UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
FACULTAD DE CIENCIAS • SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

Las funciones eulerianas Gamma y Beta complejas

Memoria que presenta el alumno

Francisco Javier Merino Cabrera

bajo la dirección de

M.ª Isabel Marrero Rodríguez

para optar al título de

Graduado en Matemáticas

LA LAGUNA, JUNIO 2016

Universidad de La Laguna

Departamento de Análisis Matemático

M.ª ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ, profesora titular de Análisis Matemático adscrita al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna,

HAGO CONSTAR:

Que la presente Memoria, titulada *Las funciones eulerianas Gamma y Beta complejas*, ha sido desarrollada bajo mi dirección por el alumno **Francisco Javier Merino Cabrera** (DNI 79074605F) y constituye su Trabajo de Fin de Grado para optar al título de Graduado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.

La Laguna, a 10 de junio de 2016.

Fdo.: I. Marrero

Agradecimientos

A mi tutora, la profesora Isabel Marrero por su gran ayuda y colaboración en cada momento de consulta y soporte en este trabajo.

A mis padres, por su apoyo incondicional durante todos los años. Gracias, con vuestro cariño todo ha sido mucho más fácil.

A mis abuelos, por su raciocinio en mis momentos de máxima tensión y decaimiento.

A mi buen amigo David, por esos momentos de conversaciones entre teoremas.

A ELLA, pues ha sido el mayor soporte durante mi -quizás larga- estancia en la universidad. Puedo prometer y prometo que seguirá siendo ese sostén allá donde el destino nos tenga preparado nuestra próxima aventura. Te agradezco por tantas ayudas y tantos aportes no sólo para el desarrollo de mi trabajo, sino también para mi vida; eres mi inspiración y mi motivación.

Abstract

In this work we give a short introduction to the theory of the Euler Gamma and Beta complex functions.

We have mainly focused on the first one. In chapter 1, a succinct account on its origin and evolution is given. In chapter 2, different ways to represent it along with some of the functional equations it satisfies are collected. Its connections with the B-function and the Riemann ζ-function are explored as well. The theorems of Wielandt and of Bohr-Mollerup characterizing the Γ-function among those satisfying a certain recurrence relation are proved in chapter 3. Finally, a short study of the geometry of the Γ-function is presented in chapter 4.

Prólogo

El objetivo principal de este trabajo de fin de grado es estudiar la teoría de las funciones eulerianas Gamma y Beta complejas. Nos hemos centrado en la función Gamma, ya que la función Beta puede ser expresada en términos de aquélla.

De hecho, la función Gamma es habituamente considerada como la función especial por antonomasia, por cuanto la mayoría del resto de funciones especiales admiten una representación como integrales de Mellin-Barnes, que son integrales de contorno en las que comparecen productos o cocientes de funciones Gamma y potencias de la variable de integración. Este tipo de integrales fueron introducidas entre 1908 y 1910 por Ernest W. Barnes (1874-1953) y están íntimamente relacionadas con la serie hipergeométrica generalizada. El contorno de integración es usualmente una deformación del eje imaginario que pasa por la izquierda de todos los polos de los factores de la forma $\Gamma(a+s)$ y por la derecha de todos los polos de los factores de la forma $\Gamma(a-s)$. El ejemplo paradigmático es la llamada *integral Beta de Barnes*, una extensión de la función Beta dada por

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)\,ds=\frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

El hecho de que la función Beta se puede escribir como una transformada de Mellin sugiere aplicar esta transformación a la función hipergeométrica ${}_2F_1$ y luego la fórmula de inversión al resultado para obtener la siguiente representación de ${}_2F_1$ como una integral de Mellin-Barnes:

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds.$$

Bajo condiciones de convergencia adecuadas, también es posible expresar las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_pF_q$ mediante integrales de Mellin-Barnes.

Al margen de lo anterior, o quizá precisamente por ello, la función Gamma es de vital importancia en diversas ramas de las matemáticas, desde la estadística y la teoría de probabilidades hasta la teoría de números, pasando por el cálculo fraccionario; y también de la física, como la mecánica cuántica no relativista, la mecánica estadística o la física de las partículas elementales.

Sin embargo, el análisis en profundidad de la función Gamma compleja no forma parte del temario de ninguna de las asignaturas del actual currículo del Grado en Matemáticas por esta universidad; de ahí que consideráramos oportuno abordarlo en el presente trabajo. A tal fin, paralelamente hemos complementado los contenidos de la asignatura de variable compleja del Grado con el estudio autónomo de algunas herramientas necesarias para nuestro objetivo, como, por ejemplo, los productos infinitos.

La memoria ha sido estructurada como sigue.

En el capítulo 1 se presentan algunas pinceladas históricas sobre el nacimiento de la función Gamma. Se describen los problemas que motivaron su introducción y la forma intuitiva y poco rigurosa, pero a la postre acertada, en que los resolvió Euler en 1729, tras el esfuerzo infructuoso de otros eminentes matemáticos de su época.

En el capítulo 2 se compendian diferentes expresiones y aproximaciones disponibles en la literatura para la función Gamma: integral definida (Euler), límite infinito (Gauss), producto infinito (Euler, Weierstrass), integral de contorno (Hankel) y fórmula de Stirling. También se discuten algunas ecuaciones funcionales satisfechas por la función Gamma: recurrencia, reflexión, multiplicación y duplicación. Además, se introduce la función Beta y se analiza la conexión entre la función Gamma y la función ζ de Riemann.

En el capítulo 3 se enuncian y demuestran los teoremas de Wielandt y de Bohr-Mollerup, que caracterizan a la función Gamma entre todas aquellas que satisfacen una cierta relación de recurrencia. Tal como pone de manifiesto este último, la convexidad logarítmica de la función Gamma en el semieje real positivo es crucial para dicha caracterización.

El capítulo 4 contiene un breve estudio de la geometría de la función Gamma. La propiedad de convexidad se extiende al plano complejo, utilizando esta extensión para obtener información sobre el argumento de $\Gamma(z)$ en líneas verticales, y se describen algunas características de las aplicaciones conformes inducidas por $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ y por $\log\Gamma$.

Finalmente, el capítulo 5 resume las conclusiones y la prospectiva del trabajo.

La memoria se complementa con el preceptivo póster como apéndice y concluye con un índice de figuras y la relación de la bibliografía consultada.

Índice general

CAPÍTULO 1

Perfil histórico

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan algunas pinceladas históricas sobre el nacimiento de la función Gamma. Se describirán los problemas que motivaron su introducción y la forma intuitiva y poco rigurosa, pero a la postre acertada, en que los resolvió Euler, tras el esfuerzo infructuoso de otros eminentes matemáticos de su época.

1.2. El origen de las funciones Gamma y Beta

Muchas personas tienen la convicción de que las matemáticas son estáticas. Creen que las ideas brotan en algún momento del pasado y se quedan inalteradas para siempre. No es un sentimiento tan extraño; después de todo, la fórmula del área de un círculo, $A = \pi r^2$ (donde $r > 0$ es su radio), ha permanecido igual desde los tiempos de Euclides (325 a.C. - 265 a.C.). Sin embargo, cualquier persona iniciada en este apasionante mundo sabe bien que las matemáticas son una especie de ser vivo que va evolucionando en la búsqueda de la mayor generalización posible.

Un caso notable en la historia de las matemáticas sobre la construcción de «generalizaciones de las generalizaciones» ha sido la aparición de la función Gamma de Euler, cuya definición parte de los números naturales para extenderse hasta los números complejos y cuyo desarrollo, tanto en concepto como en contenido, ha participado del progreso de las matemáticas en los últimos dos siglos y medio de la mano de los más eminentes matemáticos, desde Euler hasta Bourbaki.

La función Gamma fue descubierta en 1729 en una correspondencia entre un matemático suizo en San Petersburgo y un matemático alemán en Moscú: Leonhard Euler (1707-1783), que por aquel entonces tenía 22 años y que se convertiría en el mejor matemático del siglo XVIII, y Christian Goldbach (1690-1764), famoso por un problema de teoría de números muy fácil de enunciar pero que ha resultado, al menos por el momento, imposible de resolver.

Actualmente, la función Gamma comparece en múltiples ramas de las matemáticas, desde la teoría de ecuaciones diferenciales hasta la teoría de cuerdas, pasando por la estadística o la teoría de números; pero su origen se encuentra en la confluencia de un problema en teoría de interpolación (una teoría debida, fundamentalmente, a los matemáticos ingleses del siglo XVII) con otro de cálculo integral, relativo a la construcción sistemática de fórmulas de integración indefinida.

El problema de interpolación que dio vida a la función Gamma pasó por las manos de varios matemáticos de la época: el ya mencionado Goldbach, Daniel Bernoulli (1700-1784) y, antes que ellos, James Stirling (1692-1770), sin dar apenas frutos. Sin embargo, todo cambió cuando llegó hasta Euler. Éste anunció su solución a Goldbach en sendas cartas, datadas el 13 de octubre de 1729 y el 8 de enero de 1730. En la primera Euler alude al problema de interpolación, mientras que la segunda versa sobre el de integración y conecta ambos problemas. En realidad, Euler transmitió a Goldbach tan sólo un esbozo de la solución, que no detallaría hasta un año más tarde en su artículo *De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt*.

El problema de interpolación es quizás el más sencillo. Una de las sucesiones numéricas más simples pero, a la vez, más interesantes es aquella cuyo término n-ésimo T_n es la suma de los n primeros enteros positivos: 1, 1+2, 1+2+3,.... Estos números son conocidos como *números triangulares* porque representan el número de objetos que pueden ser colocados en una matriz con forma triangular de varios tamaños.

La fórmula $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ es bien conocida. ¿Cuál es el significado de esa fórmula? En primer lugar, simplifica el cálculo mediante la reducción de un gran número de sumas a, simplemente, una suma, un producto y una división. Por tanto, para obtener la suma de los 100 primeros términos basta con computar lo siguiente: $T_{100} = \frac{1}{2}100\,(100+1) = 5050$. En segundo lugar, incluso a pesar de lo extraño del asunto, podríamos sumar los primeros $5\frac{1}{2}$ enteros con la aplicación de esa misma fórmula, resultando que $T_{5\frac{1}{2}} = 17\frac{7}{8}$. De esta manera, la fórmula anterior extiende el alcance del problema original a otros valores de la variable diferentes de aquellos para los que fue planteado: en definitiva, resuelve un problema de interpolación.

Este tipo de cuestiones, relacionadas con la extensión de determinadas fórmulas a conjuntos de números cada vez más grandes, era un tema muy debatido en los siglos XVII y XVIII. Tomemos, por ejemplo, el álgebra de los exponentes. La cantidad a^m es definida inicialmente como el producto $a \cdot a \overset{(m)}{\cdots} a$. Esta definición tenía sentido cuando m era entero, pero ¿qué pasa si m no lo es? La misteriosa definición $a^0 = 1, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ dada por Isaac Newton (1643-1727) en

1676, que resuelve este enigma, conduce a las funciones exponenciales continuas y a la ley de los exponentes $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, la cual tiene sentido cuando m y n son números cualesquiera (y no necesariamente enteros positivos).

Se encontraron otros problemas de este tipo. Leibniz introdujo la notación d^n para la derivada n-ésima; además, identificó d^{-1} con $\int$ y d^{-n} con la n-ésima integral iterada. Hecho esto intentó dar sentido a d^n cuando n no es entero, pero este problema no encontraría una solución satisfactoria hasta dos siglos después.

Volvamos a nuestra sucesión de números triangulares. Si cambiáramos el signo de sumar por el de multiplicar obtendríamos la sucesión $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots$, conocida como la «sucesión de factoriales». Como sabemos, éstos se denotan por 1!, 2!, 3!,.... Su crecimiento en magnitud es rapidísimo; por comparar, el número 100! está formado por 158 dígitos, mientras que T_{100} tiene únicamente 4 dígitos.

Los números factoriales están muy presentes en las matemáticas. De aquí resulta razonable empezar a formularnos diversas cuestiones: ¿es posible obtener una fórmula sencilla para calcular factoriales?, ¿es posible interpolar entre dos factoriales?, ¿qué debería significar $5\frac{1}{2}!$? Pues bien, este fue el problema de interpolación donde fallaron Goldbach, Stirling y Daniel Bernoulli, pero que condujo a la función Gamma de la mano de Euler.

Como hemos visto antes, el problema de encontrar la fórmula y el problema de la interpolación están relacionados. Por sorprendente que parezca, no existe una fórmula similar a la de los números triangulares que funcione para los factoriales, y así lo deja claro el título del artículo de Euler ya citado, cuya traducción es: *Sobre progresiones trascendentes cuyo término general no puede ser expresado algebraicamente.* La solución de la interpolación factorial escapa del álgebra básica; se hace necesario el uso de procesos infinitos.

Para apreciar mejor el problema al que se enfrentó Euler, vamos a actualizarlo a un lenguaje más accesible: se trataría de encontrar una función razonablemente simple que en cada entero 1, 2, 3,... tome como valor el factorial asociado 1, 2, 6,.... Hoy en día, una función es una relación entre dos conjuntos de números que a un número del primer conjunto le asigna un número del segundo. Así, dados los puntos $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,6)$, $(4,24), \ldots$ y adoptando el concepto de función enunciado previamente, el problema de interpolación consistiría en encontrar una curva que pase a través de todos esos puntos. Ese problema es sencillo de resolver y admite infinitas soluciones. Sin embargo, en la época de Euler el concepto de función estaba asociado con una fórmula, llamada *expressio analytica* (expresión analítica), entendiendo como tal cualquier expresión que pudiera ser deducida mediante manipulaciones elementales: sumas, productos, potencias, logaritmos, etc. En definitiva, la tarea de Euler consistía en encontrar una expresión analítica que para cada entero positivo produjera el factorial correspondiente.

Es difícil dar una crónica exacta del curso de un descubimiento científico. Aparentemente Euler, mientras experimentaba con productos infinitos de números, desembocó por casualidad en el siguiente resultado: si n es un entero positivo, entonces

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = n!. \tag{1.1}$$

Dejando de lado la cuestión de la convergencia del producto infinito (algo común en Euler, como pone de manifiesto, por ejemplo, su solución del denominado *problema de Basilea*), es sencillo ver que efectivamente se cumple la igualdad. Además, el primer miembro tiene sentido (al menos formalmente) para todo n que no sea un entero negativo. Euler encontró también que cuando $n = \frac{1}{2}$, dicho primer miembro era el famoso producto de John Wallis (1616-1703):

$$\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\right)\cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Euler bien podría haber parado aquí: había resuelto el problema en el que fallaron ilustres matemáticos de su época. De hecho, toda la teoría de la función Gamma se basa en el producto infinito (1.1), que actualmente escribimos como:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}. \tag{1.2}$$

Sin embargo, Euler observó algunas curiosas propiedades de este producto, como que para n entero daba como resultado un número entero, mientras que para otros valores, por ejemplo $n = \frac{1}{2}$, proporcionaba una expresión que involucra al número π. La aparición de π sugiere círculos y sus cuadraturas, y las cuadraturas significan integrales. Euler estaba familiarizado con ciertas integrales que cumplían propiedades similares a las mencionadas, lo que le indujo a buscar una transformación que le permitiera expresar el producto como una integral.

Tomó entonces la integral $\int_0^1 x^\alpha (1-x)^n dx$. Casos particulares de ésta ya habían sido estudiados por Wallis, Newton y Stirling. Era una integral complicada de manejar, ya que el integrando no siempre admitía una primitiva elemental como función de x. Suponiendo que n es un número entero y α un valor arbitrario, Euler desarrolló $(1-x)^n$ mediante el teorema del binomio, y sin mucha dificultad encontró la siguiente identidad:

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^n dx = \frac{1\cdot 2\cdots n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)}. \tag{1.3}$$

La idea de Euler consistía ahora en aislar el producto $1\cdot 2\cdots n$ para expresar $n!$ como una integral. El proceso para conseguirlo fue el siguiente. Haciendo $\alpha = \frac{f}{g}$:

$$\int_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx = \frac{g^{n+1}}{f+(n+1)g}\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}.$$

Y despejando:

$$\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)} = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int_0^1 x^{\frac{f}{g}}(1-x)^n dx. \tag{1.4}$$

Euler observó entonces que podía aislar $1\cdot 2\cdots n$ si hacía $f=1$ y $g=0$ en el primer miembro de (1.4); pero con ello obtenía una indeterminación en el segundo miembro, que escribió así:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{0}}(1-x)^n}{0^{n+1}} dx.$$

Para tratar de encontrar el valor de la última expresión, la primera idea fue sustituir x por $x^{\frac{g}{f+g}}$, de donde obtuvo

$$\frac{g}{f+g}x^{\frac{-f}{g+f}}dx$$

en lugar de dx. Luego, el segundo miembro de (1.4) quedaba:

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int \frac{g}{f+g}\left(1-x^{\frac{g}{g+f}}\right)^n dx.$$

Escribiendo esta integral, presumiblemente, en la forma

$$\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int \left(\frac{1-x^{\frac{g}{f+g}}}{\frac{g}{(f+g)}}\right)^n dx,$$

Euler ensayó de nuevo los valores $f=1$ y $g=0$, lo que le condujo a la indeterminación:

$$\int \frac{(1-x^0)^n}{0^n} dx.$$

Consideró ahora el cociente $\frac{1-x^z}{z}$, con z próximo a 0, y derivó numerador y denominador mediante la regla de L'Hôpital, obteniendo:

$$\frac{-x^z \log x\, dz}{dz},$$

expresión que para $z=0$ da $-\log x$. Luego,

$$\frac{1-x^0}{0} = -\log x,$$

y

$$\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (-\log x)^n.$$

De esta manera concluyó que

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \, dx.$$

Esto le proporcionó el resultado que andaba buscando: la expresión del factorial como una integral, extensible a otros valores distintos de los enteros positivos.

No obstante, la función Gamma es generalmente introducida hoy en día mediante la integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt, \tag{1.5}$$

representación que, al igual que la notación Γ, es debida al matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833). En 1809, Legendre denominó *integral euleriana de segunda especie* a esta integral e *integral euleriana de primera especie* a la integral (1.3) con la que Euler inició su deducción, que hoy conocemos como función Beta:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \, dx.$$

Mediante herramientas de cálculo avanzado, se establece inmediatamente que la integral del segundo miembro de (1.5) tiene sentido para $x > 0$ y, por tanto, la función Gamma está definida para esos valores de x. Además, por propia construcción,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

cuando n es un entero positivo. Se demuestra también que para todo número real $x > 0$ se verifica la relación de recurrencia

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1),$$

generalización de la igualdad $(n+1)n! = (n+1)!$, válida para enteros positivos n. Esta relación tuvo una importancia creciente a la hora de extender la teoría de la función Gamma en los años posteriores a Euler. Junto con la expresión

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

que conecta las dos integrales eulerianas, y la importante fórmula de Stirling

$$\Gamma(x) = \exp^{-x} x^{x-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi},$$

que proporciona una aproximación relativamente simple a $\Gamma(x)$ cuando x es grande (aproximación en la que tendremos ocasión de detenernos a lo largo del trabajo), es prácticamente todo lo que un estudiante de cálculo avanzado aprende en la actualidad sobre la función Gamma. Cronológicamente hablando, esto nos sitúa, aproximadamente, en el año 1750.

La siguiente parte del juego, la extensión de la función Gamma a los números negativos y posteriormente a los números complejos, se produjo a principios del siglo XIX y formó parte del desarrollo general de la teoría de funciones de variable compleja que habría de configurar uno de los grandes capítulos de las matemáticas. El movimiento hacia el plano complejo fue iniciado por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855), tomando como punto de partida el producto infinito de Euler. La culminación de esta tarea involucró a muchos nombres famosos y requirió un mayor trabajo y una mayor reflexión. A ello dedicaremos el resto de esta memoria.

CAPÍTULO 2

Representaciones y ecuaciones funcionales

2.1. Introducción

Presentaremos en este capítulo diferentes expresiones y aproximaciones disponibles en la literatura para la función Gamma: integral definida (Euler), límite infinito (Gauss), producto infinito (Euler, Weierstrass), integral de contorno (Hankel) y fórmula de Stirling. También discutiremos algunas ecuaciones funcionales satisfechas por la función Gamma: recurrencia, reflexión, multiplicación y duplicación. Además, introduciremos la función Beta y analizaremos la conexión entre la función Gamma y la función ζ de Riemann.

A lo largo de todo el capítulo adoptaremos la notación

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}.$$

2.2. Integral de segunda especie de Euler

Tal como se vio en el capítulo anterior, la función Gamma fue obtenida por Euler en 1729 como solución al problema de encontrar funciones que, restringidas a los enteros positivos, tomaran los valores del correspondiente factorial. En aquel tiempo, el término función era entendido como una fórmula expresada mediante operaciones algebraicas y de cálculo integrodiferencial.

La primera solución de Euler fue la representación de la función Gamma en productos infinitos (1.2). Sin embargo, para nuestro propósito de encontrar otras expresiones de dicha función resulta más útil partir de la forma integral.

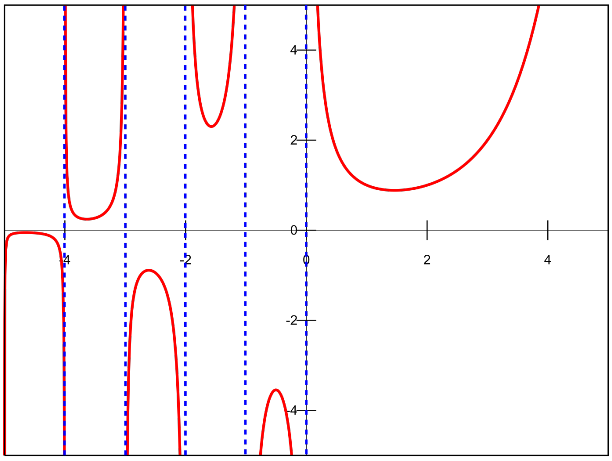

Figura 2.1. La función Gamma real.

Definición 2.2.1 (Función Gamma)**.** *Definimos*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{H}, \tag{2.1}$$

donde $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$ *y* $\log t$ *es el logaritmo real.*

2.3. Relación de recurrencia

A continuación probaremos una generalización de la identidad $n! = n(n-1)!$.

Proposición 2.3.1 (Relación de recurrencia)**.** *Se verifica:*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{H}. \tag{2.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Integrando por partes en (2.1):

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{H}.$$

□

La relación anterior se extiende de forma inductiva para todo número natural n:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z) = (z)_n\Gamma(z), \tag{2.3}$$

donde

$$(z)_n = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z$$

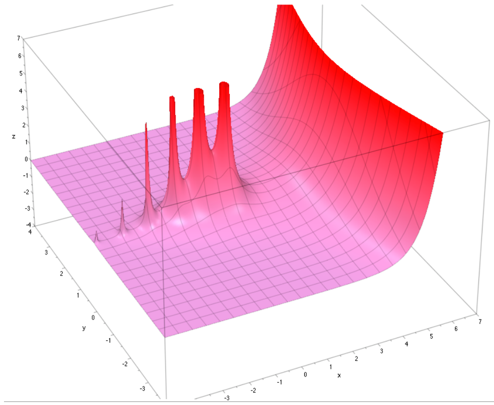

Figura 2.2. Módulo de la función Gamma. [Fuente: Mathematics Stack Exchange, autor: R. Manzoni].

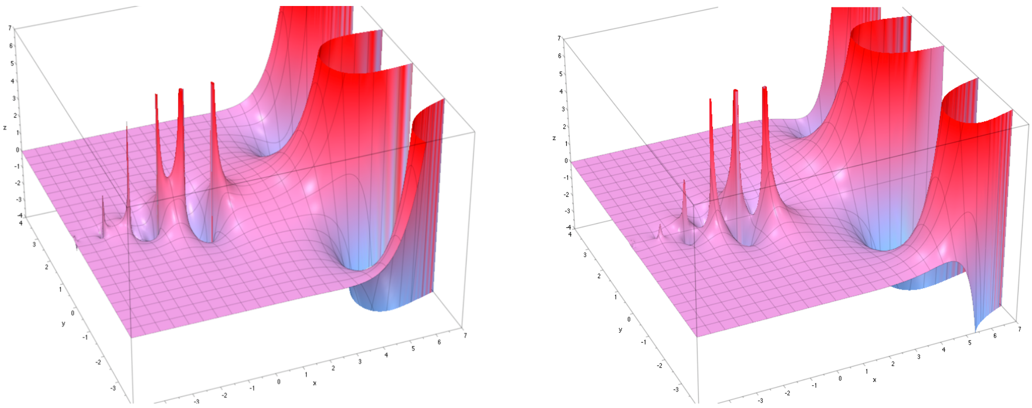

Figura 2.3. Parte real (i) y parte imaginaria de la función Gamma. [Fuente: Mathematics Stack Exchange, autor: R. Manzoni].

es el *símbolo de Pochhammer.* La fórmula (2.3) equivale a la siguiente expresión:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{1}{(z)_n}\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z+n-1} dt, \tag{2.4}$$

la cual extiende la definición de la función Gamma a $\Re z > -n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, haciendo $z = 1$ en (2.1) y (2.3), respectivamente, encontramos que

$$\Gamma(1) = 1 \tag{2.5}$$

y, por tanto,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

El siguiente resultado establece que $\Gamma(z)$ es una función meromorfa, cuyas singularidades $z = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ son todas polos simples.

Teorema 2.3.2. *La función Gamma es holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots,-n,\dots\}$*. Si* $n \in \mathbb{N}$*, tiene un polo simple en* $z=-n$*, con residuo* $\frac{(-1)^n}{n!}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que $z \in \mathbb{H}$. El integrando de

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

es holomorfo en z para cada $t > 0$, y la integral converge, pero esto no es suficiente para garantizar su holomorfía. Sin embargo, será suficiente probar que además el integrando está mayorado en todo subconjunto compacto de $\mathbb{H}$ por una función integrable de t que es independiente de z.

Sea entonces K un subconjunto compacto de $\mathbb{H}$. Podemos encontrar $a, b > 0$ tales que $z \in K$ implica $a < \Re z < b$. Definamos

$$g_K(t) = \text{máx}\{t^{a-1}, t^{b-1}\}, \quad 0 < t < \infty.$$

Claramente $|t^{z-1}| = t^{\Re z-1} \le g_K(t)$, para cada $t > 0$. Como $g_K(t)$ es integrable en $\mathbb{R}_+$ con respecto a $d\mu = e^{-t} dt$, la integral original es holomorfa como función de $z \in \mathbb{H}$.

Ahora, fijemos $N \in \mathbb{N}$ y consideremos el semiplano

$$\mathbb{H}_N = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -N\}.$$

Por (2.4),

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+N)}{(z)_N}, \quad z \in \mathbb{H}_N \setminus \{0,-1,\dots,-N+1\}. \tag{2.6}$$

Acabamos de probar que $\Gamma(z+N)$ es una función holomorfa de $z+N$ si $\Re(z+N) > 0$, y por lo tanto de z si $\Re z > -N$. Por otro lado, como $(z)_N = (z+N-1)(z+N-2)\cdots(z+1)z$ es un polinomio con ceros simples en $z = 0,-1,\dots,-N+1$, la función del segundo miembro de (2.6) es holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}_N$ excepto por polos simples en $0,-1,\dots,-N+1$. Ya que N puede ser arbitrariamente grande, se concluye que $\Gamma(z)$ es holomorfa excepto por polos simples en $0,-1,-2,\dots$.

Finalmente, si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z)_{n+1}}, \quad 0 < |z+n| < 1.$$

El residuo del polo en $-n$ es:

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

□

2.4. Límite infinito de Gauss

Teniendo en cuenta la expresión de e^{-t} como un límite:

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n,$$

la función Gamma puede ser contemplada como el límite de la integral

$$P_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt.$$

Comprobemos que $P_n(z) \to \Gamma(z)$ cuando $n\to\infty$. Se tiene, en efecto:

$$\Gamma(z) - P_n(z) = \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt + \int_n^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt.$$

Es fácil ver que el segundo sumando del segundo miembro se hace cero cuando $n\to\infty$. Para el primer sumando, utilizaremos la siguiente acotación:

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2}{n} e^{-t}. \tag{2.7}$$

Admitiendo (2.7), podemos escribir:

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt\right| \le \int_0^n \frac{1}{n} e^{-t} t^{x+1}\,dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t} t^{x+1}\,dt \to 0, \quad n\to\infty,$$

donde $x = \Re z$. Así pues, $P_n(z)\to\Gamma(z)$ cuando $n\to\infty$.

Probemos ahora (2.7). Atendiendo al desarrollo en serie de e^y y de $(1-y)^{-1}$:

$$e^y = \sum_{n=0}^\infty \frac{y^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^\infty y^n, \quad |y|<1,$$

encontramos que

$$1+y \le e^y \le \frac{1}{1-y}, \quad 0\le y<1.$$

Sea $y = \frac{t}{n}$. Entonces:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \ge e^{-t} \ge \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

De esta suerte,

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \le e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right];$$

en el último paso se ha hecho uso de la desigualdad

$$e^t \geq \left(1+\frac{t}{n}\right)^n.$$

Por inducción, se puede probar que si $0 \leq \alpha \leq 1$ entonces $(1-\alpha)^n \geq 1-n\alpha$; de aquí

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n},$$

lo que establece (2.7).

Hagamos ahora $t = n\tau$ en $P_n(z)$. Integrando por partes n veces y puesto que $\Re z > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} P_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau &= n^z \left[\frac{\tau^z}{z}(1-\tau)^n\right]_0^1 + \frac{n^z n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z d\tau \\ &= \dots \\ &= \frac{n^z n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n^z n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\frac{1}{z+n} \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} n^z. \end{aligned}$$

Nos vemos conducidos así la siguiente formulación de la función Gamma, propuesta por Gauss:

Proposición 2.4.1 (Fórmula de Gauss)**.**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} n^z, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,-3,\dots\}. \tag{2.8}$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z+n} = 1,$$

podemos escribir (2.8) en la forma

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} n^z, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,-3,\dots\}. \tag{2.9}$$

2.5. Producto infinito de Euler

Se comprueba fácilmente que

$$n^z = \prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z.$$

Por otra parte, el factor que precede a n^z en (2.9) puede ser escrito como

$$\frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+z}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\cdots\frac{1}{1+\frac{z}{n-1}}\right]\\ &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+z}\frac{2}{2+z}\cdots\frac{n-1}{z+n-1}\right] = \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.\end{aligned}$$

Luego, podemos expresar la función Γ como sigue:

Proposición 2.5.1 (Producto infinito de Euler)**.**

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right], \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}.$$

2.6. Producto infinito de Weierstrass

El factor n^z compareciente en (2.8) también puede ser expresado en la forma:

$$n^z = e^{z\log n} = \exp\left\{z\left[\log n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n} e^{\frac{z}{m}}.$$

Se infiere entonces:

Proposición 2.6.1 (Producto infinito de Weierstrass)**.**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right], \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,-3,\ldots\}, \tag{2.10}$$

siendo γ *la denominada* constante de Euler-Mascheroni*:*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \log n\right) \approx 0{,}5772156649.$$

El producto infinito (2.10) proporciona los valores de $\Gamma(z)$ para cualquier z y al mismo tiempo pone de manifiesto que las singularidades de $\Gamma(z)$ son polos simples: $z = 0,-1,-2,\ldots$; no hay ceros.

De la igualdad

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}=\sum_{m=1}^{n}\int_0^1 x^{m-1}dx=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}dx=\int_0^1\frac{1-(1-y)^n}{y}dy=\int_0^n\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{dt}{t}$$

se sigue que

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\log n=\int_0^n\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{dt}{t}-\int_1^n\frac{dt}{t}=\int_0^1\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\frac{dt}{t}-\int_1^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\frac{dt}{t}.$$

Haciendo $n\to\infty$, concluimos:

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt-\int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt.$$

2.7. Relación con las funciones trigonométricas: fórmula de reflexión de Euler

La representación de Weierstrass permite encontrar una relación entre la función Gamma y las funciones trigonométricas.

En virtud de (2.10),

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right]^{-1}=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}.$$

Por otra parte,

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{2.11}$$

Consecuentemente,

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\operatorname{sen}\pi z}.$$

Mediante la fórmula de recurrencia (2.2), obtenemos:

Proposición 2.7.1 (Fórmula de reflexión). *Si $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, se verifica:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}, \tag{2.12}$$

o, de forma más simétrica:

$$\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

Haciendo $z=\frac{1}{2}$ en (2.12) encontramos que $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$, y puesto que (por definición) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$, necesariamente

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{2.13}$$

Nótese que haciendo $z = \frac{1}{2}$ en (2.11) obtenemos el *producto de Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{m} \frac{2n}{2n-1}\right)^2 \frac{1}{2m+1}.$$

2.8. Fórmula de multiplicación de Gauss

Proposición 2.8.1 (Fórmula de multiplicación)**.** *Para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, *se verifica:*

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz). \tag{2.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\phi = \frac{n^{nz}}{n\Gamma(nz)} \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(z+\frac{r}{n}\right). \tag{2.15}$$

Aplicando la fórmula (2.9) resulta

$$\begin{aligned}
\phi &= n^{nz-1} \frac{\displaystyle\prod_{r=0}^{n-1} \lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(m-1)}{\left(z+\frac{r}{n}\right)\left(z+\frac{r}{n}+1\right)\cdots\left(z+\frac{r}{n}+m-1\right)} m^{z+\frac{r}{n}}}{\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdots(nm-1)}{nz(nz+1)\cdots(nz+nm-1)}(nm)^{nz}} \\
&= n^{nz-1} \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n m^{nz+\frac{1}{2}(n-1)} n^{nm}}{(nm-1)!(nm)^{nz}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{[(m-1)!]^n m^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{nm-1}}{(nm-1)!},
\end{aligned}$$

lo que prueba que ϕ es independiente de z.

Sustituyendo $z = \frac{1}{n}$ en (2.15) encontramos que

$$\phi = \prod_{r=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{r+1}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right);$$

en el último paso se ha reemplazado r por $n-r$. Usando ahora (2.12),

$$\phi^2 = \prod_{r=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{n}\right) = \pi^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi r}{n}\right)^{-1}. \tag{2.16}$$

Sean $z = e^{\frac{2\pi r i}{n}}$, $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ las raíces n-ésimas de la unidad. Entonces

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \sum_{r=0}^{n-1} z^r = \prod_{r=1}^{n-1} \left(z - e^{\frac{2\pi r i}{n}}\right).$$

Haciendo aquí $z = 1$ obtenemos

$$n = \prod_{r=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2\pi r i}{n}}\right) = \prod_{r=1}^{n-1} e^{\frac{\pi r i}{n}} \left(-2i \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}\right) = e^{\frac{\pi}{2}(n-1)i} 2^{n-1} (-i)^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n} = 2^{n-1} \prod_{r=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi r}{n}.$$

Sustituyendo en (2.16),

$$\phi^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}.$$

Finalmente, tomando raíces cuadradas y sustituyendo en (2.15) resulta (2.14). □

2.9. Fórmula de duplicación de Legendre

Proposición 2.9.1 (Fórmula de duplicación)**.**

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta particularizar $n = 2$ en (2.14). □

2.10. Integral de contorno de Hankel

Consideremos la siguiente integral de contorno:

$$I = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

El contorno empieza en ∞ cerca del semieje real positivo y lo recorre paralelamente hacia la izquierda por el semiplano superior, rodea al origen una vez en sentido positivo y regresa al infinito por el semiplano inferior (figura (3.2)).

Esta integral de contorno existe para todo valor de z, y por lo tanto proporciona una base para definir $\Gamma(z)$ en general.

Para encontrar la relación entre I y $\Gamma(z)$, supongamos primero que z está confinado al semiplano derecho ($\Re z > 0$) y no es un número entero.

Deformamos el contorno descomponiéndolo en tres partes: la primera parte comienza en $t = +\infty$ y recorre el eje real por el semiplano superior hasta el punto $t = \delta (> 0)$, siendo δ arbi-

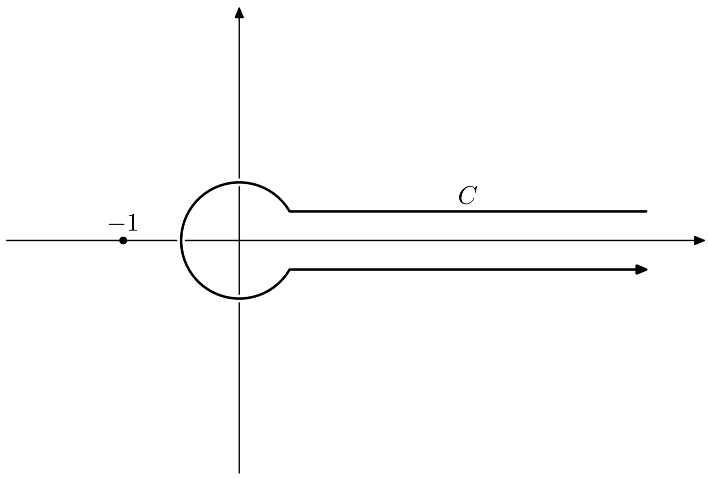

Figura 2.4. Contorno C introducido en 1864 por Hermann Hankel (1839–1873) en sus investigaciones sobre la función Gamma.

trariamente pequeño; la segunda parte es una circunferencia de radio δ alrededor del origen en sentido positivo; y la tercera parte es una línea recta que va desde $t=\delta$ en el semiplano inferior a lo largo del eje real hasta $t=+\infty$.

Denotaremos por I_1, I_2, I_3 las integrales sobre cada una de las tres partes del contorno. Para especificar la función multivaluada t^{z-1} tomaremos $\arg t = 0$ en I_1, con lo que $\arg t$ queda totalmente determinada en I_2 y en I_3; mientras que en I_3, $\arg t = 2\pi$. Por tanto, estas tres integrales quedan de la siguiente forma:

$$I_1 = \int_{\infty}^{\delta} e^{-t} t^{z-1} dt = -\int_{\delta}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{-\delta e^{i\theta}} \left(\delta e^{i\theta}\right)^{z-1} \delta e^{i\theta} i\, d\theta = \delta^z \int_0^{2\pi} e^{-\delta\cos\theta - i\delta\operatorname{sen}\theta + iz\theta} i\, d\theta,$$

$$I_3 = e^{2\pi z i} \int_{\delta}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Como se ha supuesto $\Re z > 0$, se puede probar que $I_2 \to 0$, así que $I_1 + I_3 \to I$ cuando $\delta \to 0$. Entonces

$$I = (e^{2\pi z i} - 1)\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = (e^{2\pi z i} - 1)\Gamma(z) = 2i e^{\pi z i} \operatorname{sen}\pi z\, \Gamma(z).$$

Finalmente,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\operatorname{sen}\pi z}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{z-1} dt, \quad |\arg(-t)| < \pi. \tag{2.17}$$

Pese a que esta relación ha sido obtenida bajo la hipótesis de que $\Re z > 0$, la integral de contorno no está restringida a ningún valor de z, luego tal condición puede ser omitida en virtud del principio de prolongación analítica.

Sin embargo, (2.17) no vale si z es entero, ya que su segundo miembro es una indeterminación cuando z es un entero positivo y se hace ∞ cuando z es un entero negativo. Ahora bien, usando la fórmula (2.12) podemos escribir

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{z-1}\,dt, \quad |\arg(-t)| < \pi, \tag{2.18}$$

expresión que es válida para todo z, incluyendo los enteros.

Si en (2.18) cambiamos $1-z$ por z resulta

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{z}\,dt, \quad |\arg(-t)| < \pi. \tag{2.19}$$

Y cambiando t por $-t$ obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{t}t^{-z}\,dt, \quad |\arg t| < \pi; \tag{2.20}$$

el contorno comienza en $t=-\infty$ en el semieje real negativo, rodea el origen una vez en sentido positivo y vuelve al punto de partida.

Las integrales de contorno (2.19) y (2.20) son válidas para cualquier valor de z, y por lo tanto proporcionan una expresión general de la función $\Gamma(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

En lo que se refiere a esta sección, los contornos considerados pueden ser rotados alrededor del origen por un ángulo α sin afectar los valores de las integrales, con tal de que $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Por ejemplo, de (2.20) se obtiene

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0+)} e^{t}t^{-z}\,dt, \quad |\arg t-\alpha| < \pi.$$

2.11. La función Beta

Es ya el turno de la conocida como *integral euleriana de primera especie* o función Beta de Euler.

Definición 2.11.1 (Función Beta)**.** *Definimos la* función Beta *como sigue:*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p,q\in\mathbb{H}. \tag{2.21}$$

Esta integral efectivamente existe para $\Re p>0$, $\Re q>0$. Mediante la transformación $x=1-t$, es fácil ver que

$$B(p,q) = B(q,p).$$

Otra propiedad relevante de esta función es su relación con la función Gamma:

Proposición 2.11.2. *Se tiene:*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q \in \mathbb{H}. \tag{2.22}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el producto

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-u}u^{p-1}du \int_0^\infty e^{-v}v^{q-1}dv.$$

Poniendo $u = x^2$, $v = y^2$ llegamos a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

Mediante un cambio a coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2q-1}d\theta. \tag{2.23}$$

Haciendo $r^2 = t$ en la primera integral, tenemos:

$$\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{p-q-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(p+q). \tag{2.24}$$

Si en la segunda integral hacemos $\cos\theta = x$, queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\mathrm{sen}\,\theta)^{2q-1}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{1}{2}B(p,q). \tag{2.25}$$

Sustituyendo ahora (2.24) y (2.25) en (2.23) resulta

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\frac{1}{2}\Gamma(p+q)\frac{1}{2}B(p,q),$$

o bien

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q),$$

que es el resultado esperado. □

De nuevo, las hipótesis $\Re p, \Re q > 0$ son evitables en virtud de la igualdad (2.22) y del principio de prolongación analítica.

La función Beta es útil en el cálculo de algunas integrales.

Ejemplo 2.11.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^p(\mathrm{sen}\,\theta)^q d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

RESOLUCIÓN. Basta sustituir $2p$ y $2q$ por $p+1$ y $q+1$, respectivamente, en (2.25) y aplicar (2.22). □

Ejemplo 2.11.4. *Se verifica:*

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^p \, dr = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{2.26}$$

En particular,

$$\int_0^\infty e^{-r^2} \, dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{2.27}$$

RESOLUCIÓN. La igualdad (2.26) se obtiene reemplazando $2(p+q)-1$ por p en (2.24), mientras que (2.27) resulta sin más que tomar $p=0$ en (2.26) y tener en cuenta (2.13):

$$\int_0^\infty e^{-r^2} \, dr = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

□

Ejemplo 2.11.5. *Se tiene:*

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \, dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

En particular,

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}.$$

RESOLUCIÓN. Poniendo $x = \frac{t}{1+t}$ en (2.21) y usando (2.22),

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} \, dt = B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Si ahora suponemos $0 < \Re p < 1$, sin más que hacer $q = 1-p$ y tener en cuenta (2.5) junto con la fórmula de reflexión (2.12) ya se infiere:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1+t} \, dt = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}.$$

□

2.12. Fórmula de Stirling en el plano complejo

La fórmula de Stirling para el factorial es

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(n) n^{\frac{1}{2}-n} e^n = \sqrt{2\pi}, \tag{2.28}$$

donde n tiende a infinito en $\mathbb{N}$. En esta sección probaremos que la misma fórmula vale cuando n tiende a infinito en $\mathbb{C}$ de cualquier manera, siempre que permanezca suficientemente lejos del semieje real negativo; es decir, siempre que $|\arg n| < \pi$. Esta restricción es esencial porque, como sabemos, la función Gamma tiene polos en los enteros negativos.

Comenzaremos con un resultado preliminar pero de gran interés en sí mismo.

Proposición 2.12.1. *Sea* $\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \pi\}$. *Si* $z \in \mathbb{C}_0$, *entonces*

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)}, \tag{2.29}$$

siendo

$$\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(z + n - \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{z+n}{z+n-1} \right) - 1 \right].$$

Aquí, $z + n \in \mathbb{C}_0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $z^{z-\frac{1}{2}} = e^{(z-\frac{1}{2}) \log z}$, *y se toman los valores principales de todos los logaritmos.*

Demostración. Combinando la fórmula del límite infinito de Gauss (2.9) con la fórmula de Stirling (2.28) se obtiene

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Gamma(N) N^z}{z(z+1)\cdots(z+N-1)} = \sqrt{2\pi} \lim_{N\to\infty} \frac{N^{z+N-\frac{1}{2}} e^{-N}}{z(z+1)\cdots(z+N-1)}. \tag{2.30}$$

El denominador es

$$\begin{aligned} z(z+1)\cdots(z+N-1) &= \frac{1}{z^{z-\frac{1}{2}}} \left(\frac{z}{z+1} \right)^{z+\frac{1}{2}} \left(\frac{z+1}{z+2} \right)^{z+\frac{3}{2}} \cdots \left(\frac{z+N-1}{z+N} \right)^{z+N-\frac{1}{2}} (z+N)^{z+N-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(z+N)^{z+N-\frac{1}{2}}}{z^{z-\frac{1}{2}}} \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{z+n-1}{z+n} \right)^{z+n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para cualquier $w \in \mathbb{C}$ se tiene que $w^z = e^{z \log w}$, donde $\log w$ toma su valor principal. Así

$$\left(\frac{z+n-1}{z+n} \right)^{z+n-\frac{1}{2}} = e^{-u(z+n-\frac{1}{2})},$$

donde

$$u(\zeta) = \zeta \log \frac{\zeta + \frac{1}{2}}{\zeta - \frac{1}{2}}.$$

Ahora basta sustituir en (2.30) para concluir que

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N}{z+N}\right)^{z+N-\frac{1}{2}} e^{-N} \prod_{n=1}^{N} e^{u(z+n-\frac{1}{2})} \\ &= \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} \lim_{N\to\infty} \left(1+\frac{z}{N}\right)^{-z-N+\frac{1}{2}} e^{\sum_{n=1}^{N}[u(z+n-\frac{1}{2})-1]} \\ &= \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{\mu(z)},\end{aligned}$$

con

$$\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u\left(z+n-\frac{1}{2}\right)-1\right]. \tag{2.31}$$

□

Teorema 2.12.2 (Fórmula de Stirling)**.** *Sea* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *tal que* $0<\varepsilon\le\pi$*, y supongamos que* $z \in \mathbb{C}$ *tiende a infinito en el sector* $|\arg z| \le \pi-\varepsilon$*. Entonces*

$$\lim_{z\to\infty} \Gamma(z) z^{\frac{1}{2}-z} e^{z} = \sqrt{2\pi}.$$

DEMOSTRACIÓN. En virtud de (2.29), será suficiente probar que el límite de $\mu(z)$ es cero.

El término general de la serie (2.31) tiene módulo

$$\left|u\left(z+n-\frac{1}{2}\right)-1\right| = \left|\left(z+n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{z+n}{z+n-1}-1\right| < \left|\frac{1}{3(|2z+2n-1|^2-1)}\right|, \tag{2.32}$$

siempre que $|2z+2n-1|>1$. Ya que el término general tiende a cero cuando $z\to\infty$, será suficiente ver que podemos tomar el límite de la serie término a término, y a tal fin estableceremos su convergencia uniforme para todo z suficientemente grande satisfaciendo $|\arg z| \le \pi-\varepsilon$.

Si $z=|z|e^{i\theta}$, $|\theta|\le\pi-\varepsilon$, entonces $\cos\theta \ge -\cos\varepsilon$. Por tanto, para $n\in\mathbb{N}$,

$$|2z+2n-1|^2 = |2z|^2+2(2n-1)|2z|\cos\theta+(2n-1)^2 \ge |2z|^2-2(2n-1)|2z|\cos\varepsilon+(2n-1)^2.$$

Esta última expresión es de la forma

$$a^2-2ab\cos\varepsilon+b^2 = a^2\operatorname{sen}^2\varepsilon+(a\cos\varepsilon-b)^2 \ge a^2\operatorname{sen}^2\varepsilon,$$

donde a y b son positivos y pueden ser intercambiados para obtener una segunda desigualdad. Por lo tanto,

$$|2z+2n-1| \ge 2|z|\operatorname{sen}\varepsilon$$

y
$$|2z+2n-1| \geq (2n-1)\operatorname{sen}\varepsilon \geq n\operatorname{sen}\varepsilon.$$

Sea
$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \pi - \varepsilon,\ |z| \geq \frac{1}{\operatorname{sen}\varepsilon} \right\}.$$

Entonces $z \in S$ implica
$$|2z+2n-1| \geq 2$$

y
$$|2z+2n-1|^2 - 1 \geq \frac{3}{4}|2z+2n-1|^2 \geq \frac{3}{4} n^2 \operatorname{sen}^2 \varepsilon.$$

Así, (2.32) se convierte en
$$\left| u\left(z+n-\frac{1}{2}\right) - 1 \right| < \frac{4}{9\operatorname{sen}^2 \varepsilon} \frac{1}{n^2}, \quad z \in S,\ n = 1,2,\ldots.$$

En definitiva, la serie (2.31) está mayorada en S por una serie numérica convergente. El criterio M de Weierstrass garantiza su convergencia uniforme y completa la demostración. □

2.13. La función ζ de Riemann

Esta función debe su nombre al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), quien en su manuscrito de 1859, al desarrollar una fórmula explícita para calcular la cantidad de números primos menores que uno dado, formuló una importante conjetura sobre la distribución de sus ceros: Riemann afirmó que la función zeta tiene infinitas raíces no triviales, todas con parte real igual a $\frac{1}{2}$. Tal afirmación, conocida como *hipótesis de Riemann*, permanece hoy en día como uno de los más importantes problemas abiertos en matemáticas.

Consultando cualquier libro de teoría analítica de números se pueden encontrar múltiples resultados fascinantes sobre la función zeta de Riemann, sus aplicaciones a la teoría de números y sus conexiones con la función Gamma.

En la presente sección se establecerá una de las identidades que relacionan estrechamente la función zeta de Riemann con la función Gamma. Como consecuencia, se probará que la función zeta puede ser extendida analíticamente como una función meromorfa en todo el plano complejo, con un único polo simple en $z = 1$, de residuo 1.

Definición 2.13.1. *La función ζ de Riemann se define por:*
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \Re z > 1.$$

Teorema 2.13.2. *Si* $\Re z > 1$*, entonces*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

DEMOSTRACIÓN. La fórmula de la suma de una serie geométrica muestra que si $t > 0$, entonces

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt};$$

la serie converge uniformemente en compactos de $(0,\infty)$. Supongamos que $z = x + iy$, con $x > 1$ e $y \in \mathbb{R}$. Como $\frac{1}{e^t-1} \le \frac{c}{t}$ para $t > 0$ suficientemente pequeño y $\frac{1}{e^t-1} \le \frac{c}{e^t}$ para $t > 0$ grande ($c > 0$), se sigue que

$$\int_0^\infty g(t)\, dt < \infty$$

si $g(t) = \frac{t^{x-1}}{e^t-1}$. Además,

$$\left| t^{z-1} \sum_{n=1}^{N} e^{-nt} \right| \le g(t)$$

para todo t>0. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt &= \int_0^\infty t^{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-nt}\, dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{z-1} e^{-t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \\
&= \zeta(z)\Gamma(z).
\end{aligned}$$

□

Luego, para $\Re z > 1$ tenemos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt + F(z).$$

Mediante los teoremas de Fubini y Morera se demuestra sin dificultad que la función F es entera, por lo que centraremos nuestra atención en la integral entre 0 y 1.

Sea

$$\phi(t) = \frac{1}{e^t - 1}.$$

Entonces ϕ es holomorfa en el disco perforado $0 < |t| < 2\pi$ y tiene un polo simple con residuo 1 en el origen; así pues,

$$\phi(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

donde la serie de potencias tiene radio de convergencia 2π; en particular, $|a_n| \leq c2^{-n}$. La definición de ϕ muestra que $\phi(t)+\phi(-t) = -1$; por lo tanto $a_0 = -\frac{1}{2}$ y $a_{2k} = 0$ para $k = 1,2,\ldots$, de manera que

$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{2k+1},$$

con $b_k = a_{2k+1}$. Ahora, si $\Re z > 1$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^{z-1} b_k t^{2k+1}$$

converge uniformemente en $(0,1)$, ya que $|b_k| \leq c2^{-2k}$, por lo cual

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{z-1}\phi(t)\,dt &= \int_0^1 t^{z-2}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t^{z-1}\,dt + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^1 t^{z+2k}\,dt \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z+(2k+1)} = G(z).\end{aligned}$$

Como $|b_k| \leq c2^{-2k}$, la serie que define G converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus (\{0,1\} \cup \{-2k-1 : k = 0,1,\ldots\})$ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en 0 y 1, posibles (no hemos probado que $b_k \neq 0$) polos en $-2k-1$, y ningún polo más.

Puesto que $\frac{1}{\Gamma}$ es entera, de aquí se sigue que

$$\zeta(z) = \frac{G(z)+F(z)}{\Gamma(z)}$$

es meromorfa en todo $\mathbb{C}$. Y puesto que $\Gamma(1) = 1$, resulta que ζ tiene un polo en 1 con residuo 1; todos los demás posibles polos de $G+F$ se cancelan con los ceros de $\frac{1}{\Gamma}$. Luego, ζ es holomorfa en todo el plano complejo excepto por el polo en 1. Considerando los otros ceros de $\frac{1}{\Gamma}$ que no son cancelados por polos de $G+F$ nos vemos conducidos al siguiente resultado.

Teorema 2.13.3. *La función zeta se extiende a una función holomorfa en* $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, *con un polo simple en* $z = 1$ *de residuo* 1 *y ceros en* $-2k$, $k = 1,2,\ldots$.

Los ceros de la función zeta en los enteros negativos pares se conocen como *ceros «triviales»*. Es relativamente fácil ver que los ceros triviales son los únicos ceros fuera de la *«banda crítica»* definida por $0 < \Re z < 1$. La localización de los ceros dentro de la banda crítica es de gran importancia en teoría de números. Se sabe que hay infinitos ceros dentro de esta banda, y la hipótesis de Riemann aludida al principio de esta sección conjetura que todos ellos se encuentran sobre la recta $\Re z = \frac{1}{2}$.

En efecto, el *teorema de los números primos* afirma que si $\pi(x)$ es el número de primos p con

$p \leq x$, entonces

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

cuando $x \to +\infty$. Los intentos de probar este resultado fueron la motivación principal para el enorme desarrollo experimentado por el análisis complejo a finales del siglo XIX. El hecho de que $\zeta(1+iy) \neq 0$ es una parte importante de la demostración, y la veracidad de la hipótesis de Riemann implicaría versiones mejoradas del teorema de los números primos, proporcionando mayor información sobre la velocidad de convergencia.

CAPÍTULO 3

Teoremas de unicidad

3.1. Introducción

La función Gamma no está unívocamente determinada por la ecuación funcional (2.2):

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0;$$

de hecho, si f es cualquier función periódica de periodo 1, por ejemplo $f = \operatorname{sen} 2\pi x$, entonces la función producto $f\Gamma$ también satisface la misma ecuación funcional.

En este capítulo daremos dos caracterizaciones de la función Gamma que involucran a la ecuación anterior: una como función holomorfa en el semiplano derecho $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$ (teorema de Wielandt), y otra como función sobre los reales positivos (teorema de Bohr-Mollerup).

3.2. El teorema de Wielandt

Teorema 3.2.1 (Wielandt)**.** *Supongamos que la función G:*

(i) es holomorfa en el semiplano derecho $\mathbb{H}$,

(ii) está acotada en la banda cerrada $\{1 \le \Re z \le 2\}$,

(iii) satisface la ecuación funcional $zG(z) = G(z+1)$, $z \in \mathbb{H}$, *y*

(iv) está normalizada por la condición $G(1) = 1$.

Entonces $G \equiv \Gamma$.

Figura 3.1. Helmut Wielandt (1910-2001).

DEMOSTRACIÓN. Sea $F(z) = G(z) - \Gamma(z)$. Entonces F satisface la ecuación funcional $zF(z) = F(z+1)$ y además $F(1) = 0$, así que F se anula en los enteros positivos. Por tanto, F se extiende a una función entera. En efecto, la propia ecuación funcional nos permite la extensión sin más que definir

$$F(z) = \frac{F(z+n)}{(z)_n}, \quad -n < \Re z \leq 2-n, \ n = 1,2,\ldots.$$

La función anterior es claramente holomorfa en todo punto salvo donde $(z)_n = 0$, es decir, salvo si $z = 0, -1, \ldots, 1-n$. Estos valores de z son ceros de $F(z+n)$ y ceros simples de $(z)_n$, y por lo tanto son singularidades evitables de F. En definitiva, la extensión de F así obtenida es entera.

La ecuación funcional y el hecho de que F es regular en 0 y acotada en la banda $\{1 \leq \Re z \leq 2\}$ implican que F está acotada en la banda más ancha $S = \{0 \leq \Re z \leq 2\}$. Por tanto, la función $f(z) = F(z)F(1-z)$ es entera y acotada en S. Además,

$$f(z+1) = zF(z)F(-z) = -F(z)(-z)F(-z) = -f(z),$$

así que $f(z+2) = f(z)$. Como f es acotada en una banda vertical de anchura 2, resulta que f es una función entera y acotada; por el teorema de Liouville, f es constante. Pero $f(1) = 0$, obligando a que $f \equiv 0$. Se concluye que $F \equiv 0$, como se pretendía. $\square$

 

Figura 3.2. De izquierda a derecha, Harald A. Bohr (1887-1951) y Johannes P. Mollerup (1872-1937).

3.3. El teorema de Bohr-Mollerup

Definición 3.3.1. *Sea f una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es* convexa *en I si*

$$f[ux + (1-u)y] \leq uf(x) + (1-u)f(y), \quad x, y \in I, \ u \in [0,1].$$

Si nunca se diera la igualdad salvo cuando $(x-y)u(1-u) = 0$, se dice que f es estrictamente convexa *en I.*

Definición 3.3.2. *Sea f una función real definida y estrictamente positiva en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que f es* logarítmicamente convexa *en I si $\log f$ es convexa en I, esto es, si*

$$f[ux + (1-u)y] \leq [f(x)]^u [f(y)]^{1-u} \quad x, y \in I, \ u \in [0,1].$$

Análogamente, se dice que f es estrictamente logarítmicamente convexa *si $\log f$ es estrictamente convexa en I, es decir, si la desigualdad anterior es estricta salvo cuando $(x-y)u(1-u) = 0$.*

La siguiente caracterización parte del hecho de que $\log\Gamma$ es una función convexa en el intervalo $\{x > 0\}$. En efecto, la fórmula de Weierstrass (2.10) conduce a

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x}{k} - \log\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right],$$

de donde se sigue que

$$(\log\Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2},$$

la cual es positiva para $x > 0$; esto implica la convexidad. A continuación probaremos el recíproco.

Teorema 3.3.3 (Bohr-Mollerup)**.** *Supongamos que la función G:*

(i) está definida y es positiva en los reales positivos: $G(x) > 0$, $x > 0$;

(ii) *satisface la ecuación funcional* $xG(x) = G(x+1)$*;*

(iii) *es logarítmicamente convexa;*

(iv) *está normalizada por la condición* $G(1) = 1$*.*

Entonces $G(x) = \Gamma(x)$*,* $x > 0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f = \log G$. Gracias a la ecuación funcional, es suficiente probar que $G(x) = \Gamma(x)$, $0 < x < 1$.

Las hipótesis nos permiten inferir que $G(1) = G(2) = 1$ y que $G(3) = 2$, así que $f(1) = f(2) < f(3)$. La convexidad de f implica que f es creciente en $[2, \infty)$, y que para cada entero $n \geq 2$,

$$f(n) - f(n-1) \leq \frac{f(n+x) - f(n)}{x} \leq f(n+1) - f(n).$$

Por la ecuación funcional y la definición de f, esto equivale a que

$$(n-1)^x \leq \frac{G(x+n)}{G(n)} \leq n^x.$$

La ecuación funcional aplicada al cociente implica

$$\frac{(n-1)!(n-1)^x}{(x)_n} \leq \frac{G(x)}{G(1)} \leq \frac{(n-1)!n^x}{(x)_n}.$$

Teniendo en cuenta la normalización (iv), la fórmula (2.9) y el teorema del sandwich, por un paso al límite se concluye que $G(x) = \Gamma(x)$. $\square$

CAPÍTULO 4

Propiedades geométricas

4.1. Introducción

Como se ha visto en el capítulo precedente (teorema 3.3.3, de Bohr-Mollerup), el hecho de que $\log\Gamma(x)$ es convexo en el semieje real positivo es una de las propiedades cruciales de la función Gamma que, combinada con la ecuación funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y la normalización $\Gamma(1) = 1$, la caracteriza unívocamente.

En este capítulo extenderemos la propiedad de convexidad al plano complejo, usaremos esta extensión para obtener información sobre el argumento de $\Gamma(z)$ en líneas verticales, y describiremos algunas características de las aplicaciones conformes inducidas por $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ y por $\log\Gamma$.

Por comodidad, usaremos la notación

$$G(z) = \log\Gamma(z).$$

Además, pondremos $\mathbb{H}_a = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > a\}$ y denotaremos por $\overline{\mathbb{H}}_a$ la clausura de este conjunto.

4.2. El logaritmo y la derivada logarítmica de la función Gamma

Puesto que

$$\Re G''(x+iy) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log|\Gamma(x+iy)|,$$

el siguiente resultado afirma que $|\log\Gamma(x+iy)|$ es una función convexa de x en $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$, pero no en ningún semiplano mayor.

Teorema 4.2.1. *Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$.*

(i) Si $x \geq \frac{1}{2}$ entonces $\Re G''(x+iy) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $x < \frac{1}{2}$ entonces $\Re G''(x+iy) < 0$ para $y \in \mathbb{R}$ suficientemente grande.

DEMOSTRACIÓN. Empezaremos probando (ii), ya que su demostración nos da una pista de que $\frac{1}{2}$ podría ser el punto de corte entre (i) y (ii).

Definamos $\psi(s) = \frac{1}{2} - s$ en $(0,1]$ y $\psi(s+1) = \psi(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Podemos escribir la fórmula de Stirling (2.29) como sigue:

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \int_0^\infty \frac{\psi(s)}{s+z}\,ds \tag{4.1}$$

para todo $z \neq 0$ que no pertenezca al semieje real negativo. Derivando esta expresión dos veces y efectuando una integración por partes resulta:

$$G''(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + 6\int_0^\infty \frac{\varphi(s)}{(s+z)^4}\,ds, \tag{4.2}$$

donde $\varphi(s) = \int_0^s \psi(t)\,dt$. Como ψ tiene valor medio 0, φ es periódica y, por tanto, acotada. De hecho, es fácil ver que $0 \leq \varphi(s) \leq \frac{1}{8}$. De aquí:

$$\Re G''(x+iy) \leq \frac{2x^3 + x^2 + (2x-1)y^2}{2(x^2+y^2)^2} + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{ds}{\left[(s+x)^2 + y^2\right]^2}.$$

La última integral es $O(y^{-3})$, para $y \to \infty$. Cuando $2x - 1 \neq 0$, el término dominante (para x fijo e y grande) es entonces $\left(x - \frac{1}{2}\right)y^{-2}$. Este término es negativo cuando $x < \frac{1}{2}$, lo que establece (ii).

Ahora aplicamos logaritmos a la igualdad (2.12) y derivamos dos veces para obtener:

$$G''(z) + G''(1-z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}.$$

Como $\operatorname{sen}\pi\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \cos \pi i y = \operatorname{ch}\pi y$, se desprende que

$$G''\left(\frac{1}{2} + iy\right) + G''\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 \pi y},$$

o bien

$$2\Re G''\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 \pi y} > 0. \tag{4.3}$$

Finalmente, (4.2) prueba que G'' está acotada en $\mathbb{H}_\delta$, para todo $\delta > 0$. Como las funciones armónicas acotadas en un semiplano son las integrales de Poisson de sus valores de frontera, (4.3) implica (i). □

Teorema 4.2.2. *Se verifica:*

(i) Si $\frac{1}{2} \leq a < b$ *entonces*

$$\arg \frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)}$$

es una función creciente de y *en* $(-\infty, \infty)$.

(ii) Se llega al mismo resultado si $0 < a < \frac{1}{2}$ *y* $b > 1-a$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $G = \log \Gamma = u + iv$. Entonces $v = \arg \Gamma$, las ecuaciones de Cauchy-Riemann proporcionan $u_x = v_y$ y, por tanto, $v_{xy} = u_{xx} > 0$ en $\overline{\mathbb{H}}_{\frac{1}{2}}$ (teorema 4.2.1). Esto significa que $v_y(a+iy) < v_y(b+iy)$, o bien

$$\frac{\partial}{\partial y} \arg \Gamma(a+iy) < \frac{\partial}{\partial y} \arg \Gamma(b+iy),$$

probando (i).

Para deducir (ii), observemos que

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(a+iy)} &= \frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(1-a+iy)} \frac{\Gamma(1-a+iy)}{\Gamma(a+iy)} \frac{\Gamma(a-iy)}{\Gamma(a-iy)} \\ &= \frac{1}{|\Gamma(a+iy)|^2} \frac{\Gamma(b+iy)}{\Gamma(1-a+iy)} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi(a-iy)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Puesto que ahora $1-a > \frac{1}{2}$, (ii) sigue de (i) y del hecho de que el argumento del último factor en (4.4) es

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} \pi a \ \operatorname{th} \pi y),$$

la cual es una función creciente de y cuando $0 < a < \frac{1}{2}$. □

Antes de continuar, enunciaremos el siguiente criterio suficiente de univalencia.

Lema 4.2.3. *Supongamos que:*

(i) Π *es un semiplano abierto que no contiene al origen;*

(ii) f *es una función holomorfa en una región convexa* Ω*; y*

(iii) $f'(z) \in \Pi$ *para cada* $z \in \Omega$.

Entonces f *es univalente en* Ω.

El siguiente teorema describe algunas propiedades de la derivada logarítmica de la función Gamma.

Teorema 4.2.4. *Se cumple:*

(i) $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ *es univalente en* $\mathbb{H}_0$*, pero en ningún semiplano mayor.*

(ii) $\Re\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x+iy) \geq \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x)$ *en* $\mathbb{H}_0$.

(iii) $\Im\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)$ *está acotada en* $\mathbb{H}_\delta$*, para todo* $\delta > 0$.

(iv) $\left|\Im\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(z)\right| < \frac{\pi}{2}$ *en* $\overline{\mathbb{H}}_{\frac{1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)' = G''$, del teorema 4.2.1 y del lema 4.2.3 se sigue que $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ es univalente en $\mathbb{H}_{\frac{1}{2}}$. Esto no prueba todo lo que se afirma en (i), pero apunta en la buena dirección.

Derivando $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy) = (u+iv)(x+iy)$ (donde u y v son ahora las partes real e imaginaria de $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$) con respecto a y, obtenemos:

$$iG''(x+iy) = (u_y + iv_y)(x+iy).$$

Entonces $v_y = \Re G''$, y (4.4) se convierte en

$$v_y\left(\frac{1}{2}+iy\right) = \frac{\pi^2}{2\,\mathrm{ch}^2\pi y}.$$

Integrando ahora con respecto a y obtenemos

$$v\left(\frac{1}{2}+iy\right) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi y,$$

lo que implica (iv).

La derivada logarítmica de

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

(cf. (2.10)), donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, conduce a

$$u(x+iy) = -\gamma - \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{n+x}{(n+x)^2+y^2}\right), \tag{4.5}$$

$$v(x+iy) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y}{(n+x)^2+y^2}, \tag{4.6}$$

$$G''(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}. \tag{4.7}$$

El segundo miembro de (4.5) es una función creciente de y^2, si $x>0$. Luego, para x fijo, alcanza el mínimo cuando $y = 0$, probando (ii). El apartado (iii) es consecuencia de (4.6), ya que

$$v(x+iy) < \frac{y}{x^2+y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y}{n^2+y^2} < \frac{1}{2x} + \int_0^{\infty} \frac{y}{t^2+y^2}\,dt = \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{2}.$$

Para demostrar (i), sean $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ y $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$ los semiplanos superior e inferior, respectivamente.

Si $z \in \mathbb{H}_0 \cap \Pi^+$ entonces $(n+z)^2 \in \Pi^+$ para todo $n \geq 0$; luego, $(n+z)^{-2} \in \Pi^-$, y se concluye que $G''(z) \in \Pi^-$.

De la misma manera se obtiene que $G''(z) \in \Pi^+$ si $z \in \mathbb{H}_0 \cap \Pi^-$.

Se sigue de aquí que $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ es univalente en cada uno de los cuadrantes $\mathbb{H}_0 \cap \Pi^+$ y $\mathbb{H}_0 \cap \Pi^-$. Por (4.6), $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ aplica $\mathbb{H}_0 \cap \Pi^+$ en Π^+ y $\mathbb{H}_0 \cap \Pi^-$ en Π^-; como $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ es estrictamente creciente en el semieje real positivo, concluimos que $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ es univalente en $\mathbb{H}_0$.

Finalmente, la función $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ tiene un polo en $z = 0$, y por lo tanto transforma cada entorno del cero en un entorno de ∞. Dado que $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, se infiere que $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ no es univalente en $\mathbb{H}_\delta$ si $\delta < 0$. □

En el próximo teorema, x_0 es el único número positivo tal que $\Gamma'(x_0) = 0$. Como $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, $1 < x_0 < 2$.

Teorema 4.2.5. *La función* $\log\Gamma$ *es univalente en* $\mathbb{H}_{x_0}$*, pero no en ningún semiplano mayor.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $(\log\Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

Si $x > x_0$, el apartado (ii) del teorema 4.2.4 asegura que

$$\Re(\log\Gamma)'(x+iy) \geq \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) > \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x_0) = 0.$$

Así, $\log\Gamma$ es univalente en $\mathbb{H}_{x_0}$. Puesto que $(\log\Gamma)'(x_0) = 0$, el punto x_0 carece de entornos donde $\log\Gamma$ es univalente. □

CAPÍTULO 5

Conclusiones y prospectiva

Desde su introducción por Euler hace ya 300 años, las funciones Gamma y Beta, especialmente la primera, han venido desempeñando un papel central en matemáticas y en todas aquellas ciencias en las que aquéllas tienen una presencia instrumental. Se puede decir que la función Gamma aparece con tanta frecuencia como lo hace la función factorial a la que extiende.

La valía y la importancia de la función Gamma están avaladas por el mero hecho de que las fórmulas que aparecen en esta memoria tuvieron su origen en una idea de Euler, unánimemente reconocido como uno de los más grandes y prolíficos matemáticos de la historia, y fueron desarrolladas por eminencias de la talla de Gauss, Legendre o Weierstrass.

Fue el propio Euler quien inició la aplicación de la función Gamma al cálculo fraccionario, haciendo que ésta sustituyera, de forma natural, al factorial en la expresión que proporciona las derivadas de orden superior de un monomio. Más adelante, esta misma idea aplicada a la fórmula de Cauchy para integrales iteradas sería la base para la definición del cálculo fraccionario de Riemann-Liouville.

Desde el trabajo de James Stirling (quien, en 1730, fue el pionero en utilizar el desarrollo en serie de $\log n!$ para deducir el comportamiento asintótico de $n!$), han sido muchos los matemáticos que han utilizado $\log\Gamma$ en sus investigaciones sobre la función Γ. La aparición de los sistemas computacionales a finales del siglo XX requirió de una mayor atención a la estructura de los cambios de rama de las funciones matemáticas básicas a fin de permitir la validez de las relaciones matemáticas en todo el plano complejo. Esto condujo a la llamada *función* log-*Gamma*, que es equivalente al logaritmo $\log\Gamma$ como función multivaluada pero difiere de ella en la estructura de los cambios de rama y en la elección de la rama principal. Gracias a esta función es posible una formulación precisa de muchas identidades relativas a la función zeta de Riemann.

La importancia de la función Gamma impulsó a muchos matemáticos a estudiar las llamadas *integrales de Euler incompletas*, que no son otras que las integrales indefinidas correspondientes al mismo integrando que la función Gamma. De nuevo, las necesidades de los sistemas computacionales han obligado a la implementación de funciones Gamma incompletas más generales y a sus correspondientes versiones regularizada e inversa. Al igual que las funciones Gamma y Beta, las versiones incompletas han encontrado una aplicación inmediata como funciones de distribución de probabilidad en estadística bayesiana.

Mención especial merecen las funciones digamma y poligamma, que se definen, respectivamente, como la primera y sucesivas derivadas logarítmicas de la función gamma. Más precisamente, la *función digamma* ψ es

$$\psi(z) = \frac{d \log\Gamma}{dz}(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)};$$

en general, la *función poligamma de orden* $m \in \mathbb{N}$ será

$$\psi^{(m)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\psi(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \log\Gamma(z).$$

Estas funciones disponen de una representación integral y verifican relaciones de recurrencia y fórmulas de reflexión y de multiplicación similares a las satisfechas por la función Gamma.

Las funciones Gamma y Beta admiten q-análogas. Un *q-análogo* es una expresión matemática parametrizada por una cantidad q que generaliza a otra expresión conocida, a la que se reduce en el límite cuando $q \to 1-$. La q-teoría es en la actualidad un área de investigación muy activa en el campo de las funciones especiales. Además, los q-análogos preservan (o apenas cambian) la forma de las ecuaciones funcionales que gobiernan un sistema y de ahí que aparezcan en múltiples aplicaciones físicas, como los modelos exactos en mecánica estadística o la geometría no conmutativa. También se les conoce una interpretación combinatoria.

En definitiva, el trabajo desarrollado en esta memoria es susceptible de ser continuado en una amplia variedad de líneas tanto dentro las matemáticas como de la física. Terminaremos este breve recuento destacando dos que nos parecen especialmente atractivas.

La teoría de cuerdas, actualmente uno de los campos más activos de la física teórica, tuvo su origen en un descubrimiento –aparentemente casual– del físico italiano Gabrielle Veneziano (n. 1942). En 1968, mientras trabajaba en el CERN, Veneziano observó que la función Gamma, interpretada como una amplitud de dispersión, presentaba muchas características útiles para explicar fenómenos físicos relacionados con la interacción fuerte de mesones, tales como la simetría y la dualidad. La teoría de cuerdas se desarrolló en la búsqueda de un modelo físico que diera lugar a esa amplitud (conocida hoy en día como *amplitud de Veneziano*), cuya fórmula se corresponde con la siguiente función Beta:

$$\frac{\Gamma(-1+\frac{1}{2}(k_1+k_2)^2)\Gamma(-1+\frac{1}{2}(k_2+k_3)^2)}{\Gamma(-2+\frac{1}{2}((k_1+k_2)^2+(k_2+k_3)^2))}.$$

El hecho de que la función Beta diera lugar al nacimiento de una teoría potencialmente capaz de describir el funcionamiento del universo e, incluso, de demostrar la existencia de multiversos ha sido, sin duda, un factor altamente motivador para realizar el presente trabajo y proseguir estudios en esta dirección.

Un segundo elemento motivador ha sido la conexión de la función Gamma con la función zeta de Rieman. En palabras de Andrew Wiles (n. 1953, quien en 1995 logró demostrar el llamado *último teorema de Fermat* y acaba de ser galardonado con el Premio Abel 2016), *«casi cualquier problema que trate de números primos se vería influenciado por la verificación de la hipótesis de Riemann»*. La hipótesis de Riemann (*todos los ceros no triviales de la función* $\zeta(s)$ *se encuentran sobre la recta* $\Re s = \frac{1}{2}$) es una cuestión todavía abierta desde su formulación por Riemann en 1859, catalogada como uno de los problemas del milenio por el Instituto Clay y cuya solución está valorada en un millón de dólares.

Apéndice: Póster

The Euler Gamma and Beta complex functions

Francisco Javier Merino Cabrera

Universidad de La Laguna

Objectives

We aim to give a short introduction to the theory of the complex Γ-function. A succinct account on its origin and evolution is given. Different ways to represent it along with some of the functional equations it satisfies are collected. Its connections with the B-function and the Riemann ζ-function are explored. The theorems of Wielandt and of Bohr-Mollerup characterizing the Γ-function among those satisfying a certain recurrence relation are proved. Finally, a short study of the geometry of the Γ-function is presented.

Introduction

The Γ-function was introduced by Euler in 1729 as a generalization of the factorial function: $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$. It is a meromorphic function, defined initially via a convergent improper integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0$$

(the so-called *Euler integral of the second kind*), which extends by analytic continuation to all of $\mathbb{C}$ except for simple poles at the non-positive integers, the residue at $z = -n$ being $(-1)^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Selected References

P. Ahern, W. Rudin Geometric properties of the Gamma function. *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 678–681.

B. Carlson *Special functions of applied mathematics*. Academic Press, 1977.

D. Ullrich *Complex made simple.* American Mathematical Society, 2008.

Z. Wang, D. Guo *Special functions.* World Scientific, 1989.

Γ-function Representations

Gauss infinite limit

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\ldots\}$$

Euler infinite product

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\ldots\}$$

Weierstrass infinite product

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\ldots\},\ \gamma \approx 0.5772156649$$

Hankel contour integral

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0+)} e^t t^{-z} dt, \quad |\arg t - \alpha| < \pi.$$

Stirling formula

$$\lim_{z\to\infty} \Gamma(z) z^{\frac{1}{2}-z} e^z = \sqrt{2\pi}, \quad 0 < \varepsilon \le \pi,\ |\arg z| \le \pi - \varepsilon$$

Functional Equations

Recurrence relation

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z\Gamma(z), \quad \Re z > -n,\ n \in \mathbb{N}$$

Euler reflection formula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Gauss multiplication formula (for $n = 2$, Legendre duplication formula)

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)} n^{nz-\frac{1}{2}} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,\ldots\},\ n \in \mathbb{N}$$

Beta function (Euler integral of the first kind)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Re p > 0,\ \Re q > 0$$

Riemann zeta function

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt, \quad \Re p > 1$$

Two Characterizations

Theorem 1 (Wielandt) *Suppose $G(z)$ is a holomorphic function in the right half-plane satisfying*

(i) $G(z+1) = G(z)$ and $G(1) = 1$,
(ii) $|G(z)|$ is bounded on the strip $1 \le \Re z \le 2$.

Then $G \equiv \Gamma$.

Theorem 2 (Bohr-Mollerup) *Suppose that $G : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfies*

(i) $G(x+1) = xG(x)$ and $G(1) = 1$,
(ii) $\log(G)$ is convex.

Then $G \equiv \Gamma$.

Future Work

The Γ-function is usually considered as the special function par excellence; actually, many of these can be represented in terms of Γ-functions as Mellin-Barnes integrals. The study of the Γ-function paves the way for approaching several fields, both within and outside mathematics, where it plays a role: fractional calculus, statistics, probability, nonrelativistic quantum mechanics, statistical mechanics and the physics of elementary particles, particularly string theory.

About

Department *Mathematical Analysis*
Faculty *Science, Mathematics Section*
University *La Laguna*
Email `alu0100697896@ull.edu.es`

Final Year Project in Mathematics done under the supervision of Dr. María Isabel Marrero Rodríguez during the academic year 2015/16

Índice de figuras

Bibliografía

[1] P. AHERN, W. RUDIN: Geometric properties of the Gamma function. *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 678–681.

[2] E. ARTIN: *The Gamma function*. Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[3] R. BEALS, R. WONG: *Special functions*. Cambridge University Press, 2010.

[4] J. BRUNA, J. CUFÍ: *Complex Analysis*. European Mathematical Society, 2010.

[5] B. CARLSON: *Special functions of applied mathematics*. Academic Press, 1977.

[6] P.J. DAVIS: Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function. *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 849–869.

[7] P.L. DUREN: *Univalent functions*. Springer, 1983.

[8] B. FUGLEDE: A sharpening of Wielandt's characterization of the Gamma function. *Amer. Math. Monthly* **115** (2008), 845–850.

[9] R. LEIPNIK, R. OBERG: Subvex functions and Bohr's uniqueness theorem. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 1093–1094.

[10] R. REMMERT: Wielandt's theorem about the Γ-function. *Amer. Math. Monthly* **103** (1996), 214–220.

[11] R. REMMERT: *Classical topics in complex function theory*. Springer, 1998.

[12] G.K. SRINIVASAN: The Gamma function: An eclectic tour. *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 297–315.

[13] E.C. TITCHMARSH: *The theory of functions* (2^{nd} ed.). Oxford University Press, 1939.

[14] D. ULLRICH: *Complex made simple*. American Mathematical Society, 2008.

[15] Z. WANG, D. GUO: *Special functions*. World Scientific, 1989.