la construcción de la figura en una ventana de Geogebra en blanco, siguiendo los pasos indicados a continuación. Acceder al siguiente enlace para manipular la ventana de Geogebra en blanco.
https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

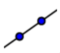
Se puede utilizar el vídeo para resolver las posibles dudas que puedan surgir en la construcción de la actividad. Acceder al siguiente enlace para ver el vídeo.
https://youtu.be/H2l7mf3J2U8

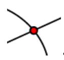
1.- Construir una circunferencia de centro cualquiera y que pase por el punto A, usando el comando .

2.- Utilizar la herramienta 

para construir los puntos C, E, B, F y D sobre la circunferencia.

3.- Construir un hexágono estrellado $ABCDEFA$, mediante .

4.- Trazar las rectas, utilizando , ED, EF, AB, AF, BC y CD.

5.- Construir los puntos N, L y M que se obtienen de intersectar las rectas EF y BC, ED y AB, y CD y AF, respectivamente, usando el icono .

6.- Observa a medida que arrastras los distintos vértices del hexágono que los puntos L, M y N están alineados. Investiga si el teorema se cumple para cualquier hexágono $ABCDEFA$.

3.5.5. Actividad de demostración

En esta actividad se verá la demostración del teorema y se comprobarán los resultados anteriores. Utiliza el enlace que aparece inmediatamente después de la demostración.

Sea $ABCDEF$ un hexágono cualquiera inscrito en una circunferencia, los tres pares de lados opuestos se cortan, si y solo si los tres puntos de intersección L, M y N están alineados.

Demostración:

"$\Longrightarrow$"

Queremos probar que los tres puntos de intersección $L = AB \cap DE,\ M = CD \cap FA,\ N = BC \cap FE$ están alineados.

Vamos a suponer que las tres rectas AB, CD, EF forman un triángulo UVW, prolongando dos vértices opuestos del hexágono.

A continuación se elige en tres casos diferentes un punto de cada lado del triángulo UVW, o bien, su prolongación, siendo tales puntos:

- L un punto del lado VW, D una prolongación del lado UW y E un punto del lado UV, y como la terna de puntos LDE está alineada, entonces el Teorema de Menelao dice que: $\frac{VL}{WL}\frac{WD}{UD}\frac{UE}{VE} = 1$.

- A una prolongación del lado VW, M una prolongación del lado UW y F una prolongación del lado UV, usando de nuevo el Teorema de Menelao, la terna de puntos AMF está alineada, es decir, $\frac{VA}{WA}\frac{WM}{UM}\frac{UF}{VF} = 1$.

- B una prolongación del lado VW, C un punto del lado UW y N un punto del lado UV, luego de forma análoga a los casos anteriores se obtiene que la terna de puntos BCN está alineada, por tanto $\frac{VB}{WB}\frac{WC}{UC}\frac{UN}{VN} = 1$.

Multiplicando las tres expresiones obtenidas anteriormente, y aplicando la propiedad 3.5.1 se sigue que:$\frac{WD}{UD}\frac{UE}{VE}\frac{VA}{WA}\frac{UF}{VF}\frac{VB}{WB}\frac{WC}{UC} = \frac{UE\times UF}{UC\times UD}\frac{VA\times VB}{VE\times VF}\frac{WC\times WD}{WA\times WB} = 1$, De aquí $\frac{VL}{WL}\frac{WM}{UM}\frac{UN}{VN} = 1$,, dado que L es un punto de la recta AB, M un punto de la recta CD y N un punto de la recta EF. Por lo que, L, M, N están alineados, como consecuencia de aplicar tres veces el teorema de Menelao.

"$\Longleftarrow$"

Esta justificación se hace por métodos proyectivos, que salen fuera del objeto del Trabajo de Fin de Grado, del que este libro interactivo forma parte.

□

Acceder al siguiente enlace para manipular el applet de la demostración: https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

3.5.6. Relación con el currículum de Educación Secundaria

Este teorema es importante porque se relaciona con el Currículum de Bachillerato, en concreto con el bloque de Geometría de Matemáticas Académicas de 1° de Bachillerato , y permite abordar los criterios y contenidos siguientes:

- Criterios de evaluación:

1. Utilizar las razones de proporcionalidad y semejanza para aplicarlas en la resolución de ecuaciones, de hexágonos o de problemas geométricos del mundo tecnológico.

2. Identificar y construir las distintas ecuaciones de la recta y los lugares geométricos, reconociendo sus características y elementos.

3. Resolver problemas geométricos contextualizados, interpretando los resultados.

- Contenidos:

1. Resolución de hexágonos.

2. Resolución de problemas geométricos diversos y contextualizados.

3. Resolución de problemas de geometría métrica plana con el cálculo de las ecuaciones de la recta, posiciones relativas y distancias.

4. Reconocer y estudiar características y elementos de cónicas, en particular, de la circunferencia.gonos o de problemas geométricos del mundo tecnológico.

Concretamente estos contenidos de Educación Secundaria se han utilizado tanto en los contenidos previos, en las actividades de comprobación y demostración, en la demostración del propio teorema y en la resolución de los ejercicios, porque son necesarios para hacer un análisis exhaustivo del Teorema de Pascal.

3.5.7. Ejercicios

En el libro interactivo se pueden encontrar las soluciones de los siguientes ejercicios:

1.-Comprobar en el applet 5.7 del libro interactivo, que si cinco de los seis vértices de un hexágono están situados en una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados, entonces el sexto vértice está situado en la misma circunferencia.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejercicio 1 en el applet:

https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

2.- Sea $ABDE$ un cuadrilátero cíclico que no tiene lados paralelos, comprobar en el applet 5.8, que las rectas las tangentes a la circunferencia en B y E y la recta que une los puntos cortan a la recta que une $L = AB \cap CE$ y $MM = BC \cap EA$ se cortan en un único punto N.

Acceder al siguiente enlace para manipular el ejerciio 2 en el applet:

https://www.geogebra.org/m/zxmt4vb5

4

Conclusiones

En este trabajo se realiza un análisis y selección de teoremas clásicos de Geometría para ser presentados, además de en formato de Memoria de TFG, en formato de Libro Interactivo de GeoGebra. El propósito general del trabajo es el de elaborar un recurso didáctico basado en el uso de tecnologías digitales, en particular GeoGebra que pueda ser utilizado principalmente por profesorado de matemáticas de Educación Secundaria en Formación y también en activo.

Como primera conclusión que se obtiene del trabajo realizado, podemos afirmar se han encontrado más dificultades de las previstas a la hora de utilizar técnicamente el formato que facilita el propio GeoGebra. Como es sabido, GeoGebra es un software de libre disposición en la red, sometido a continuas modificaciones y carente de subvenciones que permitan, sobre todo, interactuar con otros programas que no son de libre acceso. No obstante, se superaron estas dificultades, pese a que uno de los problemas que se puede observar es el relacionado con la lentitud de carga de las imágenes del propio LIGG. TambiÃ©n, se han encontrado dificultades técnicas a la hora de elaborar enlaces parciales a los distintos apartados que se presentan en el LIGG lo que en algunos momentos ralentizan la carga de las diferentes imágenes.

Como segunda conclusión, conviene señalar que el análisis bibliográfico realizado nos ha permitido afianzar diferentes conceptos elementales de Geometría, a veces olvidados y a veces no utilizados, pero que pueden resultar muy útiles para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria. Podemos considerar que es viable diseñar este tipo de recursos porque podrán ser utilizados en la formación de profesores de matemáticas que requieren complementar una formación académica sólida en matemáticas, como una reflexién sobre la otra matemática que será el objeto de estudio que desarrollan sus futuros estudiantes. La disposición de materiales basados en las tecnologías digitales acercarán a los estudiantes de secundaria al entorno que les rodea salpicado cada dÃa más de nuevos recursos digitales.

Otra conclusión es que el Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra y, en particular, este libro interactivo que se ha presentado, no debería ser considerado como un recurso aislado sino que debe servir al profesorado como muestra de un recurso que puede dar ideas para la creación de otros análogos e incluso que puedan ser utilizados junto con la herramienta Crear Clase que recientemente han diseñado que permite interactuar con el alumnado en .en vivo”, pudiendo visualizar el profesor el trabajo que realiza el alumnado a tiempo real, algo que en estos tiempos de semipresencialidad podría resultar muy útil.

Finalmente, como última conclusión se puede decir que la realización de este trabajo,ha contribuido a completar mi formación como matemática y como futura profesora de Educación Secundaria

5

Trabajos futuros

La realización de un trabajo de estas características, que trata de conjugar las matemáticas y su enseñanza, nos ha llevado a reflexionar sobre posibles extensiones y aplicaciones del mismo.

Dado que el trabajo es principalmente un trabajo de diseño de un recurso, el siguiente paso será implementarlo en el aula con profesores en formación, tanto inicial como en activo. Hecho esto, durante esa puesta en práctica, se deberá hacer un seguimiento del trabajo en el aula para poder así evaluar su viabilidad para conseguir esa formación y evaluar las dificultades y problemas que puedan surgir a partir del diseño que se ha hecho. El LIGG elaborado puede servir de guía para realizar un Seminario de formación que se puede ofertar dentro del POAT de la Sección de Matemáticas.

Este Seminario ayudaría a:
- Crear materiales educativos dinámicos e interactivos sencillos que sirvan en procesos de enseñanza-aprendizaje para los Bloques de Geometría de la Educación Secundaria actual.
- Crear actividades para que el alumnado manipule de forma autónoma dichas construcciones y así deduzca relaciones, propiedades y resultados a partir de la observación directa.
- Enriquecer la formación para la docencia de las Matemáticas.
- Atender a los diferentes ritmos de trabajo del alumnado y a una atención individualizada del mismo.
- Mejorar los resultados académicos en el área de Matemáticas de Educación Secundaria.

Otros trabajos futuros podrían estar dedicados al diseño de nuevos LIGG con resultados geométricos rescatados de la literatura que cubran otras ramas de la geometría como la Geometría Proyectiva o la Geometría de las transformaciones o incluso de la inversión, que son herramientas que ya están incorporadas en

GeoGebra. Por ejemplo, durante la Fase 2 del desarrollo de este trabajo (Selección de los resultados o teoremas) se analizaron otros teoremas para los cuales, incluso se elaboraron las diferentes actividades diseñadas en el LIGG, como son el de Feuerbach, los triángulos de Napoleón y el problema de Fagnano, que debido principalmente a su complejidad de implementación en la Educación Secundaria, fueron descartados. Se podría, por todo ello preparar un trabajo en los mismos términos que este, pero esta vez orientado hacia alumnado universitario, como puede ser en los primeros cursos o incluso para formar parte de los complementos de formación requeridos en el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria (hay una materia denominada así).

Bibliografía

[1] Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. *Retorno a la geometría.* 1a edición. Colección: La tortuga de Aquiles, 1994.

[2] Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. *Geometry revisited.* Editorial: The Mathematical Association of America (MAA), New York, 1967.

[3] Bold, B. *Famous problems of Geometry and how to solve them.* 1st published. Editorial: Dover, New York, 1982.

[4] Leonard, I. E.; Lewis, J. E.; Liu, A.C. F.; Tokarsky, G. W. *Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective.* Editorial: Wiley, New York, 2014.

[5] Ogilvy, C. S. *Excursions in Geometry.* Editorial: Dover, New York, 1990.

[6] Santos-Trigo, M.; Camacho-Machín, M. *La resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnología digital en el diseño de libros interactivo* Editorial: Educatio Siglo XXI, 36(3) pp. 21-40, 2018.

[7] Leung, A. *Exploring techno-pedagogic task design in the mathematics classroom* Editorial: En A. Leung and A. Baccaglini-Frank (eds.), Digital technologies in designing mathematics education tasks, pp. 3-16. DOI 10.1007/978-3-319-43423-0. Switzerland: Springer, 2017.

[8] Marcos de Lanuza, F. *Matemáticas, Curso de Preuniversitario* Editorial: Gregorio del Toro, Madrid, 1964.

[9] Biblioteca Digital Univalle. *Semblaza de H.S.M. Coxeter* [en línea]. [Fecha de consulta: 20-10-2020]. Disponible en: https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/4406/H.S.M.%20Coxeter%2C%20un%20geometra%20que%20cultivo%20las%20matematicas%20como%20un%20arte%20%281907-2003.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[10] Academic. *Semblaza de H.S.M. Coxeter* [en línea]. [Fecha de consulta: 20-10-2020]. Disponible en: https://esacademic.com/dic.nsf/eswiki/555652.

[11] *Semblaza de S.L. Greitzer* [en línea]. [Fecha de consulta: 20-10-2020]. Disponible en: https://translate.google.es/translate?hl=es&sl=

en&u=https://en.wikipedia-on-ipfs.org/wiki/S._L._Greitzer.html&prev=search&pto=aue.

[12] *Boletín Oficial de Canarias n.o 126, de 15 de julio de 2016* [en línea]. Decreto 83/2016, de 4 de julio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. [Fecha de consulta: 07-05-2021]. Disponible en: http://www.gobiernodecanarias.org/boc/2016/136/001.html.

[13] *GeoGebra: Software de Geometría Dinámica libre*. 2001. Hohenwarter, Universidad de Salzburgo, Austria. https://www.geogebra.org/.

Libros interactivos de GeoGebra

[14] *Teorema de los Senos Generalizado*. Alejandra López Cruz, 2021. https://www.geogebra.org/m/sfsadvj9.

[15] *Teorema de Ceva*. Alejandra López Cruz, 2021. https://www.geogebra.org/m/qfuxcx4c.

[16] *Teorema de Morley*. Alejandra López Cruz,2021. https://www.geogebra.org/m/btwbh9pg.

[17] *Teorema de Menelao*. Alejandra López Cruz, 2021. https://www.geogebra.org/m/jrmhxv3r.

[18] *Teorema de Pascal*. Alejandra López Cruz, 2021 https://www.geogebra.org/m/uaj4kkmd.

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Classical Geometry theorems using an interactive GeoGebra book, for the training of secondary education teachers

Alejandra López Cruz
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101061085@ull.edu.es

Abstract

THE objective of this Final Degree Project, organized in five chapters, is to revise from a dynamic perspective some classical theorems of Geometry and elaborate an interactive material in the form of a GeoGebra Book that can be used for the training of secondary education teachers. As a result of this work, a series of activities are built that are incorporated into several GG-books (GeoGebra Interactive Books) with different activities based on applets that try to facilitate the understanding and the place that these theorems can occupy in the current Secondary Education.

1. Introduction

SINCE digital technologies have become part of the project environment for students at all levels of education, there has been a need for reflection and decision-making on their inclusion in the classroom. The design of the interactive books presented in this didactic research work has tried to provide some answers to some of the questions raised by this situation.

2. Outline

OBJECTIVES In the work we are prposed the following goals:
- To review some classical geometry texts.
- To analyze the feasibility of incorporating as learning elements some theorems that do not currently appear in Secondary Education.
- To design a schema of organizers to configure a set of learning activities of the selected Theorems.
- To create several GeoGebra Interactive Books (GGBs).
- To facilitate the pre-service teacher training of Secondary School Mathematics.

METHODOLOGY. To achieve the proposed objectives, the project has been divided into six phases:

- Phase 1: Literature review and analysis
- Phase 2: Selection of Theorems to incorporate into the project
- Phase 3: Detailed study of theorems and selection of problems
- Phase 4: Towards the search for a design
- Phase 5: Development of GGBs according to the same structure

  GGBs has been organized with a single format:

STRUCTURE
Introduction
Previous knowledge
Formal statement of the theorem
Test activity
Proof activity
Relationship with the secondary education curriculum
Exercises

- Phase 6: Retrospective analysis of the work done, final writing of the Report and establishment of the conclusions of the project

RESULTS AND DISCUSSION
As results of this research and innovation work, we design five GGBs for the following Classic Theorems
- Generalized Sinus Theorem:https://www.geogebra.org/m/sfsadvj9
- Ceva's Theorem: https://www.geogebra.org/m/qfuxcx4c
- Morley's Theorem: https://www.geogebra.org/m/btwbh9pg
- Menelaus' Theorem: https://www.geogebra.org/m/jrmhxv3r
- Pascal's Theorem: https://www.geogebra.org/m/uaj4kkmd.

CONCLUTIONS
The bibliographic analysis made has allowed us to strengthen different elementary concepts of Geometry, sometimes forgotten and sometimes not used.
The interactive book that has been presented, should not be considered as an isolated resource but usable as a classroom resource.

References

[1] Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. *Geometry revisited.* Editorial: The Mathematical Association of America (MAA), New York, 1967.

[2] Bold, B. *Famous problems of Geometry and how to solve them.* 1st published. Editorial: Dover, New York, 1982.

[3] Leonard, I. E.; Lewis, J. E.; Liu, A.C. F.; Tokarsky, G. W. *Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective.* Editorial: Wiley, New York, 2014.

[4] Ogilvy, C. S. *Excursions in Geometry.* Editorial: Dover, New York, 1990.