

Indira Caballero Romero

La geometría del plano hiperbólico

The geometry of the hyperbolic plane

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2021

DIRIGIDO POR

María Edith Padrón Fernández

María Edith Padrón Fernández
Departamento de Matemáticas,
Estadística e IO
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En general, me gustaría agradecer a todas las personas que trabajan para la Universidad de la Laguna, que hacen que este sea un lugar para el encuentro y formación de mejores personas. Especialmente, a mi tutora M. Edith Padrón Fernández, no solo por guiarme y aconsejarme durante todo el trabajo, sino también por permitirme descubrir cuánto me motiva esta área de las matemáticas y darme una visión más amplia del mismo.

A mis padres, a mi hermano, y al resto de mi familia. Gracias a ellos por ser la persona que soy, y para los que no tengo palabras de agradecimiento por su apoyo incondicional en los buenos y malos momentos, son la principal fuente de consejo y un espejo al que mirar.

A mis amigos, que de una u otra forma, me han ayudado a superarme a mí misma a lo largo de todos los años y con quienes he pasado varios de los mejores momentos en toda esta etapa de mi vida. Especialmente, a las amistades que me ha dado Tenerife, mis *chiquillos*, porque sin ellos nada habría sido igual.

Finalmente, por el incondicional apoyo, paciencia y ser una persona que saca lo mejor de mí, agradezco a Raúl, por estar a mi lado de principio a fin y darme fuerzas siempre para seguir luchando.

Indira Caballero Romero
La Laguna, 5 de julio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria se hace una introducción de la geometría del plano hiperbólico, siguiendo un esquema axiomático similar al de la geometría euclídea. El descubrimiento de la geometría hiperbólica supone una gran influencia sobre la comprensión humana de las matemáticas y la relación con sus aplicaciones físicas. Su nacimiento genera una geometría, que abre un nuevo mundo donde por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que π . Nos encontramos con una nueva forma de ver la geometría. En este trabajo, se describe y justifica las propiedades básicas de la geometría hiperbólica bidimensional en el modelo del semiplano superior de Poincaré, definido por la recta de l_∞ , cuyas rectas son semirectas perpendiculares a l_∞ o semicircunferencias centradas en l_∞ .

Palabras clave: *Plano hiperbólico – métrica hiperbólica – axioma de las paralelas – inversión con respecto de una circunferencia – rectas y triángulos hiperbólicos.*

Abstract

In this report, an introduction is made to the geometry of the hyperbolic plane, following an axiomatic scheme similar to that of euclidean geometry. The discovery of hyperbolic geometry has a major influence on human understanding of mathematics and the relationship to its physical applications. Its birth creates a geometry, which opens a new world where infinite parallels pass through another point to a line and the sum of the interior angles of a triangle is less than π . We find a new way of seeing geometry. In this dissertation, we describe and justify the basic properties of two-dimensional hyperbolic geometry in the superior semi-plane of Poincaré, defined by the line l_∞ , whose lines are perpendicular rays to l_∞ or semicircumference centered on l_∞ .

Keywords: *Hyperbolic plane – hyperbolic metric – axiom of parallels – inversion with respect to a circumference – hyperbolic lines and triangles.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	IV
Introducción	VI
1. La geometría euclídea del plano y el axioma de las paralelas ..	1
2. La inversión con respecto a una circunferencia	8
2.1. Definición y propiedades	8
2.2. Imagen mediante una inversión, respecto de una circunferencia, de rectas y circunferencias	10
2.3. Inversión y métrica	17
3. Axiomática de la geometría hiperbólica del plano	19
3.1. La métrica hiperbólica	19
3.2. Expresión analítica de la métrica	25
3.3. Axiomas de la geometría hiperbólica	28
4. Ángulos y triángulos en geometría hiperbólica	41
4.1. Ángulos hiperbólicos	41
4.2. Fórmulas trigonométricas de un ángulo hiperbólico	42
4.3. Suma de ángulos interiores de un triángulo	46
Conclusiones	49
Bibliografía	50
Poster	51

Introducción

En el siglo III a.C., Euclides sistematiza la geometría conocida hasta el momento, en una colección de libros a la que titula *Elementos* [11]. En ellos, por primera vez en la historia, se organiza la matemática a partir de afirmaciones (axiomas) elementales e independientes, desde las que se derivan el resto de resultados. En lo referente a la geometría, se mantuvo por más de veinte siglos como la referencia obligada, y prácticamente indiscutible, en todo el mundo occidental.

Euclides fundamentaba su axiomática en estas cinco afirmaciones (ver, por ejemplo, [10]):

- I. Por dos puntos cualesquiera del plano, se puede unir una y sólo una recta que pase por ambos puntos.
- II. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una recta.
- III. Dado un punto y una distancia fijos, se puede trazar un único círculo centrado en ese punto y con radio igual a la distancia dada.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
- V. Si una recta corta a otras dos de tal modo que los ángulos interiores del mismo lado suman menos que dos rectas, al prolongar indefinidamente estas dos rectas, se cortan en ese mismo lado.

De todos los axiomas, el más controvertido era el quinto: por su enunciado parecía que era posible derivarlo del resto. Muchos matemáticos intentaron demostrar dicho postulado a partir de los otros cuatro, sin éxito alguno. Todas las demostraciones eran falsas o erróneas. Muchos de ellos reducían el problema a otro que no era posible probar usando solo los cuatro primeros postulados. Algunas formulaciones equivalentes al V postulado son:

- La suma de los ángulos interiores a un triángulo es un ángulo llano (Posidonio, 135-51 a.C.).
- Por un punto exterior a una recta dada pasa una única paralela (Proclo 412-485). Por ello, al V postulado se le conoce como *Postulado de las paralelas*.

- Se puede construir un triángulo cuya área es mayor que un área dada (Gauss, 1777-1855).
- Por tres puntos no alineados es posible construir una única circunferencia que los contenga (Legendre, 1752-1853).

Parece ser que el primer matemático que se dio cuenta de la imposibilidad de probar el quinto postulado fue Gauss (1777-1855) [1], quién estudió durante 40 años este problema. Sin embargo, nunca se atrevió a publicar nada por temor al descrédito, ya que la idea de una nueva geometría, que supera el V postulado, se tachaba de extravagancia y vil locura entre la comunidad científica de la época.

A principios del siglo XIX, es Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792-1856) y János Bolyai (1802-1860), junto a su padre Farkas Bolyai, quienes independientemente partiendo de los cuatro primeros axiomas y de un nuevo quinto postulado que afirma que por un punto exterior a una recta se puede trazar al menos dos rectas paralelas a ella, formulan una nueva geometría, conocida hoy día como **Geometría Hiperbólica**. János Bolyai publicó en 1832 un apéndice de 26 páginas junto a su padre con estos resultados, pero tiempo después sabría que Lobachevski había publicado la obra *Sobre los elementos de la Geometría* en 1829 (véase [1, 10]).

El mundo científico quedó perplejo con este descubrimiento, planteándose grandes discusiones sobre la consistencia de ambas geometrías: la euclídea y la hiperbólica. Eugenio Beltrami (1835-1900) encontró un modelo de cada una de ellas, en la otra. Esto demostraba que una es consistente en la medida que lo es la otra. De esta forma, Beltrami, además, prueba la consistencia de la geometría hiperbólica mostrando diversos modelos en su libro *Teorema fundamental de espacios de curvatura constante* (ver [10]). Posteriormente, Felix Klein (1849-1925) obtiene nuevos modelos basados en la geometría proyectiva. También, Jules Henri Poincaré (1854-1912) propone otros modelos motivado por sus investigaciones sobre el problema de los tres cuerpos.

A partir de entonces, se supo que no existe solo una geometría, y que las geometrías euclídea e hiperbólica, aunque basadas en hipótesis antagónicas, son igualmente posibles y ninguna es más *verdadera* que la otra.

Existen varios modelos de la geometría hiperbólica. Estos nos permiten mirarla desde diferentes enfoques y tener, entonces, distintas intuiciones. A continuación, nombraremos los cinco modelos más conocidos del plano hiperbólico (ver, por ejemplo, [7, 10]).

El modelo del disco de Poincaré

El plano hiperbólico es un disco abierto, cuyas rectas son los diámetros de la circunferencia que genera el disco, o arcos de circunferencia, perpendiculares a la dicha circunferencia. Este modelo tiene la ventaja de que la representación

euclidiana de los ángulos representa su medida real. Así, es el modelo más cómodo para estudiar propiedades de los polígonos regulares, tomando como mejor representante aquel que está centrado en el origen del círculo.

El modelo de Beltrami-Klein

En este caso, el espacio es de nuevo el disco abierto, pero las rectas son las cuerdas del círculo.

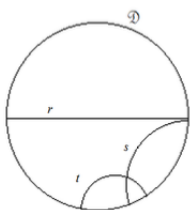


Figura 0.1: Rectas del modelo Disco de Poincaré.

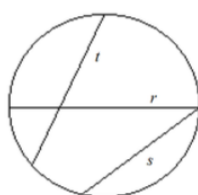


Figura 0.2: Rectas del modelo de Beltrami-Klein.

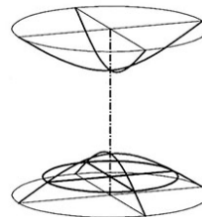


Figura 0.3: Rectas del modelo del hiperboloide.

El modelo del hiperboloide o modelo de Weierstrass

El plano es una de las hojas de un hiperboloide de dos hojas en \mathbb{R}^3 , cuyas rectas son las geodésicas, esto es, las intersecciones del hiperboloide con planos determinados por el origen y dos puntos de la superficie. Así, el conjunto que define los puntos en este modelo es $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, x_3 > 0\}$.

Este modelo presenta la desventaja de que en él no se puede visualizar fácilmente la existencia de más de una paralela a una recta dada por un punto exterior.

El modelo de la semiesfera

El plano es una semiesfera en \mathbb{R}^3 y las rectas son semicircunferencias contenidas en algún plano euclídeo perpendicular a la base de la semiesfera y contenidas en ella.

El modelo del semiplano superior o semiplano de Poincaré

El plano hiperbólico se modeliza sobre el semiplano abierto superior de \mathbb{R}^2 , respecto de una recta fija. Este modelo, tiene la ventaja de ser un modelo conforme, donde sus rectas son fáciles de dibujar y su métrica es la que tiene la expresión más sencilla.

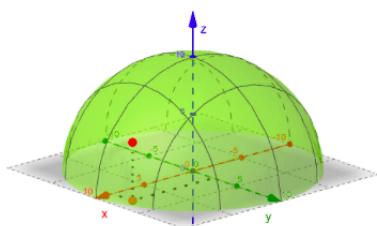


Figura 0.4: Rectas del modelo de la semiesfera.

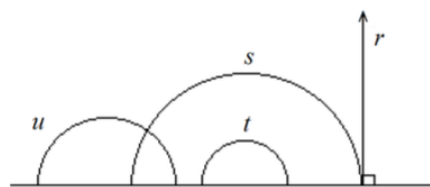


Figura 0.5: Rectas del modelo del semiplano superior de Poincaré.

El objetivo de esta memoria, es introducir la geometría hiperbólica usando este último modelo. Se hará de una manera axiomática, intentando mostrar que en efecto la geometría euclídea y la hiperbólica comparten ciertos axiomas y se diferencian en el axioma de las paralelas.

El presente trabajo se desarrolla en cuatro capítulos. Además, se completa con una referencia al libro interactivo de Geogebra, dónde se puede acceder a diferentes applets, cuyo objetivo es permitir que el lector visualice algunos de los resultados del trabajo. El libro interactivo está estructurado en cuatro ejes centrales: Inversión, métrica, medida de ángulos e imagen de ángulos respecto de la reflexión e inversión en la geometría hiperbólica. A continuación, se facilita la dirección web dónde se puede acceder a dicho libro interactivo:

<https://www.geogebra.org/m/hw2ezwvr>.

La memoria está organizada como se indica a continuación. En el Capítulo 1, y como complemento a esta introducción, se recuerda la axiomática del plano euclídeo. La axiomática que aquí probaremos es la de George David Birkhoff (1884-1944) en donde se introduce el axioma de la regla graduada, que permite usar la potencia de los números reales. De esta forma, si olvidamos el axioma de las paralelas (esto constituiría *la geometría neutral*), se puede probar que por un punto exterior a una recta pasa una recta paralela, pero no que ésta es única. Al final del capítulo, veremos que el axioma de las paralelas es equivalente a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es un ángulo llano.

En el Capítulo 2, se introduce la herramienta fundamental para la construcción de la métrica hiperbólica: la inversión respecto de una circunferencia. Asimismo, examinamos una serie de propiedades fundamentales de esta transformación. Describimos las imágenes de rectas y circunferencias mediante inversiones de circunferencias. Además, se verá que las inversiones no son isometrías. En la parte final de este capítulo, se prueban algunas relaciones métricas entre la distancia entre dos puntos del plano y las distancias entre las correspondientes imágenes con la inversión.

En el Capítulo 3, introducimos la geometría hiperbólica del plano, usando como modelo el semiplano superior \mathbb{H} de Poincaré, definido por la recta de l_∞ . De esta forma, en la Sección 3.1, se define la métrica hiperbólica. Comenzamos

pensando en puntos P y Q , tal que, la recta PQ es perpendicular a l_∞ . Queremos que la métrica mida la relación de las distancias de P y Q a la recta del infinito. Así que, es natural considerar como distancia hiperbólica de P a Q el número positivo $\frac{d(P, l_\infty)}{d(Q, l_\infty)}$. Sin embargo, es claro que definiéndolo así no se satisface las relaciones de distancia. Para garantizar esto último definimos,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right|$$

Con ello, conseguimos que la distancia entre dos puntos es mayor si los puntos están más cerca de l_∞ . El siguiente paso, es considerar cualquiera dos puntos del plano hiperbólico y llevarlos a la situación anterior. Para ello, usaremos la circunferencia \mathfrak{C} centrada en un punto de l_∞ que pasa por esos puntos, y posteriormente cualquier circunferencia \mathfrak{C}_X centrada en uno de los puntos X de intersección de \mathfrak{C} con l_∞ . De esta forma conseguimos que $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)$ y $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ determinen una recta perpendicular a l_∞ .

Una vez definimos la métrica $d_{\mathbb{H}}$ sobre \mathbb{H} , comprobamos que $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ satisface los axiomas de la geometría euclídea, salvo el de las paralelas. La clave para esta demostración es que las inversiones respecto de circunferencias centradas en l_∞ y las reflexiones respecto de una recta perpendicular a l_∞ son isometrías de esta geometría. Para demostrar el Axioma 2, comprobamos que las únicas rectas de la geometría hiperbólica son las semirrectas perpendiculares a l_∞ y las semicircunferencias centradas en un punto de l_∞ . Terminamos el capítulo mostrando que esta geometría no satisface el axioma de las paralelas y que de hecho por un punto exterior a una recta hiperbólica pasan infinitas rectas.

El objetivo del Capítulo 4 es mostrar algunos de los resultados sorprendentes de la geometría hiperbólica. Nos centraremos en los triángulos hiperbólicos. Probamos en el Capítulo 1 que el axioma de las paralelas es equivalente a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo llano. Por tanto, sabemos que esta condición para los triángulos hiperbólicos no se satisface. De hecho, probamos que es menor estrictamente que π . Para ello, se calcula el seno y coseno de un ángulo hiperbólico, en términos de las longitudes hiperbólicas de los lados de un triángulo rectángulo (hiperbólico) que tiene a este ángulo como ángulo interior.

La memoria finaliza con un apartado de conclusiones.

Si es de interés, el lector puede ver el estudio de la geometría hiperbólica en dimensión mayor, en [2, 9]. Además, en [8] se realiza un análisis de polígonos hiperbólicos.

La geometría euclídea del plano y el axioma de las paralelas

En este primer capítulo se pretende motivar la introducción de la geometría hiperbólica desde la discusión del axioma de paralelismo de la geometría euclídea sobre el plano Π . Para ello, se recordarán un conjunto de nociones, relaciones y axiomas que constituyen el sistema axiomático de la geometría euclídea.

La palabra *geometría* proviene del griego y su significado alude a medir. Así, el concepto matemático asociado a las mediciones es el de métrica.

Definición 1.1 *Sea M un conjunto no vacío. Una métrica o distancia sobre M es una aplicación $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$. Además, $d(x, y) = 0$, si y solo si, $x = y$,
2. simétrica: $d(x, y) = d(y, x)$,
3. desigualdad triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

para todo x, y, z pertenecientes a M . Si sobre M existe una métrica d , entonces al par (M, d) se le denomina **espacio métrico**.

El primer axioma de la geometría euclídea del plano describe sobre qué espacio estamos trabajando.

Axioma 1 *Un plano es un espacio métrico (Π, d) .*

Los elementos del plano Π se denominan puntos. Asimismo, a partir del Axioma 1 se pueden introducir diferentes nociones como las de segmento y recta.

Definición 1.2 *Sean los puntos A y B del plano Π . El **segmento** $[A, B]$ delimitado por A y B es el subconjunto de Π dado por*

$$[A, B] = \{P \in \Pi / d(A, P) + d(B, P) = d(A, B)\}.$$

Definición 1.3 *Una **recta** es un subconjunto r de Π que satisface las siguientes propiedades:*

1. r contiene al menos dos puntos distintos del plano Π .

2. Si A, B y C son puntos de r , entonces los puntos A, B y C están alineados, esto es,

$$A \in [B, C] \text{ ó } B \in [A, C] \text{ ó } C \in [A, B].$$

3. Sea $[A, B]$ un segmento contenido en r , con A distinto B y X un punto del plano Π . Entonces, si A, B y X están alineados, se tiene que $X \in r$.

Se puede probar que dos rectas diferentes tienen un punto en común, o ninguno. En este último caso, se dice que las rectas son paralelas.

Introduciremos a continuación el concepto de semirrecta.

Definición 1.4 Sean P y Q dos puntos de la recta r . La **semirrecta de origen P que contiene a Q** es el siguiente subconjunto de r

$$\overline{PQ} := \{X \in r / P \notin [X, Q]\}.$$

En el siguiente axioma descartamos la opción que Π sea un punto o una recta. Además, impondremos que dos puntos cualesquiera determinan una única recta.

Axioma 2 El conjunto Π tiene como mínimo tres puntos no alineados. Si P y Q son puntos distintos de Π , entonces existe una única recta r tal que P y Q pertenecen a r , la que denotaremos como PQ .

El tercer axioma nos permite asignar a cada recta una regla graduada.

Axioma 3 (Axioma de la recta graduada) En el plano Π , para toda recta r existe una regla graduada \mathfrak{R} , es decir, una aplicación biyectiva

$$\mathfrak{R}: r \subset \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo X, Y en r , se cumple que $d(X, Y) = |\mathfrak{R}(X) - \mathfrak{R}(Y)|$.

El siguiente axioma tiene una naturaleza muy diferente a los tres estudiados anteriormente. Este caracterizará los semiplanos de Π .

Axioma 4 (Axioma de separación) Sea una recta r de Π . Entonces, existen dos subconjuntos \mathcal{H}_r^1 y \mathcal{H}_r^2 de Π que satisfacen

1. $\mathcal{H}_r^1 \cup \mathcal{H}_r^2 = \Pi - r$,
2. $\forall X, Y \in \mathcal{H}_r^i \Rightarrow [X, Y] \subseteq \mathcal{H}_r^i$,
3. Si $X \in \mathcal{H}_r^i$ e $Y \in \mathcal{H}_r^j$ con $i \neq j \Rightarrow [X, Y] \cap r \neq \emptyset$.

A continuación, incluiremos nociones que describen las transformaciones que se consideran en esta axiomática.

Definición 1.5 Una **isometría** es una aplicación biyectiva $g: \Pi \rightarrow \Pi$ que preserva la distancia, esto es, $d(X, Y) = d(g(X), g(Y))$ para cualquiera puntos X, Y perteneciente a Π .

Se puede probar que las isometrías preservan segmentos, rectas y semirrectas. El axioma que se presenta a continuación garantiza la existencia de isometrías.

Axioma 5 Sean A, B, C y D puntos distintos del plano Π , verificando que $d(A, B) = d(C, D)$. Entonces existe una isometría $g: \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $g(A) = C$ y $g(B) = D$.

El siguiente axioma garantiza la existencia de un tipo especial de isometría asociada a una recta.

Axioma 6 (Axioma de reflexión) Para toda recta r perteneciente al plano Π existe una isometría $\sigma_r: \Pi \rightarrow \Pi$ verificando las siguientes propiedades:

1. $\sigma_r(X) = X$ si y solo si $X \in r$,
2. $\sigma_r \circ \sigma_r = Id_{\Pi}$.

A esta isometría se la denomina reflexión respecto de la recta r .

A continuación, introduciremos algunas relaciones entre rectas. En particular, el concepto de perpendicularidad.

Definición 1.6 Una recta r del plano Π es **perpendicular** a la recta l , si se cortan en un punto M y satisfacen que para cualquier $S \in l$ y para cualquiera dos puntos A y B de r que verifican la siguiente condición

$$d(A, M) = d(B, M), \quad (1.1)$$

entonces $d(S, A) = d(S, B)$. La relación de perpendicularidad se denota por $r \perp l$.

Si se satisface (1.1) para dos puntos A y B fijos, entonces se satisface para cualesquiera A y B . De hecho, $l = \{X \in \Pi / d(X, A) = d(X, B)\}$.

Nótese que la perpendicularidad y el paralelismo se conservan por isometrías. A continuación, veremos un lema que necesitaremos para una demostración posterior (remitimos a [4] para la demostración de este lema).

Lema 1.1 Sean r y l dos rectas del plano Π que se cortan en un punto P , y sea σ_r reflexión respecto de la recta r . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. r y l son perpendiculares,
2. $\sigma_r(l) = l$.

Seguidamente, se demostrarán dos resultados que garantizan la existencia de rectas perpendiculares y paralelas que pasan por un punto exterior a una recta.

Proposición 1.1 Para toda recta r en Π y todo punto P del plano no perteneciente a r , existe una única recta l que pasa por P y es perpendicular a r .

Demostración. Para estudiar la existencia consideramos la reflexión σ_r respecto de la recta r . Veamos que la recta $l = P\sigma_r(P)$ es ortogonal a r . Para ello, demostraremos que $\sigma_r(l) = l$. En efecto, usando que $\sigma_r^2(P) = P$ y que σ_r es una isometría, se tiene que $\sigma_r(l) = \sigma_r(P\sigma_r(P)) = \sigma_r(P)P = l$.

En cuanto a la unicidad, supongamos que existe otra recta l' que pasa por P y es ortogonal a r , distinta de l . Entonces, por el Lema 1.1, $\sigma_r(l) = l$ y $\sigma_r(l') = l'$. En particular, P y $P' = \sigma_r(P)$ pertenecen a l' . Así, por el Axioma 2 tenemos que l y l' son iguales. \square

No obstante, el resultado anterior también es cierto si P pertenece a la recta r .

Proposición 1.2 *Dada una recta r . Entonces, para todo punto P perteneciente a la recta r , existe una única recta l que es perpendicular a r en P .*

Demostración. Tenemos que ver que existe una recta perpendicular a r pasando por P . Para ello tomemos un punto Q que no esté en r y construyamos otra recta t perpendicular a r pasando por Q (véase Figura 1.1). Sea el punto S , el punto de intersección de las rectas r y t . Debemos estudiar dos casos (si S coincide con P , o si S y P son puntos diferentes) para ver quién es la recta que es perpendicular a r en P en cada caso.

1. Si $S = P$, consideramos $l = t$.
2. Si $S \neq P$, tomemos el punto medio del segmento de S y P que denotaremos por S' . Aplicando el Axioma 5, como $d(S, S') = d(P, S')$, existe una isometría g verificando que $g(S) = P$, $g(S') = S'$. Por tanto, $g(r) = r$ y $g(t)$ pasa por P . Así, $l = g(t)$ es la recta buscada. Nótese que $r = g(r)$ y $g(t)$ son perpendiculares.

\square

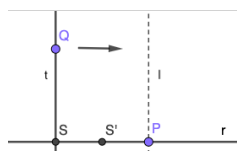


Figura 1.1

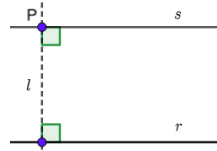


Figura 1.2

Ahora, con la ayuda de las proposiciones anteriores se prueba la existencia de una paralela que pasa por un punto exterior a una recta.

Proposición 1.3 *Para toda recta r y todo punto P no perteneciente a r , existe una recta s que pasa por P y es paralela a r .*

Demostración. Nótese que, por la Proposición 1.1, existe una recta l perpendicular a r que pasa por P y, por la Proposición 1.2, existe una recta s perpendicular a l que pasa por P (véase Figura 1.2). La intersección de las rectas r y s es vacía ya que si no fuera así r y s son rectas distintas ortogonales a l pasando por el mismo punto, lo que contradice la Proposición 1.1. Por tanto, r y s son paralelas. \square

Sin embargo, no es posible demostrar con los axiomas anteriores la existencia de **una única recta paralela** a una dada, que pasa por un punto exterior a la misma. Por ello, la geometría euclídea precisa del axioma de las paralelas.

Axioma 7 (Axioma de las paralelas) *Para toda recta r y todo punto P del plano Π , no perteneciente a r , existe una única recta paralela a r que pasa por P .*

Este axioma se puede reescribir en términos de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Definición 1.7 *Un **triángulo** es un subconjunto de Π delimitado por la unión de tres segmentos $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ tales que los puntos A, B, C no están alineados. Los vértices del triángulo son A, B, C , y al triángulo se le denota por $\triangle ABC$.*

Recordemos la noción de ángulo.

Definición 1.8 *Un **ángulo** con vértice P es un par ordenado de dos semirrectas \overrightarrow{PQ} y $\overrightarrow{PQ'}$ con un origen en común P . A este ángulo se le denota $\angle QPQ'$ ó $\angle P$ cuando no hay confusión. Así, se define el interior de un ángulo a la intersección del semiplano de PQ , que contiene a PQ' , con el semiplano de PQ' , que contiene a PQ .*

Introduciremos algunas relaciones entre ángulos. En particular, el concepto de ángulo llano y congruencia entre ángulos.

Definición 1.9 *Un **ángulo recto** está determinado por dos rectas que son perpendiculares. Asimismo, un **ángulo llano** está determinado por las dos semirrectas que determinan una recta r .*

Definición 1.10 *Dos ángulos $\angle Q_1PQ_2$ y $\angle Q'_1P'Q'_2$ son congruentes si existe una isometría $g : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $g(\overrightarrow{PQ_1}) = \overrightarrow{P'Q'_1}$ y $g(\overrightarrow{PQ_2}) = \overrightarrow{P'Q'_2}$.*

A continuación, veremos un lema que necesitaremos para comprobar la relación entre el axioma del paralelismo y la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo llano (remitimos a [4] para la demostración de este lema).

Lema 1.2 Sean r y s dos rectas paralelas y sea t otra recta que corta a las anteriores en los puntos A y B , respectivamente. Además, sean $\angle A$ y $\angle B$ los ángulos de vértices correspondientes, señalados en la Figura 1.3. Entonces, $\angle A$ y $\angle B$ son congruentes.

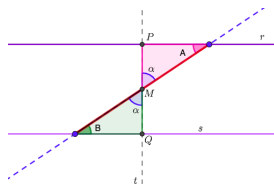


Figura 1.3: Ángulos Internos-Alternos.

Teorema 1.1 En el plano euclídeo estas dos afirmaciones son equivalentes:

1. Para toda recta r y todo punto P , no perteneciente a r , existe una única recta paralela a r pasando por P .
2. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es un ángulo llano.

Demostración. Supongamos que se da 1. Aplicando el lema anterior, demostremos que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es un ángulo llano. Para probarlo tomemos un triángulo $\triangle ABC$. Consideremos la recta s que pasa por el vértice C y es paralela a la recta AB , como se puede ver en la Figura 1.4.

Por el Lema 1.2, los ángulos $\angle C_1$ y $\angle A$ son congruentes, al igual que $\angle C_3$ y $\angle B$. Además, como la suma de los ángulos de vértices $\angle C_1, \angle C_2$ y $\angle C_3$ es un ángulo llano, se tiene que la suma de los ángulos interiores del triángulo también lo es. Esto es, la suma de los ángulos $\angle A, \angle C_2$ y $\angle B$ es un ángulo llano.

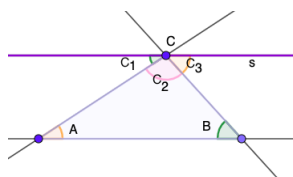


Figura 1.4

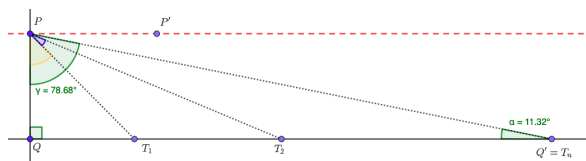


Figura 1.5

Recíprocamente, sean P, Q, Q' tres puntos del plano tal que $\angle PQQ'$ determina un ángulo recto. Entonces demostraremos que para todo valor positivo a , existe un punto T sobre la recta QQ' tal que $\angle PTQ$ es menor que a .

Elegimos un punto P' tal que la recta PP' es perpendicular a la recta PQ y está en el mismo semiplano de Q' respecto de la recta PQ , como se observa en la Figura 1.5. Sea T_1 un punto de QQ' tal que la longitud del segmento $[P, Q]$ es igual a la de $[Q, T_1]$. Ahora, consideramos un punto T_2 tal que la longitud de $[T_1, T_2]$ es la longitud de $[P, T_1]$. Reiterando este proceso hasta el paso n -ésimo se

considera un punto T_n tal que la longitud de $[P, T_{n-1}]$ es la longitud de $[T_n, T_{n-1}]$. Vamos obteniendo así los triángulos isósceles $\triangle PT_{n-1}T_n$.

Nótese que

$$\angle QPT_n = \angle QPT_1 + \angle T_1PT_2 + \cdots + \angle T_{n-1}PT_n \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1.2}$$

De esta manera, todos los ángulos son menores que un ángulo recto. Ahora, vamos a demostrar que existe un T_i , tal que, $\angle PT_iQ$ es menor que a . Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que no es así. Entonces para todo i , $\angle PT_iQ$ es mayor o igual que a . Sea n un número natural tal que $n \cdot a$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$. Por tanto,

$$\angle QPT_1 + \angle T_1PT_2 + \cdots + \angle T_{n-1}PT_n \geq n \cdot a \geq \frac{\pi}{2}.$$

Lo cual es contradictorio con (1.2). Por consiguiente, existe un T_i tal que $\angle T_i$ es menor que un valor a prefijado.

Veamos que si suponemos que por un punto P exterior a una recta l pasan dos rectas paralelas entonces podemos construir triángulos cuya suma de ángulos interiores es menor que uno llano. Para demostrarlo tomemos m y m' dos rectas paralelas a l que pasan por el punto P (véase Figura 1.6). Consideremos un punto R de m y un punto S de m' en el mismo semiplano de PQ . Sea T un punto de l , tal que, $\angle T$ es menor que $\alpha = \angle SPR$. Vamos a probar que los ángulos interiores del triángulo $\triangle PQT$ es menor que uno llano. En efecto,

$$\angle T + \angle P < \alpha + \beta = \angle QPR = \frac{\pi}{2} \tag{1.3}$$

con $\beta = \angle QPS$.

Obsérvese que $\angle P$ es menor que β , porque si no fuera así la recta m' tiene intersección con l . Con lo que se concluye que (1.3) es menor que un ángulo llano.

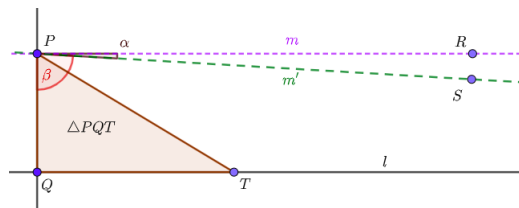


Figura 1.6

□

Nótese que, para toda geometría que satisfaga los seis primeros axiomas de la geometría euclídea, la condición de no paralelismo es equivalente a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es un ángulo llano.

La inversión con respecto a una circunferencia

2.1. Definición y propiedades

Definiremos, asociado a una circunferencia \mathfrak{C} , una transformación del plano, que recibe el nombre de inversión respecto de la circunferencia \mathfrak{C} . Las inversiones son la clave para introducir una nueva geometría que no satisface el axioma de las paralelas.

Una recta r que pase por el centro de una circunferencia \mathfrak{C} de radio ρ es secante, esto es, corta a \mathfrak{C} en dos puntos. En efecto, por el Axioma 3 hay exactamente dos puntos P y P' a distancia ρ del centro. Dichos puntos se denominan puntos diametralmente opuestos respecto a la circunferencia y la longitud del segmento $[P, P']$ es el diámetro.

A continuación, introduciremos la noción de inversión.

Definición 2.1 *Sea \mathfrak{C} una circunferencia de centro O y radio ρ . Una **inversión** respecto de \mathfrak{C} es una aplicación $\iota_{\mathfrak{C}} : \Pi - \{O\} \rightarrow \Pi - \{O\}$ que verifica las siguientes propiedades:*

1. O , P y $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ están alineados para todo P ,
2. El punto O no pertenece al segmento $[P, \iota_{\mathfrak{C}}(P)]$,
3. $d(O, P) \cdot d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) = \rho^2$,

para todo P perteneciente a $\Pi - \{O\}$.

Por el Axioma 3 de la regla graduada se garantiza la existencia y unicidad de $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$. De hecho, $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ es el único punto sobre la semirrecta \overline{OP} tal que verifica la siguiente condición

$$d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) = \frac{\rho^2}{d(O, P)}. \quad (2.1)$$

Existen varias propiedades que se derivan de la noción de inversión. A continuación, se presentan algunas de ellas:

1. La inversión es una aplicación biyectiva, de hecho, se tiene que $\iota_{\mathfrak{C}}^2 = Id$.
En efecto, si P es un punto del plano Π , entonces:

- a) Los puntos P , $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ y O están alineados.
 - b) El punto O no pertenece al segmento $[\iota_{\mathfrak{C}}(P), P]$.
 - c) Se verifica la condición $d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) \cdot d(O, P) = \rho^2$.
- Por consiguiente, $\iota_{\mathfrak{C}}(\iota_{\mathfrak{C}}(P)) = P$.

2. Si $d(O, P) \leq d(O, Q)$, entonces se tiene la siguiente condición:

$$d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) \geq d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q)).$$

Luego, en función de dónde se encuentre el punto P , se obtienen estas situaciones:

- a) Para un punto P en la circunferencia, $\iota_{\mathfrak{C}}(P) = P$. En efecto,

$$d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) = \frac{\rho^2}{d(O, P)} = \frac{\rho^2}{\rho} = \rho.$$

Esto implica que, $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ es P o su diametralmente opuesto. Sin embargo, como por definición el punto O no pertenece al segmento $[P, \iota_{\mathfrak{C}}(P)]$ se tiene que $P = \iota_{\mathfrak{C}}(P)$. De hecho, los únicos puntos fijos de $\iota_{\mathfrak{C}}$ son los de \mathfrak{C} .

- b) Si el punto P está en el interior de la circunferencia, entonces $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ está en el exterior de la circunferencia. En efecto, si aplicamos la fórmula (2.1), se obtiene lo siguiente:

$$d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) = \frac{\rho^2}{d(O, P)} > \rho,$$

pues $d(O, P) < \rho$. Luego, $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ es un punto del exterior de la circunferencia sobre la semirrecta \overline{OP} .

- c) Si el punto P está fuera de la circunferencia, entonces $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ está en el interior de la circunferencia. Lo cual se deduce de igual manera que en el caso anterior.

En general, cuánto más cerca esté un punto del centro de la circunferencia, su inverso estará más alejado y cuanto más alejado, su inverso estará más cercano del centro.

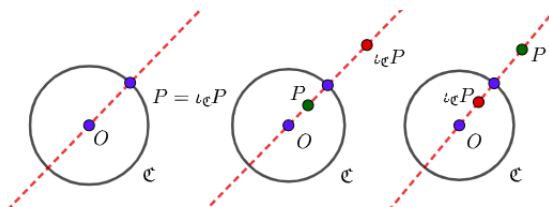


Figura 2.1: Inversiones respecto a una circunferencia.

Ver construcción en Geogebra: [Inversión de un punto respecto una circunferencia](#).

2.2. Imagen mediante una inversión, respecto de una circunferencia, de rectas y circunferencias

Analizaremos, a continuación, quién es la imagen mediante una inversión, respecto de una circunferencia \mathfrak{C} de centro O , de una recta o de una circunferencia cuando estas pasan por el centro de \mathfrak{C} . Para ello, distingamos los siguientes casos.

Proposición 2.1 *Si r es una recta que contiene al origen O , entonces*

$$\iota_{\mathfrak{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}.$$

Además,

$$\iota_{\mathfrak{C}}([P, Q] - \{O\}) = [\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)] - \{O\},$$

para todo P y Q alineados con O .

Demostración. Consideremos A y B los puntos de corte de la circunferencia \mathfrak{C} con la recta r . Entonces, $\iota_{\mathfrak{C}}(A) = A$ y $\iota_{\mathfrak{C}}(B) = B$, por la propiedad 2a de inversión.

Supongamos que X es un punto de $r - \{O\}$. Se tiene que $\iota_{\mathfrak{C}}(X)$ pertenece a la semirrecta $OX \subseteq r - \{O\}$, y por tanto,

$$\iota_{\mathfrak{C}}(r - \{O\}) \subseteq r - \{O\}.$$

Ya hemos concluido la prueba puesto que el otro contenido se obtiene como consecuencia de este último, teniendo en cuenta que $\iota_{\mathfrak{C}}^2 = Id$,

$$\iota_{\mathfrak{C}}(\iota_{\mathfrak{C}}(r - \{O\})) = r - \{O\} \subseteq \iota_{\mathfrak{C}}(r - \{O\}).$$

□

Seguidamente, estudiaremos cuál es la imagen de una circunferencia que pasa por O . Para ello, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.1 *Sean \mathfrak{C} una circunferencia y P, P', X e Y puntos de \mathfrak{C} .*

1. *Si X e Y son diametralmente opuestos, entonces el ángulo $\angle P$ del triángulo $\triangle PXY$ es un ángulo recto.*
2. *Si P' pertenece al mismo semiplano de P , respecto de la recta XY , entonces el ángulo $\angle P$ del triángulo $\triangle PXY$ coincide con el ángulo $\angle P'$ del triángulo $\triangle P'XY$.*

Demostración. En el primer caso, tenemos dos triángulos isósceles $\triangle OPX$ y $\triangle OPY$ (veáse Figura 2.2). Entonces, si $\angle P_1 = \angle OPY$ y $\angle P_2 = \angle OPX$, se tiene que, $\angle P_1 = \angle Y$ y $\angle P_2 = \angle X$. Así, considerando el triángulo $\triangle PXY$

$$\pi = \angle P + \angle X + \angle Y = \angle P + \angle P_1 + \angle P_2 = 2\angle P,$$

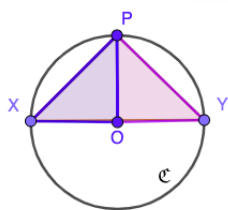


Figura 2.2

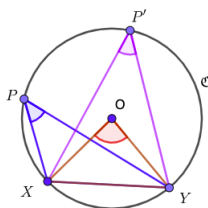


Figura 2.3

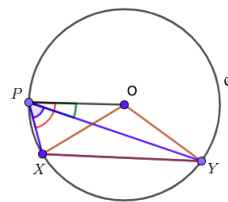


Figura 2.4

esto es,

$$\angle P = \frac{\pi}{2}.$$

Probaremos, a continuación, la segunda parte de la proposición. Para ello, basta demostrar que los ángulos de $\angle P$ y $\angle P'$ son iguales a la mitad del ángulo $\angle O$.

Consideremos los triángulos $\triangle PXY$ y $\triangle OXY$ (véase Figura 2.3). Queremos comparar el valor del ángulo $\angle XPY$ con el ángulo $\angle XOY$.

Tenemos dos triángulos isóceles $\triangle OXP$ y $\triangle OYP$ que verifican $\angle PXO = \angle XPO$ y $\angle OYP = \angle YPO$. Además, como la suma de los ángulos anteriores de ambos triángulos es un ángulo llano, se tiene que

$$2\angle XPO = \pi - \angle XOP, \quad 2\angle YPO = \pi - \angle YOP. \quad (2.2)$$

Ahora, nos encontramos exactamente en la situación de la Figura 2.4 (en otras situaciones la fórmula siguiente cambia pero la prueba se resuelve de manera análoga). Entonces, $\angle XPY = \angle XPO - \angle YPO$.

Aplicando (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned} 2\angle XPY &= -\angle XOP + \angle YOP = \angle XOY \\ 2\angle P &= 2\angle XPY = \angle XOY = \angle O. \end{aligned}$$

De manera análoga se probaría lo siguiente,

$$2\angle P' = 2\angle XP'Y = \angle XOY = \angle O.$$

En definitiva,

$$\angle P = \angle P' = \frac{\angle O}{2}.$$

□

Proposición 2.2 Sean \mathfrak{C} una circunferencia de centro O y radio ρ , y \mathfrak{C}' una circunferencia de centro O' que pase por O . Entonces,

$$\iota_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}' - \{O\}) = l, \quad (2.3)$$

donde l es la recta perpendicular a $O'O$, que pasa por los puntos de intersección de \mathfrak{C} y \mathfrak{C}' .

Demostración. La recta OO' corta a la circunferencia \mathfrak{C}' en dos puntos diametralmente opuestos, uno es O y el otro lo denotaremos por Y . Consideramos l la recta ortogonal a la recta OO' que pasa por $R = \iota_{\mathfrak{C}}(Y)$ como se observa en la Figura 2.5.

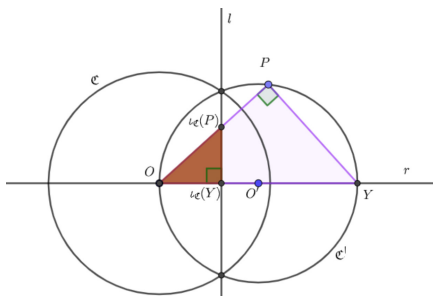


Figura 2.5: Inversión de una recta.

Dado un punto P en \mathfrak{C}' distinto de O e Y , veremos que $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ es el punto de corte de la recta OP y l .

Sabemos que existe un punto de corte de la recta OP y l pues en caso de ser OP paralela a l se tendría que OP sería ortogonal a la recta OO' . Por tanto, la recta OP sería tangente a \mathfrak{C}' y, por consiguiente, $O = P$, lo que contradice lo supuesto. Al punto de corte de la recta OP con l lo denotaremos P' . Veamos que $P' = \iota_{\mathfrak{C}}(P)$.

Como O, Y y P están en la circunferencia \mathfrak{C}' , entonces dichos puntos forman un triángulo rectángulo (ver Lema 2.1). Así, los triángulos $\triangle OYP$ y $\triangle OP'\iota_{\mathfrak{C}}(Y)$ son semejantes² ya que tienen dos ángulos iguales (el ángulo recto y el ángulo $\angle O$). Es por ello que, se tiene la siguiente relación entre sus lados,

$$\frac{d(O, P)}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Y))} = \frac{d(P, Y)}{d(P', \iota_{\mathfrak{C}}(Y))} = \frac{d(O, Y)}{d(O, P')}.$$

Y por tanto,

$$\rho^2 = d(O, Y) \cdot d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Y)) = d(O, P) \cdot d(O, P').$$

Además, como O, P', P están alineados y O no pertenece al segmento $[P, P']$, se deduce que

¹ Una recta es tangente a una circunferencia en un punto P , si y solo si, es perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por dicho punto.

² Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos que poseen dos ángulos iguales. Entonces, ambos triángulos son semejantes, esto es, todos los ángulos son iguales y sus lados guardan la misma proporción,

$$\frac{d(A, B)}{d(A', B')} = \frac{d(A, C)}{d(A', C')} = \frac{d(B, C)}{d(B', C')}.$$

$$P' = \iota_{\mathfrak{C}}(P). \tag{2.4}$$

Hemos probado entonces que,

$$\iota_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}' - \{O\}) \subseteq l.$$

Para demostrar la otra inclusión, consideramos P' perteneciente a l y P el punto de intersección de la recta OP' con \mathfrak{C}' . Por lo demostrado previamente, se tiene (2.4). Por tanto,

$$\iota_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}' - \{O\}) = l.$$

Además, si P_1 y P_2 pertenecen a la intersección de \mathfrak{C} con \mathfrak{C}' , entonces $\iota_{\mathfrak{C}}(P_1) = P_1$ y $\iota_{\mathfrak{C}}(P_2) = P_2$. Así, P_1 y P_2 pertenecen a l . □

Este resultado permite dar una construcción geométrica de cómo obtener $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ para cualquier punto P en \mathfrak{C}' (véase Figuras 2.6 y 2.7).

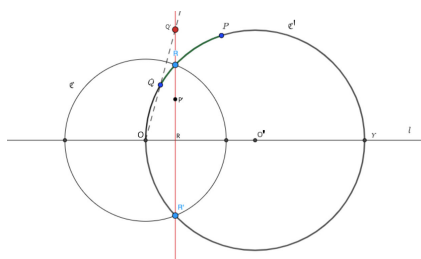


Figura 2.6: $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ punto de corte de la semirrecta \overline{OQ} y la recta r perpendicular a l .

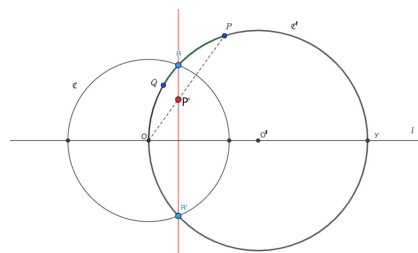


Figura 2.7: $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)$ intersección del segmento $[X, P]$ y la recta r perpendicular a l .

Construimos la recta l perpendicular a OO' que pasa por los puntos de intersección de ambas circunferencias, \mathfrak{C} y \mathfrak{C}' . Luego, $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ es el punto de intersección de PO con l . Puede ver la construcción en Geogebra: [Enlace](#).

Corolario 2.1 *Sea \mathfrak{C} una circunferencia de centro O . Si l es una recta que no pasa por O se tiene que*

$$\iota_{\mathfrak{C}}(l) = (\mathfrak{C}' - \{O\}), \tag{2.5}$$

donde \mathfrak{C}' es la circunferencia que tiene a O y $\iota_{\mathfrak{C}}(R)$ como puntos diametralmente opuestos, siendo R el punto de intersección de l y la recta perpendicular a l que pase por O .

Demostración. Consideremos la recta r perpendicular a l que pasa por O y sea \mathfrak{C}' la circunferencia que tiene como puntos diametralmente opuestos a O y a $\iota_{\mathfrak{C}}(R)$. Aplicando inversión a (2.3) y que $\iota_{\mathfrak{C}}^2 = Id$, se tiene que

$$\iota_{\mathfrak{C}}(l) = \mathfrak{C}' - \{O\}.$$

□

Veremos, a continuación, cómo se comporta $\iota_{\mathcal{C}}$ respecto de las circunferencias que no pasan por el centro de \mathcal{C} . Para abordar este análisis necesitamos recordar algunos resultados y conceptos de la geometría del plano.

Proposición 2.3 *Dada una circunferencia \mathcal{C} de centro O y radio ρ , consideramos dos rectas r y s que pasan por el punto P . Si A_1 y A_2 son los puntos de intersección de \mathcal{C} con r y B_1 y B_2 son los puntos de intersección de \mathcal{C} con s , entonces*

$$d(P, A_1) \cdot d(P, A_2) = d(P, B_1) \cdot d(P, B_2). \quad (2.6)$$

En otras palabras, el producto anterior no depende de las rectas r y s , solo depende del punto P y la circunferencia \mathcal{C} .

Demostración. Para probarlo supongamos que P no pertenece a la circunferencia y las rectas r y s son distintas. Visualicemos la prueba considerando, en primer lugar, P en el exterior de la circunferencia. Así, $A_1 \in [P, A_2]$ y $B_1 \in [P, B_2]$. Sea $H_{A_1B_1}^1$ el semiplano determinado por la recta A_1B_1 que contiene a P , entonces A_2 y B_2 están en el otro semiplano (véase Figura 2.8).

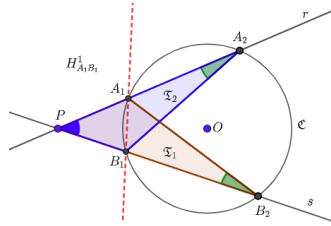


Figura 2.8

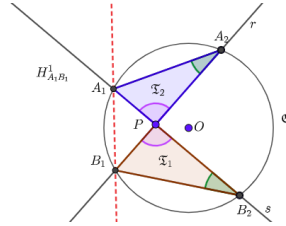


Figura 2.9

Entonces, los triángulos $\mathfrak{T}_1 = \Delta PA_1B_2$ y $\mathfrak{T}_2 = \Delta PB_1A_2$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, el ángulo en P y el ángulo $\angle A_1B_2B_1 = \angle A_1B_2P = \angle A_1A_2B_1 = \angle PA_2B_1$ (ver Lema 2.1). Por tanto, sus lados son proporcionales, esto es,

$$\frac{d(P, A_1)}{d(P, B_2)} = \frac{d(P, B_1)}{d(P, A_2)}.$$

Luego, se tiene la fórmula anunciada, es decir,

$$d(P, A_1) \cdot d(P, A_2) = d(P, B_1) \cdot d(P, B_2).$$

En el caso de que P esté en el interior de \mathcal{C} , (véase Figura 2.9), A_2 , B_2 y P están en el mismo semiplano. Entonces, aplicando el Lema 2.1, los triángulos $\mathfrak{T}_1 = \Delta PB_1B_2$ y $\mathfrak{T}_2 = \Delta PA_1A_2$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, el ángulo $\angle A_1A_2P = \angle B_1B_2P$ y el ángulo $\angle A_1PA_2 = \angle B_1PB_2$. Así, razonando como en el caso anterior, tenemos que (2.6) se satisface.

Si P pertenece a la circunferencia, entonces $A_1 = P = B_1$, lo que implica que (2.6) es evidente.

□

Este resultado permite introducir la definición de potencia de un punto respecto de una circunferencia.

Definición 2.2 La *potencia del punto P con respecto a la circunferencia \mathfrak{C}* , es el producto de sus distancias a cualquier par de puntos en la circunferencia que sean colineales con P . A este número lo denotamos por $\Pi_{\mathfrak{C}}(P)$.

Nótese que si la recta r es tangente a la circunferencia también se verifica la fórmula del teorema anterior donde $A_1 = A_2 = A$ (véase Figura 2.10). Luego,

$$d(P, A)^2 = d(P, B_1) \cdot d(P, B_2). \tag{2.7}$$

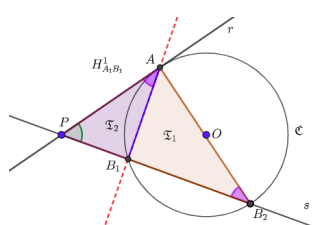


Figura 2.10

En efecto, si P es un punto fuera de la circunferencia \mathfrak{C} , tomamos los triángulos $\mathfrak{T}_1 = \triangle PAB_2$ y $\mathfrak{T}_2 = \triangle PBA_1$ que son semejantes porque tienen dos ángulos iguales, el ángulo en P y el ángulo $\angle AB_2P = \angle PAB_1$ (ver Lema 2.1). Así, razonando como en la prueba anterior, tenemos que (2.7) se satisface.

A continuación, recordemos las nociones de homotecia y reflexión central, que usaremos para describir la imagen de la inversión, respecto a la circunferencia \mathfrak{C} de centro O , de otra circunferencia cuyo centro no pase por O .

Definición 2.3 Sea O un punto del plano Π y k un número real mayor o igual que cero. Una *homotecia de centro O y razón k* es una aplicación biyectiva $\eta_{Ok} : \Pi \rightarrow \Pi$, tal que, a cada punto A le hace corresponder un punto $\eta_{Ok}(A) \in OA$ de modo que

$$d(O, \eta_{Ok}(A)) = kd(O, A),$$

y, si $A \neq O$, A y $\eta_{Ok}(A)$ pertenecen a la semirrecta \overline{OA} . El número k se llama razón de la homotecia y el punto O centro de la homotecia.

Definición 2.4 Una *reflexión central* de centro O es una isometría euclídea $\sigma_O : \Pi \rightarrow \Pi$, tal que:

1. $\sigma_O^2 = Id$,
2. O es el punto medio del segmento $[A, \sigma_O(A)]$.

Dada una circunferencia \mathfrak{C}' cualquiera con radio ρ' y centro O' , la imagen de \mathfrak{C}' mediante la homotecia η_{Ok} de centro O y razón k es otra circunferencia con centro en el punto homotético a O' y radio $k\rho'$, donde k es la razón de la homotecia. Por tanto, la circunferencia homotética tiene su centro en la semirrecta $O'\eta_{Ok}(O')$.

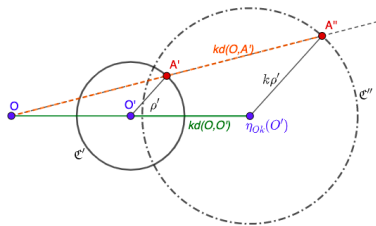


Figura 2.11: Imagen homotética de una circunferencia cuyo centro no coincide con el centro de la homotecia.

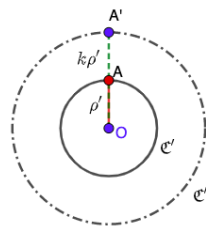


Figura 2.12: Imagen homotética de una circunferencia cuyo centro es el de la circunferencia.

Por otra parte, si σ_O es una reflexión central, la imagen de la circunferencia de centro O' es una nueva circunferencia con el mismo radio y centro $\sigma_O(O')$, tal que, O es el punto medio del segmento $[O', \sigma_O(O')]$.

Proposición 2.4 *Sea \mathcal{C} una circunferencia de centro O y radio ρ . Si \mathcal{C}' es una circunferencia que no pasa por O y $\Pi_{\mathcal{C}'}(O)$ es la potencia de O respecto de \mathcal{C}' , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es la circunferencia, obtenida como sigue:*

- I. Si O es un punto exterior a \mathcal{C}' , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \eta_{O, \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}}(\mathcal{C}')$, donde $\eta_{O, \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}}$ es la homotecia de centro O y razón $\frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}$.
- II. Si O es un punto interior a \mathcal{C}' , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}') = \sigma_O \circ \eta_{O, \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}}(\mathcal{C}')$ donde σ_O es la reflexión central de centro O .

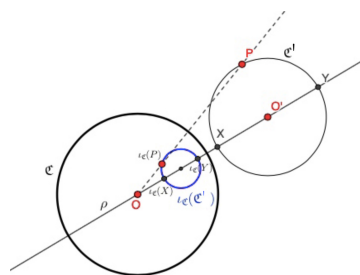


Figura 2.13: Inversión de \mathcal{C}' respecto de \mathcal{C} , cuyo centro es O exterior a \mathcal{C}' .

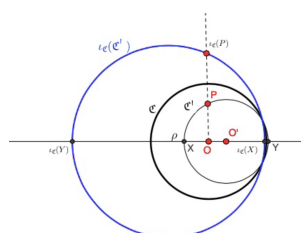


Figura 2.14: Inversión de \mathcal{C}' respecto de \mathcal{C} , cuyo centro es O interior a \mathcal{C}' .

Demostración. Sea P un punto cualquiera de \mathcal{C}' . Consideramos la recta que une O con P , entonces puede suceder que esta recta sea tangente a \mathcal{C}' o que corte la recta en otro punto Q . Sabemos por la definición de inversión que

$$d(O, P) \cdot d(O, \iota_{\mathcal{C}}(P)) = d(O, Q) \cdot d(O, \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = \rho^2.$$

De lo que se deduce, por la Proposición 2.3, que

$$\frac{d(O, \iota_{\mathcal{C}}(P))}{d(O, Q)} = \frac{\rho^2}{d(O, Q) \cdot d(O, P)} = \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}.$$

Luego, $d(O, \iota_{\mathcal{C}}(P)) = \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)} \cdot d(O, Q)$.

Asimismo, $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ pertenece a OP y O no pertenece al segmento $[P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$.

Hemos probado que si O es exterior a \mathcal{C}' , entonces $\iota_{\mathcal{C}}(P) = \eta_{O, \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}}(Q)$.

Por el contrario, si O es interior a \mathcal{C}' , entonces O pertenece al segmento $[P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$ y $\iota_{\mathcal{C}}(P) = \sigma_O \circ \eta_{O, \frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}}(Q)$. □

En cualquiera de los dos casos estudiados anteriormente, $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es una circunferencia con centro en la recta OO' .

Los resultados obtenidos en esta sección se pueden resumir en la siguiente tabla resumen. Consideremos \mathcal{C} y \mathcal{C}' circunferencias de centro O y O' , respectivamente. Además, puede ver la construcción en Geogebra: [Inversión](#).

	Recta r	Circunferencia
Pasa por O	$\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$	$\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$ recta perpendicular a OO' que pasa por $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$
No pasa por O	$\iota_{\mathcal{C}}(r)$ circunferencia que pasa por O	Si O es un punto exterior a \mathcal{C}' , $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ es la circunferencia \mathcal{C}'' homotética a \mathcal{C}' con centro en O y razón $\frac{\rho^2}{\Pi_{\mathcal{C}'}(O)}$.
		Si O es un punto interior a \mathcal{C}' debemos aplicar una reflexión central de centro O a la circunferencia homotética \mathcal{C}'' .

2.3. Inversión y métrica

Las inversiones no son isometrías euclídeas, pues no preservan la métrica euclídea. En lo que resta de capítulo, veremos algunas relaciones métricas que satisfacen las inversiones respecto de una circunferencia.

Proposición 2.5 *Sea \mathcal{C} una circunferencia de centro O y radio ρ . Consideremos P y Q dos puntos del plano no alineados con O . Entonces, los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle O\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ son semejantes.*

Demostración. Tenemos que $d(O, P) \cdot d(O, \iota_{\mathcal{C}}(P)) = d(O, Q) \cdot d(O, \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = \rho^2$.

Además, los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle O\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ tienen un ángulo común, el ángulo $\angle O$. Nótese que $O, P, \iota_{\mathcal{C}}(P)$ (respectivamente, $O, Q, \iota_{\mathcal{C}}(Q)$) están alineados.

Concluimos que ambos triángulos son semejantes³. \square

Con este resultado probemos la siguiente relación entre las distancias de puntos y de sus transformadas por la inversión.

Proposición 2.6 *Sea \mathfrak{C} una circunferencia de centro O y P, Q, R tres puntos distintos del plano, distintos de O . Entonces,*

$$\frac{d(P, R)}{d(Q, R)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(R))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(R))} \cdot \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}. \quad (2.8)$$

Demostración. Supongamos que P, R, O son tres puntos no alineados en el plano. Entonces, por la Proposición 2.5, los triángulos $\triangle OPR$ y $\triangle O\iota_{\mathfrak{C}}(P)\iota_{\mathfrak{C}}(R)$ son semejantes. Así que,

$$\frac{d(P, R)}{d(O, R)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(R))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}. \quad (2.9)$$

En el caso en el que P, R, O estén alineados, usando la Proposición 2.1, $\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)$ están en la recta PR . Luego, pueden darse dos situaciones:

- a) Que R esté en la misma semirrecta que \overline{OP} , entonces, $P \in [O, R]$ ó $R \in [O, P]$. Supongamos que $R \in [O, P]$ (del mismo modo se prueba el otro caso con los papeles de R y P intercambiados), luego $\iota_{\mathfrak{C}}(P) \in [O, \iota_{\mathfrak{C}}(R)]$. Así que,

$$d(P, R) = d(P, O) - d(O, R),$$

$$d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(R)) = d(\iota_{\mathfrak{C}}(R), O) - d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), O) = \frac{\rho^2}{d(O, R)} - \frac{\rho^2}{d(O, P)}.$$

Concluimos entonces,

$$\frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(R))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))} = \frac{\frac{\rho^2}{d(O, R)} - \frac{\rho^2}{d(O, P)}}{\frac{\rho^2}{d(O, P)}} = \frac{d(O, P) - d(O, R)}{d(O, R)} = \frac{d(P, R)}{d(O, R)}. \quad (2.10)$$

- b) Si R no está en la semirrecta entonces $O \in [P, R]$ y $O \in [\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)]$. Razonando de forma análoga, obtenemos (2.10).

En consecuencia, hemos probado que la ecuación (2.9) es cierta para toda terna de puntos P, R, O . De manera semejante, se probaría lo siguiente,

$$\frac{d(Q, R)}{d(O, R)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(R))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}. \quad (2.11)$$

En definitiva, si dividimos las ecuaciones (2.10) entre (2.11) se obtiene la fórmula que buscábamos, esto es,

$$\frac{d(P, R)}{d(Q, R)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(R))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(R))} \cdot \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}.$$

\square

³ Sean los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, tal que, el ángulo $\angle A = \angle A'$. Si $\frac{d(A, B')}{d(A, B)} = \frac{d(A, C')}{d(A, C)}$, entonces los triángulos son semejantes.

Axiomática de la geometría hiperbólica del plano

En este capítulo introduciremos la geometría hiperbólica del plano, usando como modelo el semiplano respecto de una recta del plano prefijada. Esta geometría satisface todos los axiomas de la geometría euclídea menos el axioma de las paralelas.

3.1. La métrica hiperbólica

Comenzaremos introduciendo un modelo para el plano hiperbólico.

Fijamos una recta en \mathbb{H} que denotamos como l_∞ . La geometría hiperbólica se modeliza sobre uno de los semiplanos respecto de la recta l_∞ , al que denotamos \mathbb{H} y denominaremos *plano hiperbólico*.

A continuación, vamos a construir una métrica sobre \mathbb{H} . Para definir dicha métrica vamos a distinguir dos casos:

1. Si P, Q pertenecen a \mathbb{H} y la recta PQ es perpendicular a l_∞ .
2. Si P, Q pertenecen a \mathbb{H} y la recta PQ no es perpendicular a l_∞ .

Nuestra métrica hiperbólica verifica estas dos importantes propiedades:

- a. Las semirrectas perpendiculares a l_∞ y las semicircunferencias con centro en l_∞ contenida en \mathbb{H} deberían ser las únicas rectas en \mathbb{H} .
- b. La distancia hiperbólica se incrementa a medida que nos acercamos a l_∞ .

Métrica si P, Q pertenecen a \mathbb{H} y la recta PQ es perpendicular a l_∞

Sea O el punto de intersección de PQ y l_∞ , la distancia hiperbólica de P a Q se define como

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right|.$$

Nótese que O no pertenece al plano hiperbólico \mathbb{H} y, por tanto, $d(Q, O) > 0$. Además, si $d(P, O) \geq d(Q, O)$ se tendría que $\frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \geq 1$ y, por consiguiente,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)}.$$

De lo contrario, si $d(P, O) < d(Q, O)$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log \frac{d(Q, O)}{d(P, O)}.$$

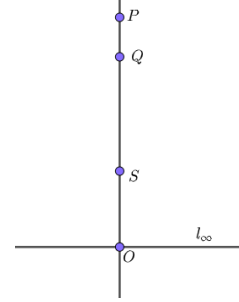


Figura 3.1

Algunas propiedades que se deducen de esta definición se recogen en la siguiente proposición.

Proposición 3.1 Sean P y Q dos puntos del plano hiperbólico \mathbb{H} , tal que, la recta PQ es perpendicular a l_∞ . Entonces,

- a. $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = 0$, si y sólo si, $P = Q$.
- b. Simétrica: $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(Q, P)$.
- c. Si $d(P, Q) = d(P', Q')$ para P' y Q' , en la disposición que se observa en la Figura 3.2, entonces

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) \geq d_{\mathbb{H}}(P', Q').$$

Esto implica que la distancia hiperbólica entre dos puntos equidistantes euclídeamente es mayor cuanto más cerca están los puntos de l_∞ .

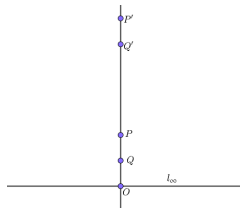


Figura 3.2

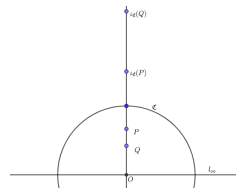


Figura 3.3

Demostración. a. En efecto, $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = 0$, si y solo si, $d(P, O) = d(Q, O)$. Esto último es análogo a que $P = Q$, pues P y Q pertenecen a la misma semirrecta respecto de O .

b. Se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right| = \left| \log \frac{d(Q, O)}{d(P, O)} \right| = d_{\mathbb{H}}(Q, P).$$

c. Por la disposición de los puntos se tiene que, $d(P', O) = d(P', P) + d(P, O)$.
Entonces,

$$\begin{aligned} d(Q', O) &= d(Q', Q) + d(Q, O) = d(Q', P) + d(P, Q) + d(Q, O) = \\ &= d(P, Q') + d(Q', P') + d(Q, O) = d(P, P') + d(Q, O). \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d(P', O)}{d(Q', O)} = \frac{d(P', P) + d(P, O)}{d(P, P') + d(Q, O)} \leq \frac{d(P, O)}{d(Q, O)}.$$

Por tanto, $d_{\mathbb{H}}(P', Q') \leq d_{\mathbb{H}}(P, Q)$. □

Veamos a continuación que tres puntos de una semirrecta en \mathbb{H} ortogonal a l_{∞} están hiperbólicamente alineados y que la inversión respecto una circunferencia centrada en l_{∞} preserva la métrica para los puntos de la perpendicular a l_{∞} , trazada desde su centro.

Proposición 3.2 Sean P, Q y S tres puntos distintos de \mathbb{H} sobre una semirrecta de \mathbb{H} ortogonal a l_{∞} , de modo que Q pertenece al segmento $[P, S]$. Entonces,

1. P, Q, S están hiperbólicamente alineados, esto es,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, S) = d_{\mathbb{H}}(P, S).$$

2. Si \mathfrak{C} es una circunferencia de centro $\{O\} = PQ \cap l_{\infty}$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P, Q).$$

Demostración. Comprobamos en primer lugar 1. Para ello suponemos que

$$d(P, O) \geq d(S, O)$$

(del mismo modo se prueba el caso contrario intercambiando los papeles de S y P). Como Q pertenece al segmento $[P, S]$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \quad y \quad d_{\mathbb{H}}(Q, S) = \log \frac{d(Q, O)}{d(S, O)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(P, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, S) &= \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} + \log \frac{d(Q, O)}{d(S, O)} = \\ &= \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \frac{d(Q, O)}{d(S, O)} = \log \frac{d(P, O)}{d(S, O)} = d_{\mathbb{H}}(P, S). \end{aligned}$$

Procedamos a demostrar 2. Nótese que $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ y $\iota_{\mathfrak{C}}(Q)$ pertenecen a la semirrecta \overline{OP} (ver Definición 1.4 y Figura 3.3). Por (2), como $d(O, P) \geq d(O, Q)$ se tiene que

$$d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) \leq d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q)). \quad (3.1)$$

Por otro lado, $d(O, P) \cdot d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P)) = d(O, Q) \cdot d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q)) = \rho^2$, donde ρ es el radio de la circunferencia \mathfrak{C} . Por consiguiente,

$$\frac{d(O, P)}{d(O, Q)} = \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}. \quad (3.2)$$

Así, teniendo en cuenta (3.1) y (3.2),

$$\log \frac{d(O, P)}{d(O, Q)} = \log \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))} = -\log \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))}.$$

Y por tanto,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(O, P)}{d(O, Q)} \right| = \left| -\log \frac{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(P))}{d(O, \iota_{\mathfrak{C}}(Q))} \right| = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)).$$

□

Métrica si P, Q pertenecen a \mathbb{H} y la recta PQ no es ortogonal a l_{∞}

La propiedad 2. de la Proposición 3.2 nos dará la clave para definir la métrica hiperbólica para el resto de puntos de \mathbb{H} , que no están en posición perpendicular a l_{∞} . La idea es buscar una circunferencia \mathfrak{C} centrada en l_{∞} , tal que, al hacer la inversión respecto de \mathfrak{C} a los puntos P y Q de \mathbb{H} considerados, la recta $\iota_{\mathfrak{C}}(P)\iota_{\mathfrak{C}}(Q)$ sea perpendicular a l_{∞} . Como primer paso en este objetivo, veremos un resultado que nos relaciona cualquiera dos puntos de \mathbb{H} con dos puntos que determinan una recta perpendicular a l_{∞} .

Proposición 3.3 *Dados los puntos P, Q en \mathbb{H} , tal que la recta PQ no es ortogonal a l_{∞} , existe una única circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} con centro en l_{∞} que pasa por P y Q .*

Demostración. Sea O la intersección de la recta mediatriz del segmento PQ con l_{∞} . Es claro que $d(O, P) = d(O, Q)$, por las propiedades de las mediatrices (ver Figura 3.4).

Cualquier circunferencia que pase por P y Q debe tener como centro un punto de la mediatriz generada por los puntos anteriores. Asimismo, como queremos que el centro de la circunferencia esté también en l_{∞} , entonces el punto O es el punto de intersección de la mediatriz generada por los puntos P y Q y l_{∞} . De este modo, la circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} es la única que tiene centro en l_{∞} y radio $d(O, P) = d(O, Q)$.

□

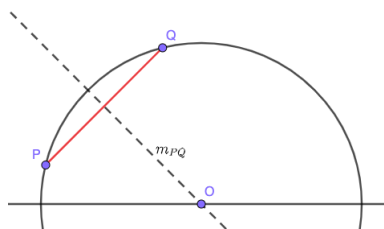


Figura 3.4: Construcción de la circunferencia que pasa por P y Q y su centro está en l_∞ .

Sean P, Q dos puntos de \mathbb{H} de forma que PQ no es ortogonal a l_∞ . Denotamos por \mathfrak{C}_{PQ} a la única circunferencia que tiene el centro en l_∞ y que pasa por P y Q . Sean X e Y los puntos de la intersección de $\mathfrak{C}_{PQ} \cap l_\infty$. Consideramos \mathfrak{C}_X una circunferencia cualquiera cuyo centro es X .

Usando la Proposición 2.2 deducimos que $\iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathfrak{C}_{PQ} - \{X\})$ es una recta perpendicular a $OX = l_\infty$. Por tanto, la recta $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ es perpendicular a l_∞ . Nótese que esta recta es la que pasa por la intersección de las circunferencias \mathfrak{C}_{PQ} y \mathfrak{C}_X .

Esto nos sugiere definir la distancia hiperbólica para dos puntos P y Q , con PQ recta no perpendicular a l_∞ , como sigue:

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = \left| \log \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), R)}{d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q), R)} \right|,$$

donde R es el punto de intersección de la recta $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ con l_∞ .

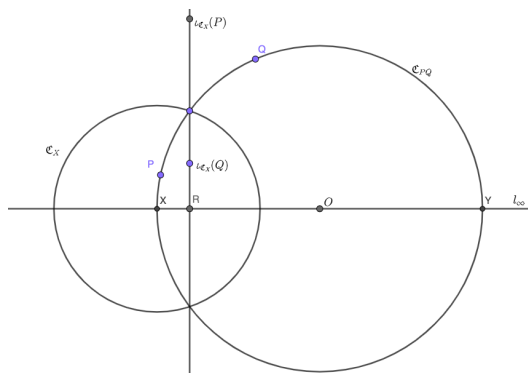


Figura 3.5

Usando que $\iota_{\mathfrak{C}_X}^2 = Id$ y la Proposición 2.6, se tiene entonces que

$$\frac{d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), R)}{d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q), R)} = \frac{d(P, \iota_{\mathfrak{C}_X}(R))}{d(Q, \iota_{\mathfrak{C}_X}(R))} \cdot \frac{d(X, Q)}{d(X, P)}.$$

Luego, como $\iota_{\mathfrak{C}_X}(R) = Y$ (ver Proposición 2.2), la fórmula de la distancia hiperbólica entre los puntos P y Q se reduce a

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(X, Q)}{d(X, P)} \right|.$$

En definitiva, se tiene que

Definición 3.1 Sean P y Q dos puntos del plano hiperbólico \mathbb{H} . La **distancia hiperbólica** entre P y Q se define de la siguiente manera:

1. Si PQ es ortogonal a l_{∞} ,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right|$$

2. Si PQ no es ortogonal a l_{∞} ,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(Q, X)}{d(P, X)} \right|$$

donde X e Y son los puntos de intersección de la única circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} con centro en l_{∞} , que pasa por P y Q .

Nótese que $d_{\mathbb{H}}(P, Q)$ no depende del radio de la circunferencia \mathfrak{C}_X elegida. De hecho, se tiene que

Teorema 3.1 Sea \mathfrak{C} una circunferencia cuyo centro está en l_{∞} . Entonces, $\iota_{\mathfrak{C}}$ preserva la distancia hiperbólica, esto es,

$$d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P, Q), \quad (3.3)$$

para todo P y Q en \mathbb{H} .

Demostración. Nótese que $\iota_{\mathfrak{C}}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ pues $O \in l_{\infty}$ (ver Definición 2.1).

Si PQ es una recta perpendicular a l_{∞} , tal que, $\{O\} = PQ \cap l_{\infty}$, ya hemos probado el resultado en la segunda parte de la Proposición 3.2.

Si PQ no es perpendicular a l_{∞} , entonces consideramos la única circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} centrada en un punto de l_{∞} que contiene a P y Q (ver Proposición 3.3), siendo X e Y los puntos de intersección de \mathfrak{C}_{PQ} con l_{∞} .

Sea O el centro de la circunferencia \mathfrak{C} . Supongamos que O es distinto de X e Y . Aplicando la Proposición 2.6,

$$\frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Y))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(Y))} \cdot \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), O)}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), O)}, \quad \frac{d(Q, X)}{d(P, X)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(X))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(X))} \cdot \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), O)}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), O)}.$$

Luego,

$$\frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(Q, X)}{d(P, X)} = \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(Y))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(Y))} \cdot \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}}(Q), \iota_{\mathfrak{C}}(X))}{d(\iota_{\mathfrak{C}}(P), \iota_{\mathfrak{C}}(X))}. \quad (3.4)$$

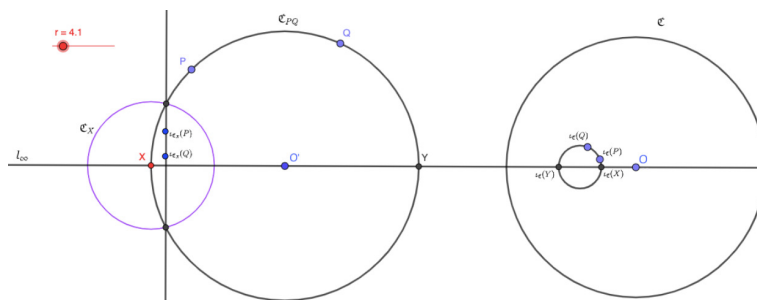


Figura 3.6: Inversión de \mathcal{C}_{PQ} respecto \mathcal{C} y \mathcal{C}_X , con PQ no perpendicular a l_∞ .

Por la Proposición 2.4, $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{PQ})$ es una circunferencia con centro en l_∞ que contiene a $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ y $\iota_{\mathcal{C}}(Q)$. Esto prueba que,

$$\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{PQ}) = \mathcal{C}_{\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)}. \tag{3.5}$$

Por consiguiente, como $\iota_{\mathcal{C}}(l_\infty - \{O\}) = l_\infty - \{O\}$, se tiene que $\iota_{\mathcal{C}}(X)$ y $\iota_{\mathcal{C}}(Y)$ son los puntos de intersección de l_∞ con $\mathcal{C}_{\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)}$. Así, de (3.4) deducimos que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)).$$

Ahora, supongamos que O coincide con X o Y , como se observa en la Figura 3.7 (caso $Y = O$). En este caso, $\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ es perpendicular a l_∞ . Así que, usando que $\iota_{\mathcal{C}}^2 = Id$ y la Proposición 3.2, deducimos (3.3).

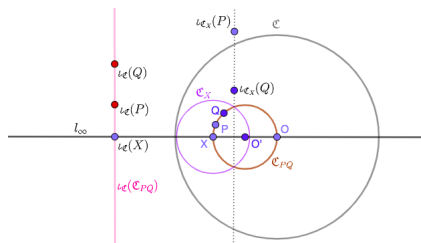


Figura 3.7: Inversión de \mathcal{C}_{PQ} , respecto \mathcal{C} y \mathcal{C}_X , con PQ no perpendicular a l_∞ (con $O = Y$).

Por último, si PQ es perpendicular a l_∞ pero O no pertenece a $PQ \cap l_\infty$, entonces $\iota_{\mathcal{C}}(PQ)$ es una circunferencia centrada en l_∞ (véase Corolario 2.1). Y por tanto, $\iota_{\mathcal{C}}(P)\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ no es perpendicular a l_∞ . Así,

$$d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathcal{C}}^2(P), \iota_{\mathcal{C}}^2(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P, Q).$$

□

Ver construcción en Geogebra: [Métrica Hiperbólica](#).

3.2. Expresión analítica de la métrica

Modelizamos el plano hiperbólico en \mathbb{C} , como el subconjunto

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}z > 0\} \subset \mathbb{C}.$$

Consideramos $P = z_1$ y $Q = z_2$ dos puntos de \mathbb{H} . Si la recta PQ es perpendicular a l_∞ , se tiene que los puntos reales $\text{Re}z_1, \text{Re}z_2$ de z_1 y z_2 , respectivamente, coinciden. Luego, la distancia hiperbólica de P a Q es

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right| = \left| \log \frac{|Imz_1|}{|Imz_2|} \right| = |\log|Imz_1| - \log|Imz_2||$$

donde $Im z_i$ es la parte imaginaria de z_i . Ahora, veamos la expresión analítica de la métrica hiperbólica, sin la restricción que la recta PQ sea perpendicular a l_∞ . Previamente mostraremos el siguiente lema.

Lema 3.1 Sean P y Q dos puntos del plano hiperbólico y P_0 y Q_0 sus proyecciones ortogonales sobre l_∞ . Entonces,

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(P, Q) = 1 + \frac{d(P, Q)^2}{2 \cdot d(P_0, P) \cdot d(Q_0, Q)}. \tag{3.6}$$

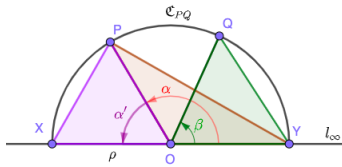


Figura 3.8

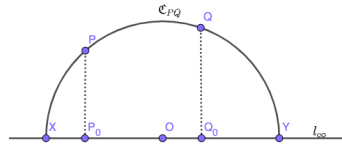


Figura 3.9

Demostración. Supongamos que la recta PQ no es perpendicular a l_∞ . Sea la circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} que pasa por P y Q y su centro O está en l_∞ . Denotamos por X e Y los puntos de corte de \mathfrak{C}_{PQ} con l_∞ . Consideramos los triángulos $\triangle OPY$ y $\triangle OQY$ (obsérvese Figura 3.8). Por la fórmula del coseno¹ para el ángulo α' con vértice O del triángulo $\triangle OPX$, se tiene que

$$d(X, P)^2 = \rho^2 + \rho^2 - 2\rho^2 \cos\alpha',$$

donde ρ es el radio de \mathfrak{C}_{PQ} .

Como $\alpha + \alpha'$ es un ángulo llano, $d(X, P)^2 = 2\rho^2(1 + \cos\alpha)$. Además, aplicando de nuevo el Teorema del coseno al triángulo $\triangle OPY$, se tiene que $d(Y, P)^2 = 2\rho^2(1 - \cos\alpha)$. Luego,

¹ Sea un triángulo cualquiera con lados a, b y c , y con ángulos interiores α, β, σ (son los ángulos opuestos a los lados, respectivamente). Entonces, se cumplen las relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta), \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\sigma).$$

$$d(X, P)^2 \cdot d(Y, P)^2 = 4\rho^4 \operatorname{sen}^2 \alpha.$$

Así que,

$$d(X, P) \cdot d(Y, P) = 2\rho^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

Razonando de la misma manera para el ángulo β , correspondiente al triángulo $\triangle OQY$, llegamos a que

$$d(X, Q) \cdot d(Y, Q) = 2\rho^2 \operatorname{sen} \beta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & (d(X, P) \cdot d(Y, Q) - d(Y, P) \cdot d(X, Q))^2 = \\ &= 4\rho^4((1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta) + (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta) - 2\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) = \\ &= 4\rho^4(2 - 2\cos(\alpha - \beta)) = 4\rho^2 d(P, Q)^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por otro lado, como P_0 y Q_0 son las proyecciones ortogonales de P y Q en l_∞ (véase Figura 3.9), se tiene que

$$\begin{aligned} d(P_0, P) &= \rho \operatorname{sen} \alpha = \frac{d(X, P) \cdot d(Y, P)}{2\rho}, \\ d(Q_0, Q) &= \rho \operatorname{sen} \beta = \frac{d(X, Q) \cdot d(Y, Q)}{2\rho}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Supongamos que $d(Y, P) \geq d(Y, Q)$ y que $d(X, Q) \geq d(X, P)$ (en cualquier otro caso el razonamiento es análogo). Consideremos la fórmula de la distancia hiperbólica (Definición 3.1), con PQ no ortogonal a l_∞ , y la definición de la función coseno hiperbólico, esto es,

$$\operatorname{cosh} d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} d_{\mathbb{H}}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{d(Y, P)}{d(Y, Q)} \cdot \frac{d(X, Q)}{d(X, P)} + \frac{d(Y, Q)}{d(Y, P)} \cdot \frac{d(X, P)}{d(X, Q)} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{(d(X, P) \cdot d(Y, Q) - d(Y, P) \cdot d(X, Q))^2}{d(X, P) \cdot d(Y, Q) \cdot d(Y, P) \cdot d(X, Q)}. \end{aligned}$$

Aplicando (3.7) y (3.8),

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} d_{\mathbb{H}}(P, Q) &= 1 + \frac{4\rho^2 d(P, Q)^2}{2 \cdot d(X, P) \cdot d(Y, Q) \cdot d(Y, P) \cdot d(X, Q)} = \\ &= 1 + \frac{4\rho^2 d(P, Q)^2}{8\rho^2 d(P_0, P) \cdot d(Q_0, Q)} = 1 + \frac{d(P, Q)^2}{2 \cdot d(P_0, P) \cdot d(Q_0, Q)}. \end{aligned}$$

Se tiene la fórmula para P y Q perteneciente a la circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} con centro O en l_∞ .

Si la recta PQ es ortogonal a l_∞ , entonces $P_0 = Q_0 = O$. Se tiene

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}}(P, Q) &= \frac{1}{2} \left(\frac{d(P, O)}{d(Q, O)} + \frac{d(Q, O)}{d(P, O)} \right) = \\ &= 1 + \frac{(d(P, O) - d(Q, O))^2}{2 \cdot d(O, P) \cdot d(O, Q)} = 1 + \frac{d(P, Q)^2}{2 \cdot d(P_0, P) \cdot d(Q_0, Q)}. \end{aligned}$$

□

Si $P = z_1$ y $Q = z_2$ son puntos de \mathbb{H} y la recta PQ no es perpendicular a l_∞ , entonces sus proyecciones ortogonales sobre l_∞ son $P_0 = Rez_1$ y $Q_0 = Rez_2$. Usando el Lema 3.1,

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Imz_1Imz_2}.$$

Vamos a comprobar que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} (e^{d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)} + e^{-d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2)}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|} + \frac{|z_1 - \bar{z}_2| - |z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2| + |z_1 - z_2|} \right) = \\ &= 1 + \frac{(2|z_1 - z_2|)^2}{2(|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)} = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2Imz_1Imz_2}. \end{aligned}$$

3.3. Axiomas de la geometría hiperbólica

A continuación, veremos que $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ satisface los axiomas de la geometría euclídea salvo el axioma del paralelismo.

Axioma 1: Espacio métrico hiperbólico

Comencemos demostrando el primer axioma para $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

Axioma 1 $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ es un espacio métrico.

Demostración. Si P, Q pertenecen a \mathbb{H} y la recta PQ es perpendicular a l_∞ , se deduce por las dos primeras propiedades de la Proposición 3.1 que:

- a. $d_{\mathbb{H}}(P, Q) \geq 0$. Además, $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = 0$, si y solo si, $P = Q$.
- b. Simétrica: $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(Q, P)$.

Si PQ no es perpendicular a l_∞ , entonces consideramos la única circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} centrada en un punto de l_∞ que contiene a P y Q (ver Proposición 3.3). Sean X e Y los puntos de intersección de \mathfrak{C}_{PQ} con l_∞ , y \mathfrak{C}_X una circunferencia de centro X . Entonces, la recta $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ es perpendicular a l_∞ y

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)).$$

Usando la biyectividad de $\iota_{\mathfrak{C}_X}$ deducimos que para cualquier P, Q de \mathbb{H} se satisface: $d_{\mathbb{H}}(P, Q) \geq 0$, $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = 0$, si y solo si, $P = Q$, y la propiedad simétrica de la métrica.

Nos queda demostrar la desigualdad triangular, esto es,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) \leq d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q),$$

para todo P, R, Q perteneciente a \mathbb{H} . Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si P, Q, R están alineados y PQ es perpendicular a l_∞ , de modo que Q pertenece al segmento $[P, S]$, entonces por la Proposición 3.2,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, S) = d_{\mathbb{H}}(P, S).$$

- Si PQ es perpendicular a l_∞ , pero R no está alineado con P y Q , consideramos la proyección ortogonal R' de R sobre PQ y la recta perpendicular a PQ que pase por R' (ver Figura 3.10). Obsérvese que

$$d(P, R') \leq d(P, R) \quad \text{y} \quad d(Q, R') \leq d(Q, R).$$

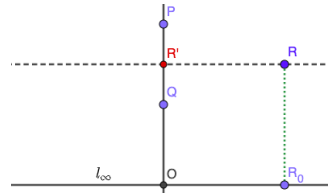


Figura 3.10

Usando el Lema 3.1,

$$\begin{aligned} \cosh d_{\mathbb{H}}(P, R') &\leq \cosh d_{\mathbb{H}}(P, R) \\ \cosh d_{\mathbb{H}}(Q, R') &\leq \cosh d_{\mathbb{H}}(Q, R) \end{aligned}$$

Como $d(O, R') = d(R_0, R)$, con R_0 la proyección ortogonal sobre l_∞ de R , y teniendo en cuenta que la función coseno hiperbólico es monótona creciente, deducimos por el Lema 3.1 que

$$d_{\mathbb{H}}(P, R') \leq d_{\mathbb{H}}(P, R) \quad y \quad d_{\mathbb{H}}(Q, R') \leq d_{\mathbb{H}}(Q, R).$$

Entonces,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, R') + d_{\mathbb{H}}(R', Q) \leq d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(Q, R).$$

- Supongamos ahora que P, Q, R son puntos cualesquiera de \mathbb{H} , tal que, P y Q no determinan una recta ortogonal a l_∞ . Entonces, consideramos la circunferencia \mathfrak{C}_{PQ} con centro en l_∞ que pasa por P y Q y corta a dicha recta en X e Y . Usando el caso anterior

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) \leq d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(R)) + d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(R), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)),$$

siendo \mathfrak{C}_X una circunferencia de centro en X . Concluimos entonces del Teorema 3.1 que,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) \leq d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q).$$

□

Axioma 2: Rectas hiperbólicas

Proposición 3.4 Sean P y Q dos puntos, tal que, la recta PQ es perpendicular a l_∞ . Entonces,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q), \quad (3.9)$$

si y solo si, R pertenece al segmento $[P, Q]$.

Demostración. Si R pertenece al segmento $[P, Q]$, entonces por la Proposición 3.2, P, Q, R están hiperbólicamente alineados.

Recíprocamente, si satisface (3.9) y consideramos R' la proyección ortogonal del punto R en la recta PQ , se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, R') + d_{\mathbb{H}}(R', Q).$$

Así,

$$d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, R') + d_{\mathbb{H}}(R', Q). \quad (3.10)$$

Como $d(P, R') \leq d(P, R)$ y $d(O, R') = d(R_0, R)$ (véase Figura 3.11), entonces

$$1 + \frac{d(P, R')^2}{2 \cdot d(O, P) \cdot d(O, R')} \leq 1 + \frac{d(P, R)^2}{2 \cdot d(O, P) \cdot d(R_0, R)}$$

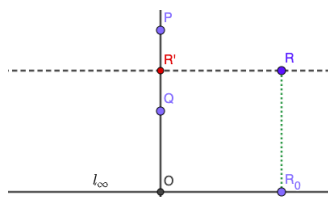


Figura 3.11

Luego, usando el Lema 3.1,

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(P, R') \leq \cosh d_{\mathbb{H}}(P, R).$$

Además, sabemos que la función coseno hiperbólico es monótona creciente. Luego, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, R') \leq d_{\mathbb{H}}(P, R). \quad (3.11)$$

De igual forma deducimos que

$$d_{\mathbb{H}}(Q, R') \leq d_{\mathbb{H}}(Q, R). \quad (3.12)$$

Ahora, teniendo en cuenta (3.10), (3.11) y (3.12), podemos concluir que²

$$d_{\mathbb{H}}(P, R') = d_{\mathbb{H}}(P, R), \quad d_{\mathbb{H}}(Q, R') = d_{\mathbb{H}}(Q, R).$$

Luego, usando de nuevo el Lema 3.1, deducimos,

$$1 + \frac{d(P, R')^2}{2 \cdot d(O, P) \cdot d(O, R')} = 1 + \frac{d(P, R)^2}{2 \cdot d(O, P) \cdot d(R_0, R)},$$

$$1 + \frac{d(Q, R')^2}{2 \cdot d(O, Q) \cdot d(O, R')} = 1 + \frac{d(Q, R)^2}{2 \cdot d(O, Q) \cdot d(R_0, R)}.$$

Por tanto,

$$d(P, R) = d(P, R'), \quad d(Q, R) = d(Q, R').$$

Nota que $d(O, R') = d(R_0, R)$. Así, $R = R'$ y

$$d(P, Q) = d(P, R') + d(R', Q) = d(P, R) + d(R, Q),$$

y por tanto, R pertenece al segmento $[P, Q]$. □

Proposición 3.5 Sean P y Q dos puntos, tal que, la recta PQ no es perpendicular a l_{∞} . Un punto R de \mathbb{H} pertenece a la semicircunferencia $\mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$ centrada en un punto de l_{∞} , si y solamente si,

$$d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, Q). \quad (3.13)$$

² Sean a, b, c y d números positivos. Si $a + b = c + d$, tal que, $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que R pertenece a \mathfrak{C}_{PQ} . Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(R, Q) &= \left(\log \frac{d(P, Y)}{d(R, Y)} \cdot \frac{d(R, X)}{d(P, X)} \right) + \left(\log \frac{d(R, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(Q, X)}{d(R, X)} \right) = \\ &= \log \frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(Q, X)}{d(P, X)} = d_{\mathbb{H}}(P, Q). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si se satisface (3.13) y X es uno de los puntos de intersección de \mathfrak{C}_{PQ} con l_{∞} , entonces, usando que P , Q y R están hiperbólicamente alineados, por el Teorema 3.1,

$$d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(R)) + d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(R), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)),$$

donde \mathfrak{C}_X es una circunferencia centrada en X .

Por otro lado, sabemos que la recta $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ es perpendicular a l_{∞} . Aplicando la Proposición 3.4, deducimos que $\iota_{\mathfrak{C}_X}(R)$ pertenece al segmento $[\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)]$.

Además, por la Proposición 2.2, $\iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathfrak{C}_{PQ} - \{X\})$ es la recta r perpendicular a l_{∞} , que pasa por $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)$ y $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$. Y como $\iota_{\mathfrak{C}_X}^2 = Id$, concluimos que

$$\mathfrak{C}_{PQ} - \{X\} = \iota_{\mathfrak{C}_X}(r).$$

Así,

$$R = \iota_{\mathfrak{C}_X}(R) \in \mathfrak{C}_{PQ} - \{X\}.$$

□

Como consecuencia de las Proposiciones 3.4 y 3.5, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1 Sean P, Q puntos del plano hiperbólico \mathbb{H} .

1. Si PQ es una recta perpendicular a l_{∞} , entonces $r_{\mathbb{H}} := PQ \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica que pasa por P y Q .
2. Si PQ no es una recta perpendicular a l_{∞} , entonces $r_{\mathbb{H}} = \mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$ es una recta hiperbólica, donde \mathfrak{C}_{PQ} es la circunferencia con centro en l_{∞} que contiene a P y Q .
3. Además, estas son las únicas rectas hiperbólicas posibles.

Concluimos que la geometría hiperbólica verifica el Axioma 2 de la geometría euclídea, esto es,

Axioma 2 El plano hiperbólico tiene como mínimo tres puntos no alineados. Además, si P y Q son dos puntos distintos de \mathbb{H} , entonces existe una única recta hiperbólica, tal que, P y Q pertenecen a ella.

Asimismo, a partir del Axioma 2 se puede introducir la noción de segmento hiperbólico.

Definición 3.2 Si P y Q son dos puntos de \mathbb{H} , entonces el **segmento hiperbólico** con extremo P y Q se define como el conjunto

$$[P, Q]_{\mathbb{H}} = \{R \in \mathbb{H} / d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P, R) + d_{\mathbb{H}}(Q, R)\}.$$

Axioma 3: Regla graduada hiperbólica

Como en el caso euclídeo, el Axioma 3 nos permite asignar a cada recta hiperbólica una regla graduada hiperbólica que no es única.

Axioma 3 En el plano hiperbólico \mathbb{H} , para cualquier recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}}$, existe una regla graduada $\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}$, esto es, una aplicación biyectiva

$$\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}: r_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = | \mathfrak{R}_{\mathbb{H}}(P) - \mathfrak{R}_{\mathbb{H}}(Q) |$, con P y Q en \mathbb{H} .

Demostración. Sea $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$, donde r es una recta perpendicular a l_{∞} (véase Figura 3.12). Entonces, podemos encontrar una regla graduada euclídea,

$$\mathfrak{R}: r \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para todo P y Q en r , se cumple $d(P, Q) = | \mathfrak{R}(P) - \mathfrak{R}(Q) |$, verificando que $\mathfrak{R}(O) = 0$, $\mathfrak{R}(P) > 0$ y $\mathfrak{R}(Q) < 0$. Luego, definimos la aplicación

$$\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}: r_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

como $\mathfrak{R}_{\mathbb{H}} = | \log \mathfrak{R} |$. Entonces, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = | \log d(P, O) - \log d(Q, O) | = | \log \mathfrak{R}(P) - \log \mathfrak{R}(Q) | = | \mathfrak{R}_{\mathbb{H}}(P) - \mathfrak{R}_{\mathbb{H}}(Q) |.$$

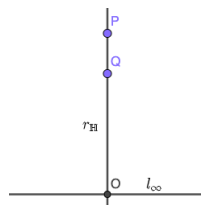


Figura 3.12: $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$ recta hiperbólica perpendicular a l_{∞} que contiene a P y Q .

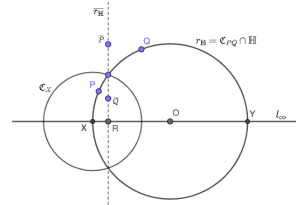


Figura 3.13: La inversión de $r_{\mathbb{H}} = \mathcal{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$ es $\bar{r}_{\mathbb{H}}$.

Ahora, tomemos la recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}} = \mathcal{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$, donde \mathcal{C}_{PQ} es una circunferencia centrada en un punto de l_{∞} que contiene a los puntos P y Q (véase

Figura 3.13). Consideremos X uno de los puntos de intersección de \mathfrak{C}_{PQ} con l_∞ . Sea \mathfrak{C}_X una circunferencia centrada en X . Por la Proposición 2.2, $\iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H} - \{X\}) = \overline{r_{\mathbb{H}}}$ es la recta hiperbólica perpendicular a l_∞ . De esta manera, se tiene que

$$\iota_{\mathfrak{C}_X}(\overline{r_{\mathbb{H}}}) = \mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H} - \{X\}.$$

Así, para cualquier P y Q perteneciente a la recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}} = \mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = |\mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)) - \mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q))|,$$

donde $\mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}$ es la regla hiperbólica asociada a $\overline{r_{\mathbb{H}}}$.

Por tanto, la regla hiperbólica para $\mathfrak{C}_{PQ} \cap \mathbb{H}$ es

$$\mathfrak{R}_{\mathbb{H}} = \mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}) = |\log(\mathfrak{R}'_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}))|.$$

□

Axioma 4: Separación en el plano hiperbólico

Comprobamos ahora el axioma de separación para el plano hiperbólico.

Axioma 4 *Sea una recta $r_{\mathbb{H}}$ de \mathbb{H} , entonces existe dos subconjuntos $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1$ y $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2$ de \mathbb{H} que satisfacen*

1. $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1 \cup \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2 = \mathbb{H} - r_{\mathbb{H}}$,
2. $\forall P, Q \in \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i \Rightarrow [P, Q]_{\mathbb{H}} \subseteq \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$,
3. Si $P \in \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$ y $Q \in \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^j$ con $i \neq j \Rightarrow [P, Q]_{\mathbb{H}} \cap r_{\mathbb{H}} \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$, donde r es una recta perpendicular a l_∞ . Sean \mathcal{H}_r^1 y \mathcal{H}_r^2 los dos semiplanos inducidos por r en el plano euclídeo. Consideremos los subconjuntos de \mathbb{H} ,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1 &= \mathcal{H}_r^1 \cap \mathbb{H}, \\ \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2 &= \mathcal{H}_r^2 \cap \mathbb{H}.\end{aligned}$$

Nótese que ambos semiplanos hiperbólicos satisfacen las condiciones del axioma.

1. Es claro que $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1 \cup \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2 = \mathbb{H} - r_{\mathbb{H}}$,
2. Para todo P y Q en $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$, se tiene que $[P, Q]_{\mathbb{H}} = [P, Q] \subseteq \mathcal{H}_r^i \cap \mathbb{H} = \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$,
3. Si $P \in \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1$ y $Q \in \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2$, entonces $[P, Q]_{\mathbb{H}} \cap r_{\mathbb{H}} = [P, Q] \cap r \neq \emptyset$.

Estudiemos ahora el caso, cuando la recta hiperbólica es $r_{\mathbb{H}} = \mathfrak{C} \cap \mathbb{H}$ con \mathfrak{C} una circunferencia centrada en un punto de l_∞ . Consideremos X uno de los puntos de intersección de \mathfrak{C} con l_∞ . Entonces, por la Proposición 2.2, $\iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathfrak{C} - \{X\}) = \overline{r}$ es una recta perpendicular a l_∞ . De esta manera, se tiene que

$$\iota_{\mathfrak{C}_X}(\bar{r}) = \mathfrak{C} - \{X\}.$$

Entonces, los semiplanos

$$\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i = \iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^i),$$

satisfacen las condiciones del Axioma de Separación. En efecto,

1. Se verifica que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1 \cup \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2 &= \iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^1) \cup \iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^2) = \iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^1 \cup \mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^2) = \\ &= \iota_{\mathfrak{C}_X}(\mathbb{H} - \bar{r} \cap \mathbb{H}) = \mathbb{H} - \mathfrak{C} \cap \mathbb{H} = \mathbb{H} - r_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

2. Para todo P y Q en $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$, existen $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)$, $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ pertenecientes a $\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^i$. Así que, $[\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)] \subseteq \mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^i$. Lo que implica que $\iota_{\mathfrak{C}_X}([\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)]) \subseteq \mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^i$. La demostración se concluye teniendo en cuenta el Teorema 3.1 y que $\iota_{\mathfrak{C}_X}^2 = Id$,

$$\iota_{\mathfrak{C}_X}([\bar{P}, \bar{Q}]) = [\iota_{\mathfrak{C}_X}(\bar{P}), \iota_{\mathfrak{C}_X}(\bar{Q})], \quad (3.14)$$

para todo \bar{P} y \bar{Q} en Π .

3. Si P pertenece a $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^1$ y Q pertenece a $\mathcal{H}_{r_{\mathbb{H}}}^2$, entonces, $\iota_{\mathfrak{C}_X}(P)$ pertenece a $\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^1$ y $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ a $\mathcal{H}_{\bar{r} \cap \mathbb{H}}^2$. Concluimos que $[\iota_{\mathfrak{C}_X}(P), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)] \cap (\bar{r} \cap \mathbb{H}) \neq \emptyset$. Aplicando $\iota_{\mathfrak{C}_X}$ y teniendo en cuenta (3.14), deducimos que

$$[P, Q]_{\mathbb{H}} \cap r_{\mathbb{H}} \neq \emptyset.$$

□

Axioma 5: Existencia de isometrías hiperbólicas

Definición 3.3 Una *isometría hiperbólica* es una aplicación biyectiva $\psi: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ que preserva la distancia hiperbólica, esto es, $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\psi(P), \psi(Q))$ para cualquiera puntos P, Q perteneciente a \mathbb{H} .

A continuación, se muestran dos lemas que serán necesario para la prueba del Axioma 5.

Lema 3.2 Sea $r_{\mathbb{H}}$ una recta hiperbólica, y P y Q dos puntos distintos de $r_{\mathbb{H}}$, tal que, $PQ \cap l_{\infty}$ es distinto de vacío. Entonces, existe una circunferencia \mathfrak{C}' , tal que, $\iota_{\mathfrak{C}'}(r_{\mathbb{H}}) = r_{\mathbb{H}}$.

Además, dado P y Q en $r_{\mathbb{H}}$, se tiene que $\iota_{\mathfrak{C}'}(P) = Q$ y $\iota_{\mathfrak{C}'}(Q) = P$.

Demostración. Sea $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$, donde r es una recta perpendicular a l_{∞} . Tomamos O' el punto intersección entre r y l_{∞} , como se observa en la Figura 3.14. Consideramos la circunferencia \mathfrak{C}' de centro O' y radio $\rho = \sqrt{d(P, O') \cdot (Q, O')}$.

Entonces, por la Proposición 2.1,

$$\iota_{\mathcal{C}'}(r - \{O'\}) = r - \{O'\},$$

lo que implica que, $\iota_{\mathcal{C}'}(r_{\mathbb{H}}) = r_{\mathbb{H}}$. Además,

$$\begin{aligned} d(\iota_{\mathcal{C}'}(P), O') \cdot d(P, O') &= \rho^2, \\ d(\iota_{\mathcal{C}'}(Q), O') \cdot d(Q, O') &= \rho^2. \end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$\iota_{\mathcal{C}'}(P) = Q \quad \text{y} \quad \iota_{\mathcal{C}'}(Q) = P.$$

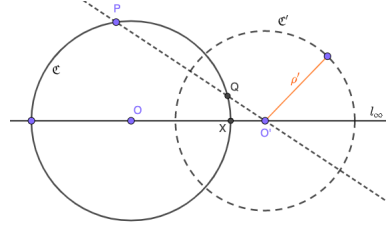
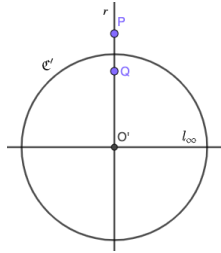


Figura 3.14: La inversión de r respecto de \mathcal{C}' es ella misma. Figura 3.15: La inversión de \mathcal{C} respecto de \mathcal{C}' es ella misma.

Ahora, sea la recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ con \mathcal{C} es una circunferencia centrada en un punto de l_{∞} . Entonces, tomamos $\{O'\} = PQ \cap l_{\infty}$ y $\rho' = \sqrt{d(P, O') \cdot (Q, O')}$. Es claro que si \mathcal{C}' es la circunferencia de centro O' y radio ρ' ,

$$\iota_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}) = \iota_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}_{PQ}) = \mathcal{C}_{\iota_{\mathcal{C}'}(P)\iota_{\mathcal{C}'}(Q)},$$

esto es, $\iota_{\mathcal{C}'}(r_{\mathbb{H}}) = r_{\mathbb{H}}$.

Reiterando el razonamiento anterior, se tiene que $\iota_{\mathcal{C}'}(P) = Q$ y $\iota_{\mathcal{C}'}(Q) = P$. □

Lema 3.3 Sean r una recta perpendicular a l_{∞} y \mathcal{C} una circunferencia con centro en l_{∞} , tal que, P es el punto de intersección entre r y \mathcal{C} . Entonces, existe una circunferencia \mathcal{C}' con centro O' en l_{∞} , verificando que

$$\iota_{\mathcal{C}'}(P) = P, \quad \iota_{\mathcal{C}'}(r) = \mathcal{C} - \{O'\}, \quad \iota_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C} - \{O'\}) = r. \quad (3.15)$$

Demostración. Consideremos X uno de los puntos de intersección de \mathcal{C} con l_{∞} . Entonces, tomamos la circunferencia \mathcal{C}' de centro $O' = X$ y radio $d(X, P)$ (véase Figura 3.16).

Es claro que P pertenece a la circunferencia \mathcal{C}' , y por la Proposición 2.2, se tiene que

$$\iota_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C} - \{O'\}) = r.$$

De aquí, como $\iota_{\mathcal{C}'}^2 = Id$, deducimos que $\iota_{\mathcal{C}'}(r) = \mathcal{C} - \{O'\}$. Además, como P pertenece a \mathcal{C}' , $\iota_{\mathcal{C}'}(P) = P$. □

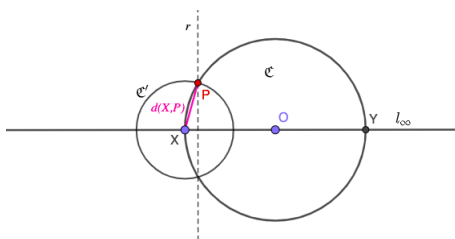


Figura 3.16

A continuación, se dan algunos ejemplos de isometrías hiperbólicas:

1. Las inversiones respecto de una circunferencia \mathfrak{C} con centro O en l_∞ inducen isometrías hiperbólicas (véase Teorema 3.1). Nótese que si P pertenece a \mathbb{H} , entonces $\iota_{\mathfrak{C}}(P)$ está en la misma semirrecta que P respecto de O . Luego, $\iota_{\mathfrak{C}}(P) \in \mathbb{H}$. Por tanto, $\iota_{\mathfrak{C}}$ induce una aplicación $\iota_{\mathfrak{C}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.
2. La reflexión euclídea σ_r respecto de una recta r perpendicular a l_∞ induce una isometría hiperbólica $\sigma_r : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. En efecto, si PQ es una recta perpendicular a l_∞ , entonces la recta $\sigma_r(P)\sigma_r(Q)$ también lo es. Obsérvese que si O es el punto intersección entre las rectas PQ y l_∞ , entonces

$$\{\sigma_r(O)\} = \sigma_r(P)\sigma_r(Q) \cap l_\infty.$$

Así que

$$d_{\mathbb{H}}(\sigma_r(P), \sigma_r(Q)) = \left| \log \frac{d(\sigma_r(O), \sigma_r(P))}{d(\sigma_r(O), \sigma_r(Q))} \right| = \left| \log \frac{d(O, P)}{d(O, Q)} \right| = d_{\mathbb{H}}(P, Q).$$

Ahora, si PQ no es perpendicular a l_∞ y \mathfrak{C}_{PQ} es la circunferencia con centro O en l_∞ , que contiene a los puntos P y Q , entonces, $\sigma_r(\mathfrak{C}_{PQ})$ es una circunferencia de igual radio que \mathfrak{C}_{PQ} , centrada en $\sigma_r(O)$. Además, si consideramos X e Y puntos de corte de la circunferencia \mathfrak{C} con l_∞ , entonces los puntos de corte de la circunferencia $\sigma_r(\mathfrak{C}_{PQ})$ con l_∞ son $\sigma_r(X)$ y $\sigma_r(Y)$. Así que, deducimos

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\sigma_r(P), \sigma_r(Q)) &= \left| \log \frac{d(\sigma_r(P), \sigma_r(Y))}{d(\sigma_r(Q), \sigma_r(Y))} \cdot \frac{d(\sigma_r(Q), \sigma_r(X))}{d(\sigma_r(P), \sigma_r(X))} \right| = \\ &= \left| \log \frac{d(P, Y)}{d(Q, Y)} \cdot \frac{d(Q, X)}{d(P, X)} \right| = d_{\mathbb{H}}(P, Q). \end{aligned}$$

Seguidamente, garantizaremos la existencia de isometrías hiperbólicas.

Axioma 5 Sean los puntos P, Q, P', Q' del plano hiperbólico \mathbb{H} con $P \neq Q$ y $P' \neq Q'$ verificando $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P', Q')$. Entonces, existe una isometría $g_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, tal que, $g_{\mathbb{H}}(P) = P'$ y $g_{\mathbb{H}}(Q) = Q'$.

Demostración. Para probar dicho axioma analizaremos tres casos:

- Supongamos que $P = P'$ y que $d_{\mathbb{H}}(P', Q) = d_{\mathbb{H}}(P', Q')$. Sea r la recta perpendicular a l_{∞} que pasa por P' y $\mathfrak{C}_{P'Q'}$ la circunferencia centrada en un punto de l_{∞} que contiene a P' y Q' . Consideremos la circunferencia \mathfrak{C}_X centrada en el punto X , uno de los puntos de intersección de $\mathfrak{C}_{P'Q'}$ y l_{∞} , y de radio $d(P', X)$. Así, como P' pertenece a \mathfrak{C}_X

$$\iota_{\mathfrak{C}_X}(P') = P', \quad P' \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q) = r.$$

Intercambiando Q por Q' encontramos una circunferencia \mathfrak{C}_Y con $\{Y\} = \mathfrak{C}_{P'Q} \cap l_{\infty}$, y radio $d(P', Y)$. Así,

$$\iota_{\mathfrak{C}_Y}(P') = P', \quad P' \iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q') = r.$$

Por tanto, P' , $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$, $\iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q')$ están sobre la recta perpendicular a l_{∞} que pasa por P' . Luego,

$$d_{\mathbb{H}}(P', Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(P'), \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P', \iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = \left| \log \frac{d(P', O)}{d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q), O)} \right|, \quad (3.16)$$

donde $\{O\} = r \cap l_{\infty}$. De igual forma, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P', Q') = d_{\mathbb{H}}(P', \iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q')) = \left| \log \frac{d(P', O)}{d(\iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q'), O)} \right|. \quad (3.17)$$

De las igualdades (3.16) y (3.17) y como $d_{\mathbb{H}}(P', Q) = d_{\mathbb{H}}(P', Q')$, se concluye que

$$d(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q), O) = d(\iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q'), O),$$

y como $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)$ y $\iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q')$ pertenecen a la semirrecta OP' , entonces $\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q) = \iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q')$, o equivalentemente,

$$\iota_{\mathfrak{C}_Y}(\iota_{\mathfrak{C}_X}(Q)) = Q'.$$

Luego, la isometría que buscábamos es

$$g_{\mathbb{H}} = \iota_{\mathfrak{C}_Y} \circ \iota_{\mathfrak{C}_X}.$$

- Supongamos que $P \neq P'$ y que $PP' \cap l_{\infty} \neq \emptyset$. Entonces, por el Lema 3.2 existe una circunferencia \mathfrak{C}' centrada en l_{∞} , tal que, $\iota_{\mathfrak{C}'}(P) = P'$. Tenemos entonces que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}'}(P), \iota_{\mathfrak{C}'}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P', \iota_{\mathfrak{C}'}(Q)).$$

Como $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P', Q')$, deducimos que

$$d_{\mathbb{H}}(P', Q') = d_{\mathbb{H}}(P', \iota_{\mathfrak{C}'}(Q)).$$

Por el caso anterior, existe una isometría hiperbólica $g_1: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, tal que,

$$g_1(P') = P', \quad g_1(\iota_{\mathfrak{C}'}(Q)) = Q'.$$

Por tanto, existe la isometría hiperbólica

$$g_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad g_{\mathbb{H}} = g_1 \circ \iota_{\mathfrak{C}'}$$

verificando que

$$g_{\mathbb{H}}(P) = g_1(P') = P', \quad g_{\mathbb{H}}(Q) = g_1(\iota_{\mathfrak{C}'}(Q)) = Q'.$$

- Por último, supongamos que $P \neq P'$ y $PP' \cap l_{\infty} = \emptyset$. Entonces, consideramos la recta r perpendicular a l_{∞} , tal que, $\sigma_r(P) = P'$. Ahora,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\sigma_r(P), \sigma_r(Q)) = d_{\mathbb{H}}(P', \sigma_r(Q)),$$

como $d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(P', Q')$,

$$d_{\mathbb{H}}(P', Q') = d_{\mathbb{H}}(P', \sigma_r(Q)).$$

Por el primer caso, existe una isometría hiperbólica $g_2: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, tal que,

$$g_2(P') = P', \quad g_2(\sigma_r(Q)) = Q'.$$

Por tanto, si consideramos la isometría hiperbólica

$$g_{\mathbb{H}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad g_{\mathbb{H}} = g_2 \circ \sigma_r$$

se verifica que

$$g_{\mathbb{H}}(P) = g_2(P') = P', \quad g_{\mathbb{H}}(Q) = g_2(\sigma_r(Q)) = Q'.$$

□

Axioma 6: Reflexión del plano hiperbólico

Con este axioma definiremos la noción de reflexión hiperbólica.

Axioma 6 Para toda recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}}$ en \mathbb{H} existe una isometría hiperbólica $\sigma_{r_{\mathbb{H}}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ verificando las siguientes propiedades:

1. $\sigma_{r_{\mathbb{H}}}(X) = X \Leftrightarrow X \in r_{\mathbb{H}}$
2. $\sigma_{r_{\mathbb{H}}} \circ \sigma_{r_{\mathbb{H}}} = Id_{\mathbb{H}}$

Demostración. Sea $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$ con r es una recta perpendicular a l_{∞} . Entonces, definimos la reflexión hiperbólica respecto de $r_{\mathbb{H}}$, $\sigma_{r_{\mathbb{H}}}(X) = \sigma_r(X) \in \mathbb{H}$ con X en \mathbb{H} .

Si $r_{\mathbb{H}} = \mathfrak{C} \cap \mathbb{H}$ con \mathfrak{C} una circunferencia centrada en un punto de l_{∞} , entonces definimos la reflexión hiperbólica respecto de $r_{\mathbb{H}}$ como $\sigma_{r_{\mathbb{H}}}(X) = \iota_{\mathfrak{C}}(X) \in \mathbb{H}$, con X en \mathbb{H} .

□

Paralelismo en el plano hiperbólico

A continuación, analizaremos lo que ocurre con las rectas paralelas en la geometría hiperbólica. En primer lugar, definiremos la noción de rectas hiperbólicas paralelas.

Definición 3.4 *Se dice que dos rectas hiperbólicas son paralelas si son disjuntas.*

Se puede observar en la Figura 3.17 que las rectas hiperbólicas $r_{\mathbb{H}}^1$, $r_{\mathbb{H}}^2$ y $r_{\mathbb{H}}^3$ son paralelas a $r_{\mathbb{H}}$ y pasan por P . Así que, por un punto P exterior a $r_{\mathbb{H}}$ existe más de una recta hiperbólica que no interseca a $r_{\mathbb{H}}$.

Por lo visto en el Capítulo 1, el resto de postulados garantizan que por un punto exterior a una recta (hiperbólica) $r_{\mathbb{H}}$, pasa al menos una recta (hiperbólica) paralela a $r_{\mathbb{H}}$.

Así que la pregunta es ¿cuántas rectas hiperbólicas paralelas a $r_{\mathbb{H}}$ pasan por P ? El siguiente teorema da respuesta a esta cuestión.

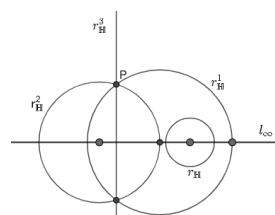


Figura 3.17

Teorema 3.2 *Dado una recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}}$ en el plano hiperbólico y un punto P exterior a $r_{\mathbb{H}}$, existen infinitas rectas hiperbólicas que pasan por P y son paralelas a $r_{\mathbb{H}}$.*

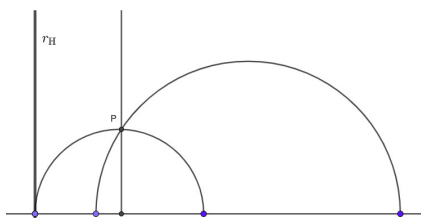


Figura 3.18

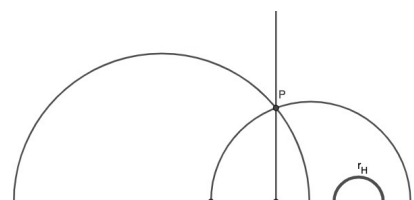


Figura 3.19

Demostración. Una recta hiperbólica es una semirrecta perpendicular a l_{∞} o una semicircunferencia con centro en l_{∞} . En cada caso tenemos:

1. Sea $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$, donde r es una recta perpendicular a l_{∞} . Cualquier semicircunferencia centrada en l_{∞} que pasa por P es una recta hiperbólica paralela a $r_{\mathbb{H}}$ que pasa por P (ver Figura 3.18).
2. Si $r_{\mathbb{H}} = \mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ con \mathcal{C} es una circunferencia centrada en un punto de l_{∞} en el plano. Cualquier semicircunferencia que pasa por P , y que no interseca con \mathcal{C} es una recta hiperbólica paralela a $r_{\mathbb{H}}$ que pasa por P (ver Figura 3.19).

□

Ángulos y triángulos en geometría hiperbólica

En este capítulo, desarrollaremos algunos resultados para mostrar las diferencias entre la geometría euclídea y la geometría hiperbólica. Nos centraremos en cuestiones relacionadas con ángulos y triángulos.

4.1. Ángulos hiperbólicos

Introduciremos a continuación el concepto de semirrecta hiperbólica, definidas como las semirrectas euclídeas usando la distancia hiperbólica.

Definición 4.1 Sean P y Q dos puntos de la recta hiperbólica $r_{\mathbb{H}}$. La **semirrecta hiperbólica de origen P que contiene a Q** es el siguiente subconjunto de $r_{\mathbb{H}}$

$$\overline{PQ}_{\mathbb{H}} := \{X \in r_{\mathbb{H}} / P \notin [X, Q]\}.$$

De manera análoga a lo que ocurre en la geometría euclídea, en la geometría hiperbólica un ángulo queda determinado por dos semirrectas hiperbólicas con el mismo origen. Necesariamente una de las rectas debe ser un arco de semicircunferencia centrada en un punto de l_{∞} (ver construcción en Geogebra: [Medida de ángulos en la geometría hiperbólica](#)).

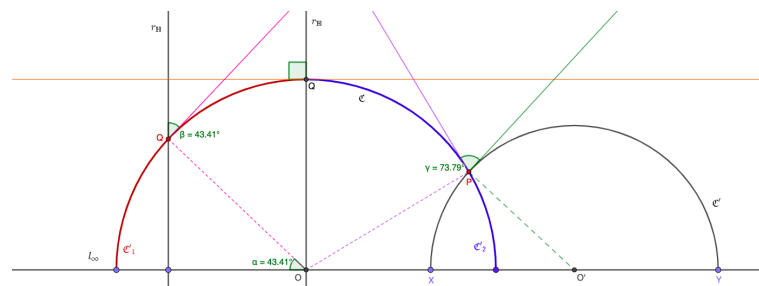


Figura 4.1

A continuación, definiremos el ángulo determinado por dos semirrectas hiperbólicas. Distinguiendo dos casos:

- a. Sean $r_{\mathbb{H}} = r \cap \mathbb{H}$ con r una recta perpendicular a l_{∞} , y $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ una semicircunferencia centrada en un punto O de l_{∞} , que se cortan en un punto Q , como se observa en la Figura 4.1. El ángulo que determinan $r_{\mathbb{H}}$ y $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ es el que forma la semirrecta $r_{\mathbb{H}}$ y la semirrecta tangente a la circunferencia \mathcal{C} en Q .

Nótese que si O pertenece a r , entonces $r_{\mathbb{H}}$ y la recta tangente a $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ en el punto Q son perpendiculares. Por tanto, el ángulo $\angle Q = \frac{\pi}{2}$.

Por tanto, cada uno de estos ángulos es recto en la geometría hiperbólica.

- b. Si tenemos dos semicircunferencias $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ y $\mathcal{C}' \cap \mathbb{H}$ centradas en l_{∞} que se cortan en un punto P (véase Figura 4.1), el ángulo que determinan en P es el de las semirrectas tangentes a ambas semicircunferencias en P .

4.2. Fórmulas trigonométricas de un ángulo hiperbólico

Como en el caso de la geometría euclídea, para obtener las razones trigonométricas de un ángulo $\angle P$, debemos considerar un triángulo rectángulo donde uno de los vértices agudos es $\angle P$.

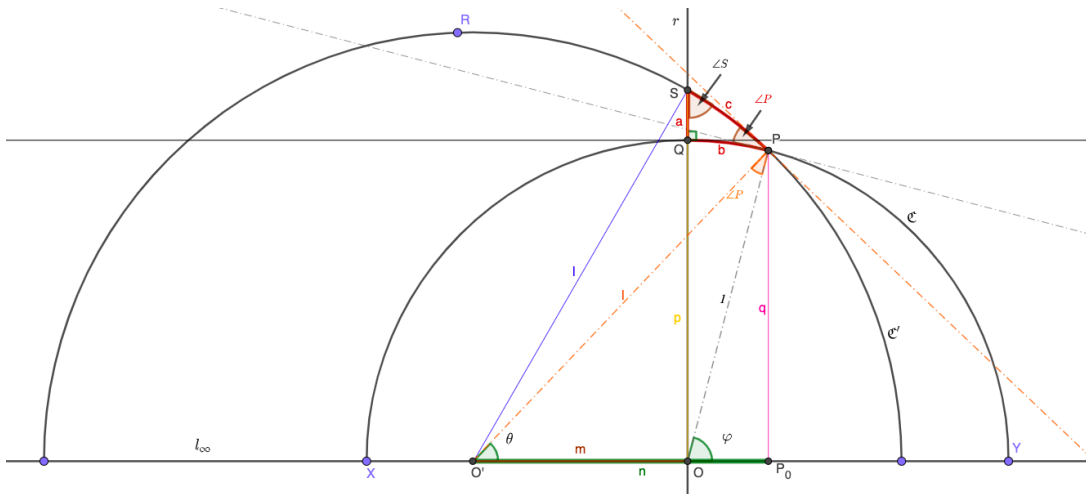


Figura 4.2

Consideramos el triángulo hiperbólico $\triangle SPQ$ determinado por la circunferencia \mathcal{C} de radio 1 y centro $O \in l_{\infty}$, la recta SQ perpendicular a l_{∞} que pasa por O y la circunferencia de \mathcal{C}' de radio l y centro $O' \in l_{\infty}$ (véase Figura 4.2). Es claro que este triángulo es rectángulo por lo demostrado en la sección anterior.

Sea P el punto de intersección de ambas semicircunferencias y P_0 su proyección ortogonal sobre l_{∞} . Además, denotemos por

$$d(O, S) = p, \quad d(P_0, P) = q, \quad d(O', O) = m, \quad d(O', P_0) = n,$$

$$\angle P_0O'P = \theta, \quad \angle P_0OP = \varphi.$$

Queremos calcular las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) del ángulo $\angle P$. Lo primero que notamos es que $\angle P = \angle O'PO$. Basta darse cuenta que las rectas tangentes en P a las dos circunferencias son perpendiculares a los radios. Así, procedamos como sigue:

$$\angle P = \varphi - \theta,$$

pues $\angle P + \theta + (\pi - \varphi) = \pi$ (obsérvese el triángulo $\triangle PO'O$).

Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle P &= \operatorname{sen}(\varphi - \theta) = \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta, \\ \operatorname{cos} \angle P &= \operatorname{cos}(\varphi - \theta) = \operatorname{cos} \varphi \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Así que, calculemos ahora las razones trigonométricas de los ángulos φ y θ . Considerando los triángulos rectángulos $\triangle OPP_0$ y $\triangle OO'S$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi &= \frac{q}{l} & \operatorname{cos} \varphi &= \frac{n-m}{l}, \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{q}{l} & \operatorname{cos} \theta &= \frac{n}{l}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sustituyendo en (4.1) se deduce que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle P &= \frac{q}{l} \frac{n}{l} - (n-m) \frac{q}{l} = \frac{qm}{l}, \\ \operatorname{cos} \angle P &= (n-m) \frac{n}{l} + \frac{q}{l} = \frac{(n-m)n + q^2}{l}. \end{aligned}$$

Además, como $l^2 = q^2 + n^2$ (obsérvese el triángulo rectángulo $\triangle O'PP_0$)

$$\operatorname{cos} \angle P = \frac{(n-m)n + q^2}{l} = \frac{(n-m)n + l^2 - n^2}{l} = \frac{l^2 - mn}{l}.$$

Luego,

$$\operatorname{tg} \angle P = \frac{\operatorname{sen} \angle P}{\operatorname{cos} \angle P} = \frac{\frac{qm}{l}}{\frac{l^2 - mn}{l}} = \frac{qm}{l^2 - mn}.$$

Queremos ahora intentar describir estas relaciones trigonométricas en términos de las distancias hiperbólicas de los puntos P , Q y S . Para ello, calcularemos los senos y los cosenos hiperbólicos de las distancias hiperbólicas entre los vértices de los lados del triángulo hiperbólico.

Seno y coseno hiperbólico de $d_{\mathbb{H}}(S, Q)$:

Consideremos los triángulos $\triangle OO'S$ y $\triangle OO'P$ (véase Figura 4.2). Aplicando el Teorema de Pitágoras al primer triángulo, puesto que es un triángulo rectángulo, y el Teorema del coseno al segundo, se tiene que

$$\begin{aligned} m^2 + p^2 &= l^2, \\ 1 &= l^2 + m^2 - 2mn. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Luego, sumando y restando (4.3), se obtiene

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= 2m(n - m), \\ p^2 + 1 &= 2(l^2 - mn). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sabemos que

$$a := d_{\mathbb{H}}(S, Q) = \left| \log \frac{d(S, O)}{d(Q, O)} \right| = \left| \log \frac{p}{1} \right| = |\log p|.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} e^a &= p & e^{-a} &= \frac{1}{p}, \\ \sinh a &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) = \frac{p^2 - 1}{2p}, \\ \cosh a &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) = \frac{p^2 + 1}{2p}. \end{aligned}$$

De aquí, utilizando (4.4), deducimos:

$$\begin{aligned} \sinh a &= \frac{p^2 - 1}{2p} = \frac{2m(n - m)}{2p} = \frac{m(n - m)}{p}, \\ \cosh a &= \frac{p^2 + 1}{2p} = \frac{2(l^2 - nm)}{2p} = \frac{l^2 - nm}{p}. \end{aligned}$$

Seno y coseno hiperbólico de $d_{\mathbb{H}}(P, Q)$:

Por el Teorema 3.1, si \mathfrak{C}_Y es la circunferencia centrada en Y , de radio $\rho = d(Y, Q)$, se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_Y}(P), \iota_{\mathfrak{C}_Y}(Q)) = d_{\mathbb{H}}(\iota_{\mathfrak{C}_Y}(P), Q) = \left| \log \frac{d(\iota_{\mathfrak{C}_Y}(P), O)}{d(Q, O)} \right|.$$

Nótese que $Q \in \mathfrak{C}_Y$ y S' pertenece a la recta perpendicular a l_{∞} que pasa por Q , y por tanto, $S'Q \cap l_{\infty} = \{O\}$.

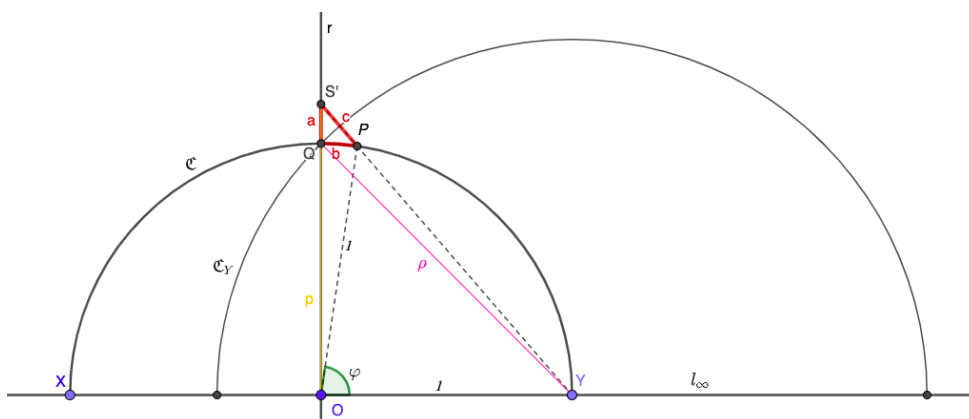


Figura 4.3

El triángulo $\triangle POY$ es isósceles, así que $2\angle OYP = \pi - \varphi$. Entonces,

$$\frac{d(\iota_{\mathcal{C}_Y}(P), O)}{d(Q, O)} = \frac{d(\iota_{\mathcal{C}_Y}(P), O)}{d(Y, O)} = \operatorname{tg}(\angle OYP) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

De aquí,

$$b := d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) \right| \quad (4.5)$$

y, por tanto,

$$e^b = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 + n - m}{q},$$

$$e^{-b} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}.$$

Luego,

$$\operatorname{senh} b = \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + n - m}{q} - \frac{1 - n + m}{q} \right) = \frac{n - m}{q},$$

$$\operatorname{cosh} b = \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + n - m}{q} + \frac{1 - n + m}{q} \right) = \frac{1}{q}.$$

Seno y coseno hiperbólico de $d_{\mathbb{H}}(S, P)$:

Por la Proposición 3.5, si R es un punto de \mathcal{C}' , véase Figura 4.2, entonces P , R y S están hiperbólicamente alineados, esto es,

$$d_{\mathbb{H}}(R, S) + d_{\mathbb{H}}(S, P) = d_{\mathbb{H}}(R, P).$$

Luego, por (4.5), se tiene que

$$c := d_{\mathbb{H}}(S, P) = \left| \log \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) - \log \left(\operatorname{ctg} \frac{\angle S}{2} \right) \right| = \left| \log \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle S}{2} \right) \right|.$$

A continuación, del triángulo rectángulo $OO'S$, se tiene

$$\operatorname{sen} \angle S = \frac{p}{l}, \quad \operatorname{cos} \angle S = \frac{m}{l}. \quad (4.6)$$

Por (4.2) y (4.6), se deduce que,

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1 + \frac{n}{l}}{\frac{q}{l}} = \frac{l+n}{q}, & \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1 - \frac{n}{l}}{\frac{q}{l}} = \frac{l-n}{q}, \\ \operatorname{tg} \frac{\angle S}{2} &= \frac{1 - \operatorname{cos} \angle S}{\operatorname{sen} \angle S} = \frac{1 - \frac{m}{l}}{\frac{p}{l}} = \frac{l-m}{p}, & \operatorname{ctg} \frac{\angle S}{2} &= \frac{1 + \operatorname{cos} \angle S}{\operatorname{sen} \angle S} = \frac{1 + \frac{m}{l}}{\frac{p}{l}} = \frac{l+m}{p}. \end{aligned}$$

Entonces, operando, tenemos que

$$\begin{aligned} e^c &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle S}{2} = \frac{(l+n)(l-m)}{pq} = \frac{l^2 + ln - lm - mn}{pq}, \\ e^{-c} &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\angle S}{2} = \frac{(l-n)(l+m)}{pq} = \frac{l^2 - ln + lm - mn}{pq}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} c &= \frac{e^b - e^{-b}}{2} = \frac{l(n-m)}{pq}, \\ \operatorname{cosh} c &= \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \frac{l^2 - mn}{pq}. \end{aligned}$$

Con ayuda de las igualdades vistas hasta el momento, no es difícil obtener las fórmulas siguientes, que son las fórmulas trigonométricas de la geometría hiperbólica

$$\operatorname{sen} \angle P = \frac{\operatorname{senh} d_{\mathbb{H}}(S, Q)}{\operatorname{senh} d_{\mathbb{H}}(S, P)}, \quad \operatorname{cos} \angle P = \frac{\operatorname{tgh} d_{\mathbb{H}}(P, Q)}{\operatorname{tgh} d_{\mathbb{H}}(S, P)}, \quad \operatorname{tg} \angle P = \frac{\operatorname{tgh} d_{\mathbb{H}}(S, Q)}{\operatorname{senh} d_{\mathbb{H}}(S, P)}.$$

Nótese que estas fórmulas permiten afirmar que los ángulos en la geometría hiperbólica se preservan por reflexión respecto de rectas perpendiculares a l_{∞} e inversiones respecto de circunferencias centradas en l_{∞} (Ver construcción en Geogebra: [Imagen de un ángulo hiperbólico](#)).

4.3. Suma de ángulos interiores de un triángulo

Al no verificarse en la geometría hiperbólica el axioma de las paralelas y sí el resto de los axiomas de la geometría euclídea, podemos afirmar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es π (véase el Teorema 1.1). Pero, ¿podemos acotar esta suma? El siguiente teorema da respuesta a esta cuestión (ver construcción en Geogebra: [Suma de ángulos interiores de un triángulo hiperbólico](#)).

Teorema 4.1 *En la geometría hiperbólica la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que un ángulo llano.*

Demostración. Para construir un triángulo hiperbólico necesitamos al menos de dos arcos de semicircunferencias centrados en l_∞ .

Consideramos a , b y c los lados del triángulo $\triangle PQS$ que se muestra en la Figura 4.4, determinados por un segmento de la recta r perpendicular a l_∞ , un arco de curva de la circunferencia \mathfrak{C} de centro $O \in l_\infty$ y por un arco de curva de la circunferencia \mathfrak{C}' de centro $O' \in l_\infty$.

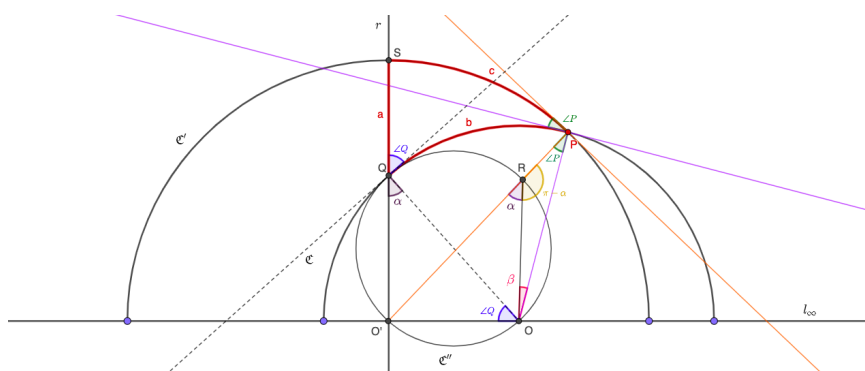


Figura 4.4

Por lo explicado anteriormente, se tiene que el ángulo $\angle S = \frac{\pi}{2}$. Además, usando que la recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, se tiene que

$$\angle P = \angle OPO' \quad y \quad \angle Q = \angle QOO'. \tag{4.7}$$

Construyamos la circunferencia \mathfrak{C}'' de diámetro QO . Ésta solo tiene un punto común Q con la circunferencia \mathfrak{C} , pues su diámetro es el radio de dicha circunferencia. Por ello, el punto P , es un punto exterior de \mathfrak{C}'' .

Veámos que $\angle P + \angle Q$ es menor que $\frac{\pi}{2}$. Entonces, considerando el triángulo $\triangle ORP$, para el que se satisface

$$\angle P + \beta + (\pi - \alpha) = \pi,$$

donde α y β son los ángulos señalados en la Figura 4.4. Luego, $\alpha = \angle P + \beta$. De aquí, se tiene que $\angle P$ es menor que α .

Usando la Proposición 2.3, deducimos que $\alpha = \angle O'QO = \angle O'RO$. Además, como $\triangle QO'O$ es un triángulo rectángulo, se tiene que

$$\angle O'QO + \angle QOO' = \frac{\pi}{2}. \tag{4.8}$$

Por consiguiente, por (4.7) y (4.8) se deduce que

$$\angle P + \angle Q = \angle OPO' + \angle QOO' < \angle O'QO + \angle QOO' = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $\angle P + \angle Q + \angle S$ es menor que π .

Nótese que cualquier triángulo rectángulo se puede situar de tal manera que uno de sus lados pertenezca a una recta r perpendicular a l_∞ .

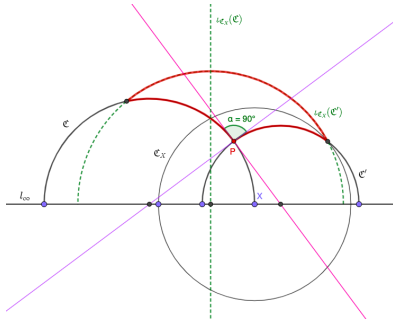


Figura 4.5

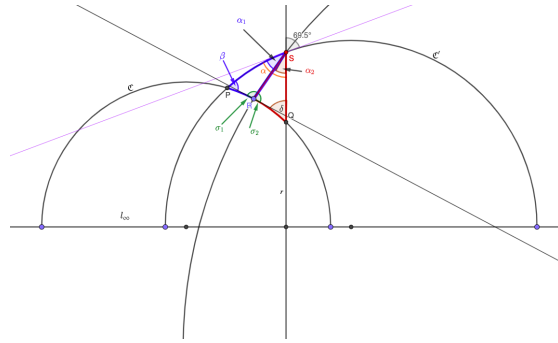


Figura 4.6

En efecto, supongamos que en el triángulo rectángulo el ángulo recto está determinado por dos semicircunferencias perpendiculares a $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ y $\mathcal{C}' \cap \mathbb{H}$. Consideramos $\{X\} \in (\mathcal{C} \cap \mathbb{H}) \cap l_\infty$ y \mathcal{C}_X una circunferencia de centro X . Entonces, $l_{\mathcal{C}_X}(\mathcal{C} \cap \mathbb{H})$ es una recta hiperbólica perpendicular a l_∞ y $l_{\mathcal{C}_X}(\mathcal{C}' \cap \mathbb{H})$ una semicircunferencia (véase Figura 4.5), que determinan un triángulo rectángulo como el del inicio de la demostración. Nótese que $l_{\mathcal{C}_X}(\mathcal{C} \cap \mathbb{H})$ es perpendicular a $l_{\mathcal{C}_X}(\mathcal{C}' \cap \mathbb{H})$.

En el caso general, al trazar la perpendicular hiperbólica desde uno de los vértices del triángulo (no necesariamente rectángulo), al otro lado dividimos el triángulo en dos rectángulos como aparece en la Figura 4.6. Entonces, los triángulos hiperbólicos $\triangle PSR$ y $\triangle SRQ$ son rectángulos, por tanto

$$\alpha_1 + \beta + \sigma_1 < \pi \quad y \quad \alpha_2 + \delta + \sigma_2 < \pi.$$

Sabemos además que $\sigma_1 + \sigma_2 = \pi$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Luego, se tiene que $\delta + \beta + \alpha < \pi$.

De esta manera, podemos concluir que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo hiperbólico es menor que π .

□

Conclusiones

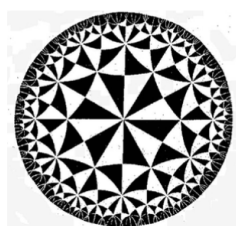


Figura 4.7

En esta memoria se hizo una introducción de la geometría del plano hiperbólico, desde un enfoque axiomático. La geometría hiperbólica fue la primera que refutó la creencia que el V postulado se deduce del resto. La clave ha sido el uso de una transformación que es una isometría en la nueva geometría, y que nos permite definir una métrica que aumenta a medida que nos acercamos a una recta de referencia. Esta herramienta es la *inversión respecto de una circunferencia*. Con esta nueva métrica, se prueba que el número de rectas hiperbólicas paralelas a una dada que pasan por un punto exterior es infinito.

En este trabajo, hemos enfatizado la visión axiomática intentando entender el esfuerzo que durante muchos años se hizo por parte de la comunidad científica intentando probar el V postulado de Euclides y cómo unos pocos privilegiados como Gauss, Lobachevski o Bolyai fueron capaces de encontrar una respuesta que abre el camino a una nueva geometría.

Finalizamos este trabajo haciendo notar que la geometría hiperbólica (en mayores dimensiones que el plano) ha resultado ser una buena herramienta para modelizar el universo. También, aparece en algunos elementos de la naturaleza como las lechugas y los tentáculos de las medusas. En el arte, la geometría hiperbólica ha sido la base de algunas obras de arte como las teselaciones de Escher, usando el modelo del disco de Poincaré. Un ejemplo de ello es la teselación de la Figura 4.7.

En la Figura 4.8 mostramos cómo hacer teselaciones con triángulos hiperbólicos en el modelo del plano de Poincaré.

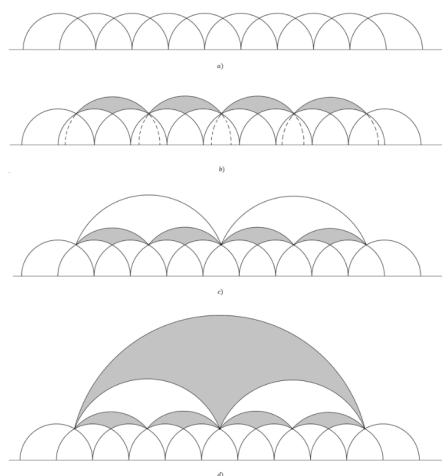


Figura 4.8

Bibliografía

- [1] ARGUELLO-CRUZ E.A., *Plano hiperbólico y aplicaciones*, Trabajo de titulación, Diciembre 2017.
- [2] BARROS P. y LLANOS-MAS V. *Acerca de la geometría de Lobachevski* [Lecciones populares de matemáticas]. Disponible en: <http://www.librosmaravillosos.com/geometrialobachevski/pdf/Acerca%20de%20la%20Geometria%20de%20Lobachevski%20-%20A.%20S.%20Smogorzhevski.pdf>.
- [3] BAUTISTA-BOZA-CORDERO J. Revista de Matemáticas: Teoría y aplicaciones 2. *Lobachevski descubridor de la geometría hiperbólica*, 1995, vol. 2, pp. 27–37.
- [4] BUSER P. y COSTA A.F., *Geometría básica*, Editorial Sanz y Torres, pp. 121-169, 2018.
- [5] CARRIÓN-REBELLATO M.T., *Teselaciones en el plano hiperbólico*, Tesina, ANEP-UDELAR, 2016.
- [6] ETAYO-GORDEJUELA F. Revista R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat(Esp). *Matemática y realidad. Geometrías no euclídeas y universo*, 2010, vol. 104, Nº 1, pp. 95–105.
- [7] FATALINI A.L., *Geometría del plano hiperbólico*, Trabajo especial de licenciatura en matemáticas, FAMAF. Disponible en: <https://rdu.unc.edu.ar/bitstream/handle/11086/11748/fatalini.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [8] GARCÍA-HERAS J.L., *Construcción de polígonos hiperbólicos y aplicación a las regiones fundamentales de grupos cristalográficos no euclídeos*, Tesis Doctoral, Madrid, 2006.
- [9] KELLY P. y MATHHEWS G., *The non-Euclidean Hyperbolic Plane*, Editorial Springer-Verlag, 1980.
- [10] MÁRQUEZ-ESCUADERO J.M., *El plano hiperbólico: Historia y fundamentos*, Trabajo de fin de grado, Junio 2016.
- [11] PUERTAS-CASTAÑOS M.L. *Elementos* [Traducción y notas]. Disponible en: <https://www.pieresco.net.ar/libros/Gredos/euclides%20-%20elementos-i-iv.pdf>.

The Geometry of the hyperbolic plane

Abstract

The discovery of hyperbolic geometry has a major influence on human understanding of mathematics and the relationship to its physical applications. We will study an axiomatic scheme similar to that of euclidean geometry, questioning the axiom of parallels. In the hyperbolic geometry, we discover a new trigonometry where the sum of the interior angles of a triangle is less than π .

1. Neutral geometry

The axiomatic proposed by Birkhoff (1884-1944):

- A₁ A plane Π is a metric space.
- A₂ The plane Π has got at least three non-aligned points. Also, if P and Q are different points in Π , then there's a single line $r = PQ$ such that P, Q belong to r .
- A₃ In the plane Π , for every line r exists a graduated rule \mathfrak{R} , such that, $d(X, Y) = |\mathfrak{R}(X) - \mathfrak{R}(Y)|$, with X, Y in r .
- A₄ Let be a line r in Π . Then, there are two subsets \mathcal{H}_r^1 and \mathcal{H}_r^2 in Π that satisfy
 - a. $\mathcal{H}_r^1 \cup \mathcal{H}_r^2 = \Pi - r$,
 - b. $\forall X, Y \in \mathcal{H}_r^i \Rightarrow [X, Y] \subseteq \mathcal{H}_r^i$,
 - c. If $X \in \mathcal{H}_r^1$ and $Y \in \mathcal{H}_r^2, i \neq j \Rightarrow [X, Y] \cap r \neq \emptyset$.

Definition 1 One **isometry** is a bijective map $g : \Pi \rightarrow \Pi$, such that,

$$d(X, Y) = d(g(X), g(Y))$$

for any points $X, Y \in \Pi$.

- A₅ Let A, B, C and D be different points on the plane Π , verifying that $d(A, B) = d(C, D)$. Then, there is an isometry, such that, $g(A) = C$ and $g(B) = D$.
- A₆ For every line r exists an isometry (reflection) σ_r , respect to r , such that,
 - a. $\sigma_r(X) = X$ if and only if $X \in r$,
 - a. $\sigma_r \circ \sigma_r = Id_{\Pi}$.

A₁, A₂, A₃, A₄, A₅ and A₆

For a point outside a line, you can draw at least a parallel line to it.

2. Euclidean Geometry

Axiom of parallels: For every line r and every point $P \in \Pi - r$, there is a unique parallel line to r , such that, $P \in s$.



The sum of the interior angles of a triangle is π .

Inversion respect of a circumference

Definition 2 Let \mathcal{C} be a circumference with center O and radius ρ . An **inversion respect to \mathcal{C}** is a map

$$\iota_{\mathcal{C}} : \Pi - \{O\} \rightarrow \Pi - \{O\}$$

such that,

- 1. O, P y $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ are aligned for all P ,
- 2. The point O doesn't belong to $[P, \iota_{\mathcal{C}}(P)]$,
- 3. $d(O, P) \cdot d(O, \iota_{\mathcal{C}}(P)) = \rho^2$,

for all $P \in \Pi - \{O\}$.

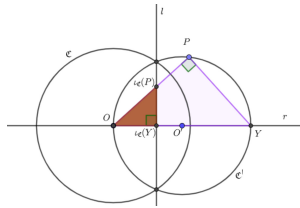


Figure 1: Geometric construction of $\iota_{\mathcal{C}}(P)$.

Image of $\iota_{\mathcal{C}}$ of a line and a circumference

	Line r	Circumference
Go through O	$\iota_{\mathcal{C}}(r - \{O\}) = r - \{O\}$.	$\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}' - \{O\})$ line perpendicular to OO' that passes through $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.
Doesn't go through O	center $\iota_{\mathcal{C}}(r)$ circumference through O .	If O is an outside point of \mathcal{C}' , $\iota_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$ is the homothetic circumference \mathcal{C}'' to \mathcal{C}' with in O and reason $\frac{\rho}{\rho'}$. If O is an interior point of \mathcal{C}' , we should apply a central reflection of center O to \mathcal{C}'' .

3. Hyperbolic Geometry

Poincaré plane

$l_{\infty} :=$ line in Π .

$\mathbb{H} :=$ hyperbolic plane with respect l_{∞} .

Hyperbolic metric

Definition 3 The **hyperbolic distance** between P and Q , such that, $P, Q \in \mathbb{H}$,

- 1. If PQ is perpendicular to l_{∞} ,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, O)}{d(Q, O)} \right|$$

- 2. If PQ isn't perpendicular to l_{∞} ,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = \left| \log \frac{d(P, Y) \cdot d(Q, X)}{d(Q, Y) \cdot d(P, X)} \right|$$

where $\{X, Y\} = \mathcal{C}_{PQ} \cap l_{\infty}$ and \mathcal{C}_{PQ} is the unique circumference with center in l_{∞} and $P, Q \in \mathcal{C}_{PQ}$.

Definition 4 An **hyperbolic isometry** is a bijective map $\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, such that,

$$d_{\mathbb{H}}(P, Q) = d_{\mathbb{H}}(\psi(P), \psi(Q))$$

with $P, Q \in \mathbb{H}$.

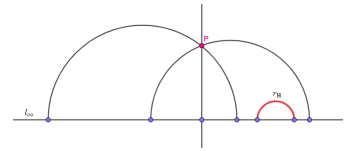
Examples of hyperbolic isometries:

- The reflections respect an orthogonal line to l_{∞} .

- Inversions with respect circumferences centered in l_{∞} .

Parallellism in the hyperbolic plane

Theorem 1 Given a hyperbolic line $r_{\mathbb{H}}$ in the hyperbolic plane and a point $P \in r_{\mathbb{H}}$, then there are infinite hyperbolic lines that pass through P and are parallels to $r_{\mathbb{H}}$.



Hyperbolic angle

In hyperbolic geometry an angle is determined by two hyperbolic rays with the same origin.

- a. The angle determined by $r_{\mathbb{H}}$ and $\mathcal{C} \cap \mathbb{H}$ is formed by the ray $r_{\mathbb{H}}$ and the tangent ray to the circumference \mathcal{C} in Q .
- b. The angle in P is determined by the intersection of two tangent rays to both semicircumference in P .

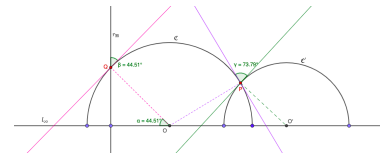


Figure 3: measures of angles

The hyperbolic trigonometric relations for a right triangle $\triangle PQS$.

$$\begin{aligned} \text{sen } \angle P &= \frac{\text{senh } d_{\mathbb{H}}(S, Q)}{\text{senh } d_{\mathbb{H}}(S, P)}, \\ \cos \angle P &= \frac{\text{tgh } d_{\mathbb{H}}(P, Q)}{\text{tgh } d_{\mathbb{H}}(S, P)}, \\ \text{tg } \angle P &= \frac{\text{tgh } d_{\mathbb{H}}(S, Q)}{\text{senh } d_{\mathbb{H}}(S, P)}. \end{aligned}$$

Theorem 2 In the hyperbolic plane, the sum of the interior angles of a triangle is less than π .

References

- [1] ARGUELLO-CRUZ E.A., *Plano hiperbólico y aplicaciones*, Trabajo de titulación, Diciembre 2017.
- [2] BUSER P. y COSTA A.F., *Geometría básica*, Editorial Sanz y Torres, pp. 121-169, 2018.