

Eduardo Jiménez Calzadilla

*Cuasi-ortogonalidad y fórmulas de  
cuadratura positivas en el eje real*

Quasi-orthogonality and positive quadrature  
formulas on the real line

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Mes de Año

DIRIGIDO POR  
*Ruymán Cruz Barroso*

*Ruymán Cruz Barroso*

*Departamento de Análisis  
Matemático*

*Universidad de La Laguna*

*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

A mi tutor, Ruymán Cruz Barroso, por su cercanía, dedicación, paciencia y pasión que ha demostrado en la dirección del proyecto, la cual ha sido fundamental para que el trabajo se haya concluido satisfactoriamente.

A mi familia, por preocuparse por mi educación, por confiar en mi y por ayudar a cumplir mis objetivos.

A mis amigos de la universidad, Carlos, Indira y Paola, por su apoyo incondicional y porque sin ellos esta etapa no habría sido igual, y a los compañeros de la promoción, con los que he compartido buenos momentos.

Eduardo Jiménez Calzadilla  
La Laguna, 9 de junio de 2021



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*Los polinomios cuasi-ortogonales surgen de la construcción de fórmulas de cuadratura con grados de precisión intermedios entre el de las de tipo interpolatorio y el de las fórmulas Gaussianas. A partir de una función peso  $\omega$  con soporte en el intervalo  $[a, b]$  abordamos una introducción a la Teoría de Polinomios Ortogonales (existencia y unicidad, leyes de recurrencia, propiedades de ceros, expresión determinantal, matrices de Jacobi, etc) y a la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y de tipo Gauss, como reglas de integración numérica para la estimación de integrales definidas en el intervalo  $[a, b]$  con respecto a la función peso  $\omega$ . El objetivo fundamental de este trabajo es extender dicha teoría al contexto de la cuasi-ortogonalidad, estableciendo algunas de las propiedades generales conocidas en la literatura y profundizando para los casos particulares de órdenes uno y dos. Esta Memoria finaliza con una aplicación a la caracterización de fórmulas de cuadratura positivas con nodos prefijados no necesariamente en los extremos del intervalo de integración.*

**Palabras clave:** *Polinomios Ortogonales – Cuasi-Ortogonalidad – Fórmulas de Cuadratura de tipo Interpolatorio – Fórmulas de Cuadratura de tipo-Gauss.*

## ***Abstract***

---

*Quasi-orthogonal polynomials arise from the construction of quadrature formulas with degrees of accuracy between those of interpolatory type and Gaussian rules. Starting from a weight function  $\omega$  supported on the interval  $[a, b]$  we consider an introduction to the Theory of Orthogonal Polynomials (existence and unicity, recurrence relations, properties of zeros, determinantal formula, Jacobi matrices, etc) and to the construction and characterization of quadrature formulas of interpolatory type and Gauss-type, as rules of numerical integration for the estimation of definite integrals on the interval  $[a, b]$  with respect to the weight function  $\omega$ . The main purpose of this project is to extend such theory to the context of quasi-orthogonality, establishing some of the well known general properties in the math literature and deepening in the particular cases of orders one and two. This report concludes with an application to the characterization of positive quadrature formulas with prescribed nodes, not necessarily at the endpoints of the interval of integration.*

**Keywords:** *Orthogonal Polynomials – Quasi-orthogonality – Quadrature formulas of Interpolatory type – Quadrature formulas of Gauss-type.*

---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Polinomios ortogonales y fórmulas de cuadratura positivas en el eje real</b> .....	1
1.1. Polinomios ortogonales en el eje real .....	2
1.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio .....	12
1.3. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss .....	17
<b>2. Cuasi-ortogonalidad</b> .....	23
2.1. Polinomios cuasi-ortogonales .....	23
2.2. Cuasiortogonalidad de orden 1 .....	28
2.3. Cuasiortogonalidad de orden 2 .....	36
2.4. Fórmulas de cuadratura positivas en el eje real con nodos prefijados .....	41
<b>Conclusiones</b> .....	44
<b>Bibliografía</b> .....	47
<b>Poster</b> .....	49





---

## Introducción

El concepto de cuasiortogonalidad, eje central de estudio de esta Memoria, tiene una corta historia dentro del área de la Matemática Aplicada. Fue estudiado por primera vez en 1923 por M. Riesz ([9]) en relación con *problemas de momentos*, y a continuación por L. Féjer y por J.A. Shohat en 1933 y 1937, respectivamente, en el contexto de *fórmulas de cuadratura*. El concepto de polinomio cuasiortogonal generaliza el clásico concepto de polinomio ortogonal en el eje real. Los polinomios cuasiortogonales aparecen de forma natural cuando se trata la construcción de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio de  $n$  puntos con grado de precisión  $n+k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  (el caso  $k=0$  se corresponde con las fórmulas de tipo interpolatorio, mientras que el caso  $k=n-1$  da lugar a las clásicas fórmulas de cuadratura Gaussianas).

En la Sección 1.1 se introduce una familia de polinomios con ciertas condiciones de ortogonalidad con respecto al producto interior inducido por una función peso  $\omega$ , que supondremos que tiene soporte en un intervalo  $[a, b]$  y además es estrictamente positiva en un subconjunto de  $[a, b]$  de medida no nula, garantizándose así un marco óptimo para el desarrollo de esta Memoria. Esto permite presentar algunos de los resultados más relevantes sobre polinomios ortogonales, tales como la localización y el entrelazamiento de sus ceros, leyes de recurrencia para las familias mónica y ortonormal, fórmulas de *Christoffel-Darboux* y confluente o la expresión determinantal. Para la computación eficiente de los ceros de polinomios ortogonales se demuestra una vía alternativa basada en un problema de cálculo de autovalores asociado a las correspondientes *Matrices de Jacobi*. Con el propósito de estudiar dichas propiedades en un caso particular se introduce una familia de polinomios que resulta de especial interés por sus numerosas aplicaciones en Teoría de Aproximación: los *Polinomios Ortogonales de Chebyshev de primera especie*, ortogonales con respecto a la función peso  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  en  $[-1, 1]$ , reuniéndose además algunas de las propiedades más importantes que verifican.

En la Sección 1.2 se presenta uno de los métodos numéricos más conocidos que permiten hallar de forma aproximada el valor de una integral definida en

$[a, b]$ , las *Fórmulas de Cuadratura* (F.C.), y en particular las de *Tipo Interpolatorio*, donde se toman los nodos fijos de manera arbitraria (distintos entre sí y situados en el intervalo de integración), mientras que los pesos se obtienen integrando los polinomios fundamentales de Lagrange. Posteriormente se introduce la definición de grado de precisión de una f.c. y se establece el *Teorema de Jacobi*, que sirve como nexo entre f.c. y cuasiortogonalidad.

En la Sección 1.3 se introducen las *Fórmulas Gaussianas*, que son positivas, tienen el máximo grado de precisión alcanzable, y donde los nodos y los pesos se determinan en particular empleando las *Matrices de Jacobi*. A continuación se estudian un tipo de fórmulas de cuadratura muy utilizadas en procesos numéricos, las *f.c. de Gauss-Radau* y *f.c. de Gauss-Lobatto*, en las que se fijan uno ( $x = a$  o  $x = b$ ) o dos ( $x = a$  y  $x = b$ ) nodo(s), respectivamente. Para concluir, retomamos el ejemplo de los polinomios de Chebyshev, con el fin de caracterizar las f.c. de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto asociadas.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de polinomio cuasiortogonal de orden  $r$  y se presenta un primer resultado que los caracteriza en términos de los polinomios ortogonales. Llegados a este punto, establecemos una analogía a algunos de los resultados vistos en el capítulo anterior para polinomios ortogonales que pueden ser generalizados ahora para polinomios cuasiortogonales. Hablamos de propiedades tales como el número de ceros en el soporte de la función peso, la ley de recurrencia o la expresión determinantal.

La Sección 2.2. está dedicada al estudio de los polinomios cuasiortogonales de orden 1. En este caso particular podemos profundizar más en los resultados generales de la sección anterior. Así por ejemplo, en cuanto a la localización de ceros, somos capaces de caracterizar cuándo serán todos distintos entre sí y localizados en  $(a, b)$  en términos de la función racional  $f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ . Además, demostramos propiedades de entrelazamiento de ceros que involucran a dos polinomios cuasi-ortogonales de grados consecutivos y a polinomios cuasi-ortogonales con polinomios ortogonales.

La Sección 2.3. se corresponde con un estudio paralelo para el caso de cuasiortogonalidad de orden 2 enfocado fundamentalmente a propiedades sobre localización y entrelazamiento de ceros.

Este trabajo concluye finalmente en la Sección 2.4 con una aplicación de los resultados de las dos secciones anteriores a la construcción de f.c. positivas con máximo grado de precisión y uno o dos nodos prefijados, no necesariamente en los extremos del intervalo de integración.

## Polinomios ortogonales y fórmulas de cuadratura positivas en el eje real

El concepto de polinomio cuasiortogonal, tema central de estudio de esta Memoria, generaliza el clásico concepto de polinomio ortogonal, y aparece de manera natural cuando se aborda la construcción de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio de  $n$  puntos con grado de precisión  $n + k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$  (el caso  $k = 0$  se correspondería con las fórmulas de tipo interpolatorio, donde no se impone condición alguna a los nodos salvo que sean distintos entre sí y se encuentren en el intervalo de integración, mientras que el caso  $k = n - 1$  daría lugar a las clásicas fórmulas de cuadratura Gaussianas).

El objetivo de esta Memoria es por tanto introducir una familia de polinomios con ciertas condiciones de ortogonalidad, que generaliza la Teoría de Polinomios Ortogonales en el Eje Real. Se hace necesario por tanto introducir un primer capítulo en el que abrodaremos aquellos resultados necesarios sobre ortogonalidad y fórmulas de cuadratura positivas en el eje real, que serán posteriormente generalizados, en su mayoría.

Este primer capítulo profundiza parte de la teoría estudiada en la asignatura de *Métodos Numéricos II*<sup>1</sup> sobre polinomios ortogonales con respecto a una función peso. A lo largo del capítulo consideraremos, para nuestros propósitos, una función peso  $\omega$  con soporte un intervalo  $[a, b]$  que podría ser finito o infinito:  $\omega(x) \geq 0$  con  $x \in [a, b]$  y  $\omega(x) > 0$  en  $A \subset [a, b]$  con  $\mu(A) > 0$ , siendo  $\mu$  la medida de Lebesgue. El producto interior que induce la función peso  $\omega$  será por tanto definido positivo. También, salvo que se diga lo contrario, se supondrá que los productos  $x^k \omega(x)$  son integrables en  $[a, b]$ , para todo  $k \geq 0$ . Nuestro enfoque de partida se podría llevar a cabo de manera más general si consideráramos una medida positiva de Borel, o incluso, tal y como se afronta por ejemplo en [3], definiendo el concepto de familias de polinomios ortogonales a partir de un funcional lineal de momentos. Nuestro punto de partida se corresponde con un funcional lineal de momentos definido positivo, lo cual garantiza la existencia de familias de polinomios reales ortogonales con respecto a  $\omega$  y que los momentos sean reales (véase [3, Teorema 3.3]).

---

<sup>1</sup> Véase [https://www.u11.es/apps/guias/guias/view\\_guide/22198/](https://www.u11.es/apps/guias/guias/view_guide/22198/).

## 1.1. Polinomios ortogonales en el eje real

Sea  $\omega$  una función peso definida en un intervalo  $[a, b]$  y consideremos el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  inducido por  $\omega$ , dado por  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$ , donde

$$f, g \in L_2^\omega([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / \int_a^b f^2(x)\omega(x)dx < \infty \right\}.$$

Nótese que  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ , y que el producto interior induce la norma  $\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Comenzamos con la siguiente

**Definición 1** Para  $n \geq 0$  se define el  $n$ -ésimo momento con respecto a la función peso  $\omega$  según

$$c_n := \langle x^n, 1 \rangle = \int_a^b x^n \omega(x) dx.$$

Obsérvese que  $c_0 > 0$ . Cuando  $c_0 = 1$  se dice que  $\omega$  es una medida de probabilidad.

Del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a la sucesión linealmente independiente de monomios  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  obtenemos una familia de polinomios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  verificando

- El grado de  $P_n$  es exactamente  $n$ ,  $\forall n = 0, 1, \dots$
- $\langle P_i, P_j \rangle = \delta_{i,j}$  (símbolo delta de Kronecker),  $\forall i, j = 0, 1, \dots$

A esta familia se le conoce como una *sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la función peso  $\omega$* , que es única salvo factor multiplicativo. Esa constante se puede elegir convenientemente para obtener dos familias particulares:

- Familia de polinomios mónicos, que denotaremos por  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ .
- Familia de polinomios ortonormales, que denotaremos por  $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^\infty$ , y que verifica  $\| \tilde{p}_n \|^2 = \langle \tilde{p}_n, \tilde{p}_n \rangle = 1$ .

De manera genérica, una familia de polinomios ortogonales con respecto a  $\omega$  será denotada por  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ . También, la relación entre las familias mónicas y ortonormales viene dada por  $\tilde{p}_n = \frac{p_n}{\|p_n\|}$ .

En la asignatura *Métodos Numéricos II*<sup>2</sup>, ubicada en el segundo cuatrimestre del tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna, se considera la construcción de familias de polinomios ortogonales con respecto a una función peso, las cuales permiten afrontar la resolución de ciertos problemas en Teoría de Aproximación como son la mejor aproximación en mínimos cuadrados continúa, el error en la interpolación polinómica, o la construcción de

<sup>2</sup> Véase [https://www ull es/apps/guias/guias/view\\_guide/22198/](https://www ull es/apps/guias/guias/view_guide/22198/).

fórmulas de cuadratura sobre el eje real con máximo dominio de exactitud polinómica. A continuación enunciaremos las propiedades más relevantes que satisfacen tales familias de polinomios ortogonales que serán esenciales para nuestros propósitos, pero omitiremos las demostraciones por haber sido abordadas ya en dicha asignatura.

**Teorema 1 (Localización de ceros)** *El polinomio  $P_n$  tiene sus  $n$  ceros reales, distintos y están situados en el intervalo abierto  $(a, b)$ .*

**Teorema 2 (Ley de recurrencia, familia mónica)** *La familia de polinomios ortogonales mónicos  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  puede computarse recursivamente mediante la ley de recurrencia a tres términos*

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 0, \quad (1.1)$$

siendo  $p_{-1}(x) \equiv 0$ ,  $p_0(x) \equiv 1$  y  $\forall n \geq 0$  y  $\forall m \geq 1$ ,

$$\alpha_n = \frac{\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle}, \quad \beta_m = \frac{\langle p_m(x), p_m(x) \rangle}{\langle p_{m-1}(x), p_{m-1}(x) \rangle} > 0.$$

**Teorema 3 (Ley de recurrencia, familia ortonormal)** *La familia de polinomios ortonormales  $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$  puede computarse recursivamente mediante la ley de recurrencia a tres términos*

$$\tilde{p}_{n+1}(x) = (\gamma_n x - \delta_n)\tilde{p}_n(x) - \eta_n \tilde{p}_{n-1}(x), \quad \forall n \geq 0,$$

siendo  $\tilde{p}_{-1}(x) \equiv 0$ ,  $\tilde{p}_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{c_0}}$  y  $\forall n \geq 0$  y  $\forall m \geq 1$ ,

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle}} > 0, \quad \delta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\sqrt{\langle p_n, p_n \rangle \cdot \langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle}}, \quad (1.2)$$

$$\eta_m = \frac{\langle p_m, p_m \rangle}{\sqrt{\langle p_{m-1}, p_{m-1} \rangle \cdot \langle p_{m+1}, p_{m+1} \rangle}}.$$

**Teorema 4** *Si  $[a, b] = [-\alpha, \alpha]$  y  $\omega(x) = \omega(-x)$ , entonces  $p_{2n}$  solo tiene potencias pares y  $p_{2n+1}$  solo tiene potencias impares.*

En las hipótesis del Teorema 4, se sigue que el parámetro  $\alpha_n$  definido en el Teorema 2 será siempre nulo. Esto se debe a que

$$\langle x \cdot p_n, p_n \rangle = \int_{-\alpha}^{\alpha} xp_n^2(x)\omega(x)dx = 0,$$

al ser el integrando una función impar en  $[-\alpha, \alpha]$ . Consideremos ahora la siguiente

**Definición 2** 1. Se dice que  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert si  $(X, d)$  es espacio métrico completo, donde  $d$  se define como  $d(x - y) = \|x - y\|$ , siendo  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

2. Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert (de funciones complejas, en general) definidas en  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Diremos que  $\mathcal{K}_\omega(z) = \mathcal{K}(z, \omega)$  es un núcleo reproductor si:

- $\mathcal{K}_\omega(z) \in \mathcal{H}$  para todo  $\omega \in X$ ,
- $\langle f, \mathcal{K}_\omega \rangle = f(\omega)$  para todo  $\omega \in X$  y  $f \in \mathcal{H}$ .

Es bien sabido que si  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert separable y  $\{\tilde{p}_k\}_{k \in \Gamma}$  una base ortonormal, entonces el único núcleo reproductor viene dado por<sup>3</sup>

$$\mathcal{K}(z, \omega) = \sum_{k \in \Gamma} \tilde{p}_k(z) \overline{\tilde{p}_k(\omega)}. \quad (1.3)$$

Si consideramos el caso particular  $\mathcal{H} = \mathbb{P}_n$ , con el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  inducido por la función peso  $\omega$  en  $[a, b]$ , tomamos  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^n$  como base ortonormal de  $\mathbb{P}_n$  y consideramos funciones evaluadas reales, se deduce de (1.3) que el único núcleo reproductor viene dado por

$$\mathcal{K}(x, t) = \mathcal{K}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x) \tilde{p}_k(t), \quad (1.4)$$

el cual verifica  $\langle f, \mathcal{K}_n \rangle = \int_a^b f(x) \mathcal{K}_n(x, t) \omega(x) dx = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\forall f \in \mathbb{P}_n$ .

Ahora bien, tomando como referencia la ley de recurrencia de polinomios ortonormales (Teorema 3), y definiendo de (1.2) las cantidades  $a_n = \frac{1}{\gamma_{n-1}} > 0$  y  $b_n = \frac{\delta_n}{\gamma_n}$ , podemos escribir alternativamente esta ley de recurrencia como

$$x\tilde{p}_n(x) = a_{n+1}\tilde{p}_{n+1}(x) + b_n\tilde{p}_n(x) + a_n\tilde{p}_{n-1}(x).$$

Si multiplicamos a ambos lados por  $\tilde{p}_n(y)$  se tiene que

$$x\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_n(y) = a_{n+1}\tilde{p}_{n+1}(x)\tilde{p}_n(y) + b_n\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_n(y) + a_n\tilde{p}_{n-1}(x)\tilde{p}_n(y),$$

y si intercambiamos las variables  $x$  e  $y$  resulta

$$y\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_n(y) = a_{n+1}\tilde{p}_{n+1}(y)\tilde{p}_n(x) + b_n\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_n(y) + a_n\tilde{p}_{n-1}(y)\tilde{p}_n(x).$$

Finalmente, si restamos las dos expresiones anteriores se llega a que si  $x \neq y$ , entonces

<sup>3</sup> Dicho resultado se demuestra en la asignatura *Análisis Funcional*, del primer cuatrimestre del cuarto curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna, por lo que no respecta a esta Memoria realizar la demostración del mismo.

Véase [https://www.ull.es/apps/guias/guias/view\\_guide/22185/](https://www ull es/apps/guias/guias/view_guide/22185/).

$$\begin{aligned}
 & (x - y)\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_n(y) \\
 &= a_{n+1}[\tilde{p}_{n+1}(x)\tilde{p}_n(y) - \tilde{p}_n(x)\tilde{p}_{n+1}(y)] - a_n[\tilde{p}_n(x)\tilde{p}_{n-1}(y) - \tilde{p}_{n-1}(x)\tilde{p}_n(y)].
 \end{aligned}$$

Si sumamos sobre  $n$  a la derecha y a la izquierda de la expresión anterior se obtiene una serie telescópica, puesto que se cancelan todos los términos de la misma salvo el último de ellos y el primero, que es nulo. Se deduce por tanto que

$$\sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x)\tilde{p}_k(y) = a_{n+1} \frac{\tilde{p}_{n+1}(x)\tilde{p}_n(y) - \tilde{p}_n(x)\tilde{p}_{n+1}(y)}{x - y}, \quad x \neq y. \quad (1.5)$$

Combinando (1.4) y (1.5) se sigue la conocida *Identidad de Christoffel-Darboux*:

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x)\tilde{p}_k(y) = a_{n+1} \frac{\tilde{p}_{n+1}(x)\tilde{p}_n(y) - \tilde{p}_n(x)\tilde{p}_{n+1}(y)}{x - y}, \quad x \neq y.$$

Haciendo ahora tender  $y$  a  $x$  se obtiene la conocida *Fórmula Confluente*,

$$\mathcal{K}_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k^2(x) = a_{n+1} [\tilde{p}'_{n+1}(x)\tilde{p}_n(x) - \tilde{p}'_n(x)\tilde{p}_{n+1}(x)], \quad (1.6)$$

que permite probar el siguiente

**Teorema 5 (Entrelazamientos de ceros de polinomios ortogonales)** *Los ceros de los polinomios ortogonales  $P_n$  y  $P_{n-1}$  se entrelazan, es decir, si  $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$  denota los ceros de  $P_n$ , entonces*

$$x_{1,n} < x_{1,n-1} < x_{2,n} < x_{2,n-1} < \cdots < x_{n-1,n} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}. \quad (1.7)$$

Veamos a continuación una manera eficiente para el cálculo de los ceros de polinomios ortogonales. Para ello, observamos que la ley de recurrencia para la familia de polinomios ortonormales (1.5) podemos expresarla en la forma

$$x\mathbf{P}(x) = J_n\mathbf{P}(x) + a_n\tilde{p}_n(x)e_n, \quad (1.8)$$

donde

$$J_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0(x) \\ \tilde{p}_1(x) \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n-2}(x) \\ \tilde{p}_{n-1}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

Obsérvese que el sumando  $a_n\tilde{p}_n(x)e_n$  afecta únicamente a la última ecuación de (1.8). La matriz  $J_n$ , que es de dimensión  $n$ , tridiagonal y simétrica, recibe el

nombre de *Matriz de Jacobi*. Particularizando en  $x = x_j$  ( $j$ -ésimo cero de  $\tilde{p}_n$ ) se tiene que

$$x_j \mathbf{P}(x_j) = J_n \mathbf{P}(x_j), \quad (1.10)$$

siendo

$$\mathbf{P}(x_j) = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0(x_j) \\ \tilde{p}_1(x_j) \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n-2}(x_j) \\ \tilde{p}_{n-1}(x_j) \end{pmatrix} \neq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Que  $\mathbf{P}(x_j) \neq 0$  se deduce, bien porque  $\tilde{p}_0(x_j) = \frac{1}{\sqrt{c_0}} > 0$  (primera componente del vector), o bien por la propiedad de entrelazamiento de ceros:  $\tilde{p}_{n-1}(x_j) \neq 0$  (última componente del vector). Concluimos de (1.10) que los ceros de  $P_n$  son precisamente los autovalores de la matriz de Jacobi  $J_n$ . Además, el autovector correspondiente al cero  $x_j$  viene dado por  $\mathbf{P}(x_j)$ , cuya norma (euclídea) es

$$\|\mathbf{P}(x_j)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{p}_k^2(x_j) = \mathcal{K}_{n-1}(x_j, x_j).$$

Por tanto, la primera componente del autovector normalizado asociado al autovalor  $x_j$  vendrá dada por:

$$\frac{\tilde{p}_0(x_j)}{\|\mathbf{P}(x_j)\|_2} = \frac{1}{\sqrt{c_0 \cdot \mathcal{K}_{n-1}(x_j, x_j)}}, \quad (1.11)$$

y en particular, si la función peso es una medida de probabilidad, esta cantidad será precisamente  $\mathcal{K}_{n-1}^{-1/2}(x_j, x_j)$ . Llegados a este punto nos encontramos en condiciones de probar el siguiente

**Teorema 6 (Expresión determinantal para los polinomios ortogonales)**

*El  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a  $\omega$  admite la expresión determinantal*

$$p_n(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta_{n-1} & 0 & x - \alpha_{n-1} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

*Demostración.* De las propiedades elementales de los determinantes se observa que la expresión determinantal de la ecuación (1.12) representa efectivamente un polinomio mónico de grado  $n$ . Para demostrar el resultado, tendremos en



cuenta la ley de recurrencia para polinomios ortogonales mónicos definida en (1.1). Para  $n = 1, 2$  el resultado es inmediato:

$$\begin{aligned} n = 1 : & \quad p_1(x) = x - \alpha_0, \\ n = 2 : & \quad p_2(x) = (x - \alpha_1) \cdot p_1(x) - \beta_1 \cdot p_0(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora un proceso de inducción sobre  $n$  y supongamos que la fórmula es cierta para el caso  $n - 1$ . Veamos que se cumple para  $n$ . Desarrollando el determinante con respecto a la última fila, usando (1.1) y la hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \beta_{n-1} & x - \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (x - \alpha_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} \end{vmatrix} - \beta_{n-1} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} \end{vmatrix} \\ &= (x - \alpha_{n-1}) \cdot p_{n-1}(x) - \beta_{n-1} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} \end{vmatrix} \\ &= (x - \alpha_{n-1}) \cdot p_{n-1}(x) - \beta_{n-1} \cdot p_{n-2}(x) \\ &= p_n(x), \end{aligned}$$

concluyendo así la demostración. □

**Ejemplo 1** Una de las funciones peso más conocidas y estudiadas en la literatura es  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in [-1, 1]$  cuyos polinomios ortogonales asociadas reciben el nombre de **polinomios ortogonales de Chebyshev de primera especie**. Estos polinomios vienen explícitamente dados por la expresión

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1]. \tag{1.13}$$

Los polinomios de Chebyshev resultan de especial interés por las numerosas aplicaciones que poseen en Teoría de Aproximación (por ejemplo, sus ceros representan nodos óptimos en procesos de interpolación polinómica). Por esa razón,

los polinomios de Chebyshev han sido ampliamente estudiados en la literatura. A continuación, trataremos de recoger algunas de las propiedades más importantes que verifican, y que se deducen fácilmente de la definición (1.13):

- $T_n \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ , es decir, se trata de un polinomio de grado exacto  $n$ .
- La familia  $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$  cumple la ley de recurrencia a tres términos

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & \forall k \geq 1, \\ T_0(x) \equiv 1, & T_1(x) \equiv x. \end{cases} \quad (1.14)$$

- El  $n$ -ésimo polinomio mónico  $\widehat{T}_n$  viene dado por

$$\widehat{T}_n = 2^{1-n}T_n. \quad (1.15)$$

- Los ceros de  $T_n$  son simples, están localizados en  $(-1, 1)$ , y vienen determinados explícitamente por

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}, \quad \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.16)$$

- Los extremos de  $T_n$  se alcanzan en

$$y_k^{(n)} = \cos \eta_k^{(n)}, \quad \eta_k^{(n)} = \frac{k\pi}{n}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

tomando en  $y_k^{(n)}$  el valor  $(-1)^k$ .

Con carácter ilustrativo, mostraremos en las Figuras 1.1 y 1.2 un polinomio de Chebyshev de primera especie de grado impar y otro de grado par. La implementación se ha llevado a cabo empleando el software **Matlab**.

Observamos que al ser  $\omega$  una función peso simétrica y definida en un intervalo simétrico de la recta real, se cumplen las hipótesis del Teorema 4, por tanto  $T_{2n}$  y  $T_{2n+1}$  estarán formados por solo potencias pares e impares de  $x$ , respectivamente. Ambos polinomios tienen  $n$  de sus ceros en el intervalo  $(0, 1)$ , mientras que otros  $n$  se corresponden con sus valores simétricos respecto del origen. En el caso de  $T_{2n+1}$ , el valor 0 es siempre un cero del polinomio. Para realizar las construcciones de las Figuras 1.1 y 1.2 se ha tomado una distribución equiespaciada de ángulos sobre la semicircunferencia unidad superior ( $\Im(z) \geq 0$ ), se han considerado los puntos resultantes en la circunferencia unidad y a continuación se han proyectado sobre el intervalo  $(-1, 1)$ . Observamos que para  $n$  impar el valor 0 es un cero del polinomio, mientras que para  $n$  par no lo es.

Como los polinomios de Chebyshev de primera especie son ortogonales en  $[-1, 1]$  con respecto a la función peso  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , sabemos por el Teorema 3 que cumplen una ley de recurrencia a tres términos (precisamente la relación 1.14). Sin embargo, esta ley no se corresponde con la recurrencia para la familia de polinomios mónicos. Para determinarla basta con tomar (1.14) y (1.15) para deducir

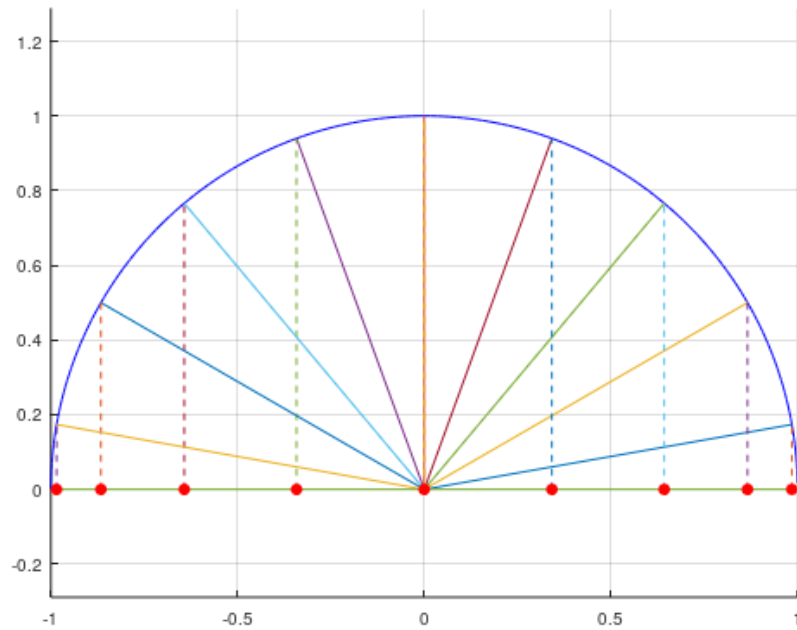


Figura 1.1. Ceros del polinomio de Chebyshev de primera especie de grado 9.

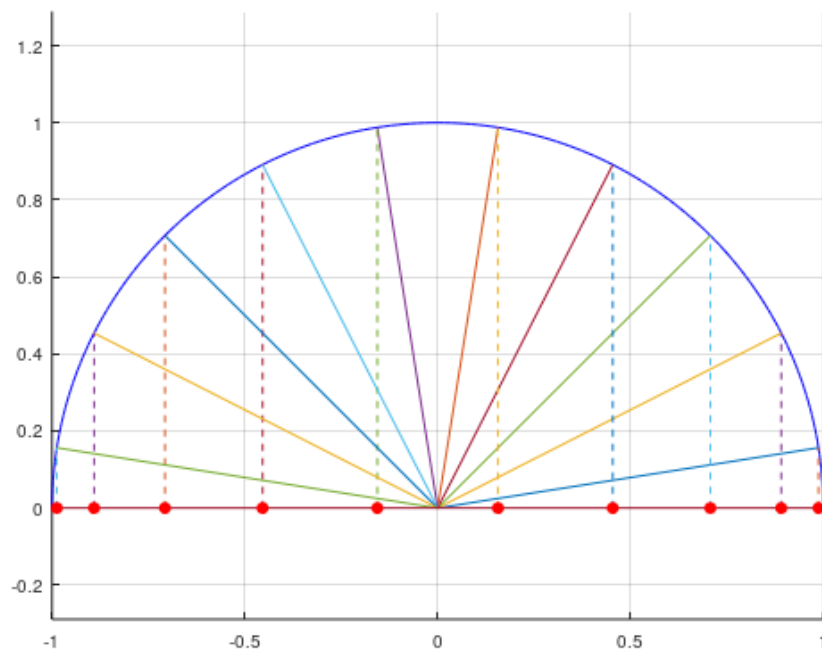


Figura 1.2. Ceros del polinomio de Chebyshev de primera especie de grado 10.

- La familia de polinomios mónicos de Chebyshev de primera especie  $\{\widehat{T}_k\}_{k=0}^{\infty}$  cumple la ley de recurrencia a tres términos

$$\begin{cases} \widehat{T}_{k+1}(x) = x\widehat{T}_k(x) - \frac{1}{4}\widehat{T}_{k-1}(x), & \forall k \geq 1. \\ \widehat{T}_0(x) \equiv 1, & \widehat{T}_1(x) \equiv x. \end{cases} \quad (1.17)$$

La ley de recurrencia (1.17) permite deducir que los coeficientes que aparecen en el Teorema 2 son  $\alpha_k = 0, \forall k \geq 0$  y  $\beta_k = \frac{1}{4}, \forall k \geq 1$ . A propósito, por el Teorema 6 podemos expresar el polinomio mónico  $\widehat{T}_n$

$$\widehat{T}_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & x & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & x \end{vmatrix}, \quad \forall n \geq 1.$$

Tratemos ahora de construir un ley de recurrencia para la familia  $\{\tilde{T}_n\}_{n=0}^\infty$  ortonormal de polinomios de Chebyshev de primera especie. Como  $\tilde{T}_n = \frac{\widehat{T}_n}{\|\widehat{T}_n\|}$ , basta con determinar el valor  $\|T_n\|$  para poder obtener la familia ortonormal. Sabemos que

$$\|T_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \cos^2(n \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

luego si aplicamos el cambio de variable  $x = \cos t$ , se tiene que  $dx = -\sin t dt$ ,  $1 - x^2 = \sin^2 t$  y además  $\begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow t = \pi \\ x = 1 \Leftrightarrow t = 0 \end{cases}$ . Por tanto se sigue que

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos^2(nt) dt = \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2nt)}{2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

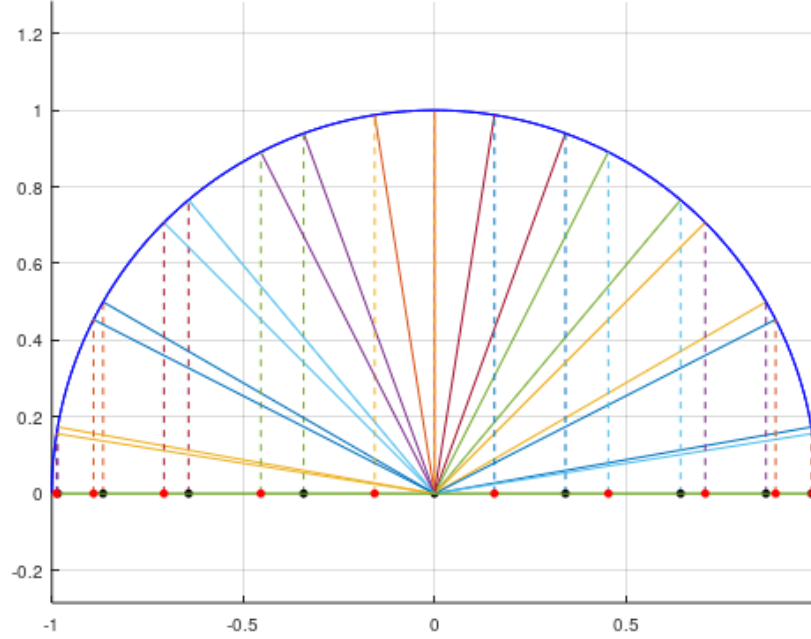
De esta manera, se concluye que  $\tilde{T}_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n$ . Es consecuencia directa de esta igualdad que la familia de polinomios ortonormales de Chebyshev de primera especie en  $[-1, 1]$  con respecto a la función peso  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  verificará la misma ley de recurrencia a tres términos que los polinomios ortogonales  $T_n$ . En efecto:

- La familia ortonormal  $\{\tilde{T}_k\}_{k=0}^\infty$  cumple la ley de recurrencia a tres términos

$$\begin{cases} \tilde{T}_{k+1}(x) = 2x\tilde{T}_k(x) - \tilde{T}_{k-1}(x), & \forall k \geq 1. \\ \tilde{T}_0(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & \tilde{T}_1(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}x. \end{cases} \quad (1.18)$$

Como aplicación del Teorema 5 sobre el entrelazamiento de ceros de polinomios ortogonales, visualizamos en la Figura 1.3 esta propiedad para los polinomios de Chebyshev  $T_9$  y  $T_{10}$ . Para ello consideramos la superposición de las Figuras 1.1 y 1.2

Para finalizar este ejemplo veremos cómo quedaría la Fórmula Confluyente para los polinomios de Chebyshev de primera especie. Partiendo de la expresión



**Figura 1.3.** Entrelazamiento de los ceros de polinomios de Chebyshev de primera especie de grados 9 y 10. Los puntos negros (rojos) representan la proyección de los ceros de  $T_9$  ( $T_{10}$ ) sobre el intervalo  $[-1, 1]$ .

del núcleo reproductor, que involucra a los polinomios ortonormales, se tiene que:

$$\mathcal{K}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \tilde{T}_k(x) \cdot \tilde{T}_k(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^n T_k(x) \cdot T_k(t),$$

y del hecho de que

$$a_{n+1} = \frac{1}{\gamma_n} = \sqrt{\frac{\langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}} = \frac{\|\widehat{T}_{n+1}\|}{\|\widehat{T}_n\|} = \frac{1}{2},$$

se deduce que la Identidad de Christoffel-Darboux será:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\widehat{T}_{n+1}(x) \cdot \widehat{T}_n(y) - \widehat{T}_n(x) \cdot \widehat{T}_{n+1}(y)}{x-y}, \quad x \neq y \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{T_{n+1}(x) \cdot T_n(y) - T_n(x) \cdot T_{n+1}(y)}{x-y}, \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Haciendo finalmente tender  $y$  a  $x$ , la Fórmula Confluyente resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(x, x) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \widehat{T}'_{n+1}(x) \cdot \widehat{T}'_n(x) - \widehat{T}'_n(x) \cdot \widehat{T}'_{n+1}(x) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[ T'_{n+1}(x) \cdot T'_n(x) - T'_n(x) \cdot T_{n+1}(x) \right]. \end{aligned}$$

Como  $T_n(x) = T_n(\cos n\theta) = \cos(n\theta)$ , se sigue de la aplicación de la Regla de la Cadena que

$$T'_n(\cos \theta) \cdot (-\sin \theta) = -\sin(n\theta) \cdot n \implies T'_n(\cos \theta) = n \cdot \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}. \quad (1.19)$$

## 1.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Un problema clásico y recurrente a lo largo de la historia de las Matemáticas consiste en hallar el valor numérico de una integral definida. Dicha disciplina se conoce como *Integración Numérica*, la cual es de especial interés dentro del área de la *Matemática Aplicada*, dado que en un gran número de procesos numéricos interviene el cálculo de integrales definidas. El problema en cuestión consiste en hallar numéricamente  $\int_a^b f(x)dx$ , el cual es evidente que queda resuelto si se conoce la primitiva  $F(x)$ , por simple aplicación del *Teorema Fundamental del Cálculo Integral*.

Ahora bien, hay ciertos contextos en los que encontrar con exactitud el valor numérico de una integral definida puede ser un proceso complejo. Por ejemplo, para la función  $f(x) = e^{-x^2}$  no existe ninguna primitiva que se pueda expresar en términos de funciones elementales. Por ello, es necesario conocer métodos numéricos que permitan hallar de forma aproximada el valor de una integral definida que posea a esta función como integrando. Pero es que además, los métodos matemáticamente sofisticados no siempre trabajan bien, e incluso si lo hacen, podría no ser ventajoso el utilizarlos. Prueba de ello es el siguiente ejemplo. Definamos la función

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^4} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left( \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[ \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2}-x} \right) + \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{2}+x} \right) \right]. \end{aligned}$$

Los métodos que parecen ser exactos se convierten en aproximados cuando se reducen a un proceso numérico. En este ejemplo, para la evaluación de la función  $F$  resulta más apropiado aplicar un método numérico que involucre sólo evaluaciones de la función  $f$  del integrando, dada la sencillez de ésta última en comparación con la de la primitiva  $F$ .

Uno de los métodos más conocidos en la literatura, y a su vez de gran sencillez conceptual, son las denominadas *Fórmulas de Cuadratura*<sup>4</sup>, en las que una integral es aproximada por una combinación lineal finita de valores del integrando. El objetivo de esta sección será estudiar en profundidad un tipo particular de f.c., conocida como *F.C. de Tipo Interpolatorio*.

<sup>4</sup> En lo que sigue, a lo largo de esta Memoria, se abreviará por “f.c.”, según el contexto, tanto “fórmula de cuadratura” como “fórmulas de cuadratura”.

Partiendo del problema inicial, escribimos:

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x)\omega(x)dx,$$

de manera que el integrando  $g$  se factoriza como producto de dos funciones, una de ellas,  $f$ , tal que pueda ser bien aproximada por polinomios, y otra función no negativa en un subconjunto  $[a, b]$  con medida de Lebesgue estrictamente positiva, es decir, una función peso  $\omega$ , integrable. El intervalo  $[a, b]$  puede ser finito o infinito, mientras que la función  $g = f\omega$  debe ser integrable en  $[a, b]$ .

Inspirados en la propia definición de integral de Riemann-Stieltjes, el siguiente paso consistirá en tratar de aproximar la integral anterior mediante una combinación lineal finita de valores de la función  $f$ , esto es,

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx \approx I_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (1.20)$$

Una vez fijado el valor  $n$ , la expresión (1.20) contiene  $2n$  parámetros a determinar, los cuales se corresponden con  $n$  nodos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $n$  pesos  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Para abordar este problema satisfactoriamente será necesario elegir adecuadamente esos parámetros de modo que la suma finita de la parte de la derecha de la ecuación (1.20) aproxime lo mejor posible a la integral de la parte de la izquierda, es decir, elegir dichos parámetros de manera que se minimize, en algún sentido, el error

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = I_\omega(f) - I_n(f). \quad (1.21)$$

Dado que el *Teorema de Aproximación de Weierstrass* asegura que toda función continua en un compacto de la recta real puede ser aproximada uniformemente por polinomios, parece razonable tratar de construir f.c. por medio de la interpolación polinómica. En las fórmulas de tipo interpolatorio, por tanto, se consideran los nodos fijos de antemano, sin ninguna imposición salvo que sean todos distintos entre sí,  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ , de manera que los parámetros a determinar en la f.c. que hacen que se minimice el error  $R_n(f)$  en (1.21) sean los  $n$  pesos. Este tipo de fórmulas reciben su nombre precisamente porque se basan en integrar exactamente el polinomio que interpola a la función  $f$  en estos nodos, prefijados de antemano. Se sigue por tanto que si conocemos una expresión explícita para los momentos  $c_k$ , el reemplazar en la integral de  $f$  en  $[a, b]$  con respecto a  $\omega$ , el integrando  $f$  por dicho polinomio interpolador, permitirá obtener de manera casi inmediata una aproximación de tal integral.

Sea

$$f(x) = p(x) + r(x). \quad (1.22)$$

Denotando por  $\pi(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$  al *polinomio nodal*, entonces podemos expresar el polinomio interpolador  $p$  en su forma de Lagrange,

$$p(x) = \sum_{k=1}^n l_{k,n}(x) f(x_k), \quad l_{k,n}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_k) \pi'(x_k)}$$

( $l_{k,n}(x)$  se conocen como los polinomios fundamentales de Lagrange, los cuales verifican  $l_{k,n}(x_j) = \delta_{j,k}$ ). Tomando integral en (1.22) resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \omega(x) dx &= \int_a^b p(x) \omega(x) dx + \int_a^b r(x) \omega(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \underbrace{\int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_k) \pi'(x_k)} \omega(x) dx}_{=A_k} + \int_a^b r(x) \omega(x) dx. \end{aligned}$$

El objetivo debe ser el de minimizar la integral del resto en la interpolación  $r$  en  $[a, b]$  con respecto a  $\omega$ . De ser así, se considera que la interpolación (1.22) es lo suficientemente precisa, por lo que la segunda integral de la expresión anterior puede ser despreciada, obteniendo por tanto (1.20), donde

$$A_k = \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_k) \pi'(x_k)} \omega(x) dx. \quad (1.23)$$

Alternativamente se podría haber elegido las constantes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  del funcional definido en (1.21), e imponer que el funcional se anule en los monomios  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ . Es fácil de comprobar que realmente estos dos procesos llevan son equivalentes.

**Proposición 1** *Teniendo en cuenta los dos métodos expuestos para obtención de las constantes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  en la f.c. (1.20):*

- *Interpolan la función  $f$  en los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  por un polinomio de grado a lo sumo  $n - 1$  e integrar el polinomio interpolador.*
- *Elegir  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de manera que el funcional  $R(f)$  definido en (1.21) se anule para  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ .*

Entonces, las dos vías para determinar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  llevan a la misma solución.

Podemos establecer la siguiente

**Definición 3** *Una fórmula del tipo (1.20) se dice que tiene grado de precisión  $k$  si integra exactamente a polinomios de grado menor o igual que  $k$ , y existe un polinomio de grado  $k + 1$  que no lo integra exactamente.*

Las f.c. de tipo interpolatorio tienen grado de precisión  $n - 1$ , al menos. Nos podríamos plantear si este grado de precisión podría incrementarse, por ejemplo,



que fuera igual a  $n$ . En ese caso, obsérvese que si consideramos  $f(x) = \pi(x)$ , entonces  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = 0$ , y por tanto debería cumplirse que  $\int_a^b f(x)\omega(x)dx = 0$ , o lo que es lo mismo, que el polinomio nodal  $\pi$  debe ser ortogonal a las constantes con respecto al producto interior inducido por la función peso  $\omega$ . Esto es algo que en general no es cierto, dado que no hemos puesto imposición alguna, por el momento, a los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en la f.c. (1.20). Realmente, está apareciendo implícitamente ya el tema central de esta Memoria, que es el concepto de *cuasi-ortogonalidad*, que introduciremos debidamente en el siguiente capítulo. Sin embargo, haberse hecho esta reflexión no ha sido en vano, ya que más adelante veremos que si elegimos los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  convenientemente, podremos obtener f.c. del tipo (1.20) que integren exactamente polinomios de grado superior a  $n - 1$ . La elección de estos nodos deben elegirse además, de manera adecuada, no solo para incrementar el grado de precisión de la f.c.  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n}f(x_{j,n})$ , sino también atendiendo a los siguientes conceptos:

1. **Estabilidad:** Los errores que pudieran aparecer en la evaluación de  $f(x_{j,n})$  interesa que permanezcan acotados. Esto motiva la definición de estabilidad de una fórmula  $I_n(f)$  en el sentido de que exista una constante  $M > 0$  que cumpla

$$\sum_{j=1}^n |A_{j,n}| \leq M.$$

2. **Convergencia:** Cuando para cada natural  $n$  tenemos una fórmula  $I_n(f)$ , interesa saber cuándo se puede asegurar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n A_{j,n}f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx = I_\omega(f),$$

para cualquier función  $f$  en una clase lo más amplia posible.

Para el caso de una sucesión de fórmulas de tipo interpolatorio, en la asignatura *Métodos Numéricos II* se demostró que ambos conceptos eran equivalentes en el espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo finito  $[a, b]$ .

**Teorema 7** Sea  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_{j,n}f(x_{j,n})$  una sucesión de fórmulas de tipo interpolatorio (con intervalo  $[a, b]$  finito). Entonces,  $I_n(f)$  converge a  $I_\omega(f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{C}([a, b])$ , sí y sólo sí, existe  $M > 0$  tal que  $\sum_{j=1}^n |A_{j,n}| \leq M$ ,  $\forall n \geq 1$ .

En general, los pesos  $A_{j,n}$  de una f.c. no son siempre cantidades positivas, algo que resulta de gran interés, pues en ese caso, la estabilidad y la convergencia (para integrandos continuos) queda garantizada al ser la f.c. exacta para las funciones constantes:

$$\sum_{j=1}^n |A_{j,n}| = \sum_{j=1}^n A_{j,n} = c_0 = \int_a^b \omega(x)dx < \infty.$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, un propósito que será muy importante para el desarrollo de esta Memoria será el de construir f.c. con el máximo grado de precisión y que tengan coeficientes positivos<sup>5</sup>.

Si planteamos ahora la posibilidad de construir f.c. de tipo interpolatorio en la que la elección de los nodos no sea arbitraria, sino de alguna manera adecuada que permita maximizar el grado de precisión de la f.c., tendríamos un total de  $2n$  parámetros por determinar, lo que induce a pensar que el grado de precisión máximo que una f.c. puede tener es  $2n - 1$  (es decir, que integre exactamente al espacio vectorial  $\mathbb{P}_{2n-1}$ , cuya dimensión coincide con el número de parámetros a determinar, esto es,  $2n$ ). Es más, el grado de precisión de una f.c. nunca podrá ser  $2n$ , basta con observar que la función  $f(x) = \pi^2(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})^2 \in \mathbb{P}_{2n}$  cumple  $I_n(f) = 0$  e  $I_\omega(f) > 0$ . Incluso, si consideramos  $f(x) = l_{j,n}^2(x) \in \mathbb{P}_{2n-2}$ , siendo  $l_{j,n}$  los polinomios fundamentales de Lagrange, para todo  $j = 1, \dots, n$  se deduce inmediatamente la siguiente

**Proposición 2** *Una f.c. con grado de precisión mayor o igual a  $2n - 2$  siempre será una f.c.p.*

Nos encontramos en condiciones de plantear la siguiente cuestión fundamental: sea  $n$  un natural y  $k$  un entero no negativo tal que  $0 \leq k \leq n - 1$ . ¿Existirán nodos distintos  $x_1, \dots, x_n$  en  $(a, b)$  de modo que la f.c.  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  tenga grado de precisión  $n + k$ ? Claramente, el imponer tal grado de precisión da lugar a un sistema no lineal de  $n + k + 1$  ecuaciones con  $2n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_n$ , a saber:

$$\sum_{j=1}^n A_j x_j^r = c_r, \quad r = 0, 1, \dots, n + k. \quad (1.24)$$

En lugar de resolver el sistema (1.24), trataremos de resolver el problema imponiendo condiciones que deba verificar el polinomio nodal  $\pi(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ . El resultado se enuncia a continuación, fue demostrado de nuevo en la asignatura *Métodos Numéricos II*, y será esencial en esta Memoria.

**Teorema 8 (Jacobi)** *Sea  $\omega$  una función peso en  $[a, b]$ ,  $I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$  e  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  una f.c. para  $I_\omega(f)$ . Entonces,  $I_n(f)$  tiene grado de precisión  $n + k$ , con  $0 \leq k \leq n - 1$ , si y sólo si,*

1.  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio (recordemos, quiere decir que los pesos se calculan como la integral en  $[a, b]$  con respecto a  $\omega$  de los polinomios fundamentales de Lagrange).
2. El polinomio nodal  $\pi$  satisface las condiciones

<sup>5</sup> Igualmente, a lo largo de esta Memoria abreviaremos por “f.c.p.” tanto “fórmula de cuadratura positiva” como “fórmulas de cuadratura positivas”, quedando siempre claro en función del contexto, y entendiendo por tales aquellas que poseen pesos positivos.

$$\int_a^b x^j \pi(x) \omega dx = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k. \quad (1.25)$$

□

Vemos que la condición (1.25) quiere decir  $\langle x^j, \pi(x) \rangle = 0$ , para todo  $j = 0, 1, \dots, k$ , o equivalentemente,  $\pi(x) \perp \text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$ . Ahora bien, teniendo en cuenta la condición (1.25), si expresamos el polinomio nodal  $\pi_n$  como combinación lineal de una familia  $\{P_k\}_{k=0}^n$  de polinomios ortogonales en  $[a, b]$  con respecto a la función peso  $\omega$ , al ser en particular una base de  $\mathbb{P}_n$ , queda claro a partir de las condiciones de ortogonalidad que el polinomio nodal  $\pi$  que cumple las condiciones de ortogonalidad (1.25) admite la representación

$$\pi(x) = \sum_{j=k+1}^n \alpha_j p_j(x).$$

Este resultado, con el que acabamos esta sección, será justamente el punto de partida del segundo capítulo, tema central de esta Memoria. No obstante, en la siguiente sección ofreceremos algunas breves consideraciones con respecto a los casos maximales  $k = n - 3, n - 2, n - 1$  en el Teorema 8, que dan lugar a las conocidas f.c. de tipo-Gauss.

### 1.3. Fórmulas de cuadratura de tipo-Gauss

Comenzamos esta sección considerando el caso  $k = n - 1$  en el Teorema 8, que da lugar a las conocidas f.c. *Gaussianas*.

**Corolario 1** Una f.c.  $I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$  tiene grado de precisión  $2n - 1$ , si y sólo si,

1.  $I_n(f)$  es de tipo interpolatorio.
2. El polinomio nodal  $\pi$  coincide con el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a  $\omega$  en  $[a, b]$ , esto es,  $\pi = p_n$ .

□

Las f.c. Gaussianas, de la forma (1.20) y caracterizadas en el Corolario 1, poseen el máximo grado de precisión alcanzable:  $2n - 1$ . Como hemos visto, los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  son los ceros del polinomio  $p_n$ , o alternativamente, los autovalores de la matriz de Jacobi  $J_n$  definida en (1.9). Para que éstas queden completamente caracterizadas falta abordar el cómputo de los correspondientes pesos,  $\{A_k\}_{k=1}^n$ . Como  $I_n$  es de tipo interpolatorio (Corolario 1), se sigue que éstos pueden obtenerse mediante (1.23). De la Proposición 2 sabemos, además, que son positivos, por lo que la f.c. será realmente una f.c.p. Veamos a continuación

cómo a partir de la matriz de Jacobi  $J_n$  podemos obtener no sólo los nodos sino también los pesos de las f.c.p. Gaussianas.

Sabiendo que el  $n$ -ésimo polinomio ortonormal  $\tilde{p}_n$  difiere del polinomio nodal  $\pi_n$  en un factor multiplicativo, la expresión (1.23) es equivalente a:

$$A_k = \int_a^b \frac{\tilde{p}_n(x)}{(x - x_k)\tilde{p}'_n(x_k)} \omega(x) dx.$$

Por otro lado, si ahora hacemos uso de la identidad de Christoffel-Darboux (1.5) sustituyendo en  $y = x_k$  se obtiene

$$\sum_{s=0}^{n-1} \tilde{p}_s(x) \tilde{p}_s(x_k) = a_n \frac{\tilde{p}_n(x) \tilde{p}_{n-1}(x_k)}{x - x_k}.$$

Multiplicando ambas expresiones por  $\omega(x)$  e integrando en  $[a, b]$  se tiene

$$\sum_{s=0}^{n-1} \tilde{p}_s(x_k) \cdot \int_a^b \tilde{p}_s(x) \omega(x) dx = a_n \int_a^b \tilde{p}_{n-1}(x_k) \frac{\tilde{p}_n(x)}{x - x_k} \omega(x) dx.$$

De las condiciones de ortogonalidad se sigue que

$$\int_a^b \tilde{p}_s(x) \omega(x) dx = \langle \tilde{p}_s(x), 1 \rangle = 0, \quad \text{para todo } s \geq 1.$$

Teniendo en cuenta que

$$\tilde{p}_0(x_k) \cdot \int_a^b \tilde{p}_0(x) \omega(x) dx = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_0}} \cdot \int_a^b \omega(x) dx = \frac{1}{c_0} \cdot c_0 = 1,$$

se sigue que

$$1 = a_n \tilde{p}_{n-1}(x_k) \int_a^b \frac{\tilde{p}_n(x)}{x - x_k} \omega(x) dx$$

y así,

$$A_k = \frac{1}{a_n \tilde{p}'_n(x_k) \tilde{p}_{n-1}(x_k)}.$$

De la Fórmula Confluente (1.6) deducimos por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(x_k, x_k) &= a_n [\tilde{p}'_n(x_k) \tilde{p}_{n-1}(x_k) - \tilde{p}'_{n-1}(x_k) \tilde{p}_n(x_k)] = a_n [\tilde{p}'_n(x_k) \tilde{p}_{n-1}(x_k)] \\ &= \frac{1}{A_k} \end{aligned}$$

Es decir, los pesos de la fórmula de cuadratura Gaussiana vienen dados por

$$A_k = \frac{1}{\mathcal{K}_{n-1}(x_k, x_k)} = \frac{1}{\sum_{s=0}^{n-1} \tilde{p}_s^2(x_k)} > 0,$$

y se sigue de (1.11) que si la función peso es de probabilidad ( $c_0 = 1$ ), el peso  $A_k$  es precisamente la primera componente del autovector normalizado asociado al autovalor  $x_k$  de la Matriz de Jacobi  $J_n$ .

En cuanto a estimaciones del error (1.21), dado que las f.c. de tipo interpolatorio se construyen integrando el polinomio interpolador a  $f$  en los nodos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  expresado en su forma de Lagrange, y recordando la expresión del error en (1.22)<sup>6</sup>,

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi(x), \quad \exists \xi = \xi(x) \in [a, b],$$

donde estamos asumiendo  $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a, b])$ , se sigue multiplicando por  $\omega(x)$  e integrando sobre el intervalo  $[a, b]$  que

$$R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) \pi(x) \omega(x) dx.$$

Sin embargo, para el caso de las f.c.p. Gaussianas podemos afinar aún más le expresión del error anterior si suponemos  $f \in \mathcal{C}^{(2n)}([a, b])$  y consideramos el polinomio interpolador de Hermite  $H_n \in \mathbb{P}_{2n-1}$ , que interpola en los nodos anteriores no solo a la función  $f$  sino también a su derivada primera. En este caso es conocida la estimación<sup>7</sup>,

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \pi^2(x), \quad \exists \eta = \eta(x) \in [a, b],$$

por lo que multiplicado de nuevo por  $\omega(x)$ , integrando sobre el intervalo  $[a, b]$  y teniendo en cuenta que la f.c.p. Gaussiana de  $n$  puntos tiene grado de precisión  $2n - 1$  (e integra por tanto exactamente al polinomio interpolador de Hermite), se sigue el siguiente

**Teorema 9** Si  $f \in \mathcal{C}^{(2n)}([a, b])$ , entonces existe un punto  $\eta \in [a, b]$  para el cual el resto (1.21) para la fórmula Gaussiana viene dado por

$$R_n(f) = I_\omega(f) - I_n(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b f^{(2n)}(\eta) \pi_n^2(x) \omega(x) dx. \quad (1.26)$$

□

Obsérvese de (1.26) que si  $f^{(2n)}$  tiene signo constante en  $[a, b]$ ,  $I_n(f)$  ofrece cotas superiores o inferiores para  $I_\omega(f)$ .

<sup>6</sup> Este resultado ha sido demostrado en el Tema 1 de la asignatura Métodos Numéricos II. Véase [https://www.u11.es/apps/guias/guias/view\\_guide/22198/](https://www.u11.es/apps/guias/guias/view_guide/22198/).

<sup>7</sup> También demostrada en el Tema 1 de la asignatura Métodos Numéricos II.

Finalizaremos este primer capítulo presentando un tipo de fórmulas de cuadratura muy utilizadas en la literatura:

$$\int_a^b f(x)\omega(x) dx \approx \sum_{l=1}^m a_l f(y_l) + \sum_{k=1}^n \sigma_k f(x_k), \quad (1.27)$$

donde los  $m$  nodos  $y_l$  están fijos y las  $m + 2n$  constantes  $a_l, \sigma_k$  y  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $l = 1, \dots, m$ ) deben ser determinadas para que la regla tenga el grado máximo de precisión (en este caso,  $m + 2n - 1$ ). Definamos los polinomios

$$r(x) = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m),$$

$$s(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

El siguiente resultado resuelve el problema para la fórmula de cuadratura con grado de precisión máximo:

**Teorema 10** *La fórmula de cuadratura (1.27) es exacta en  $\mathbb{P}_{m+2n-1}$ , sí y solo sí,*

1. *Es exacta en  $\mathbb{P}_{m+n-1}$  (es decir, es de tipo interpolatorio),*
2.  *$\int_a^b r(x)s(x)p(x)\omega(x)dx = 0$  para todo  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ , es decir, el polinomio nodal  $s$  debe ser ortogonal a  $\mathbb{P}_{n-1}$  en  $[a, b]$  con respecto a la función peso modificada  $r \cdot \omega$ .*

□

Para poder llevar a cabo un análisis similar al realizado con las f.c.p. Gaussianas, deberíamos poder asegurar que la nueva función peso  $r \cdot \omega$  es positiva en  $[a, b]$ , algo que en general no tiene por qué cumplirse. Véase por ejemplo [8]. Si la función peso  $r \cdot \omega$  no tiene signo constante en  $[a, b]$ , el concepto de ortogonalidad podría carecer de sentido.

Dada la complejidad de este problema, mencionaremos solamente por el momento los casos más conocidos en la literatura, que se corresponden con

1.  $m = 1, y_1 = a$  ó  $y_1 = b$ : *f.c. de Gauss-Radau.*
2.  $m = 2$  con  $y_1 = a$  e  $y_2 = b$ : *f.c. de Gauss-Lobatto.*

De esta manera, de acuerdo con el Teorema 10, los nodos a determinar en (1.27) son todos distintos y contenidos en el intervalo abierto  $(a, b)$ , dado que son los ceros de polinomios ortogonales con respecto a funciones peso modificadas positivas de la forma  $(x - a)\omega(x) > 0$ ,  $(b - x)\omega(x) > 0$  ó  $(x - a)(b - x)\omega(x) > 0$ , garantizándose además la positividad de los pesos.

A las f.c.p. que resultan, junto con las Gaussianas, se les denominan usualmente en la literatura como *fórmulas de cuadratura tipo-Gauss*.

**Ejemplo 2** Para finalizar este capítulo, retomaremos de nuevo los **polinomios de Chebyshev de primera especie** introducidos en el Ejemplo 1. Consideremos la función peso  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  establecida en el Ejemplo 1, cuyos polinomios ortogonales asociados son los polinomios de Chebyshev de primera especie. Nuestros propósitos se centran ahora en determinar que las f.c. de tipo Gauss asociadas pueden ser computadas de manera explícita. Si comenzamos con las f.c. Gaussianas, se obtiene que

- Los nodos de la f.c. se conocen explícitamente y vienen dados por (1.16).
- Como la f.c. es de tipo interpolatorio, los pesos se pueden computar integrando los polinomios fundamentales de Lagrange, esto es:

$$A_k = \int_{-1}^1 l_{k,n}(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\pi(x) \cdot \omega(x)dx}{(x - x_k) \cdot \pi'(x_k)},$$

siendo  $\pi(x) = T_n(x)$  (polinomio nodal) y  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Si realizamos el cambio de variable  $x = \cos \theta$ ,  $dx = -\sin \theta d\theta$  se sigue que  $x = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$  y  $x = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ . Además, de la expresión para  $T'_n(\cos(\theta))$  en (1.19) se sigue que

$$A_k = \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) \cdot \sin \theta_k d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta_k) \cdot \sin(n\theta_k)} = \frac{\sin \theta_k}{n \cdot \sin(n\theta_k)} \cdot \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_k} = \frac{\pi}{n},$$

donde en la última igualdad hemos empleado la igualdad  $\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \phi} d\theta = \pi \cdot \frac{\sin(n\theta)}{\sin \phi}$ .

En consecuencia, la f.c. se expresa

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}. \quad (1.28)$$

Se sabe de hecho que ésta es la única f.c. de  $n$  puntos para la integral  $I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$ , siendo  $\omega$  una función peso definida en  $[a, b]$ , exacta en  $\mathbb{P}_N$  con  $N \geq n$  y con coeficientes (pesos) constantes (véase [7]).

Si quisiéramos construir la f.c. de Gauss-Radau para los polinomios de Chebyshev de primera especie, se sigue del Teorema 10 que debemos considerar la función peso modificada  $(1-x)\omega(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  (si se fija el nodo  $x = -1$ ) o  $(1+x)\omega(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  (si se fija el nodo  $x = 1$ ), que se corresponden con las funciones peso asociadas a los polinomios ortogonales de Chebyshev de tercera y cuarta especie, respectivamente. En ese caso se puede comprobar, siguiendo un análisis similar al de la fórmula Gaussiana (véase [7]) que:

- Para la f.c. de Gauss-Radau asociada a la función peso de Chebyshev de primera especie (nodo  $x = 1$  fijo), los nodos interiores de la f.c. vienen determinados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n-1}\right), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

- Para la f.c. de Gauss-Radau asociada a la función peso de Chebyshev de primera especie (nodo  $x = -1$  fijo), los nodos interiores de la f.c. vienen dados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n-1}\pi\right), \quad k = 2, \dots, n.$$

De la misma manera, si ahora queremos determinar la f.c. de Gauss-Lobatto para los polinomios de Chebyshev debemos emplear la función peso modificada  $(1-x)(1+x)\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ . En este caso, los nodos interiores de las f.c. de Gauss-Lobatto para los polinomios ortogonales de Chebyshev de primera especie vienen determinados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n-1}\pi\right), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

En todos los casos, el cálculo de los pesos puede llevarse a cabo mediante la fórmula (1.23).



## Cuasi-ortogonalidad

---

Para abordar el concepto de cuasi-ortogonalidad, eje central de esta Memoria, hay que tomar como motivación y punto de partida el Teorema 8. Recordemos que partíamos de una función peso  $\omega$  con soporte en  $[a, b]$ , y pretendíamos obtener de manera aproximada el valor de la integral  $\int_a^b f(x)\omega(x)dx$  mediante una f.c.

El concepto de cuasiortogonalidad fue introducido por primera vez en 1923 por M. Riesz ([9]) para el caso  $r = 1$  en relación con *problemas de momentos*, y a continuación por L. Féjer ( $r = 2$ ) y por J.A. Shohat ( $r \geq 1$ ) en 1933 y 1937, respectivamente, en el contexto de *fórmulas de cuadratura*.

La importancia de este concepto radica en que para construir una f.c. con grado de precisión  $n + k$ , donde  $0 \leq k \leq n - 1$ , necesitamos caracterizar los polinomios que cumplan (1.25). Estos polinomios recibirán el nombre de *polinomios cuasi-ortogonales*, los cuales se definirán formalmente en la primera sección de este capítulo. En las secciones siguientes abordaremos algunos casos particulares.

### 2.1. Polinomios cuasi-ortogonales

**Definición 4** *Se dice que un polinomio  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  es cuasiortogonal de orden  $r$  con respecto a la función peso  $\omega$  si  $Q_{n,r} \perp \mathbb{P}_{n-1-r}$ .*

En el caso particular de que  $r = 0$  se tiene que  $Q_{n,r} = p_n(x)$  (coincide exactamente con el  $n$ -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto de la función peso  $\omega$  en  $[a, b]$ ). Nótese que un polinomio cuasiortogonal de grado  $n$  y orden  $r$  solo está definido para  $n \geq r$ , ya que de lo contrario la definición anterior carece de sentido.

Veamos a continuación un primer resultado que permitirá caracterizar los polinomios cuasi-ortogonales en términos de los correspondientes polinomios ortogonales.

**Teorema 11** *Sea  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la función peso  $\omega$  definida en  $[a, b]$ . Un polinomio mónico  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$*

es cuasiortogonal de orden  $r$ , con  $r \leq n$ , si y solo si existen  $a_{n-1}, \dots, a_{n-r} \in \mathbb{R}$  de manera que:

$$Q_{n,r} = p_n + a_{n-1}p_{n-1} + \dots + a_{n-r}p_{n-r}, \quad a_{n-r} \neq 0 \quad (2.1)$$

*Demostración.* Sea  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  dado por (2.1) y veamos que  $Q_{n,r}$  es ortogonal a  $x^s$ , con  $s \in \{0, 1, \dots, n-r-1\}$ . En efecto, si  $s \in \{0, 1, \dots, n-r-1\}$ , entonces :

$$\begin{aligned} \langle Q_{n,r}, x^s \rangle &= \langle p_n + a_{n-1}p_{n-1} + \dots + a_{n-r}p_{n-r}, x^s \rangle \\ &= \langle p_n, x^s \rangle + a_{n-1}\langle p_{n-1}, x^s \rangle + \dots + a_{n-r}\langle p_{n-r}, x^s \rangle = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que  $Q_{n,r} \perp \mathbb{P}_{n-1-r}$ , como queríamos probar.

Recíprocamente, como  $\{p_k\}_{k=0}^n$  es una base de  $\mathbb{P}_n$ , podemos escribir el polinomio mónico genérico  $Q_{n,r}$  como combinación lineal de los elementos de la base, de modo que

$$Q_{n,r} = p_n + a_{n-1}p_{n-1} + \dots + a_0p_0,$$

para ciertos escalares únicos  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Por hipótesis, como  $Q_{n,r} \perp \mathbb{P}_{n-r-1}$ , se obtiene que para todo  $s \in \{0, 1, \dots, n-r-1\}$  :

$$0 = \langle Q_{n,r}, x^s \rangle = \langle p_n, x^s \rangle + a_{n-1}\langle p_{n-1}, x^s \rangle + \dots + a_0\langle p_0, x^s \rangle.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\langle p_n, x^n \rangle = \langle p_n, p_n + x^n - p_n \rangle = \langle p_n, p_n \rangle - \langle p_n, x^n - p_n \rangle = \langle p_n, p_n \rangle = \|p_n\|^2 > 0.$$

Se sigue por tanto:

$$\begin{array}{llll} s = 0 : & 0 = a_0\langle p_0, x^0 \rangle = a_0\|p_0\|^2 = a_0 \cdot c_0 & \Rightarrow & \boxed{a_0 = 0} \\ s = 1 : & 0 = a_1\langle p_1, x \rangle = a_1\|p_1\|^2 & \Rightarrow & \boxed{a_1 = 0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s = n-r-1 : & 0 = a_{n-r-1}\langle p_{n-r-1}, x^{n-r-1} \rangle = a_{n-r-1}\|p_{n-r-1}\|^2 & \Rightarrow & \boxed{a_{n-r-1} = 0} \end{array}$$

Por tanto, se llega a que  $Q_{n,r} = p_n + a_{n-1}p_{n-1} + \dots + a_{n-r}p_{n-r}$ .

□

En el capítulo anterior estudiamos las f.c. de tipo interpolatorio y las f.c. Gaussianas, que se corresponden con el caso minimal ( $k = 0$ ) y maximal ( $k = n - 1$ ) en el Teorema 8. Nuestro objetivo ahora será abordar la construcción de f.c. con grados de precisión  $n + k$  intermedios ( $0 < k < n - 1$ ). Para ello necesitamos:

- Construir el polinomio nodal, que del Teorema 8 se deduce que debe ser un polinomio cuasi-ortogonal de orden  $n - k - 1$ , caracterizados en el Teorema 11.
- Garantizar que los ceros del polinomio nodal son distintos y se encuentran en  $(a, b)$ . Recordemos que estamos tratando con f.c. que aproximen a la integral de una función definida en  $[a, b]$  con respecto a la función peso  $\omega$ . Por este motivo, es de suma importancia garantizar que los ceros del polinomio nodal no sólo sean distintos entre sí, sino que también se encuentran contenidos en dicho intervalo, que es realmente donde sabemos que está definida la función  $f$  del integrando.

A propósito, ya en el Capítulo 1 se enunció el Teorema 1 de localización de ceros de polinomios ortogonales. Llegados a este punto, cabe ahora preguntarse si existe una propiedad análoga para polinomios cuasi-ortogonales que generalice el Teorema 1. La respuesta viene dada por el siguiente

**Teorema 12 (Ceros de polinomios cuasiortogonales)** *Un polinomio  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  tiene al menos  $n - r$  ceros distintos en  $(a, b)$ .*

*Demostración.* Sean  $\eta_1, \dots, \eta_m \in (a, b)$  los valores donde  $Q_{n,r}$  cambia de signo en  $(a, b)$ . Definimos  $q_m(x) := (x - \eta_1) \cdot (x - \eta_2) \cdot \dots \cdot (x - \eta_m) \in \mathbb{P}_m \setminus \mathbb{P}_{m-1}$ . Tenemos que ver que  $m \geq n - r$ .

Supongamos que  $m < n - r$ . Sabemos que  $Q_{n,r}$  se factoriza como

$$Q_{n,r}(x) = (x - \eta_1) \cdot \dots \cdot (x - \eta_m) \cdot (x - \xi_1) \cdot \dots \cdot (x - \xi_{n-m}),$$

donde algún  $\xi_i$  podría coincidir eventualmente con algún  $\eta_i$ . Por tanto se tiene que:

$$Q_{n,r}(x) \cdot q_m(x) = (x - \eta_1)^2 \cdot \dots \cdot (x - \eta_m)^2 \cdot (x - \xi_1) \cdot \dots \cdot (x - \xi_m).$$

El hecho de que  $Q_{n,r}$  y  $q_m$  cambien de signo en los mismos valores permite garantizar que el signo de  $Q_{n,r} \cdot q_m$  no varía en  $(a, b)$ . En consecuencia:

$$\int_a^b Q_{n,r}(x) \cdot q_m(x) \cdot \omega(x) dx \neq 0.$$

Ahora bien, como por hipótesis  $Q_{n,r}$  es un polinomio cuasi-ortogonal de orden  $r$ , se tiene que  $Q_{n,r} \perp \mathbb{P}_{n-r-1}$ , y al suponer que  $m < n - r$  se sigue que  $\langle Q_{n-r}, q_m \rangle = 0$ , o lo que es lo mismo:

$$\int_a^b Q_{n,r}(x) \cdot q_m(x) \cdot \omega(x) dx = 0.$$

Con esta igualdad llegamos a un absurdo, que viene de haber supuesto que  $m < n - r$ . Por tanto se concluye que  $m \geq n - r$ , como queríamos probar.

□

A continuación vamos a tratar de generalizar la ley de recurrencia a tres términos para la familia de polinomios ortogonales mónicos enunciada en el Teorema 2 del Capítulo 1. A propósito, en el artículo [4] se prueba el siguiente resultado:

**Teorema 13 (Recurrencia para polinomios cuasiortogonales mónicos)**  
 Sea  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\omega$ . Entonces, tres polinomios cuasiortogonales de orden  $r$  consecutivos  $(Q_{n-1,r}, Q_{n,r}, Q_{n+1,r})$  cumplen una ley de recurrencia a tres términos de la forma:

$$A_n(x)Q_{n+1,r}(x) + B_n(x)Q_{n,r}(x) + C_n(x)Q_{n-1,r}(x) = 0, \quad (2.2)$$

donde  $A_n \in \mathbb{P}_r$ ,  $B_n \in \mathbb{P}_{r+1}$  y  $C_n \in \mathbb{P}_r$

En [4] se prueba la existencia de dichos coeficientes polinomiales en la ley de recurrencia (2.2). Sin embargo, hasta donde sabemos, no se conocen expresiones computables para éstos en términos de los coeficientes de la ley de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales conocidos en  $\omega$ . Por esta razón, en la siguiente sección trataremos de obtener expresiones explícitas de los mismos para el caso particular de cuasiortogonalidad de orden 1.

En el Teorema 6, correspondiente al primer capítulo, se probó la existencia de una expresión determinantal para polinomios ortogonales. Dicho resultado puede ser generalizado para el caso de polinomios cuasiortogonales. A propósito, Shohat establece (sin demostrar) en [10] el siguiente

**Teorema 14 (Expresión determinantal de polinomios cuasiortogonales)**  
 Sea  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\omega$ . Si  $Q_{n,r}(x) \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  es un polinomio cuasiortogonal de orden  $r$  con respecto de  $\omega$ , entonces se cumple que:

$$Q_{n,r}(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} & & & 1 \\ 0 & 0 & (-1)^{r+1}a_{n-r} & \cdots & a_{n-3} & \beta_{n-1} - a_{n-2} & x - \alpha_{n-1} + a_{n-1} & & & \end{vmatrix},$$

donde los valores  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{n-1}\}$  se corresponden con los coeficientes de la ley de recurrencia a tres términos definida en (2), y los valores  $\{a_{n-1}, \dots, a_{n-r}\}$  las cantidades dadas en (2.1).

*Demostración.* En [10] se indica únicamente que la fórmula se puede probar, como parece razonable pensar, desarrollando el determinante respecto de la última fila. Como consecuencia, en la columna donde está el término  $a_{n-r}$  también se eliminan las cantidades  $(1, x - \alpha_{n-r}, \beta_{n-r+1})$ . Por tanto, se sigue que este desarrollo será

$$\begin{aligned}
 & (x - \alpha_{n-1} + a_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} \end{vmatrix} + \\
 & (a_{n-2} - \beta_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & 1 \end{vmatrix} + \\
 & + a_{n-3} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-5} & x - \alpha_{n-5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-4} & x - \alpha_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x - \alpha_{n-2} & 1 \end{vmatrix} + \\
 & + a_{n-4} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-6} & x - \alpha_{n-6} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-5} & x - \alpha_{n-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x - \alpha_{n-3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} & 1 \end{vmatrix} + \dots \\
 & + a_{n-r} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-r-2} & x - \alpha_{n-r-2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-r-1} & x - \alpha_{n-r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-r} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x - \alpha_{n-r+1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-r+2} & x - \alpha_{n-r+2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

que coincide con

$$\begin{aligned}
& (x - \alpha_{n-1} + a_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} \end{vmatrix} + \\
& + (a_{n-2} - \beta_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-4} & x - \alpha_{n-4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-3} & x - \alpha_{n-3} \end{vmatrix} + \\
& + a_{n-3} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-5} & x - \alpha_{n-5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-4} & x - \alpha_{n-4} \end{vmatrix} + \cdots \\
& + a_{n-r} \cdot \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-r-2} & x - \alpha_{n-r-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-r-1} & x - \alpha_{n-r-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Utilizando ahora la expresión determinantal para polinomios ortogonales vista en el Teorema 6 y la ley de recurrencia a tres términos establecida en el Teorema 2, se tiene que:

$$\begin{aligned}
Q_{n,r}(x) &= (x - \alpha_{n-1} + a_{n-1}) \cdot p_{n-1}(x) + (a_{n-2} - \beta_{n-1}) \cdot p_{n-2}(x) + a_{n-3} \cdot \\
& \quad p_{n-3}(x) + \cdots + a_{n-r} \cdot p_{n-r}(x) \\
&= (x - \alpha_{n-1}) \cdot p_{n-1}(x) - \beta_{n-1} \cdot p_{n-2}(x) + a_{n-1} \cdot p_{n-1}(x) + a_{n-2} \cdot \\
& \quad p_{n-2}(x) + a_{n-3} \cdot p_{n-3}(x) + \cdots + a_{n-r} \cdot p_{n-r}(x) \\
&= p_n(x) + a_{n-1} \cdot p_{n-1}(x) + a_{n-2} \cdot p_{n-2}(x) + \cdots + a_{n-r} \cdot p_{n-r}(x).
\end{aligned}$$

□

## 2.2. Cuasiortogonalidad de orden 1

En esta sección se hará un estudio más detallado de los polinomios cuasi-ortogonales de orden 1, los cuales se obtienen tomando  $r = 1$  en la Definición 4. Por (2.1) sabemos que si éste denota un  $n$ -ésimo polinomio cuasiortogonal de orden 1 mónico, entonces queda caracterizado por:

$$Q_{n,1}(x) = p_n(x) + a_1 \cdot p_{n-1}(x) \quad a_1 \neq 0, \quad (2.3)$$

donde  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  es la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto a  $\omega$ .

Comenzamos estudiando propiedades de ceros de polinomios cuasiortogonales de orden 1. Si particularizamos el Teorema 12 para el caso que estamos tratando, se tiene el siguiente

**Corolario 2** *Un polinomio  $Q_{n,1}(x) \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  tiene al menos  $n - 1$  ceros distintos en  $(a, b)$ .*

El resultado anterior no da información sobre la localización del cero restante de  $Q_{n,1}$  (necesariamente real, dado que los coeficientes de  $Q_{n,1}$  son reales). Sería de gran utilidad para nuestros objetivos localizar dicho cero en la recta real. A propósito, Joulak establece en [6] condiciones necesarias y suficientes para que el primer o el último cero de  $Q_{n,1}$  se encuentre dentro o fuera del intervalo  $(a, b)$ , generalizando un resultado de C. Brekinski, K.A. Driver y M. Redivo-Zaglia, véase ([1]).

Antes de enunciar y demostrar este resultado, observamos que  $Q_{n,1}$  dado por (2.3) nunca podrá tener por ceros los del polinomio  $p_{n-1}$ . En efecto, si  $x_{j,n-1}$  denota el  $j$ -ésimo cero de  $p_{n-1}$ , entonces

$$0 = Q_{n,1}(x_{j,n-1}) = p_n(x_{j,n-1}) + a_1 \cdot p_{n-1}(x_{j,n-1}) = p_n(x_{j,n-1}),$$

lo cual es una contradicción dado que los ceros de  $p_{n-1}$  y  $p_n$  se entrelazan por el Teorema 5. Es decir, no puede existir una constante  $a_1 \in \mathbb{R}$  para la cual  $Q_{n,1}$  tenga un cero en alguno de los ceros de  $p_{n-1}$ . Por otro lado, resulta trivial que la elección  $a_1 = 0$  en (2.3) hace que los ceros de  $Q_{n,1}$  sean exactamente los de  $p_n$  (en ese caso, el polinomio cuasi-ortogonal de orden uno,  $Q_{n,1}$ , pasaría a ser cuasi-ortogonal de orden cero).

En general, siempre podemos encontrar  $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  de tal manera que  $Q_{n,1}$  tenga un cero en  $\alpha \in \mathbb{R}$ , donde  $\alpha$  no es un cero ni de  $p_{n-1}$  ni de  $p_n$ . En efecto,

$$Q_{n,1}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_1 = -\frac{p_n(\alpha)}{p_{n-1}(\alpha)}.$$

La función racional  $f_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_{n-1}(x)}$  jugará por tanto un papel esencial en el resultado de Joulak (véase también [2]). Esta función racional tiene  $n$  ceros, situados en los  $n$  ceros de  $p_n$ , y  $n - 1$  asíntotas verticales, situadas en los  $n - 1$  ceros de  $p_{n-1}$ . La función  $f_n$  se puede expresar también en términos de los polinomios ortonormales  $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^\infty$  de forma que

$$f_n(x) = \frac{\|p_n\|}{\|p_{n-1}\|} \cdot \frac{\tilde{p}_n(x)}{\tilde{p}_{n-1}(x)}.$$

Aplicando la fórmula confluyente (1.6) se sigue que

$$f'_n(x) = \frac{\|p_n\|}{\|p_{n-1}\|} \cdot \frac{\tilde{p}'_n(x) \cdot \tilde{p}_{n-1}(x) - \tilde{p}_n(x) \cdot \tilde{p}'_{n-1}(x)}{\tilde{p}_{n-1}^2(x)} = \frac{\|p_n\|}{\|p_{n-1}\|} \cdot \gamma_n \cdot \frac{\mathcal{K}_{n-1}(x, x)}{\tilde{p}_{n-1}^2(x)} > 0,$$

donde el coeficiente  $\gamma_n$  proviene de (1.2). Se concluye por tanto que  $f_n(x)$  es una función creciente en todo su dominio.

Llegados a este punto, nos encontramos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente

**Teorema 15 (Localización de ceros, cuasiortogonalidad de orden uno)**

Sea  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\omega$  en  $(a, b)$ . Sean  $y_1, \dots, y_n$  los ceros de  $Q_{n,1}(x)$ , ordenados  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ , y  $f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ . Entonces:

1.  $y_1 < a$ , si y solo si,  $-a_1 < f_n(a) < 0$ .
2.  $b < y_n$ , si y solo si,  $-a_1 > f_n(b) > 0$ .
3.  $Q_{n,1}$  tiene todos sus ceros en  $(a, b)$ , si y solo si,  $f_n(a) < -a_1 < f_n(b)$ .

*Demostración.* 1. Consideramos el caso en que  $n$  es par, dado que el caso impar se demuestra de manera similar. En este caso,  $Q_{n,1}$  dado por (2.3) verifica

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q_{n,1}(x) = +\infty. \quad (2.4)$$

Si  $y_1 < a$ , del Corolario 2 se sigue que  $a < y_2$ , y por tanto,  $Q_{n,1}(x) < 0, \forall x \in (y_1, y_2)$ , y en particular,  $Q_{n,1}(a) < 0$ . Recíprocamente, si  $Q_{n,1}(a) < 0$  debe darse  $y_1 < a$  por (2.4). Tenemos por tanto que

$$y_1 < a \Leftrightarrow Q_{n,1}(a) < 0 \Leftrightarrow p_n(a) + a_1 p_{n-1}(a) < 0.$$

Ahora bien, como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_{n-1}(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = \infty$  y por el Teorema 1 sabemos que  $p_n(x)$  y  $p_{n-1}(x)$  tienen sus respectivos ceros en  $(a, b)$ , se sigue que  $p_{n-1}(a) < 0$  y  $p_n(a) > 0$ , concluyendo así que

$$-a_1 < \frac{p_n(a)}{p_{n-1}(a)} < 0 \quad , \quad \text{es decir,} \quad -a_1 < f_n(a) < 0.$$

2. Se demuestra de manera similar.
3. Supongamos que  $Q_{n,1}$  tiene todos sus ceros en  $(a, b)$ . Entonces, por 1 y 2 se tiene que  $-a_1 > f_n(a)$  y  $-a_1 < f_n(b)$ , respectivamente. Haciendo uso de ambas desigualdades se obtiene que  $f_n(a) < -a_1 < f_n(b)$ , tal y como queríamos probar.

□



Llegados a este punto, cabe preguntarse cuál sería el resultado de aplicar el teorema anterior al caso particular de los *Polinomios de Chebyshev de primera especie* introducidos en el Ejemplo 1.

**Ejemplo 3** Tomamos  $\{\widehat{T}_n\}_{n=0}^{\infty}$  la familia de polinomios de Chebyshev de primera especie ortogonales mónicos con respecto a  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  en  $[-1, 1]$ . De la relación (1.15) se sigue que  $Q_{n,1}$  admite la expresión

$$Q_{n,1} = \widehat{T}_n + a_1 \cdot \widehat{T}_{n-1} = 2^{1-n}T_n + a_1 \cdot 2^{2-n}T_{n-1}.$$

La función  $f_n(x)$  asociada a la función peso de Chebyshev de primera especie viene dada por

$$f_n(x) = \frac{2^{1-n}T_n}{2^{2-n}T_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_n(x)}{T_{n-1}(x)} = \frac{\widehat{T}_n(x)}{\widehat{T}_{n-1}(x)}, \quad T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)), \quad n \geq 1.$$

Recordemos que la función racional  $f_n(x)$  tiene  $n$  ceros, situados en los  $n$  ceros de  $T_n$ , y  $n-1$  asíntotas verticales, situadas en los  $n-1$  ceros de  $T_{n-1}$ .

Por definición, sabemos que  $T_n(-1) = \cos(n \cdot \arccos(-1)) = \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$  y  $T_n(1) = \cos(n \cdot \arccos(1)) = \cos(0) = 1$ , luego es claro que  $f_n(-1) = -\frac{1}{2}$  y  $f_n(1) = \frac{1}{2}$ . Como  $x = 1$  (extremo derecho del intervalo) no es un cero de  $T_n$  ni de  $T_{n-1}$ , se sabe que:

$$Q_{n,1}(1) = 0 \Leftrightarrow \widehat{T}_n(1) + a_1 \cdot \widehat{T}_{n-1}(1) = 0 \Leftrightarrow a_1 = -f_n(1) = -\frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

De la misma manera, para  $x = -1$  (extremo izquierdo del intervalo):

$$Q_{n,1}(-1) = 0 \Leftrightarrow \widehat{T}_n(-1) + a_1 \cdot \widehat{T}_{n-1}(-1) = 0 \Leftrightarrow a_1 = -f_n(-1) = \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

A continuación, trataremos de explicar el comportamiento del polinomio  $Q_{n,1}$  cuando se hace variar de manera continua en  $\mathbb{R}$  el valor que toma el parámetro real  $a_1$ . Observamos que:

- Si  $a_1 = 0$  los  $n$  ceros de  $Q_{n,1}$  coinciden con los de  $T_n$ , y todos se encuentran en el interior del intervalo  $(-1, 1)$ .
- Al hacer variar de manera continua el valor de  $a_1$  de 0 hacia  $-\frac{1}{2}$ , los ceros de  $Q_{n,1}$  se desplazan hacia la derecha por continuidad.
- Cuando  $a_1 = -\frac{1}{2}$  (caso extremo), hemos visto en (2.5) que el  $n$ -ésimo cero de  $Q_{n,1}(x)$  se alcanza en  $x = 1$ , mientras que los  $n-1$  restantes se corresponden con los nodos de la f.c. de Gauss-Radau con nodo  $x = 1$  fijo, es decir, los ceros del polinomio ortogonal de Chebyshev de grado  $n-1$  con respecto a la función peso modificada  $(1-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

- Si  $-\infty < a_1 < -\frac{1}{2}$ , por el apartado 2 del Teorema 15 el  $n$ -ésimo cero de  $Q_{n,1}$  se escapa por continuidad y tiende a infinito a medida que  $a_1 \rightarrow -\infty$ . El resto de ceros tienden por continuidad a los ceros de  $T_{n-1}$ .
- Si ahora hacemos que  $a_1$  tome valores entre 0 y  $\frac{1}{2}$ , se conseguirá el fenómeno opuesto. Esto es, los ceros de  $Q_{n,1}$  se moverán hacia la izquierda.
- Cuando  $a_1 = \frac{1}{2}$  (caso extremo), ahora se tiene que el primer cero de  $Q_{n,1}(x)$  se alcanza en  $x = -1$  por (2.6). Los  $n - 1$  ceros restantes serán los nodos de la f.c. de Gauss-Radau con nodo  $x = -1$  fijo, esto es, los ceros del polinomio ortogonal de Chebyshev de grado  $n - 1$  con respecto a la función peso modificada  $(1 + x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
- Finalmente si  $\frac{1}{2} < a_1 < \infty$  se sabe por aplicación del apartado 1 del Teorema 15 que el primer cero de  $Q_{n,1}$  tenderá por continuidad hacia el infinito a medida que  $a_1 \rightarrow \infty$ . Los ceros restantes se trasladan hacia la izquierda, tratando de aproximarse a los ceros de  $T_{n-1}$ , con los cuales no pueden colapsar.

El teorema 15 da información sobre la localización de los ceros con respecto a los puntos extremos del intervalo  $(a, b)$ . Ahora bien, sería de gran utilidad aportar condiciones necesarias y/o suficientes más precisas que permitan localizar los ceros de  $Q_{n,1}$  con respecto a los de los polinomios ortogonales  $p_n$  y  $p_{n-1}$ . Es decir, una propiedad de entrelazamiento que involucre también a los ceros de  $Q_{n,1}$ . De hecho, en [6] se prueba el siguiente

**Teorema 16 (Entrelazamiento de ceros, cuasiortogonalidad de orden 1)**

Denotemos por  $\{y_j\}_{j=1}^n$  los  $n$  ceros reales de  $Q_{n,1}$  dado por (2.3), y como es usual, sea  $x_{j,n}$  el  $j$ -ésimo cero del polinomio ortogonal  $p_n$ . Entonces:

1.  $a_1 < 0$ , si y solo si,  $\forall i = 1, \dots, n - 1$ ,  $x_{i,n} < y_i < x_{i,n-1}$  y  $x_{n,n} < y_n$ ,
2.  $a_1 > 0$ , si y solo si,  $\forall i = 2, \dots, n$ ,  $x_{i-1,n-1} < y_i < x_{i,n}$  y  $y_1 < x_{1,n}$ .

*Demostración.* Probaremos el primer enunciado, es decir,  $a_1 < 0$ , ya que el razonamiento a seguir es análogo para el segundo. Asimismo, supondremos también el caso en que  $n$  es par dado que el caso impar se demuestra de manera similar. En primer lugar, utilizamos la propiedad de entrelazamiento de ceros de los polinomios ortogonales  $p_n$  y  $p_{n-1}$  definida en el Teorema 5. En consecuencia se tiene que  $p_n(x_{2j-1,n-1}) < 0$ ,  $p_n(x_{2j,n-1}) > 0$ ,  $p_{n-1}(x_{2j-1,n}) < 0$  y  $p_{n-1}(x_{2j,n}) > 0$ . Por tanto,

$$\left\{ \begin{array}{l}
Q_{n,1}(x_{1,n}) = \cancel{p_n(x_{1,n})} + a_n \cdot \underbrace{p_{n-1}(x_{1,n})}_{<0} > 0 \\
Q_{n,1}(x_{1,n-1}) = \underbrace{p_n(x_{1,n-1})}_{<0} + a_n \cdot \cancel{p_{n-1}(x_{1,n-1})} < 0 \\
Q_{n,1}(x_{2,n}) = \cancel{p_n(x_{2,n})} + a_n \cdot \underbrace{p_{n-1}(x_{2,n})}_{>0} < 0 \\
Q_{n,1}(x_{2,n-1}) = \underbrace{p_n(x_{2,n-1})}_{>0} + a_n \cdot \cancel{p_{n-1}(x_{2,n-1})} > 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Q_{n,1}(x_{n-2,n-1}) = \underbrace{p_n(x_{n-2,n-1})}_{>0} + a_n \cdot \cancel{p_{n-1}(x_{n-2,n-1})} > 0 \\
Q_{n,1}(x_{n-1,n}) = \cancel{p_n(x_{n-1,n})} + a_n \cdot \underbrace{p_{n-1}(x_{n-1,n})}_{<0} > 0 \\
Q_{n,1}(x_{n-1,n-1}) = \underbrace{p_n(x_{n-1,n-1})}_{<0} + a_n \cdot \cancel{p_{n-1}(x_{n-1,n-1})} < 0 \\
Q_{n,1}(x_{n,n}) = \cancel{p_n(x_{n,n})} + a_n \cdot \underbrace{p_{n-1}(x_{n,n})}_{>0} < 0
\end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x_{1,n} < y_1 < x_{1,n-1} < \cdots < x_{n-1,n} < y_{n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n} < y_n.$$

La implicación “ $\Leftarrow$ ” es consecuencia directa de la propiedad de entrelazamiento de ceros de polinomios ortogonales del Teorema 5, mientras que para la implicación “ $\Rightarrow$ ” observamos que

$$Q_{n,1}(x_{1,n})Q_{n,1}(x_{1,n-1}) < 0, \dots, Q_{n,1}(x_{n-1,n})Q_{n,1}(x_{n-1,n-1}) < 0.$$

Sabemos que  $Q_{n,1}$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  por ser un polinomio de grado  $n$ , luego por simple aplicación del Teorema de Bolzano tenemos la localización de  $n - 1$  ceros  $y_i$ . Finalmente, el hecho de que  $Q_{n,1}(x_{n,n}) < 0$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q_{n,1}(x) = +\infty$  permite localizar el  $n$ -ésimo cero  $y_n$ . □

En el Teorema 5 de la primera sección se enunció que los ceros de dos polinomios ortogonales de grados consecutivos ( $P_n$  y  $P_{n-1}$ ) se entrelazan. Ahora bien, dicho resultado se puede generalizar para el caso de dos polinomios cuasiortogonales de orden 1 y grados consecutivos ( $Q_{n,1}$  y  $Q_{n-1,1}$ ). Estamos en condiciones de enunciar el siguiente

### **Teorema 17 (Entrelazamiento de ceros de polinomios cuasiortogonales)**

Sean

$$\begin{aligned}
Q_{n-1,1} &= p_{n-1} + a_{n-1} \cdot p_{n-2}, & a_{n-1} &\neq 0, \\
Q_{n,1} &= p_n + a_n \cdot p_{n-1}, & a_n &\neq 0,
\end{aligned}$$

dos polinomios cuasiortogonales de orden 1 respecto de  $\omega$  en  $[a, b]$ . Denotemos  $y_{1,n-1}, \dots, y_{n-1,n-1}$  e  $y_{1,n}, \dots, y_{n,n}$  a los ceros de  $Q_{n-1,1}$  y  $Q_{n,1}$ , respectivamente. Entonces se tiene el entrelazamiento

$$y_{1,n} < y_{1,n-1} < y_{2,n} < y_{2,n-1} < \cdots < y_{n-1,n} < y_{n-1,n-1} < y_{n,n} \quad (2.7)$$

si y solo si

$$\begin{cases} f_n(y_{n-1,n-1}) + a_n < 0 & \text{si } a_{n-1} < 0, \\ f_n(y_{1,n-1}) + a_n > 0 & \text{si } a_{n-1} > 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Asumiremos en este caso que  $n$  es impar, el caso  $n$  par se demuestra de manera análoga. Observamos que el entrelazamiento (2.7) se tendrá, si y solo si,

$$Q_{n,1}(y_{1,n-1}) > 0, Q_{n,1}(y_{2,n-1}) < 0, \cdots, Q_{n,1}(y_{n-2,n-1}) < 0, Q_{n,1}(y_{n-1,n-1}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} p_n(y_{1,n-1}) + a_n p_{n-1}(y_{1,n-1}) > 0, \quad p_n(y_{2,n-1}) + a_n p_{n-1}(y_{2,n-1}) < 0, \\ \cdots, \quad p_n(y_{n-1,n-1}) + a_n p_{n-1}(y_{n-1,n-1}) > 0, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n < \min_{1 \leq i \leq n-1} \left( -\frac{p_n(y_{i,n-1})}{p_{n-1}(y_{i,n-1})} \right) & \text{si } a_{n-1} < 0, \\ a_n > \max_{1 \leq i \leq n-1} \left( -\frac{p_n(y_{i,n-1})}{p_{n-1}(y_{i,n-1})} \right) & \text{si } a_{n-1} > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n < \max_{1 \leq i \leq n-1} f_n(y_{i,n-1}) & \text{si } a_{n-1} < 0, \\ a_n > \min_{1 \leq i \leq n-1} f_n(y_{i,n-1}) & \text{si } a_{n-1} > 0. \end{cases}$$

Como  $f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$  es una función creciente en todo su dominio, se sigue que

$$\min_{1 \leq i \leq n-1} f_n(y_{i,n-1}) = f_n(y_{1,n-1}), \quad \max_{1 \leq i \leq n-1} f_n(y_{i,n-1}) = f_n(y_{n-1,n-1})$$

Por tanto, se deduce que

$$\begin{cases} f_n(y_{n-1,n-1}) + a_n < 0 & \text{si } a_{n-1} < 0, \\ f_n(y_{1,n-1}) + a_n > 0 & \text{si } a_{n-1} > 0, \end{cases}$$

tal y como queríamos probar. □

Con el propósito de seguir estudiando las propiedades que cumplen los polinomios cuasiortogonales de orden 1, se tiene del Teorema 14, haciendo  $r = 1$ , que  $Q_{n,1}$  admite la expresión determinantal

$$Q_{n,1}(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} & x - \alpha_{n-1} + a \end{vmatrix},$$

que vuelve a ser una matriz tridiagonal (de Jacobi). Del Teorema de Favard (véase [3]) el Teorema 4.4 se sigue que si  $Q_{n,1}$  tiene todos sus ceros simples en  $(a, b)$ , entonces  $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, Q_{n,1}\}$  es la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a una medida modificada  $d\tilde{\omega}$  caracterizada por los parámetros  $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} - a, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$  que forman la matriz de Jacobi.

Por otro lado, del Teorema 13 sabemos que los polinomios cuasiortogonales de orden 1 se relacionan entre sí por medio de una ley de recurrencia a tres términos, donde los coeficientes son expresiones polinomiales que en general sabemos que existen por [4]. Para el caso  $r = 1$  se puede conocer explícitamente la expresión de dichos polinomios, resultado del siguiente

**Teorema 18 (Recurrencia polinomios cuasiortogonales de orden 1)** *La familia  $\{Q_{n,1}(x)\}_{n \geq 0}$  de polinomios cuasiortogonales mónicos de orden 1 cumple la ley de recurrencia a tres términos*

$$A(x)Q_{n+1,1}(x) + B(x)Q_{n,1}(x) + C(x)Q_{n-1,1}(x) = 0, \quad (2.8)$$

con  $A(x) = x + \gamma_1$ ,  $B(x) = -x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3$  y  $C(x) = \gamma_4 x + \gamma_5$ , siendo  $\gamma_4 = \beta_{n-1} \cdot \frac{b}{c}$ ,  $\gamma_2 = \alpha_n + b - a - \gamma_1$ ,  $\gamma_1, \gamma_3$  y  $\gamma_5$  soluciones del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \beta_{n-1}(a - \alpha_n) & \beta_{n-1} & -c \\ \alpha_n \alpha_{n-1} - a \alpha_{n-1} - \beta_n & b - \alpha_{n-1} & 1 \\ a - b - \alpha_n & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_n - \gamma_4 - b(\alpha_n + b - a - \alpha_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

donde  $Q_{n+1,1} = p_{n+1} + a \cdot p_n$ ,  $Q_{n,1} = p_n + b \cdot p_{n-1}$ ,  $Q_{n-1,1} = p_{n-1} + c \cdot p_{n-2}$  con  $abc \neq 0$ , siendo  $\{p_k\}_{k \geq 0}$  la familia de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la función peso  $\omega$  y  $\alpha_k, \beta_k$  los coeficientes de la ley de recurrencia a tres términos definidos en el Teorema 2.

*Demostración.* Sabemos por [4] de la existencia de  $A \in \mathbb{P}_1$ ,  $B \in \mathbb{P}_2$ ,  $C \in \mathbb{P}_1$  cumpliendo (2.8). Podemos suponer por tanto, sin pérdida de generalidad, que  $A(x) = x + \gamma_1$  es un polinomio mónico y en consecuencia  $B(x) = -x^2 + \gamma_2 x + \gamma_3$ . Aplicando la ley de recurrencia a tres términos (Teorema 2) y las expresiones de los polinomios cuasiortogonales dadas en el enunciado, es fácil expresar (2.9) en términos de  $p_{n-1}$  y  $p_{n-2}$  de modo que:

$$D(x) \cdot p_{n-1}(x) - E(x) \cdot p_{n-2}(x) \equiv 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
D(x) &= (a - b - \alpha_n + \gamma_1 + \gamma_2)x^2 + (\gamma_3 + \gamma_4 - \beta_n - a\gamma_1 + \alpha_n\alpha_{n-1} + b\gamma_2 - \alpha_n\gamma_1 \\
&\quad - \alpha_{n-1}\gamma_1 - \alpha_{n-1}\gamma_2)x + \gamma_5 + b\gamma_3 - \beta_n\gamma_1 - \alpha_{n-1}\gamma_3 - a\alpha_{n-1}\gamma_1 + \alpha_n\alpha_{n-1}\gamma_1 \\
E(x) &= \beta_{n-1}[\gamma_3 + \gamma_1(a - \alpha_n)] - c\gamma_5 + x[\beta_{n-1}(a - \alpha_n + \gamma_1 + \gamma_2) - c\gamma_4].
\end{aligned}$$

Como  $D(x) \cdot p_{n-1}(x) = E(x) \cdot p_{n-2}(x)$ , y sabemos que  $p_{n-1}$  y  $p_{n-2}$  no tiene ceros comunes (Teorema 1.7) se sigue que  $D(x) \equiv E(x) \equiv 0$ , lo que permite obtener un sistema lineal de 5 ecuaciones con 5 incógnitas  $(\gamma_1, \dots, \gamma_5)$  cuya solución debe verificar  $\gamma_4 = \beta_{n-1} \cdot \frac{b}{c}$ ,  $\gamma_2 = \alpha_n + b - a - \gamma_1$  y  $\gamma_1, \gamma_3$  y  $\gamma_5$  soluciones del sistema lineal de ecuaciones (2.9).

□

**Nota 1** El Teorema 18 es nuevo en la literatura. Debemos hacer notar que Chihara afirma en [4] la existencia de los polinimios  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Sin embargo, al menos para el caso de cuasiortogonalidad de orden 1, vemos que el sistema de aparece en el Teorema 18 pudiera no tener solución, como podría ser por ejemplo, el caso particular

$$a = b = c = \frac{\beta_{n-1} - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_n}$$

si la función peso cumple  $\alpha_n \neq \alpha_{n-1}$ ,  $\beta_n \neq \beta_{n-1}$ . Parece que la existencia de la ley de recurrencia a tres términos pudiera no siempre existir, tal y como se afirma en [4].

### 2.3. Cuasiortogonalidad de orden 2

Nuestros propósitos se centran ahora en realizar un estudio paralelo de las propiedades vistas en la sección anterior para  $r = 2$  superiores. Recordemos que por la Definición 4, si denotamos por  $Q_{n,2}(x)$  al  $n$ -ésimo polinomio cuasiortogonal de orden 2 mónico, por (2.1) se tiene que:

$$Q_{n,2}(x) = p_n(x) + a_1 \cdot p_{n-1}(x) + a_2 \cdot p_{n-2}(x) \quad a_2 \neq 0,$$

donde  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  es la familia de polinomios ortogonales mónicos respecto de  $\omega$ . Por el Teorema 14, se sabe que  $Q_{n,2}$  admite la expresión determinantal

$$Q_{n,2}(x) = \begin{vmatrix} x - \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & x - \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{n-2} & x - \alpha_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1} - a_2 & x - \alpha_{n-1} + a_1 \end{vmatrix},$$

es decir,  $Q_{n,2}$  se puede expresar como el determinante de una matriz que resulta ser tridiagonal. En general, la propiedad de ser una matriz tridiagonal no se verifica para órdenes superiores ( $r \geq 3$ ).

Recordemos que el Teorema 12 nos permite asegurar que el polinomio  $Q_{n,2}$  tendrá al menos  $n - 2$  ceros reales y distintos en el intervalo  $(a, b)$ . A diferencia del caso  $r = 1$  en el que el único cero situado fuera del intervalo  $(a, b)$  debía ser necesariamente real, para el caso  $r = 2$  podrían aparecer raíces complejas conjugadas.

A continuación trataremos de estudiar condiciones necesarias para garantizar que los ceros sean reales y distintos. Una primera solución al problema se aporta en [1], donde Brekinski prueba que una condición suficiente para que se cumpla lo anterior es que  $a_2 < 0$ . Tratando de refinar el resultado anterior, en [10] se da una condición suficiente más precisa. Se tiene por tanto el siguiente:

**Teorema 19 (Ceros reales y distintos, cuasiortogonalidad de orden 2)**

*Si  $a_2 < \beta_{n-1}$ , entonces el polinomio  $Q_{n,2}$  tiene todos sus ceros reales y distintos.*

*Demostración.* Partiendo de la ley de recurrencia para la familia mónica definida en (1.1), se tiene que:

$$\beta_{n-1} = \frac{-p_n(x) + (x - \alpha_{n-1})p_{n-1}(x)}{p_{n-2}(x)}.$$

Si  $x_{1,n-1}, x_{2,n-1}, \dots, x_{n-1,n-1}$  denotan los ceros del polinomio  $p_{n-1}$ , se sigue que:

$$\beta_{n-1} = \frac{-p_n(x_{i,n-1})}{p_{n-2}(x_{i,n-1})}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad p_{n-2}(x_{i,n-1}) \neq 0. \quad (2.10)$$

Consideramos el caso  $n$  par y supongamos que  $a_2 < \beta_{n-1}$ . Como consecuencia del Teorema 5 de entrelazamiento de ceros de polinomios ortogonales, se sabe que

$$p_{n-2}(x_{1,n-1}) < 0, \quad p_{n-2}(x_{2,n-1}) > 0, \dots, \quad p_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0.$$

Por tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(x_{1,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{1,n-1}) < 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{1,n-1}) < 0, \\ p_n(x_{2,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{2,n-1}) > 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{2,n-1}) > 0, \\ \vdots \\ p_n(x_{n-2,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{n-2,n-1}) > 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{1,n-1}) > 0, \\ p_n(x_{n-1,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{n-1,n-1}) < 0. \end{array} \right.$$

La cadena de equivalencias anteriores permite localizar  $n - 2$  ceros de  $Q_{n,2}$  en  $(a, b)$ . La existencia de los 2 ceros restantes se tiene de haber supuesto que  $n$  es par, debido a que  $\lim_{x \rightarrow \infty} Q_{n,2}(x) = +\infty$ . Para el caso  $n$  impar la demostración es similar.

□

Al igual que hicimos en la sección anterior para los polinomios cuasiortogonales de orden 1, buscaremos condiciones suficientes (y/o necesarias) para localizar los ceros  $y_1$  e  $y_n$  con respecto a los puntos de frontera del intervalo  $[a, b]$ . En este sentido, Shohat demuestra en [10] el siguiente resultado:

**Teorema 20 (Localización de primer y n-ésimo cero)** *Supongamos que  $Q_{n,2}$  tiene todos sus ceros reales y distintos. Consideremos la función racional  $f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$  y denotemos  $x_{1,n}, x_{2,n-1}, \dots, x_{n,n}$  a los ceros de  $p_n$ . Entonces se tienen las siguientes equivalencias:*

1. 
$$\begin{cases} f_n \cdot f_{n-1}(a) + a_1 f_{n-1}(a) + a_2 < 0 & \Leftrightarrow y_1 < a, \\ a_1 f_{n-1}(x_{1,n}) + a_2 < 0 & \Leftrightarrow y_1 < x_{1,n}, \end{cases}$$
2. 
$$\begin{cases} f_n \cdot f_{n-1}(b) + a_1 f_{n-1}(b) + a_2 < 0 & \Leftrightarrow y_n > b, \\ a_1 f_{n-1}(x_{n,n}) + a_2 < 0 & \Leftrightarrow y_n > x_{n,n}. \end{cases}$$

*Demostración.* 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $n$  es par. Por tanto:

$$f_n \cdot f_{n-1}(a) + a_1 f_{n-1}(a) + a_2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{p_n(a)}{p_{n-2}(a)} + a_1 \frac{p_{n-1}(x)}{p_{n-2}(x)} + a_2 < 0$$

Como  $n - 2$  es par se sabe que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_{n-2}(x) = +\infty$ . Del hecho de que  $p_{n-2}$  tenga todos sus ceros en el intervalo  $(a, b)$  se tiene que  $p_{n-2}(a) > 0$ . De esta manera:

$$\begin{aligned} f_n \cdot f_{n-1}(a) + a_1 f_{n-1}(a) + a_2 < 0 & \Leftrightarrow p_n(a) + a_1 p_{n-1}(a) + a_2 p_{n-2}(a) < 0 \\ & \Leftrightarrow Q_{n,2}(a) < 0 \\ & \Leftrightarrow y_1 < a. \end{aligned}$$

Para la última equivalencia se ha procedido en dos pasos. La implicación ' $\Rightarrow$ ' se verifica porque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} Q_{n,2}(x) = +\infty$ . Ahora bien, para la implicación ' $\Leftarrow$ ' se tiene en cuenta la propiedad de que los dos ceros no pueden estar a la izquierda de  $a$ . Este resultado será una consecuencia del Teorema 21 que demostraremos más adelante. Empleando dicho argumento, se producirá entonces un entrelazamiento de los ceros de  $Q_{n,2}$  y  $p_{n-1}$ .

Para la segunda parte de la demostración, basta con ver que

$$a_1 f_{n-1}(x_{1,n}) + a_2 < 0 \Leftrightarrow a_1 \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}(x_{i,n}) + a_2 < 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{i,n}) < 0 \Leftrightarrow y_1 < x_{i,n},$$

lo cual es evidente si aplicamos la afirmación expuesta en la primera parte de la demostración.

2. Se demuestra de manera similar.



□

A continuación daremos algunas propiedades de entrelazamiento de los ceros de  $Q_{n,2}$ . En primer lugar vamos a refinar el teorema de entrelazamiento entre los ceros de  $Q_{n,2}$  y  $p_{n-1}$ . A propósito, Shohat demuestra en [10] una condición necesaria y suficiente para que se produzca dicho entrelazamiento.

**Teorema 21 (Entrelazamiento de ceros)** Sean  $y_1, y_2, \dots, y_n$  los ceros de  $Q_{n,2}$ . Entonces:

$$a_2 < \beta_{n-1} \Leftrightarrow y_1 < x_{1,n-1} < y_2 < \dots < y_{n-1} < x_{n-1,n-1} < y_n.$$

*Demostración.* Asumimos que  $a_2 < \beta_{n-1}$  ( y que  $n$  es par ). Por (2.10) se obtiene que

$$a_1 < -\frac{p_n}{p_{n-2}}(x_{i,n-1}), \forall i = 1, 2, \dots, n-1,$$

luego

$$\left\{ \begin{array}{l} p_n(x_{1,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{1,n-1}) < 0, \\ p_n(x_{2,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{2,n-1}) > 0, \\ \vdots \\ p_n(x_{n-2,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{n-2,n-1}) > 0, \\ p_n(x_{n-1,n-1}) + a_2 p_{n-2}(x_{n-1,n-1}) < 0, \end{array} \right.$$

donde  $p_{n-2}(x_{2j-1,n-1}) > 0$  y  $p_{n-2}(x_{2j,n-1}) < 0$ . De este modo, obtenemos el entrelazamiento esperado debido a que

$$Q_{n,2}(x_{1,n-1}) < 0, Q_{n,2}(x_{2,n-1}) > 0, \dots, Q_{n,2}(x_{n-2,n-1}) > 0, Q_{n,2}(x_{n-1,n-1}) < 0$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{n,2}(x) = +\infty.$$

□

Una consecuencia directa de este resultado es que  $x_{1,n-1} < y_2$  (respectivamente  $x_{n-1,n-1}$ ), lo cual muestra que el polinomio  $Q_{n,2}$  no puede tener dos de sus ceros a la izquierda de  $a$  ni a la derecha de  $b$ , confirmándose así el argumento empleado en la demostración del Teorema 20.

Para continuar con el estudio de los polinomios cuasiortogonales de orden 2, enunciaremos una propiedad de entrelazamiento de los ceros de  $Q_{n,2}$  y  $p_n$ . El argumento es similar al empleado en el caso de los polinomios cuasiortogonales de orden 1.

**Teorema 22 (Entrelazamiento de ceros, cuasiortogonalidad de orden 2)**

1. Se tiene el entrelazamiento  $y_1 < x_{1,n} < y_2 < x_{2,n} < \cdots < y_n < x_{n,n}$ , si y solo si,

$$\begin{cases} a_1 > -\frac{a_2 \cdot (x_{n,n} - \alpha_{n-1})}{\beta_{n-1}} & y & a_2 < 0, \\ \text{ó} \\ a_1 > -\frac{a_2 \cdot (x_{1,n} - \alpha_{n-1})}{\beta_{n-1}} & y & 0 < a_2 < \beta_{n-1}. \end{cases}$$

2. Se tiene el entrelazamiento  $x_{1,n} < y_1 < x_{2,n} < y_2 < \cdots < x_{n,n} < y_n$ , si y solo si,

$$\begin{cases} a_1 < -\frac{a_2 \cdot (x_{1,n} - \alpha_{n-1})}{\beta_{n-1}} & y & a_2 < 0, \\ \text{ó} \\ a_1 < -\frac{a_2 \cdot (x_{n,n} - \alpha_{n-1})}{\beta_{n-1}} & y & 0 < a_2 < \beta_{n-1}. \end{cases}$$

*Demostración.* Supongamos por simplicidad  $n$  es par, ya que para el caso impar se procede de manera similar. Para  $a_2 < 0$  y  $a_1 > -\frac{a_2 \cdot (x_{n,n} - \alpha_{n-1})}{\beta_{n-1}}$  tenemos que, utilizando la ley de recurrencia para polinomios ortogonales mónicos (1.1),

$$(x_{i,n} - \alpha_{n-1})p_{n-1}(x_{i,n}) - \beta_{n-1}p_{n-2}(x_{i,n}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_{i,n} - \alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}(x_{i,n}) = \frac{1}{f_{n-1}(x_{i,n})}$$

Por tanto

$$a_1 > -a_2 \max_{1 \leq i \leq n} \frac{x_{i,n} - \alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = -a_2 \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{f_{n-1}(x_{i,n})} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{-a_2}{\beta_{n-1}}.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) = +\infty$  ( $n$  par) y los ceros de  $p_n$  y  $p_{n-1}$  se entrelazan por 1.7, se tiene que  $p_{n-1}(x_{2j-1,n-1}) < 0$  y  $p_{n-1}(x_{2j,n-1}) > 0$ . En consecuencia:

$$a_1 > -\frac{a_2}{f_{n-1}(x_{1,n})}, a_1 > -\frac{a_2}{f_{n-1}(x_{2,n})}, \dots, a_1 > -\frac{a_2}{f_{n-1}(x_{n,n})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 p_{n-1}(x_{1,n}) + a_2 p_{n-2}(x_{1,n}) < 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{1,n}) < 0, \\ a_1 p_{n-1}(x_{2,n}) + a_2 p_{n-2}(x_{2,n}) > 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{2,n}) > 0, \\ \vdots \\ a_1 p_{n-1}(x_{n,n}) + a_2 p_{n-2}(x_{n,n}) > 0 \Leftrightarrow Q_{n,2}(x_{n,n}) > 0, \end{cases}$$

obteniéndose así el entrelazamiento buscado.

□

De la misma manera que se hizo en la sección anterior, enunciaremos un resultado que nos permitirá fijar cuáles condiciones necesarias y suficientes para que haya entrelazamiento de los ceros de dos polinomios cuasiortogonales de orden 2 y de grados consecutivos ( $Q_{n,2}$  y  $Q_{n+1,2}$ ).

**Teorema 23 (Polinomios cuasiortogonales de orden 2 consecutivos)** *Sea*  $Q_{n,2} = p_n + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2}$ ,  $Q_{n+1,2} = p_n + a'_1 p_{n-1} + a'_2 p_{n-2}$  *con*  $a_2 < \beta_{n-1}$  *y*  $a'_2 < \beta_n$ .

*Entonces existe un entrelazamiento entre los ceros de*  $Q_{n,2}$  *y*  $Q_{n+1,2}$  *si y solo si*  $f_{n+1}(y_{i,n})f_n(y_{i,n}) + a'_1 f_n(y_{i,n}) + a'_2 < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

*Demostración.* Asumimos de nuevo que  $n$  es par. Si partimos de las desigualdades del enunciado se sigue que:

$$\begin{cases} f_{n+1}(y_{1,n})f_n(y_{1,n}) + a'_1 f_n(y_{1,n}) + a'_2 < 0, \\ f_{n+1}(y_{2,n})f_n(y_{2,n}) + a'_1 f_n(y_{2,n}) + a'_2 < 0, \\ \vdots \\ f_{n+1}(y_{n,n})f_n(y_{n,n}) + a'_1 f_n(y_{n,n}) + a'_2 < 0. \end{cases}$$

Ahora bien, como  $p_{n-1}(y_{2j-1,n}) < 0$  y  $p_{n-1}(y_{2j,n}) > 0$  por el Teorema 20, tenemos que

$$\begin{cases} p_{n+1}(y_{1,n}) + a'_1 p_n(y_{1,n}) + a'_2 p_{n-1}(y_{1,n}) > 0 \Leftrightarrow Q_{n+1,2}(x_{1,n}) > 0, \\ p_{n+1}(y_{2,n}) + a'_1 p_n(y_{2,n}) + a'_2 p_{n-1}(y_{2,n}) < 0 \Leftrightarrow Q_{n+1,2}(x_{1,n}) < 0, \\ \vdots \\ p_{n+1}(y_{n,n}) + a'_1 p_n(y_{n,n}) + a'_2 p_{n-1}(y_{n,n}) < 0 \Leftrightarrow Q_{n+1,2}(x_{1,n}) < 0. \end{cases}$$

□

## 2.4. Fórmulas de cuadratura positivas en el eje real con nodos prefijados

Para finalizar esta Memoria consideraremos una aplicación de los resultados obtenidos sobre cuasi-ortogonalidad de órdenes 1 y 2 en relación a la construcción y caracterización de f.c.p. para  $I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$  siendo  $\omega$  una función peso definida en  $[a, b]$ .

El Teorema 8 (de Jacobi) establece condiciones necesarias y suficientes que ha de verificar el polinomio nodal, el cual debe cuasi-ortogonal de orden  $n - k - 1$ , si la f.c. de  $n$  puntos tiene grado de precisión  $n + k$  ( $0 \leq k \leq n - 1$ ). Este polinomio nodal debe tener, además, sus ceros simples y situados en  $(a, b)$ .

Consideremos primero el caso  $k = n - 2$ . La f.c. resultante, con grado de precisión  $2n - 2$  será una f.c.p. (Proposición 2) y el polinomio nodal ha de ser cuasi-ortogonal de orden 1, es decir, de la forma

$$Q_{n,1}(x) = p_n(x) + a_1 \cdot p_{n-1}(x), \quad a_1 \neq 0.$$

Como ya se ha comentado en la Sección 2.2,  $Q_{n,1}$  nunca podrá tener por ceros los del polinomio  $p_{n-1}$ , y por otro lado, la restricción  $a_1 \neq 0$  hace que tampoco

pueda tener por ceros los de  $p_n$ . El Corolario 2 nos establece que  $Q_{n,1}$  tendrá al menos  $n - 1$  ceros distintos en  $(a, b)$  y el Teorema 15 aporta condiciones necesarias y suficientes en términos del valor  $a_1$  que garanticen que  $Q_{n,1}$  tenga todos sus ceros en  $(a, b)$ .

El parámetro libre  $a_1$  podría determinarse para fijar de antemano un nodo en la f.c.p. que no sea un cero de  $p_{n-1}$  ni de  $p_n$ , tal y como se comentó al inicio de la Sección 2.2:

$$Q_{n,1}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a_1 = -f_n(\alpha), \quad f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}},$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $p_{n-1}(\alpha) \cdot p_n(\alpha) \neq 0$ . Por tanto, la condición que debe verificar  $\alpha \in [a, b]$  para que sea un nodo de la f.c.p. resulta ser  $f_n(a) < f_n(\alpha) < f_n(b)$  (recuérdese también el análisis llevado a cabo en el Ejemplo 3 sobre cómo varían continuamente los ceros de  $Q_{n,1}$  a medida que varía también continuamente el parámetro  $a_1$ , para el caso de la función peso de Chebyshev de primer especie, pero igualmente válido para cualquier función peso donde las cantidades relevantes en el análisis son  $f_n(a)$  y  $f_n(b)$ , que en el caso de la función peso de Chebyshev de primer especie toman los valores  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ , respectivamente). Recordemos que la función racional  $f_n$  verifica

- Posee  $n$  raíces en los ceros de  $p_n$ .
- Posee  $n - 1$  asíntotas verticales en los ceros de  $p_{n-1}$ .
- Es creciente en todo su dominio.
- $f_n(b) > 0$ ,  $f_n(a) < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ .

Deducimos por tanto que la ecuación  $f_n(\alpha) = f_n(a)$  tiene  $n - 1$  soluciones en  $(a, b)$ , que denotaremos por  $\{\xi_j\}_{j=1}^{n-1}$ , y de manera similar, la ecuación  $f_n(\alpha) = f_n(b)$  tiene también  $n - 1$  soluciones en  $(a, b)$ , que denotaremos por  $\{\zeta_j\}_{j=1}^{n-1}$ . Además, debe darse

$$a < x_{1,n} < \zeta_1 < x_{1,n-1} < \xi_1 < x_{2,n} < \zeta_2 < \dots \\ < \zeta_{n-1} < x_{n-1,n} < x_{n-1,n-1} < \xi_{n-1} < x_{n,n} < b.$$

Las elecciones de  $a_1 \in [a, b]$  que se tomen en intervalos de la forma  $(\xi_j, \zeta_{j+1})$  cumplirán  $f_n(a) < f_n(\alpha) < f_n(b)$ , y por tanto garantizaremos que  $Q_{n,1}$  tiene todos sus ceros reales y distintos en  $(a, b)$ . Esta elección generará una f.c.p. con  $\alpha$  nodo prefijado y máximo grado de precisión. Por otro lado, si  $a_1 \in [a, b]$  se encuentra en un intervalo de la forma  $(\zeta_j, \xi_j)$  no se cumplirá la condición anterior, y en consecuencia, un cero de  $Q_{n,1}$  se encontrará fuera del intervalo  $[a, b]$ , no pudiendo generar un f.c.p. con todos sus nodos en  $[a, b]$ . Las elecciones particulares  $a_1 = \zeta_j$  ó  $a_1 = \xi_j$  darán lugar a las clásicas fórmulas de Gauss-Radau donde se fija uno de los extremos del intervalo de integración.

Hemos probado la existencia de una partición del intervalo  $[a, b]$  en regiones “buenas” y “malas” donde garantizar o no la existencia de una f.c.p. de tipo

Gauss-Radau pero con nodo fijado ahora en el interior del intervalo, usando argumentos que no involucran a funciones peso con signo variante (Teorema 10), y que fue demostrado por primera vez en [2]. Lo resumimos en el siguiente

**Teorema 24** *Sea  $\omega$  una función peso en  $[a, b]$ ,  $\{p_n\}_{n \geq 0}$  la familia de polinomios mónicos con respecto a  $\omega$ ,  $f_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$  con  $n \geq 1$  y  $\alpha \in [a, b]$  tal que no coincide con ningún cero ni de  $p_{n-1}$  ni de  $p_n$ . Sea  $I_n(f)$  una fórmula de cuadratura de  $n$  puntos para  $I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$  con el nodo  $\alpha$  prefijado. Entonces,  $I_n(f)$  tiene el dominio máximo de precisión, esto es,  $2n - 2$ , sí y sólo si, es de tipo interpolatorio y los nodos son los ceros de  $Q_{n,1} = p_n - f_n(\alpha)p_{n-1}$ . La fórmula es positiva, y todos los nodos estarán en  $(a, b)$ , sí y sólo sí,*

$$\alpha \in (a, b) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} [\zeta_i, \xi_i],$$

donde las cantidades  $\zeta_i$  y  $\xi_i$  son las definidas previamente.  $I_n(f)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau con  $x = a$  prefijado, sí y sólo si,  $\alpha \in \{a, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ , mientras que  $I_n(f)$  coincide con la fórmula de cuadratura de Gauss-Radau con  $x = b$  prefijado, sí y sólo si,  $\alpha \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, b\}$ .

Consideremos el caso  $k = n - 3$ , que abordaremos solo de manera muy breve. Por el Teorema 12 sabemos que el polinomio  $Q_{n,2}$  tiene al menos  $n - 2$  ceros en  $(a, b)$ . Para construir la fórmula de cuadratura  $I_n(f)$  que tiene por polinomio nodal  $Q_{n,2}$  debemos garantizar que todos los ceros de éste son reales, distintos y localizados en  $(a, b)$ . Los Teoremas 19 y 20 dan respuesta a nuestro problema. Por el Teorema de Jacobi, sabemos por tanto que, en ese caso, la f.c. será exacta ahora en  $\mathbb{P}_{2n-3}$ . Sin embargo, por la Proposición 2 no podemos garantizar a priori que los pesos sean todos positivos. De hecho, en [10] se demuestra que la f.c. tendrá a lo sumo un peso negativo. Como vemos, el análisis en esta situación se complica considerablemente, por lo que no profundizaremos en los detalles. La caracterización de f.c. que resultan ser positivas, tienen dos nodos distintos fijos de antemano y poseen máximo grado de precisión fue obtenida en [2].



---

## Conclusiones

En este trabajo hemos considerado en el primer capítulo una introducción a la Teoría de Polinomios Ortogonales en el Eje Real y fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio y de tipo-Gauss, como paso previo a la introducción al concepto de cuasiortogonalidad. Si bien es cierto que la Teoría de Polinomios Ortogonales en el Eje Real ha sido ampliamente estudiada en la literatura, muy pocas son las referencias bibliográficas existentes a día de hoy sobre el estudio de las propiedades de los polinomios cuasi-ortogonales. Riesz introdujo este concepto en [9] el año 1923 para el caso particular de los polinomios de Legendre de orden de cuasiortogonalidad uno. Posteriormente Féjer abordó en [5] en el año 1933 este concepto para el caso de orden dos. Pero fue realmente Shohat en el año 1937 quien impulsó verdaderamente esta teoría por primera vez en [10] abordando el orden general, con el fin de construir fórmulas de cuadratura positivas.

Esta Memoria puede entenderse como un “survey” sobre el concepto de cuasi-ortogonalidad, orientado a la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura positivas. Se han considerado principalmente algunas de las referencias básicas, como son los trabajos de Brezinski et. al. ([1]), Bultheel et. al. ([2]), Chihara ([4]), Joulak ([6]) y Shohat ([10]). Algunas referencias sobre este concepto no pudieron ser finalmente consideradas por limitaciones de espacio y tiempo, pero hemos de decir que no son muchas más las contribuciones existentes en la literatura, por lo que el tema abordado en esta Memoria constituye una línea de investigación actual dentro de la Teoría de Aproximación. Algunos de los resultados estudiados han sido ilustrados para el caso particular de la función peso de Chebyshev de primera especie. Decir finalmente que, por lo que sabemos, el Teorema 18 es nuevo en la literatura.





---

## Bibliografía

- [1] BREZINSKI, C. , DRIVER, K.A., REDIVO-ZAGLIA.M. Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials. *Appl. Numer. Math.*48 (2004) 157-168.
- [2] BULTHEEL, A., CRUZ-BARROSO, R., VAN BAREL, M. On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line. *Calcolo.* 47(1) (2010) 21-48.
- [3] CHIHARA, T.S. An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series. *Gordon and Breach, New York.* 1978.
- [4] CHIHARA, T.S. On quasi-orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*8 (1957) 765–767.
- [5] FÉJER, L. Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. *Math.Z.*37 (1933) 287–309.
- [6] JOULAK, H. A contribution to quasi-orthogonal polynomials and associated polynomials. *Appl. Numer. Math.* 54 (2005) 65–78.
- [7] KRYLOV, V.I. Approximate Calculation of Integrals. *The MacMillan Company, New York.* 1962.
- [8] MONEGATO, G. On polynomials ortogonal with respect to particular variable-signed weight functions. *J. Appl. Math. and Phys.* 31 (1980) 549–555.
- [9] RIESZ, M. Sur le problème des moments III. *Ark.Mat.Astr.Fys.* 17(16) (1923) 1–52.
- [10] SHOHAT, J. On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.* 42 (1937) 461–496.



# Quasi-orthogonality and positive quadrature



Sección de Matemáticas  
Universidad de La Laguna

## formulas on the real line

Eduardo Jiménez Calzadilla

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101100692@ull.edu.es

### Abstract

Quasi-orthogonal polynomials arise from the construction of quadrature formulas with degrees of accuracy between those of interpolatory type and Gaussian rules. Starting from a weight function  $\omega$  supported on the interval  $[a, b]$  we consider an introduction to the Theory of Orthogonal Polynomials (existence and unicity, recurrence relations, properties of zeros, determinantal formula, Jacobi matrices, etc) and to the construction and characterization of quadrature formulas of interpolatory type and Gauss-type, as rules of numerical integration for the estimation of definite integrals on the interval  $[a, b]$  with respect to the weight function  $\omega$ . The main purpose of this project is to extend such theory to the context of quasi-orthogonality, establishing some of the well known general properties in the math literature and deepening in the particular cases of orders one and two. This report concludes with an application to the characterization of positive quadrature formulas with prescribed nodes, not necessarily at the endpoints of the interval of integration.

### 1. Orthogonal polynomials and quadrature formulas on the real line

We consider a family  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  of polynomials satisfying some orthogonality conditions with respect to the inner product induced by a weight function  $\omega$  supported on the interval  $[a, b]$ . In this context, some of the most relevant results on **orthogonal polynomials** (existence, unicity, recurrence relations, location and interlacing properties of zeros, Christoffel-Darboux and confluent formula, Jacobi matrices, etc) are presented.

Next, **Quadrature Formulas** (Q.F.) of the form

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j), \quad x_j \in [a, b], \quad x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j,$$

for the numerical approximation of integrals like

$$I_\omega(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx$$

are introduced. *Interpolatory-type* q.f. are analyzed. In this case, the nodes are taken arbitrarily, different from each other and located in  $(a, b)$ , and the rule is obtained by integrating the corresponding interpolatory polynomial in Lagrange formula. Thus, the weights  $A_j$  are determined by integrating over  $[a, b]$  the fundamental Lagrange polynomials. In this case,  $I_n(P) = I_\omega(P)$ , for all polynomial  $P$  of degree up to  $n - 1$ . In *Gaussian Formulas* the nodes and weights are particularly determined to increase the domain of exactness to polynomials of degree at most  $2n - 1$ , and they can be efficiently computed as an eigenvalue problem associated to the *Jacobi matrices*. Here, the  $n$  nodes in  $I_n(f)$  are precisely the roots of  $p_n$ .

Now, for the construction of q.f. with an intermediate degree of accuracy in between interpolatory-type and Gaussian formulas, we can make use of the *Jacobi's theorem*, which allows us to relate the two main topics of this work: q.f. and quasi-orthogonality.

### 2. Quasi-orthogonality

A polynomial  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  is said to be **quasi-orthogonal** of order  $r$  with respect to the weight function  $\omega$  if  $Q_{n,r} \perp \mathbb{P}_{n-1-r}$ . A monic polynomial  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  is quasi-orthogonal of order  $r$ , with  $r \leq n$ , if and only if, there exist  $a_{n-1}, \dots, a_{n-r} \in \mathbb{R}$  so that

$$Q_{n,r} = p_n + a_{n-1}p_{n-1} + \dots + a_{n-r}p_{n-r}, \quad a_{n-r} \neq 0.$$

Our purpose in this chapter is to extend to quasi-orthogonal polynomials some of the properties already studied for orthogonal polynomials. We highlight some of the most remarkable results:

■ **(Zeros):** A polynomial  $Q_{n,r} \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$  has at least  $n - r$  zeros of odd multiplicity in  $(a, b)$ .

■ **(Three-term recurrence relation):** Three consecutive quasi-orthogonal polynomials of order  $r$ ,  $Q_{n-1,r}$ ,  $Q_{n,r}$  and  $Q_{n+1,r}$ , satisfy a three term recurrence of the form

$$A_n(x)Q_{n+1,r}(x) + B_n(x)Q_{n,r}(x) + C_n(x)Q_{n-1,r}(x) = 0,$$

where  $A_n \in \mathbb{P}_r$ ,  $B_n \in \mathbb{P}_{r+1}$  and  $C_n \in \mathbb{P}_r$ .

Next, a parallel study of **quasi-orthogonality of orders 1 and 2** is approached, deepening further into the results established for the general case. In this sense, we prove zero interlacing properties involving two quasi-orthogonal polynomials of consecutive degrees and quasi-orthogonal polynomials with orthogonal polynomials. This project concludes with an application of the results discussed above to the construction of **positive q.f.** with highest degree of accuracy and some prescribed nodes, not necessarily at the endpoints of the interval of integration.

### 3. Example

Some of the results developed in the two previous chapters have been numerically illustrated by considering one of the most important weight functions in the math literature due to its applications in Approximation Theory: *Chebyshev weight function of the first kind*  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  in  $[-1, 1]$ . The corresponding orthogonal polynomial is given by  $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ , their zeros are explicitly given by  $x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)}$  with  $\theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots, n$ . If we take for example the polynomials  $T_9$  and  $T_{10}$ , we can observe the **interlacing** property of their zeros in Figure 1.

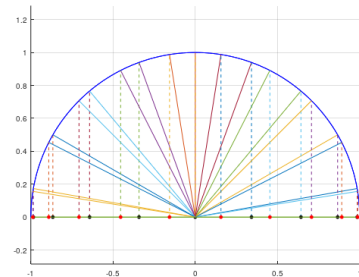


Figure 1: The black(red) points show the zeros of  $T_9$  ( $T_{10}$ ) over the interval  $[-1, 1]$ .

### References

- [1] BULTHEEL, A., CRUZ-BARROSO, R., VAN BAREL, M. On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line. *Calcolo.* 47(1) (2010) 21-48.
- [2] CHIHARA, T.S. On quasi-orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.* 8 (1957) 765-767.
- [3] JOULAK, H. A contribution to quasi-orthogonal polynomials and associated polynomials. *Appl. Numer. Math.* 54 (2005) 65-78.
- [4] SHOHAT, J. On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.* 42 (1937) 461-496.