

Daniel Herrera Martín

*Posición relativa de los puntos críticos
de un polinomio*

Relative position of the critical points of a
polynomial

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna Julio de 2021

DIRIGIDO POR
Evelia R. García Barroso

Evelia R. García Barroso

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa.*

*Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife*

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, en especial a mis padres, a Raquel y a Verónica, por apoyarme, soportarme y guiarme en todo momento.

Daniel Herrera Martín
La Laguna, 6 de julio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

Las raíces de un polinomio en una variable y con coeficientes complejos se pueden representar geoméricamente en el plano real. De esta manera, podemos estudiar diferentes propiedades geométricas de las raíces de los polinomios, en particular, nos interesará especialmente la relación geométrica que existe entre las raíces de un polinomio y las de su derivada.

En primer lugar, asentaremos los conceptos básicos sobre transformaciones afines y elipses, con los que construiremos las pruebas de nuestros resultados principales. A continuación estudiaremos distintas propiedades que relacionan las raíces de un polinomio con las de su derivada. Entre estos resultados destacaremos el Teorema de Gauss-Lucas, el cual establece, dadas las raíces de un polinomio, la región del plano real en la que se encuentran las raíces de su derivada. Estudiaremos además algunas consecuencias de dicho teorema, y en particular el Teorema de Jensen que aplica el mismo a polinomios con coeficientes reales. También presentamos la conjetura de Sendov y su prueba en algunos casos particulares. Esta conjetura plantea la posibilidad de un resultado más preciso que el Teorema de Gauss-Lucas.

Finalmente nos centraremos en el Teorema de Siebeck-Marden, un caso particular del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios de tercer grado, que determina precisamente la posición geométrica de las dos raíces de la derivada del polinomio.

Abstract

The roots of a polynomial in one variable and with complex coefficients can be represented geometrically in the real plane. In this way, we can study different geometric properties of the roots of polynomials, in particular, we are especially interested in the geometric relationship that exists between the roots of a polynomial and those of its derivative.

First, we will establish the basic concepts about affine transformations and ellipses, with which we will construct the proofs of our main results. After doing this we will study different properties that relate the roots of a polynomial with those of its derivative. Among these results we will highlight the Gauss-Lucas Theorem, which establishes, given the roots of a polynomial, the region of the real plane in which the roots of its derivative lie. We will also study some consequences of this theorem; and in particular Jensen's Theorem that applies the same to polynomials with real coefficients. We also present Sendov's conjecture and its proof in some particular cases. This conjecture raises the possibility of a more precise result than the Gauss-Lucas Theorem.

Finally we will focus on the Siebeck-Marden Theorem, a particular case of the Gauss-Lucas Theorem for polynomials of third degree, which determines precisely the geometric position of the two roots of the derivative of the polynomial.

Contenido

Agradecimientos	V
Resumen/Abstract	VII
Introducción	XI
Nociones previas	1
1.1. Elementos geométricos	1
1.2. Transformaciones afines	3
1.3. Algunos resultados sobre elipses	5
Teorema de Gauss-Lucas	13
2.1. Primeras propiedades de las raíces de los polinomios	13
2.2. Teorema de Gauss-Lucas	19
2.3. Consecuencias del Teorema de Gauss-Lucas	25
2.4. Aplicaciones del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios con coeficientes reales. Teorema de Jensen.	28
2.5. Conjetura de Sendov	31
Teorema de Siebeck-Marden	35
3.1. Algunos resultados previos a la prueba	35
3.2. Teorema de Siebeck-Marden	41
Bibliografía	46
Poster	47

Introducción

Los polinomios, y en general las funciones, son conceptos matemáticos ampliamente estudiados y empleados con frecuencia en numerosos resultados, tanto analíticos como algebraicos. La primera vez que nos presentan las funciones desde un punto de vista elemental nos enseñan a representarlas geoméricamente y a calcular sus ceros. Además, se nos enuncian los primeros teoremas, con los que podemos extraer información valiosa de las funciones y entre los cuales se encuentra el conocido Teorema de Rolle. Aunque existen evidencias de la utilización de este resultado por el matemático indio Bhaskara II (1114-1185), no fue hasta el año 1691 que el matemático francés Michel Rolle dió una prueba del mismo y a pesar de ser coetáneo de Leibniz y Newton, los padres del cálculo diferencial, publicó la demostración formal del teorema sin usar el concepto de derivada. El Teorema de Rolle nos dice que entre dos puntos en los que una función derivable de variable real se anula hay un punto donde se anula su derivada. La condición de que la función debe ser de variable real es necesaria, pues no se puede generalizar para funciones de variable compleja. Por ejemplo, la función de variable compleja $e^{2\pi ix} - 1$ se anula para los valores $x = 0$ y $x = 1$, pero su derivada $2\pi i e^{2\pi ix}$ nunca se anula. Por tanto, cabe hacerse la pregunta: ¿Se puede generalizar este resultado para algún conjunto de funciones de variable compleja? Un corolario inmediato del Teorema de Rolle establece que cualquier intervalo real que contenga todas las raíces de un polinomio también contiene a las raíces de la derivada del polinomio. ¿Pero qué pasa si las raíces del polinomio pertenecen a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

La respuesta a estas cuestiones viene de la mano del Teorema de Gauss-Lucas, el cual afirma que las raíces de la derivada de un polinomio *con coeficientes complejos*, cuando los identificamos con puntos en el plano real, están comprendidas en la envolvente convexa de las raíces del polinomio. Este resultado clásico estaba implícito en una nota del famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss fechada en 1836, y fue posteriormente enunciado explícitamente y demostrado por el matemático francés Félix Lucas (ver [10], [11], [12]), en el año 1874. La prueba de Lucas se basa en un teorema de Gauss que proporciona

una buena interpretación física de las raíces de la derivada de un polinomio que no son raíces del polinomio como puntos de equilibrio en un determinado campo de fuerzas. El campo es generado por partículas colocadas en las raíces del polinomio, tienen masas iguales a la multiplicidad de las raíces y se atraen con una fuerza inversamente proporcional a la distancia de la partícula. El Teorema de Gauss-Lucas da pie al estudio de numerosos resultados consecuencia de éste. Es el caso, por ejemplo, del Teorema de Jensen, que es un refinamiento del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios con coeficientes reales. El teorema que fue enunciado sin demostración por Jensen (ver [6]) en el año 1913, fue demostrado por Walsh en [18] en el año 1920.

En la línea del Teorema de Gauss-Lucas tenemos la conocida como conjetura de Sendov, planteada por primera vez por el matemático búlgaro Blagovest Sendov en 1959. La conjetura afirma que si un polinomio con coeficientes complejos tiene todas sus raíces en el disco de centro el origen y radio 1, entonces en cada círculo de radio 1 centrado en una raíz del polinomio existe al menos una raíz de la derivada. La conjetura motivó a numerosos matemáticos a demostrarla para casos concretos y solo se conocían pruebas para polinomios de grado pequeño pero en el año 2020, el matemático australiano Terence Tao presentó una demostración para polinomios de grado suficientemente grande (ver [16]).

En el caso de polinomios de grado 3 es posible decir aún más. Las raíces de la derivada del polinomio son los focos de la elipse que es tangente a los lados del triángulo en sus puntos medios, cuyos vértices son las raíces del polinomio original. Tal teorema es conocido como Teorema de Marden, sin embargo, Marden en su libro *Geometry of polynomials* [13] le atribuye el teorema a Siebeck [15] en un artículo que data de 1864, es por ello que nosotros lo denominamos Teorema de Siebeck-Marden y lo estudiamos en el Capítulo 3 de esta memoria.

Nociones previas

A lo largo de este primer capítulo nos dedicaremos a recordar algunas definiciones necesarias para el desarrollo del trabajo.

1.1. Elementos geométricos

Definición 1.1. *Una elipse real es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano real, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.*

Si F_1 y F_2 son los dos focos y α es la distancia, entonces la elipse viene dada por:

$$E := \{P \in \mathbb{R}^2 / |F_1 - P| + |F_2 - P| = \alpha\}.$$

Cabe destacar que dados los focos de una elipse y la constante que los relaciona, la elipse queda perfectamente definida. Además, dados los focos de la elipse y un punto dentro de la elipse, entonces podemos determinar la constante que relaciona los focos; es decir, la elipse se define perfectamente dados los focos y un punto de la misma.

También nos será útil la ecuación algebraica de una elipse real.

Definición 1.2. *Una cónica de coeficientes reales*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

es una elipse real si, y solamente si, $ab - h^2 > 0$.

Proposición 1.3. *Sean P y Q dos puntos distintos de \mathbb{R}^2 , entonces existe toda una familia de circunferencias que pasan por los puntos P y Q .*

Demostración. Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ tales que $P \neq Q$; es decir, $(p_1, p_2) \neq (q_1, q_2)$. Supongamos que ambos puntos verifican la ecuación de la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 - z^2 = 0$, es decir,

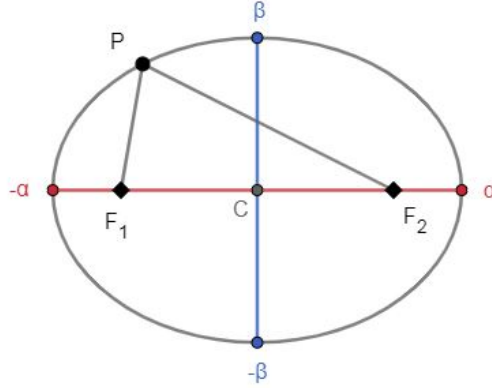


Figura 1.1: Elipse.

$$(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2 - z^2 = 0$$

y

$$(q_1 - a)^2 + (q_2 - b)^2 - z^2 = 0.$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Si expandimos los cuadrados obtenemos

$$p_1^2 + a^2 - 2p_1a + p_2^2 + b^2 - 2p_2b - z^2 = 0 \quad (1.1)$$

y

$$q_1^2 + a^2 - 2q_1a + q_2^2 + b^2 - 2q_2b - z^2 = 0. \quad (1.2)$$

De la resta de las igualdades (1.1) y (1.2) se tiene

$$p_1^2 - q_1^2 - 2a(p_1 - q_1) + p_2^2 - q_2^2 - 2b(p_2 - q_2) = 0.$$

De aquí, si $(p_1 - q_1) \neq 0$ entonces podemos despejar a en función de b de la siguiente forma:

$$a = \frac{1}{2(p_1 - q_1)} [p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2 - 2b(p_2 - q_2)].$$

Si por el contrario $(p_1 - q_1) = 0$, entonces por ser $P \neq Q$ tenemos que $(p_2 - q_2) \neq 0$ y por tanto podríamos despejar b de la forma

$$b = \frac{1}{2(p_2 - q_2)} [p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2].$$

En cualquier caso, tenemos una de las dos variables en función de la otra. Dado que $z = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}$, se tiene que z está en función de una variable. Se concluye que el sistema es compatible indeterminado y por tanto, tiene una familia de soluciones. ■

Nota.: Observamos que dados dos puntos del plano real, si fijamos un radio, existe una única circunferencia con este radio que pasa por los puntos y de centro (a, b) .

Definición 1.4. Sean A, B y C tres puntos no colineales del plano, denotaremos $\angle ABC$ al ángulo que forman los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} ; y como $\triangle ABC$ al triángulo con vértices en los puntos A, B y C .

Definición 1.5. Sea T un triángulo, se define el circuncentro de T como el punto equidistante a cada uno de sus vértices.

Definición 1.6. Sean P un punto y S una recta del plano real tales que $P \cap S = \emptyset$. Entonces P' es la imagen especular de P por la recta S si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La distancia de P y P' a la recta S , es la misma.
2. El segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular a S .

A la recta S la denotamos eje especular.

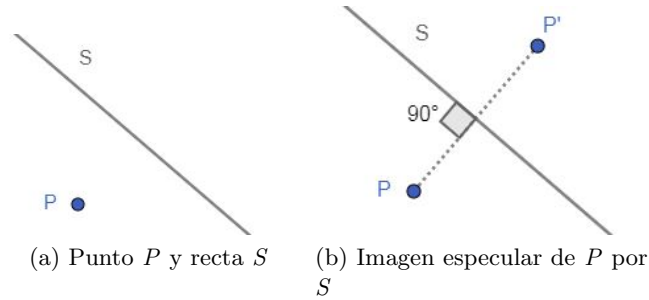


Figura 1.2: Construcción de la imagen especular de P por la recta S .

1.2. Transformaciones afines

En esta sección recordaremos las transformaciones afines y algunos resultados sobre ellas.

Definición 1.7. Se llama transformación afín en el plano real a toda composición $\psi = \tau \circ \phi$, siendo ϕ un isomorfismo lineal y τ una traslación, ambas en \mathbb{R}^2 . Dicho de otro modo, una transformación afín en el plano real es una aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} + (a, b) = (px + ry + a, qx + sy + b),$$

con $a, b, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ y $ps \neq qr$.

Durante este trabajo nos será útil poder trasladar, rotar y escalar los elementos del plano real convenientemente y sin pérdida de generalidad. Las traslaciones, las rotaciones y los escalamientos pueden entenderse como aplicaciones $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde $M(z) = \alpha z + \beta$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Además, si $z \in \mathbb{C}$, $z = z_1 + iz_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, podemos definir la aplicación $\overline{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, asociada a M de la siguiente manera:

$$\overline{M}(z) = \overline{M}(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2 \in \mathbb{C}$.

La aplicación $\overline{M}(z)$ es transformación afín en el plano real. En efecto, $\overline{M}(z)$ es composición de la traslación $T(z) = z + (\beta_1, \beta_2)$ con la aplicación lineal $A(z)$ definida por

$$A(z) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = (z_1\alpha_1 - z_2\alpha_2, z_1\alpha_2 + z_2\alpha_1).$$

El determinante de la matriz asociada a la aplicación $A(z)$ es

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \text{ ya que } \alpha \neq 0.$$

Entonces $A(z)$ es isomorfismo lineal. Por tanto, $\overline{M}(z) = T \circ A(z)$ es una transformación afín en el plano real.

Lema 1.8. *La imagen por una transformación afín de un segmento es de nuevo un segmento. Además, la imagen del punto medio del segmento es el punto medio del segmento imagen.*

Demostración. Sea $\overline{M}(z) = T \circ A(z)$ una transformación afín de \mathbb{R}^2 y sean $a, b \in \mathbb{R}^2$ con $a \neq b$; y $S := \{tb + (1-t)a : t \in [0, 1]\}$ el segmento \overline{ab} . Se tiene entonces, en primer lugar que $\overline{M}(a) \neq \overline{M}(b)$ por ser \overline{M} inyectiva. Veamos qué ocurre con $\overline{M}(S)$.

$$\overline{M}(S) = \overline{M}(tb + (1-t)a) = T(A(tb + (1-t)a)). \quad (1.3)$$

Por ser A aplicación lineal obtenemos

$$T(tA(b) + (1-t)A(a)) = tA(b) + (1-t)A(a) + \beta. \quad (1.4)$$

Reescribimos β como $t\beta + (1-t)\beta$ y tenemos

$$tA(b) + (1-t)A(a) + t\beta + (1-t)\beta = t(A(b) + \beta) + (1-t)(A(a) + \beta). \quad (1.5)$$

Finalmente de (1.3), (1.4) y (1.5) obtenemos

$$\overline{M}(S) = t\overline{M}(b) + (1-t)\overline{M}(a),$$

es decir, el segmento $\overline{\overline{M}(a)\overline{M}(b)}$.

Además, la imagen del punto medio del segmento S es el punto medio del segmento $\overline{M}(S)$. En efecto, tomando $t = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}b + (1 - \frac{1}{2})a = \frac{a+b}{2}.$$

Calculamos su imagen

$$\overline{M}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\overline{M}(a) + \overline{M}(b)}{2}.$$

■

Nota. Mediante un razonamiento análogo se tiene que la imagen de una recta por una transformación afín es de nuevo una recta.

Corolario 1.9. *La imagen de un triángulo por una transformación afín es de nuevo un triángulo.*

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no colineales y sea $\overline{M}(z)$ una transformación afín. Definimos T el triángulo con vértices en a, b, c . En primer lugar tenemos que, como a, b, c son tres puntos distintos y $\overline{M}(z)$ es inyectiva, obtenemos que $\overline{M}(a), \overline{M}(b)$ y $\overline{M}(c)$ son también tres puntos distintos. Además, por el Lema 1.8 sabemos que $\overline{M}(\overline{ab}), \overline{M}(\overline{ac})$ y $\overline{M}(\overline{bc})$ son de nuevo segmentos. En suma, $\overline{M}(T)$ es un triángulo con vértices $\overline{M}(a), \overline{M}(b)$ y $\overline{M}(c)$. ■

1.3. Algunos resultados sobre elipses

Nos será útil también poder rotar, escalar y trasladar elipses sin pérdida de generalidad. Para ello primero deberemos recordar algunos conceptos.

Definición 1.10. *Sean E_f y E_g dos elipses reales definidas por $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ respectivamente. Diremos que son equivalentes mediante transformaciones afines ($E_f \cong E_g$), o simplemente equivalentes, si existen $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\Phi(x, y)$ transformación afín del plano real tal que*

$$f(x, y) = \lambda g(\Phi(x, y)).$$

Proposición 1.11. *Ser equivalente por transformaciones afines es una relación de equivalencia en el conjunto de las elipses reales.*

Demostración. Debemos verificar que se cumplen las propiedades *reflexiva, simétrica y transitiva.*

1. *Reflexiva.* Tomando $\lambda = 1$ y $\Phi(x, y) = Id_{\mathbb{R}^2}(x, y)$ la identidad en el plano real se tiene que $f(x, y) = 1f(\Phi(x, y)) = f(Id_{\mathbb{R}^2}(x, y)) = f(x, y)$.
2. *Simétrica.* Si $f(x, y) = \lambda g(\Phi(x, y))$ entonces $g(x, y) = \lambda^{-1}f(\Phi^{-1}(x, y))$, ya que $f(x, y) = \lambda\lambda^{-1}f(\Phi^{-1}(\Phi(x, y))) = \lambda g(\Phi(x, y))$.
3. *Transitiva.* Si $E_f \cong E_g$ y $E_g \cong E_h$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ transformaciones afines tales que $f(x, y) = \lambda_1 g(\Phi_1(x, y))$ y $g(x, y) = \lambda_2 h(\Phi_2(x, y))$. Podemos definir $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $\Phi_3(x, y) = \Phi_2(\Phi_1(x, y))$ transformación afín. Por tanto, $f(x, y) = \lambda_1 g(\Phi_1(x, y)) = \lambda_1\lambda_2 h(\Phi_2(\Phi_1(x, y))) = \lambda_3 h(\Phi_3(x, y))$. ■

Proposición 1.12. *Toda elipse en \mathbb{R}^2 es afínmente equivalente a la circunferencia $y^2 + x^2 = 1$.*

Demostración. Sea la elipse descrita mediante la ecuación

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0; \quad (1.6)$$

donde $a, b, c, f, g, h \in \mathbb{R}$, con $ab - h^2 > 0$. Podemos suponer que $b \neq 0$ ya que si no lo fuera, la condición $ab - h^2 > 0$ no se daría. Dividiendo entre b , reescribimos la ecuación $a'x^2 + 2h'xy + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ con $a' = \frac{a}{b}$, $c' = \frac{c}{b}$, $f' = \frac{f}{b}$, $g' = \frac{g}{b}$ y $h' = \frac{h}{b}$. A continuación, escribimos la ecuación de la siguiente manera: $y^2 + h'^2x^2 + 2h'xy + 2f'y + 2h'f'x + f'^2 = Ax^2 + 2Bx + C$, donde $h'^2 - A = a'$, $2h'f'x - 2B = 2g'$, $f'^2 - C = c'$. Definiendo $q(x) = Ax^2 + 2Bx + C$ y agrupando en cuadrados la expresión se reduce a $(y + hx + f)^2 = q(x)$. Ahora, definimos la siguiente transformación afín:

$$E(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}.$$

Esta transformación afín lleva a los puntos de la forma $(x, y + hx + f)$ en (x, y) . Por tanto, mediante esta transformación afín podemos reescribir la ecuación (1.6) en la forma $y^2 = Ax^2 + Bx + C$.

Partimos ahora de la ecuación $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tenemos que $A < 0$ pues se trata de una ecuación que define una elipse (ver Definición 1.2). Definimos ahora una transformación afín para que el coeficiente que acompaña a x^2 sea -1 . La transformación es:

$$F(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-A}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tras realizar la transformación F nos quedará la expresión $y^2 = -(x-B)^2 + (B^2 - C)$, donde B y C pueden haber cambiado. A continuación aplicamos la transformación

$$G(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

la cual nos lleva $(x - B)$ en x , obteniendo $y^2 = -x^2 + D$, con $D > 0$ porque es una elipse real y, por tanto, si $D \leq 0$ no existirían $(x, y) \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 + x^2 = D$.

Finalmente, aplicando la transformación afín definida por

$$H(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \sqrt{D} & 0 \\ 0 & \sqrt{D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nos queda $Dy^2 = -Dx^2 + D$ y dividiendo entre D , $y^2 = -x^2 + 1$. ■

Corolario 1.13. Sean E_1 y E_2 dos elipses reales arbitrarias entonces E_1 y E_2 son afínmente equivalentes.

Demostración. Sean E_1 y E_2 dos elipses reales cualesquiera, y sea E_0 la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen.

Por la Proposición 1.12 tenemos que $E_1 \cong E_0$ y $E_2 \cong E_0$. Aplicando la propiedad simétrica de las relaciones de equivalencia $E_0 \cong E_2$, y por la propiedad transitiva $E_1 \cong E_2$. ■

Proposición 1.14. Sea E una elipse con focos en F_1 y F_2 . Entonces para todo $A \in E$ se tiene que la recta tangente a E en A forma ángulos iguales con las rectas $\overline{AF_1}$ y $\overline{AF_2}$.

Demostración. En primer lugar, extendiendo el segmento $\overline{F_1A}$ la longitud del segmento $\overline{AF_2}$ como se muestra en la Figura 1.3 obtenemos el punto G . Además, podemos definir la recta T como la recta por la cual G es imagen especular de F_2 . Vemos que

$$F_1G = F_1A + AF_2 = k, \tag{1.7}$$

siendo k una constante. Esto se tiene por ser A un punto de la elipse.

Entonces la recta T es tangente a la elipse en el punto A . Para probar esto tomamos un punto C distinto de A perteneciente a T (ver Figura 1.4). Observamos que

$$F_2C = GC, \tag{1.8}$$

por ser T el eje especular de F_2 y G , lo que implica que F_2 y G están a la misma distancia de T (ver Definición 1.6).

También se tiene, usando la ecuación (1.8), que

$$F_1C + F_2C = F_1C + GC,$$

y aplicando la desigualdad triangular, como $C \neq A$ tenemos que

$$F_1C + GC > F_1G.$$

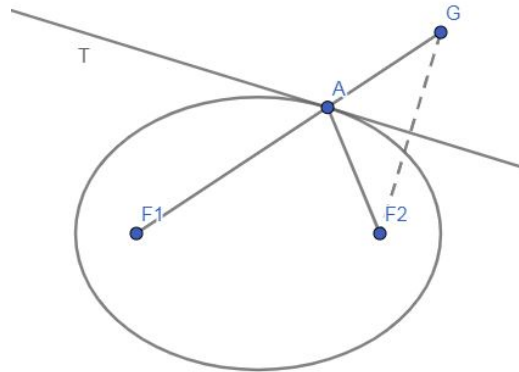


Figura 1.3: Extensión del segmento $\overline{F_1A}$ para obtener G .

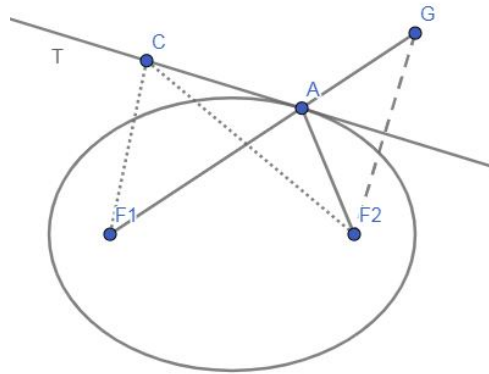


Figura 1.4: Construcción para un punto C en T distinto de A .

Por tanto si $C \neq A$ entonces, por la ecuación (1.7), C no está en la elipse, lo que implica que T es tangente a E en el punto A .

Por tanto, T divide en dos ángulos iguales el ángulo $\angle F_2AG$. Y, si denotamos por N a la recta normal a E en el punto A , se tiene que N divide en dos ángulos iguales al ángulo F_1AF_2 . Luego el ángulo que forman el segmento $\overline{F_1A}$ y la recta T es igual al que forma T con el segmento F_2A . Todo esto se ilustra en la Figura 1.5.



Proposición 1.15. Sean E una elipse y P un punto exterior a E , entonces existen dos rectas que pasan por P y son tangentes a E .

Demostración. En primer lugar, si denotamos por Φ a la transformación afín que lleva la elipse E en la circunferencia de radio uno centrada en el origen

$$C : x^2 + y^2 = 1,$$

según afirma la Proposición 1.12, tenemos lo siguiente:

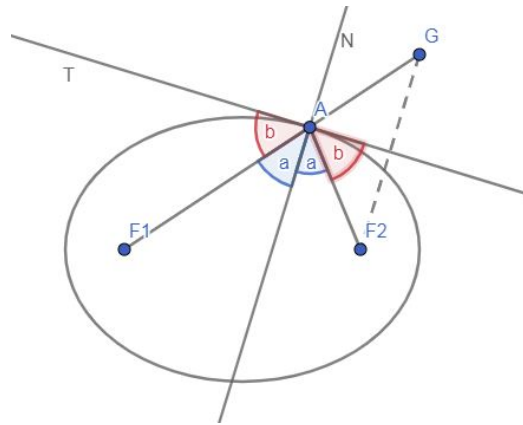


Figura 1.5: Ángulos que forman las rectas T y N con los segmentos $\overline{F_1A}$ y $\overline{AF_2}$.

1. Por el Lema 1.8 la imagen de una recta por Φ es de nuevo una recta.
2. La imagen por Φ de un punto fuera de la elipse E es un punto fuera de la circunferencia C .
3. La imagen por Φ de una recta tangente a la elipse E en el punto A será, por ser Φ biyectiva, una recta tangente a la circunferencia C en el punto imagen de A .

Por tanto, podemos tomar sin pérdida de generalidad la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1$ como elipse de partida.

Sean $P = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ exterior a la elipse. Entonces las rectas que pasan por P y son tangentes a la C son de la forma $y = mx + c$ con $c = \beta - m\alpha$. Observamos que la recta $x = 0$ no es tangente a C .

Como las rectas que pasan por P son tangentes a C si la cortan en un solo punto, entonces obtendremos estas rectas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + c, \end{cases}$$

e imponiendo que tiene una única solución.

Comenzaremos con el cálculo expandiendo la expresión

$$x^2 + (mx + c)^2 = 1,$$

con lo que obtenemos

$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = 1,$$

y agrupando los coeficientes

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - 1 = 0. \tag{1.9}$$

Como el sistema debe tener una única solución, el discriminante de la ecuación (1.9) debe anularse; es decir,

$$4m^2c^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - 1) = 0.$$

Haciendo el producto obtenemos

$$4(m^2c^2 - c^2 + 1 - m^2c^2 + m^2) = 0,$$

es decir

$$4(-c^2 + 1 + m^2) = 0$$

o equivalentemente

$$c^2 - 1 - m^2 = 0.$$

Ahora sustituimos $c = \beta - \alpha m$

$$(\beta - \alpha m)^2 - 1 - m^2 = 0,$$

desarrollamos el cuadrado

$$\beta^2 - 2\alpha\beta m + \alpha^2 m^2 - 1 - m^2 = 0$$

y reagrupando coeficientes

$$(\alpha^2 - 1)m^2 - 2\alpha\beta m + \beta^2 - 1 = 0. \quad (1.10)$$

Para calcular cuantos posibles valores puede adoptar m analicemos el discriminante de la ecuación (1.10), que es

$$4\alpha^2\beta^2 - 4(\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1),$$

desarrollamos el producto

$$4\alpha^2\beta^2 - 4(\alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1)$$

y se concluye

$$4(\alpha^2 + \beta^2 - 1) > 0,$$

ya que P es un punto fuera de la circunferencia C .

Entonces la ecuación (1.10) tiene dos raíces reales distintas m_1 y m_2 ; y por tanto hay dos rectas tangentes a C que pasan por P . ■

Lema 1.16. *Consideramos la elipse con focos F_1 y F_2 , y A un punto fuera de la elipse. Sean l_1 y l_2 las dos rectas que pasan por A y son tangentes a la elipse. Sean G_1 y G_2 los puntos de la elipse tangentes a dichas rectas. Entonces $F_1AG_1 = F_2AG_2$ (ver Figura 1.6).*

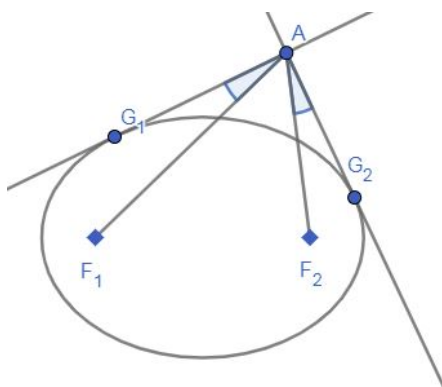


Figura 1.6: Las rectas tangentes a la elipse que pasan por un punto A exterior a la elipse.

Demostración. Comenzamos por definir H_1 como la imagen especular de F_1 mediante la recta $\overline{AG_1}$; y K_1 como la intersección de $\overline{AG_1}$ con $\overline{F_1H_1}$. Por construcción se tiene que la recta $\overline{AK_1}$ es la mediatriz del segmento $\overline{F_1H_1}$ lo que implica que $\triangle AK_1F_1$ y $\triangle AK_1H_1$ son triángulos rectángulos congruentes y, por tanto,

$$AF_1 = AH_1, \tag{1.11}$$

y también

$$\angle F_1AK_1 = \angle H_1AK_1. \tag{1.12}$$

Hacemos la misma construcción para G_2 (ver Figura 1.7).

Tenemos que probar que $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$, pero utilizando las igualdades (1.11) y (1.12) el problema se reduce a probar que $\angle F_1AH_1 = \angle F_2AH_2$.

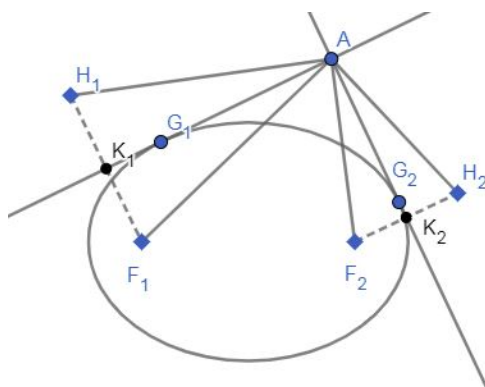


Figura 1.7: Construcción.

Trazamos los segmentos $\overline{F_1G_1}$ y $\overline{F_2G_1}$, y extendemos este último hasta H_1 . La colinealidad de F_2 , G_1 y H_1 es una consecuencia de la Propiedad 1.14. Esa misma propiedad muestra también que $\angle F_1G_1K_1 = \angle F_2G_1A$. Y como $\angle F_1G_1K_1 = \angle H_1G_1K_1$ se tiene por complementariedad de ángulos que F_2 , G_1 y H_1 son colineales. Hacemos la misma construcción con G_2

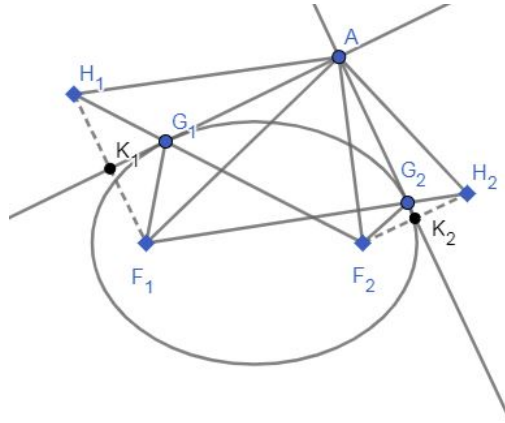


Figura 1.8: Representación de las distintas rectas mencionadas.

Ahora hay que demostrar que $\triangle AH_1F_2$ es congruente con $\triangle AF_1H_2$, se hará probando que sus lados son iguales. Ya hemos visto que $AH_1 = AF_1$ y $AF_2 = AH_2$. Además, $H_1F_2 = F_1G_1 + G_1F_2 = F_1G_2 + G_2F_2 = F_1H_2$. Esto es así porque la suma de los segmentos que unen los focos con un punto de una elipse siempre es constante.

Dado que $\triangle AH_1F_2$ es congruente a $\triangle AF_1H_2$ entonces $\angle H_1AF_2 = \angle F_1AH_2$. Como los ángulos $\angle H_1AF_2$ y $\angle F_1AH_2$ contienen al ángulo $\angle F_1AF_2$ podemos restarlo a ambos, obteniendo que $\angle H_1AF_1 = \angle H_2AF_2$. ■

Teorema de Gauss-Lucas

En este capítulo nos dedicaremos a ilustrar algunas propiedades que relacionan estrechamente las raíces de un polinomio en una variable y coeficientes complejos, con las raíces de su derivada. Fundamentalmente hemos seguido [13] como referencia bibliográfica para este capítulo.

2.1. Primeras propiedades de las raíces de los polinomios

En primer lugar, como \mathbb{C} es isomorfo a \mathbb{R}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial, a cada $z \in \mathbb{C}$ le podemos hacer corresponder un punto del plano real. En efecto, a $z = z_1 + iz_2$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ lo identificamos con $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Observamos que si $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ con $a_n \neq 0$, y consideramos $q(z) := a_n^{-1} p(z)$ entonces z_0 es una raíz de $p(z)$ si y sólo si z_0 es una raíz de $q(z)$. Por tanto, para el estudio de las raíces de un polinomio podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que es mónico.

Queremos estudiar la relación entre las raíces de $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ y aquellas de su derivada $p'(z)$. Empezamos recordando el siguiente resultado:

Lema 2.1. *Sea z_0 una raíz de un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ y supongamos que la multiplicidad de z_0 es $m \geq 2$. Entonces z_0 es también una raíz de $p'(z)$ con multiplicidad $m - 1$.*

Demostración. Supongamos que el grado de $p(z)$ es n y que la multiplicidad de z_0 es m , entonces podemos escribir el polinomio en la forma

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z), \tag{2.1}$$

donde $q(z)$ es un polinomio de grado $n - m$ tal que $q(z_0) \neq 0$. Ahora, derivando a ambos lados de la igualdad (2.1) obtenemos

$$p'(z) = m(z - z_0)^{m-1} q(z) + (z - z_0)^m q'(z),$$

y sacando $(z - z_0)^{m-1}$ factor común se tiene

$$p'(z) = (z - z_0)^{m-1}(mq(z) + (z - z_0)q'(z)).$$

Por último, como $m - 1 \geq 1$ tenemos que z_0 es raíz de $p'(z)$ y además como $mq(z_0) \neq 0$, se concluye que z_0 es raíz del polinomio $p'(z)$ con multiplicidad $m - 1$. ■

A continuación vamos a estudiar la función racional $\frac{p'(z)}{p(z)} \in \mathbb{C}(z)$ (cuerpo de fracciones del anillo de polinomios $\mathbb{C}[z]$).

Lema 2.2. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio cuyas raíces son z_1, \dots, z_r con m_1, \dots, m_r las respectivas multiplicidades. Entonces el cociente definido por $P(z) = p'(z)/p(z)$ es igual a $P(z) = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{z - z_j}$.*

Demostración. Por hipótesis podemos escribir $p(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_r)^{m_r} \in \mathbb{C}[z]$, polinomio de grado $\sum_{j=1}^r m_j$. Procedemos por inducción sobre r .

Si $r = 1$, entonces $p(z) = (z - z_1)^{m_1}$ y su derivada es $p'(z) = m_1(z - z_1)^{m_1-1}$. Se tiene que

$$P(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{m_1(z - z_1)^{m_1-1}}{(z - z_1)^{m_1}} = \frac{m_1}{z - z_1},$$

es decir, el lema se cumple para el caso $r = 1$.

Supongamos ahora que el lema es cierto para $r - 1$. Veamos que se verifica para r . Si definimos $g(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_{r-1})^{m_{r-1}}$, podemos escribir el polinomio $p(z)$ como $p(z) = g(z)(z - z_r)^{m_r}$, y su derivada es

$$p'(z) = g'(z)(z - z_r)^{m_r} + g(z)m_r(z - z_r)^{m_r-1}.$$

Por tanto

$$P(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{g'(z)(z - z_r)^{m_r} + g(z)m_r(z - z_r)^{m_r-1}}{g(z)(z - z_r)^{m_r}}.$$

Si lo separamos en dos sumandos nos queda

$$P(z) = \frac{g'(z)(z - z_r)^{m_r}}{g(z)(z - z_r)^{m_r}} + \frac{g(z)m_r(z - z_r)^{m_r-1}}{g(z)(z - z_r)^{m_r}} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{m_r}{z - z_r}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción a $g(z)$ se concluye que

$$P(z) = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{z - z_j}.$$

■

Corolario 2.3. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio complejo cuyas raíces son z_1, \dots, z_r con m_1, \dots, m_r sus respectivas multiplicidades. Entonces $p'(z) = p(z)P(z)$, donde $P(z) = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{z-z_j}$.*

Demostración. Por el Lema 2.2 tenemos que $\frac{p'(z)}{p(z)} = P(z)$. Si despejamos $p'(z)$ nos queda $p'(z) = p(z)P(z)$, como queríamos demostrar. ■

Observamos del Corolario 2.3 que las raíces de $p'(z)$, con $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grado n , son de dos tipos: si z_k es una raíz de $p(z)$ de multiplicidad $m_k > 1$, entonces z_k es una raíz de $p'(z)$ de multiplicidad $m_k - 1$. Por tanto, dado que el grado de $p'(z)$ es $n - 1$ y $\sum_{j=1}^r (m_j - 1) = n - r$, $p'(z)$ tiene $n - r$ raíces, contando multiplicidades, que son raíces de $p(z)$, y $r - 1$ raíces, no necesariamente distintas que no son raíces de $p(z)$ pero sí de la función racional $P(z) = \frac{p'(z)}{p(z)} \in \mathbb{C}(z)$. Esta función racional se denomina derivada logarítmica de $p(z)$ pues coincide con la derivada de $\log(p(z))$.

Las raíces de $p'(z)$ se denominan puntos críticos de $p(z)$. Aquellos puntos críticos que son raíces de $p(z)$ se denominan de primer tipo y los que son raíces de $P(z)$ se denominan de segundo tipo.

Cuando las raíces de $p(z)$ son todas reales podemos suponer que $z_1 < z_2 < \dots < z_r$. Entonces, por el Teorema de Rolle, sabemos que $p(z)$ tiene al menos un punto crítico en cada uno de los intervalos abiertos $I_j = (z_j, z_{j+1})$, para $j = 1, \dots, r - 1$; y estos puntos críticos son siempre de segundo tipo. Como $p(z)$ tiene en total $r - 1$ puntos críticos de segundo tipo, cada intervalo I_j puede contener un único punto crítico y debe ser de multiplicidad uno. Observamos además que todos los puntos críticos de $p(z)$ viven en el intervalo cerrado $[z_1, z_r]$.

Como consecuencia del Corolario 2.3 obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grado n cuyas raíces $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ son todas distintas. Entonces los valores propios de la matriz*

$$M := \frac{1}{n} \begin{pmatrix} (n-1)z_2 + z_1 & z_1 - z_3 & \cdots & z_1 - z_n \\ z_1 - z_2 & (n-1)z_3 + z_1 & \cdots & z_1 - z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 - z_2 & z_1 - z_3 & \cdots & (n-1)z_n + z_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

son los puntos críticos de $p(z)$.

Demostración. En primer lugar, del Corolario 2.3 sabemos que las raíces de $p'(z)$ son las de $P(z) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z-z_j}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de M . Entonces existe un autovector $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$ tal que $Mx = \lambda x$.

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} (z_1 - z_{k+1}) x_k = (\lambda - z_{j+1}) x_j,$$

para todo $j = \{1, \dots, n-1\}$. Si denotamos por d a $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} (z_1 - z_{j+1}) x_j$ se tiene que

$$x_j = \frac{d}{\lambda - z_{j+1}}$$

para todo $j = \{1, \dots, n-1\}$. Pero como $d = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} (z_1 - z_{j+1}) x_j$ se sigue que

$$d = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n} (z_1 - z_{j+1}) \left(\frac{d}{\lambda - z_{j+1}} \right).$$

Sacamos factor común $\frac{d}{n}$ y obtenemos

$$n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_1 - z_{j+1}}{\lambda - z_{j+1}}.$$

Ahora sumamos y restamos $\frac{\lambda - z_{j+1}}{\lambda - z_{j+1}} = 1$ dentro del sumatorio y tenemos que

$$n = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{z_1 - z_{j+1}}{\lambda - z_{j+1}} - \frac{\lambda - z_{j+1}}{\lambda - z_{j+1}} \right) + n - 1,$$

o equivalentemente

$$1 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_1 - \lambda}{\lambda - z_{j+1}}.$$

Si sacamos factor común $z_1 - \lambda$ se sigue que

$$\frac{1}{z_1 - \lambda} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda - z_{j+1}},$$

es decir,

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda - z_{j+1}} \right) + \frac{1}{\lambda - z_1}.$$

Se concluye que

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda - z_j} = P(\lambda) = p'(\lambda).$$

■

La Proposición 2.4 ha sido extraída de [8].

Ahora, si $P(z) = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{z-z_j}$ podemos considerar su conjugado:

$$\overline{P}(\overline{z}) := \sum_{j=1}^r \overline{\left(\frac{m_j}{z-z_j} \right)}.$$

Observamos que

$$\overline{P}(\overline{z}) = \sum_{j=1}^r \frac{\overline{m_j}}{\overline{z-z_j}} = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{\overline{z-z_j}}; \quad (2.2)$$

ya que m_j es un entero positivo, el conjugado de la suma de dos números complejos es la suma de sus conjugados y el conjugado del cociente de dos números complejos es el cociente de sus conjugados.

Propiedad 2.5. El j -ésimo sumando de $\overline{P}(\overline{z})$ en la igualdad (2.2) tiene el mismo argumento que $z - z_j$.

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{C}$ podemos escribir $z - z_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, siendo ρ_j el módulo de $z - z_j$ y θ_j su argumento, y por tanto, el j -ésimo sumando de $\overline{P}(\overline{z})$ en la igualdad (2.2) será $\frac{m_j}{\overline{z-z_j}} = m_j \left(\frac{1}{\rho_j}\right) e^{i\theta_j}$; que tiene el mismo argumento que $z - z_j$. ■

Gauss ofrece una visión física de este concepto: si $z = a + ib$ y $z_j = a_j + ib_j$ entonces

$$\frac{m_j}{\overline{z-z_j}} = \frac{m_j(\overline{z} + \overline{z_j})}{(\overline{z-z_j})(\overline{z} + \overline{z_j})} = \frac{m_j}{(a-a_j)^2 - (b-b_j)^2} (z - z_j).$$

Por tanto, $\frac{m_j}{\overline{z-z_j}}$ puede verse como un vector con la dirección de z_j a z y de magnitud m_j veces el inverso de la distancia de z_j a z . En otras palabras, el j -ésimo término de (2.2) puede ser considerado como la fuerza con la que una masa (o carga eléctrica) fija m_j en el punto z_j es repelida (o atraída si $m_j < 0$) por una masa (o carga) móvil en z .

Además si $w \in \mathbb{C}$ es un punto crítico de segundo tipo de $p(z)$ obtenemos que $P(w) = 0$, entonces tales puntos críticos juegan el papel de puntos estacionarios o de equilibrio del sistema.

Recordemos a continuación las relaciones de Cardano-Vieta, entre las raíces de un polinomio con los coeficientes de este, y que nos ayudarán a completar nuestros resultados.

Por ejemplo, si consideramos el polinomio mónico de segundo grado con coeficientes complejos

$$z^2 + a_1 z + a_0, \quad (2.3)$$

se puede factorizar en función de sus raíces como

$$(z - z_1)(z - z_2).$$

Expandiendo esta expresión nos queda el polinomio en la forma

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2. \quad (2.4)$$

Por tanto, igualando términos de (2.3) y (2.4) se obtiene $a_1 = -(z_1 + z_2)$ y $a_0 = z_1z_2$. Este es el caso más sencillo de las fórmulas de Cardano-Vieta. Veamos ahora la construcción para un polinomio mónico de tercer grado

$$z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Tenemos que se factoriza como

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

y desarrollando el producto nos queda el polinomio

$$z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3.$$

Es decir, las fórmulas de Cardano-Vieta para un polinomio de grado tres son $a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $a_1 = (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)$ y $a_0 = -z_1z_2z_3$. Estas fórmulas son generalizables para polinomios de grado $n \geq 4$. En efecto si tomamos el polinomio mónico

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

se puede factorizar de nuevo en función de sus raíces en la forma

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Expandiendo el producto obtendremos el polinomio

$$z^n - (z_1 + \dots + z_n)z^{n-1} + \dots + (-1)^j \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} z_{i_1} \dots z_{i_j} \right) z^{n-j} + \dots + (-1)^n (z_1 \dots z_n).$$

De esta manera hemos obtenido la fórmula de Cardano-Vieta para el $n - j$ -ésimo término de un polinomio de grado n , que es $a_{n-j} = (-1)^j (\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} z_{i_1} \dots z_{i_j})$, con $j = 1, 2, \dots, n - 1$.

Definición 2.6. *El centroide o baricentro de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.*

Proposición 2.7. *El centroide de las raíces de un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ coincide con el centroide de las raíces de su derivada $p'(z)$.*

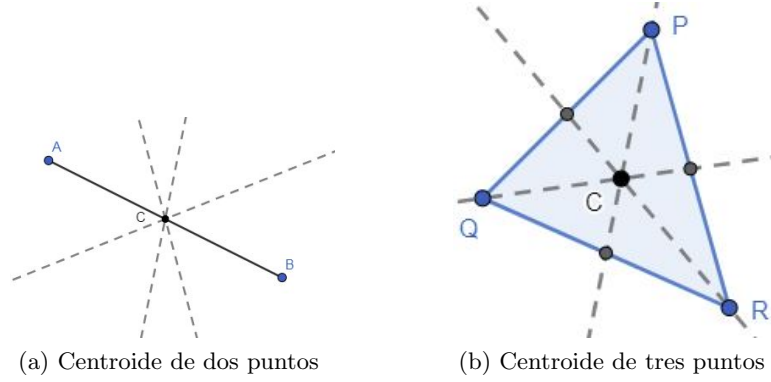


Figura 2.1: Ejemplos de centroides.

Demostración. Sean $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ que podemos suponer mónico, y su derivada $p'(z) = nz^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \dots + a_1$ cuyas raíces son z_1, \dots, z_n y z'_1, \dots, z'_{n-1} respectivamente, entonces de las fórmulas de Cardano-Vieta de $p(z)$ y $p'(z)$ tenemos

$$a_{n-1} = -(z_1 + \dots + z_n) \tag{2.5}$$

y

$$\frac{(n-1)a_{n-1}}{n} = -(z'_1 + \dots + z'_{n-1}), \tag{2.6}$$

respectivamente. Dividiendo la igualdad (2.5) entre n y la igualdad (2.6) entre $(n-1)$ se sigue que

$$\frac{-a_{n-1}}{n} = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} = \frac{z'_1 + \dots + z'_{n-1}}{n-1},$$

es decir, los centroides de las raíces de $p(z)$ y $p'(z)$ coinciden con $\frac{-a_{n-1}}{na_n}$. ■

2.2. Teorema de Gauss-Lucas

Procedamos ahora a ilustrar y probar el Teorema de Gauss-Lucas. Previamente debemos recordar algunos conceptos de convexidad.

Definición 2.8. Diremos que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si para cualquier par de puntos $p, q \in S$ se tiene que el segmento que une a p y q está contenido en S .

Definición 2.9. Se define la envolvente convexa de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ como la intersección de todos los conjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a X . Es decir, la envolvente convexa de X es el menor convexo que contiene a X (ver Figura 2.2).

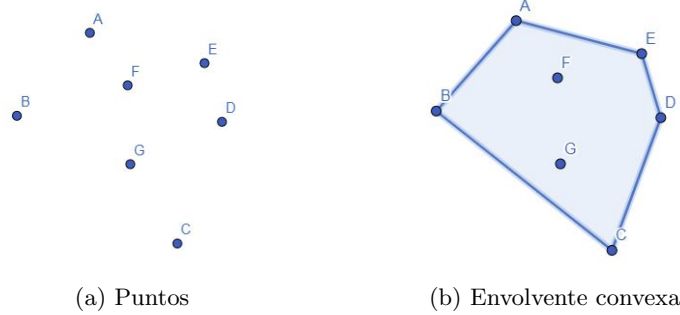


Figura 2.2: Representación de la envolvente convexa.

Definición 2.10. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y $Z \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. Se define el ángulo subtendido en Z por S , y se denota $A_S(Z)$, como el mayor ángulo $\angle PZQ$, para $P, Q \in S$ (ver Figura 2.3).

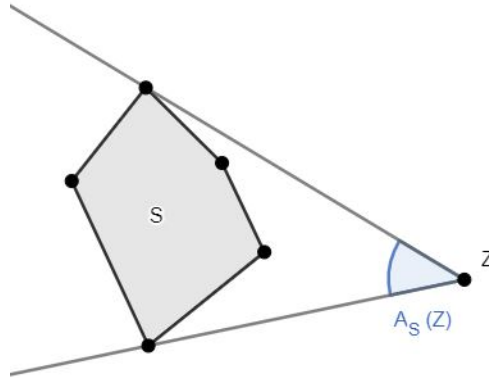


Figura 2.3: Ángulo subtendido en Z por S .

Proposición 2.11. Si $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es convexo, entonces $A_S(Z) < \pi$ para todo Z exterior a S .

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe Z exterior al conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $A_S(Z) \geq \pi$, es decir, el mayor ángulo $\angle PZQ$ es mayor que π para $P, Q \in S$. Por ser S convexo existirán $P', Q' \in S$ tales que $\angle P'ZQ' = \pi$, o lo que es lo mismo, Z estará en el segmento que une a P' y a Q' . Por ser S convexo y $P', Q' \in S$ se concluye que $Z \in S$, llegando al absurdo. ■

Si $z \in \mathbb{C}$ denotaremos por $\Re(z)$ a la parte real de z y por $\Im(z)$ a la parte imaginaria de z .

Teorema 2.12. Sean $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\rho \in \mathbb{R}$ tales que $\rho \leq \arg(w_j) < \rho + \pi$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces la suma $W = \sum_{j=1}^n w_j$ nunca se anula.

Demostración. Supongamos por ahora que $\rho = 0$; es decir, $0 \leq \arg(w_j) < \pi$ para $j = 1, \dots, n$. Distingamos varios casos:

Si $\arg(w_j) = 0$ para todo j , entonces $\Re(w_j) > 0$ para todo j y por tanto $\Re(W) = \sum_{j=1}^n \Re(w_j) > 0$. Si por el contrario existe algún j_0 tal que $\arg(w_{j_0}) \neq 0$, entonces como $0 < \arg(w_{j_0}) < \pi$, tenemos que $\Im(w_{j_0}) > 0$ lo que implica que $\Im(W) > 0$. De todo lo anterior concluimos que si $\rho = 0$ entonces $W \neq 0$.

Ahora si $\rho \neq 0$, entonces podemos considerar la colección $w'_j := e^{-i\rho} w_j$. Esta nueva colección está en las condiciones anteriores; es decir, $0 \leq \arg(w'_j) < \pi$. Entonces sabemos que $W' = \sum_{j=1}^n w'_j \neq 0$. Además, $\sum_{j=1}^n w'_j = \sum_{j=1}^n e^{-i\rho} w_j$ por lo que concluimos que $W = e^{i\rho} W' \neq 0$. ■

Procedamos pues a enunciar y demostrar el Teorema de Gauss-Lucas.

Teorema 2.13. Todas las raíces de la derivada de un polinomio no constante $p(z) \in \mathbb{C}$ se encuentran contenidas en la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Sean $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos y H la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ raíz de $p'(z)$ que no está en H .

En primer lugar, tenemos que z_0 no puede ser raíz múltiple de $p(z)$ porque de serlo, aplicando la Proposición 2.1, deducimos que z_0 estará contenida en H . Además $0 < A_H(z_0) < \pi$, por ser H convexo.

De aquí, si $p(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}$, por la Propiedad 2.5 se tiene que $-m_j/(\bar{z}_j - \bar{z})$, tiene el mismo argumento que $(z - z_j)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $j = 1, \dots, r$. Si sustituimos z por z_0 , como $z_j \in H$ se tiene que $-m_j/(\bar{z}_j - \bar{z}_0) < A_H(z_0) < \pi$ para todo $j = 1, \dots, r$.

Entonces, aplicando el Teorema 2.12 obtenemos que

$$\bar{P}(\bar{z}_0) = - \left(\frac{m_1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0} + \dots + \frac{m_r}{\bar{z}_r - \bar{z}_0} \right) \neq 0,$$

lo que implica que $P(z_0) \neq 0$. Aplicando ahora el Corolario 2.3 se concluye que, como $p(z_0)$ y $P(z_0)$ son distintos de cero, entonces $p'(z_0) = p(z_0)P(z_0) \neq 0$, llegando al absurdo. ■

Si consideramos un polinomio de segundo grado $p(z) = az^2 + bz + c \in \mathbb{C}[z]$ cuyas raíces son λ_1 y λ_2 , entonces se tiene por el Teorema 2.13 que la raíz de $p'(z)$ estará en el segmento $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$. Además, por la Proposición 2.7, sabemos que estará en su punto medio.

En efecto, si escribimos λ_1 y λ_2 como

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

se tiene que el punto medio del segmento $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$ es

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a} = \frac{-b}{2a}.$$

Es decir, la raíz de $p'(z) = 2az + b$, que es $\lambda'_1 = \frac{-b}{2a}$, se sitúa en el punto medio del segmento $\overline{\lambda_1 \lambda_2}$.

Veamos algunos ejemplos geométricos del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios de grado mayor que 2.

Ejemplo 2.14. Tomemos el polinomio $p(z) = z^3 - 5z^2 + 7z + 13$, que se factoriza en $\mathbb{C}[z]$ como $p(z) = (z + 1)(z - 3 - 2i)(z - 3 + 2i)$; es decir, sus raíces son $z_1 = -1$, $z_2 = 3 + 2i$ y $z_3 = 3 - 2i$. Dado que sus raíces no son colineales, se tiene que la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$ es el triángulo con vértices en z_1, z_2 y z_3 (ver parte izquierda de la Figura 2.4).

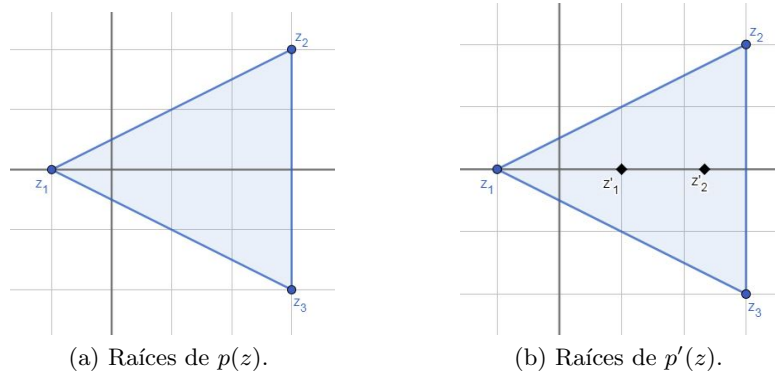


Figura 2.4: Representación de las raíces de $p(z)$ y $p'(z)$ en \mathbb{R}^2 .

Además, la derivada de $p(z)$ es $p'(z) = 3z^2 - 10z + 7$, cuyas raíces son $z'_1 = 1$ y $z'_2 = \frac{7}{3}$, ambas comprendidas en la envolvente convexa de z_1, z_2 y z_3 como se ilustra en la parte derecha de la Figura 2.4.

Ejemplo 2.15. Consideremos ahora el polinomio de cuarto grado $q(z) = z^4 - 3z^2 - 4$. Lo podemos factorizar en $\mathbb{C}[z]$ en la forma $q(z) = (z - 2)(z + 2)(z - i)(z + i)$. Dibujamos la envolvente convexa de las raíces de $q(z)$, que en este caso se trata de un polígono de cuatro lados (ver parte izquierda de la Figura 2.5).

Vemos que la derivada de $q(z)$ es $q'(z) = 4z^3 - 6z$ y las raíces de esta son $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{6}/2$ y $z_3 = -\sqrt{6}/2$. Observamos en la parte derecha de la Figura 2.5 que las tres raíces de $q'(z)$ están en la envolvente convexa de las raíces de $q(z)$.

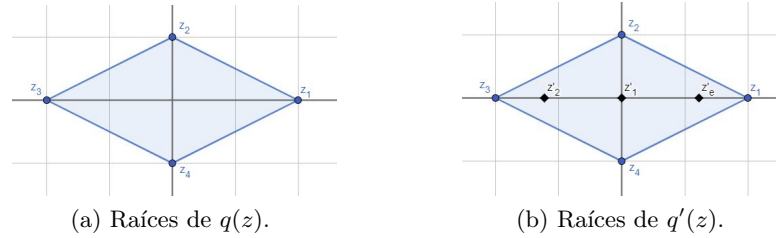


Figura 2.5: Representación de las raíces de $q(z)$ y $q'(z)$ en el plano real.

A continuación enunciaremos y demostraremos un teorema equivalente al teorema de Gauss-Lucas.

Teorema 2.16. *Cualquier disco D del plano real que contiene a todas las raíces de un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ también contiene a todas las raíces de su derivada $p'(z)$ (ver Figura 2.6).*

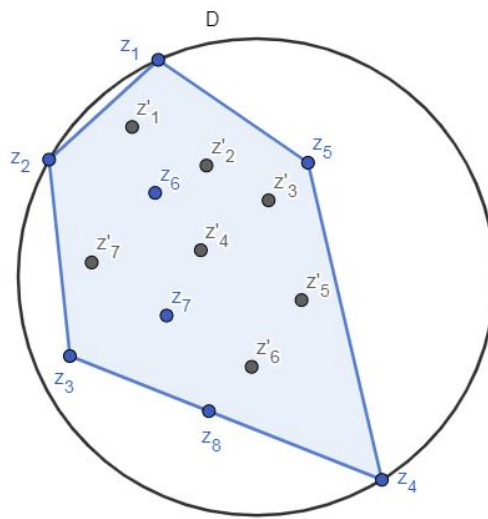


Figura 2.6: El disco D y la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$.

Demostración. Sea D un disco en el plano real que contiene a las raíces de $p(z)$. Como D siempre es convexo (ver Definición 2.8), se tendrá que D contiene también a la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. Esto es cierto ya que por definición la envolvente convexa de un conjunto de puntos X es el menor conjunto convexo que contiene a X .

Se concluye que si D contiene a la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$, aplicando el Teorema de Gauss-Lucas (Teorema 2.13) tenemos que todas las raíces de $p'(z)$ están contenidas en la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. En suma, D contiene a las raíces de $p'(z)$.

Observamos que en el Teorema 2.16 podemos sustituir el disco D por cualquier conjunto convexo que contenga a todas las raíces de $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. ■

Deducimos de la prueba del Teorema 2.16 que dicho teorema es consecuencia del Teorema de Gauss-Lucas. Si bien el Teorema 2.16 parece mucho menos preciso que el Teorema de Gauss-Lucas, lo cierto es que es equivalente a él, como demostraremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.17. *El Teorema de Gauss-Lucas 2.13 es consecuencia del Teorema 2.16.*

Demostración. Partimos de que el Teorema 2.16 es cierto, es decir, sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos cuyas raíces son z_1, \dots, z_n , entonces todo disco D del plano real que contiene a las raíces de $p(z)$ también contiene a las raíces de $p'(z)$.

Denotemos por H a la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$. Para cada par de vértices contiguos de H consideramos un disco D_k que pasa al menos por ese par de vértices (por la Proposición 1.3 sabemos que existe toda una familia de discos que cumplen esta propiedad). Podemos imponer además que el diámetro del disco D_k sea mayor o igual que $\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \{|z_i - z_j|\}$ (ver la nota de la página 3). De esta manera D_k contiene a las raíces de $p(z)$ y de $p'(z)$.

Si denotamos por R a la intersección de todos los posibles D_k de todas los posibles pares de vértices, entonces tenemos que R contiene a las raíces de $p(z)$ y de $p'(z)$. Solo falta probar que $R = H$. Pero esto se tiene por cómo se define R , ya que para cualquier punto Q exterior a H puedo encontrar un disco D_k tal que la distancia desde su centro a Q sea mayor que su radio, como se ilustra en la Figura 2.7.

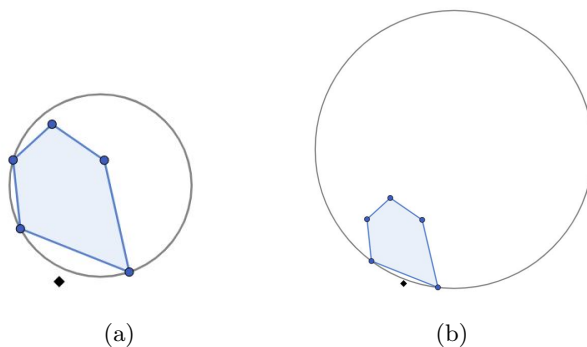


Figura 2.7: Ejemplos de discos que no contienen a puntos fuera de H . ■

Por tanto, hemos probado que el Teorema de Gauss-Lucas (Teorema 2.13) y el Teorema 2.16 son equivalentes. Ambos son los teoremas que más restringen la región del plano real en la que podemos encontrar raíces de la derivada de un polinomio con coeficientes en \mathbb{C} y por tanto, son los mejores teoremas en este sentido. Sin embargo para ciertos polinomios, con condiciones muy concretas, se puede acotar mucho más el cerco donde encontrar las raíces de la derivada, llegando en algunos casos a predecir la localización exacta de estas. Es el caso, por ejemplo, del Teorema de Marden-Siebeck (Teorema 3.4), que estudiaremos en profundidad en el Capítulo 3.

2.3. Consecuencias del Teorema de Gauss-Lucas

En esta sección presentamos algunos resultados que son consecuencia del Teorema de Gauss-Lucas. Empezamos por un teorema demostrado por Berstein [1] para el disco de centro el origen y radio 1, y generalizado por De Bruijn [4] para subconjuntos cerrados y convexos del plano real.

Teorema 2.18. Sean $H \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto cerrado y convexo, ∂H la frontera de H y $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ tales que

1. $\deg(p(z)) \leq \deg(q(z))$.
2. $|p(z)| \leq |q(z)|$, para todo $z \in \partial H$.
3. Todas las raíces de $q(z)$ están en $H \cup \partial H$.

Entonces $|p'(z)| \leq |q'(z)|$ para todo $z \in \partial H$.

Demostración. Definamos la función $f(z) = p(z)/q(z)$. Si denotamos por D al complementario de $H \cup \partial H$, se tiene que $f(z)$ es holomorfa para todo z de D ; es decir, es derivable en el sentido complejo para todo z de D . Esto se tiene por la condición 3, que garantiza que $q(z) \neq 0$ para $z \in D$. Además, por la condición 2 tenemos que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial H$. Por tanto, el Principio del Módulo Máximo (ver [17]) nos dice que si $|f(z)|$ está acotado donde $f(z)$ no es holomorfa, entonces también lo está donde sí lo es; es decir, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$.

Ahora, si z_0 es cualquier raíz del polinomio

$$g_\lambda(z) = p(z) - \lambda q(z),$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$ y si $q(z_0) \neq 0$ (z_0 no es raíz de $q(z)$), entonces

$$|p(z_0)| = |\lambda| |q(z_0)| > |q(z_0)|.$$

De lo que se deduce que $|f(z_0)| > 1$ y por tanto z_0 debe pertenecer a H , ya que habíamos visto que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D \cup \partial H$.

De aquí, aplicando el Teorema de Gauss-Lucas (Teorema 2.13), tenemos que las raíces de $g'_\lambda(z)$ también están en H . Observamos que la derivada de $g_\lambda(z)$ es

$$g'_\lambda(z) = p'(z) - \lambda q'(z),$$

donde $|\lambda| > 1$. Por lo que si tomamos $z \in D \cup \partial H$ entonces no existe $|\lambda| > 1$ tal que

$$\lambda = \frac{p'(z)}{q'(z)},$$

es decir, para todo $z \in D \cup \partial H$ se tiene que $|p'(z)| \leq |q'(z)|$. ■

El Teorema 2.18 generaliza el siguiente resultado.

Corolario 2.19. *Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos de grado menor o igual a n tal que $|p(z)| \leq 1$ para todo $|z| \leq 1$. Entonces $|p'(z)| \leq n$ para $z \leq 1$.*

Demostración. Tomando el polinomio complejo $q(z) = z^n$ se tiene que $\deg(p(z)) \leq \deg(q(z))$, ya que por hipótesis $\deg(p(z)) \leq n$. Por otra parte, si consideramos $H := \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$ vemos que H se trata de un convexo cerrado y que $\partial H = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Entonces, de la definición de $q(z)$ y de las hipótesis tenemos $|p(z)| \leq |q(z)|$ para todo $z \in \partial H$. Además, las raíces de $q(z)$ son todas nulas y, por ende, están contenidas en H .

Entonces aplicando el Teorema 2.18, obtenemos que $|p'(z)| \leq |q'(z)|$, para todo $z \in \partial H$. Como $q'(z) = nz^{n-1}$ se concluye que $|p'(z)| \leq |nz^{n-1}| = n$ para todo $z \in \partial H$. ■

Finalizamos esta sección con una mejora del Teorema de Gauss-Lucas, que hemos extraído de [14].

Teorema 2.20. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de cuarto grado con cuatro raíces distintas tales que una de ellas está contenida en la envolvente convexa de las otras tres. Esa raíz divide el área de la envolvente convexa triangular en tres triángulos no degenerados (ver Figura 2.8). Entonces el interior de uno de esos triángulos no contiene ninguna raíz de $p'(z)$.*

Demostración. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ las raíces de $p(z)$. Por el Corolario 1.9 podemos rotar, escalar y trasladar el triángulo sin pérdida de generalidad. Lo haremos de manera que la raíz que está en el interior de la envolvente convexa de las otras tres sea $z_1 = 0$, que otra raíz sea $z_2 = 1$ y que el argumento de z_3 sea menor estricto que el argumento de z_4 , y ambos no nulos. Por tanto podremos escribir el polinomio en la forma

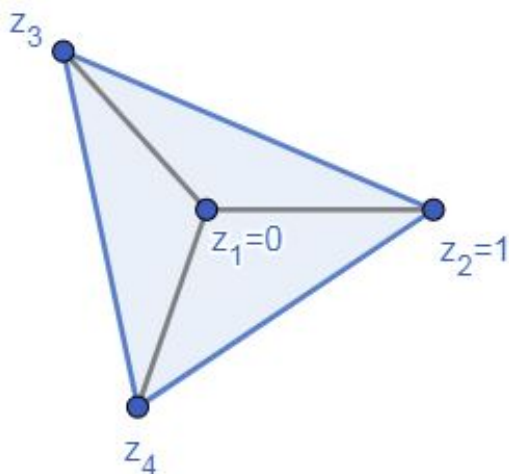


Figura 2.8: División del área de la envolvente convexa.

$$p(z) = z(z-1)(z-z_3)(z-z_4) = z^4 - (1+z_3+z_4)z^3 + (z_3+z_4+z_3z_4)z^2 - z_3z_4z$$

y su derivada es

$$p'(z) = 4z^3 - 3(1+z_3+z_4)z^2 + 2(ab+a+b)z - ab.$$

Denotamos por w_1, w_2, w_3 a las raíces de $p'(z)$, que por el Teorema de Gauss-Lucas sabemos que están en la envolvente convexa de z_1, z_2, z_3 y z_4 . De las fórmulas de Vieta deducimos que

$$\frac{1}{3}(w_1 + w_2 + w_3) = \frac{1}{4}(1 + z_3 + z_4),$$

$$w_1w_2 + w_1w_3 + w_2w_3 = \frac{1}{2}(ab + a + b)$$

y

$$4w_1w_2w_3 = ab. \quad (2.7)$$

Escribamos $w_j = \rho_j e^{i\phi_j}$ para $j = 1, 2, 3$ y $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ para $k = 3, 4$. Entonces la igualdad (2.7) implica que

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \theta_3 + \theta_4. \quad (2.8)$$

Hemos supuesto, sin pérdida de generalidad que $0 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$. También podemos suponer que $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \phi_3 \leq 2\pi$.

Definiendo $\Delta_1 = \phi_1$, $\Delta_2 = \phi_2 - \theta_3$ y $\Delta_3 = \phi_3 - \theta_4$, tenemos por la igualdad (2.8) que

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0. \quad (2.9)$$

Ahora vamos a suponer que existe una raíz de $p'(z)$ en cada uno de los triángulos $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$, $\Delta_{z_1 z_3 z_4}$ y $\Delta_{z_1 z_2 z_4}$ para llegar a una contradicción. Para ello suponemos que deben darse las siguientes condiciones: w_1 está en el sector comprendido entre $\overline{z_1 z_2}$ y $\overline{z_1 z_3}$; w_2 está en el sector comprendido entre $\overline{z_1 z_3}$ y $\overline{z_1 z_4}$; y w_3 está en el sector comprendido entre $\overline{z_1 z_4}$ y $\overline{z_1 z_2}$.

Entonces, por la primera condición se tiene que $\Delta_1 \in (0, \theta_3)$, por la segunda condición se tiene que $\Delta_2 \in (0, \theta_4 - \theta_3)$ y por la tercera condición que $\Delta_3 \in (0, 2\pi - \theta_4)$. En suma tenemos que $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \in (0, 2\pi)$, contradiciendo la igualdad (2.9).

Por tanto, uno de los triángulos en los que se divide la envolvente convexa de las raíces de $p(z)$ no contiene ninguna raíz de $p'(z)$. ■

2.4. Aplicaciones del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios con coeficientes reales. Teorema de Jensen.

En el Teorema de Gauss-Lucas hablamos de polinomios con coeficientes complejos pero ¿qué podemos decir del comportamiento de las raíces de la derivada de un polinomio con coeficientes reales?

En primer lugar recordamos que las raíces complejas de un polinomio $p(z)$ con coeficientes reales siempre son pares conjugados; es decir, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(z)$, también lo es su conjugado $\bar{z} = x - iy$.

Empezamos con una simple observación.

Proposición 2.21. *Para todo polinomio con coeficientes reales, el número de puntos críticos no reales no puede ser mayor que el número de raíces no reales.*

Demostración. Recordemos que si $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ con todas sus raíces reales, por el Teorema de Rolle, existe al menos un punto crítico real entre cualesquiera dos raíces reales consecutivas.

Por tanto, si $p(z)$ tiene un total de k raíces reales contadas con multiplicidades, entonces $p'(z)$ tiene al menos $k - 1$ puntos críticos reales. ■

En las hipótesis de la Proposición 2.21, las raíces no reales aparecen por pares conjugados.

Esta información es útil para obtener información de los puntos críticos de un polinomio con coeficientes reales, que no podemos obtener del Teorema de Gauss-Lucas.

Definición 2.22. Sean $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ y $z_0 = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $y > 0$ una raíz compleja de $p(z)$. Se llama disco de Jensen (en honor al matemático Johan Jensen) asociado a z_0 al disco:

$$D_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} / |z - x| \leq y\}.$$

Obsérvese que el diámetro vertical de D_{z_0} une a z_0 con su conjugado \bar{z}_0 . En la Figura 2.9 se ilustran los discos de Jensen del polinomio $p(z) = \prod_{j=1}^8 (z - z_j) \in \mathbb{R}[z]$ con $z_3, z_4 \in \mathbb{R}$ y $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ para todo $j \neq 3, 4$.

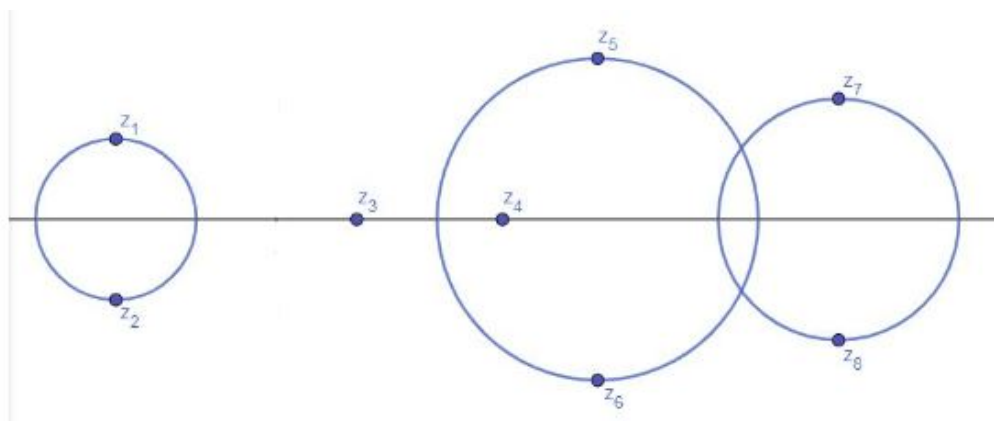


Figura 2.9: Discos de Jensen.

A continuación enunciamos y demostramos el conocido como Teorema de Jensen:

Teorema 2.23. *Toda raíz compleja no real de la derivada de $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ pertenece a un disco de Jensen asociado a una raíz de $p(z)$.*

Demostración Sean z_1, \dots, z_n las raíces de $p(z)$. Por el Lema 2.2 tenemos que

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - z_j}.$$

Denotamos $w_j = 1/(z - z_j)$, $z_j = x_j + iy_j$ y $z = x + iy$. Si la raíz $z_j \in \mathbb{R}$, es decir, $z_j = x_j + 0i$ entonces multiplicando el numerador y el denominador de w_j por el conjugado de $(x - x_j + iy)$ obtenemos

$$w_j = \frac{x - x_j - iy}{(x - x_j)^2 + y^2},$$

y concluimos que la parte imaginaria de w_j es

$$\Im(w_j) = \frac{-y}{(x - x_j)^2 + y^2}. \quad (2.10)$$

Por otro lado, si la raíz $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se tiene que su conjugado $z_k := \bar{z}_j$ también es raíz de $p(z)$. Entonces la suma de los términos $w_j = 1/(x + iy - x_j - iy_j)$ y $w_k = 1/(x + iy - x_j + iy_j)$ es

$$w_j + w_k = \frac{(x + iy - x_j - iy_j) + (x + iy - x_j + iy_j)}{(x + iy - x_j - iy_j)(x + iy - x_j + iy_j)},$$

es decir

$$w_j + w_k = \frac{2x + 2iy - 2x_j}{x^2 - y^2 + x_j^2 + y_j^2 - 2xx_j + i(2yx - 2yx_j)}.$$

Multiplicamos ahora el numerador y el denominador por el conjugado de $x^2 - y^2 + x_j^2 + y_j^2 - 2xx_j + i(2yx - 2yx_j)$ y obtenemos

$$w_j + w_k = \frac{2((x - x_j)^3 - xy^2 + xy_j^2 - y^2x_j - x_jy_j^2) - i2y((x - x_j)^2 + y^2 - y_j^2)}{[(x - x_j)^2 + (y + y_j)^2][(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2]}.$$

Por tanto, la parte imaginaria de $w_j + w_k$ es

$$\Im(w_j + w_k) = \frac{-2y((x - x_j)^2 + y^2 - y_j^2)}{[(x - x_j)^2 + (y + y_j)^2][(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2]}. \quad (2.11)$$

Entonces

$$\Im\left(\frac{p'(z)}{p(z)}\right) = \sum_{\Im(z_k)=0} \Im\left(\frac{1}{z - z_k}\right) + \sum_{\Im(z_k) \neq 0} \Im\left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z - \bar{z}_k}\right),$$

es decir, $\Im\left(\frac{p'(z)}{p(z)}\right)$ es igual a

$$\sum_{j:y_j=0} \frac{-y}{(x - x_j)^2 + y^2} + \sum_{j:y_j \geq 0} \frac{-2y((x - x_j)^2 + y^2 - y_j^2)}{((x - x_j)^2 + (y + y_j)^2)((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)}. \quad (2.12)$$

Denotemos por $sg(r)$ al signo de un número real r , es decir, $sg(r)$ es 1, 0 ó -1 según sea $r > 0$, $r = 0$ ó $r < 0$ respectivamente. Entonces de la igualdad (2.11) tenemos que $sg(\Im(w_1 + w_2)) = -sg(y)$ para todo z fuera de todos los discos de Jensen de las raíces de $p(z)$, lo cual se deduce de la Definición 2.22, pues si z no está en un disco de Jensen de $p(z)$ entonces $|z - x_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + y^2} > y_j$ para cualquier raíz z_j de $p(z)$. Por otro lado, de la igualdad (2.10) obtenemos que $sg(\Im(w_3)) = -sg(y)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

En suma, concluimos de la igualdad (2.12)

$$sg\left(\Im\left(\frac{p'(z)}{p(z)}\right)\right) = -sg(y),$$

para todo $z = x + iy$, no contenido en ningún disco de Jensen de $p(z)$. Por lo que para todo z no real y no contenido en ningún disco de Jensen de $p(z)$, $p'(z) \neq 0$. ■

2.5. Conjetura de Sendov

Finalizaremos este capítulo con la conocida como conjetura de Sendov, en honor al matemático búlgaro Blagorest Sendov que conjeturó lo siguiente:

Si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ tiene todas sus raíces en el disco de centro el origen y radio 1 y z_j es cualquiera de las raíces de $p(z)$ entonces $p'(z)$ tiene al menos una raíz en el disco de centro z_j y radio 1 (ver Figura 2.10).

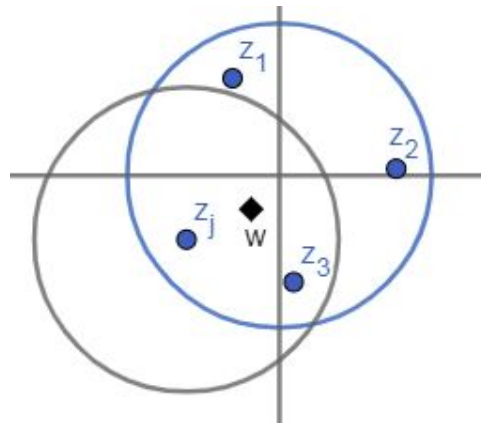


Figura 2.10: Punto crítico w en el disco centrado en z_j y de radio 1.

El Teorema de Gauss-Lucas garantiza que los polinomios en las hipótesis de la conjetura de Sendov tienen todos sus puntos críticos en el disco de centro el origen y radio 1 (ver Teorema 2.16). La conjetura de Sendov precisa la posición de dichos puntos críticos.

La conjetura fue publicada por primera vez en 1967 en [5]. Hasta 2020 solo se había demostrado la conjetura para polinomios de grado menor o igual que 9.

En 2020 Terence Tao (medalla Fields en 2006) demostró la conjetura para polinomios de grado suficientemente grande (ver [16]).

La conjetura es cierta para polinomios con 3 raíces distintas y grado mayor o igual que 4, como se prueba en [3]. En este artículo los autores afirman, sin completar la demostración, que la conjetura es cierta para polinomios con r raíces cuyos grados sean mayores o iguales que 2^{r-1} . Completamos la prueba de ello en la siguiente proposición:

Proposición 2.24. *Sea $p(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_r)^{m_r} \in \mathbb{C}[z]$, con $m_1 + m_2 + \dots + m_r \geq 2^{r-1}$, $r \geq 3$, un polinomio cuyas raíces z_1, z_2, \dots, z_r son distintas y están contenidas en el disco unitario centrado en el origen. Entonces $p'(z)$ tiene al menos una raíz contenida en el disco $|z - z_1| \leq 1$.*

Demostración. Si $m_1 + m_2 + \dots + m_r \geq r + 1$, entonces como $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$, al menos un m_i es mayor o igual a 2. Si $m_1 \geq 2$, entonces por el Lema 2.1

sabemos que z_1 es raíz de $p'(z)$ y por tanto z_1 es una raíz de $p(z)$ contenida en el disco $|z - z_1| \leq 1$.

Supongamos ahora que $m_1 = 1$, aplicando de nuevo el Lema 2.1, denotando al grado de $p(z)$ como n , tenemos que

$$p'(z) = n(z - z_1)^{m_1-1}(z - z_2)^{m_2-1} \dots (z - z_r)^{m_r-1}(z - z'_1) \dots (z - z'_{r-1}), \quad (2.13)$$

para ciertos $z'_1, \dots, z'_{r-1} \in \mathbb{C}$. Esto es así ya que cada raíz z_j de $p(z)$ es raíz en $p'(z)$ de multiplicidad $m_j - 1$, que el coeficiente del término de mayor grado de $p'(z)$ es n y que, como el grado de $p'(z)$ es $n - 1$, debe tener otras $r - 1$ raíces distintas de z_1, \dots, z_r .

Por otro lado tenemos que, por ser z_1 raíz de $p(z)$, podemos escribir el polinomio en la forma

$$p(z) = (z - z_1)q(z),$$

para algún $q(z)$ de grado $n - 1$; derivando a ambos lados tenemos

$$p'(z) = q(z) + (z - z_1)q'(z),$$

y evaluando en z_1

$$p'(z_1) = q(z_1) = (z_1 - z_2)^{m_2} \dots (z_1 - z_r)^{m_r}. \quad (2.14)$$

De las igualdades (2.13) y (2.14) obtenemos que

$$n(z_1 - z'_1) \dots (z_1 - z'_r) = (z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_r). \quad (2.15)$$

Como por hipótesis z_1, \dots, z_r están contenidas en el disco unitario centrado en el origen entonces aplicando la desigualdad triangular

$$|z_j - z_k| \leq |z_j| + |z_k| \leq 2, \quad (2.16)$$

para $j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \neq k$. Por tanto, de las igualdades (2.15) y (2.16) se deduce que $|z_1 - z'_1| \dots |z_1 - z'_{r-1}| \leq \frac{2^{r-1}}{n} \leq 1$, por ser $n \geq 2^{r-1}$, y se concluye que $|z_1 - z'_j| \leq 1$ para algún $j = 1, \dots, r - 1$. ■

Finalizaremos el capítulo demostrando la conjetura de Sendov siguiendo la prueba dada en [3], para polinomios de grado tres con tres raíces distintas. Necesitamos para ello el siguiente lema preliminar:

Lema 2.25. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grado $n \geq 2$. Sea z_0 una raíz simple de $p(z)$ y z'_1, \dots, z'_{n-1} las raíces de $p'(z)$. Si $|p''(z_0)| \geq (n - 1)|p'(z_0)|$, entonces $|z_0 - z'_j| \leq 1$ para al menos un $j \in \{1, \dots, n - 1\}$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p(z)$ es mónico.

Aplicando el Lema 2.2 a $p'(z)$ obtenemos

$$\frac{p''(z)}{p'(z)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z - z'_j}.$$

Como z_0 es una raíz simple de $p(z)$, entonces $z_0 \neq z'_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Supongamos por reducción al absurdo que $|z_0 - z'_j| > 1$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces, aplicando la hipótesis tenemos

$$n-1 \leq \left| \frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} \right| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|z_0 - z'_j|} < n-1,$$

que es un absurdo.

Por tanto existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $|z_0 - z'_j| \leq 1$. ■

Observamos que si $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es de grado n y sus raíces son z_0, z_1, \dots, z_{n-1} podemos escribir $p(z) = (z - z_0)q(z)$ y obtenemos $\frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} = \frac{2q'(z_0)}{q(z_0)}$. Aplicando el Lema 2.2 a $q(z)$ tenemos.

$$\frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} = 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z_0 - z_j}. \quad (2.17)$$

Proposición 2.26. *La conjetura de Sendov es cierta para polinomios de grado tres con tres raíces distintas.*

Demostración. Sea $p(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) \in \mathbb{C}[z]$ con z_0, z_1 y z_2 contenidos en el disco de centro el origen y radio 1 que denotamos D . En particular el punto medio $w := \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ del segmento $\overline{z_1 z_2}$ también está contenido en D . Definamos $x = |z_0 - z_1|$, $y = |z_0 - z_2|$, $a = |z_0 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)|$, $b = \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ (ver Figura 2.11). Como $z_0, z_1, z_2, w \in D$, la distancia entre dos cualesquiera de ellos es menor o igual que 2, y tenemos que $0 < x \leq 2$, $0 < y \leq 2$, $0 \leq a \leq 2$, $0 \leq b \leq 1$.

De la igualdad (2.17) obtenemos que

$$\left| \frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} \right| = 2 \left| \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - z_2} \right| = 2 \left| \frac{z_0 - z_2 + z_0 - z_1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} \right|,$$

que a su vez es igual a

$$2 \frac{|z_0 - z_2 + z_0 - z_1|}{|z_0 - z_1||z_0 - z_2|} = 2 \frac{|2z_0 - z_1 - z_2|}{xy} = 4 \frac{|z_0 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)|}{xy}.$$

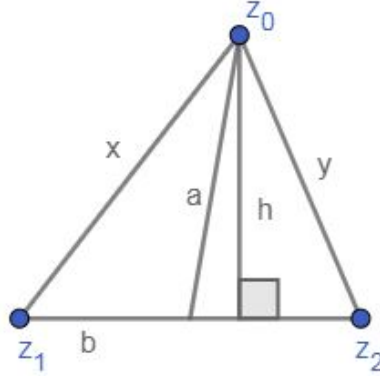


Figura 2.11: Ejemplo de disposición geométrica de las raíces z_0 , z_1 y z_2 .

Se concluye que

$$\left| \frac{p''(z_0)}{p'(z_0)} \right| = \frac{4a}{xy}.$$

Por el Lema 2.25, tenemos que la conjetura es cierta siempre que $xy \leq 2a$. En particular, como $y \leq 2$ y $x \leq 2$, la conjetura es cierta siempre que $x \leq a$ o $y \leq a$. Ahora, asumamos que $y > a$ y $x > a$.

Si aplicamos módulo a la igualdad (2.15) para el caso de grado 3 se tiene $3|z_0 - z'_1||z_0 - z'_2| = |z_0 - z_1||z_0 - z_2| = xy$. Si $xy \leq 3$ entonces $|z_0 - z'_1||z_0 - z'_2| \leq 1$ y la conjetura sería cierta. Supongamos ahora que $xy > 3$. Tenemos por tanto que $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy > 6$.

Aplicamos el teorema del coseno [2] al ángulo $\angle z_1 z_0 z_2$ y obtenemos que $\cos(\angle z_1 z_0 z_2) = (x^2 + y^2 - 4b^2)/2xy$. Como $b \leq 1$ se tiene que $\cos(\angle z_1 z_0 z_2) = (x^2 + y^2 - 4b^2)/2xy > (6 - 4)/2xy = 1/xy > 0$ y el ángulo $\angle z_1 z_0 z_2$ es agudo. Además, el recíproco del Teorema de Pitágoras nos dice que los ángulos del triángulo $T = \triangle z_0 z_1 z_2$ son agudos si se da $x^2 + y^2 > 4b^2$, pero esto se tiene ya que $x^2 + y^2 > 6 > 4 > 4b^2$.

Un resultado de geometría clásica nos dice que si un triángulo tiene todos sus ángulos agudos, entonces la circunferencia circunscrita al triángulo T que pasa por los vértices del triángulo, que sabemos que existe por la Proposición 1.3, tiene su centro en el interior del triángulo (ver [2]). Este centro coincide con el circuncentro definido en la Definición 1.5.

Entonces si llamamos R al radio de la circunferencia circunscrita a T se tiene que $R \leq 1$.

Sea h la altura de la perpendicular del segmento $\overline{z_1 z_2}$ que pasa por z_0 como se muestra en la Figura 2.11. Entonces, por un teorema clásico en geometría euclídea, concluimos que $xy = 2Rh \leq 2a$.

■

Teorema de Siebeck-Marden

En el caso de polinomios de grado tres es posible refinar aún más el Teorema de Gauss-Lucas. El teorema al que dedicaremos este capítulo es conocido como el Teorema de Marden, sin embargo, el matemático Morris Marden en su libro [13] atribuye el teorema a J. Siebeck (ver [15]). Los resultados empleados en este capítulo han sido extraídos de [9].

El teorema dice lo siguiente:

Teorema (de Siebeck-Marden). *Sea $p(z)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes complejos, cuyas raíces z_1 , z_2 y z_3 son puntos no colineales en el plano real y sea T el triángulo con vértices en z_1 , z_2 y z_3 . Entonces existe una única elipse inscrita en T tangente a los puntos medios de los lados de T y sus focos son las raíces de $p'(z)$.*

Cabe destacar que la condición de no colinealidad de las raíces es necesaria, ya que de darse la colinealidad no podríamos hablar del triángulo formado por las raíces. Además, las raíces del polinomio deben ser simples, pues la prueba no se sostiene para polinomios con raíces múltiples.

Mostraremos, previo a la demostración del teorema, algunos resultados útiles para la prueba del Teorema de Siebeck-Marden.

3.1. Algunos resultados previos a la prueba

Durante esta sección probaremos los lemas y proposiciones previos a la prueba del Teorema de Siebeck-Marden. Estos resultados son unos enunciados geométricos que relacionan las raíces de un polinomio de tercer grado con las raíces de su derivada.

Lema 3.1. *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio con raíces en z_1 , z_2 y z_3 correspondientes a tres puntos no colineales del plano, y sea T el triángulo cuyos vértices son dichos puntos. Si definimos E como la elipse con focos en las raíces de $p'(z)$ que pasa por el punto medio de uno de los lados del triángulo T , entonces ese lado es tangente a E en ese punto.*

Podemos afirmar que la elipse existe y es única puesto que conocemos los focos y un punto de la misma (Definición 1.1).

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos rotar, trasladar y escalar el triángulo de la forma que elijamos mediante una transformación afín. Por tanto, transformemos el triángulo de modo que uno de sus lados se encuentre reposando a lo largo del eje x centrado en el origen, y tenga longitud 2, mientras que el vértice opuesto se encuentra en el semiplano superior como muestra la Figura 3.1. Así, los vértices de T están en $(1, 0)$, $(-1, 0)$ y (a, b) donde $b > 0$.

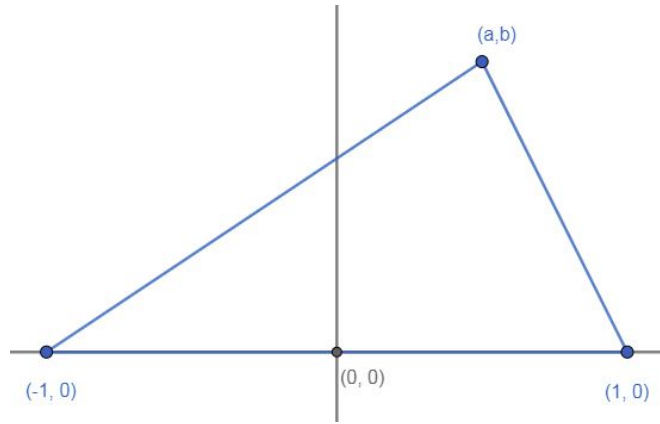


Figura 3.1: Transformación del triángulo.

Como sabemos que $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ y $z_3 = a + bi = w$ son las raíces de $p(z)$ el cual podemos suponer mónico sin pérdida de generalidad, vamos a calcular las raíces de $p'(z)$. Tenemos que

$$p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - w) = z^3 - wz^2 - z + w.$$

Derivamos el polinomio obteniendo

$$p'(z) = 3z^2 - 2wz - 1 = 3 \left(z^2 - \frac{2w}{3}z - \frac{1}{3} \right).$$

De aquí, si las raíces de $p'(z)$ son $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}$ y $z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$ (con $0 \leq \theta_4, \theta_5 < 2\pi$), usando las fórmulas de Cardano-Vieta podemos concluir que:

$$z_4 + z_5 = \frac{2w}{3}, \quad (3.1)$$

y

$$z_4 z_5 = -\frac{1}{3}. \quad (3.2)$$

De la ecuación (3.1) sabemos que al menos una de las raíces de $p'(z)$ está en el semiplano superior (w pertenece al semiplano superior). Además de la ecuación (3.2) tenemos que

$$\theta_4 + \theta_5 = \pi. \quad (3.3)$$

En conjunto se obtiene que las dos raíces de $p'(z)$ deben estar en el semiplano superior.

Definimos la elipse E que tiene a z_4 y z_5 como focos y que pasa por el origen, que es el punto medio del lado que se encuentra en el eje x . Dicha elipse existe y es única por la Definición 1.1 (ver Figura 3.2). Para probar que la elipse es tangente a este lado en el $(0, 0)$, probaremos que las rectas desde el origen hasta cada foco forman ángulos iguales con los semiejes x positivo y negativo aplicando la Proposición 1.14. Esta proposición nos dice que si la recta es tangente a un punto de la elipse, entonces los ángulos que forman los focos de la elipse con la recta tangente en ese punto son iguales. Observamos que si fijamos el punto (en este caso el origen) existirá una única recta que verifique la condición de los ángulos, esta recta debe ser la recta tangente.

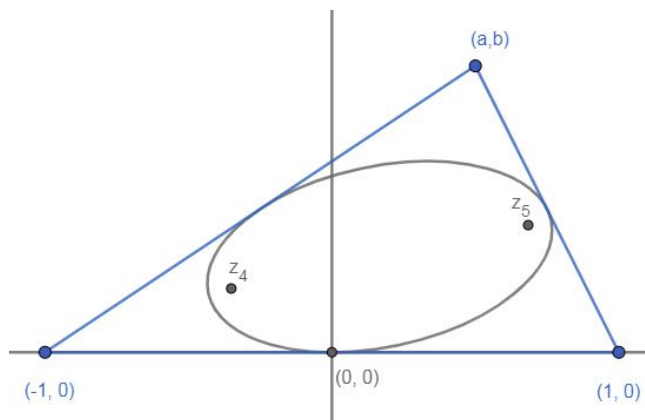


Figura 3.2: Elipse inscrita que pasa por el origen.

Si consideramos las raíces como vectores desde el origen, por la ecuación (3.3) los ángulos que forman los vectores con el semieje x positivo son suplementarios. Por lo tanto, ambas raíces están en el eje y , o una raíz forma un ángulo agudo con el semieje x positivo y la otra forma un ángulo igual con el semieje x negativo (ver Figura 3.3).

En cualquier caso, esto muestra que las rectas que trazamos desde los focos de la elipse (las raíces de $p'(z)$) hasta el origen forman ángulos iguales con el eje x , que es por tanto, una recta tangente de la elipse. ■

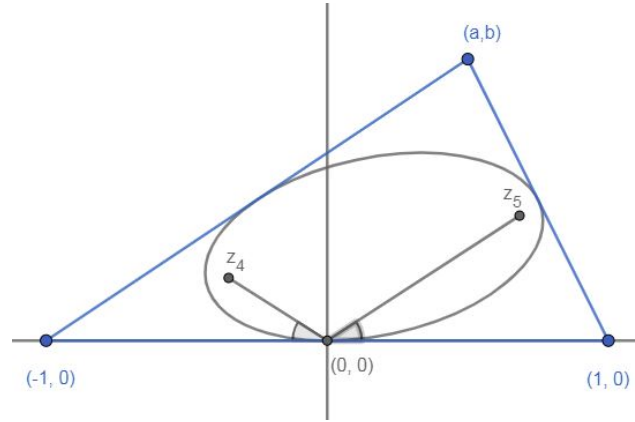


Figura 3.3: Ángulo que forman los focos con los semiejes x positivo y negativo.

Lema 3.2. Sean $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio con raíces en z_1, z_2, z_3 y T el triángulo con vértices en z_1, z_2, z_3 . Consideramos la elipse E con focos en las raíces de $p'(z)$ y que es tangente a un lado de T en su punto medio. Entonces la elipse E es tangente a los otros dos lados de T .

Como antes, z_1, z_2 y z_3 deben ser distintas para que se cumpla la condición de no colinealidad.

Demostración. Como hemos hecho antes, podemos rotar, escalar y trasladar el triángulo T mediante una transformación afín. En este caso, apoyaremos el lado el cual es tangente a la elipse E en el eje de las x , situando uno de los vértices en el origen de coordenadas y otro en $(1, 0)$. El vértice que falta estará en $w = (a, b)$ con $b > 0$ (que corresponde al número complejo $w = a + bi$). Demostraremos que la elipse E también es tangente al lado $\overline{0w}$.

Sabemos que $p(z) = z(z-1)(z-w)$. Multiplicando los factores obtenemos

$$p(z) = z^3 - (1+w)z^2 + wz,$$

y si derivamos

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1+w)z + w.$$

Consideremos

$$q(z) = \frac{1}{3}p'(z) = z^2 - \frac{2}{3}(1+w)z + \frac{w}{3}.$$

Observamos que $q(z)$ y $p'(z)$ tienen las mismas raíces, que denotaremos z_4 y z_5 . Por la fórmula de Cardano-Vieta tenemos que $z_4 + z_5 = \frac{2}{3}(1+w)$, de lo cual se deduce que al menos una de las raíces debe estar en el semiplano superior. Pero por el Lema 3.1 sabemos que también son los focos de una elipse tangente al eje x en el $(\frac{1}{2}, 0)$, que es el punto medio del lado que reposa sobre el eje x .

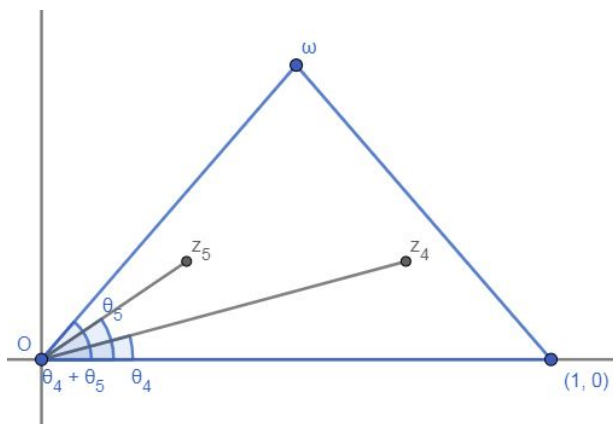


Figura 3.4: Posiciones de los ángulos

Luego, ambas raíces deben estar en el semiplano superior y por tanto podemos expresar las raíces como $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}$ y $z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$, donde $0 < \theta_4 \leq \theta_5 < \pi$.

A continuación, del mismo modo que hicimos en la demostración del Lema 3.1, tenemos por la otra fórmula de Cardano-Vieta que $z_4 z_5 = \frac{w}{3}$, lo que muestra que el argumento de $z_4 z_5$ es el mismo que el argumento de w ; es decir, la suma $\theta_4 + \theta_5$ es igual al ángulo que forman el semieje x positivo con el segmento \overline{Ow} . Por consiguiente, el ángulo que forman los segmentos $\overline{Oz_5}$ y \overline{Ow} será el ángulo que forman el semieje x positivo con el segmento \overline{Ow} (que hemos visto que es $\theta_4 + \theta_5$) menos el ángulo θ_5 ; es decir, será igual a θ_4 , como se aprecia en la Figura 3.4.

Ahora aplicaremos el Lema 1.16, tomando el origen como punto exterior de la elipse (ver Figura 3.5). Podemos afirmar que el origen es un punto exterior de la elipse ya que el eje x es tangente a E en $x = \frac{1}{2}$.

Por el Lema 1.16, el ángulo que forman \overline{Ow} y $\overline{Oz_5}$ debe ser igual al que forman $\overline{Oz_4}$ y el eje x , el cual habíamos visto que es θ_4 . Pero ese es el mismo ángulo que formaban $\overline{Oz_5}$ y \overline{Ow} . Esto muestra que \overline{Ow} es tangente a E .

Falta ver que el lado \overline{Tw} es tangente a E . Podemos trasladar horizontalmente el triángulo para que sus vértices estén en $(-1, 0)$ y $(0, 0)$, en lugar de en $(0, 0)$ y $(1, 0)$, resultando en el caso que ya hemos probado. ■

Proposición 3.3. Sean M una aplicación definida por $M(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, z, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ y $p(z)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes complejos, cuyas raíces son z_1, z_2, z_3 . Entonces si el Teorema de Siebeck-Marden se cumple para $p(z)$, también se cumplirá para $p_M(z) := p(M(z))$.

Demostración. Sea $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la aplicación definida por $M(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Supongamos que el teorema de Siebeck-Marden es válido para $p(z)$, veamos que también se cumple para $p(M(z))$.

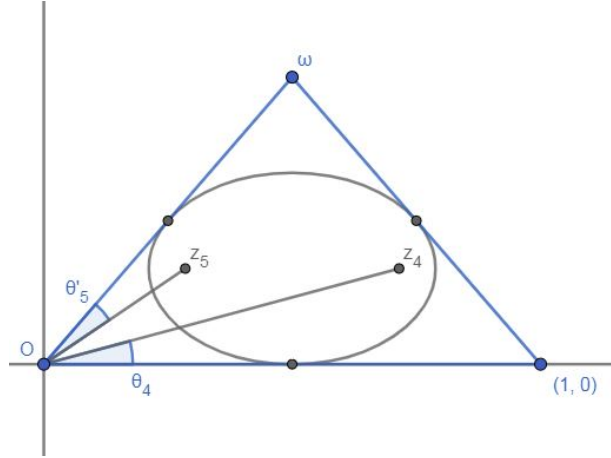


Figura 3.5: La elipse es tangente al lado \overline{Ow}

Habíamos visto que si $z \in \mathbb{C}$, $z = z_1 + iz_2$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, podemos definir la aplicación $\overline{M} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, asociada a M de la siguiente manera:

$$\overline{M}(z) = \overline{M}(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Sea T el triángulo con vértices en z_1, z_2 y z_3 (las raíces de $p(z)$). Supongamos que existe una elipse E inscrita en T y tangente a T en los puntos medios de los lados de T , cuyos focos coinciden con las raíces de $p'(z)$. Dado que $\overline{M}(z)$ es una transformación afín se tiene que, por el Corolario 1.9 lleva T a un nuevo triángulo con vértices en $\overline{M}(z_1), \overline{M}(z_2)$ y $\overline{M}(z_3)$, el cual tendrá, por el Corolario 1.13, una elipse inscrita tangente a los puntos medios de sus lados.

Si $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, se define $p_M(z)$ como

$$p_M(z) := (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3)). \quad (3.4)$$

Veamos ahora que M lleva las raíces de $p'(z)$ en las de $p'_M(z)$. Sustituimos z por $M(z)$ en la definición de p_M :

$$p_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3)). \quad (3.5)$$

Dado que $M(z) - M(z_j) = \alpha z + \beta - (\alpha z_j + \beta) = \alpha(z - z_j)$ la igualdad (3.5) se reduce a:

$$p_M(M(z)) = \alpha^3 p(z).$$

Derivando a ambos lados y teniendo en cuenta que $M'(z) = \alpha$, tenemos

$$(p_M(M(z)))' = (\alpha^3 p(z))',$$

es decir

$$p'_M(M(z))M'(z) = \alpha^3 p'(z),$$

o equivalentemente

$$\alpha p'_M M(z) = \alpha^3 p'(z)$$

y concluimos

$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z).$$

Por tanto, si z es raíz de $p'(z)$ entonces $M(z)$ es raíz de $p'_M(z)$. ■

3.2. Teorema de Siebeck-Marden

Procedamos a demostrar el Teorema de Siebeck-Marden. Este teorema nos da una visión geométrica del comportamiento de las raíces de un polinomio de tercer grado y las de su derivada.

Teorema 3.4. *Sea $p(z)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes complejos, cuyas raíces z_1 , z_2 y z_3 son puntos no colineales en el plano real y sea T el triángulo con vértices en z_1 , z_2 y z_3 . Entonces existe una única elipse inscrita en T tangente a los puntos medios de los lados de T y sus focos son las raíces de $p'(z)$.*

Observamos que, como hemos dicho previamente, las raíces z_1 , z_2 y z_3 deben ser distintas para cumplir la condición de no colinealidad.

Demostración. Sean $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con raíces z_1 , z_2 y z_3 ; y T el triángulo con vértices en z_1 , z_2 y z_3 . Denotamos por l_1 , l_2 y l_3 a los lados de T . Consideramos ahora la elipse E que tiene a las raíces de $p'(z)$ como focos y que pasa por el punto medio de l_1 , que por la Definición 1.1 está bien definida..

Por el Lema 3.1, sabemos que l_1 es tangente a E en su punto medio. Además sabemos, por el Lema 3.2 que los otros dos lados de T , l_2 y l_3 , son tangentes a E . Podemos afirmar que los puntos de tangencia de l_2 y l_3 deben ser los puntos medios, ya que de no ser así, podemos repetir la construcción comenzando desde otro lado (por ejemplo l_2), obteniendo otra elipse E' . Como E y E' tienen los mismos focos y l_2 es tangente a ambas en el mismo punto, por la Definición 1.1 deben ser coincidentes; es decir, ambas pasan por el punto medio de l_2 . Por un razonamiento análogo podemos afirmar lo mismo para todos los lados de T . Por tanto concluimos que E es tangente al punto medio de los tres lados de T . ■

Ahora podemos retomar el Ejemplo 2.14. Habíamos considerado el polinomio $p(z) = x^3 - 5x^2 + 7x + 13$ y obtenido sus raíces $z_1 = -1$, $z_2 = 3 + 2i$ y $z_3 = 3 - 2i$. También habíamos obtenido las raíces de $p'(z) = 3x^2 - 10x + 7$, que son $z'_1 = 1$ y $z'_2 = \frac{7}{3}$.

Denotamos por T al triángulo con vértices en z_1, z_2 y z_3 . Entonces podemos dibujar la elipse con focos en z'_1 y z'_2 que pasa por los puntos medios de los lados del T como se ilustra en en la Figura 3.6. Calculemos ahora su centro, la distancia focal y sus ejes mayor y menor. Tenemos que su centro es $(x_0, y_0) = (\frac{1+\frac{7}{3}}{2}, 0) = (\frac{5}{3}, 0)$ y la distancia focal es $c = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$. Por otro lado se tiene que el eje mayor vale $a = \frac{4}{3}$ y el eje menor $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Esta elipse se define como

$$E := \left\{ z \in \mathbb{C} / |1 - z| + \left| \frac{7}{3} - z \right| = \frac{8}{3} \right\}$$

La expresión algebraica de la elipse será de la forma

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y^2 - y_0)}{b^2} = 1,$$

es decir,

$$\frac{(x - \frac{5}{3})^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

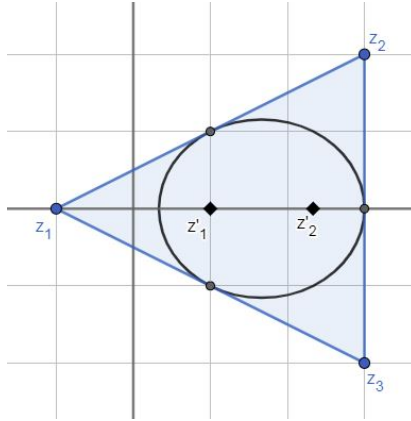


Figura 3.6: Elipse con focos en z'_1 y z'_2

Conclusiones

A lo largo de la memoria hemos estudiado diferentes propiedades geométricas de los polinomios en una variable y con coeficientes complejos, en particular, aquellas que relacionan las raíces de un polinomio con las raíces de su derivada, usando para ello propiedades de la geometría en el plano real como son algunas inherentes a las elipses reales y a los triángulos.

En el segundo capítulo profundizamos en el Teorema de Gauss-Lucas y en el estudio de distintos resultados que son consecuencia de este teorema para polinomios con coeficientes complejos. Por otra parte, mostramos consecuencias del Teorema de Gauss-Lucas para polinomios con coeficientes reales, entre las que destacamos el Teorema de Jensen. A continuación estudiamos la conjetura de Sendov, una versión refinada del Teorema de Gauss-Lucas. Por último detallamos la prueba del Teorema de Siebeck-Marden.

Un estudio complementario al aquí expuesto podría ser el análisis de otras consecuencias del Teorema de Gauss-Lucas dada la amplia bibliografía que existe, así como una investigación de las pruebas de la conjetura de Sendov para ciertos casos particulares, que no han sido incluidos en esta memoria.

Bibliografía

- [1] BERNSTEIN, S. *Leçons Sur les Propriétés Extremales*. (Collection Borel) Paris, 1926.
- [2] BUSER, Peter - COSTA, Antonio F. *Curso de Geometría Básica*, Sanz y Torres, 2018.
- [3] COHEN, G. L. - SMITH, G. H. *A Simple Verification of Ilieff's Conjecture for Polynomials with Three Zeros*. The American Mathematical Monthly, 95 (8), 1988.
- [4] DE BRUIJN, Nicolaas Govert. *Inequalities Concerning Polynomials in the Complex Domain*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 50, 1947.
- [5] HAYMAN, Walter. *Research Problems in Function Theory*. The Athlone Press, 1967.
- [6] JENSEN, J. L. W. *Recherches sur la Théorie des Équations*. Cta Math. 36, 1913.
- [7] JERÓNIMO-CASTRO, Jesús. *Propiedades Geométricas de las Raíces de un Polinomio de Variable Compleja*. Facultad de ingeniería, Universidad Autónoma de Quétaro. Cerro de las Campanas, Quétaro, México, 2014.
- [8] KAFFKA, Konrad. *Zuordnungen zwischen Nullstellen und kritischen Punkten von Polynomen*. Diplomarbeit, 1987.
- [9] KALMAN, Dan. *An Elementary Proof of Marden's Theorem*. The Mathematical Association of America, April 2018.
- [10] LUCAS, Félix. *Géométrie des Polynômes* J. Ecole Polytech. (1) 46, 1879.
- [11] LUCAS, Félix. *Propriétés Géométriques des Fractions Rationnelles*. Sci. Paris, 1874.
- [12] LUCAS, Félix. *Statique des Polynômes*. Bull. Soc. Math. France 17 1888.
- [13] MARDEN, Morris. *Geometry of Polynomials*. Mathematical Survey Number 3. The American Mathematical Society, Rhode Island, 1966.
- [14] RÜDINGER, Andreas. *Strengthening the Gauss-Lucas Theorem for polynomials with Zeros in the interior of the convex hull*. 2000 Mathematics Subject Classification. 30C15. May 3, 2014.

- [15] SIEBECK, J. *Eine neue analytische behandlungweise der brennpunkte.* Reine Angew. Math., vol. 64, 1864.
- [16] TAO, Terence. *Sendov's conjecture for sufficiently high degree polynomials.* <https://arxiv.org/abs/2012.04125> 8 Dec 2020.
- [17] TIMONEY, Richard M. *Chapter 3: The Maximum Modulus Principle.* Course 414, 2003/04.
- [18] WALSH, J. L. *The Location of The roots of the Derivative of a Rational Function.* Ann. of Math. 22 1920.

Relative position of the critical points of a

polynomial

Abstract

The roots of a polynomial in one variable and with complex coefficients can be represented geometrically in the real plane. In this way, we can study different geometric properties of the roots of polynomials, in particular, we are especially interested in the geometric relationship that exists between the roots of a polynomial and those of its derivative.

1. Gauss-Lucas Theorem

The Gauss-Lucas Theorem relates geometrically the roots of a polynomial to those of its derivative.

Lemma. Let z_0 be a root of a polynomial $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ and suppose that the multiplicity of z_0 is $m \geq 2$. Then z_0 is also a root of $p'(z)$ with multiplicity $m - 1$.

Proposition. The centroid of the roots of a polynomial $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ coincides with the centroid of the roots of its derivative $p'(z)$.

Definition. We define the convex hull of $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ as the intersection of all convex sets of \mathbb{R}^n containing X . That is, the convex hull of X is the smallest convex set containing X .



Figure 1: Example of the convex hull of a collection of points.

Gauss-Lucas Theorem. All roots of the derivative of a non-constant polynomial $p(z)$ are contained in the convex hull of the roots of $p(z)$.

Theorem. Let $H \subseteq \mathbb{R}^2$ be a closed convex subset, ∂H be the boundary of H and $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ such that

1. $\deg(p(z)) \leq \deg(q(z))$.
2. $|p(z)| \leq |q(z)|$, for all $z \in \partial H$.
3. All roots of $q(z)$ are in $H \cup \partial H$.

Then $|p'(z)| \leq |q'(z)|$ for all $z \in \partial H$.

Theorem. Let $p(z)$ be a polynomial with complex coefficients of degree less than or equal to n such that $|p(z)| \leq 1$ for all $|z| \leq 1$. Then $|p'(z)| \leq n$ for $z \leq 1$.

Theorem. Let $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ be a fourth degree polynomial with four distinct roots such that one of them is contained in the convex hull of the other three. That root divides the area of the triangular convex envelope into three non-degenerate triangles. Then the interior of one of those triangles does not contain any root of $p'(z)$.

Definition. Let $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ and $z_0 = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $y > 0$ be a complex root of $p(z)$. We call the Jensen disk associated with z_0 the disk:

$$D_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} / |z - x| \leq y\}.$$

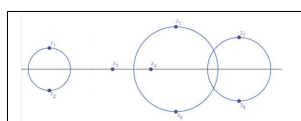


Figure 2: Jensen's disks.

Jensen's Theorem. Any nonreal complex root of the derivative of $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ belongs to a Jensen disk associated to a root of $p(z)$.

2. Sendov's conjecture

Sendov's conjecture. If $p(z)$ has all its roots in the disk with center at the origin and radius 1 and z_j is any of the roots of $p(z)$ then $p'(z)$ has at least one root in the disk of center z_j and radius 1.

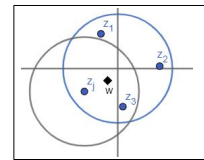


Figure 3: Critical point w in the disk centered at z_j and radius 1.

Proposition. Let $p(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_r)^{m_r} \in \mathbb{C}[z]$, with $m_1 + m_2 + \dots + m_r \geq 2^{r-1}$, $r \geq 3$, be a polynomial whose roots z_1, z_2, \dots, z_r are distinct and are contained in the unit disk centered at the origin. Then $p'(z)$ has at least one root contained in the disk $|z - z_1| \leq 1$.

Proposition. Sendov's conjecture is true for polynomials of degree three with three distinct roots.

3. Siebeck-Marden Theorem

Siebeck-Marden's Theorem. Let $p(z)$ be a polynomial of third degree with complex coefficients, whose roots z_1, z_2 and z_3 are noncollinear points in the real plane and let T be the triangle with vertices at z_1, z_2 and z_3 . Then there exists a unique ellipse inscribed in T tangent to the midpoints of the sides of T and its foci are the roots of $p'(z)$.

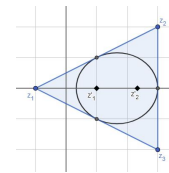


Figure 4: Example of Siebeck-Marden Theorem.

References

- [1] COHEN, G. L. - SMITH, G. H. A Simple Verification of Ilieff's Conjecture for Polynomials with Three Zeros. The American Mathematical Monthly, 95 (8), 1988.
- [2] KALMAN, Dan. An Elementary Proof of Marden's Theorem. The Mathematical Association of America, April 2018.
- [3] MARDEN, Morris. Geometry of Polynomials. Mathematical Survey Number 3. The American Mathematical Society, Rhode Island 1966.