

Maryam Hernández Felipe

*Aproximación polinómica por mínimos cuadrados y uniforme.*

Least squares and uniform polynomial approximation.

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Junio de 2021

DIRIGIDO POR  
*Domingo Hernández Abreu*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	V
<b>Resumen/Abstract</b> .....	VII
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Aproximación por mínimos cuadrados</b> .....	1
1.1. Existencia y unicidad de mejor aproximación en mínimos cuadrados. ....	1
1.2. Aplicación al ajuste polinómico por mínimos cuadrados discreto. .	8
1.3. Aplicación al ajuste polinómico por mínimos cuadrados continuo. .	9
1.4. Polinomios ortogonales. ....	11
<b>2. Aproximación en espacios normados. Ajuste polinómico uniforme</b> .....	19
2.1. Aproximación en espacios normados. ....	19
2.2. Ajuste polinómico uniforme .....	28
2.3. Algoritmo de Remez. ....	32
<b>Bibliografía</b> .....	47
<b>Poster</b> .....	49



---

## Agradecimientos

A mi tutor, Domingo. Sin su dedicación y enseñanza, este trabajo no hubiese sido posible. Gracias por toda la paciencia y por siempre aconsejarme y guiarme a lo largo de la realización de este trabajo.

A mis padres y pareja, por estar en cada momento difícil y por su apoyo incondicional. Gracias por no haber convertido esto en una locura.

A Pedro Medina y Mario Cruz, sin ustedes no estaría donde estoy. A mi compañera de carrera Marisa, por todas las experiencias compartidas.

Maryam Hernández Felipe  
La Laguna, 9 de junio de 2021



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*En la presente memoria se pretende profundizar en el estudio de aproximación polinómica en espacios normados. Empezaremos ampliando el estudio del ajuste polinómico por mínimos cuadrados. Inicialmente introducimos conceptos como espacio pre-Hilbert o matriz de Gram, desarrollaremos resultados cruciales para nuestro proyecto y veremos aplicaciones para el caso discreto y continuo. A partir de la Sección 1.4 profundizaremos en los polinomios ortogonales para dar comienzo al capítulo 2 que ampliará la aproximación a espacios normados. En este capítulo se obtendrán resultados y condiciones para la existencia y unicidad de la mejor aproximación en espacios normados, con énfasis en la norma uniforme. También para finalizar el proyecto se presentará el “Algoritmo de Remez”, un algoritmo recursivo para la obtención aproximada de la mejor aproximación polinómica uniforme. Y por último, mostraremos el correspondiente algoritmo implementado en Matlab con la visualización de algunos ejemplos concretos.*

**Palabras clave:** *Mejor aproximación – Mínimos cuadrados – Minimax – Algoritmo de Remez.*

## ***Abstract***

---

*This report aims to deepen the study of polynomial approximation in normed spaces. To begin with, we will develop the study of polynomial least squares approximation. First step will be to introduce concepts such as pre-Hilbert space or Gram matrix, after that crucial results for our project will be presented and applications for discrete and continuous cases will be shown. From the Section 1.4 on, we will delve into orthogonal polynomials to start with the second chapter in which approach to normed spaces will be developed. In this chapter, results and conditions for the existence and uniqueness of the best approximation in normed spaces will be obtained, with a strong focus on uniform norm. To conclude this project, the “Remez Algorithm” will be presented as a recursive algorithm for obtaining the best uniform polynomial approximation and we will finish with its implementation in MATLAB by displaying concrete examples.*

**Keywords:** *Best approximation – Least squares – Minimax – Remez Algorithm.*

---

## Introducción

En este trabajo daremos una introducción a la aproximación polinómica por mínimos cuadrados y en norma uniforme. En general, la teoría de la aproximación es una rama de las matemáticas que aborda el problema de la aproximación de una función dada mediante una clase de funciones más sencilla.

En norma uniforme, aumentar el número de nodos de interpolación no genera necesariamente una sucesión de polinomios interpoladores que converja a la función a interpolar. Es más, en general, con nodos equiespaciados en un intervalo  $[a, b]$  pueden producirse oscilaciones de gran magnitud cerca de los extremos del intervalo. Por esto en el primer capítulo vamos a tratar la aproximación de funciones, mediante polinomios, por mínimos cuadrados, es decir, respecto de la norma euclídea (ponderada).

En el resto del trabajo denotamos por  $\prod$  al conjunto de polinomios en una variable  $x$  y  $\prod_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , conjunto de polinomios de grado menor o igual que  $n$ .

Ajuste polinómico por mínimos cuadrados discreto.

Consideramos la *norma euclídea ponderada discreta* en  $\mathbb{R}^{N+1}$  con pesos positivos  $w_0, \dots, w_N$

$$\|x\|_{2,w} := \left( \sum_{i=0}^N x_i^2 w_i \right)^{1/2}, \quad x = (x_0, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (0.1)$$

Dada una serie de  $N + 1$  datos  $(x, f)$ , siendo  $x = (x_0, \dots, x_N)^T$  y  $f = (f_0, \dots, f_N)^T$ , con nodos  $\{x_i\}_{i=0}^N$  distintos dos a dos, y  $M \leq N$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , hallar un polinomio  $\hat{p} \in \prod_M$  tal que

$$\|f - \hat{p}(x)\|_{2,w} = \left( \sum_{i=0}^N (f_i - \hat{p}(x_i))^{1/2} w_i \right)^{1/2}, \quad \text{con } \hat{p}(x) := (\hat{p}(x_0), \dots, \hat{p}(x_N))^T, \quad (0.2)$$

sea mínima.

Ajuste polinómico por mínimos cuadrados continuo.

Consideramos la *norma euclídea ponderada continua* en  $C([a, b])$  asociada a una función peso continua y positiva  $w(x)$  cumpliendo que  $\int_a^b w(x) dx < \infty$

$$\|f\|_{2,w} = \left( \int_a^b f(x)w(x)dx \right)^{1/2} \quad (0.3)$$

Más adelante se dará una definición más precisa del concepto de función peso (Definición 1.5).

Dada  $f \in C([a, b])$  y un número natural  $M \geq 0$ , encontrar un polinomio  $\hat{p} \in \Pi_M$  tal que

$$\|f - \hat{p}\|_{2,w} = \left( \int_a^b (f(x) - \hat{p}(x))^2 w(x) dx \right)^{1/2}, \quad (0.4)$$

sea mínima.

**Nota 0.1** Como veremos en la siguiente sección, el ajuste polinómico por mínimos cuadrados, bien discreto o continuo, admite una solución única relativamente sencilla de obtener, por ejemplo mediante la resolución de un sistema lineal para los coeficientes del polinomio de mejor aproximación  $\hat{p}$ . Este hecho contrasta con la resolución del problema de ajuste en norma uniforme (aproximación minimax), en cuyo caso, a pesar de existir solución única, ésta generalmente no puede obtenerse de modo explícito salvo en casos simples.

#### Ajuste polinómico uniforme discreto.

Consideremos la *norma uniforme* en  $\mathbb{R}^{N+1}$  dada por  $\|x\|_\infty := \max_{0 \leq i \leq N} |x_i|$ ,  $x = (x_0, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ . Dada una serie de  $N + 1$  datos  $(x, f)$ , siendo  $x = (x_0, \dots, x_N)^T$  y  $f = (f_0, \dots, f_N)^T$ , con nodos  $\{x_i\}_{i=0}^N$  distintos dos a dos, y  $M \leq N$ ,  $M \in \mathbb{N}$ , hallar un polinomio  $\hat{p} \in \Pi_M$  tal que

$$\|f - \hat{p}(x)\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |f_i - \hat{p}(x_i)|, \text{ con } \hat{p}(x) := (\hat{p}(x_0), \dots, \hat{p}(x_N))^T, \quad (0.5)$$

sea mínimo.

#### Ajuste polinómico uniforme continuo.

Consideramos la *norma uniforme*  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ . Dada  $f \in C([a, b])$  y un número natural  $M \geq 0$ , encontrar un polinomio  $\hat{p} \in \Pi_M$  tal que

$$\|f - \hat{p}\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \hat{p}(x)|, \quad (0.6)$$

sea mínima.

Considerando el caso más simple de polinomios de ajuste de grado cero iniciamos el estudio de mejor aproximación por mínimos cuadrados, en comparación a la mejor aproximación uniforme.

**Ejemplo 0.1** *Ajuste polinómico discreto de grado cero en norma euclídea y en norma uniforme. Sean valores  $\{f_i\}_{i=0}^N$ . El problema de mínimos cuadrados*

$$\min_{f \in \mathbb{R}} \sum_{i=0}^N (f_i - f)^2$$

admite como solución (única)  $f = \hat{f}_2 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N f_i = \bar{f}$ , esto es, la media aritmética de los datos  $\{f_i\}_{i=0}^N$ , siendo además la desviación cuadrática mínima igual a  $\sum_{i=0}^N (f_i - \bar{f})^2 = (N+1)\sigma_f^2$  (donde  $\sigma_f^2$  denota la varianza de los datos  $\{f_i\}_{i=0}^N$ ).

Por otra parte, el problema de ajuste en norma uniforme (problema minimax)

$$\min_{f \in \mathbb{R}} \max_{0 \leq i \leq N} |f_i - f|$$

admite como solución (única)  $f = \bar{f}_\infty = \frac{1}{2} \left( \max_{0 \leq i \leq N} \{f_i\} + \min_{0 \leq i \leq N} \{f_i\} \right)$ , con desviación uniforme mínima igual a  $\frac{1}{2} \left( \max_{0 \leq i \leq N} \{f_i\} - \min_{0 \leq i \leq N} \{f_i\} \right)$ .

**Ejemplo 0.2** *Ajuste polinómico continuo de grado cero en norma euclídea y en norma uniforme. Sea una función  $f \in C([a, b])$ . El problema de mínimos cuadrados*

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \int_a^b (f(x) - c)^2 dx$$

admite como solución (única)  $c = \hat{c}_2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \bar{f}$ , esto es, el promedio integral de  $f(x)$  en  $[a, b]$ .

Por otra parte, el problema de ajuste en norma uniforme (problema minimax)

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - c|$$

admite como solución (única)  $c = \hat{c}_\infty = \frac{1}{2} \left( \max_{x \in [a,b]} f(x) + \min_{x \in [a,b]} f(x) \right)$ , con desviación uniforme mínima igual a  $\frac{1}{2} \left( \max_{x \in [a,b]} f(x) - \min_{x \in [a,b]} f(x) \right)$ .

Para finalizar la introducción desarrollaremos el conocido *Teorema de Aproximación Uniforme de Weierstrass* [3, 4, 5, 10] que constituye un resultado fundamental en la teoría de aproximación, del que haremos uso frecuente en este trabajo.

**Teorema 0.1.** Sea  $f \in C([a, b])$ , con  $b - a < \infty$ , y  $\epsilon > 0$ . Existe  $p \in \Pi$  tal que:

$$\|f - p\|_\infty < \epsilon \tag{0.7}$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad realizamos la demostración para el intervalo  $[a, b] = [0, 1]$ . Para  $n \geq 1$  y  $x \in [0, 1]$  definimos  $b_{n,k} := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Es directo comprobar que  $(1-x+tx)^n = \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x)t^k$ , y derivando sucesivamente respecto de  $t$  y evaluando en  $t = 1$ :  $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$ ,  $\sum_{k=0}^n k b_{n,k}(x) = nx$ ,  $\sum_{k=0}^n k(k-1)b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$ , para todo  $x \in [0, 1]$ . De aquí sigue que  $\sum_{k=0}^n (x - \frac{k}{n})^2 b_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Definimos ahora los polinomios de Bernstein de  $f$  como,

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x) \in \Pi_n, \quad x \in [0, 1], \quad n \geq 1. \tag{0.8}$$

Dado  $\epsilon > 0$  y  $x \in [0, 1]$  fijo, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $\forall y \in [0, 1]$  tal que  $|x - y| < \delta$ . En particular,  $|f(x) - B_n(f; x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(\frac{k}{n})| b_{n,k}(x) = \sum_1 + \sum_2$ , donde  $\sum_1$  denota la suma sobre índices de  $k$  tales que  $|x - \frac{k}{n}| < \delta$  y  $\sum_2$  denota la suma sobre  $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$ . Luego,  $\sum_1 > \frac{\epsilon}{2}$ . Respecto a  $\sum_2$  tendremos

$$\sum_2 |f(x) - f(\frac{k}{n})| b_{n,k}(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{k=0}^n (x - \frac{k}{n})^2 b_{n,k}(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\delta^2} < \frac{\epsilon}{2}, \tag{0.9}$$

si  $n \geq n_0$ , con  $n_0 := \left\lceil \frac{\|f\|_\infty}{\delta^2 \epsilon} \right\rceil$ . En definitiva,  $\|f - B_n(f; \cdot)\|_\infty < \epsilon$ , si  $n \geq n_0$ .

Con esta prueba podemos enunciar un resultado algo más general que el Teorema de Aproximación Uniforme.

**Corolario 0.1** Si  $f$  está acotada en  $[0, 1]$  y  $x_0 \in [0, 1]$  es un punto de continuidad de  $f$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x_0) = f(x_0)$ . Si además  $f \in C([0, 1])$  entonces  $\{B_n(f; \cdot)\}_{n \geq n_0}$  converge uniformemente a  $f$  en  $[0, 1]$ .

## Aproximación por mínimos cuadrados.

### 1.1. Existencia y unicidad de mejor aproximación en mínimos cuadrados.

Empezaremos resolviendo los problemas de mejor aproximación polinómica en mínimos cuadrados (0.2) y (0.4). Con este fin vamos a comenzar dando las definiciones de espacio pre-Hilbert y espacio vectorial normado sobre el cuerpo de los números reales. Estaremos trabajando en el contexto de espacios pre-Hilbert (espacios vectoriales reales con un producto interior).

**Definición 1.1 (Espacio pre-Hilbert.)** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Se dice que  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio pre-Hilbert si  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma no degenerada, simétrica y bilineal, esto es, si verifica:

- I.  $\langle f, f \rangle \geq 0, f \in V; \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0;$
- II.  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in V;$
- III.  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g, h \in V.$

Diremos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interior en  $V$ .

**Definición 1.2 (Espacio vectorial normado.)** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Se dice que  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio vectorial normado si  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  verifica:

- I.  $\|f\| \geq 0, \forall f \in V; \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0;$
- II.  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V;$

$$\text{III. } \|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in V.$$

Diremos que  $\|\cdot\|$  es una norma en  $V$ .

**Teorema 1.1. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert y  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \forall f \in V. \quad (1.1)$$

Entonces:

$$\text{I. } |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \forall f, g \in V.$$

$$\text{II. } |\langle f, g \rangle| = \|f\| \|g\| \text{ si y solo si } f \text{ y } g \text{ son linealmente independientes.}$$

*Demostración.* La prueba de este resultado es bien conocida. Véase por ejemplo [2, 8]. Basta tener en cuenta la bilinealidad del producto escalar y desarrollar  $\langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle \geq 0$  como polinomio de segundo grado en  $\lambda$ .  $\square$

**Nota 1.1** Una consecuencia inmediata del Teorema 1.1 es que todo espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio normado con la *norma inducida* definida por (1.1). Mediante ejemplos presentaremos los espacios pre-Hilbert en los que basaremos nuestros problemas de ajuste polinómico por mínimos cuadrados de la Introducción.

**Ejemplo 1.1**  $(\mathbb{R}^{N+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$  es un espacio pre-Hilbert, siendo  $\langle x, y \rangle_{2,w} := \sum_{i=0}^N x_i y_i w_i$ , con  $x = (x_0, \dots, x_N)^K, y = (y_0, \dots, y_N)^K \in \mathbb{R}^{N+1}$  y  $\{w_i\}_{i=0}^N$  pesos positivos fijos. La norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$  viene dada por (0.1)

**Ejemplo 1.2**  $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$  es un espacio pre-Hilbert, con el producto interior  $\langle f, g \rangle_{2,w} := \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ , siendo  $f(x), g(x) \in C([a, b])$  y  $w(x)$  una función de peso fija. La norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$  viene dada por (0.3)

**Lema 1.1 (Ley del paralelogramo.)** Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert con la norma inducida  $\|\cdot\|$ . Para cualesquiera  $x, y \in V$  se cumple que:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad (1.2)$$

*Demostración.*  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$   $\square$

Planteamiento del problema de mejor aproximación en espacios pre-Hilbert.

Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert,  $f \in V$  y  $H$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita. Vamos a demostrar que existe un único  $\hat{f} \in H$  tal que

$$\|f - \hat{f}\| \leq \|f - h\|, \forall h \in H, \quad (1.3)$$

esto es,  $\|f - \hat{f}\| = \min_{h \in H} \|f - h\|$ , siendo  $\|\cdot\|$  la norma inducida (1.1) por el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Por lo tanto, decimos que  $\hat{f}$  es la mejor aproximación de  $f$  en  $H$  respecto de la norma (1.1), o también, la mejor aproximación por *mínimos cuadrados* de  $f$  en  $H$ .

A continuación demostraremos la existencia y unicidad de solución para el problema (1.3). El siguiente Teorema señala que en caso de existir mejor aproximación para  $f$  en el subespacio  $H$ , entonces ésta se obtiene inequívocamente como *proyección ortogonal* de  $f$  en  $H$ . [5].

**Teorema 1.2.** Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert,  $f \in V$  y  $H$  un subespacio vectorial de  $V$ .  $\hat{f} \in H$  es una mejor aproximación de  $f$  en  $H$  (1.3) si y solo si

$$\langle f - \hat{f}, h \rangle = 0, \forall h \in H. \quad (1.4)$$

En tal caso,

$$\|f - \hat{f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\hat{f}\|^2. \quad (1.5)$$

Además, si  $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in H$  son mejores aproximaciones de  $f$  en  $H$  entonces  $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ .

*Demostración.* I. Si  $\hat{f} \in H$  verifica (1.4) entonces, considerando que  $H$  es subespacio vectorial de  $V$ , se tiene que  $\|f - h\|^2 = \|f - \hat{f}\|^2 + \|\hat{f} - h\|^2 \geq \|f - \hat{f}\|^2$ , para todo  $h \in H$ .

II. Si  $\hat{f} \in H$  verifica (1.4) entonces, razonando por contradicción, si existiera  $h \in H$  tal que  $\lambda := \langle f - \hat{f}, h \rangle \neq 0$ , se tendría para  $\hat{f} + \frac{\lambda}{\|h\|^2}h \in H$  que

$$\|f - (\hat{f} + \frac{\lambda}{\|h\|^2}h)\|^2 = \|f - \hat{f}\|^2 - \frac{\lambda^2}{\|h\|^2} < \|f - \hat{f}\|^2.$$

III. De (1.4) se deduce directamente que  $\|f\|^2 = \|(f - \hat{f}) + \hat{f}\|^2 = \|f - \hat{f}\|^2 + \|\hat{f}\|^2$ .

IV. La unicidad de mejor aproximación en  $H$  también resulta como consecuencia de (1.4):

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\|^2 &= \langle (\hat{f}_1 - f) + (f - \hat{f}_2), \hat{f}_1 - \hat{f}_2 \rangle = \\ &= -\langle f - \hat{f}_1, \hat{f}_1 - \hat{f}_2 \rangle + \langle f - \hat{f}_2, \hat{f}_1 - \hat{f}_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

□

A partir de ahora nos referiremos como *Teorema de Pitágoras* a la identidad (1.5).

**Nota 1.2** Vemos que si  $f \in H$  entonces la mejor aproximación de  $f$  en  $H$  es naturalmente  $\hat{f} = f$  (usando el teorema anterior). Obviamente, nos vamos a interesar para el caso en que  $f \in V \setminus H$ .

**Nota 1.3** En el teorema 1.2 no se requiere que el subespacio  $H$  tenga dimensión finita. Sin embargo, si  $H$  tiene dimensión infinita, en general, el problema de mejor aproximación por mínimos cuadrados (1.3) no tiene por qué admitir solución. Veámoslo con los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.3** Sea  $V = \ell_2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty / x_n \in \mathbb{R}, n \geq 1, \sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty\}$  el espacio de las sucesiones reales de cuadrado sumable, que tiene estructura de espacio pre-Hilbert con el producto euclídeo  $\langle x, y \rangle_2 := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ . Denotamos por  $\|\cdot\|_2$  a la norma inducida. Sea  $H$  el subconjunto de  $V$  formado por los elementos (sucesiones) que tienen una cantidad finita de términos no nulos. Así,  $H$  es un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión no finita. Sea ahora  $f := (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \in \ell_2$  y consideramos  $f_k := (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in H$  para  $k \geq 1$ . Entonces  $\|f - f_k\|_2^2 = \sum_{n=k+1}^\infty \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ , si  $k \rightarrow \infty$ . Pero no puede existir  $\hat{f} \in H$  tal que  $\|f - \hat{f}\|_2 = 0$  pues  $f$  tiene una cantidad infinita de términos no nulos.

**Ejemplo 1.4** Consideramos  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) = (C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$ , con  $b - a < \infty$ , y  $H = \prod$  el subespacio de polinomios de grado arbitrario, con dimensión infinita. Dada  $f \in C([a, b]) \setminus \prod$ , para cada  $n \geq 1$ , existe  $p_n \in \prod$  tal que  $\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ . Luego  $\|f - p_n\|_{2,w} = (\int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx)^{1/2} \leq (\int_a^b w(x) dx)^{1/2} \|f - p_n\|_\infty \leq C^2 \frac{1}{n} \leq \frac{C}{n}$ , con  $C = (\int_a^b w(x) dx)^{1/2}$ , y  $\|f - p_n\|_{2,w} \rightarrow 0$ , si  $n \rightarrow \infty$ . Pero no existe  $\hat{p} \in H$  tal que  $\|f - \hat{p}\|_{2,w} = 0$ , pues  $f \in C([a, b]) \setminus \prod$ .

**Nota 1.4** Seguidamente demostramos que el problema de mejor aproximación (1.3) en subespacios  $H$ , de dimensión finita, admite solución (la unicidad se tiene por el Teorema 1.2). Para ello pondremos  $H = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$  siendo  $n = \dim H$  y  $\{h_1, \dots, h_n\}$  una base cualquiera para  $H$ . Dado  $f \in V$ , consideramos entonces la función de  $n$  variables que mide la *desviación cuadrática* de los elementos de  $H$  a  $f$ .

$$d(\alpha) = \left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, h_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle h_i, h_j \rangle, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T, \quad (1.6)$$

Hay que precisar  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  de tal forma que  $d(\alpha)$  sea mínimo. Entonces el problema de mejor aproximación (1.3) en subespacios de dimensión finita se deja en un problema de optimización de una función de varias variables reales. A continuación demostraremos que la función (1.6) tiene un único mínimo absoluto. Primero definiremos la matriz de Gram y daremos un resultado (ver, por ejemplo [3, 4]).

**Definición 1.3 (Matriz de Gram.)** Sea  $\{h_i\}_{i=1}^n$  un sistema linealmente independiente de vectores en un espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . La matriz simétrica

$$G = (\langle h_i, h_j \rangle)_{i,j=1}^n \quad (1.7)$$

se denomina matriz de Gram asociada a  $\{h_i\}_{i=1}^n$ .

**Lema 1.2** Sea  $G = (\langle h_i, h_j \rangle)_{i,j=1}^n$  la matriz de Gram asociada a un sistema linealmente independiente de vectores  $\{h_i\}_{i=1}^n$  en un espacio pre-Hilbert  $(v, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces,  $G$  es definida positiva. En particular,  $G$  es inversible.

*Demostración.* La prueba de este resultado es inmediata ya que para todo  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se tiene que  $x^T G x = \langle v, v \rangle$ , siendo  $v = \sum_{i=1}^n x_i h_i \neq 0$ .  $\square$

**Teorema 1.3.** Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert,  $f \in V$  y  $H$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita  $n$ , generado por un sistema linealmente independiente de vectores  $\{h_i\}_{i=1}^n$ . Entonces, existe  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  mínimo absoluto para la función  $d(\alpha)$  dada por (1.6). Además, para todo  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $d(\alpha) = d(\hat{\alpha}) + (\alpha - \hat{\alpha})^T G (\alpha - \hat{\alpha})$ , siendo  $G = (\langle h_i, h_j \rangle)_{i,j=1}^n$  la matriz de Gram asociada al sistema  $\{h_i\}_{i=1}^n$ .

*Demostración.* La función  $d(\alpha)$  (1.6) es un polinomio de grado 2 en  $n$  variables con un único punto crítico que resuelve el sistema lineal  $G\alpha = F$ , con  $F = (\langle f, h_i \rangle)_{i=1}^n$ , resultando además que su matriz hessiana es  $2G$ , que es definida positiva.  $\square$

**Nota 1.5** La mejor aproximación y única de  $\hat{f}$  para  $f \in V$  en  $H = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$  se puede expresar como  $\hat{f} = \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i h_i$ , siendo  $(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T$  la solución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & \langle h_1, h_2 \rangle & \cdots & \langle h_1, h_n \rangle \\ \langle h_2, h_1 \rangle & \langle h_2, h_2 \rangle & \cdots & \langle h_2, h_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle h_n, h_1 \rangle & \langle h_n, h_2 \rangle & \cdots & \langle h_n, h_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, h_1 \rangle \\ \langle f, h_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, h_n \rangle \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Este sistema de ecuaciones lineales define a la mejor aproximación de  $f$  en  $H$  y, se conoce como *sistema de ecuaciones normales* (o de Gauss) del problema de mínimos cuadrados. Vemos que la unicidad de mejor aproximación dada en el Teorema 1.2 asegura que su obtención mediante el sistema de ecuaciones normales (1.8) es independiente de la base  $\{h_1, \dots, h_n\}$  elegida para el subespacio  $H$ .

**Nota 1.6** Fijado  $n$  y considerando por ejemplo la factorización de Cholesky de la matriz de Gram  $G$  (1.7), el sistema lineal (1.8) puede ser resuelto de manera eficaz. Sin embargo, determinar la mejor aproximación a través del sistema de ecuaciones normales depende fuertemente de la dimensión  $n$  del subespacio  $H$  de manera que revela algunas desventajas en la práctica. Por un lado, el desarrollo es poco efectivo si se quiere aumentar la dimensión del subespacio  $H$  para reducir la desviación cuadrática mínima y tener mejores aproximaciones. Cada uno de los coeficientes  $\hat{\alpha}_i$  depende de todos los vectores de la base  $\{h_i\}_{i=1}^n$ , y por lo tanto si se cambia la base de vectores se tendrá que volver a realizar todos los cálculos anteriores para obtener una nueva matriz de Gram. Por otro lado, el sistema lineal de ecuaciones normales (1.8) puede estar mal condicionado. Es más, un ejemplo de un mal condicionamiento se tiene al considerar  $(C([0, 1]), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  y  $H = \prod_n$  con la base canónica de polinomios tal como veremos en la Sección 1.3.

Por lo tanto, trataremos de hallar otra base de  $H$  que tenga menores inconvenientes. Una opción es la búsqueda de bases ortogonales (u ortonormales).

**Corolario 1.1** Si  $H = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$  está generado por un sistema ortogonal de vectores, entonces la mejor aproximación  $\hat{f}$  de  $f$  en  $H$  viene dada por

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle f, h_i \rangle}{\langle h_i, h_i \rangle} h_i. \quad (1.9)$$

*Demostración.* La prueba de este resultado es inmediata teniendo en cuenta que, en caso de ortogonalidad, la matriz de Gram (1.7) es diagonal y la resolución del sistema lineal de ecuaciones normales (1.8) es inmediata.  $\square$

Para obtener la mejor aproximación en mínimos cuadrados por bases vectores ortogonales (1.9) se tiene que disponer de un algoritmo de construcción de

estas base a partir de bases arbitrarias. Un algoritmo es el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt*, que citaremos a continuación y cuya demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [3, 8].

**Teorema 1.4.** *Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , entonces los vectores  $u_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$ ,  $1 \leq i \leq r$ , son no nulos y forman un sistema ortogonal en  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .*

Para garantizar la acotación de los coeficientes de Fourier en (1.9), independientemente de la dimensión (finita) del subespacio de aproximación  $H$ , enunciamos la desigualdad de Bessel.

**Teorema 1.5. (Desigualdad de Bessel.)** *Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert,  $f \in V$  y  $H$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita  $n$ , generado por un sistema ortogonal de vectores  $\{h_i\}_{i=1}^n$ . Entonces*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\langle f, h_i \rangle^2}{\|h_i\|^2} \leq \|f\|^2 \tag{1.10}$$

*Demostración.* Basta observar que de (1.5) sigue que  $\|f\|^2 \geq \|\hat{f}\|^2$ , y luego considerar en (1.9) la ortogonalidad de los vectores  $\{h_i\}_{i=1}^n$ .  $\square$

La representación de la mejor aproximación de vectores ortogonales (1.9) da la ventaja de que al añadir un nuevo vector ortogonal (aumentando en una unidad la dimensión del subespacio de aproximación) solo hay que calcular un coeficiente de Fourier adicional para obtener la nueva mejor aproximación. Se obtiene de modo inmediato el siguiente resultado.

**Corolario 1.2** *Sean  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert,  $H_n = \text{span}\{h_1, \dots, h_n\}$  y  $H_{n+1} = \text{span}\{h_1, \dots, h_n, h_{n+1}\}$  subespacios vectoriales generados a partir de un sistema ortogonal  $\{h_i\}_{i=1}^{n+1}$  y sean  $\hat{f}_n$  y  $\hat{f}_{n+1}$  las respectivas mejores aproximaciones de  $f \in V$  en  $H_n$  y  $H_{n+1}$ . Entonces,*

$$\hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n + \frac{\langle f, h_{n+1} \rangle}{\langle h_{n+1}, h_{n+1} \rangle} h_{n+1} \tag{1.11}$$

$\square$

Se termina este estudio sobre la mejor aproximación en espacios pre-Hilbert con la convergencia de la sucesión de mejores aproximaciones. Por lo tanto, la existencia de un sistema ortonormal completo es una propiedad vital para obtener una sucesión de mejores aproximaciones convergentes. Continuamos definiendo el concepto de sistema ortonormal completo y a establecer la identidad de Parseval (1.12) para estos sistemas.

**Definición 1.4 (Sistema ortogonal completo.)** *Un sistema ortogonal  $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$  en un espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se dice completo si para cada  $f \in V$  existe  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f_n \in H_n := \text{span}\{h_i\}_{i=1}^n$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$ .*

**Teorema 1.6. (Identidad de Parseval.)** *Un sistema ortonormal  $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$  en un espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es completo si y solo si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, h_i \rangle^2 = \|f\|^2, \forall f \in V. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Basta tener en cuenta que  $\|f - \hat{f}_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle f, h_i \rangle^2$  y considerar las definiciones de mejor aproximación y sistema ortonormal completo, donde hemos denotado  $\hat{f}_n$  la mejor aproximación de  $f$  en  $H_n := \text{span}\{h_i\}_{i=1}^n$ .  $\square$

## 1.2. Aplicación al ajuste polinómico por mínimos cuadrados discreto.

En  $V = \mathbb{R}^{N+1}$  consideramos el producto euclídeo ponderado  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$  definido en el Ejemplo 1.1

$$\langle f, g \rangle_{2,w} := \sum f_i g_i w_i \quad (1.13)$$

siendo  $f = (f_0, \dots, f_N)^T$ ,  $g = (g_0, \dots, g_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$  y  $\{w_i\}_{i=0}^N$  pesos positivos fijos, con la norma inducida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$  (0.1).

Sin embargo, dados  $M \leq N$  y  $x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  nodos fijos distintos dos a dos, consideramos el conjunto

$$H = \mathbb{P}_M := \left\{ \mathbf{p} := (p(x_0), \dots, p(x_N))^T / p \in \prod_M \right\} \subset \mathbb{R}^{N+1} \quad (1.14)$$

que es un espacio vectorial de  $\mathbb{R}^{N+1}$  de dimensión  $M+1$  generado por los vectores

$$\{\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^M\}, \mathbf{x} := (x_0, \dots, x_N)^T, \quad (1.15)$$

conviniendo que las potencias de un vector se realizan componente a componente y que  $\mathbf{x}^0 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$ . Por lo tanto, la independencia lineal se garantiza puesto que los nodos son distintos dos a dos.

Así pues, sea  $f = (f_0, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$  dada. El análisis realizado en la Sección 1.1 prueba que el problema de mejor aproximación para  $f$  en  $\mathbb{P}_M$  admite solución única. Considerando el sistema de ecuaciones normales (1.8) respecto de la base (1.15), podemos afirmar que la mejor aproximación  $\hat{f} = (\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_N)^T = \sum_{i=1}^M \alpha_i \mathbf{x}^M$  de  $f$  en  $\mathbb{P}_M$  se obtiene resolviendo el sistema lineal

$$G\alpha = F, \text{ con } \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_M)^T \text{ y}$$

$$\begin{cases} G = (G_{i,j})_{i,j=0}^M, & G_{i,j} = \langle \mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j \rangle_{2,w} = \sum_{k=0}^N x_k^{i+j} w_k, & 0 \leq i, j \leq M, \\ F = (F_i)_{i=0}^M, & F_i = \langle f, \mathbf{x}^i \rangle_{2,w} = \sum_{k=0}^N f_k x_k^i w_k, & 0 \leq i \leq M. \end{cases} \quad (1.16)$$

**Nota 1.7** Los ajustes de tipo potencial ( $f = ax^b$ ), exponencial ( $f = ae^{bx}$ ) o hiperbólico ( $f = \frac{1}{ax+b}$ ), entre otros, se pueden reducir al ajuste polinómico por mínimos cuadrados considerando un cambio de variable óptimo.

**Nota 1.8** Véase que el desarrollo de ortogonalización de Gram-Schmidt definido en el Teorema 1.4 permite generar una base ortonormal de  $\mathbb{P}_M$  partiendo, por ejemplo, de los vectores básicos  $\mathbf{x}^i$ ,  $0 \leq i \leq M$  (1.15). Aunque, este desarrollo puede verse levemente afectado por errores de redondeo, especialmente si  $M$  es grande. Por esto, vamos a presentar en la Sección 1.4 una forma más efectiva de construir bases ortogonales en el marco de la teoría de *polinomios ortogonales*, lo que permitirá resolver problemas de ajuste polinómico por mínimos cuadrados continuo y discreto por medio de desarrollos de Fourier (1.9).

### 1.3. Aplicación al ajuste polinómico por mínimos cuadrados continuo.

**Definición 1.5** Sea  $w(x)$  una función definida en  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ .  $w(x)$  es una función peso en  $(a, b)$  si verifica:

- I.  $w(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$ ;

$$\text{II. } \int_a^b |f(x)|w(x)dx = 0, \text{ con } f \in C(a, b) \Rightarrow f \equiv 0;$$

$$\text{III. } \int_a^b |x|^n w(x)dx < \infty, \forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Vamos a introducir varias funciones peso comunes que tendrán importancia en la teoría de polinomios ortogonales (ver Sección 1.4).

**Ejemplo 1.5** I. *Función peso de Jacobi:*  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, x \in (-1, 1)$ , con  $\alpha, \beta > -1$ .

a) Si  $\alpha = \beta = 0$ , se obtiene  $w(x) = 1$ , en  $[-1, 1]$  (función peso de Legendre).

b) Si  $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ ,  $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ , en  $(-1, 1)$  (Chebyshev de primera especie).

c) Si  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ,  $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ , en  $[-1, 1]$  (Chebyshev de segunda especie).

II. *Función peso de Laguerre:*  $w(x) = x^\alpha e^{-x}$  en  $(0, \infty)$ , con  $\alpha > -1$ .

III. *Función peso de Hermite:*  $w(x) = e^{-x^2}$  en  $(-\infty, \infty)$ .

Teniendo entonces el problema de mejor aproximación para el espacio pre-Hilbert  $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$  y el subespacio vectorial de dimensión finita  $H = \prod_n$ , donde el producto interior euclídeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$  ponderado por una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$  se define como

$$\langle f, g \rangle_{2,w} := \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \quad f, g \in C([a, b]), \quad (1.17)$$

con la norma incluida dada en (0.3).

Por lo tanto, dada la base canónica  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  de  $\prod_n$ , y  $f \in C([a, b])$ , la mejor aproximación por mínimos cuadrados de  $f$  en  $\prod_n$ ,  $\hat{p}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ , se tiene resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones normales (1.8) que, en este caso, queda enunciada como

$$G\alpha = F, \text{ con } \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^T \text{ y}$$

$$\begin{cases} G = (G_{i,j})_{i,j=0}^n, & G_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle_{2,w} = \int_a^b x^{i+j} w(x) dx, \quad 0 \leq i, j \leq n, \\ F = (F_i)_{i=0}^n, & F_i = \langle f, x^i \rangle_{2,w} = \int_a^b f(x) x^i w(x) dx, \quad 0 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (1.18)$$

**Nota 1.9** En la función peso de Legendre  $w(x) = 1$ , en  $[0, 1]$ , la matriz de Gram  $G$  en (1.18) tiene por componentes  $G_{i,j} = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}$ ,  $0 \leq i, j \leq M$ . Así pues,  $G = \left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{i,j=0}^M$  concuerda con la matriz de Hilbert  $\mathcal{H}_{M+1}$  de dimensión  $M+1$ . Su número de condición, en norma euclídea, justifica [4]

$$\text{cond}_2(\mathcal{H}_M) = \|\mathcal{H}_M\|_2 \|\mathcal{H}_M^{-1}\|_2 \sim \frac{(1 + \sqrt{2})^{4M+4}}{2^{15/4} \sqrt{\pi M}}, M \rightarrow \infty.$$

La siguiente tabla de valores para  $\text{cond}_2(\mathcal{H}_M)$  manifiesta el mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones normales (1.18), también para valores moderados de  $M$ .

M	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{cond}_2(\mathcal{H}_M)$	$5'2 \cdot 10^2$	$1'6 \cdot 10^4$	$4'8 \cdot 10^5$	$1'5 \cdot 10^7$	$4'8 \cdot 10^8$	$1'5 \cdot 10^{10}$	$4'9 \cdot 10^{11}$	$1'6 \cdot 10^{13}$

## 1.4. Polinomios ortogonales.

Con el fin de reducir el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones normales (1.8) del problema de mínimos cuadrados relacionado a los polinomios canónicos  $x^j$ ,  $j \geq 0$ , tenemos en cuenta la opción de desarrollar bases de polinomios ortogonales para los subespacios de aproximación (ver (1.9)).

**Definición 1.6** Sea  $w(x)$  una función peso en  $(a, b)$ . Una familia de polinomios  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  se dice ortogonal respecto a la función  $w(x)$  en  $(a, b)$  si  $\varphi_n$  es un polinomio de grado exacto  $n$ , para cada  $n \geq 0$  y

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{2,w} = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) w(x) dx = 0, \quad n, m \geq 0, \quad n \neq m \quad (1.19)$$

**Nota 1.10** Los polinomios de Chebyshev de primera especie representan una familia de polinomios ortogonales  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $n \geq 0$ , respecto de la función peso  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  en  $(-1, 1)$ . Recordamos también que los polinomios de Chebyshev de primera especie tienen muy buenas propiedades, por ejemplo, verificar una relación de recurrencia a tres términos y tener raíces simples en el interior del intervalo  $[-1, 1]$  (véase por ejemplo [10]). Determinaremos en el estudio de esta sección que estas propiedades no son solo

de esta familia particular de polinomios, sino que son propiedades asociadas a toda familia de polinomios ortogonales sea cual sea la función peso  $w(x)$  que se contemple.

Gracias al desarrollo hecho en la Sección 1.1 podemos enunciar los siguientes resultados.

**Corolario 1.3** *Sea  $w(x)$  una función peso en  $(a, b)$  y  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  una familia ortogonal de polinomios respecto a  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Dada  $f \in C([a, b])$  sea  $\hat{p}_n \in \prod_n$  la mejor aproximación para  $f$  en  $\prod_n$  ( $n \geq 0$ ) respecto del producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$ . Entonces:*

- I.  $\hat{p}_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_{2,w}}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_{2,w}} \varphi_k(x)$ .
- II.  $\langle f - \hat{p}_n, \varphi_k \rangle_{2,w} = 0, 0 \leq k \leq n$ .
- III.  $\|f\|_{2,w}^2 = \|f - \hat{p}_n\|_{2,w}^2 + \|\hat{p}_n\|_{2,w}^2, \forall n \geq 0$ .
- IV.  $\sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_{2,w}^2}{\|\varphi_k\|_{2,w}^2} \leq \|f\|_{2,w}^2, \forall n \geq 0$ .
- V.  $\hat{p}_{n+1}(x) = \hat{p}_n(x) + \frac{\langle f, \varphi_{n+1} \rangle_{2,w}}{\langle \varphi_{n+1}, \varphi_{n+1} \rangle_{2,w}} \varphi_{n+1}(x)$ .

Esta consecuencia es una sencilla aplicación de los resultados enunciados en el Corolario 1.1, el Teorema 1.2, el Teorema 1.5 y el Corolario 1.2.

**Corolario 1.4** *Sea  $w(x)$  una función peso en  $(a, b)$  y  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  una familia ortogonal de polinomios respecto a  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Entonces, para cada  $n \geq 0$ ,  $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^n$  es una base de  $\prod_n$ . Además, para cada  $f \in \prod_n$  se tiene que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_{2,w}}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_{2,w}} \varphi_k(x)$$

*Demostración.* Observamos que todo sistema ortogonal es un sistema linealmente independiente. Se concluye la prueba teniendo en cuenta la unicidad de la mejor aproximación por mínimos cuadrados (Teorema 1.2) y el apartado I del teorema previo.  $\square$

**Corolario 1.5 (Teorema de Gram-Schmidt)** *Para cada función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$  existe una única familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  definidos recurrentemente por*

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle x^n, \varphi_i \rangle_{2,w}}{\|\varphi_i\|_{2,w}^2} \cdot \varphi_i(x), \quad n \geq 1. \quad (1.20)$$

*Demostración.* La existencia de dicha familia de polinomios ortogonales mónicos se obtiene por aplicación directa del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt recogido en el Teorema 1.4 aplicado al sistema linealmente independiente de polinomios  $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ . Para demostrar la unicidad, podemos observar que si  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  son dos de tales familias, entonces  $\langle \varphi_n - \phi_n, \varphi_n - \phi_n \rangle_{2,w} = \langle \varphi_n - \phi_n, \varphi_n \rangle_{2,w} - \langle \varphi_n - \phi_n, \phi_n \rangle_{2,w} = 0$  a consecuencia del corolario previo (observando que  $\varphi_n - \phi_n \in \prod_{n-1}$ ) y de la ortogonalidad.  $\square$

El próximo resultado da una relación de recurrencia a tres términos que permite obtener de forma efectiva la única familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a,b)$ .

**Teorema 1.7.** *Sea  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a,b)$ . Entonces,*

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= (x - a_{n+1})\varphi_n(x) - b_{n+1}\varphi_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \\ \varphi_0(x) &:= 1, \quad \varphi_{-1}(x) := 0. \end{aligned}$$

siendo

$$a_{n+1} := \frac{\langle x \cdot \varphi_n, \varphi_n \rangle_{2,w}}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_{2,w}}, \quad n \geq 0, \quad \text{y} \quad b_{n+1} := \frac{\langle x \cdot \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle_{2,w}}{\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle_{2,w}} = \frac{\|\varphi_n\|_{2,w}^2}{\|\varphi_{n-1}\|_{2,w}^2}, \quad (1.21)$$

$n \geq 1$ , con  $b_1 := 0$ .

*Demostración.* Observar que los coeficientes  $a_{n+1}$  y  $b_{n+1}$  están bien definidos para  $n \geq 0$ , ( $b_1 = 0$ ), dado que  $\varphi_k \neq 0$ . Dado que los polinomios definidos por la recurrencia son mónicos, bastará comprobar que  $\varphi_{n+1} \perp \prod_n$ ,  $\forall n \geq 0$ . Lo demostramos por inducción sobre  $n \geq 0$ .

I.  $n = 0$  :  $\langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = \langle (x - a_1) \cdot \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \langle x\varphi_0, \varphi_0 \rangle - a_1 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = 0$ .

II. Supongamos cierto para  $j \leq n$  que  $\varphi_j \perp \prod_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , y veamos que  $\varphi_{n+1} \perp \prod_n$ :

a)  $\langle \varphi_{n+1}, \varphi_n \rangle = \langle (x - a_{n+1})\varphi_n, \varphi_n \rangle - b_{n+1} \langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_n \rangle - a_{n+1} \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 0$ .

b)  $\langle \varphi_{n+1}, \varphi_{n-1} \rangle = \langle (x - a_{n+1})\varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle - b_{n+1} \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle - a_{n+1} \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle - b_{n+1} \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle = 0$ .

$$c) \text{ Si } j \leq n-2: \langle \varphi_{n+1}, \varphi_j \rangle = \langle x\varphi_n, \varphi_j \rangle - a_{n+1}\langle \varphi_n, \varphi_j \rangle - b_{n+1}\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle = \langle \varphi_n, x\varphi_j \rangle = 0.$$

Observar que entonces  $b_{n+1} = \frac{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle}$ , pues  $\langle x\varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle = \langle \varphi_n, x\varphi_{n-1} \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_n + a_n\varphi_{n-1} + b_n\varphi_{n-2} \rangle = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle$ .  $\square$

Teniendo en consideración que la relación de recurrencia a tres términos (1.21) nos da un método más práctico para generar los polinomios ortogonales mónicos que el método de Gram-Schmidt, por tanto es numéricamente más estable y de menor costo computacional. Ciertamente, para obtener un nuevo polinomio ortogonal solo hay que saber los dos polinomios con índices inmediatamente anteriores, disminuyendo así el número de productos interiores a tener en cuenta en cada paso.

**Nota 1.11** El problema de ajuste polinómico por mínimos cuadrados discreto (0.2) además se puede resolver por desarrollo de Fourier (1.9) respecto de una base ortogonal del subespacio  $\mathbb{P}_M$  (1.14). En efecto, de forma análogo al caso continuo, aplicando la ley de recurrencia a tres términos (1.21), empezando por ejemplo con la base *canónica* dada en (1.15).

Podemos fijar el siguiente resultado sobre la convergencia en media cuadrática de la sucesión de polinomios de mejor aproximación por mínimos cuadrados.

**Teorema 1.8.** *Sea  $f \in C([a, b])$ , con  $b - a < \infty$ , y  $\hat{p}_n \in \prod_n$  la mejor aproximación para  $f$  respecto del producto interior euclídeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$ , siendo  $w(x)$  una función peso en  $(a, b)$ . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \hat{p}_n\|_{2,w} = 0. \quad (1.22)$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Por el Teorema de aproximación uniforme de Weierstrass 0.1, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $p_{n_0} \in \prod_{n_0}$  tal que  $\|f - p_{n_0}\|_{2,w} < \epsilon$ . Entonces si  $n \geq n_0$ :  $\|f - \hat{p}_n\|_{2,w} \leq \|f - \hat{p}_{n_0}\|_{2,w} \leq \|f - p_{n_0}\|_{2,w} = \left\{ \int_a^b (f(x) - p_{n_0}(x))^2 w(x) dx \right\}^{1/2} \leq \epsilon \left\{ \int_a^b w(x) dx \right\}^{1/2} = \epsilon K$ . Luego, efectivamente como  $K$  es fija,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \hat{p}_n\|_{2,w} = 0$ .  $\square$

**Nota 1.12** 1. Véase que la condición de mejor aproximación supone que la sucesión de errores de aproximación  $\{\|f - \hat{p}_n\|_{2,w}\}_{n=0}^{\infty}$  es decreciente. El desarrollo anterior señala que dicha sucesión tiende a cero.

- II. Si  $f \in C([a, b])$ , con  $b - a < \infty$ , no es cierto en general que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \hat{p}_n\|_\infty = 0$ . Para ello se necesita regularidad adicional en  $f$  (véase [4, 10]).
- III. La tesis del Teorema 1.8 también es cierta para la sucesión de polinomios interpoladores en ceros de polinomios ortogonales, tal como recogemos abajo en el Teorema 1.11.

Contemplamos ahora la integridad de toda familia de polinomios ortogonales (Definición 1.4), así como la conocida *identidad de Parseval*, en  $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$ .

**Corolario 1.6 (Identidad de Parseval)** *Sea el intervalo  $[a, b]$ , con  $b - a < \infty$ , y  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  una familia de polinomios ortogonales respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Entonces,  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es un sistema completo en  $(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w})$ , y para cada  $f \in C([a, b])$  se tiene que*

$$\|f\|_{2,w}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle_{2,w}^2}{\|\varphi_n\|_{2,w}^2}. \quad (1.23)$$

*Demostración.* La completitud del sistema de polinomios ortogonales es consecuencia directa del Corolario 1.3 y del Teorema 1.8. Asimismo, la identidad de Parseval (1.23) se deduce inmediatamente teniendo en cuenta nuevamente el Corolario 1.3 I, III y el Teorema 1.8. De hecho,  $\|f\|_{2,w}^2 = \|\hat{p}_n\|_{2,w}^2 + \|f - \hat{p}_n\|_{2,w}^2 \rightarrow \|f\|_{2,w}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_{2,w}^2}{\|\varphi_k\|_{2,w}^2}$ .  $\square$

El siguiente resultado garantiza que el polinomio de mejor aproximación por mínimos cuadrados en  $\prod_n$  es un polinomio interpolador en al menos  $n + 1$  puntos.

**Teorema 1.9.** *Sea  $f \in C([a, b])$  y  $\hat{p}_n \in \prod_n$  la mejor aproximación para  $f$  respecto del producto interior euclídeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,w}$ , siendo  $w(x)$  una función peso en  $(a, b)$ . Entonces,  $\hat{p}_n$  interpola a  $f$  en al menos  $n + 1$  puntos.*

*Demostración.* Sea  $R_n(x) = f(x) - \hat{p}_n$ . Por ortogonalidad, en particular tenemos que  $0 = \langle R_n(x), 1 \rangle = \int_a^b R_n(x)w(x)dx$ . Luego,  $R_n$  debe cambiar de signo en al menos un punto. Supongamos, por contradicción que  $R_n(x)$  cambia de signo en  $(a, b)$  en puntos  $x_1 < x_2 < \dots < x_j$  con  $j \leq n$ . Luego,  $R_n(x)$  y  $(x - x_1) \cdots (x - x_j)$  tienen signos constantes y alternos en los subintervalos  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_j, b)$ . Por tanto,  $R_n(x) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_j)$  tiene signo constante en  $(a, b)$ . Como  $R_n \perp \prod_n$ , debe ser entonces que  $j > n$ .  $\square$

El próximo resultado indica que en cualquier sistema de polinomios ortogonales, las correspondientes raíces son reales, simples y pertenecen al interior del intervalo de definición de la función peso asociada.

**Teorema 1.10.** *Sea  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  una familia de polinomios ortogonales respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Entonces, para cada  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n$  tiene exactamente  $n$  raíces simples, todas ellas en  $(a, b)$ .*

*Demostración.* Es análoga a la de Teorema 1.9, pues  $0 = \langle \varphi_n(x), 1 \rangle$  y  $\varphi_n \perp \prod_{n-1}$ . Luego, debe presentar al menos  $n$  cambios de signo en  $(a, b)$ . Luego,  $\varphi_n$  tiene  $n$  raíces simples en  $(a, b)$ .  $\square$

En función del Teorema 1.26, se puede enunciar el siguiente teorema debido a Erdős y Turán que asegura la convergencia en media cuadrática para la sucesión de polinomios interpoladores de cualquier función continua en los ceros de polinomios ortogonales ligados a cualquier función peso en un intervalo finito. [5].

**Teorema 1.11.** *Sea  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$ , con  $b - a < \infty$ , y  $\{x_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$  los ceros de  $\varphi_{n+1}$ , para cada  $n \geq 0$ . Dada  $f \in C([a, b])$ , si  $p_n(f, \cdot) \in \prod_n$  es el polinomio interpolador de  $f$  en  $\{x_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$ , entonces:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n(f, \cdot)\|_{2,w} = 0 \quad (1.24)$$

*Demostración.* I.  $\forall p \in \prod_n : \|p\|_{2,w} \leq C \cdot \max_{0 \leq k \leq n} |p(x_k^{(n+1)})|$ , con  $C = \left\{ \int_a^b w(x) dx \right\}^{1/2}$ .

En efecto, dado  $p(x)^2 \in \prod_{2n}$ , sea  $p^* \in \prod_n$  el polinomio interpolador de  $p^2$  en  $\{x_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$ . Dividiendo  $p^2 - p^* \in \prod_{2n}$  entre  $\varphi_{n+1} \in \prod_{n+1}$ :

$p(x)^2 = p^*(x) + \varphi_{n+1}(x)q(x)$ , con  $q \in \prod_{n-1}$  (observar que  $p^2 - p^*$  es nulo en  $\{x_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$  y por tanto divisible entre  $\varphi_{n+1}$ . Luego, por ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \|p\|_{2,w}^2 &= \int_a^b p(x)^2 w(x) dx = \int_a^b p^*(x) w(x) dx + \int_a^b \varphi_{n+1}(x) q(x) w(x) dx = \\ &= \int_a^b p^*(x) w(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n p(x_k^{(n+1)})^2 \cdot L_k(x) \right) w(x) dx \leq \\ &= \left( \max_{0 \leq k \leq n} |p(x_k^{(n+1)})| \right)^2 \cdot \int_a^b w(x) dx, \end{aligned}$$

siendo  $\{L_k(x)\}_{k=0}^n$  los polinomios fundamentales de Lagrange asociados a los nodos  $\{x_k^{(n+1)}\}_{k=0}^n$ .

II. Dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists p \in \Pi$  tal que  $\|f - p\|_\infty < \frac{\epsilon}{2C}$  (Teorema 0.1 de Weierstrass).

Luego,  $\|f - p\|_{2,w} < d_2^\epsilon$ . Sea  $n_0 := \deg(p)$ . Para  $n \geq n_0$ :

$$\|f - p_n\|_{2,w} \leq \|f - p\|_{2,w} + \|p - p_n\|_{2,w} < \frac{\epsilon}{2} + \|p - p_n\|_{2,w}.$$

Como  $n \geq n_0$ ,  $p - p_n \in \Pi_n$  y por I:

$$\begin{aligned} \|p - p_n\|_{2,w} &\leq C \max_{0 \leq k \leq n} |p(x_k^{(n+1)}) - p_n(x_k^{(n+1)})| = \\ &C \max_{0 \leq k \leq n} |p(x_k^{(n+1)}) - f(x_k^{(n+1)})|_\infty < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En definitiva,  $\|f - p_n\|_{2,w} < \epsilon$ ,  $n \geq n_0$ .  $\square$

A continuación el siguiente resultado prueba que los polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w$  satisfacen una *propiedad extremal* que los define. En particular, minimizan la norma euclídea ponderada asociada a  $w$  entre los polinomios mónicos de grado exacto  $n$ .

**Teorema 1.12.** *Sea  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Si  $p \in \Pi_n$  es un polinomio mónico de grado exacto  $n \geq 1$ ,  $p \neq \varphi_n$ , entonces*

$$\|\varphi_n\|_{2,w} < \|p\|_{2,w}. \quad (1.25)$$

*Esto es,  $\varphi_n(x)$  minimiza  $\|\cdot\|_{2,w}$  entre todos los polinomios mónicos de grado  $n$ .*

*Demostración.* Podemos escribir  $p = \varphi_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j$ , para ciertos coeficientes  $a_j$ . Por ortogonalidad:  $\|p\|_{2,w}^2 = \|\varphi_n\|_{2,w}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j^2 \|\varphi_j\|_{2,w}^2$  y es claro que  $\|p\|_{2,w} \geq \|\varphi_n\|_{2,w}$  con  $\|p\|_{2,w} > \|\varphi_n\|_{2,w}$  si y sólo si  $a_j = 0$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ , esto es, si y solo si  $p = \varphi_n$ .  $\square$

El siguiente teorema, conocido como *fórmula de Christoffel-Darboux* [3], nos será de utilidad para demostrar que los ceros de polinomios ortogonales cumplen una propiedad de *entrelazamiento* (ver Teorema 1.14).

**Teorema 1.13.** *Sea  $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$  y sean  $\bar{\varphi}_k(x) = \frac{1}{\|\varphi_k\|_{2,w}} \varphi_k(x)$ ,  $k \geq 0$ , los correspondientes polinomios ortonormales. Entonces, para  $t \neq x$ :*

$$\frac{\|\varphi_{n+1}\|_{2,w}}{\|\varphi_n\|_{2,w}} \cdot \left\{ \frac{\bar{\varphi}_{n+1}(t) \cdot \bar{\varphi}_n(x) - \bar{\varphi}_{n+1}(x) \cdot \bar{\varphi}_n(t)}{t - x} \right\} = \sum_{k=0}^n \bar{\varphi}_k(t) \bar{\varphi}_k(x). \quad (1.26)$$

*Demostración.* Usando la fórmula de recurrencia a tres términos (1.21), tenemos que:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1}(t) \cdot \varphi_n(x) &= (t - a_{n+1})\varphi_n(t) \cdot \varphi_n(x) - b_{n+1}\varphi_{n-1}(t) \cdot \varphi_n(x), \\ \varphi_{n+1}(x) \cdot \varphi_n(t) &= (x - a_{n+1})\varphi_n(x) \cdot \varphi_n(t) - b_{n+1}\varphi_{n-1}(x) \cdot \varphi_n(t).\end{aligned}$$

Restando:

$$\varphi_{n+1}(t) \cdot \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \cdot \varphi_n(t) = (t - x)\varphi_n(t) \cdot \varphi_n(x) + b_{n+1}[\varphi_n(t)\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\varphi_{n-1}(t)].$$

Dado que  $b_{n+1} = \frac{\|\varphi_n\|^2}{\|\varphi_{n-1}\|^2}$ , sigue, dividiendo por  $\|\varphi_n\|^2$  que:

$$\begin{aligned}& \frac{\varphi_{n+1}(t) \cdot \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x) \cdot \varphi_n(t)}{\|\varphi_n\|^2} = \\ &= (t-x) \frac{\varphi_n(t)\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|^2} + \frac{\varphi_n(t) \cdot \varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x) \cdot \varphi_{n-1}(t)}{\|\varphi_{n-1}\|^2} = (t-x) \sum_{k=0}^n \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|^2}\end{aligned}$$

$$\text{Así pues, } \frac{\|\varphi_{n+1}\|}{\|\varphi_n\|} \cdot \{\bar{\varphi}_{n+1}(t) \cdot \bar{\varphi}_n(x) - \bar{\varphi}_{n+1}(x) \cdot \bar{\varphi}_n(t)\} = (t-x) \sum_{k=0}^n \bar{\varphi}_k(t)\bar{\varphi}_k(x).$$

**Corolario 1.7** *En las mismas condiciones que el Teorema 1.13*

$$\frac{\|\varphi_{n+1}\|_{2,w}}{\|\varphi_n\|_{2,w}} \cdot \{\bar{\varphi}'_{n+1}(x) \cdot \bar{\varphi}_n(x) - \bar{\varphi}_{n+1}(x) \cdot \bar{\varphi}'_n(x)\} = \sum_{k=0}^n \bar{\varphi}_k(x)^2. \quad (1.27)$$

*Demostración.* Basta hacer  $t \rightarrow x$  y aplicar la regla de L'Hôpital a la fórmula de Christoffel-Darboux (1.26).  $\square$

**Teorema 1.14.** *Sea  $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto de una función peso  $w(x)$  en  $(a, b)$ . Entonces, para cada  $n \geq 1$ , entre dos ceros consecutivos de  $\varphi_{n+1}$ , existe un cero de  $\varphi_n$ .*

*Demostración.* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ceros consecutivos de  $\bar{\varphi}_{n+1}$ , donde  $\bar{\varphi}_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_{2,w}}\varphi_n(x)$ ,  $n \geq 0$ . Veamos que  $\bar{\varphi}_n$  tiene un cero en  $(\alpha, \beta)$ . Como  $\alpha$  y  $\beta$  son ceros simples y consecutivos de  $\bar{\varphi}_{n+1}$ , debe tenerse que  $\bar{\varphi}'_{n+1}(\alpha) \cdot \bar{\varphi}'_{n+1}(\beta) < 0$ . Aplicando el corolario previo en  $x = \alpha$  y  $x = \beta$ :

$$\left. \begin{aligned} 0 &< \frac{\|\varphi_{n+1}\|}{\|\varphi_n\|} \left\{ \bar{\varphi}'_{n+1}(\alpha) \cdot \bar{\varphi}_n(\alpha), \right\} \\ 0 &< \frac{\|\varphi_{n+1}\|}{\|\varphi_n\|} \left\{ \bar{\varphi}'_{n+1}(\beta) \cdot \bar{\varphi}_n(\beta), \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\varphi}_n(\alpha) \cdot \bar{\varphi}_n(\beta) < 0$$

Luego, por el teorema de Bolzano,  $\bar{\varphi}_n$  tiene un cero en  $(\alpha, \beta)$ .  $\square$

## Aproximación en espacios normados. Ajuste polinómico uniforme.

### 2.1. Aproximación en espacios normados.

El estudio de existencia y unicidad de mejor aproximación llevada a cabo en la Sección 1.1 en el contexto de espacios pre-Hilbert y subespacios vectoriales finito-dimensionales puede ampliarse, bajo condiciones adecuadas, al ámbito más general de espacios normados. Este desarrollo es importante, por ejemplo, para tratar la existencia y unicidad de mejor aproximación en los problemas minimax (0.5)-(0.6). Veamos que la teoría desarrollada en la Sección 1.1 no es aplicable al estudio de los problemas minimax (0.5)-(0.6), puesto que la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , tanto en  $\mathbb{R}^{N+1}$  como en  $C([a, b])$ , no está inducida por ningún producto interior a consecuencia de que dicha norma no satisface la *ley del paralelogramo* 1.1.

Seguidamente presentamos el *problema de la mejor aproximación en espacios normados* genéricos  $(V, \|\cdot\|)$ , y abordamos el estudio de la existencia y unicidad de dicha mejor aproximación [5, 8].

**Definición 2.1** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $v \in V$  y  $S \subset V$  un subconjunto no vacío.  $\hat{v} \in S$  se dice mejor aproximación de  $v$  en  $S$  si

$$\|v - \hat{v}\| \leq \|v - s\| \quad \forall s \in S. \quad (2.1)$$

El valor

$$\mathfrak{D}_S(v) := \inf_{s \in S} \|v - s\| \quad (2.2)$$

se denomina *desviación mínima de  $S$  a  $v$* . Denotamos por  $\mathfrak{A}_S(v)$  al conjunto de todos los elementos de mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .

Comprobamos que  $\hat{v} \in S$  es un elemento de mejor aproximación a  $v$  en el conjunto  $S$  si  $\|v - \hat{v}\| = \mathfrak{D}_S(v)$ , la *distancia* de  $v$  al conjunto  $S$ . Es simple ver que si  $S \subseteq \hat{S}$ , entonces  $\mathfrak{D}_{\hat{S}}(v) \leq \mathfrak{D}_S(v)$ .

**Nota 2.1** El problema de mejor aproximación en  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  con  $S = \prod_n$  corresponde al problema de *aproximación polinómica mínima* (0.6). Además, los problemas de mejor aproximación en  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{2,w})$  y  $(C([a, b]), \|\cdot\|_{2,w})$ , con  $S = \prod_n$ , se corresponden con los problemas de *mejor aproximación polinómica en mínimos cuadrados discreto y continuo* (0.2) y (0.4), respectivamente. Para demostrar la existencia y unicidad de mejor aproximación en tales espacios cuando  $S = \prod_n$  utilizaremos el siguiente resultado.

Veremos que, si  $v \in V \setminus S$ , entonces el conjunto de mejores aproximaciones de  $v$  en  $S$  debe estar dentro de la frontera topológica de  $S$ , que denotamos por  $\partial S$ .

**Proposición 2.1** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $v \in V$  y  $S \subset V$  un subconjunto no vacío. Si  $v \in V \setminus S$  entonces  $\mathfrak{A}_S(v) \subseteq \partial S$ .*

*Demostración.* En efecto, si  $\mathfrak{A}_S(v) = \emptyset$  la tesis es evidente. Supongamos entonces que existe  $\hat{v} \in \mathfrak{A}_S(v) \subseteq S$ . Si  $\hat{v}$  fuese punto interior de  $S$ , existiría  $r > 0$  tal que  $B := \bar{B}(\hat{v}, r) = \{u \in V \mid \|u - \hat{v}\| \leq r\} \subseteq S$ . Considerando  $s_n := \frac{1}{n}v + (1 - \frac{1}{n})\hat{v} \in V$ ,  $n \geq 1$ , como  $\hat{v} \neq v$ , para  $n > \frac{\|v - \hat{v}\|}{r}$ , sigue que  $\|s_n - \hat{v}\| = \frac{1}{n}\|v - \hat{v}\| < r$ , esto es  $s_n \in B \subseteq S$ , y  $\|s_n - v\| = (1 - \frac{1}{n})\|v - \hat{v}\| < \|v - \hat{v}\|$ , lo que contradice que  $\|v - \hat{v}\| = \mathfrak{D}_S(v)$ .  $\square$

**Nota 2.2** Comúnmente no tiene por qué existir el elemento de mejor aproximación (2.1), y, aún en caso de existir, no tiene por qué ser único. Podemos ver estas afirmaciones con los siguientes ejemplos.

- I. En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , sea  $S := \{s \in \mathbb{R}^2 \mid \|s\|_2 \leq 1\}$ . Si  $v = (2, 0)$  entonces  $\mathfrak{D}_S(v) = 1$  y  $\mathfrak{A}_S(v) = \{(1, 0)\}$ .
- II. En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , sea  $S := \{s \in \mathbb{R}^2 \mid \|s\|_2 < 1\}$ . Si  $v = (2, 0)$  entonces  $\mathfrak{D}_S(v) = 1$  pero no existe elemento de mejor aproximación a  $v$  en  $S$ .
- III. En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ , sea  $S := \{s \in \mathbb{R}^2 \mid \|s\|_\infty \leq 1\}$ . Si  $v = (2, 0)$  entonces  $\mathfrak{D}_S(v) = 1$  y existen infinitas mejores aproximaciones  $\mathfrak{A}_S(v) = \{(1, \alpha) \mid |\alpha| \leq 1\}$ .
- IV. En  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ , sea  $S := \{s_\beta(x) := e^{\beta x} \mid \beta > 0\}$ . Si  $v = f(x) = \frac{1}{2}$ , entonces  $\|s_\beta - v\|_\infty = e^\beta - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ ,  $\forall \beta > 0$ . Así,  $\mathfrak{D}_S(v) = \frac{1}{2}$ , pero no existe elemento de mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .

Por esta razón, consideraremos conjuntos  $S$  con ciertas propiedades topológicas y algebraicas. Los ejemplos previos ilustran que una condición suficiente para la existencia de mejor aproximación es que el conjunto  $S$  sea compacto.

Partiendo de la definición de desviación mínima (2.2) introducimos el concepto de *sucesión minimizante*.

**Definición 2.2** Sea  $S$  un subconjunto no vacío de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$ . Una sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  se dice *sucesión minimizante* para  $v \in V$  en  $S$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - s_n\| = \mathfrak{D}_S(v). \quad (2.3)$$

La existencia de sucesiones minimizantes se garantiza con la definición de desviación mínima (2.2), aunque dichas sucesiones no tengan por qué converger a un elemento de  $S$ . Sin embargo, estas sucesiones tienen importancia desde el enfoque numérico, debido a que a pesar de que pueda no existir mejor aproximación en  $S$  para  $v \in V$ , la sucesión nos da elementos en  $S$  cuya distancia a  $v$  se aproxime tanto como deseemos a la desviación mínima. También, podemos asegurar que toda sucesión minimizante está acotada.

**Proposición 2.2** Sea  $S \neq \emptyset$  un subconjunto de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  y  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  una sucesión minimizante para  $v \in V$  en  $S$ . Entonces,  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada.

*Demostración.* Observamos que  $\mathfrak{D}_S(v) \leq \|v - s_n\| \leq \mathfrak{D}_S(v) + 1$  para  $n \geq N$  con  $N$  suficientemente grande. Luego, para  $n \geq N$ ,  $\|s_n\| \leq \|s_n - v\| + \|v\| \leq K := \mathfrak{D}_S(v) + 1 + \|v\|$ .  $\square$

Para garantizar que un punto de acumulación en  $S$  de una sucesión minimizante sea una mejor aproximación, mostramos el siguiente resultado.

**Proposición 2.3** Sea  $S \neq \emptyset$  un subconjunto de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  y  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  una sucesión minimizante para  $v \in V$  en  $S$  tal que posee un punto de acumulación  $\hat{v} \in S$ . Entonces,  $\hat{v}$  es una mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .

*Demostración.* Basta tener en cuenta que  $\|v - \hat{v}\| \leq \|v - s_{n_j}\| + \|s_{n_j} - \hat{v}\|$ , donde  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|v - s_{n_j}\| = \mathfrak{D}_S(v)$  y  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|s_{n_j} - \hat{v}\| = 0$ , para alguna subsucesión  $\{s_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ .  $\square$

Si se asume que el conjunto  $S$  es compacto se deduce, como consecuencia, la existencia de mejor aproximación.

**Teorema 2.1.** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $v \in V$  y  $S \subset V$  un subconjunto compacto no vacío. Entonces existe  $\hat{v} \in S$  mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .*

*Demostración.* Es inmediata teniendo en cuenta que, a partir de la compacidad de  $S$ , se puede extraer una subsucesión convergente a partir de toda sucesión minimizante.  $\square$

**Nota 2.3** Se puede deducir la existencia de solución para el problema de mejor aproximación en subespacio vectoriales de  $V$  de dimensión finita. Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S$  un subespacio vectorial de dimensión finita  $m$  generado por  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ . Entonces el problema de hallar el elemento de mejor aproximación de  $v \in V$  en  $S$  trata en minimizar

$$\|v - \sum_{j=1}^m \alpha_j s_j\|, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Para garantizar la existencia de un elemento en  $S$  que minimiza tal expresión presentamos el siguiente resultado, conocido como *Teorema Fundamental de la Teoría de Aproximación en Espacios Normados*.

**Teorema 2.2.** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado,  $v \in V$  y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita. Entonces,  $\mathfrak{A}_S(v) \neq \emptyset$ , esto es, existe  $\hat{v} \in S$  mejor aproximación de  $v$  en  $S$*

*Demostración.* Toda sucesión minimizante está acotada (Proposición 2.2) y admite por tanto un punto de acumulación. Puesto que  $S$  tiene dimensión finita,  $S$  es cerrado y dicho punto de acumulación debe pertenecer a  $S$  (Proposición 2.3).  $\square$

**Nota 2.4** Los Teoremas 2.1 y 2.2 garantizan la existencia de mejor aproximación en subconjuntos compactos y en subespacios vectoriales finito-dimensionales, respectivamente. Sin embargo, en general no garantiza la unicidad de mejor aproximación. La unicidad de mejor aproximación es una propiedad conveniente para trabajar con determinados problemas y, desde un punto de vista numérico, poder diseñar métodos constructivos para el cómputo de una única solución.

**Ejemplo 2.1** I. En  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  tomamos  $S = \{-1, 1\}$  compacto, de tal modo que  $\mathfrak{A}_S(0) = \{-1, 1\} = S$ , con  $\mathfrak{D}_S(0) = 1$ .

II. En  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ , sea  $S := \{s \in \mathbb{R}^2 \mid \|s\|_2 \geq 1\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ . Si  $v = (1, 1)$  entonces  $\mathfrak{A}_S(v) = \{(1, 0), (0, 1)\}$  y  $\mathfrak{D}_S(v) = 1$ .

- III. En  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ , sea  $S := \text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ . Si  $v = (1, 1, 1)$  entonces tenemos que  $\mathfrak{A}_S(v) = \{(a, b, 0) \mid 0 \leq a, b \leq 2\}$  y  $\mathfrak{D}_S(v) = 1$ .
- IV. En  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ , sea  $S = \{f_a(x) := ax \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{span}(x)$  subespacio finito-dimensional, resultando para  $v = f(x) = 1$  que  $\mathfrak{A}_S(1) = \{f_a \in S \mid a \in [0, 2]\}$  y  $\mathfrak{D}_S(1) = 1$ .

**Definición 2.3** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subseteq V$ ,  $S \neq \emptyset$ .

- $S$  se dice convexo si para cualesquiera  $x, y \in S$  se tiene que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ ,  $\forall \lambda \in (0, 1)$ .
- $S$  se dice estrictamente convexo si para cualesquiera  $x, y \in S$ ,  $x \neq y$  se verifica que  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  es un punto interior de  $S$ ,  $\forall \lambda \in (0, 1)$ .

Para ver que el conjunto de mejores aproximaciones en un subconjunto  $S$  convexo es un conjunto convexo y, por tanto, o bien existe un único elemento de mejor aproximación o bien existen infinitos, veamos el siguiente resultado. Los Ejemplos 2.1[iii), iv)] ilustran esta propiedad.

**Teorema 2.3.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \neq \emptyset$  un subconjunto convexo de  $V$ . Para cada  $v \in V$ , si  $\mathfrak{A}_S(v) \neq \emptyset$ , entonces  $\mathfrak{A}_S(v)$  es convexo.

*Demostración.* Supongamos  $S \neq \emptyset$  es convexo y  $\mathfrak{A}_S(v) \neq \emptyset$ . Si  $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in \mathfrak{A}_S(v)$  entonces  $\|\hat{v}_1 - v\| \leq \|u - v\|$ ,  $\forall u \in S$ . Sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|\lambda \hat{v}_1 + (1 - \lambda)\hat{v}_2 - v\| &= \|\lambda(\hat{v}_1 - v) + (1 - \lambda)(\hat{v}_2 - v)\| \\ &\leq \lambda\|\hat{v}_1 - v\| + (1 - \lambda)\|\hat{v}_2 - v\| \\ &\leq \lambda\|u - v\| + (1 - \lambda)\|u - v\|, \quad \forall u \in S. \\ &= \|u - v\|, \quad \forall u \in S \end{aligned}$$

Luego,  $\lambda \hat{v}_1 + (1 - \lambda)\hat{v}_2 \in \mathfrak{A}_S(v)$  y  $\mathfrak{A}_S(v)$  es convexo. □

**Teorema 2.4.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \neq \emptyset$  un subconjunto estrictamente convexo de  $V$ . Entonces, para cada  $v \in V$  existe a lo sumo una mejor aproximación  $\hat{v} \in S$  de  $v$  en  $S$ .

*Demostración.* Si  $v \in S$  entonces  $\hat{v} := v$  es mejor aproximación de  $v$  en  $S$  con  $\mathfrak{D}_S(v) = 0 = \|v - \hat{v}\|$ . Si  $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in S$  fuesen mejores aproximaciones de  $v$  en  $S$ , entonces:

$$0 = \mathfrak{D}_S(v) = \|\hat{v}_1 - v\| = \|\hat{v}_2 - v\| \Rightarrow \hat{v}_1 = v = \hat{v}_2$$

Supongamos que  $v \in V \setminus S$  y por reducción al absurdo que  $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in S$  son mejores aproximaciones de  $v$  en  $S$  con  $\hat{v}_1 \neq \hat{v}_2$ .

Por el Teorema 2.3,  $\hat{v}_3 := \frac{1}{2}(\hat{v}_1 + \hat{v}_2)$  también es mejor aproximación de  $v$  en  $S$ . Además  $\hat{v}_3 \in \text{int}(S)$  por ser  $S$  estrictamente convexo. Como  $\text{int}(S)$  es abierto (y no vacío) existe  $r > 0$  tal que  $\bar{B}(\hat{v}_3; r) \subset S$  con  $\bar{B}(\hat{v}_3; r) = \{u \in V \mid \|u - \hat{v}_3\| \leq r\}$ .

Tomamos  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $0 < \lambda \leq \frac{r}{\|\hat{v}_3 - v\|}$ , y  $\hat{v}_\lambda := (1 - \lambda)\hat{v}_3 + \lambda v$  (observar que  $\hat{v}_3 \neq v$  pues  $v \notin S$ ). Entonces:

- $\|\hat{v}_\lambda - \hat{v}_3\| = \lambda\|\hat{v}_3 - v\| \leq r$  y así,  $\hat{v}_\lambda \in \bar{B}(\hat{v}_3; r) \subset S$  y  $\hat{v}_\lambda \neq v$ .
- $\|\hat{v}_\lambda - v\| = (1 - \lambda)\|\hat{v}_3 - v\| = (1 - \lambda)\mathfrak{D}_S(v) < \mathfrak{D}_S(v)$ .

Pero esto es absurdo pues  $\hat{v}_\lambda \in S$  y  $\mathfrak{D}_S(v) = \inf\{u \in S \mid \|u - v\|\}$ . □

Por los Teoremas 2.1 y 2.4 obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 2.1** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \neq \emptyset$  un subconjunto compacto y estrictamente convexo de  $V$ . Entonces, para cada  $v \in V$  existe una única mejor aproximación  $\hat{v} \in S$  de  $v$  en  $S$ .*

**Nota 2.5** El resultado anterior es muy intuitivo, puesto que  $\mathfrak{A}_S(v)$  es convexo y está contenido en la frontera de  $S$  (si  $v \in V \setminus S$ ) y la frontera de un conjunto estrictamente convexo no puede contener segmentos. Así, los subconjuntos  $S$  no vacíos compactos y estrictamente convexos constituyen una primera clase de subconjuntos en los que queda asegurada la existencia y unicidad de mejor aproximación, esto es, en los que  $\mathfrak{A}_S(v)$  es un conjunto unipuntual. Los Ejemplos 2.1[i), ii)] muestran que si se elimina la hipótesis de convexidad estricta entonces no tiene por qué ser cierta la unicidad de mejor aproximación.

A continuación introduciremos una clase de espacios vectoriales en los que se podrá garantizar la existencia y unicidad de mejor aproximación en subespacios finito-dimensionales.

**Definición 2.4** *Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  se dice estrictamente normado si la bola unidad  $\bar{B}(0, 1) = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$  es estrictamente convexo, esto es,*

$$x, y \in V, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1, \forall \lambda \in (0, 1). \quad (2.4)$$

Hay que observar que en todo espacio estrictamente normado la esfera unidad cerrada  $\bar{S}(0, 1) = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$  no contiene segmentos. El siguiente resultado indica que un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es estrictamente normado si y solo si verifica que la desigualdad triangular solo se da con igualdad para vectores linealmente dependientes.

**Teorema 2.5.** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Son equivalentes:*

- I.  $(V, \|\cdot\|)$  es estrictamente normado.
- II.  $x, y \in V, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|x + y\| < 2$ .
- III. Para cualesquiera  $x, y \in V \setminus \{0\}$ ,  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow y = \alpha x$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* I)  $\Rightarrow$  II)

Sean  $x, y \in V, x \neq y$ , con  $\|x\| = \|y\| = 1$  entonces  $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$  y  $\|x + y\| < 2$ .

2. Puesto que  $(V, \|\cdot\|)$  es estrictamente convexo, aplicando (2.4) con  $\lambda = \frac{1}{2}$ .  
 $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$  y  $\|x + y\| < 2$ .

II)  $\Rightarrow$  III)

Sean  $x, y \in V \setminus \{0\}$  tales que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\|x\| \leq \|y\|$  y definamos  $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$  e  $\tilde{y} = \frac{y}{\|y\|}$ , de modo que  $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = 1$ . Ahora bien:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} + \tilde{y}\| &= \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \left( \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right) - \left( \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \\ &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{\|x + y\|}{\|x\|} - \|y\| \cdot \left( \frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = \\ &= \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|} = 2. \end{aligned}$$

Luego,  $\tilde{x}, \tilde{y} \in V$ , verifican  $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = 1$  con  $\|\tilde{x} + \tilde{y}\| \geq 2$ . Luego, por II), debe ser que  $\tilde{x} = \tilde{y}$ , esto es,  $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$ , e  $y = \alpha x$ , con  $\alpha = \frac{\|y\|}{\|x\|} > 0$ .

III)  $\Rightarrow$  I)

Sean  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ , con  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Dado  $\lambda \in (0, 1)$  definimos  $x_1 = (1-\lambda)x$  e  $y_1 = \lambda y$ . Entonces,  $x_1 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$ ,  $\|x_1\| + \|y_1\| = 1 - \lambda + \lambda = 1$ . Además,  $\|x_1 + y_1\| \leq \|x_1\| + \|y_1\| = 1$ . Si  $\|x_1 + y_1\| = 1$ , por III) se tendría que  $y_1 = \alpha x_1$ , con  $\alpha > 0$ .

Luego,  $y = \beta x$ , con  $\beta = \frac{\alpha(1-\lambda)}{\lambda} \geq 0$ , y como  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Se deduciría que  $\beta = 1$  e  $y = x$ . Absurdo. Luego,  $\|x_1 + y_1\| < 1$ .  $\square$

**Corolario 2.2** *Todo espacio pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es estrictamente normado.*

*Demostración.* La prueba sigue del Teorema 2.5[ii)] aplicando la ley del paralelogramo (1.2).  $\square$

**Teorema 2.6.** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio estrictamente normado y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$ . Entonces, para cada  $v \in V$  existe a lo sumo una mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .*

*Demostración.* Observamos que si  $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in S$  fuesen mejores aproximaciones de  $v$  ( $v \in V \setminus S$ ) en  $S$ , entonces, usando la desigualdad triangular,  $\frac{\hat{v}_1 + \hat{v}_2}{2}$  es otra mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .

Luego,  $\|(v - \hat{v}_1) + (v - \hat{v}_2)\| = 2\mathfrak{D}_S(v) = \|v - \hat{v}_1\| + \|v - \hat{v}_2\|$  y, en virtud del Teorema 2.5[iii)], se deduce que  $v - \hat{v}_1 = \alpha(v - \hat{v}_2)$ , con  $\alpha > 0$ . De aquí que  $(1 - \alpha)v = \hat{v}_1 - \alpha\hat{v}_2 \in S$ , lo cual implica  $\alpha = 1$  y  $\hat{v}_1 = \hat{v}_2$ .  $\square$

Los siguientes corolarios son consecuencia directa de los Teoremas 2.2 y 2.6 y del Corolario 2.2

**Corolario 2.3** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio estrictamente normado y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita. Entonces, para cada  $v \in V$  existe una única mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .*

**Corolario 2.4** *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert y  $S$  un subespacio vectorial de  $V$  de dimensión finita. Entonces, para cada  $v \in V$  existe una única mejor aproximación de  $v$  en  $S$ .*

**Nota 2.6** Los espacios  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_{2,w})$  y  $(C([a,b]), \|\cdot\|_{2,w})$  son estrictamente normados dado que la respectiva norma euclídea ponderada está inducida por un producto interior. Así, los problemas de mejor aproximación en dichos espacios admiten solución única en cualquier subespacio finito-dimensional  $S$ . Esto se utiliza, particularmente, en los problemas de *aproximación polinómica en mínimos cuadrados discreto y continuo* (0.2) y (0.4).

**Nota 2.7** Los espacios  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$  y  $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$  no son estrictamente normados. Por lo tanto, el problema de mejor aproximación en dichos espacios (en principio) no tiene por qué tener unicidad de solución para cualquier subespacio finito-dimensional  $S$ . Este hecho se puede observar en los Ejemplos 2.1[iii), iv)] y justificado mediante el siguiente Teorema 2.7. De hecho, el próximo teorema junto al Corolario 2.3 caracterizan a los espacios estrictamente normados, en el sentido de que el problema de mejor aproximación en subespacios finito-dimensionales tenga solución única.

**Teorema 2.7.** *Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado no estrictamente normado. Entonces existe un subespacio vectorial  $S$  de  $V$  de dimensión finita y  $v \in V \setminus S$  tal que  $v$  admite más de una mejor aproximación en  $S$ .*

*Demostración.* En efecto, ya que  $(V, \|\cdot\|)$  no es estrictamente normado, por el Teorema 2.5[iii)] existirán  $x, y \in V$  linealmente independientes con  $\|x\| = \|y\| = 1$ , tales que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| = 2$ .

Sean entonces  $S = \text{span}\{x - y\}$ ,  $v = -y \in V \setminus S$  y  $d(\lambda) := \lambda(x - y) - v = \lambda x + (1 - \lambda)y$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Resulta entonces que  $\|d(0)\| = \|d(1)\| = \|d(\frac{1}{2})\| = 1$  y  $d(\lambda) \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Esto es,  $0, x - y, \frac{x - y}{2}$  son mejores aproximaciones de  $v = -y$  en  $S$ . Para ver que en efecto  $d(\lambda) \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , puede aplicarse directamente la desigualdad triangular en las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} y = \frac{-\lambda}{1-2\lambda}(x+y) + \frac{1}{1-2\lambda}d(\lambda), & \text{si } \lambda < 0, \\ x+y = \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}x + \frac{1}{1-\lambda}d(\lambda), & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \\ x+y = \frac{2\lambda-1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda}d(\lambda), & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < 1, \\ x = \frac{\lambda-1}{2\lambda-1}(x+y) + \frac{1}{2\lambda-1}d(\lambda), & \text{si } \lambda > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

□

**Nota 2.8** No obstante el teorema anterior, la condición de espacio vectorial estrictamente normado no tiene por qué ser necesaria para garantizar la unicidad

de mejor aproximación en cierta clase de subespacios vectoriales. Por ejemplo, demostraremos en el desarrollo que sigue a continuación para el estudio de la mejor aproximación polinómica uniforme que en el caso de que  $S$  sea un subespacio de polinomios en  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  o  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $S = \Pi_n$  para algún  $n \geq 0$ , o  $S = \mathbb{P}_M$  (1.14), respectivamente, entonces sí se garantiza la unicidad de mejor aproximación.

## 2.2. Ajuste polinómico uniforme

Para terminar este capítulo veremos el estudio particular del problema de mejor aproximación polinómica en norma uniforme (0.6), o problema de aproximación minimax, iniciado por *P.L. Chebyshev* dando una respuesta positiva a la unicidad de solución para el caso de funciones derivables. Seguidamente aparecerían diversas demostraciones de la existencia y unicidad de mejor aproximación polinómica uniforme para funciones continuas.

**Nota 2.9** Dada una función  $f \in C([a, b])$  y un subespacio finito-dimensional  $S$ , la existencia de una mejor aproximación en norma uniforme  $\hat{f}$  para  $f$  en  $S$  está garantizada por el Teorema Fundamental de la Teoría de Aproximación en espacios normados (Teorema 2.2). Más aún, el conjunto de mejores aproximaciones a  $f$  en  $S$  es un conjunto convexo (Teorema 2.3). Puesto que  $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  no es estrictamente normado, no disponemos de resultados que garanticen la unicidad de mejor aproximación para subespacios genéricos  $S$ . No obstante lo anterior, en el caso polinómico  $S = \Pi_n$  sí puede garantizarse la unicidad de mejor aproximación.

Por otro lado, considerando la definición de *desviación mínima* (2.2) en subespacios de polinomios  $\mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) := \min_{p \in \Pi_n} \|f - p\|_\infty$ , es claro que

$$\mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) \geq \mathfrak{D}_{\Pi_{n+1}}(f), \quad \forall n \geq 0,$$

y que, por el Teorema 0.1 de Aproximación Uniforme de Weierstrass,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) = 0.$$

Seguidamente veremos la unicidad de la mejor aproximación polinómica en norma uniforme y nos remitimos a las referencias [1, 5, 9] donde se pueden hallar varias demostraciones de este hecho.

**Ejemplo 2.2** En los Ejemplos 0.1 y 0.2 obtuvimos la expresión de grado 0 de mejor ajuste en norma uniforme. Observamos que si  $f(\eta)$  y  $f(\zeta)$  son, respectivamente, los valores mínimos y máximos de  $f \in C([a, b])$ , entonces  $p_0(x) := \frac{f(\eta) + f(\zeta)}{2}$  es la mejor aproximación uniforme de  $f$  en  $\Pi_0$ . Además, la función de error  $\varepsilon(x) := f(x) - p_0(x)$  se puede escribir como  $\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(\eta)}{2} + \frac{f(x) - f(\zeta)}{2}$  y cumple  $\|\varepsilon\|_\infty = \frac{f(\eta) - f(\zeta)}{2}$ . Por otra parte,  $\varepsilon$  alcanza sus valores extremos en  $x = \eta$  y  $x = \zeta$ , siendo  $\varepsilon(\zeta) = -\varepsilon(\eta) = \|\varepsilon\|_\infty$ . Análogas consideraciones son válidas para una serie de datos  $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^N$  con nodos  $\{(x_i)\}_{i=0}^N$  distintos dos a dos.

El ejemplo previo indica que para localizar la mejor aproximación uniforme de grado cero a una función  $f$  solo hay que hallar dos puntos  $x_0 < x_1$  y un polinomio  $p_0 \in \Pi_0$  de forma que la función error  $\epsilon_0 = f - p_0$  tome sobre dichos puntos valores con signos alternos e iguales en valor absoluto a  $\|f - p_0\|_\infty$ . Pese a la simplicidad del caso de aproximación uniforme en  $\Pi_0$ , resulta que una propiedad análoga caracteriza a la mejor aproximación uniforme polinómica en general. En consecuencia, la mejor aproximación polinómica uniforme de grado  $n$  vendrá caracterizada por la existencia de un conjunto de  $n + 2$  puntos donde la función de error toma valores con signo alterno e iguales en valor absoluto al valor máximo del error absoluto.

Empezaremos formulando el *Teorema de De la Vallée Poussin* [5, 9].

**Teorema 2.8. (Teorema de De la Vallée Poussin)** Sean  $f \in C([a, b])$ ,  $p \in \Pi_n$  y  $\epsilon := f - p$ . Si existen  $n + 2$  puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  en  $[a, b]$  tales que

$$\text{sign}(\epsilon(x_i)) = (-1)^i \text{sign}(\epsilon(x_0)), \quad 1 \leq i \leq n + 1, \quad (2.6)$$

entonces

$$\min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon(x_i)| \leq \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) \leq \|f - p\|_\infty. \quad (2.7)$$

*Demostración.* La desigualdad a la derecha es obvia. Para probar la desigualdad a la izquierda en (2.7), razonando por contradicción, si existiera  $q \in \Pi_n$  tal que  $\|f - q\|_\infty < \min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon(x_i)|$ , entonces el polinomio  $q - p = (f - p) - (f - q)$  tendría el mismo signo en  $x_i$  que  $\epsilon = f - p$ ,  $i = 0, \dots, n + 1$ . En virtud de (2.6), se deduciría que  $q - p \in \Pi_n$  tendría al menos  $n + 1$  raíces distintas en  $[x_0, x_{n+1}]$  y en consecuencia  $q = p$ . Pero esto contradice la suposición  $\|f - q\|_\infty < \min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon(x_i)|$ .

□

**Definición 2.5** Un conjunto de  $n + 2$  puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$  en  $[a, b]$  se dice un conjunto de alternancia para  $f \in C([a, b])$  y  $p \in \Pi_n$ , si  $\epsilon := f - p$  verifica (2.6).

**Teorema 2.9.** Sean  $f \in C([a, b])$ ,  $p \in \Pi_n$  y  $\epsilon := f - p$ . Si existen  $n + 2$  puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  en  $[a, b]$  verificando la condición de alternancia de signos (2.6) y de equioscilación

$$|\epsilon(x_i)| = |f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\|_\infty, \quad i = 0, \dots, n + 1, \quad (2.8)$$

entonces  $p$  es una mejor aproximación uniforme de  $f$  en  $\Pi_n$ .

*Demostración.* Observamos que la acotación (2.7) nos permite dar una medida de cómo de lejos está un polinomio  $p \in \Pi_n$  de ser una mejor aproximación polinómica uniforme de  $f$ . En efecto, si  $f \neq p$ , tendremos que

$$\frac{\min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon(x_i)|}{\|f - p\|_\infty} \leq \frac{\mathfrak{D}_{\Pi_n}(f)}{\|f - p\|_\infty} \leq 1, \quad (2.9)$$

resultando así que si  $\min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon(x_i)| = \|f - p\|_\infty$  entonces  $p$  es una mejor aproximación polinómica uniforme de  $f$  en  $\Pi_n$ .  $\square$

A continuación enunciamos el *teorema de equioscilación de Chebyshev* permite afirmar que la existencia de un conjunto de alternancia de  $n + 2$  para la función  $f$  y un polinomio  $p \in \Pi_n$  verificando (2.8) es también una condición necesaria para que el polinomio  $p$  sea una mejor aproximación uniforme de  $f$  en  $\Pi_n$ . [5, 8, 9].

**Teorema 2.10. (Teorema de equioscilación de Chebyshev)** Sean  $f \in C([a, b])$ ,  $p \in \Pi_n$  y  $\epsilon := f - p$ . Si  $p$  es una mejor aproximación uniforme de  $f$  en  $\Pi_n$ , entonces existen al menos  $n + 2$  puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  en  $[a, b]$  verificando las condiciones de alternancia de signos (2.6) y de equioscilación (2.8).

*Demostración.* En efecto, puesto que  $\epsilon$  es continua, sea  $x_0$  el menor número en  $[a, b]$  tal que  $|\epsilon(x_0)| = \|\epsilon\|_\infty$ . Seguidamente tomamos, en su caso,  $x_1 > x_0$  el menor número en  $[a, b]$  tal que  $\epsilon(x_1) = -\epsilon(x_0)$ . Continuando el proceso, generamos una secuencia  $x_0 < \dots < x_m$  (con  $m \geq 0$ ) de puntos en  $[a, b]$  tales que  $\epsilon(x_i) = (-1)^i \epsilon(x_0)$ ,  $0 \leq i \leq m$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $m \leq n$ . En virtud de la continuidad de  $\epsilon$  existirán  $y_0, \dots, y_{m+1}$ , con

$y_0 := a \leq x_0 < y_1 < x_1 < \dots < y_m < x_m \leq y_{m+1} := b$ , tales que  $[y_i, y_{i+1}]$  no contiene puntos verificando  $\epsilon(x) = -\epsilon(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq m$ .

Además, para  $\sigma = (-1)^m \text{sign}(\epsilon(x_0))$ , el polinomio  $\pi(x) = \sigma \prod_{j=1}^m (x - y_j) \in \Pi_m$ -con  $\pi(x) = \sigma$  si  $m = 0$ - verifica que  $\text{sign}(\pi(x_i)) = \text{sign}(\epsilon(x_i))$ ,  $0 \leq i \leq m$ .

Entonces, si  $\epsilon(x_i) > 0$  (resp.  $< 0$ ), resulta  $\pi(x) > 0$  (resp.  $< 0$ ) en  $(y_i, y_{i+1})$  y  $\epsilon(x) > -\epsilon(x_i)$  (resp.  $\epsilon(x) < -\epsilon(x_i)$ ) en  $[y_i, y_{i+1}]$ . Luego, existirá  $\gamma_i > 0$  suficientemente pequeño tal que  $|\epsilon(x) - \gamma_i \pi(x)| < \|\epsilon\|_\infty$  en  $[y_i, y_{i+1}]$ . Tomando  $\gamma := \min_{0 \leq i \leq m} \gamma_i$

sigue que  $\|\epsilon - \gamma\pi\|_\infty < \|\epsilon\|_\infty$ , y  $p + \gamma\pi \in \Pi_n$  sería mejor aproximación uniforme a  $f$  que  $p$  en  $\Pi_n$ . Absurdo.  $\square$

**Nota 2.10** Aunque el Teorema 2.10 garantiza la existencia de un conjunto de alternancia (2.6) y equioscilación (2.8) de  $n + 2$  puntos para  $f \in C([a, b])$  y  $p \in \Pi_n$ , podría existir un tal conjunto con mayor cardinal, pongamos,  $n + 2 + k$ ,  $k \geq 1$ . Por tanto, por el Teorema 2.9, una mejor aproximación en  $\Pi_n$  también lo sería en  $\Pi_{n+j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

En función del Teorema 2.10, probamos que la aproximación minimax en  $\Pi_n$  es única.

**Corolario 2.5** Sea  $f \in C([a, b])$ . Existe un único  $p \in \Pi_n$  tal que  $\|f - p\|_\infty = \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f)$ .

*Demostración.* En efecto, si  $p, q \in \Pi_n$  son dos mejores aproximaciones uniformes para  $f$ , entonces, por convexidad (ver Teorema 2.3), también lo es  $r = \frac{p+q}{2}$ . Teniendo en cuenta (2.8) para  $r$ , se obtiene que  $f(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - q(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , siendo  $p, q \in \Pi_n$ . Luego,  $p = q$ .

$\square$

Por el Teorema 2.9, tenemos para el caso de la mejor aproximación polinómica uniforme de grado uno el siguiente resultado [3, 8, 9].

**Corolario 2.6** Sea  $f \in C^2([a, b])$  con  $f'' > 0$ . La mejor aproximación uniforme para  $f$  en  $\Pi_1$  es  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ , con  $\alpha_0 := \frac{f(a)+f(c)}{2} - \alpha_1 \frac{a+c}{2}$ ,  $\alpha_1 := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , siendo  $c$  la única solución de  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

*Demostración.* En efecto, tendremos en cuenta que  $\epsilon(x) := f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1 x)$  tiene al menos tres extremos absolutos  $x_0 < x_1 < x_2$  en  $[a, b]$ . Como  $\epsilon'$  es

estrictamente creciente, hay un único extremo interior  $x_2 = c$  para  $\epsilon$  verificando  $f'(c) = \alpha_1$ , siendo  $x_0 = a$  y  $x_2 = b$  los restantes extremos absolutos de  $\epsilon$ . De la condición de alternancia  $\epsilon(a) = -\epsilon(c) = \epsilon(b)$  (2.6) se deduce que  $\epsilon(a) = \epsilon(b)$  y de aquí que  $\alpha_1 := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . La expresión para  $\alpha_0$  se obtiene entonces de imponer  $\epsilon(a) = -\epsilon(c)$ .  $\square$

**Teorema 2.11.** *Sea  $f \in C([a, b])$  y  $\hat{p}_n \in \Pi_n$  la mejor aproximación uniforme para  $f$ . Entonces,  $\hat{p}_n$  interpola a  $f$  en al menos  $n + 1$  puntos.*

*Demostración.* Es consecuencia directa de (2.6) y del Teorema de Bolzano.  $\square$

**Nota 2.11** El desarrollo realizado previamente para la mejor aproximación polinómica de funciones continuas respecto de la norma uniforme es igualmente válido en el caso de la norma uniforme ponderada  $\|g\|_{\infty, w} = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|w(x)$  respecto de una función peso  $w(x)$  continua y positiva en  $[a, b]$  [8].

**Nota 2.12** El estudio anterior que nos ha conducido a los Teoremas 2.8, 2.9, 2.10 y al Corolario 2.5 se usa de forma similar al caso del problema uniforme discreto (0.5) respecto a la mejor aproximación uniforme  $\hat{p}_M \in \Pi_M$  de una serie de datos  $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^N$ , con  $M \leq N$ , y nodos  $\{x_i\}_{i=0}^N$  distintos dos a dos. De hecho, resultados correspondientes se obtienen mediante razonamientos similares sustituyendo el intervalo  $[a, b]$  por un conjunto fijo de nodos  $\{x_i\}_{i=0}^N$ , con  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ , la función  $f$  por una serie de valores  $\{f_i\}_{i=0}^N$ , el subespacio  $\Pi_n$  por  $\mathbb{P}_M$  (1.14), y tomando  $n = M$ , con  $M \leq N$ . Darse cuenta que si  $M = N$  entonces  $\hat{p}_M \in \Pi_M$  coincide con el polinomio interpolador de los datos  $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^N$ , siendo cero la desviación mínima correspondiente. Por ello basta considerar  $M \leq N - 1$ .

### 2.3. Algoritmo de Remez.

A diferencia del caso de la mejor aproximación polinómica por mínimos cuadrados, en general no disponemos de una descripción explícita para la mejor aproximación polinómica minimax de una función  $f \in C([a, b])$  cualquiera. No obstante lo anterior, el Teorema 2.9 constituye la base de un algoritmo que permite computar dicha mejor aproximación polinómica minimax con precisión arbitraria.

En efecto, dada  $f \in C([a, b])$ , sabemos que existe un único polinomio  $\hat{p}_n \in \Pi_n$  tal que  $\|f - \hat{p}_n\|_{\infty} = \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f)$ . Este polinomio queda caracterizado por las

condiciones de alternancia de signos (2.6) y equioscilación (2.8) sobre ciertos  $n + 2$  nodos  $\hat{x}_0^{(n)} < \hat{x}_1^{(n)} < \dots < \hat{x}_{n+1}^{(n)}$  distintos dos a dos en  $[a, b]$  a determinar. Así, partiendo de una serie de  $n + 2$  nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  cualesquiera en  $[a, b]$ , planteamos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ -1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

con incógnitas  $a_0, \dots, a_n$  y  $E$ . Este sistema tiene una única solución puesto que el determinante de la matriz del sistema es  $\sum_{j=0}^{n+1} V_j$ , siendo  $V_j$  el determinante de la matriz de Vandermonde asociada a los nodos  $\{x_i\}_{i=0}^{n+1} \setminus \{x_j\}$ , y esta cantidad es positiva para cada  $0 \leq j \leq n + 1$  puesto que los nodos se han ordenado en modo creciente. Vemos que si, para  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , resulta que  $|E| = \|f - p\|_\infty$  entonces  $p = \hat{p}$  es la mejor aproximación uniforme a  $f$  en  $\prod_n$ . Si  $|E| < \|f - p\|_\infty$  entonces puede intercambiarse uno de los nodos  $x_i$  por un nuevo nodo  $z$  tal que  $|f(z) - p(z)| = \|f - p\|_\infty$ .

**Teorema 2.12. (Unicidad fuerte)** Sea  $f \in C([a, b])$  y  $\hat{p}$  su mejor aproximación uniforme en  $\prod_n$ . Existe  $\gamma = \gamma(f) > 0$  tal que:

$$\|f - p\|_\infty \geq \|f - \hat{p}\|_\infty + \gamma \|\hat{p} - p\|_\infty, \quad \forall p \in \prod_n. \quad (2.11)$$

*Demostración.* Obviamente, la propiedad es cierta si  $p = \hat{p}$  (para cualquier  $\gamma > 0$ ) o si  $f = \hat{p}$  (con  $\gamma = 1$ ). Supongamos que  $\|f - \hat{p}\|_\infty \neq 0$  y sea  $\epsilon(x) := f(x) - \hat{p}(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Por el teorema 2.10 existen  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  en  $[a, b]$  tales que  $\epsilon(x_i) = \sigma(-1)^i \|\epsilon\|_\infty = f(x_i) - \hat{p}(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n + 1$ , con  $\sigma = \pm 1$ . Pongamos  $\sigma_i = \text{sign}(\epsilon(x_i)) = \sigma(-1)^i$ ,  $0 \leq i \leq n + 1$ . Consideremos el sistema lineal de dimensión  $(n + 1) \times (n + 1)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ \vdots \\ x_0^n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

que admite solución única, dada en virtud de la fórmula de Cramer, por

$$\nu_i = \frac{\det(V[x_1, \dots, x_{i-1}, x_0, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}])}{\det(V[x_1, \dots, x_{n+1}])}, \quad 1 \leq i \leq n + 1,$$

donde  $V[y_1, \dots, y_{n+1}]$  denota la matriz de Vandermonde asociada a los nodos  $\{y_i\}_{i=1}^{n+1}$ . Puesto que  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  se tiene que

$$\text{sign}(\nu_i) = (-1)^{i+1}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Definiendo  $\nu_0 = -1$  tenemos de (2.12) que

$$\sum_{i=0}^{n+1} \nu_i x_i^k = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Además, como  $\text{sign}(\nu_i \sigma_i) = (-1)^{i+1} \sigma(-1)^i = -\sigma$  es el mismo para cada  $i = 0, \dots, n+1$ , tenemos que

$$0 = \sum_{i=0}^{n+1} (\nu_i \sigma_i) \sigma_i x_i^k = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Definiendo  $\theta_i = \frac{(-\sigma)(\nu_i \sigma_i)}{\sum_{j=0}^{n+1} (-\sigma)(\nu_j \sigma_j)}$ , para  $i = 0, \dots, n+1$ , tenemos que

$$\theta_i > 0, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i \sigma_i x_i^k = 0, \quad k = 0, \dots, n$$

Ahora, sea  $q \in \prod_n$ , con  $\|q\|_\infty = 1$ ,  $q(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ . Entonces:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \theta_i \sigma_i q(x_i) = \sum_{k=0}^n c_k \left( \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i \sigma_i x_i^k \right) = 0. \quad (2.13)$$

Como  $q \in \prod_n$ ,  $\exists i \in \{0, \dots, n+1\}$  tal que  $q(x_i) \neq 0$ . En particular, como  $\theta_j > 0$ ,  $\forall j$ , debe existir por (2.13)  $i \in \{0, \dots, n+1\}$  tal que  $\sigma_i q(x_i) > 0$ .

Luego,  $\forall q \in \prod_n$ ,  $\|q\|_\infty = 1$  :  $\max_{0 \leq i \leq n+1} \sigma_i q(x_i) > 0$ . En virtud de la compacidad del conjunto  $\{q \in \prod_n \mid \|q\|_\infty = 1\}$  podemos definir

$$\gamma = \min_{\|q\|_\infty=1} \max_{0 \leq i \leq n+1} \sigma_i q(x_i) > 0. \quad (2.14)$$

Finalmente, sea  $p \in \prod_n$ ,  $p \neq \hat{p}$ , y  $q := \frac{\hat{p} - p}{\|\hat{p} - p\|_\infty} \in \prod_n$ ,  $\|q\|_\infty = 1$ . Entonces,  $\sigma_i q(x_i) \geq \gamma$  para algún  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ , esto es:

$$\sigma_i (\hat{p}(x_i) - p(x_i)) \geq \gamma \|\hat{p} - p\|_\infty$$

y  $\|f - p\|_\infty \geq \sigma_i (f - p)(x_i) = \sigma_i (f - \hat{p})(x_i) + \sigma_i (\hat{p} - p)(x_i) = \|f - \hat{p}\|_\infty + \sigma_i (\hat{p} - p)(x_i) \geq \|f - \hat{p}\|_\infty + \gamma \|\hat{p} - p\|_\infty$ .  $\square$

A continuación, como corolario de este resultado, deducimos que el polinomio minimax  $\hat{p}(f)$  depende continuamente de  $f \in C([a, b])$ .

**Teorema 2.13. (Freud)** Sea  $f \in C([a, b])$ . Existe  $\lambda = \lambda(f) > 0$  tal que para toda  $g \in C([a, b])$ ,

$$\|\hat{p}(f) - \hat{p}(g)\|_\infty \leq \lambda \|f - g\|_\infty. \quad (2.15)$$

*Demostración.* Por el teorema de unicidad fuerte, existe  $\gamma > 0$  tal que  $\|f - p\|_\infty \geq \|f - \hat{p}(f)\|_\infty + \gamma \|\hat{p}(f) - p\|_\infty$ ,  $\forall p \in \prod_n$ . Entonces, con  $p = \hat{p}(g)$ :

$$\begin{aligned} \gamma \|\hat{p}(f) - \hat{p}(g)\| &\leq \|f - \hat{p}(g)\|_\infty - \|f - \hat{p}(f)\|_\infty \leq \\ &\leq \|f - g\|_\infty + \|g - \hat{p}(g)\|_\infty - \|f - \hat{p}(f)\|_\infty \leq \\ &\leq \|f - g\|_\infty + (\|g - \hat{p}(f)\|_\infty) - \|f - \hat{p}(f)\|_\infty \leq \\ &\leq \|f - g\|_\infty + (\|g - f\|_\infty + \|f - \hat{p}(f)\|_\infty) - \|f - \hat{p}(f)\|_\infty = 2\|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

y el resultado sigue con  $\lambda = \frac{2}{\gamma} > 0$ . □

**Nota 2.13** Se puede considerar una opción basada en interpolación polinómica para evitar la resolución del sistema lineal (2.10). Dados los  $n + 2$  nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ , consideramos los polinomios de interpolación

$$q, r \in \prod_n : q(x_i) = f(x_i), r(x_i) = (-1)^i, 0 \leq i \leq n, \quad (2.16)$$

y definimos

$$E := \frac{q(x_{n+1}) - f(x_{n+1})}{r(x_{n+1}) + (-1)^n} \text{ y } p(x) := q(x) - E \cdot r(x) \in \prod_n. \quad (2.17)$$

Entonces  $f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i E$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ , de modo que  $E$  y los coeficientes de  $p$  en potencias de  $x$  resuelven (2.10). Observar que si  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$  y  $r_n \in \prod_n$  es el polinomio interpolador de los datos  $(-1)^i$  en  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , entonces

$$r_n(x_{n+1}) \neq (-1)^{n+1}.$$

En efecto, denotando  $g_i = (-1)^i$ , en virtud de la fórmula de interpolación de Newton:

$$r_{n+1}(x) = r_n(x) + g[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Luego, evaluando en  $x = x_{n+1}$ :

$$(-1)^{n+1} - r_n(x_{n+1}) = g[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] \prod_{j=0}^n (x_{n+1} - x_j)$$

con

$$\begin{aligned} g[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{\prod_{j=0}^{n+1} (x_i - x_j)} = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (\prod_{j=i+1}^{n+1} (x_i - x_j)^{-1}) (\prod_{j=0}^{i-1} (x_j - x_i)^{-1}) = \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} (\prod_{j=i+1}^{n+1} (x_j - x_i)^{-1}) (\prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)^{-1}) \neq 0. \end{aligned}$$

Luego,  $(-1)^{n+1} - r_n(x_{n+1}) \neq 0$ .

**Nota 2.14** Si  $f \in \prod_n$  y  $x_0 < \dots < x_{n+1}$ , entonces de (2.10), (2.16) y (2.17) se tiene que:

$$q, r \in \prod_n : q(x_i) = f(x_i), r(x_i) = (-1)^i, 0 \leq i \leq n \Rightarrow q \equiv f.$$

Luego,  $E = \frac{q(x_{n+1}) - f(x_{n+1})}{r(x_{n+1}) + (-1)^n} = 0$  y  $p(x) = q(x) - Er(x) = f(x)$ . Por tanto de

$$(2.10) \quad 0 = E = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i) (-1)^i V_i}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i) (-1)^i V_i = 0. \quad (2.18)$$

El resultado anterior que nos ha guiado al sistema lineal (2.10) constituye la base de un algoritmo recursivo para la obtención aproximada de la mejor aproximación polinómica uniforme. El algoritmo se conoce como *algoritmo unipuntual de Remez o algoritmo de intercambio*. Para ampliar información puede consultarse, por ejemplo, [1, 5, 7].

Sea entonces una función  $f \in C([a, b])$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\delta > 0$ , pretendemos generar un aproximante  $p^{(k)} \in \prod_n$  de  $\hat{p}_n$  tal que

$$\mathfrak{D}_{\prod_n}(f) \leq \|f - p^{(k)}\|_{\infty} \leq \mathfrak{D}_{\prod_n}(f) + \delta,$$

siendo  $\hat{p}_n$  la mejor aproximación uniforme en  $\prod_n$  de  $f$ . Más aún, generaremos ahora una sucesión minimizante de polinomios  $\{p^{(k)}\}_{k \geq 0} \subset \prod_n$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \hat{p}^{(k)}\|_{\infty} = 0.$$

**Algoritmo 2.1 (Algoritmo de intercambio de Remez)**

- I. Poner  $k = 0$  y elegir un conjunto cualquiera de referencia  $X_0$  de  $n+2$  puntos en  $[a, b]$ :  $x_0^{(0)} < \dots < x_{n+1}^{(0)}$ .
- II. Obtener el polinomio  $p^{(k)} \in \Pi_n$  definido por (2.16)-(2.17) para  $f$  relativo a  $X_k$  (cuyos coeficientes respecto de la base  $\{1, x, \dots, x_n\}$  resuelven el sistema lineal (2.10)). Definir  $\epsilon^{(k)} := f - p^{(k)}$ , de modo que  $X_k$  es un conjunto de alternancia y equioscilación para  $\epsilon^{(k)}$ . Por el Teorema 2.8 de De la Vallée Poussin tendremos que

$$\min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| \leq \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) \leq \|\epsilon^{(k)}\|_{\infty}.$$

- III. Hallar  $z \in [a, b]$  tal que

$$|\epsilon^{(k)}(z)| = \|\epsilon^{(k)}\|_{\infty}. \quad (2.19)$$

Si  $z \in X_k$  entonces resultará en virtud de (2.10) que  $\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)}) = (-1)^i \cdot \sigma \cdot \|\epsilon^{(k)}\|_{\infty}$ ,  $\sigma = \pm 1$ ,  $0 \leq i \leq n+1$ . Por el Teorema 2.9 de equioscilación,  $p^{(k)}$  es la mejor aproximación uniforme en  $[a, b]$  de  $f$  en  $\Pi_n$  y paramos el proceso.

En caso contrario, calculamos  $d_k := |\epsilon^{(k)}(z)| - \min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| > 0$ .

- Si  $d_k \leq \delta$  entonces habremos garantizado que

$$\mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) \leq \|f - p^{(k)}\|_{\infty} = \min_{0 \leq i \leq n+1} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| + d_k \leq \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f) + \delta$$

y paramos el proceso.

- Si  $d_k > \delta$ , pasar al punto IV para generar un nuevo conjunto de referencia  $X_{k+1}$ .

- IV. Reemplazar uno de los nodos en  $X_k$  por el punto  $z$  obtenido en el punto III del algoritmo, manteniendo la alternancia de signos en la función de error  $\epsilon^{(k)}$ . Para ello tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- $a \leq z < x_0^{(k)}$ : si  $\epsilon^{(k)}(z)\epsilon^{(k)}(x_0^{(k)}) > 0$ , sustituimos  $z$  por  $x_0^{(k)}$ ; en caso contrario, añadimos  $z$  al conjunto de referencia  $X_k$  y eliminamos  $x_{n+1}^{(k)}$  del mismo.

- $x_{n+1}^{(k)} < z \leq b$ : si  $\epsilon^{(k)}(z)\epsilon^{(k)}(x_{n+1}^{(k)}) > 0$ , reemplazamos  $x_{n+1}^{(k)}$  por  $z$ ; en caso contrario, añadimos  $z$  al conjunto de referencia  $X_k$  y eliminamos  $x_0^{(k)}$  del mismo.
- $z \in (x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)})$ , para algún  $j = 0, 1, \dots, n$ : si  $\epsilon^{(k)}(x_j^{(k)})\epsilon^{(k)}(z) > 0$  entonces reemplazamos  $x_j^{(k)}$  por  $z$ ; en caso contrario, sustituimos  $z$  por  $x_{j+1}^{(k)}$ .

En cualquiera de los tres casos anteriores generaremos un nuevo conjunto de referencia  $X_{k+1}$  de  $n + 2$  puntos de alternancia para  $\epsilon^{(k)}$ , y retomamos el proceso volviendo al punto II poniendo  $k = k + 1$  y considerando el nuevo conjunto de referencia  $X_{k+1}$ .

**Nota 2.15** La implementación del algoritmo de Remez para la aproximación polinómica uniforme en  $\prod_n$  requiere resolver un sistema lineal (2.10) de dimensión  $n + 2$  (o obtener dos polinomios de interpolación (2.16) en  $n + 1$  nodos) por cada paso, así como resolver el problema de optimización global (2.19). La resolución de (2.19) puede requerir (especialmente en el caso de funciones no derivables en todo  $[a, b]$ ) el uso de algoritmos libres de derivación. En matlab/octave está, por ejemplo, la función interna *fminbnd* que mezcla el método de búsqueda de la sección dorada e interpolación parabólica [6]. En efecto, aunque se disponga de implementaciones eficientes, este algoritmo 2.1 resulta más costoso en general que el proceso de obtención del mejor ajuste por mínimos cuadrados en  $\prod_n$  que solo requiere la resolución de un único sistema lineal (1.18) de dimensión  $n + 1$ .

Damos el siguiente resultado para asegurar la convergencia uniforme de los aproximantes  $\{p^{(k)}\}_{k \geq 0} \in \prod_n$  generados por algoritmo 2.1 de Remez.

**Teorema 2.14.** *Sea  $f \in C([a, b])$  y  $\hat{p}_n$  la mejor aproximación uniforme de  $f$  en  $\prod_n$ . Si  $\{p^{(k)}\}_{k \geq 0}$  es la sucesión de polinomios obtenida por el algoritmo 2.1 de Remez, partiendo de un conjunto inicial de referencia  $x_0^{(0)} < \dots < x_{n+1}^{(0)}$  tal que  $\min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - p^{(0)}(x_i^{(0)})| > 0$ , entonces existen constantes positivas  $C$  y  $0 < \theta < 1$  tales que  $\|p^{(k)} - \hat{p}_n\|_\infty \leq C\theta^k, k \geq 0$ .*

*Demostración.* En el paso  $k \geq 0$  del algoritmo de Remez tendremos nodos  $\{x_i^{(k)}\}_{i=0}^{n+1}, p^{(k)} \in \prod_n$  y  $\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)}) = f(x_i^{(k)}) - p^{(k)}(x_i^{(k)}) = (-1)^i E^{(k)}, 0 \leq i \leq n+1$ , en virtud de (2.10), siendo  $\epsilon^{(k)} = f - p^{(k)}$  en  $[a, b]$ . Definamos:

- $\alpha^{(k)} := \min_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| = \max_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| = |E^{(k)}|;$

- $\beta^{(k)} := \max_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| = \|\epsilon^{(k)}\|_\infty$ , en virtud de la elección del nuevo nodo  $z$  para el paso  $k + 1$ .
- $\gamma^{(k)} := \min_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| = \min_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| = \alpha^{(k)}$

Sea  $\hat{\beta} := \|\hat{\epsilon}\|_\infty = \|f - \hat{p}_n\|_\infty = \mathfrak{D}_{\Pi_n}(f)$ . Entonces:

- $\gamma^{(k)} := \min_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| = \min_i |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k)})| \leq \hat{\beta}$ , en virtud del Teorema 2.8.
- $\hat{\beta} \leq \beta^{(k)}$ , por ser  $\hat{p}_n$  mejor aproximación uniforme en  $\Pi_n$ .

Luego,

$$\alpha^{(k)} = \gamma^{(k)} \leq \hat{\beta} \leq \beta^{(k)}, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.20)$$

Ahora, del sistema lineal (2.10), usando 2.18:

$$E^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} f(x_i^{(k+1)}) (-1)^i V_i^{(k+1)}}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k+1)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)}) (-1)^i V_i^{(k+1)}}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k+1)}} = \sigma \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n+1} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| V_i^{(k+1)}}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k+1)}}, \quad \text{con } \sigma = \pm 1.$$

Luego,

$$|E^{(k+1)}| = \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i^{(k+1)} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})|, \quad (2.21)$$

con  $\theta_i^{(k+1)} := \frac{V_i^{(k+1)}}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k+1)}} \in (0, 1)$  y  $\sum_{i=0}^{n+1} \theta_i^{(k+1)} = 1$ ,  $\forall k \geq 0$ . Además,

$$\alpha^{(k+1)} = |E^{(k+1)}| = \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i^{(k+1)} |\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| \geq \gamma^{(k)} \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i^{(k+1)} = \gamma^{(k)} = \alpha^{(k)}.$$

Luego,

$$\alpha^{(k+1)} \geq \alpha^{(k)}, \quad \forall k \geq 0. \quad (2.22)$$

En lo que sigue supondremos que:

$$\exists \theta \in (0, 1) : \theta_i^{(k)} \geq 1 - \theta > 0, \quad \forall i = 0, \dots, n+1, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.23)$$

y dejaremos la prueba de esta propiedad (2.23) para el final. Con esto,

- I.  $\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)} = \alpha^{(k+1)} - \gamma^{(k)} = \sum_{i=0}^{n+1} \theta_i^{(k+1)} [|\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| - \gamma^{(k)}]$   
 $\geq (1 - \theta) \sum_{i=0}^{n+1} [|\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| - \gamma^{(k)}] \geq (1 - \theta) \max_i \{|\epsilon^{(k)}(x_i^{(k+1)})| - \gamma^{(k)}\} =$   
 $= (1 - \theta)(\beta^{(k)} - \gamma^{(k)}) \geq (1 - \theta)(\hat{\beta} - \gamma^{(k)}), \forall k \geq 0.$
- II.  $\hat{\beta} - \gamma^{(k+1)} = (\hat{\beta} - \gamma^{(k)}) - (\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}) \leq \theta(\hat{\beta} - \gamma^{(k)}), \forall k \geq 0.$   
 Luego:  $\hat{\beta} - \gamma^{(k)} \leq \theta^k(\hat{\beta} - \gamma^{(0)}) = A\theta^k$ , con  $A := \hat{\beta} - \gamma^{(0)}$
- III.  $\beta^{(k)} - \hat{\beta} \leq \beta^{(k)} - \gamma^{(k)} \leq \frac{1}{1 - \theta}(\gamma^{(k+1)} - \gamma^{(k)}) \leq \frac{\hat{\beta} - \gamma^{(k)}}{1 - \theta} \leq \frac{A}{1 - \theta}\theta^k = B\theta^k$ ,  
 con  $B = \frac{A}{1 - \theta}.$
- IV. Finalmente, por el Teorema de unicidad fuerte 2.12, existe  $\gamma = \gamma(f) > 0$  tal que  $\|\hat{p}_n - p^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|f - p^{(k)}\|_\infty - \|f - \hat{p}_n\|_\infty}{\gamma} = \frac{\beta^{(k)} - \hat{\beta}}{\gamma} \leq \frac{\beta}{\gamma}\theta^k = C\theta^k$ , con  $C = \frac{\beta}{\gamma}$ . Esto concluye la prueba a falta de probar (2.23)

Probamos finalmente la propiedad (2.23) para

$$\theta_i^{(k)} = \frac{V_i^{(k)}}{\sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k)}}, \quad 0 \leq i \leq n+1, \quad k \geq 0.$$

$V_i^{(k)} = \det(V[x_0^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}]) > 0$  depende continuamente de los nodos  $\{x_j^{(k)}\}_{j=0}^{n+1} \setminus \{x_i^{(k)}\}$  en  $[a, b]^{n+1}$ , que es compacto. Luego existe  $M > 0$  constante tal que

$$0 < \sum_{i=0}^{n+1} V_i^{(k)} \leq M. \quad (2.24)$$

Probaremos que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)} \geq \epsilon, \forall i = 0, \dots, n, \forall k \geq 0$ . Esto implicaría que  $V_i^{(k)} \geq C$ , con  $C = C(\epsilon) > 0, \forall i = 0, \dots, n+1, \forall k \geq 0$ , y que  $\theta_i^{(k)} \geq \frac{C}{M} > 0, \forall i, \forall k$ , esto es  $\theta_i^{(k)} \in (0, 1)$  serían cantidades acotadas inferiormente por una cantidad positiva fija (y esto probaría (2.23)).

Por reducción al absurdo, si (2.24) no fuese cierto, existiría una subsucesión de  $\{(x_0^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)})\}_{k \geq 0} \subset [a, b]^{n+2}$  (compacto) convergente a  $(x_0^*, \dots, x_{n+1}^*)$  con  $x_i^* = x_{i+1}^*$ , para algún  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Sea  $p^* \in \prod_{n+1}$  el polinomio interpolador de  $f$  en  $\{x_j^*\}_{j=0}^{n+1} : p^*(x_j^*) = f(x_j^*), j = 0, \dots, n+1$  (de hecho,  $p^* \in \prod_n$ , pues

$x_i^* = x_{i+1}^*$  para algún  $i$ ). Por continuidad uniforme de  $p^* - f$  en  $[a, b]$ , y dado que  $\alpha^{(0)} > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$x_1, x_2 \in [a, b], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |(p^* - f)(x_1) - (p^* - f)(x_2)| < \alpha^{(0)}.$$

Por convergencia, fijemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_j^{(k)} - x_j^*| < \delta$ ,  $j = 0, \dots, n+1$ . Luego,  $|p^*(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)})| = |(p^* - f)(x_j^{(k)}) - (p^* - f)(x_j^*)| < \alpha^{(0)}$ ,  $j = 0, \dots, n+1$ , esto es:

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} |p^*(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)})| < \alpha^{(0)}.$$

Pero  $\alpha^{(k)} = \min_{p \in \Pi_n} \max_{0 \leq j \leq n+1} |p(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)})| \leq \max_{0 \leq j \leq n+1} |p^*(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)})| < \alpha^{(0)}$ .

Pero esto es absurdo pues  $\alpha^{(k)} \geq \alpha^{(0)}$  por (2.22). El absurdo procede de suponer que (2.24) no se verifica y eso concluye la prueba.  $\square$

**Nota 2.16** El algoritmo 2.1 de Remez puede aplicarse y es convergente para cualquier elección del conjunto de referencia de nodos inicial  $X_0$  verificando la hipótesis del Teorema 2.14, una elección recomendada en la práctica [7] para  $X_0$  consiste en tomar el conjunto formado por los  $n+2$  extremos relativos del polinomio de Chebyshev de grado  $n+1$  en  $[a, b]$ , esto es,

$$x_i^{(0)} := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(n+1-i)\pi}{n+1}, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Esta elección inicial de  $n+2$  nodos  $X_0$  está teóricamente justificada por el hecho de que los puntos de alternancia y equioscilación máxima (2.8), pongamos  $\{\hat{x}_i^{(n)}\}_{i=0}^{n+1}$ , de la mejor aproximación  $\hat{p}_n \in \Pi_n$  se distribuyen (al menos para una subsucesión) como los puntos extremos de los polinomios de Chebyshev. De hecho, para cualquier  $\nu > 0$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{1/2-\nu} \cdot \max_{0 \leq i \leq n+1} |\hat{x}_i^{(n)} - x_i^{(0)}| = 0.$$

Finalizamos esta memoria con una implementación en Matlab [6] del algoritmo de Remez y una ilustración de dicho algoritmo en una serie de ejemplos concretos que recogemos en las Figuras 2.1-2.3 en las que comparamos, para diversas funciones en intervalos dados, el ajuste polinómico por mínimos cuadrados del capítulo 1 con el ajuste polinómico uniforme tratado en este segundo capítulo.

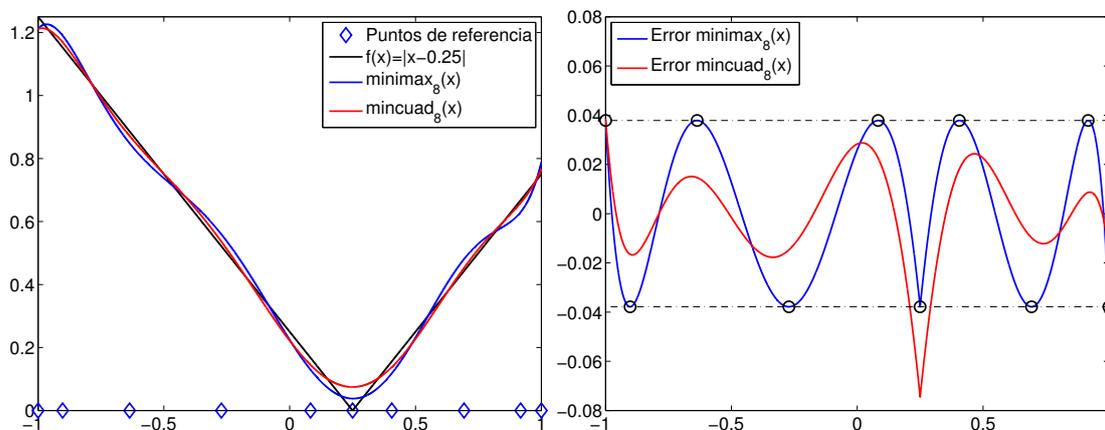


Figura 2.1. Ajuste polinómico de grado 8 por mínimos cuadrados y minimax (izquierda) y error en los ajustes (derecha) para  $f(x) = \text{abs}(x - 0.25)$  en  $[-1, 1]$ .

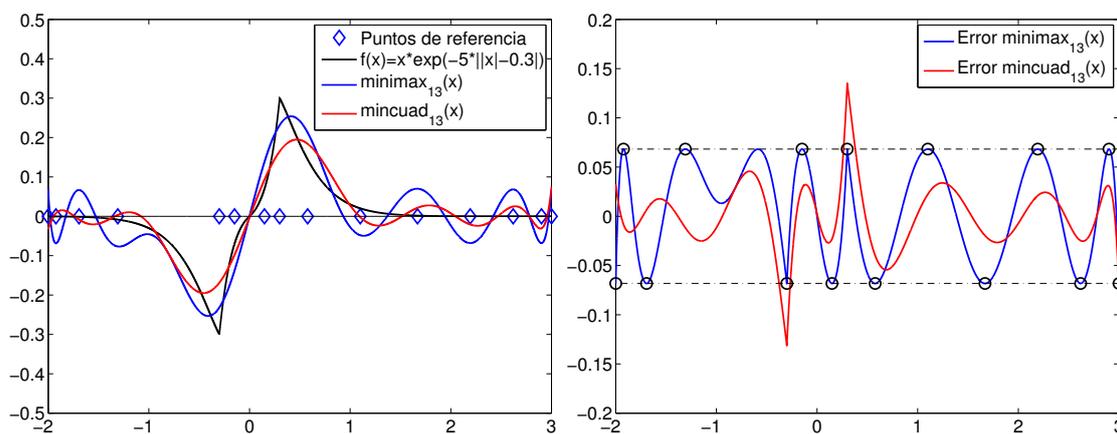


Figura 2.2. Ajuste polinómico de grado 13 por mínimos cuadrados y minimax (izquierda) y error en los ajustes (derecha) para  $f(x) = x \cdot e^{-5|x| - 0.3}$  en  $[-2, 3]$ .

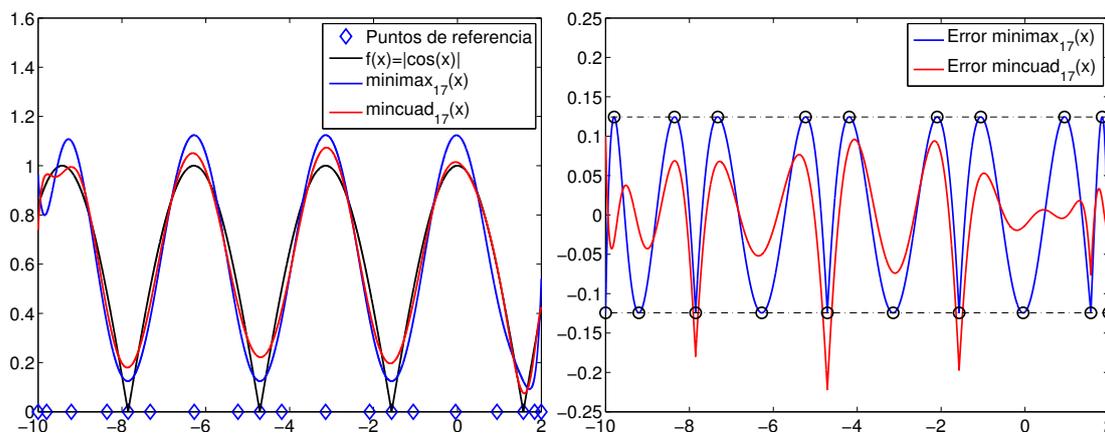


Figura 2.3. Ajuste polinómico de grado 17 por mínimos cuadrados y minimax (izquierda) y error en los ajustes (derecha) para  $f(x) = \text{abs}(\cos(x))$  en  $[-10, 2]$ .

```

1 function principal
2 format short e
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%   Introducción de datos   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 a=-10; b=2; % Intervalo
5 f=@(x) abs(cos(x)); % Función a aproximar
6 M=17; % Grado del polinomio minimax
7 itmax=500; % Límite de iteraciones de Remez
8 errtol=5.e-12; % Δ: Tolerancia de error en la desviación mínima
9 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10
11 fprintf('Ajuste polinómico de grado %i \n',M)
12 f=@(x) f((a+b)/2+(b-a)/2*x); % Transformación de [a,b] a [-1,1]
13 x=-1:1.e-4:1; % Intervalo completo para gráficas
14 y=f(x);
15
16 % Ejecución del algoritmo de Remez
17 [xx,errminimax,error,pminimax,iter,Ez,A]=remez(f,x,y,M,itmax,errtol);
18 xx=(a+b)/2+(b-a)/2*xx;
19
20 % Presentación de resultados en gráficas
21 figure(1) % Gráfica del error minimax en el intervalo
22 set(gca,'FontName','Arial','FontWeight','Bold','FontSize',16);
23 plot((a+b)/2+(b-a)/2*x,Ez*ones(size(x)),'k-.',...
24      (a+b)/2+(b-a)/2*x,-Ez*ones(size(x)),'k-.')
25 hold on
26 plot(xx,errminimax,'ro','MarkerSize',10,'LineWidth',1.5)
27 hold on
28 plot((a+b)/2+(b-a)/2*x,error,'b-','LineWidth',1.5)
29 title(['Error minimax de grado ',num2str(M), ' en el intervalo'])
30 axis tight
31 hold on
32 print('-depsc2','errminimax.eps')
33
34 figure(2) % Gráfica del polinomio minimax
35 set(gca,'FontName','Arial','FontWeight','Bold','FontSize',16);
36 plot(xx,0*ones(size(xx)),'rd','MarkerSize',10,'LineWidth',1.5) % ...
37     Nodos de referencia sobre el eje OX
38 hold on
39 plot((a+b)/2+(b-a)/2*x,y,'k','LineWidth',1.5) % Gráfica de la ...
40     funcion a ajustar
41 hold on
42 plot((a+b)/2+(b-a)/2*x,pminimax,'b','LineWidth',1.5) % Gráfica ...
43     del polinomio minimax
44 legend('Puntos de ...
45     referencia','f(x)', ['minimax-{' ,num2str(M), '} (x)'])
46 legend show
47 plot((a+b)/2+(b-a)/2*x,0*ones(size(x)),'k') % Eje OX
48 hold on
49 title(['Gráfica de la función y del polinomio minimax de grado ...
50     ',num2str(M)])
51 axis tight
52 hold off
53 print('-depsc2','minimax.eps')

```

```

50 % Presentación de resultados en pantalla
51 fprintf('Equioscilación máxima alcanzada en la iteración %i\n', iter)
52     fprintf('E=%d\n', -Ez)
53 disp('Nodos con equioscilación máxima')
54     disp(xx)
55 disp('Error en los nodos con equioscilación máxima')
56     disp(errminimax)
57 fprintf('Coeficientes en potencias de x del polinomio minimax de ...
58     grado %i (de menor a mayor grado)\n',M)
59     disp(flip(A)')
60 end % function principal
61 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
62 % ALGORITMO DE REMEZ (EN [-1,1])
63 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
64
65 function ...
66     [xx,errminimax,error,pminimax,iter,Ez,A]=remez(f,x,y,M,itmax,errtol)
67 % Inicialización del conjunto de nodos de referencia
68 % Elegimos M+2 nodos de Chebyshev en [-1,1] ordenados de menor a mayor
69 xx=sort(cos((0:M+1)*pi/(M+1)));
70 yy=f(xx);
71 m1=(-1).^(0:M+1); % Vector de signos para la interpolación
72
73 iter=1;
74 disp('      iter      maxerrnodos      Δerr')
75 for i=1:itmax
76     % Cálculo de los coeficientes del polinomio minimax en potencias de x:
77     V=flipplr(vander(xx));
78     V=[m1' V(:,1:end-1)];
79     A=V\yy';
80     A=A(2:end);
81     A=flip(A); % Coeficientes del polinomio de mayor a menor grado para ...
82     polyval
83
84 % Iteración del polinomio de ajuste
85 pol=@(x) polyval(A,x);
86 % Error puntual con signo
87 err=@(x) f(x)-pol(x);
88 % Valor absoluto del error (con signo negativo para buscar mínimo ...
89     global con función interna fminbnd)
90 abserr=@(x) -abs(err(x));
91
92 % Búsqueda de máximo global para el valor absoluto del error.
93 % Usamos "fminbnd" por tramos para precisar bien y asegurar máximo ...
94     global (no solo local)
95
96 options = optimset('TolX',5.e-16,'MaxIter',5e6);% Opciones para fminbnd
97
98 z=-1; % Extremo izquierdo
99 Ez=0;
100 Ninterv=(M+2)*25; % Subdividimos [-1,1] en (M+2)*25 subintervalos y ...
101     buscamos máximo en cada uno.
102 for j=1:Ninterv
103     ei=-1+2*(j-1)/Ninterv;

```

```

99     ed=-1+2*j/Ninterv;
100     [za,Eza]=fminbnd(abserr,ei,ed,options);
101     if abs(Eza)>abs(Ez)
102         z=za; Ez=Eza;
103     end
104 end
105
106 maxerr=-Ez; % Máximo del valor absoluto del error en todo el intervalo
107 errz=err(z); % Error con signo en z
108 errminimax=err(xx); % Error en todos los M+2 nodos de referencia
109 Δerr=maxerr-min(abs(errminimax)); % Cota de error obtenida en la ...
    desviación mínima
110
111 disp([iter maxerr Δerr])
112
113 % Si se ha alcanzado la cota de error en la desviación mínima, ...
    paramos y
114 % presentamos resultados
115
116 if Δerr<errtol
117     error=err(x); % Error en todo el intervalo
118     pminimax=y-err(x); % Aproximación al polinomio minimax en todo ...
        el intervalo
119     return
120 end
121
122 % Si no se ha alcanzado errtol, z debe entrar en el conjunto de M+2
123 % nodos de manera ordenada
124
125 fz=f(z);
126
127 if z<xx(1) % z menor que el primer nodo del sistema de referencia
128     if errminimax(1)*errz>0 % Entra z en primera posición y sale xx(1)
129         xx=[z xx(2:end)];
130         yy=[fz yy(2:end)];
131     else % Entra z en primera posición y sale xx(end)
132         xx=[z xx(1:end-1)];
133         yy=[fz yy(1:end-1)];
134     end
135
136 elseif z>xx(end) % z mayor que el último nodo del sistema de ...
    referencia
137     if errminimax(end)*errz>0 % Entra z en última posición y sale ...
        xx(end)
138         xx=[xx(1:end-1) z];
139         yy=[yy(1:end-1) fz];
140     else % Entra z en última posición y sale xx(1)
141         xx=[xx(2:end) z];
142         yy=[yy(2:end) fz];
143     end
144
145 else % z entre dos nodos x(jj) y x(jj+1) del sistema de referencia. ...
    Buscamos jj.
146     jj=1;
147     while jj≤M+1

```

```
148     if xx(jj)<z && xx(jj+1)>z
149         if errminimax(jj)*errz>0 % Entra z en posición jj y sale ...
150             xx(jj)
151             xx=[xx(1:jj-1) z xx(jj+1:end)];
152             yy=[yy(1:jj-1) fz yy(jj+1:end)];
153         else % Entra z en posición jj+1 y sale xx(jj+1)
154             xx=[xx(1:jj) z xx(jj+2:end)];
155             yy=[yy(1:jj) fz yy(jj+2:end)];
156         end
157         jj=M+2; % Si se ha localizado jj, ponemos jj=M+2 para ...
158             salir del bucle while
159     end
160     jj=jj+1;
161 end % if
162 iter=iter+1; % Nueva iteración si no se ha alcanzado errtol
163
164 end % for i=1:itmax
165
166 end % function remez
```

---

## Bibliografía

- [1] **E.W. Cheney**, *Introduction to approximation theory*, McGraw Hill, New York (1966).
- [2] **G. Dahlquist, A. Björck**, *Numerical methods in scientific computing. Volume I*, SIAM (2008).
- [3] **P.J. Davis**, *Interpolation and approximation*, Dover publications, New York (1975).
- [4] **W. Gautschi**, *Numerical analysis. An introduction*, Birkhäuser Boston (1997).
- [5] **G. Hämmerlin, K.H. Hoffmann**, *Numerical mathematics*, Springer-Verlag, New-York (1991).
- [6] **D.J. Higham, N.J. Higham**, *Matlab guide*, SIAM (2016).
- [7] **G. Meinardus**, *Approximation of functions: theory and numerical methods*, Springer (1967).
- [8] **R. Plato**, *Concise numerical mathematics*, American Mathematical Society (2003).
- [9] **E. Süli, D. Mayers**, *An introduction to numerical analysis*, Cambridge University Press (2008).
- [10] **L.N. Trefethen**, *Approximation theory and approximation practice*, SIAM (2019).



# Least squares and uniform polynomial approximation.

## Abstract

This report aims to deepen the study of polynomial approximation in normed spaces. To begin with, we will develop the study of polynomial least squares approximation. First step will be to introduce concepts such as pre-Hilbert space or Gram matrix, after that crucial results for our project will be presented and applications for discrete and continuous cases will be shown. We will delve into orthogonal polynomials to start with the second chapter in which approach to normed spaces will be developed. In this chapter, results and conditions for the existence and uniqueness of the best approximation in normed spaces will be obtained, with a strong focus on uniform norm. To conclude this project, the "Remez Algorithm" will be presented as a recursive algorithm for obtaining the best uniform polynomial approximation and we will finish with its implementation in MATLAB by displaying concrete examples.

## 1. Introduction

We study polynomial least squares and uniform fit. Let us consider the continuous case:

■ **Continuous least squares polynomial fit.** We consider the continuous weighted euclidean norm in  $C([a, b])$  associated with a continuous and positive weight function  $w(x)$ . Find  $\hat{p} \in \Pi_n$  such that

$$\|f - \hat{p}\|_{2,w} = \left( \int_a^b (f(x) - \hat{p}(x))^2 w(x) dx \right)^{1/2} \text{ is minimum.}$$

■ **Continuous uniform polynomial fit.** Given  $f \in C([a, b])$  find a polynomial  $\hat{p} \in \Pi_n$  such that

$$\|f - \hat{p}\|_{\infty} = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \hat{p}(x)| \text{ is minimum.}$$

## 2. Least squares approximation

**Best approximation problem in pre-Hilbert spaces.** Let  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  be a pre-Hilbert space,  $f \in V$  and  $H$  a finite dimensional vector subspace of  $V$ . We are going to show that there exists a unique  $\hat{f} \in H$  such that  $\|f - \hat{f}\| \leq \|f - h\|, \forall h \in H$ , that is,

$$\|f - \hat{f}\| = \min_{h \in H} \|f - h\|,$$

where  $\|\cdot\|$  is the induced norm  $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \forall f \in V$  by the inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Therefore, we say that  $\hat{f}$  is the best approximation of  $f$  in  $H$  with respect to the inner product norm, or also, the best approximation by *least squares* of  $f$  in  $H$ . Here are some results that ensure the existence and uniqueness:

**Theorem:** Let be  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  a pre-Hilbert space,  $f \in V$  and  $H$  a subspace vector of  $V$ .  $\hat{f} \in H$  is a better approximation of  $f$  in  $H$  if and only if  $\langle f - \hat{f}, h \rangle = 0, \forall h \in H$ . In that case,

$$\|f - \hat{f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\hat{f}\|^2.$$

Moreover, if  $\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in H$  are better approximations of  $f$  in  $H$  then  $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ .

**Theorem:** Let be  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  a pre-Hilbert space,  $f \in V$  and  $H$  a subspace vector of  $V$  of finite dimension  $n$ , generated by a linearly independent system of vectors  $\{h_i\}_{i=1}^n$ . Then, there exists  $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  absolute minimum for the function

$$d(\alpha) = \|f - \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, h_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle h_i, h_j \rangle,$$

with  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ . Furthermore, for all  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  we have that  $d(\alpha) = d(\hat{\alpha}) + (\alpha - \hat{\alpha})^T G (\alpha - \hat{\alpha})$ , where  $G = (\langle h_i, h_j \rangle)_{i,j=1}^n$  the Gram matrix associated with the system  $\{h_i\}_{i=1}^n$ .

## 3. Uniform approximation.

The best uniform polynomial approximation is characterized by:  
**Theorem:** Let  $f \in C([a, b])$ ,  $p \in \Pi_n$   $\epsilon := f - p$ . If there are  $n + 2$  points  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  in  $[a, b]$  verifying the condition of alternation of signs  $\text{sign}(\epsilon(x_i)) = (-1)^i \text{sign}(\epsilon(x_0))$  and of equioscillation

$$|\epsilon(x_i)| = |f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\|_{\infty}, i = 0, \dots, n + 1,$$

then  $p$  is a best uniform approximation of  $f$  in  $\Pi_n$ .

We present a few results that show existence and uniqueness.

**Chebyshev equioscillation theorem:** Let  $f \in C([a, b])$ ,  $p \in \Pi_n$  and  $\epsilon := f - p$ . If  $p$  is a best uniform approximation of  $f$  in  $\Pi_n$ , then there are at least  $n + 2$  points  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$  in  $[a, b]$  verifying the conditions of alternation of signs and of equioscillation  $|\epsilon(x_i)| = |f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\|_{\infty}$ .

**Corollary:** Let  $f \in C([a, b])$ . There is a unique  $p \in \Pi_n$  best approximation for  $f$  in uniform norm.

The following result shows uniform convergence of the approximants generated by the Remez Algorithm.

**Theorem:** Let  $f \in C([a, b])$  and  $\hat{p}_n$  the best uniform approximation of  $f$  on  $\Pi_n$ . If  $\{p^{(k)}\}_{k \geq 0}$  is the sequence of polynomials obtained by Remez algorithm, starting from an initial reference set  $x_0^{(0)} < \dots < x_{n+1}^{(0)}$  such that  $\min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - p^{(0)}(x_i^{(0)})| > 0$ , then there are positive constants  $C$  and  $0 < \theta < 1$  such that  $\|p^{(k)} - \hat{p}_n\|_{\infty} \leq C\theta^k, k \geq 0$ .

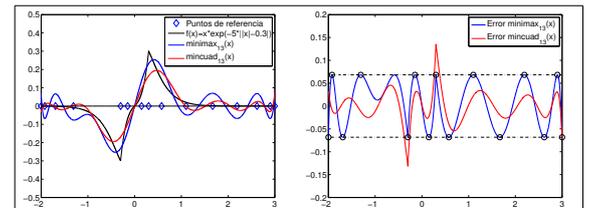


Figure 1: Least squares and minimax polynomial fit of degree 13 (left) and errors (right) for  $f(x) = x \cdot e^{-5|x|^{-0.3}}$  in  $[-2, 3]$ .

## References

- [1] E.W. Cheney, *Introduction to approximation theory*, McGraw Hill, New York (1966).
- [2] P.J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover publications, New York (1975).
- [3] G. Hämmerlin, K.H. Hoffmann, *Numerical mathematics*, Springer-Verlag, New-York (1991).
- [4] L.N. Trefethen, *Approximation theory and approximation practice*, SIAM (2019).