Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paola Santana Morales

Optimización en problemas de juegos bipersonales

Optimization in two-person game problems

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2021

Dirigido por
Carlos González Martín

Carlos González Martín
Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutor, Carlos González Martín, por su dedicación, tiempo y conocimientos, por su apoyo y consejos que han hecho que mi trabajo saliese adelante.

A mis padres, Andrés y Toñi, y hermana, Morela; ellos son parte indispensable en mi día a día. Sin sus consejos, confianza y apoyo no sería la persona en la que me he convertido.

A mis amigos de Gran Canaria, que son parte de mi vida y no me la imagino sin ellos, gracias por estar siempre ahí y hacer que estos años hayan resultado menos difíciles.

A los amigos que he tenido la oportunidad de hacer en Tenerife durante mis años de estudio, Carlos, Eduardo e Indira, y que a partir de ahora serán también insustituibles.

A la Universidad de La Laguna, por permitirme profundizar en un campo que siempre me ha parecido apasionante.

A todos los profesores, que desde el inicio de este grado han compartido sus conocimientos para que pudiera llegar este momento.

Me gustaría agradecer a todos los profesores que me han dado clase a lo largo de mi vida, en especial a los de Matemáticas, no tengo duda de que han sido una parte fundamental para llegar hasta aquí.

Paola Santana Morales
La Laguna, 21 de junio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

La Teoría de Juegos estudia situaciones en la que determinados actores (jugadores) compiten o colaboran para conseguir fines particulares. Muchos de estos casos se pueden modelizar matemáticamente precisando la resolución de diversos problemas de optimización.
En este trabajo se hace un estudio de los juegos bipersonales de suma nula y de los juegos bimatriciales. En el primer caso, cuando se produce una jugada, la suma de la ganancias de ambos jugadores es igual a cero. En el segundo caso, no existe esta condición para las ganancias de los jugadores intervinientes.
Nos interesa, preferentemente, la relación de los dos tipos de juegos con los problemas de optimización. En el caso de los juegos bipersonales de suma nula, observamos que con las herramientas que proporciona la Programación Lineal, somos capaces de determinar puntos de equilibrio que proporcionan estrategias mixtas óptimas para los jugadores. En el caso de los juegos bimatriciales, su formulación equivalente como problemas complementarios lineales proporciona la determinación de los correspondientes equilibrios de Nash.
El trabajo se completa con la relación de conceptos y propiedades que se precisan para plasmar las ideas anteriores, introducir los métodos de resolución necesarios y aplicar estos a varios ejemplos con la ayuda de soporte computacional.

Palabras clave: *Teoría de Juegos – Juego bipersonal de suma nula – Juego Bimatricial – Programación Lineal – Punto de equilibrio – Estrategias mixtas – Problema Complementario Lineal – Equilibrios de Nash*

Abstract

Game Theory studies situations in which certain actors (players) compete or collaborate to achieve particular ends. Many of these cases can be mathematically modeled requiring the resolution of various optimization problems.
In this project, a study of two-person zero-sum games and bimatricial games is made. In the first case, when a play occurs, the sum of the winnings of both players is equal to zero. In the second case, there is no such condition for the winnings of the participating players.
We are interested, mainly, in the relationship of the two types of games with the optimization problems. In the case of two-person zero-sum games, we observe that with the tools provided by Linear Programming, we are able to determine equilibrium points that offer optimal mixed strategies for the players. In the case of bimatricial games, their equivalent formulation as linear complementary problems provides the determination of the corresponding Nash equilibria.
The project is completed with the relationship of concepts and properties that are required to capture the previous ideas, introduce the necessary resolution methods and apply these to various examples with the help of computational support.

Keywords: *Game Theory – Two-person zero-sum games – Bimatricial games – Linear Programming – Equilibrium point – Mixed strategies – Linear Complementary Problem – Nash equilibria*

Contenido

Introducción

La Teoría de Juegos estudia situaciones en las que determinados jugadores compiten o colaboran para lograr fines concretos. La consecución de esos logros tiene asociados, de forma natural, diferentes procesos de optimización. Es, precisamente, este último aspecto el que tiene interés en el presente trabajo, concretamente cuando se estudian dos tipos particulares de juegos bipersonales: los de suma nula y los bimatriciales.

El objetivo del Capítulo 1 es la introducción de los conceptos básicos de la Teoría de Juegos, que nos serán necesarios para la comprensión de todo el trabajo. Sin embargo, en primer lugar, se hará un breve resumen sobre los aspectos históricos de esta teoría para así conocer las figuras y resultados más importantes que han contribuido a que esta alcance la importancia que tiene en la actualidad. A continuación, en la Sección 1.3, se trabajará la terminología básica de la Teoría de Juegos en la que destacan el concepto de jugadores (participantes que toman decisiones en el juego), pagos (valoración que para cada jugador tiene las consecuencias de alcanzar un determinado resultado) o estrategias (conjunto de acciones que realiza cada jugador), entre otros. En la Sección 1.4 se hará una clasificación de los juegos según distintas características, como el número de jugadores, la información que se conozca del juego o los beneficios que obtienen los jugadores, entre ellas. Seguidamente, en la Sección 1.5, se relacionan los tipos de estrategias que puede elegir un jugador: estrategias puras o estrategias mixtas. Posteriormente, en la Sección 1.6, definiremos la matriz de pagos asociada a cada jugador. Para finalizar el capítulo, en la Sección 1.7, se definen las representaciones en forma extensiva y normal de un juego. Además, a lo largo del capítulo se muestran algunos ejemplos para comprender mejor los conceptos introducidos.

En el Capítulo 2 formalizaremos la definición de juego bipersonal de suma cero y sus matrices de pago asociadas. En la Sección 2.2 introduciremos el término punto de silla que, básicamente, establece límites entre las ganacias y las pérdidas de cada jugador. Por otro lado, cuando estamos ante este tipo de juegos, los jugadores suelen utilizar estrategias mixtas, las cuales asocian un vector de probabilidad a cada estrategia. Este concepto se estudiará en la Sección 2.3. Asimismo, gracias a la anterior definición podremos introducir los conceptos de pago esperado del juego, valor maximín y minimax, además de algunos teoremas asociados a estos. En la Sección 2.4 se enuncia el Teorema Minimax (Von Neumann, 1928) que establece que todo juego bipersonal de suma nula tiene un valor de juego. Sin embargo, para la demostración de este teorema se deben ver dos resultados previamente. Finalmente, en la Sección 2.5, se estudia cómo un juego bipersonal de suma nula se puede reescribir en un problema de Programación Lineal. Para ello, se formulan los problemas de optimización asociados a los jugadores que intervienen.

En el Capítulo 3 trasladaremos todos los conceptos desarrollados en los dos capítulos anteriores al caso de los juego bimatriciales, que son juegos de suma variable. En esta clase de juegos, las ganancias de los jugadores no son opuestas. En la Sección 3.1 se define el concepto de bimatriz de pagos, que relaciona las matrices de pagos de los jugadores. A continuación, en la Sección 3.2, se introducen los equilibrios de Nash para estrategias puras. En el caso de los juegos bipersonales de suma nula, el concepto de punto de silla y equilibrio de Nash coinciden. Además, se definirán dos métodos de búsqueda de estos puntos de equilibrio: correspondencia de la mejor respuesta (3.2.1) y eliminación iterada de estrategias dominadas (3.2.2). Posteriormente, trabajaremos el Problema Complementario Lineal, que nos permitirá introducir el Algoritmo de Lemke, que es un método para resolver este problema asociado a un juego bimatricial.

En el Capítulo 4 se utilizan las ideas introducidas en los capítulos previos para resolver distintos ejemplos desarrollados a lo largo del trabajo. En la Sección 4.1 se resolverán los ejemplos trabajados en el segundo capítulo, juegos bipersonales de suma nula, utilizando un programa desarrollado en *RStudio*. Finalmente, en la Sección 4.2, se resolverán los ejemplos del Capítulo 3, juegos bimatriciales, haciendo uso de una implementación computacional del Algoritmo de Lemke en Python.

1

Introducción a la Teoría de Juegos. Conceptos básicos

1.1. Introducción

En la Teoría de Juegos se estudian situaciones en las que diversos agentes (jugadores) concurren ejecutando acciones (alternativas, estrategias, etc.) que originan determinadas ganancias (o pérdidas) que es necesario optimizar. En la mayoría de casos, los problemas subyacentes se pueden modelizar matemáticamente.

El término "juego" puede resultar engañoso porque generalmente se asocia con entretenimiento o juegos recreativos. Sin embargo, como rama de las Matemáticas, esta teoría estudia situaciones que son difíciles de formalizar matemáticamente, como el comportamiento racional en situaciones de conflicto. Una terminología que ilustra más claramente el objetivo de la Teoría de Juegos es el "análisis matemático de conflictos" y la "toma interactiva de decisiones".

El concepto de **juego** se define formalmente como un ejercicio recreativo o de competición sometido a determinadas reglas, y en el cual se gana o se pierde. Según estudios psicológicos, los juegos ayudan a activar procesos físicos, educativos, sociales y emocionales, que permiten que las personas desarrollen y adopten una conducta resolutiva frente a situaciones de conflicto en la vida real. Cualquier tipo de juego, ya sea de niños, de adultos, juegos de mesa o deportivos, se puede considerar como modelo de situaciones conflictivas y cooperativas en las que se pueden reconocer situaciones y pautas que se repiten con frecuencia en el mundo real.

En definitiva, un juego es una situación donde dos o más personas, denominadas jugadores, compiten para conseguir un objetivo. Para lograrlo se deben seguir una serie de reglas que se determinan con el fin de proporcionar una ganacia justa para cada uno de los jugadores. Es decir, el resultado final del juego siempre conlleva a la producción de ganancias o pérdidas para los jugadores que intervienen. Cada jugador intentará maximizar esta ganancia, pero esto no dependerá solo de él, sino que también influyen las decisiones que tomen los demás jugadores.

Actualmente, la Teoría de Juegos tiene muchas aplicaciones. En la Economía se utiliza para crear una buena distribución entre ofertantes y demandantes de forma que exista una competencia perfecta en el mercado. A su vez, en Biología se ha utilizado para comprender y predecir algunos resultados evolutivos. En Política, se pueden ver las campañas que utilizan los diferentes partidos en las elecciones. Todas estas aplicaciones tienen en común que los resultados dependerán de las decisiones que adopten los jugadores.

En el presente capítulo haremos un breve recorrido por la historia de la Teoría de Juegos y hablaremos sobre las figuras más importantes que contribuyeron a que esta teoría haya tomado la importancia que tiene actualmente. A continuación, introduciremos los conceptos básicos que se utilizarán a lo largo de todo el trabajo y que son imprescindibles para comprender las características de esta teoría. Además, estudiaremos una clasificación sobre los distintos tipos de juegos existentes, ya que estos se pueden clasificar por el número de jugadores, según las estrategias que escoja cada jugador o según el conocimiento de los movimientos de los jugadores, entre otros. Por otro lado, daremos la definición de los tipos de estrategias que puede utilizar un jugador y el de matriz de pagos, que serán totalmente necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos. Finalmente, se definen las distintas representaciones de un juego.

1.2. Aspectos históricos

Los juegos son una parte fundamental de todas las culturas y una de las formas más antiguas de interacción social humana. Los juegos eran importantes como eventos culturales, como herramientas de enseñanza y como marcadores de estatus social. Juegos como “Gyan Chauper” o “La Mansión de Felicidad” fueron utilizados para enseñar lecciones espirituales y éticas. Estos fueron vistos como una forma de desarrollar el pensamiento estratégico y la habilidad mental de la élite política y militar.

La primera referencia a los juegos y la lógica existente en estos aparece en una de las obras filosóficas del matemático y filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que se titulaba *“Nouveaux Essais sur l’entendement humain”* [1] y, aunque fue escrita en 1704, permaneció inédita hasta 1765 cuando se publicó una recopilación de sus obras en latín y francés.

En 1713, James Waldergrave (1684-1741) dejó escrito en una carta una solución minimax de estrategias mixtas a una versión para dos personas del juego conocido como “Le Her”. Sin embargo, fue en la publicación *“Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth”* [2], publicado por Antoine Augustin Cournut (1801-1877), cuando se habló por primera vez de aspectos teóricos sobre la Teoría de Juegos.

No obstante, se considera que esta teoría nace propiamente en 1944 con el matemático John Von Neumann (1903-1957) y el economista Oskar Morgenstern

(1902-1977) con la publicación de su libro *"The Theory of Games and Economic Behavior"* [3], donde plasmaron todos los aspectos que habían descubierto y demostrado sobre esta teoría hasta el momento. El mismo Von Neumann ya había puesto algunos fundamentos en una serie de artículos publicados en 1928. Aún así, cuando se publicó el libro de Von Neumann y Morgenstern fue cuando la sociedad comprendió lo potente que era esta teoría para el estudio de las relaciones humanas.

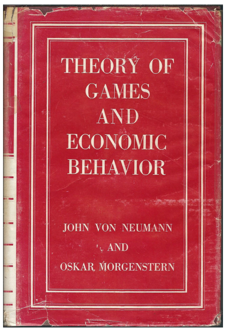

Figura 1.1: A la izquierda, Oskar Morgenstern y John Von Neumann, respectivamente. A la derecha, su libro *"The Theory of Games and Economic Behavoir"*.

Von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero de ellos fue el desarrollo del planteamiento estratégico o no cooperativo. Resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores. A este tipo de juegos se les conoce como *estrictamente competitivos*, o de *suma nula*, ya que la ganancia de uno de los jugadores coincide exactamente con la pérdida del otro.

El segundo fue el desarrollo del planteamiento coalicional o cooperativo, donde intentaron describir una conducta óptima con n jugadores. Debido a la dificultad de este problema, los resultados de Neumann y Morgenstern fueron mucho menos precisos que en el caso anterior. Por esta razón, Von Neumann abandonó la investigación de obtener una estrategia óptima para cada jugador individual. En lugar de ello, clasificó los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales.

En 1950, aparecieron las primeras discusiones sobre el "dilema del prisionero". Este es uno de los ejemplos más representativos del teorema de equilibrio entre dos participantes, en el cual se analizan los incentivos para que dos presos denuncien delitos a la policía para obtener beneficios propios penitenciarios. Este experimento se realizó en la corporación de RAND, la cual estaba relacionada con el tratamiento de las fuerzas armadas estadounidenses.

En esta época, John Forbes Nash (1928-2015) desarrolló una definición de estrategia óptima para juegos de n jugadores donde el óptimo no está definido con anterioridad. Esta estrategia es conocida como el "equilibrio de Nash".

Gracias a John Nash, se descubrió la obra de Antoine Cournot escrita en 1713. Posteriormente, Nash publicó algunas soluciones originales para resolver ciertos problemas de la Teoría de Juegos, para juegos cooperativos de dos jugadores y para reducir juegos cooperativos a marcos no cooperativos.

En 1965, Reinhard Selten (1930-2016) enunció su concepto de equilibrio perfecto de subjuegos que, más adelante, permitió refinar el de equilibrio de Nash. En 1967, John Harsanyi (1920-2000) presentó los conceptos de información completa y juegos bayesianos.

En 1994, Selten, Nash y Harsanyi obtuvieron el Premio Nobel de Economía gracias a las aplicaciones de sus avances en la Teoría de Juegos en este ámbito. En 2005, Thomas Schelling y Robert Aumann ganaron el mismo premio. Schelling estudió y trabajó los modelos dinámicos y los primeros ejemplos sobre la Teoría de Juegos evolutiva mientras que Aumann contribuyó más a la escuela del equilibrio. En 2009, Elionor Ostrom y Oliver Eaton Williamson recibieron este mismo premio por su análisis de la gobernanza económica, esto es, el estudio de la organización de la cooperación allí donde surgen conflictos de intereses, por lo que se trata de un juego que presentan los denominados dilemas sociales.

1.3. Conceptos Básicos

Las situaciones de conflicto que surgen en la Teoría de Juegos se pueden trasladar a problemas de optimización en los que intervienen más de un decisor y por lo general, estos decisores tienen objetivos contradictorios. Estas situaciones de conflicto se denominan **juegos**, los cuales presentan una serie de elementos básicos. Esta terminología básica es la siguiente.

- *Jugadores*: Participantes que toman decisiones con el objetivo de ganar el juego.
- *Acciones de cada jugador*: Decisiones que toma cada jugador a lo largo del juego que le ayudan (habitualmente) a ganar. Este conjunto puede ser finito o infinito.
- *Resultado del juego*: formas de concluir el juego.
- *Pagos*: Valoración que para cada jugador tiene las consecuencias de alcanzar un determinado resultado. Ambos jugadores reciben un pago al finalizar el juego. Según este resultado, el pago puede resultar ser una ganancia o una pérdida.
- *Estrategias*: Conjunto de acciones que realiza cada jugador.
- *Forma normal y forma extensiva*: Distintas formas de representar y describir el juego.

La principal característica de los jugadores es tomar decisiones que convengan en determinados momentos para ganar el juego, teniendo en cuenta las reglas y siendo conscientes de las posibles acciones que puede elegir el oponente.

Presentaremos algunos ejemplos sencillos de juegos en los cuales se ilustran estos conceptos básicos.

Ejemplo 1.3.1 (Piedra, papel o tijera) *En este juego conocido mundialmente intervienen dos jugadores a los cuales denominaremos Jugador 1 (J1) y Jugador 2 (J2). Ambos jugadores eligen a la vez una de las tres opciones: piedra, papel o tijera. Se pueden dar las siguientes situaciones:*

- *Si J1 elige piedra y J2 papel, J2 gana.*
- *Si J1 elige piedra y J2 tijeras, J1 gana.*
- *Si J1 elige papel y J piedra, J1 gana.*
- *Si J1 elige papel y J2 tijeras, J2 gana.*
- *Si J1 elige tijeras y J2 papel. J1 gana.*
- *Si J1 elige tijeras y J2 piedra, J2 gana.*

Esta información se puede resumir en la siguiente tabla:

		Jugador 2		
		Piedra	Papel	Tijera
Jugador 1	Piedra	0	-1	1
	Papel	1	0	-1
	Tijera	-1	1	0

Tabla 1.1: Representación formal del juego

Las estrategias en este juego serán: piedra, papel y tijera. Cada jugador deberá tomar una decisión sin conocer la que tomará su oponente. En cada casilla, el 1 representa la ganancia para el Jugador 1, el -1 la pérdida para este y el 0 cuando hay empate.

Ejemplo 1.3.2 (Juego de dedos) *Supongamos que dos jugadores muestran simultáneamente uno, dos, tres o cuatro dedos. Si la suma de los dedos es par, gana el Jugador 1, pero si es impar, gana el Jugador 2.*

Los resultados que se pueden obtener se resumen en la tabla siguiente:

		Jugador 2			
		Un dedo	Dos dedos	Tres dedos	Cuatro dedos
Jugador 1	Un dedo	1	-1	1	-1
	Dos dedos	-1	1	-1	1
	Tres dedos	1	-1	1	-1
	Cuatro dedos	-1	1	-1	1

Tabla 1.2: Representación formal del juego

Como en el ejemplo anterior, las estrategias en este caso serán: sacar un dedo, dos dedos, tres dedos o cuatro dedos. En la tabla, el 1 representa la ganancia para el Jugador 1 y el -1 la pérdida para este.

1.4. Clasificación de los juegos

Los juegos se pueden clasificar según ciertas características importantes, la más intuitiva es el número de jugadores. Así, un juego puede designarse como un **juego de un solo jugador**, para dos jugadores (**juegos bipersonales**) o para n jugadores (**juegos n-personales**). Cada uno de estos tienen sus propias características. A continuación, clasificaremos los juegos según las estrategias que elijan los jugadores, los beneficios de estos, el conocimiento de los movimientos, entre otros.

En primer lugar, se pueden clasificar los juegos según la información que se conozca de estos. Existen dos tipos:

- Los **juegos de información perfecta**, como el ajedrez, son juegos en los que se conoce todo sobre el juego en todo momento.
- Los **juegos de información imperfecta** son aquellos en los que los jugadores no conocen toda la información sobre el juego. Por ejemplo, en el póker, los jugadores no conocen las cartas de sus adversarios.

Otra manera de clasificarlos es según la medida en que los objetivos de los jugadores coinciden. Existen dos:

- **Juegos de suma constante**, también denominados *juegos de pura competencia*. En esta clase de juegos, la riqueza combinada de ambos jugadores permanece constante, aunque la distribución de esta puede variar a lo largo del juego. Un ejemplo claro de este juego puede ser el póker ya que la ganancia permanece constante, aunque varía según el jugador que gane.
- Los **juegos de suma variable** se pueden dividir en cooperativos y no cooperativos. En el primer caso, los jugadores pueden y es conveniente que se comuniquen, aunque no pueden vincularse. Un ejemplo de este sería el mercado de automóviles, un vendedor y un cliente pueden negociar y llegar a un acuerdo para el precio. En el segundo caso, al contrario, los jugadores no pueden comunicarse y deben jugar por sí solos. El ejemplo básico sería una subasta, en estas las personas pujan y el mejor postor se lleva el producto.

La siguiente manera de clasificar a los juegos depende de las estrategias que escojan los jugadores.

- Un **juego simétrico** es un juego en el que las recompensas por jugar una determinada estrategia dependen de las estrategias elegidas por los otros jugadores. Si las identidades de los jugadores pueden intercambiarse sin que

cambien las recompensas, entonces el juego se denomina simétrico. Los ejemplos más comunes en este tipo de juegos son el juego de la gallina, el dilema del prisionero y la caza del ciervo.
- Los **juegos asimétricos** son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para los jugadores. El juego del ultimátum o el juego del dictador son ejemplos de este tipo de juegos.

Otra forma de categorizar los juegos es según el conocimiento de los movimientos de los jugadores.

- Los **juegos simultáneos** son aquellos juegos en los que los jugadores realizan los movimientos simultáneamente o desconocen los de los otros jugadores. Un ejemplo básico es el juego de "piedra, papel o tijera", pues en este, ambos jugadores enseñan la mano a la vez.
- Los **juegos secuenciales** son aquellos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas de los otros jugadores.

Los **juegos combinatorios** son juegos de información perfecta, sin acciones aleatorias y sin empates. En términos básicos, se trata de un juego de combinación, es decir, se comienza en una posición y los jugadores se turnan para moverse y posicionarse en una nueva. Existe una posición final donde se convierten en ganadores. Un ejemplo simple es el ajedrez, donde cada pieza tiene su posición inicial y un jugador gana cuando posiciona una de sus piezas en el lugar que ocupa el rey de su oponente, es decir, cuando hace un jaque mate.

Finalmente, los juegos se pueden clasificar según los beneficios que obtienen los jugadores. Existen dos tipos:

- En los **juegos de suma nula** la ganancia o beneficio de uno de los jugadores es exactamente la pérdida del otro. El ajedrez y el póker se consideran juegos de suma nula.
- La mayoría de ejemplos reales en negocios y política son **juegos de suma distinta de cero**, pues algunos desenlaces tienen resultados netos mayores o menos que cero. Es decir, cuando un jugador gana no quiere decir necesariamente que el otro pierda.

En este trabajo haremos un estudio detallado de estos dos últimos tipos juegos, además de relacionar los mismos con los problemas de optimización.

1.5. Tipos de estrategias

Como vimos en la Sección 1.3, en la Teoría de Juegos una estrategia de un jugador es un plan de acción completo para cualquier situación que pueda ocurrir. Esta determina completamente la conducta del jugador y establece la acción que este llevará a cabo en cualquier momento del juego.

En ocasiones, el concepto de estrategia se confunde (erróneamente) con el de movimiento. Sin embargo, un movimiento es una acción que toma un jugador en un determinado momento del juego, pero una estrategia establece todos los movimientos de cada jugador para cada situación del juego. Existen dos tipos de estrategias en los juegos, las cuales se pueden utilizar en solitario o combinando ambas.

Una **estrategia pura** proporciona una definición completa para la forma en que un jugador puede jugar a un juego. En particular, define, para cada elección posible, la opción que toma el jugador.

Una **estrategia mixta** es una generalización de una estrategia pura, esta es usada para describir la selección aleatoria de entre varias posibles estrategias puras, lo que determina una distribución de probabilidad sobre el vector de estrategias de cada jugador. Una estrategia totalmente mixta es aquella en la cual la probabilidad es estrictamente positiva de cada estrategia pura.

Obsérvese que, si un jugador elige una acción con probabilidad 1 entonces esta será una estrategia pura. Además, como las estrategias puras son un caso particular de las estrategias mixtas, estas fueron las primeras en ser estudiadas. Antoine Augustin Cournut fue uno de los primeros en hacerlo, este encontró en un modelo de competencia de empresas los equilibrios de Nash en estrategias puras.

1.6. Matrices de pagos

Ambos jugadores, Jugador I y Jugador II, seleccionan, de forma simultánea e independiente, una de sus estrategias puras, respectivamente, $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, y como consecuencia, se produce un pago para cada jugador que que denotaremos a_{ij} en el caso del Jugador I y b_{ij} para el Jugador II. Resultan entonces las siguientes matrices de pago

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

ambas de dimensión $m \times n$. Para cada jugador, se ha de entender como **ganancia** a un pago no negativo, mientras que se entiende como **pérdida** a un pago no positivo.

Si $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ y $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ se obtiene

$$a_{ij} + b_{ij} = 0,$$

entonces el juego se denomina **bipersonal de suma nula**. Por tanto, en este caso, la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro multiplicada por -1. Este tipo de juegos se estudiarán en el Capítulo 2.

Por otro lado, también interesa estudiar los juegos que no son de suma nula. Estos reciben, de forma genérica, el nombre de **juegos bimatriciales** que se estudiarán en el Capítulo 3.

1.7. Representaciones de un juego

Existen dos maneras de representar un juego, forma extensiva y forma normal. Ambas especifican los jugadores, las acciones de cada uno de ellos y los pagos. La forma normal o forma estratégica se centra en describir las estrategias de cada jugador mientras que la forma extensiva lo hace en forma de árbol, resaltando la secuencia del juego. A continuación, explicaremos con más detalle cada una de estas maneras de representación.

Un **juego en forma extensiva** representa explícitamente una serie de aspectos importantes, como la secuencia de movimientos posibles de cada jugador, las diferentes elecciones en cada punto de decisión, las imperfecciones de la información que tiene cada jugador acerca de los movimientos de su oponente cuando él toma una decisión y las ganancias para todos los posibles resultados del juego.

Esta representación suele escribirse en forma de árbol (grafo) de juego con ganancias (con información completa o incompleta), es decir, a lo largo del juego se van añadiendo elementos para refinarlo. Cada vértice o nodo representa un punto donde el jugador toma decisiones. Junto a cada nodo se muestra el jugador correspondiente con un número asociado. Las líneas que parten de estos representan las posibles acciones para el jugador. Las recompensas se encuentran en las hojas del árbol.

Ejemplo 1.7.1 *Supongamos que se tiene el juego del gráfico que se muestra a continuación. El Jugador 1 comienza el juego y tiene dos opciones para elegir: F o U.*

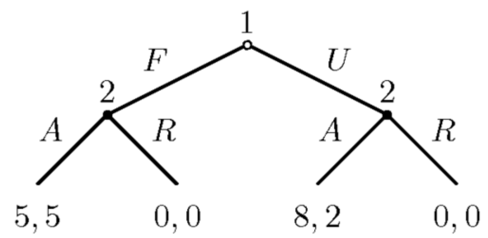

Figura 1.2: Representación en forma extensiva del juego

- *Si el Jugador 1 elige F, el Jugador 2 tendrá dos opciones: A o R, si elige A, el Jugador 1 obtendrá 5 puntos y el Jugador 2 otros 5 puntos. Sin embargo, si el Jugador 2 eligiese R, ambos jugadores obtendrían 0 puntos.*

- *Si el Jugador 1 elige U, el Jugador 2 volverá a tener 2 opciones: A o R, si elige A, el Jugador 1 obtendrá 8 puntos y el Jugador 2, 2 puntos. Si elige R, ambos jugadores obtendrán 0 puntos.*

Por tanto, la mejor opción para el jugador 1 es elegir la opción U, pues así si el jugador 2 elige A obtiene 8 puntos mientras que, de la otra forma, el máximo de punto que podría obtener son 5.

La **forma normal de un juego** es una matriz de pagos en la que se muestra a los jugadores, las estrategias y las recompensas que se pueden obtener. Hay dos tipos de jugadores: uno elige fila y otro columna. Cada jugador tiene dos estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas. Las estrategias se observan en el interior de la siguiente matriz.

Supongamos que se tienen dos estrategias: Estrategia A y Estrategia B. La matriz de pagos estará formada por las posibles decisiones de los Jugadores I y II respecto a estas estrategias. Como se observa, si ambos jugadores eligen la estrategia A, se tendrá p_{IA}, p_{IB} y así con las demás posibilidades.

		Jugador II	
		Estrategia A	Estrategia B
Jugador I	Estrategia A	(p_{IA}, p_{IIA})	(p_{IA}, p_{IIB})
	Estrategia B	(p_{IB}, p_{IIA})	(p_{IB}, p_{IIB})

Tabla 1.3: Representación en forma normal

Esta forma de representación se suele utilizar para juegos simultáneos, donde ambos jugadores eligen a la vez (sin saber la elección del otro jugador).

A continuación veamos ambas representaciones en un mismo ejemplo, para ello retomaremos el Ejemplo 1.3.2.

		Jugador 2			
		Un dedo	Dos dedos	Tres dedos	Cuatro dedos
Jugador 1	Un dedo	1	−1	1	−1
	Dos dedos	−1	1	−1	1
	Tres dedos	1	−1	1	−1
	Cuatro dedos	−1	1	−1	1

Tabla 1.4: Representación formal del juego de dedos

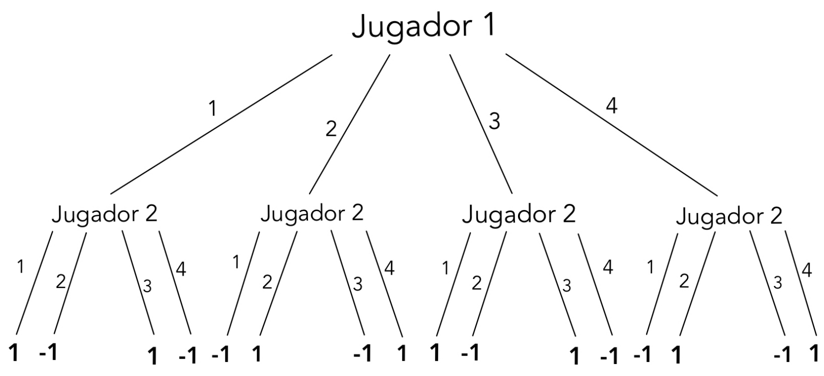

Figura 1.3: Representación en forma extensiva del juego de dedos

Existe una amplia gama de juegos que se pueden modelizar matemáticamente. Entre estos, nos fijaremos en los juegos bipersonales de suma nula, que estudiaremos en el siguiente capítulo, y los juegos bimatriciales cuyo estudio se realiza en el Capítulo 3.

2

Juegos bipersonales de suma cero

El objetivo de este capítulo es profundizar en las características y resultados asociados a los juegos bipersonales de suma nula. Analizaremos el concepto de punto de silla o punto de equilibrio, y describiremos las estrategias mixtas asociadas a estos juegos que son, en términos generales, un vector de probabilidades asociadas a cada fila de la matriz de pagos. Gracias a la anterior definición, podremos definir el concepto de pago esperado del juego, el cual nos permitirá hablar sobre los valores maximín y minimax, además de poder enunciar el Teorema del Minimax de Von Neumann. Para finalizar el capítulo veremos que la determinación de estrategias mixtas óptimas para ambos jugadores se puede afrontar resolviendo sendos problemas de Programación Lineal resultando, además, que los referidos problemas son duales.

2.1. Definición y características de un juego bipersonal de suma nula

Como ya se ha indicado anteriormente, los juegos bipersonales de suma cero modelizan situaciones de conflicto entre dos jugadores, en las cuales la ganancia de uno de ellos es la pérdida del otro. El análisis de este tipo de juegos, especialmente en su forma normal o estratégica, arroja resultados y predicciones más precisas que en otros juegos, y además, la estructura de sus soluciones de equilibrio también es muy precisa. La estructura general de un juego de suma cero incluye:

- Dos jugadores: Jugador I y Jugador II.
- Un conjunto de estrategias para cada jugador: $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ y $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, respectivamente.
- Pagos para cada jugador:
  - El pago es la cantidad de beneficio o pérdida que un jugador obtiene si ocurre un resultado en particular.

- La ganancia de cada jugador depende de su elección y también de la del otro jugador.

Un juego consiste en que un jugador intenta maximizar su recompensa mientras que el otro toma diferentes acciones para minimizar sus posibles pérdidas.

Una característica muy particular de los juegos de suma cero es que la solución de equilibrio depende en gran medida del comportamiento de cada jugador como decisor racional independiente, sin la necesidad de elementos de coordinación adicionales.

Definición 2.1.1 *Sea $N = \{1, 2\}$ el conjunto de los jugadores del juego, S y T los conjuntos de estrategias puras para los Jugadores I y II, respectivamente. Un* ***juego bipersonal de suma cero*** *en forma normal puede representarse por la terna $(N, S \times T, u)$, donde*

$$\begin{aligned} u\colon\ S \times T &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s,t) &\longrightarrow (u_1(s,t), u_2(s,t)) \end{aligned}$$

tal que $\forall (s,t) \in S \times T$, se cumple que

$$u_1(s,t) + u_2(s,t) = 0$$

Como se explicó en el capítulo anterior, este juego se puede representar en forma de una matriz de pago A de orden $m \times n$ siendo $a_{ij} = u_1(s_i, t_j)$ el pago que le corresponde al primer jugador y $-a_{ij} = u_2(s_i, t_j)$ el pago que le corresponde al segundo jugador, suponiendo que el primero de ellos escoge la estrategia i y el segundo, la estrategia j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De esta forma, las filas de la matriz A están asociadas a las estrategias del Jugador I y las columnas a las estrategias del Jugador II. Es decir, en la matriz anteriorse representa la ganancia para el primer jugador mientras que los pagos para el Jugador II serán la matriz $-A$.

2.2. Puntos de silla

Definición 2.2.1 *Dado un juego bipersonal de suma nula con matriz de pagos $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, un* ***punto de silla*** *para estrategias puras es un par (i^*, j^*), siendo i^* una fila de la matriz A y j^* una columna de esta, que satisface la condición*

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, \quad \forall i \in 1, \dots, m, \forall j \in 1, \dots, n$$

Un punto de silla establece límites de las ganancias y las pérdidas de cada uno de los jugadores. Si este punto existe, verifica:

$$a_{i^*j^*} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Cuando no existe punto de silla, que es lo que suele ocurrir en la mayoría de casos, se puede intentar extender el juego, manteniendo vigentes sus reglas, a una versión mixta del mismo. En ese caso, las estrategias puras serán reemplazadas por las estrategias mixtas y los pagos se convierten en pagos esperados. En este juego extendido se retomará la búsqueda del correspondiente punto de silla.

2.3. Estrategias mixtas

Como estudiamos en el capítulo anterior, un jugador puede tomar la decisión de utilizar estrategias puras durante todo el juego, estas le permitirían asegurar una ganancia mínima o una pérdida no muy grande. Sin embargo, otra forma de jugar es utilizando estrategias mixtas. De esta manera, cada jugador puede manejar un vector cuyas componentes sean pesos o probabilidades asociadas a cada una de estas estrategias. Además, hablaremos de estrategias óptimas cuando se consigue maximizar la ganacia esperada por cada jugador, lo cual se definirá como ganacia o pago esperado.

Definición 2.3.1 *Dado un juego bipersonal representado por una matriz $m \times n$, una* ***estrategia mixta para el jugador I*** *es un vector $x \in \mathbb{R}^m$ de componentes no negativas, $x \geq 0$, tal que $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, donde x_i representa la probabilidad de que la fila i sea la estrategia utilizada por el Jugador I.*

Análogamente, una ***estrategia mixta para el jugador II*** *será un vector $y \in \mathbb{R}^n$ de componentes no negativas, $y \geq 0$, tal que $\sum_{j=1}^n y_j = 1$, siendo y_j la probabilidad de que el Jugador II elija utilizar la estrategia de la columna j.*

En lo que sigue, denotaremos por

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0, \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1, i = 1, \dots, m\} \\ \bar{Y} &= \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq 0, \textstyle\sum_{j=1}^n y_j = 1, j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

a los conjuntos de estrategias mixtas para los jugadores I y II, respectivamente. Además,

$$\alpha_i = (0, \dots, \overbrace{1}^{(i)}, \dots, 0) \in \bar{X} \text{ será la estrategia pura asociada a i,}$$

$$\beta_j = (0, \dots, \overbrace{1}^{(j)}, \dots, 0) \in \bar{Y} \text{ será la estrategia pura asociada a j.}$$

Al utilizar estrategias mixtas, el pago que recibirá el Jugador I dependerá de la combinación de estrategias puras que se utilicen y de la probabilidad asociada a cada una de ellas. Por esta razón, es conveniente introducir el concepto de pago esperado.

Definición 2.3.2 *Dado un juego bipersonal con matriz de pago $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$, si el Jugador I elige la estrategia $x \in \bar{X}$ y el Jugador II la estrategia $y \in \bar{Y}$, el pago esperado para el primer jugador o* ***pago esperado del juego*** *es*

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

Matricialmente, se puede escribir como $v(x,y) = xAy^t$. Como cabe esperar, el pago esperado para el Jugador II será $-v(x,y)$.

Propiedad 2.3.1 *Teniendo en cuenta la anterior definición, se verifican las siguientes igualdades*

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i v(\alpha_i, y)$$

$$v(x,y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j v(x, \beta_j)$$

Definición 2.3.3 *Una estrategia se denomina* ***completamente mixta*** *si y solo si $x > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$. Por consiguiente, A será una* ***matriz completamente mixta*** *si toda estrategia de esta es completamente mixta para ambos jugadores.*

Teorema 2.3.1 *Si A es una matriz completamente mixta, entonces A es una matriz cuadrada y las estrategias óptimas son únicas.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponemos $v \neq 0$. Sean y', y'' dos estrategias óptimas para el Jugador II tales que $y' \neq y''$. Sabemos que, como son estrategias óptimas, verifican

$$Ay' = v \cdot 1 \ \text{ y } \ Ay'' = v \cdot 1 \Longrightarrow A(y' - y'') = 0,$$

siendo 1 un vector de unos.

De lo anterior se concluye que el rango de A será menor que n. Dado que la estrategia $y' > 0$, por el teorema de Shapley-Snow (véase en [11]), A tiene una submatriz de orden $n \times n$ que no es singular, lo cual contradice que la matriz A tenga rango menor que n. Por consiguiente, el rango de A es n y la estrategia óptima para el Jugador II es única.

De manera análoga se demuestra que el rango de A para el Jugador I es m y que las estrategias óptimas para este también son únicas. □

Como hemos indicado anteriormente, el Jugador I pretende que “lo peor que le pueda ocurrir sea lo mejor posible”. Por ello, elegirá jugar una estrategia que maximice su pago mínimo. De la misma manera, el Jugador II también querrá asegurar que su pérdida sea la mínima posible, es decir, querrá minimizar el pago máximo. Para concretar estas ideas se introducen los conceptos de valor maximín y minimax.

Definición 2.3.4 *Sea un juego bipersonal con matriz de pago $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times n$. Se define el* ***valor maximín*** *de A para estrategias mixtas, y lo denotamos por $\underline{v}$, al valor*

$$\underline{v} = \max_{x \in \bar{X}} \min_{y \in \bar{Y}} v(x, y)$$

Se define el ***valor minimax*** *de A para estrategias mixtas y lo denotamos por $\bar{v}$, al valor*

$$\bar{v} = \min_{y \in \bar{Y}} \max_{x \in \bar{X}} v(x, y)$$

Cuando $\underline{v} = \bar{v}$, se dice $\underline{v} = \bar{v} = v$ es el ***valor del juego****.*

Retomemos el ejemplo del juego *“Piedra, papel o tijera”* (estudiado en 1.3.1) para ver cómo se localizan estos valores maximín y minimax de un juego. La matriz de pagos para el Jugador I era

$$A_I = \begin{pmatrix} 0 & -1_* & 1^* \\ 1^* & 0 & -1_* \\ -1_* & 1^* & 0 \end{pmatrix}$$

Se ha señalado con un asterísco como subíndice a los mínimos de cada fila y con un asterístico como superíndice a los máximos de cada columa, lo que facilitará determinar los valores maximín y minimax. De esta forma, se tiene que

- Todos los mínimos de las filas valen -1, luego el valor maximín de A_I es

$$\underline{v} = \max_{x \in \bar{X}} \min_{y \in \bar{Y}} v(x, y) = \max_{x \in \bar{X}} \{-1, -1, -1\} = -1$$

- Todos los máximos de las columnas valen 1, luego el valor minimax de A_I es

$$\bar{v} = \min_{y \in \bar{Y}} \max_{x \in \bar{X}} v(x, y) = \min_{y \in \bar{Y}} \{1, 1, 1\} = 1$$

Como $\underline{v} \neq \bar{v}$, no se puede concretar cuál es el valor del juego.

En este juego extendido también cabe hablar sobre el concepto de punto de silla (punto de equilibrio). En este caso, dadas $x^* \in \bar{X}$ e $y^* \in \bar{Y}$, el par de estrategias (x^*, y^*) será un punto de silla si verifica la condición siguiente

$$v(x, y^*) \leq v(x^*, y^*) \leq v(x^*, y), \quad \forall x \in \bar{X}, \forall y \in \bar{Y}$$

Sin embargo, veremos que esta condición es equivalente a escribir lo siguiente

$$\max_{x \in \bar{X}} \min_{y \in \bar{Y}} v(x, y) = \min_{y \in \bar{Y}} \max_{x \in \bar{X}} v(x, y) = v(x^*, y^*)$$

En este caso, $v(x^*, y^*)$ es el valor del juego extendido.

Definición 2.3.5 *Un juego, con matriz cuadrada A, es **simétrico** si A es antisimétrica, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$.*

Nota 2.3.1 *Recuérdese que las matrices antisimétricas cumplen que $A^T = -A$.*

Teorema 2.3.2 *Sea $u : S \times T \to \mathbb{R}^2$ un juego simétrico. Entonces, el valor de juego es nulo, $v = 0$, y los conjuntos de estrategias óptimas de ambos jugadores coinciden, esto es, $X^* = Y^*$.*

Demostración. En primer lugar probaremos que $v = 0$. Consideramos A la matriz de pagos del Jugador I y $x \in \bar{X}$ una estrategia mixta. Se tiene que,

$$xAx = xA^T x = -xAx \Longrightarrow xAx = 0$$

Sea (x^*, y^*) un punto de equilibrio y v el valor del juego. Entonces,

$$v = x^* A y^* \leq x^* A y,$$

$$v = x^* A y^* \geq x A y,$$

para todo $x \in X, y \in Y$. Consecuentemente,

$$\left.\begin{array}{l} v \leq x^* A x^* = 0 \\ v \geq y^* A y^* = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow v = 0$$

Veamos ahora que los conjuntos de estrategias óptimas coinciden, es decir, que $X^* = Y^*$.

$\boxed{\subseteq}$ Sea x^* la estrategia óptima del juego. Esta verifica $x^* A \geq 0$ y además,

$$x^*(-A^T) \geq 0 \Rightarrow x^* A^T \leq 0$$

Por tanto,

$$Ax^* \leq 0$$

Por la caracterización de estrategias óptimas, se sigue que x^* es la estrategia óptima para el Jugador II.
$\boxed{\supseteq}$ Se prueba de manera análoga.

$\square$

2.4. Teorema del Minimax de Von Neumann

La solución del juego propuesta por Von Neumann se basa en la idea de que cada jugador quiere maximizar su ganancia. En otras palabras, cada jugador quiere maximizar el valor del peor resultado posible.

Teorema 2.4.1 (Minimax, Von Neumann) *Sean $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ dos conjuntos finitos no vacíos y $v : \bar{X} \times \bar{Y} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se exige que, para cada $y \in \bar{Y}$, la función $x \to v(x,y)$ es cóncava; y para cada $x \in \bar{X}$, la función $y \to v(x,y)$ es convexa. Entonces,*

$$\max_{x\in\bar{X}} \min_{y\in\bar{Y}} v(x,y) = \min_{y\in\bar{Y}} \max_{x\in\bar{X}} v(x,y)$$

Además, existe $v(x^*,y^*) \in \bar{X} \times \bar{Y}$ tal que

$$v(x^*,y^*) = \max_{x\in\bar{X}} \min_{y\in\bar{Y}} v(x,y) = \min_{y\in\bar{Y}} \max_{x\in\bar{X}} v(x,y)$$

Para la demostración de este teorema es necesario estudiar previamente los siguientes dos resultados.

Teorema 2.4.2 *Considérese un juego bipersonal de suma nula y sea $v(x,y)$ el pago esperado. Los siguientes resultados son equivalentes:*

1. *Existe un par de estrategias (x^*,y^*) de equilibrio, tal que $x^* \in \bar{X}$ e $y^* \in \bar{Y}$.*
2. *Los pagos esperados de los Jugadores I y II coinciden, es decir,*

$$v_I = \max_{x\in\bar{X}} \min_{y\in\bar{Y}} v(x,y) = \min_{y\in\bar{Y}} \max_{x\in\bar{X}} v(x,y) = v(x^*,y^*) = v_{II}$$

3. *Considerando $\bar{x} \in \bar{X}$ e $\bar{y} \in \bar{Y}$, existe un valor $\bar{v}$ que verifica*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i \geq \bar{v},\ \forall j \in \{1,\dots,n\} \quad y \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \leq \bar{v},\ \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

Demostración. $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Supongamos que (x^*,y^*) es un par de estrategias de equilibrio y además, el pago esperado para el Jugador II es $\min\limits_{y\in\bar{Y}} \max\limits_{x\in\bar{X}} v(x,y)$. Por tanto,

$$v_{II} = \min_{y\in\bar{Y}} \max_{x\in\bar{X}} v(x,y) \leq \max_{x\in\bar{X}} v(x,y^*) = v(x^*,y^*) = \min_{y\in\bar{Y}} v(x^*,y) \leq \max_{x\in\bar{X}} \min_{y\in\bar{Y}} v(x,y) = v_I$$

Y además, como siempre se verifca que $v_I \leq v_{II}$, se tiene la igualdad.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Sea $\bar{v} = v_I = v_{II}$, $\bar{x} \in \bar{X}$ la estrategia maximín e $\bar{y} \in \bar{Y}$ la estrategia minimax. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i \geq \min_{y\in\bar{Y}} v(\bar{x},y) = \bar{v} = \max_{x\in\bar{X}} v(x,\bar{y}) \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j$$

En la primera desigualdad se utiliza la estrategia pura asociada a j y en la última desigualdad se utiliza la estrategia pura asociada a i.

$\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Como $v(\bar{x},y) \geq \bar{v} \geq v(x,\bar{y}), \forall x \in \bar{X}, \forall y \in \bar{Y}$, eligiendo $(\bar{x},\bar{y})$ obtenemos un punto de silla.

$\square$

Teorema 2.4.3 (Punto fijo de Brouwer) *Si $K \subseteq \mathbb{R}^p$ es un conjunto convexo y compacto, si $f : K \to K$ es continua, entonces $\exists \hat{x} \in K$ tal que $f(\hat{x}) = \hat{x}$.*

A pesar de que Von Neumann fue el primero en demostrar el Teorema del Minimax, posteriormente ha sido probado de diversas formas. En este trabajo tan sólo trataremos la demostración realizada por John Nash.

2.4.1. Demostración del Teorema del Minimax por John Nash

Es evidente que $\bar{X} \times \bar{Y}$ es un conjunto convexo y compacto. Dados $(x,y) \in \bar{X} \times \bar{Y}$, definimos

$$c_i(x,y) = \begin{cases} v(\alpha_i,y) - v(x,y), & si\, es\, positiva \\ 0, & en\, otro\, caso \end{cases}$$

siendo α_i la estrategia pura i-ésima del Jugador I, y

$$d_j(x,y) = \begin{cases} v(x,y) - v(x,\beta_j), & si\, es\, positiva \\ 0, & en\, otro\, caso \end{cases}$$

considerando β_j la estrategia pura j-ésima del Jugador II.
A continuación, se define $T(x,y) = (x',y')$, de manera que

$$x'_i = \frac{x_i + c_i(x,y)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(x,y)} \geq 0 \;\; ; \;\; y'_j = \frac{y_j + d_j(x,y)}{1 + \sum_{k=1}^{n} d_k(x,y)} \geq 0$$

Además, se supone que

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} x'_i = 1 \;\; ; \;\; \sum_{j=1}^{n} y'_j = 1$$

Por lo tanto, $T : \bar{X} \times \bar{Y} \longrightarrow \bar{X} \times \bar{Y}$ es continua.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si (x^*,y^*) es un punto de equilibrio, se tiene que

$$\begin{array}{l} v(\alpha_i,y^*) - v(x^*,y^*) \leq 0, \; \forall i \in \{1,\ldots,m\} \\ v(x^*,y^*) - v(x^*,\beta_j) \leq 0, \; \forall j \in \{1,\ldots,n\} \end{array}$$

y, por esta razón, $c_i(x^*, y^*) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ y $d_j(x^*, y^*) = 0, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, respectivamente. En definitiva, $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si suponemos que $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$, es decir, suponemos que (x^*, y^*) es un punto fijo para T.

Como $v(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{m} x_i^* v(\alpha_i, y^*)$, no puede ser que $v(x^*, y^*) < v(\alpha_i, y^*)$ para todo i tal que $x_i^* > 0$. Es decir, debe existir al menos un i_0 tal que

$$c_{i_0}(x^*, y^*) = v(\alpha_{i_0}, y^*) - v(x^*, y^*) = 0$$

Entonces, como (x^*, y^*) es un punto fijo y $x_{i_0}^* = \dfrac{x_{i_0}^* + c_{i_0}(x^*, y^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(x^*, y^*)}$, se debe dar que

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(x^*, y^*) = 0$$

Por definición, $c_k(x^*, y^*) \geq 0$ y lo anterior hace que $c_k(x^*, y^*) = 0, \forall k \in \{1, \ldots, m\}$. Esto significa que

$$v(\alpha_i, y^*) \leq v(x^*, y^*), \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

y que $\forall x \in \bar{X}$,

$$v(x, y^*) = \sum_{i=1}^{m} x_i v(\alpha_i, y^*) \leq v(x^*, y^*)$$

De forma similar se puede demostrar que $v(x^*, y^*) \leq v(x^*, y), \forall y \in \bar{Y}$. Por tanto, (x^*, y^*) es un punto de equilibrio.

□

El teorema anterior establece la existencia de un punto de equilibrio para cualquier juego bipersonal de suma nula. Sin embargo, no dice cómo se determina dicho punto de equilibrio. La respuesta la da la Programación Lineal.

2.5. Programación lineal

En esta sección, veremos que un juego bipersonal de suma cero se puede escribir como un problema de Programación Lineal. En primer lugar, introduciremos algunos conceptos básicos que utilizaremos en el segundo apartado de la sección, en el cual formularemos el problema de optimización asociado a los Jugadores I y II.

2.5.1. Conceptos básicos

Definición 2.5.1 *Un problema de **Programación Lineal** es un problema que consiste en optimizar una función lineal en un conjunto determinado por inecuaciones o ecuaciones lineales, es decir, un poliedro cerrado. Este problema se puede modelizar como sigue,*

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & cx^t \\ \textit{sujeto a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{2.1}$$

siendo A una matriz de tamaño $m \times n$, c un vector de $1 \times m$ y b un vector de $1 \times n$.

El objetivo de este problema es encontrar una solución factible $x \in \mathbb{R}^m$ de forma que minimice la función objetivo cx^t dentro del conjunto de soluciones factibles. Esta solución se denominará **solución óptima** del problema.

Definición 2.5.2 *El **problema dual** del problema definido anteriormente es*

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & by^t \\ \textit{sujeto a:} & Ay^t \leq c^t \\ & y \geq 0 \end{array} \tag{2.2}$$

Como en el caso anterior, el objetivo de este problema es encontrar una solución factible $y \in \mathbb{R}^n$ de modo que maximice la función objetivo que, by^t, dentro del conjunto de soluciones factibles. Análogamente, esta solución se denominará solución óptima de este problema.

El problema 2.1 es conocido como **problema primal (P)** y el siguiente, 2.2, como **problema dual (D)**. Una propiedad que se utiliza para comprobar que el problema dual está bien formulado es *"el problema dual del dual coincide con el problema primal"*.

Sin embargo, la formulación de un problema de optimización para los juegos bipersonales de suma nula conlleva a que el problema primal sea un problema de máximo, pues los jugadores intentan maximizar su ganancia. Por ello, veamos cómo se formula de forma general el problema dual asociado a un problema primal de máximo. Si consideramos el problema primal

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & c^t x \\ \text{sujeto a:} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

su dual asociado será

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & b^t y \\ \text{sujeto a:} & A^t y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

2.5.2. Programación Lineal en juegos bipersonales de suma cero

La búsqueda de un punto de equilibrio supone para el Jugador I encontrar una estrategia mixta $x \in \bar{X}$ tal que su ganancia esperada, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$, sea máxima sobre todas las estrategias puras del Jugador II. Es decir, debe resolver el problema:

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & v \\ \text{sujeto a:} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \;\; j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{2.3}$$

Cuyo problema dual asociado es:

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & u \\ \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + u \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} -y_j = 1 \\ & y \leq 0 \end{array}$$

Equivalentemente, se puede escribir:

$$\begin{array}{rc} -\,\text{máx} & (-u) \\ \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}(-y_j) \geq -u, \;\; i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} -y_j = 1 \\ & -y \geq 0 \end{array}$$

Por su parte, el Jugador II pretende encontrar una estrategia mixta $y \in \bar{Y}$ tal que su ganancia esperada, $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij} y_j$, sea máxima sobre todas las estrategias puras del Jugador I. Esto es, resolver el problema siguiente

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & w \\ \text{sujeto a:} & \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} y_j \geq w, \;\; i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y \geq 0 \end{array} \tag{2.4}$$

El dual de este es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z \\ \text{sujeto a: } & \textstyle\sum_{i=1}^{m} -a_{ij}x_i + z \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{m} -x_i = 1 \\ & x \leq 0 \end{aligned}$$

Análogamente, se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (-z) \\ \text{sujeto a: } & \textstyle\sum_{i=1}^{m} -a_{ij}(-x_i) \geq -z, \quad j = 1, \ldots, n \\ & \textstyle\sum_{i=1}^{m} -x_i = 1 \\ & -x \geq 0 \end{aligned}$$

Se observa que, los problemas del Jugador I (2.3) y Jugador II (2.4) son duales.

Ejemplo 2.5.1 *Sea un juego bipersonal de suma nula en el que la matriz de pagos del Jugador I es la siguiente.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de pagos del Jugador II será $-A$. Como hemos explicado en esta sección, utilizando estrategias mixtas, el Jugador I quiere maximizar sus ganancias planteando el siguiente problema.

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & v \\ \textit{sujeto a: } & x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - v \geq 0 \\ & -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - v \geq 0 \\ & 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - v \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

El dual del problema anterior es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w \\ \textit{sujeto a: } & y_1 - 2y_2 + 3y_3 + w \geq 0 \\ & -2y_1 + 4y_2 - y_3 + w \geq 0 \\ & 2y_1 - 3y_2 + 4y_3 + w \geq 0 \\ & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 + w \geq 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-y_1 - y_2 - y_3 &= 1 \\
y_i \leq 0, \ \ i &= 1,2,3
\end{aligned}
$$

Si cambiamos $-y_i$ *por* y_i *se obtiene el problema asociado al Jugador II. Este es de la forma:*

$$
\begin{array}{rc}
\text{mín} & w \\
\textit{sujeto a:} & -y_1 + 2y_2 - 3y_3 + w \geq 0 \\
 & 2y_1 - 4y_2 + y_3 + w \geq 0 \\
 & -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + w \geq 0 \\
 & -3y_1 - 5y_2 - 2y_3 + w \geq 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
 & y_i \geq 0, \ \ i = 1,2,3
\end{array}
$$

Si además, se cambia $-w$ *por* w *se obtiene*

$$
\begin{array}{rc}
\text{mín} & -w \\
\textit{sujeto a:} & -y_1 + 2y_2 - 3y_3 - w \geq 0 \\
 & 2y_1 - 4y_2 + y_3 - w \geq 0 \\
 & -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 - w \geq 0 \\
 & -3y_1 - 5y_2 - 2y_3 - w \geq 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
 & y_i \geq 0, \ \ i = 1,2,3
\end{array}
$$

Se observa que la función objetivo se puede cambiar por $-\text{máx}\, w$ *y, por ello, este último problema es, salvo el signo menos de la función objetivo, el que tiene que plantear el Jugador II para maximizar sus ganancias.*

La resolución de ambos problemas se trabajará en el Capítulo 4 haciendo uso de un programa desarrollado en RStudio.

3

Juegos Bimatriciales

En este capítulo se estudian los juegos en los que las ganancias de los jugadores no suman cero. Estos son conocidos como **juegos bimatriciales**. Este tipo de juegos son más frecuentes en economía o política, ya que en este ámbito no es habitual encontrar situaciones donde las ganacias de los jugadores sean opuestas. Por ello, el objetivo del presente capítulo es aplicar los conceptos que se definieron en el capítulo anterior al caso de los juegos bimatriciales. Entre ellos, definiremos la bimatriz de pagos, la cual une las matrices de pagos de cada jugador, y el concepto de equilibrio de Nash, que en el caso de los juegos bipersonales de suma nula corresponde con el punto de silla. Además, veremos dos métodos sencillos para encontrar estos equilibrios. Por otro lado, introduciremos el Problema Complementario Lineal, el cual relacionaremos con la Programación Cuadrática y los juegos bimatriciales. Finalmente, veremos el algortimo de pivotaje complementario o Algoritmo de Lemke, que es un método que se puede utilizar para resolver el Problema Complementario Lineal asociado a un juego bimatricial.

3.1. Definición y características de un juego bimatricial

En los juegos bimatriciales los jugadores tiene intereses comunes y opuestos. Además, no todas las características de los juegos de suma nula se verifican en esta clase de juegos. Por ejemplo, en los juegos bimatriciales ambos jugadores pueden resultar ganadores, al contrario que pasaba con los juegos de suma nula. Es decir, en ocasiones la llegada a un acuerdo por parte de los jugadores (cooperación) puede resultar beneficiosa para ambos. Por ello, en los juegos de suma no nula se distingue el caso de comportamiento cooperativo.

Definición 3.1.1 *Dado el juego bipersonal*

$$\begin{aligned} u\colon\ & S \times T \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (s,t) \ \longrightarrow (u_1(s,t), u_2(s,t)), \end{aligned}$$

donde $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ *y* $T = \{t_2, t_2, \ldots, t_n\}$ *son los conjuntos de estrategias para los Jugadores I y II, respectivamente. Sean las siguientes matrices, A y B, sus matrices de pago asociadas.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad y \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces el juego bimatricial se representa por una ***bimatriz*** *o matriz conjunta de ambos jugadores*

$$J(A,B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \ldots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \ldots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Como en los juegos de suma nula, en los juegos bimatriciales también cabe hablar de los puntos de equilibrio.

Definición 3.1.2 *Un par de estrategias* (s^*, t^*) *se denomina un* ***punto de equilibrio*** *si y solo si*

$$u_1(s, t^*) \leq u_1(s^*, t^*), \;\; s \in S \quad y \quad u_2(s^*, t) \leq u_2(s^*, t^*), \;\; t \in T$$

Ejemplo 3.1.1 *Considérese el juego siguiente:*

		Jugador II	
	Estrategia	t_1	t_2
Jugador I	s_1	$(2,0)$	$(2,-1)$
	s_2	$(1,1)$	$(3,-2)$

La bimatriz asociada es:

$$J(A,B) = \begin{pmatrix} (2,0) & (2,-1) \\ (1,1) & (3,-2) \end{pmatrix}$$

Si el Jugador II elige como primera estrategia t_1 *y el Jugador I elige* s_2*, entonces el Jugador I no mejora su resultado pues recibe* 1 *en vez de* 2*. En cambio, si el primer jugador elige* s_1 *y el Jugador II elige* t_2*, este tampoco mejora el resultado pues recibe* -1 *en vez de* 0*. Por tanto, el punto* $(2,0)$ *es el punto de equilibrio de este juego bimatricial.*

3.2. Estrategias puras

Extendiendo la definición dada para juegos de suma cero, diremos que una **estrategia pura** es, para el Jugador I, la elección de una fila de la bimatriz de pagos; y para el Jugador II, la elección de una de sus columnas.

John Nash demostró que todo juego finito bipersonal tiene al menos un punto de equilibrio en estrategias puras o mixtas. Por ello, puntos de equilibrio en los juegos bimatriciales se denominan **equilibrios de Nash**. Estudiaremos más formalmente este concepto en la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Dado un juego con bimatriz $J(A,B)$ de tamaño $m \times n$, diremos que (i^*, j^*) es un* ***equilibrio de Nash*** *para estrategias puras si $a_{i^*j^*}$ es el mayor pago en la columna j^* de A y $b_{i^*j^*}$ es el mayor pago en la fila i^* de B, es decir, si*

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Cuando $B = -A$, se tiene que

$$b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*} \Leftrightarrow a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*} \Longrightarrow a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}, \\ \forall i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$$

De lo que se deduce que en los juegos bipersonales de suma nula, un equilibrio de Nash es un punto de silla.

A continuación veamos dos maneras sencillas y prácticas de encontrar estos equilibrios de Nash.

3.2.1. Correspondencia de la mejor respuesta

En la definición 3.1.2 vimos que las estrategias $s^* \in S$ y $t^* \in T$ forman el punto de equilibrio (s^*, t^*) y estas serán las mejores respuestas mutuamente en el sentido de que, si el Jugador I escoge su equilibrio en s^*, entonces el segundo jugador no puede mejorar el resultado si no elige t^*, y lo mismo pasa al contrario. Para entender este concepto con más claridad veamos la siguiente definición.

Definición 3.2.2 *Sean S y T los conjuntos de estrategias de los Jugadores I y II, respectivamente. Se define la* ***mejor respuesta del Jugador I a una estrategia del Jugador II*** *como el conjunto:*

$$R_1(t) = \{s^* \in S : u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t) \text{ para cada } s \in S\}$$

Análogamente, la ***mejor respuesta del Jugador II a una estrategia del Jugador I*** *es:*

$$R_2(s) = \{t^* \in T : u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t) \text{ para cada } t \in T\}$$

Teorema 3.2.1 *El punto* (s^*, t^*) *es un punto de equilibrio si y solo si*

$$s^* = R_1(t^*) \;\; y \;\; t^* = R_2(s^*) \tag{3.1}$$

Demostración. Si suponemos cierto 3.1 y teniendo en cuenta la definición 3.2.2, se tiene que:

$$s^* = R_1(t^*) = \{s^* \in S : u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*) \; para \; cada \; s \in S\}$$

y

$$t^* = R_2(s^*) = \{t^* \in T : u_2(s^*, t^*) \geq u_2(s^*, t) \; para \; cada \; t \in T\}$$

Las cuales corresponden con la definición de punto de equilibrio, vista en 3.1.2.

□

Ejemplo 3.2.1 *Considérese el juego bipersonal con las matrices de pagos siguientes para los Jugadores I y II, respectivamente.*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La bimatriz del juego es:

$$J(A, B) = \begin{pmatrix} (3,1) & (1,3) & (3,2) \\ (0,2) & (1,1) & (2,0) \\ (0,2) & (4,4) & (5,3) \end{pmatrix}$$

Se observa que $s^* = s_3$ *y* $t^* = t_2$. *Es decir, el punto de equilibrio sería* $(4, 4)$. *Veamos por la estrategia de mejor respuesta que efectivamente lo es.*

$$R_1(t_2) = \{s^* \in S : u_1(s^*, t_2) \geq u_1(s, t_2) \; para \; cada \; s \in S\} = \{s_3\} = s^*$$
$$R_2(s_3) = \{t^* \in T : u_2(s_3, t^*) \geq u_2(s_3, t) \; para \; cada \; t \in T\} = \{t_2\} = t^*$$

Y por el teorema 3.2.1 se tiene que el punto $u(s_3, t_2) = (4, 4)$ *es un punto de equilibrio.*

3.2.2. Eliminación iterada de estrategias dominadas

En Teoría de Juegos, una estrategia se dice dominante cuando es la estrategia óptima sin importar la decisión de los jugadores. Este método de búsqueda de equilibrios de Nash se basa en eliminar las estrategias que no sean dominantes.

Definición 3.2.3 *La estrategia $s_k \in S$ del Jugador I se dice* ***dominante*** *frente a otra estrategia $s_r \in S$ si, para una estrategia $t \in T$ del Jugador II se tiene que*

$$u_1(s_k, t) \geq u_1(s_r, t)$$

Análogamente, para el Jugador II, se dice que $t_k \in T$ es una estrategia dominante frente a $t_r \in T$ si, dada la estrategia $s \in S$ del Jugador I se tiene que

$$u_2(s, t_k) \geq u_2(s, t_r)$$

Cuando se repita el proceso de eliminación pueden suceder dos situaciones. La primera, que quede un solo elemento y en ese caso, este será el punto de equilibrio. Y la segunda, que queden más elementos. De esta forma habremos conseguido, al menos, simplificar la bimatriz del juego.

Veamos el siguiente ejemplo para entender cómo funciona esta estrategia de búsqueda del punto de equilibrio.

Ejemplo 3.2.2 *Considérese el juego siguiente*

		Jugador II		
	Estrategia	t_1	t_2	t_3
Jugador I	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$	$(3,0)$
	s_2	$(0,2)$	$(0,1)$	$(3,0)$
	s_3	$(0,2)$	$(2,4)$	$(5,3)$

Se observa que la estrategia s_2 del Jugador I está dominada por la estrategia s_3 pues cualquiera que sea la decisión del Jugador II, el primero siempre recibe más si elige la estrategia s_3. De la misma forma, la estrategia t_3 del Jugador II está dominada por la estrategia t_2 por la misma razón, este jugador siempre recibe más sea cual sea la decisión del Jugador I. Por tanto, podemos reducir la bimatriz del juego a la siguiente.

		Jugador II	
	Estrategia	t_1	t_2
Jugador I	s_1	$(1,0)$	$(1,3)$
	s_3	$(0,2)$	$(2,4)$

En este caso, la estrategia t_1 está dominada por t_2 pues de esta forma, el Jugador II recibe más sin importar la decisión que tome el Jugador I. Por ello, el Jugador II elige jugar t_2. Ahora quedaría decidir qué va a jugar el Jugador I. Pero se observa que $u_1(s_1, t_2) = 1 \leq u_1(s_3, t_2) = 2$, por lo que el Jugador I jugará la estrategia s_3. Por tanto, el punto de equilibrio de este juego será $u(s_3, t_2) = (2, 4)$.

Como en el caso de los juegos de suma nula, los juegos bimatriciales también se pueden escribir como un problema de optimización. Para ello, introduzcamos el Problema Complementario Lineal.

3.3. El Problema Complementario Lineal

En esta sección veremos la definición del Problema Complementario Lineal y su resolución utilizando el Algortimo de Lemke.

Definición 3.3.1 *Dados la matriz cuadrada M de orden $p \times p$,y el vector $q \in \mathbb{R}^p$. El **Problema Complementario Lineal** (PCL) consiste en encontrar los vectores $w, z \in \mathbb{R}^p$ tales que:*

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w_j z_j = 0, &\quad j = 1, \ldots, p \\ w_j \geq 0,\ z_j \geq 0, &\ \ j = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{3.2}$$

El par (w_j, z_j) se denomina un **par de variables complementarias**. Una solución (w, z) del sistema anterior se conoce como **solución factible complementaria**. Además, una solución factible complementaria es **básica** si una de las variables del par (w_j, z_j) es básica.

Proposición 3.3.1 *Determinar la optimalidad de un problema de Programación Lineal es equivalente a resolver un Problema Complementario Lineal.*

Demostración. Sea A una matriz de orden $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$, el problema

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & c^t x \\ \text{sujeto a:} & Ax = b \end{array}$$

se puede reescribir como:

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & c^t x \\ \text{sujeto a:} & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

El problema dual correspondiente es:

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & b^t y^1 - b^t y^2 \\ \text{sujeto a:} & A^t y^1 - A^t y^2 \leq c \\ & y^1, y^2 \geq 0 \end{array}$$

Las condiciones de holguras complementarias son:

$$\begin{aligned} (c - A^t y^1 + A^t y^2)^t x &= 0 \\ (Ax - b)^t y^1 &= 0 \\ (-Ax + b)^t y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si consideramos $u^1 = Ax - b$, $u^2 = -Ax + b$ y $v = c - A^t y^1 + A^t y^2$, encontrar una solución óptima al problema de Programación no lineal es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} v \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -A^t & A^t \\ A & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ b \end{pmatrix}$$
$$v^t x = 0$$
$$(u^1)^t y^1 = 0$$
$$(u^2)^t y^2 = 0$$
$$v, u^1, u^2, x, y^1, y^2 \geq 0$$

donde los 0 representan matrices cuadradas de ceros (de orden $n \times n$ en la primera fila y de orden $m \times m$ en el resto). Finalmente, si consideramos

$$w = \begin{pmatrix} v \\ u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 0 & -A^t & A^t \\ A & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } z = \begin{pmatrix} x \\ y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

se obtiene un problema complementario lineal.

□

3.3.1. El Problema Complementario Lineal y la Programación Cuadrática

Consideramos el siguiente problema de Programación Cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^t x + \frac{1}{2} H x \\ \text{sujeto a:} \quad & Ax \leq b \\ & x \leq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde c es un vector $n-$dimensional, b un vector $m-$dimensional, A es una matriz de dimensión $m \times n$ y H es una matriz simétrica de orden $n \times n$.

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para este problema son:

$$c + Hx + A^t u - v = 0$$
$$(b - Ax)^t u = 0$$
$$v^t x = 0$$
$$x \geq 0, \; u \geq 0, \; v \geq 0$$

Si $y = b - Ax$, el sistema anterior se puede reescribir como:

$$\begin{gathered} -Hx - A^t u + v = c \\ Ax + y = b \\ y^t u = 0 \\ v^t x = 0 \\ x \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ y \geq 0 \end{gathered}$$

Podemos tomar:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}$$

que se sustituyen en el sistema 3.2, de forma que quedaría escrito como un problema complementario lineal.

3.3.2. El Problema Complementario Lineal y los Juegos bimatriciales

Como hemos ya hemos comentado, en general, los jugadores no eligen alternativas (estrategias puras) sino que establecen ponderaciones sobre ellas, es decir, utilizan estrategias mixtas. Esto es, definen probabilidades sobre cada alternativa, respectivamente:

$$\begin{gathered} x_i \geq 0;\, i = 1, \ldots, m;\, \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ y_j \geq 0;\, j = 1, \ldots, n;\, \textstyle\sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{gathered}$$

En este contexto, una estrategia pura asignaría un 1 a una alternativa y ceros al resto. Por tanto, en el juego, si el Jugador I utiliza la estrategia x y el Jugador II la estrategia y, las perdidas esperadas serán $x^t Ay$ y $x^t By$, respectivamente, siendo A la matriz de pagos asociada al Jugador I y B la matriz de pagos del Jugador II.

La definición 3.1.2 de punto de equilibrio para un juego bimatricial se puede reescribir como sigue. Sea un par $(\bar{x}, \bar{y})$ de estrategias, se dice que es un punto de equilibrio si verifica

$$\begin{gathered} \bar{x}^t A\bar{y} \leq x^t A\bar{y}, \quad \forall x \geq 0, \quad \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ \bar{x}^t B\bar{y} \leq \bar{x}^t By, \quad \forall y \geq 0, \quad \textstyle\sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{gathered}$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que A y B son de términos positivos. Si esto no fuese así, se define $A' = A + K_1$ y $B' = B + K_2$, con K_1 y K_2 matrices de una única constante positiva que permita que A' y B' sean de términos positivos. Es claro que si $(\bar{x},\ \bar{y})$ es un par de equilibrio para el juego $J(A, B)$ también lo será para el juego $J(A', B')$, y recíprocamente.

Si consideramos $e^m \in \mathbb{R}^m$ y $e^n \in \mathbb{R}^n$ vectores de unos, se verifica que $\bar{x}^t A\bar{y}e^m \leq A\bar{y}$ y $\bar{x}^t B\bar{y}e^n \leq B^t\bar{x}$. Se formula el sistema correspondiente:

$$\begin{aligned} u = Ay - e^m \geq 0,\ \ y \geq 0 \\ v = B^t x - e^n \geq 0,\ \ x \geq 0 \\ x^t u + y^t v = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

y además,

$$\begin{array}{ccc} u^* = Ay^* - e^m & \text{y} & v^* = B^t x^* - e^n \\ (x^*)^t u = 0 & \text{y} & (y^*)^t v = 0 \end{array}$$

Teorema 3.3.1 *Considerando el sistema 3.4, se tiene*

1. *Si x^*, y^*, u^*, v^* resuelven el sistema, entonces $\left(\frac{x^*}{(x^*)^t e^m}, \frac{y^*}{(y^*)^t e^n}\right)$ es un punto de equilibrio de $J(A, B)$.*
2. *Recíprocamente, si $(\bar{x}, \bar{y})$ es un par de equilibrio de $J(A, B)$, entonces $\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^t B\bar{y}}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}}\right)$ es una solución del sistema.*

Demostración. $\boxed{1.}$ Como $u^* = Ay^* - e^m$ y $(x^*)^t u^* = 0$, se tiene que

$$(x^*)^t Ay^* = (x^*)^t e^m$$

Se sigue que,

$$\frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} Ay^* = 1 \Rightarrow \frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} Ay^* e^m = e^m \leq Ay^*$$

Multiplicando por $x \geq 0$ y teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^m x_i = 1$, se obtiene:

$$\frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} Ay^* x^t e^m \leq x^t Ay^* \Rightarrow \frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} Ay^* \leq x^t Ay^*$$

ya que $x^t e^m = \sum_{i=1}^m x_i = 1$.
Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $(y^*)^t e^n > 0$, se obtiene:

$$\frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} A \frac{y^*}{(y^*)^t e^n} \leq x^t A \frac{y^*}{(y^*)^t e^n},\ \forall x \geq 0,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

Análogamente, se obtendría:

$$\frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m} B \frac{y^*}{(y^*)^t e^n} \leq By \frac{(x^*)^t}{(x^*)^t e^m},\ \forall y \geq 0,\ \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

$\boxed{2.}$ Considerando que $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de equilibrio, verifica:

$$\begin{array}{l} \bar{x}^t A\bar{y} \leq x^t A\bar{y}, \quad \forall x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ \bar{x}^t B\bar{y} \leq \bar{x}^t Ay, \quad \forall y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1 \end{array}$$

Así, se tiene

$$1 \leq x^t A \frac{\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}}, \forall x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1$$

y en particular,

$$e^m \leq A \frac{\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}}$$

De la misma forma,

$$e^n \leq B^t \frac{\bar{x}}{\bar{x}^t A\bar{y}}$$

Además,

$$\begin{array}{l} \frac{\bar{x}^t}{\bar{x}^t B\bar{y}} \left(A \frac{\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}} - e^m \right) = \frac{1}{\bar{x}^t B\bar{y}} \left(\frac{\bar{x}^t A\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}} - \bar{x}^t e^m \right) = 0 \\ \frac{\bar{y}^t}{\bar{x}^t A\bar{y}} \left(B^t \frac{\bar{x}}{\bar{x}^t B\bar{y}} - e^n \right) = \frac{1}{\bar{x}^t A\bar{y}} \left(\frac{\bar{y}^t B^t \bar{x}}{\bar{x}^t B^t \bar{y}} - \bar{y}^t e^n \right) = 0 \end{array}$$

Por tanto, si $(\bar{x},\ \bar{y})$ es un par de equilibrio de $J(A, B)$, entonces $\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^t B\bar{y}}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}^t A\bar{y}} \right)$ es una solución de sistema.

$\square$

Las argumentaciones anteriores hacen que la búsqueda de un par de equilibrio para un juego bimatricial sea equivalente a resolver el problema lineal complementario considerando

$$M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -e^m \\ -e^n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

en el sistema 3.2.

Cabe destacar que el problema 3.2 es equivalente al siguiente modelo cuadrático:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & z^t(Mz + q) \\ \text{sujeto a:} & Mz + q \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

A continuación, veremos un ejemplo de juego bimatricial y calcularemos su correspondiente Problema Complementario Lineal.

Ejemplo 3.3.1 *Dado un juego bipersonal de suma no nula, en el que las matrices de pagos de los Jugadores I y II son A y B, respectivamente.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la bimatriz del juego es:

$$J(A,B) = \begin{pmatrix} (0,0) & (2,1) & (0,0) \\ (2,2) & (0,2) & (0,0) \\ (2,2) & (0,2) & (2,2) \end{pmatrix}$$

Haciendo uso de las expresiones descritas en 3.5, se tiene que:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

que se sustituyen el el sistema 3.2.

3.3.3. Algoritmo de Lemke

El algoritmo de pivotaje complementario o Algoritmo de Lemke es un método de resolución del Problema Complementario Lineal. En este algoritmo se generan soluciones básicas factibles casi adyacentes hasta que se obtiene una solución factible complementaria o, por el contrario, hasta que resulte imposible el pivotaje. En este segundo caso, se obtiene la conocida terminación en rayo o semirrecta.

Considerando el problema complementario lineal que describimos en 3.2:

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w_j z_j &= 0, \quad j = 1, \ldots, p \\ w_j &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, p \\ z_j &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Si $q \geq 0$, una solución básica factible complementaria del problema sería $(w,z) = (q,0)$. En cambio, si $q \ngeq 0$, se introduce una variable artificial z_0 de forma que el problema anterior se reescribe como sigue

$$
\begin{aligned}
w - Mz - 1z_0 &= q \\
w_j z_j &= 0, j = 1, \ldots, p \\
z_0 &\geq 0, j = 1, \ldots, p \\
w_j \geq 0,\ z_j &\geq 0, j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

siendo $1 \in \mathbb{R}^p$ un vector de unos y w un vector de variables básicas. Trasladamos el problema a una tabla de la forma:

w	z	z_0	
I	$-M$	-1	q

$w \geq 0, z \geq 0, z_0 \geq 0$

Sea $q_s = min\{q_i : i = 1, \ldots, p\}$. Si z_0 sustituye, como variable básica, a w_s, se obtiene que:

1. (w, z, z_0) es una solución básica para el sistema 3.6.
2. Las variables w_s y z_s no son básicas.
3. z_0 es básica y, exactamente, una variable del par (w_j, z_j) es básica (se cumple la condición de complementariedad) para $j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{s\}$.

Se dice, entonces, que la anterior es una **solución básica casi complementaria** (SBCC).

El esquema del algoritmo es el siguiente:

Paso 1 Determinar la SBCC indicada anteriormente haciendo $y_s = z_s$, y posteriormente ir al Paso 2.

Paso 2 Sea d_s la columna actualizada asociada a y_s. Si $d_s \leq 0$, ir al Paso 5. En otro caso, hallar el índice r que verifique:

$$\frac{\overline{q_r}}{d_{rs}} = min\{\frac{\overline{q_i}}{d_{is}} : d_{is} > 0, i = 1, \ldots, p\}$$

Si la variable básica en la fila r es z_0, ir al Paso 3. En caso contrario, ir al Paso 4.

Paso 3 La variable básica en la fila r es w_k o z_k, para algún $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{s\}$.
- Si es w_k, hacer básica y_s en lugar de w_k y redefinir $y_s = z_k$.
- Si es z_k, hacer básica y_s en lugar de z_k y redefinir $y_s = w_k$.

A continuación, ir al Paso 2.

Paso 4 Hacer básica y_s en lugar de z_0. Se parará el algoritmo cuando se encuentre una solución básica complementaria.

Paso 5 Se detecta una semirrecta $(w, z, z_0) + \gamma\mathbf{d},\ \gamma \geq 0$ de soluciones factibles del problema inicial, con $\mathbf{d}$ un vector de $\mathbb{R}^{2p+1}$ que tiene a -d_s donde están los índices de variables básicas, un 1 en el lugar de y_s y ceros en el resto. Esta finalización del algoritmo es conocida como terminación en rayo.

La convergencia de este método está garantizada bajo determinadas condiciones entre las que se incluyen condiciones de copositividad de la matriz M. El estudio correspondiente se puede buscar, por ejemplo, en *"Nonlinear Programming: Theory and Algorithms"*, Bazaraa et al. (véase en[8]).

A continuación, veremos dos ejemplos. En el primero, aplicaremos el Algoritmo de Lemke al Problema Complementario Lineal asociado a un juego bimatricial, y en el segundo, a un problema de Programación Cuadrática.

Ejemplo 3.3.2 *Dado el juego bimatricial con matrices de pago*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Los datos para el Problema Complementario Lineal serán:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La tabla que resulta es la siguiente:

V.B	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	z_0	q
u_1	1	0	0	0	0	0	8	0	-1	-1
u_2	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	-1
v_1	0	0	1	0	1	0	0	1	-1	-1
v_2	0	0	0	1	0	8	0	1	-1	-1

El objetivo es que z_0 entre en la base. La variable que debe salir de la base es u_1. Haciendo uso del pivotaje lo que resulta es:

V.B	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	z_0	q
z_0	-1	0	0	0	0	0	-8	0	1	1
u_2	-1	1	0	0	0	0	-8	1	0	0
v_1	-1	0	1	0	1	0	-8	0	0	0
v_2	-1	0	0	1	0	8	-8	0	0	0

Además, como la variable que ha salido es u_1, debe entrar su complementaria, es decir, x_1. La única candidata a salir es v_1.

V.B	u_1	u_2	v_1	v_2	x_1	x_2	y_1	y_2	z_0	q
z_0	-1	0	0	0	0	0	-8	0	1	1
u_2	-1	1	0	0	0	0	-8	1	0	0
x_1	-1	0	1	0	1	0	-8	0	0	0
v_2	-1	0	0	1	0	8	-8	0	0	0

Como la variable que salió es v_1, debería entrar su complementaria, y_1, pero esto no es posible porque todos los elementos de la columna son negativos. Por tanto, el algoritmo tiene una terminación en rayo. Es decir, no se pueden calcular ningún par de estrategias de equilibrio para este juego bimatricial utilizando el Algoritmo de Lemke.

Ejemplo 3.3.3 *Sea el problema de Programación Cuadrática con los siguientes datos:*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \big(1, 0, 0\big), \quad c = \big(3, 5, -9\big), \quad b = 5$$

De lo cual se deduce que el Problema Complementario Lineal se puede reescribir con los datos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y \end{pmatrix}$$

La tabla que resulta es la siguiente:

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q
u_1	1	0	0	0	-1	1	1	1	-1	3
u_2	0	1	0	0	1	-1	1	1	-1	5
u_3	0	0	1	0	-1	-1	-2	0	-1	-9
v	0	0	0	1	-1	-1	0	0	-1	-5

El objetivo es que z_0 entre en el vector de variables básicas. Como el valor q_i más negativo es -9, la variable que debe salir es u_3. Haciendo uso del pivotaje, obtenemos lo siguiente:

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q	Min
u_1	1	0	-1	0	0	2	3	1	0	12	$\frac{12}{3}$
u_2	0	1	-1	0	2	0	3	1	0	14	$\frac{14}{3}$
z_0	0	0	-1	0	1	1	2	0	1	9	$\frac{9}{2}$
v	0	0	-1	1	0	0	2	0	0	4	$\frac{4}{2}$

Por el algoritmo de Lemke, como la variable que ha salido es u_3 debe entrar su complementaria, es decir, x_3. Y haciendo uso de la relación mínima, la variable que debe salir es v. Se obtiene:

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q	Min
u_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	2	0	1	0	6	$\frac{6}{1}$
u_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	0	0	1	0	8	$\frac{8}{1}$
z_0	0	0	0	-1	1	1	0	0	1	5	
x_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	2	

Como la variable que ha salido es v, debe entrar la variables y. Además, por la regla de relación mínima, la variables que sale es u_1.

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q	Min
y	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	2	0	1	0	6	
u_2	0	1	0	0	2	-2	0	0	0	2	$\frac{2}{2}$
z_0	0	0	0	-1	1	1	0	0	1	5	$\frac{5}{1}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	2	

Como la variable que ha salido es u_1, debe entrar x_1. Por la regla de relación mínima debe salir u_2. Se obtiene:

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q	Min
y	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	2	0	1	0	6	$\frac{6}{2}$
x_1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	0	0	0	1	$\frac{1}{-1}$
z_0	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	2	0	0	1	4	$\frac{4}{2}$
x_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	2	

En este caso, como la variable que salió es u_2, debe entrar x_2. Finalmente, por la regla de relación mínima, la variable a salir es z_0 por lo que se obtiene:

V.B	u_1	u_2	u_3	v	x_1	x_2	x_3	y	z_0	q
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	1	2
x_1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	3
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	2
x_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	0	2

Como z_0 ha salido del vector de variables básicas el algoritmo finaliza. La solución básica factible complementaria que se obtiene es

$$(x_1, x_2, x_3, y) = (3, 2, 2, 2).$$

4

Resolución computacional de ejemplos

En este capítulo resolveremos de forma computacional algunos ejemplos trabajados en los capítulos anteriores y añadiremos algunos nuevos. En el caso de los ejemplos tratados en el Capítulo 2, es decir, los juegos bipersonales de suma nula, utilizaremos para la resolución un programa desarrollado en *R*, y, para los trabajados en el Capítulo 3, los juegos bimatriciales, usaremos una implementación del Algoritmo de Lemke en Python.

4.1. Resolución de problemas de juegos bipersonales de suma nula

En esta sección resolveremos y analizaremos los ejemplos trabajados en el Capítulo 2 haciendo uso de la herramienta *RStudio*. Para ello, hemos creado un programa que utiliza la librería *"lpSolve"* que se utiliza para resolver problemas de Programación Lineal. El programa devolverá una línea de comando que muestra los valores que toman las variables del problema. Además, el último de estos valores corresponderá con el valor de la función objetivo.

El Ejemplo 1.3.1 fue un ejemplo introductorio en el cual no calculamos el valor de juego pues aún no habíamos definido este concepto. Utilizaremos el programa de *RStudio* para calcularlo. Los datos del problema se pueden observar en la tabla 1.1. El problema de Programación Lineal asociado al Jugador I es:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & v \\
\text{sujeto a:} \quad & x_2 - x_3 - v \geq 0 \\
& -x_1 + x_3 - v \geq 0 \\
& x_1 - x_2 - v \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, 3
\end{aligned}$$

Y el del Jugador II es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & w \\ \text{sujeto a:} \quad & -y_2 + y_3 + w \geq 0 \\ & y_1 - y_3 + w \geq 0 \\ & -y_1 + y_2 + w \geq 0 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_j \geq 0, \ \ \forall j = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

El programa implementado en *RStudio* que utilizaremos para resolver este problema y los siguientes es el que se muestra a continuación.

```
library(lpSolve)

          ###### Problema del Jugador I ######

#Costos de la funcion objetivo
    f.obj <- c(0, 0, 0, 1)
#Matriz de coeficientes tecnologicos
    f.con <- matrix (c(0,1,-1,-1,-1,0,1,-1,1,-1,0,-1,1,1,1,0),
        nrow=4, byrow=TRUE)
 #Tipos de restricciones
    f.dir <- c(">=",">=", ">=","==")
 #Constantes de las restricciones (recursos)
      f.rhs <- c(0,0,0,1)
 #Resolver obtener el valor objetivo
   lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)
 #Resolver y obtener solucion
   lp ("max", f.obj, f.con, f.dir, f.rhs)$solution

          ###### Problema del Jugador II ######

   f.obj2 <- c(0, 0, 0, 1)
   f.con2 <- t(-matrix (c(0,1,-1,-1,-1,0,1,-1,1,-1,0,-1,1,1,1,0),
        nrow=4, byrow=TRUE))
   f.dir2 <- c(">=",">=",">=","==")
   f.rhs2 <- c(0,0,0,1)
   lp ("min", f.obj2, f.con2, f.dir2, f.rhs2)
   lp ("min", f.obj2, f.con2, f.dir2, f.rhs2)$solution
```

Las líneas de comando que devuelve el programa para ambos problemas son:

[1]	0.3333333	0.3333333	0.3333333	0.0000000
[2]	0.3333333	0.3333333	0.3333333	0.0000000

Es decir, las soluciones que resultan son $x_1 = x_2 = x_3 = 0'3333$ debido a que la probabilidad de ganar para el Jugador I siempre es la misma y al haber tres estrategias, la probabilidad de cada una de ellas será $1/3$. Lo mismo ocurre con las variables del problema del Jugador II, su valor también es $0'33333$.

Además, el valor del juego para ambos jugadores es $w = v = 0$.

El segundo ejemplo que vimos en el Capítulo 1 fue el Ejemplo 1.3.2. El juego consistía en que dos personas sacaban simultáneamente uno, dos, tres o cuatro dedos. Si la suma de los dedos era par, el Jugador I ganaba. En caso contrario, perdía. Los datos del problema se pueden observar en la tabla 1.4. El problema de Programación Lineal asociado al Jugador I es:

$$\begin{array}{rc} \text{máx} & v \\ \text{sujeto a:} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - v \geq 0 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - v \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, \ \ \forall i = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

En este caso, aunque las estrategias son 4, solo hay dos restricciones en el problema que relacionen las variables con la función objetivo ya que la matriz de pagos es simétrica. Lo mismo ocurre en el problema del Jugador II. Este es:

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & w \\ \text{sujeto a:} & y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + w \geq 0 \\ & -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + w \geq 0 \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ & y_j \geq 0, \ \ \forall j = 1, \ldots, 4 \end{array}$$

Como en el caso anterior, introducimos los datos en el programa de *RStudio* y resolvemos. Los resultados que se obtuvieron son:

[1]	0.5	0.5	0.0	0.0	0.0
[2]	0.5	0.5	0.0	0.0	0.0

Es decir, las variables x_1 y x_2 asociadas al problema del Jugador I valen $0'5$ pues utilizar la estrategia x_1 (sacar un dedo) es equivalente a utilizar la estrategia x_3 (sacar tres dedos), ya que la suma de cualquiera de estas con la estrategia que elija el jugador II va a dar un resultado par o impar sin importar cuál de estas dos sea la utilizada. Lo mismo ocurre con las estrategias x_2 y x_4. El mismo razonamiento se aplica a las variables $y_j, \forall j = 1, \ldots, 4$ del Jugador II. Además, el valor del juego es $w = v = 0$.

En la Sección 2.5.2 trabajamos el Ejemplo 2.5.1 para ver cómo se reescribía un juego bipersonal de suma nula en un problema de Programación Lineal. Los problemas que resultaban, para los Jugadores I y II, respectivamente, en el ejemplo eran los siguientes:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & v \\
\text{sujeto a:} \quad & x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - v \geq 0 \\
& -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - v \geq 0 \\
& 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - v \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & w \\
\text{sujeto a:} \quad & -y_1 + 2y_2 - 3y_3 + w \geq 0 \\
& 2y_1 - 4y_2 + y_3 + w \geq 0 \\
& -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + w \geq 0 \\
& -3y_1 - 5y_2 - 2y_3 + w \geq 0 \\
& y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Introducimos los datos en *RStudio* y los resultados son:

```
[1]  0.0  0.0  0.3  0.7  2.6
  [2]  0.0  0.2  0.8  2.6
```

Las variables x_i asociadas al problema del Jugador I valen: $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 0,3, x_4 = 0,7$. Por otro lado, las variables del problema del Jugador II resultan: $y_1 = 0, y_2 = 0,2, y_3 = 0,8$. Finalmente, el valor de la función objetivo es $w = v = 2,6$.

4.2. Resolución de problemas de juegos bimatriciales

En la Sección 3.3 trabajamos el Problema complementario Lineal que es de la forma:

$$\begin{aligned}
w - Mz = q & \\
w_j z_j = 0, & \quad j = 1, \ldots, p \\
w_j \geq 0, z_j \geq 0 & \quad j = 1, \ldots, p
\end{aligned}$$

Además, vimos cómo se podía reescribir un problema bimatricial en un PCL. En la Sección 3.3.3 estudiamos el Algoritmo de Lemke, que era un método para resolver este tipo de problemas. A continuación, resolveremos ejemplos de juegos bimatriciales tratados en el Capítulo 3 haciendo uso de una implementación de este algoritmo en Python. Utilizaremos el código realizado por AndyLamperski, el cual se puede estudiar en [10].

En la implementación del algoritmo se toma el problema $LCP(q, M)$, donde M es la matriz cuadrada y q el vector que definimos en 3.2. Una vez se introducen estos datos en el código, el programa nos devuelve una línea de comando que puede resultar de tres maneras:

1. (*vector solución*, 0, *"Solution Found"*): el algortimo finaliza con una solución básica casi complementaria.
2. (*None*, 1, *"Secondary ray found"*): el argoritmo finaliza con una terminación en rayo.
3. (*None*, 2, *"Max Iterations Exceeded"*): el algortimo no finaliza en el número máximo de iteraciones que, por defecto, es 100.

En el Ejemplo 3.1.1 buscamos el punto de equilibrio de un juego bimatricial. Los bimatriz del juego era:

$$J(A, B) = \begin{pmatrix} (2,0) & (2,-1) \\ (1,1) & (3,-2) \end{pmatrix}$$

Para poder aplicar el Algoritmo de Lemke debemos reescribir el juego en un Problema Complementario Lineal. Utilizando las expresiones descritas en 3.5, se tiene que:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y \end{pmatrix}$$

Introducimos estos dados en el entorno de ejecución de la siguiente manera:

```
import numpy as np
M = np.array([[0,0,2,2], [0,0,1,3], [0,1,0,0], [-1,-2,0,0]])
q = np.array([-1,-1,-1,-1])
sol = lemkelcp(M,q)
print(sol)
```

En este caso, el resultado que se obtiene es *(None, 2, "Max Iterations Exceeded")*. Es decir, el algoritmo realiza más iteraciones de las que hemos permitido que haga el programa.

Realizamos el mismo procedimiento con el Ejemplo 3.2.1, en el cual aplicamos el método de la correspondencia de mejor respuesta para encontrar un equilibrio de Nash. La bimatriz del juego se puede observar en 3.2. El Problema Complementario Lineal tendrá los siguientes datos:

$$M = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,3\,1\,3 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,2 \\ 0\,0\,0\,0\,4\,5 \\ 1\,2\,2\,0\,0\,0 \\ 3\,1\,4\,0\,0\,0 \\ 2\,0\,3\,0\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ v \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y \end{pmatrix}$$

Los datos se introducen en el entorno de ejecución como sigue:

```
import numpy as np
M = np.array([[0,0,0,3,1,3], [0,0,0,0,1,2], [0,0,0,0,4,5],
              [1,2,2,0,0,0], [3,1,4,0,0,0], [2,0,3,0,0,0]])
q = np.array([-1,-1,-1,-1,-1,-1])
sol = lemkelcp(M,q)
print(sol)
```

La solución que resulta es *(None, 1, "Secondary ray found")*, es decir, el algoritmo tiene una terminación en rayo.

En el Ejemplo 3.2.2 encontramos un equilibrio de Nash utilizando el método de eliminación iterada de estrategias dominadas. Los datos del problema se encuentran en la tabla 3.2.2. El Problema Complementario Lineal lo podemos escribir utilizando:

$$M = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,1\,1\,3 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,3 \\ 0\,0\,0\,0\,2\,5 \\ 0\,3\,0\,0\,0\,0 \\ 2\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 2\,4\,3\,0\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ v \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ y \end{pmatrix}$$

Introducimos los datos en el programa:

```
import numpy as np
M = np.array([[0,0,0,1,1,3], [0,0,0,0,0,3], [0,0,0,0,2,5],
              [0,3,0,0,0,0], [2,1,0,0,0,0], [2,4,3,0,0,0]])
q = np.array([-1,-1,-1,-1,-1,-1])
sol = lemkelcp(M,q)
print(sol)
```

Como en el caso anterior, la solución es una terminación en rayo, ya que la respuesta del programa es (None, 1, "Secondary ray found").

En el Ejemplo 3.3.2 vimos cómo se implementaba el Algortimo de Lemke al Problema Complementario Lineal asociado a un juego bimatricial y lo resolvimos manualmente. Las matrices de pago del problema se pueden ver en 3.7. Los datos de entrada del algoritmo son:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Introducimos los datos en el entorno de ejecución:

```
import numpy as np
M = np.array([[0,0,-8,0], [0,0,0,-1], [-1,0,0,0], [0,-8,0,0]])
q = np.array([-1,-1,-1,-1])
sol = lemkelcp(M,q)
print(sol)
```

La solución que resulta es (None, 1, "Secondary ray found"), es decir, el algoritmo tiene una terminación en rayo. Este resultado coincide con el que habíamos obtenido cuando trabajamos el problema anteriormente.

El Ejemplo 3.3.3 se trabajó para ver cómo funcionaba el Algoritmo de Lemke de forma manual en un problema de Programación Cuadrática. Por ello, los datos de entrada al algoritmo son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

En el entorno de ejecución debemos escribir:

```
import numpy as np
M = np.array([[1,-1,-1,-1],[-1,1,-1,-1],[1,1,2,0],[1,1,0,0]])
q = np.array([3,5,-9,-5])
sol = lemkelcp(M,q)
print(sol)
```

La solución que se obtiene es (array([3., 2., 2., 2.]), 0, "Solution Found"). Esta solución coincide con la que habíamos calculado.

Finalmente, en el siguiente ejemplo aplicaremos el Algoritmo de Lemke a una matriz M de dimensión 10×10. Debido a las dimensiones de la matriz, resolver este ejemplo manualmente nos llevaría mucho tiempo. Los datos del problema son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & -3 & 6 & 10 & 2 & 3 & 9 & 8 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 7 & 8 & 3 & 5 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 6 & 7 & 1 & 8 & 9 & 11 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 8 & 3 & 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 6 & 2 & 6 & 9 & 1 & 3 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 8 & 9 & 2 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 7 & 8 & 9 & 12 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 5 & 8 & 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & -6 & -3 & 6 & 13 & 2 & 3 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & -7 & -3 & 8 & 10 & 11 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \\ -9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ v \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ y \end{pmatrix}$$

Introducimos estos datos en el entorno de ejecución:

```
    import numpy as np
        M = np.array([[1,-1,-4,-3,6,10,2,3,9,8],
            [-1,2,-1,-1,7,8,3,5,9,1], [1,2,0,3,6,7,1,8,9,11],
            [1,2,0,4,8,3,1,5,7,9], [1,6,2,6,9,1,3,5,0,9],
            [2,7,3,5,8,9,2,5,7,1], [2,6,7,3,1,7,8,9,12,5],
            [-1,3,-1,-1,5,8,1,9,9,1], [1,-1,-6,-3,6,13,2,3,8,8],
            [2,-1,-7,-3,8,10,11,3,9,8]])
      q = np.array([1,4,7,2,8,3,5,-9,-5,6])
      sol = lemkelcp(M,q)
        print(sol)
```

La solución del problema es *(array([0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0. , 0.6, 0.4, 0.]), 0, "Solution Found")*.

Conclusiones

En el presente trabajo, el objetivo principal ha sido la resolución de los problemas de optimización asociados a juegos bipersonales de suma nula y juegos bimatriciales. En el primer caso, el interés era encontrar un punto de silla en el juego y hemos demostrado que gracias al Teorema Minimax (Von Neumann) se puede asegurar que este punto de equilibrio con estrategias mixtas óptimas existe. Sin embargo, para calcularlo debemos recurrir a la Programación Lineal. En el caso de los juegos bimatriciales, su formulación como Problemas Complementarios Lineales nos permite encontrar equilibrios de Nash que se comportan como los puntos de silla referidos en el caso anterior. En el trabajo hemos utilizado el Algoritmo de Lemke para calcularlos.

Cabe destacar que la Teoría de Juegos es aplicable en muchos campos de estudio. En particular, se utiliza frecuentemente en el ámbito económico pues la mayoría de situaciones que surgen, por ejemplo, entre competidores de un mercado, se pueden modelizar como juegos.

Finalmente, tras realizar este trabajo, se puede concluir que gracias a la Teoría de Juegos le podemos dar un valor a cada juego. Es decir, conociendo las estrategias de los jugadores, podríamos dejar atrás a la creencia de "tener suerte" y estudiar cuáles de estas nos pemiten obtener buenos resultados.

Bibliografía

[1] WILHELM LEIBNIZ, G. *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*. Hachette Bnf, Francia, 1765.

[2] COURNOT A. *The Mathematical Principles of the Theory of Wealth* The Macmillan Company, New York, 1838.

[3] VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavoir*. Princedton University, Princeton, 1953.

[4] PÉREZ NAVARRO, J.; JIMENO PASTOR J.L.; CERDÁ TENA, E. *Teoría de juegos*. Pearson Educación S.A, Madrid, 2004.

[5] RAGHAVAN, T. *Zero-Sum Two Person Games*. Article in Computational Complexity, University of Illinois, 2009. [en línea] ResearchGate. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/4951953_Zero-Sum_Two_Person_Games.

[6] ARCILA, D. *Historia de la Teoría de Juegos*. [en línea] blogspot.mx. Disponible en: http://teoriadanielarcila.blogspot.mx/2010/11/historia-teoria-de-juegos.html.

[7] *Game Theory* [en línea]. Encyclopedia Britannica. Disponible en: https://www.britannica.com/science/game-theory.

[8] MOKHTAR, S. BAZARAA; HANIF D. SHERALI; SHETTY, C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons, 2013. Disponible en BULL.

[9] *Teoría de Juegos* [en línea]. Wikipedia, 2017. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos#Historia_de_la_teor.C3.ADa_de_juegos

[10] Lemke's Algorithm [en línea]. Disponible en: https://github.com/AndyLamperski/lemkelcp

[11] JONES, A.J. *Game Theory: Mathematical Models of Conflict*. Woodhead Publishing, 2000. Pages 126-136.

Optimization in two-person game problems

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Paola Santana Morales
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101156620@ull.edu.es

Abstract

Game Theory studies situations in which certain players compete or collaborate to achieve particular ends. Most of these situations can be mathematically modeled using optimization problems. In the present project, a study of two-person zero-sum games and bimatricial games has been carried out. In the first case, the sum of both players' winnings is zero. In the second case, this condition does not exist in the game.
In particular, we are interested in the relationship of these two types of games with optimization problems. In the case of two-person zero-sum games, Linear Programming is used to obtain the equilibrium points that provide optimal mixed strategies for the players. In the case of bimatricial games, their formulation as linear complementary problems allows us to find Nash equilibria.

1. Introduction

In 1944, Game Theory was born properly with the mathematician J. Von Neumann (1903-1957) and the economist Oskar Morgenstern (1902-1977) with the publication of their book *"The Theory of Games and Economic Behavior"* [1]. Although some figures, such as James Waldergrave (1684-1741) or Antoine A. Cournot (1801-1877), had already done researches on this theory.
The concept of **game** is formally defined as a recreational or competitive exercise subject to certain rules, and in which you win or lose. The end result of the game always leads to the production of profit or loss for the players. Although, the production of these depends on the decisions of both players.
Games can be classified according to certain important characteristics. For example, according to the number of players: two-person games or n-personal games; depending on the information that is known about it: perfect or imperfect information games, among others.
During the game, players can use two types of strategies: pure or mixed. In the first case, a complete definition of how the player will play the game is provided. The second case is a generalization of the first, it determines a probability distribution on the strategy vector of each player.
Every player is associated with a payout matrix in which the resulting payouts are shown according to the strategies used by each of them.
Then, a study of two-person zero-sum games and bimatricial games will be made, with special emphasis on their relationship with optimization problems.

2. Zero-sum Two-person Games

Let S and T be the pure strategy sets for Players I and II, respectively. A two-person zero-sum game in normal form, $u : S \times T \longrightarrow \mathbb{R}^2, (s,t) \longrightarrow (u_1(s,t), u_2(s,t))$, verify that $u_1(s,t) + u_2(s,t) = 0$. For this reason, in these types of games, the payoff matrices of the players are opposite. That is, let Player I's payoff matrix be

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

then, Player II's payoff matrix will be $-A$. The goal is to find a couple of optimal strategies that maximize each player's profit. The **mixed strategy sets** Players I and II, respectively, can be denoted as:

$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0, \textstyle\sum_{i=1}^m x_i = 1, i = 1, \dots, m\}$$
$$\bar{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq 0, \textstyle\sum_{j=1}^n y_j = 1, j = 1, \dots, n\}$$

When using mixed strategies, Player I's payout will depend on the combination of pure strategies used and the probability associated with each of them. Therefore, **expected game payout** is defined as $v(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$.
The **Minimax Theorem** ensures that in every two-person zero-sum game there are mixed strategies that optimize the value of the game. However, **Linear Programming** is used to find these equilibrium points. The search for these means for players I and II to find the strategies $x \in \bar{X}$ and $y \in \bar{Y}$ that solve, respectively, the following problems

$$\begin{aligned} &\max \ v \\ \text{s.t: } &\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v, j = 1, ..., n \\ &\sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\max \ w \\ \text{s.t: } &\sum_{j=1}^n -a_{ij} y_j \geq w, i = 1, ..., m \\ &\sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

3. Bimatricial Games

In the case of bimatricial games the winnings of players are not opposite. For this reason, each player has an associated payoff matrix, $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ respectively, from which the **bimatriz** of the game arises, which is

$$J(A,B) = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \dots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

The pair (i^*, j^*) is a **Nash equilibrium** for pure strategies if $a_{i^*j^*}$ is the highest payment in column j^* of A and $b_{i^*j^*}$ is the highest payment in row i^* of B, that is, if

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}, \ \forall i = 1, \dots, m \text{ and } b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}, \ \forall j = 1, \dots, n$$

The formulation of bimatricial games as Linear Complementary Problems allows us to find these equilibrium points. Given a square matrix M and the vector $q \in \mathbb{R}^p$. The **Linear Complementary Problem** consists on finding $w, z \in \mathbb{R}^p$ such that

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w_j z_j &= 0, \quad j = 1, \dots, p \\ w_j \geq 0, \ z_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

so that in this type of game we will consider

$$M = \begin{pmatrix} O & A \\ B^t & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -e^m \\ -e^n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

To solve these problems, the **Lemke's Algorithm** is used. There are computational implementations of this algorithm that are used to solve these problems, they can be seen in [4].
Although the main focus in this project on the Linear Complementary Problem has been to relate it to bimatricial games, its study in relation to Quadratic Programming is also interesting, and Lemke's Algorithm is also used to solve these problems.

References

[1] Von Neumann, J.; Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavoir.* Princedton University, Princeton, 1953.
[2] Pérez Navarro, J.; Jimeno Pastor J.L.; Cerdá Tena, E. *Teoría de juegos.* Pearson Educación S.A, Madrid, 2004.
[3] *Game Theory* [online]. Encyclopedia Britannica. Disponible en: https://www.britannica.com/science/game-theory.
[4] Lemke's Algorithm [online]. Disponible en: https://github.com/AndyLamperski/lemkelcp