

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
FACULTAD DE CIENCIAS • SECCIÓN DE MATEMÁTICAS

Divulgando matemáticas desde el humor

Memoria que presenta la alumna

Patricia Auxiliadora Suárez Hernández

bajo la dirección de

M.^a Isabel Marrero Rodríguez

para optar al título de

Graduada en Matemáticas



Universidad
de La Laguna

LA LAGUNA, JUNIO 2016

M.^a ISABEL MARRERO RODRÍGUEZ, profesora titular de Análisis Matemático adscrita al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna,

HAGO CONSTAR:

Que la presente Memoria, titulada *Divulgando matemáticas desde el humor*, ha sido realizada bajo mi dirección por la alumna D.^a **Patricia Auxiliadora Suárez Hernández**, con DNI 78645867N, y constituye su Trabajo de Fin de Grado para optar al título de Graduada en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.

La Laguna, a 6 de junio de 2016.

Fdo.: M.^a Isabel Marrero Rodríguez



Agradecimientos

A mi familia por estar siempre ahí apoyándome en todo momento.

A Víctor por siempre creer en mí y sacar lo mejor de mí en cada momento.

A mis amigos y compañeros por ayudarme durante todos estos años.

A mi tutora M.^a Isabel Marrero Rodríguez por su continua ayuda en el desarrollo de este TFG y a mi tutora académica Margarita Rivero Álvarez por sus buenos consejos durante la carrera.

Abstract

Humour combines a certain playful potential with the cognition of the reader who interprets the message to be transmitted. It provides real situations that can be analyzed with mathematical tools, which may be used for teaching to give significance or become manifestations of mathematical content. This allows to develop the creativity of the students and facilitates their relationship with mathematical concepts.

Humorous cartoons are one of the most used resources for the dissemination and teaching of Mathematics in a more enjoyable and entertaining way. Five nice cartoons from the «Humor» section of the electronic journal *Matematicalia.net* have been chosen for this purpose. For each one, a factsheet and a bunch of activities (even online) have been designed in order to facilitate the understanding of the mathematical concepts involved.

Keywords: Graphic humour, humorous cartoons, *Matematicalia.net*.

Prólogo

Fijándonos bien en los medios de comunicación, una de las secciones más llamativas y universales de los periódicos es la dedicada al humor, con viñetas humorísticas. En la mayoría de los periódicos las encontramos en la sección de opinión, ya que los humoristas son periodistas que emplean la expresión gráfica y literal para contarnos los acontecimientos actuales o la preocupación de la sociedad.

El humor gráfico combina un cierto potencial lúdico con la cognición del lector que interpreta el mensaje que se ha querido transmitir. Nos suministra situaciones reales susceptibles de ser analizadas con herramientas matemáticas, con lo que pueden utilizarse en la enseñanza para dar significatividad o convertirse en manifestaciones de los contenidos matemáticos. Esto permite desarrollar la creatividad de los alumnos y facilitar su relación con los conceptos matemáticos.

En este Trabajo de Fin de Grado se hace una aproximación a la divulgación y a la didáctica de las matemáticas desde la perspectiva del humor gráfico. El capítulo 1 resume el marco conceptual que justifica este enfoque. Para el resto del trabajo (capítulos 2 a 6), se han seleccionado cinco viñetas humorísticas publicadas en la sección de «Humor» de la revista digital *Matematicalia.net*. A partir de ellas se han elaborado sendas fichas informativas desarrollando los contenidos científicos más importantes que se ha pretendido transmitir, así como un conjunto de actividades, a distintos niveles, donde se experimenta con los conceptos matemáticos aludidos. Se pretende que el material elaborado sirva como apoyo lúdico-didáctico de una eventual exposición divulgativa a organizar con dichas viñetas y exhibir en el marco de actuaciones de popularización de las matemáticas, estímulo de vocaciones matemáticas entre el alumnado de secundaria, transición secundaria-universidad, y cualesquiera otras orientadas a mejorar la percepción social de nuestra ciencia.

Hemos dedicado un capítulo de la Memoria a cada una de las viñetas seleccionadas. Éstas hacen referencia a diferentes ramas de las Matemáticas.

La primera rama (capítulo 2) es el Análisis Matemático. La ficha trata sobre métodos numéricos para obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente. Se presentan dos fórmulas de aproximación (reglas trapezoidal y de Simpson) y algunas de sus aplicaciones.

La segunda rama (capítulo 3) es la Estadística. La ficha se focaliza en las medidas de posición central: media, mediana y moda. Se discuten las diferencias y la confusión entre estas tres medidas en algunos

enunciados estadísticos que proporcionan los medios de comunicación y que llegan a ser engañosos.

El siguiente campo (capítulo 4) es la Geometría. La ficha trata sobre el teorema de Pitágoras. Se comentan su historia, diversos aspectos del teorema y sus numerosas demostraciones, incluyendo algunas de ellas.

El cuarto campo (capítulo 5) es la Historia de las Matemáticas. Se relata el devenir de la Medalla Fields y se relacionan los matemáticos galardonados con ella, prestando especial atención a la primera mujer que la obtuvo y a su investigación en el campo de las geometrías no euclídeas.

La última rama considerada (capítulo 6) es la Topología. Tras un breve recorrido por su nacimiento y desarrollo se abordan algunos objetos topológicos muy conocidos como la banda de Möbius, la botella de Klein, los nudos y los fractales, en concreto el copo de nieve de Koch y la alfombra de Sierpinski.

Al final de cada capítulo se lista la bibliografía consultada para su elaboración.

La Memoria concluye con dos Apéndices. En el primero, a modo de prospectiva del trabajo desarrollado, se catalogan las 25 viñetas publicadas en la sección de «Humor» de *Matematicalia.net* durante sus siete años de actividad, mientras que el segundo contiene el preceptivo póster. Como complemento se han añadido sendos índices de figuras y tablas.

Palabras Clave: Humor gráfico, viñetas humorísticas, *Matematicalia.net*.

Índice general

Agradecimientos	V
Abstract	VII
Prólogo	IX
Índice general	XI
1 Marco conceptual	1
1.1 Introducción	1
1.2 Matemáticas y humor	1
1.3 El humor gráfico como recurso didáctico en Matemáticas	4
1.4 Funciones del humor	4
1.4.1 Función intelectual	5
1.4.2 Función afectiva y social	6
1.4.3 Función pedagógica	7
1.5 Algunos ejemplos	9
1.6 <i>Matematicalia.net</i>	12
Referencias	13
2 Análisis Matemático: Métodos numéricos	15
2.1 Introducción	16
2.2 La integral definida	16
2.3 Aplicaciones de la integral definida	21
2.3.1 Valor medio de una función	21
2.3.2 Respuesta cardiaca	22
2.4 Actividades	24
Referencias	27
3 Estadística: Media, mediana, moda	29
3.1 Introducción	30
3.2 Variables aleatorias discretas	31
3.2.1 La media	31
3.2.2 La mediana	32
3.2.3 La moda	33

3.3	Variables aleatorias continuas	34
3.4	Enunciados engañosos	36
3.4.1	El «término medio»	36
3.4.2	<i>Lies, damned lies, and statistics</i>	40
3.5	Actividades	41
	Referencias	46
4	Geometría: El teorema de Pitágoras	47
4.1	Introducción	48
4.2	El personaje	48
4.3	El teorema de Pitágoras	49
4.4	El teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas	50
4.4.1	El teorema de Pitágoras en Mesopotamia	51
4.4.2	El teorema de Pitágoras en Egipto	52
4.4.3	El teorema de Pitágoras en la India	52
4.4.4	El teorema de Pitágoras en China	54
4.5	Las demostraciones de Pitágoras	54
4.5.1	Ternas pitagóricas	56
4.5.2	El teorema de Pitágoras en Platón	56
4.5.3	La demostración de Euclides	57
4.5.4	El recíproco del teorema de Pitágoras	58
4.6	Las demostraciones más famosas del teorema de Pitágoras	59
4.6.1	La demostración de Pappus	60
4.6.2	La demostración de Thâbit Ibn Qurra	60
4.6.3	La demostración de Bhaskara	60
4.6.4	La demostración de Leonardo da Vinci	61
4.6.5	La demostración de Vieta	62
4.6.6	La demostración de Anaricio	63
4.6.7	La demostración de Perigal	63
4.6.8	El mayor repertorio de demostraciones del teorema pitagórico	64
4.7	Actividades	64
	Referencias	70
5	Historia: Las medallas Fields	71
5.1	Introducción	72
5.2	Algo de historia	72
5.3	Los galardonados	74
5.4	Maryam Mirzakhani	80
5.5	La obra de Mirzakhani	82
5.5.1	Geometría elíptica	85
5.5.2	Geometría hiperbólica	86
5.5.3	Repercusiones de las geometrías no euclídeas	90
5.6	Actividades	91

Referencias	97
6 Topología: Tazas y donuts	99
6.1 Introducción	100
6.2 Algo de historia	101
6.3 La banda de Möbius	103
6.4 La botella de Klein	107
6.5 La teoría de nudos	110
6.6 Los fractales	113
6.6.1 El copo de nieve de Koch	116
6.6.2 La alfombra de Sierpiński	117
6.7 Actividades	119
Referencias	130
Apéndice 1: Catálogo de viñetas de <i>Matematicalia.net</i>	133
Apéndice 2: Póster	143
Índice de figuras	147
Índice de tablas	149

Marco conceptual

1.1. Introducción

El presente capítulo tiene por objetivo dar a entender la importancia del humor gráfico como recurso didáctico en Matemáticas. A tal fin es necesario analizar las funciones principales del humor, que desempeñan un papel primordial en el aula de Matemáticas. Como ilustración se recogen diferentes viñetas humorísticas extraídas de [3, 4] donde se hace hincapié en cada una de dichas funciones.

1.2. Matemáticas y humor

En la actualidad, no podemos vivir sin emplear de alguna forma conceptos matemáticos. Una de las maneras de mostrar el papel de las matemáticas consiste en observar cómo se hacen necesarias para desenvolverse en el entorno. Fijándonos bien en los medios de comunicación, los periódicos recogen noticias, publicidad, opiniones, etc. Una de las secciones más llamativas y universales es la dedicada al humor, con viñetas humorísticas. En la mayoría de los periódicos las encontramos en la sección de opinión, ya que los humoristas son periodistas que emplean la expresión gráfica y literal para contarnos los acontecimientos actuales o la preocupación de la sociedad. En [4] se recogen múltiples viñetas humorísticas de los periódicos que emplean matemáticas, donde se aprecia el importante papel que éstas desempeñan en la sociedad tanto para comunicar ideas como para resolver situaciones que encuentran su reflejo en el humor gráfico.

La figura 1.1 manifiesta la belleza de la abstracción para resaltar lo poco que se lee en proporción a lo que se edita, explicado por Mauro Entrialgo en *Público* utilizando diagramas de Venn. La figura 1.2 emplea la proporcionalidad entre deudas y odios en el mundo del fútbol y fue publicada por Dusón en *El*



Figura 1.1. Viñeta 1.



Figura 1.2. Viñeta 2.



Figura 1.3. Viñeta 3.

Mundo del País Vasco. La figura 1.3 muestra a un niño que se siente acosado por las matemáticas y refleja la dificultad que experimenta la generalidad de los niños hoy en día con nuestra ciencia, divulgada por Enrique en *Diario Información* de Alicante.

Hemos visto con las viñetas anteriores que los humoristas emplean las matemáticas porque la sociedad lo requiere, dado que en muchas situaciones cotidianas son necesarias para expresarse, para resolver situaciones. Las matemáticas aparecen en la sociedad hasta tal punto que los conceptos matemáticos forman parte de la cultura social, razón por la cual los humoristas los utilizan en sus chistes.

En numerosas páginas web de matemáticos encontramos chistes sobre conceptos propiamente matemáticos. Destacan dos páginas por la actualidad y la regularidad de sus autores. Una de ellas es *xkcd.com*, «un webcómic sobre romance, sarcasmo, mates y lenguaje», elaborada por Randall Munroe y versionada en español¹. Courtney Gibbons creó y mantuvo regularmente durante algunos años la página *Brown Sharpie*² introduciendo, al menos, dos chistes nuevos cada semana.



Figura 1.4. Viñeta 4.

Uno de los chistes clásicos es el de la figura 1.4, la fiesta de funciones. Para disfrutar de él debemos suponer que nuestro interlocutor conoce las propiedades de la función exponencial. Parece que la idea que comparte es que el humor ayuda a hacerse una representación sugerente sobre los conceptos.

Además del empleo del humor para matemáticos en medios matemáticos, encontramos que los humoristas no matemáticos emplean las matemáticas en sus chistes, dirigiéndose al gran público. En la figura 1.5 el gran Perich emplea el término «obtusos» reconociendo un uso cotidiano que contrasta con el término matemático.



Figura 1.5. Viñeta 5.

¹ <http://es.xkcd.com>.

² <http://brownsharpie.courtneygibbons.org>.

Los chistes gráficos se convierten entonces en un indicador del significado que se le atribuye a las matemáticas desde la sociedad no matemática, de las características que se le conceden, sus logros, sus fallos, etc. Por esta razón, el humor gráfico es uno de los mejores recursos que se puede emplear en el aula.

1.3. El humor gráfico como recurso didáctico en Matemáticas

El humor gráfico combina un cierto potencial lúdico con la cognición del lector que interpreta el mensaje que se ha querido transmitir. Nos suministra situaciones reales susceptibles de ser analizadas con herramientas matemáticas, con lo que pueden utilizarse en la enseñanza para dar significatividad o convertirse en manifestaciones de los contenidos matemáticos. Esto permite desarrollar la creatividad de los alumnos y facilitar su relación con los conceptos matemáticos.

El carácter lúdico del humor permite referirse a su función afectiva y social. Enfocándonos en la enseñanza, si el profesor es capaz de emplear el humor de manera sana, creativa y buena, habrá favorecido la comunicación en el aula. La función cognitiva del humor permite que los interlocutores puedan contemplar, de manera distendida, otras perspectivas sobre el acontecimiento tratado en la viñeta, incrementando la recepción de ideas y creando participación activa de los alumnos en el aula.

La enseñanza de las matemáticas debe hacerse de una manera seria, pero no tiene por qué ser aburrida. En este sentido, el humor gráfico es un excelente recurso didáctico. Se puede llegar a pensar que el lugar más indicado para emplear este recurso de modo que ayude al alumno a hacerse una idea más completa, especialmente de los resultados y procesos matemáticos, es la escolaridad obligatoria. Pero el humor como recurso didáctico se puede adaptar a todas las edades; la dificultad está en seleccionar adecuadamente el incentivo, el enlace entre las ideas, la conclusión de la viñeta humorística y la profundidad de la argumentación que se suele hacer en el desarrollo de la situación humorística.

También es bastante conocida la corriente propedéutica que propone utilizar el humor con fines terapéuticos. Hay una corriente clínica que aboga por el empleo del humor con estos fines. El Dr. Raymond Moody [5] ha estudiado los aspectos fisiológicos, psicológicos y sociales de la risa, y examinado las condiciones de su uso con intención curativa. Desde entonces son frecuentes los cursos y numerosos los libros que abordan este aspecto.

1.4. Funciones del humor

Los expertos establecen varias funciones del humor. Vamos a destacar tres funciones principales, con objeto de desarrollar el papel que pueden desempeñar en el aula de Matemáticas:

- Función intelectual.

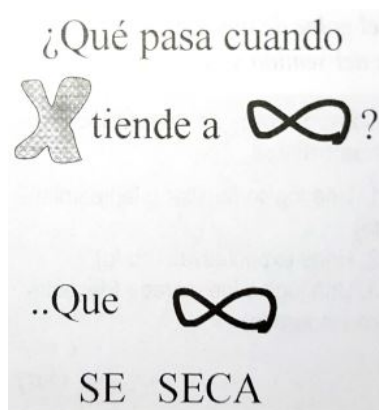


Figura 1.6. Viñeta 6.

- Función afectiva y social.
- Función pedagógica.

Para diseñar unidades de acción en el aula que favorezcan el aprendizaje de un contenido matemático, el profesor Luis Rico [7] propone que se lleven a cabo los siguientes análisis sobre el contenido:

- Estudiar los fenómenos relacionados con ese contenido.
- Analizar los errores y las dificultades de aprendizaje más frecuentes.
- Establecer las formas en que se representa el contenido.
- Buscar los materiales didácticos más adecuados para su enseñanza.
- Analizar la historia de los conceptos matemáticos relacionados con el contenido.

El humor nos puede ayudar a realizar estos análisis de los contenidos del currículo de Matemáticas y a elaborar situaciones que faciliten la enseñanza de los conceptos matemáticos, al menos de dos formas:

- Mirando el humor con ojos matemáticos.
- Haciendo y enseñando matemáticas a partir del humor.

1.4.1. Función intelectual

Una de las principales funciones del humor es la función intelectual, ya que permite poner en contacto una lógica natural con otros argumentos inesperados, abriendo así el debate sobre algunas cuestiones relacionadas con las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, y contribuyendo a la formación de una idea más completa sobre algunos conceptos matemáticos.

En el chiste matemático clásico de la figura 1.6 aparecen contrastadas una lógica matemática y otra



Figura 1.7. Viñeta 7.

cotidiana, ambas ligadas al verbo «tender» y al concepto de infinito. Desde un punto de vista matemático, el razonamiento puede ser el siguiente:

- Hipótesis: x tiende a infinito.
- Conclusión esperada: se obtiene un límite.
- Conclusión inesperada: infinito se seca.

La conclusión propuesta no es disparatada, sino que guarda una lógica inesperada ligada a los dos sentidos que tiene el verbo «tender» y a cómo se considera el concepto de infinito. El matemático utiliza «tender» en el sentido de «tender hacia el infinito» como infinito potencial (cantidad más grande que cualquier otra cosa), y la x como una variable. Sin embargo, el verbo «tender» también tiene un uso como verbo transitivo, indicando «tender algo». En este caso, ese «algo» es el infinito, que es considerado como un objeto, y la x como un sujeto.

1.4.2. Función afectiva y social

Otra de las principales funciones del humor es la función afectiva. Para que una historieta resulte humorística para alguien, ese alguien tiene que compartir los significados que aparecen en ella, por lo que exige y favorece que exista comunicación con una finalidad lúdica. Por tanto, cuando el otro siente que se está creando una situación humorística se predispone a compartir esa situación, con lo que relaja las defensas y se abre a vivir una experiencia compartida.

Freud nos dice que el empleo del humor libera energía, pues se reemplaza la ansiedad, que está mantenida durante largos períodos de tiempo, por la risa de un momento. El ya citado Dr. Moody [5], impulsor de la curación por medio del humor, ha estudiado las relaciones entre el humor y la salud. Según Moody, se dice que una persona tiene sentido del humor si:

- «Entiende lo divertido que soy».
- Sentido convencional: se ríe con las mismas cosas que otros consideran divertidas.
- Es el «alma del grupo».
- Tiene sentido creativo.
- Manifiesta sentido deportivo.
- Tiene «perspectiva cósmica».

Los dos primeros ítems indican que hay coincidencia entre el individuo poseedor de este sentido y los demás individuos, es decir, apuntan al grado de sintonía. Los tres últimos señalan una actitud ante el mundo: la capacidad de distanciarse de los acontecimientos para afrontarlos con buena disposición.

Los humoristas son personas que tienen un sentido del humor creativo, deportivo y con perspectiva cósmica, es decir, pueden ver la realidad desde una perspectiva alterada, exagerada, haciendo abstracción de algunos acontecimientos para buscar similitudes con otros, pero permaneciendo en contacto de forma positiva y emocional con los demás. Si además tienen disposición para crear imágenes que evocan en los otros esa forma distorsionada pero real, y de mostrar que esa es su actitud dominante, habrán conseguido compartir su visión desenfadada pero, al mismo tiempo, positiva del mundo y la humanidad.

Las cualidades del humor que hemos descrito nos permiten decir que el humor facilita la comunicación. La comunicación es un elemento importante de la enseñanza. El profesor tiene que transmitir al alumno todo un mundo de conocimientos, procedimientos y actitudes, y esa transmisión tiene que basarse en que exista una disposición adecuada por parte del alumno. Pues bien, el humor puede facilitar la creación de un ambiente bueno en el que exista comunicación y se genere un clima de confianza entre profesor y alumno.

De la misma forma que se pueden tomar las palabras y las formas como sujetos de chanza creativa, los elementos matemáticos pueden servir para jugar y alterar creativamente. Por ejemplo, adornar las gráficas permite identificar los elementos notables en las mismas. La figura 1.8 trata sobre famosa regla mnemotécnica que permite decir que una función es convexa cuando en ella se puede dar un beso (*con beso*).

1.4.3. Función pedagógica

La última de las principales funciones del humor es la función pedagógica, puramente didáctica. Para analizar esta función se emplean los organizadores curriculares que propone Luis Rico [7]: fenomenología, errores y dificultades, representaciones y modelos, materiales didácticos e historia de los conceptos.

Si queremos que un tema sea significativo para los alumnos, tenemos que buscar fenómenos de la



Figura 1.8. Viñeta 8.

vida cotidiana y de la ciencia en los que se vea su utilidad. Para ello podemos usar algunas situaciones particulares, o bien analizar de manera sistemática el significado y asociarlo a los tipos de fenómenos a los que se aplica. De ello se encarga la fenomenología didáctica. Por tanto, el humor nos ayuda, ya que emplea situaciones cotidianas o científicas en las cuales surge el tema que queremos explicar.

Analizar los posibles errores y dificultades que tienen los alumnos al aprender un concepto es también una ayuda para el profesor. El conocerlos permite entender la forma en que los alumnos aprenden. El humor gráfico nos puede hacer ver situaciones de error y darnos sugerencias para proponer tareas para la enseñanza.

Algunos conceptos matemáticos son abstractos; para manejarlos recurrimos a representaciones de los mismos. Para aprender un concepto hay que manejar con soltura varias de sus representaciones y ser consciente de que ninguna de ellas es el concepto en sí. El humor gráfico nos permite analizar algunas representaciones de esos conceptos, y realizar tareas para que los alumnos las manejen y sean conscientes de ellas.

La enseñanza se vale de recursos y materiales didácticos. El humor es un recurso didáctico para aprender matemáticas en el aula, y además permite analizar el papel que juegan otros materiales como el ábaco, la pizarra, los ordenadores o las calculadoras.

También se considera que la historia de los conceptos puede ayudar al profesor a organizar su enseñanza, fijándose en aquellos aspectos que han sido conflictivos a lo largo de la historia, en las situaciones que los generaron, etc. Claudi Alsina y Miguel de Guzmán [1] escribieron un texto en el que destacaban que *Los matemáticos no son gente seria*. Se trataba de mostrar que los conceptos no derivan de la frialdad de un libro, sino de la humanidad de las personas que los descubren, inventan, etc. Junto con los aspectos históricos, destacaremos aspectos epistemológicos (qué es la matemática, cuál es la verdad de los teoremas matemáticos, etc.), ayudándonos de chistes. Un autor como Thaves ha realizado toda una serie de chistes sobre las matemáticas en la creación del mundo que nos hace cuestionarnos sobre el origen de los conocimientos matemáticos y su relación con el mundo físico.



Figura 1.9. Viñeta 9.

1.5. Algunos ejemplos

La figura 1.9 fue publicada en la sección «Cartoon Corner» de la revista *Mathematics in the Middle School*³, editada por el National Council of Teachers of Mathematics estadounidense, en la que aparecían chistes gráficos acompañados de unas preguntas que puedan ser usadas como actividad de aula para que los alumnos hagan razonamientos matemáticos. Animaban también a los lectores a seleccionar chistes y enviarlos junto con algunas cuestiones. El profesor que envió esta viñeta plantea las siguientes:

- ¿Qué conclusión sacas del chiste sobre la relación entre el kilogramo y la libra?
- Si un kilogramo corresponde aproximadamente a 2,2 libras, ¿cuánto pesa una bola más que la otra?
- Debido al diferente valor de la constante de gravitación, una persona pesa en la Luna 1/6 de su peso en la Tierra. ¿Cuánto pesas tú en la Luna? ¿Cuántas libras?

En los chistes podemos incorporar las grandes dificultades matemáticas. La introducción de los números negativos costó mucho tiempo en la comunidad matemática, ya que parecía un contrasentido considerar número a lo que no puede asociarse con cantidad. Kalondi nos muestra en la figura 1.10 que la ordenación en los números negativos respecto a los positivos es un convenio, empleando para ello la metáfora de la escalera cerrada del dibujante holandés Escher, en la que no es posible saber si se sube o se baja.

En el libro de Britton y Bello *Matemáticas Contemporáneas* [2] aparece la figura 1.11, que ilustra un

³ <http://www.nctm.org/publications/mathematics-teaching-in-the-middle-school/>.

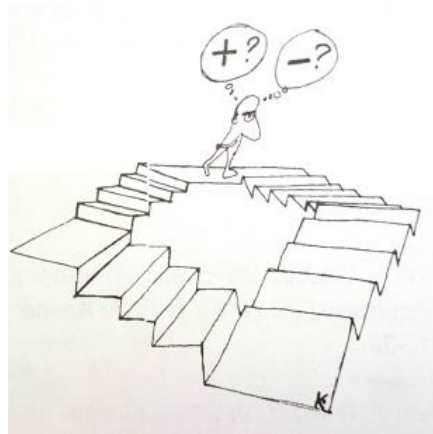


Figura 1.10. Viñeta 10.



Figura 1.11. Viñeta 11.



Figura 1.12. Viñeta 12.



Figura 1.13. Viñeta 13.

número decimal periódico. La infinitud de las cifras decimales ha quedado representada por la perspectiva hacia el punto del infinito, y para representarlo se hace uso de un código geométrico: dos líneas paralelas, que se cortan en el infinito (nunca se acaban por cortar).

Las indeterminaciones podrían dar lugar a «chistes carteles», en los que se tratara de mostrar la diversidad de valores a los que pueden tender según el comportamiento de las funciones que forman aquella cuyo límite pretendemos calcular.

José Gordo y Pau Estrada han ilustrado el libro *Factor 2*⁴. Entre sus ilustraciones se encuentra la figura 1.12, donde aparecen todas las indeterminaciones que se pueden trabajar en las matemáticas de bachillerato. En la figura 1.13, los mismos autores ilustran la imposibilidad de obtener los números irracionales con la calculadora.

Mike Cavanaugh nos ofrece en la figura 1.14 una ocasión para que los alumnos profundicen en el personaje de Arquímedes. ¿Por qué no le ha tocado la lotería a Arquímedes? ¿Hay datos históricos que corroboren el juego humorístico que destaca el autor en el chiste? ¿Qué relación existe entre la anécdota y los resultados actuales de la teoría de la probabilidad? Estas cuestiones nos dan la oportunidad de trabajar sobre datos históricos y conceptuales de las matemáticas.

Las figuras 1.15, 1.16, 1.17 y 1.18 pueden ser utilizadas por los profesores como ejercicios para el aula, analizando los chistes de las diferentes viñetas y estudiando los conceptos matemáticos que aparecen.

⁴ Gordo J., Estrada P. (1995): *Factor2*, Vicens-Vives.



Figura 1.14. Viñeta 14.



Figura 1.15. Viñeta 15.



Figura 1.16. Viñeta 16.



Figura 1.17. Viñeta 17.

1.6. *Matematicalia.net*

En el apéndice 1 se pueden encontrar todas las viñetas humorísticas publicadas en la sección de «Humor» de la revista digital *Matematicalia.net*. *Matematicalia* es una revista digital de divulgación matemática que se dirige a un público lo más amplio posible y pretende introducir a sus lectores en



Figura 1.18. Viñeta 18.

la belleza y aplicaciones prácticas de las matemáticas, sacando el máximo partido de Internet como medio para su publicación. La edición de la revista comenzó en 2005 y fue suspendida indefinidamente en 2012.

De entre todas las viñetas catalogadas se han seleccionado cinco en las que se hace referencia a diferentes ramas de las Matemáticas. A partir de ellas, se han elaborado fichas informativas donde se tratan los contenidos científicos más importantes que se pretende transmitir y se ha diseñado un conjunto de actividades, a distintos niveles, para experimentar con los conceptos matemáticos aludidos. Por último, se especifica la bibliografía que ha sido necesaria para desarrollar cada una de las fichas.

Hemos dedicado un capítulo de la Memoria a cada una de las viñetas seleccionadas. Se pretende que el material elaborado sirva como apoyo lúdico-didáctico de una eventual exposición divulgativa a organizar con dichas viñetas y exhibir en el marco de actuaciones de popularización de las matemáticas, estímulo de vocaciones matemáticas entre el alumnado de secundaria, transición secundaria-universidad, y cualesquiera otras orientadas a mejorar la percepción social de nuestra ciencia. La parte técnica está concebida como una guía didáctica para el profesorado o visitantes de la exposición con cierta formación matemática, mientras que las actividades están diseñadas para formar parte de un cuadernillo a trabajar por los estudiantes o público en general.

Referencias

- [1] Alsina C., Guzmán M. (1996): *Los matemáticos no son gente seria*, Madrid, Rubes.
- [2] Britton J.R., Bello I. (1992): *Matemáticas contemporáneas*, México, Harla.
- [3] Flores P. (2003): *Humor gráfico en el aula de matemáticas*, Ariel.
- [4] Flores P., Moreno A. (2011): *Matemáticamente competentes... para reír*, Graó.
- [5] Moody R. (1996): *Humor y salud*, Madrid, EDAF.
- [6] Paulos J.A. (1980): *Mathematics and humor*, The University of Chicago Press.

- [7] Rico L. (1998): *La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*, Barcelona, Horsori.
- [8] Vinik A. et al. (1979): *Mathematics and humor*, National Council of Teachers of Mathematics.

Análisis Matemático: Métodos numéricos



Figura 2.1. «Terapias alternativas». *Matemática*, vol. 5, núm. 3 (junio 2009).

2.1. Introducción

La integración numérica es una herramienta esencial que se usa en la ciencia y la ingeniería para obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente. Uno de los problemas matemáticos más antiguos es el del cálculo del área que encierra una curva; quizá el ejemplo más significativo haya sido el intento de conseguir la integración del círculo, que condujo a la aparición y estudio del número π .

Las fórmulas de integración numérica, denominadas también *fórmulas de cuadratura*, tienen como objetivo aproximar en un intervalo la integral de una función cuyos valores sólo se conocen en algunos puntos, o cuya primitiva es difícil de calcular o no se puede expresar en términos de funciones elementales. Además, el estudio teórico de dichas fórmulas tiene especial relevancia en el diseño de los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

En este capítulo, tras hacer un repaso del concepto de integral definida, daremos dos fórmulas para aproximar su valor (reglas trapezoidal y de Simpson) y nos detendremos en algunas de sus aplicaciones.

2.2. La integral definida

Para empezar, vamos a recordar el concepto de integral definida.

Sea $y = f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$, positiva y continua. Se pretende calcular el área encerrada por la gráfica de la función y el eje OX .

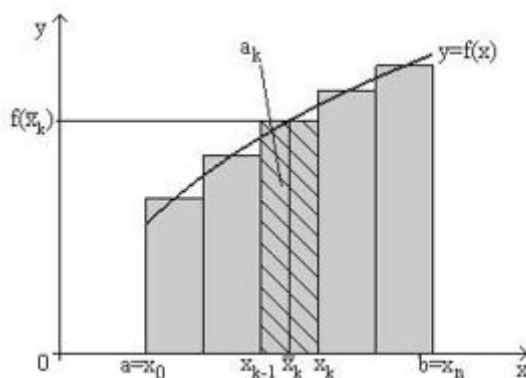


Figura 2.2. Integral de Riemann: aproximación del área bajo la curva por rectángulos.

Para ello dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos por medio de una partición

$$\mathcal{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}.$$

En cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ ($1 \leq k \leq n$) elegimos un punto \bar{x}_k . El área del rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(\bar{x}_k)$ es:

$$a_k = f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Una aproximación del área buscada será:

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Refinando la partición \mathcal{P}_n , esto es, aumentando el número de subintervalos, en el límite para $n \rightarrow \infty$ resulta

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Definición 2.2.1. Las funciones $f(x)$ para las cuales existe y es finito el límite anterior se denominan funciones integrables Riemann en $[a, b]$. La integral definida de una tal función entre a y b es:

$$\int_a^b f(x) dx = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Los números a y b se denominan límites de integración (inferior y superior, respectivamente).

El siguiente resultado conecta el cálculo diferencial con el integral y constituye una herramienta fundamental para el cálculo de integrales definidas de funciones.

Teorema 2.2.2 (Regla de Barrow). Si $F(x)$ es una primitiva continua de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 2.2.3. Calcular las siguientes integrales definidas:

$$\text{a) } \int_0^1 x^2 dx; \quad \text{b) } \int_0^1 x e^{x^2-1} dx.$$

RESOLUCIÓN.

- a) Una primitiva de la función x^2 viene dada por $\frac{x^3}{3} + c$, donde c es una constante arbitraria. Por tanto, aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- b) Calculamos en primer lugar una primitiva de la función $x e^{x^2-1}$. A tal fin efectuamos el cambio de

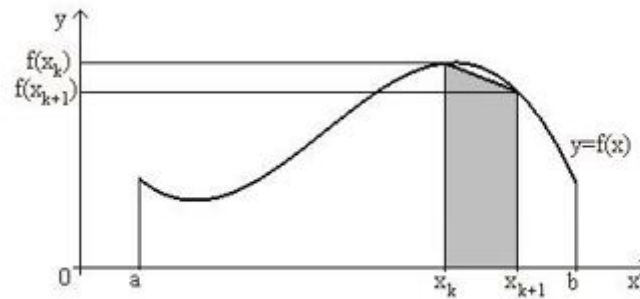


Figura 2.3. Regla trapezoidal.

variable $t = x^2 - 1$, de donde $dt = 2x dx$. Luego,

$$\int x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + c,$$

siendo c una constante arbitraria. Ahora, al igual que en el apartado anterior:

$$\int_0^1 x e^{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

□

Al calcular una integral definida podemos encontrarnos con que la función a integrar no admite primitiva elemental, con lo cual no es aplicable la regla de Barrow. Tal es el caso de la llamada *función error de Gauss*:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

de importancia fundamental en el cálculo de probabilidades, o la función e^{-x^2} , que comparece en la viñeta de la figura 2.1. Por otra parte, en problemas de laboratorio es frecuente que el integrando no sea conocido explícitamente, sino que venga dado parcialmente por una tabla de valores. En ambas situaciones hemos de contentarnos con encontrar un valor aproximado de la integral definida. Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la integral definida como un área, daremos dos fórmulas de aproximación: la *regla trapezoidal* y la *regla de Simpson*.

Proposición 2.2.4 (Regla trapezoidal). *La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada mediante:*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right],$$

siendo $\mathcal{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ en $n + 1$ nodos equiespa-

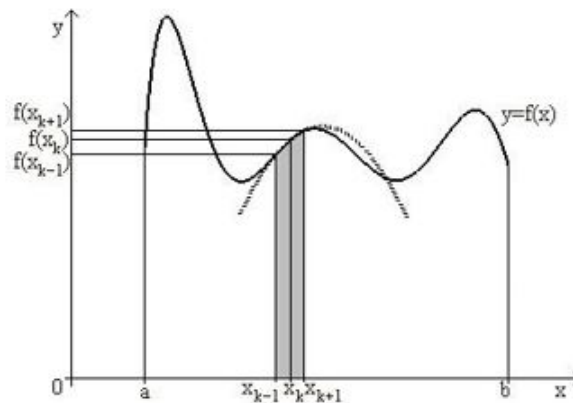


Figura 2.4. Regla de Simpson.

ciados:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{n} (b - a) \quad (0 \leq k \leq n).$$

La fórmula anterior proviene de la aproximación del área bajo la curva $f(x)$ en $[a, b]$ mediante trapecoides en lugar de rectángulos.

Proposición 2.2.5 (Regla de Simpson). *La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada mediante:*

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

siendo n un número par y $\mathcal{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ en $n + 1$ nodos equiespaciados:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{n} (b - a) \quad (0 \leq k \leq n).$$

La fórmula anterior proviene de la aproximación del área bajo la curva $f(x)$ en $[a, b]$ mediante recintos limitados por arcos de parábola «próximos» a la curva.

Ejemplo 2.2.6. *Usando la regla trapezoidal con 6 nodos, aproximar:*

$$\int_0^{10} (x^2 + 3) dx.$$

RESOLUCIÓN. Al tomar una partición del intervalo $[0, 10]$ en 6 nodos equiespaciados, éstos vendrán dados por:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{5} (10 - 0) = 0 + 2k = 2k \quad (0 \leq k \leq 5).$$

Por tanto, aplicando la regla trapezoidal:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} (x^2 + 3) dx &\approx \frac{10-0}{5} \left[\frac{f(0)}{2} + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + \frac{f(10)}{2} \right] \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} + (2^2 + 3) + (4^2 + 3) + (6^2 + 3) + (8^2 + 3) + \frac{10^2 + 3}{2} \right] \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} + 7 + 19 + 39 + 67 + \frac{103}{2} \right] = 2 \left[\frac{106}{2} + 132 \right] = 106 + 264 = 370. \end{aligned}$$

El valor exacto es:

$$\int_0^{10} (x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_0^{10} = \frac{1000}{3} - 30 = \frac{1090}{3} \approx 363,3.$$

□

Ejemplo 2.2.7. Usando la regla de Simpson con 6 subintervalos, aproximar

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

RESOLUCIÓN. Al tomar una subdivisión del intervalo $[1, 2]$ en 6 subintervalos de igual longitud, tendremos 7 nodos que vendrán dados por:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{6}(2-1) = 1 + \frac{k}{6} = \frac{6+k}{6} \quad (0 \leq k \leq 6).$$

Por tanto, aplicando la regla de Simpson:

$$\begin{aligned} \ln 2 &\approx \frac{2-1}{18} \left[f(1) + 4f\left(\frac{7}{6}\right) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f\left(\frac{5}{3}\right) + 4f\left(\frac{11}{6}\right) + f(2) \right] \\ &= \frac{1}{18} \left[1 + 4\frac{1}{\frac{7}{6}} + 2\frac{1}{\frac{4}{3}} + 4\frac{1}{\frac{3}{2}} + 2\frac{1}{\frac{5}{3}} + 4\frac{1}{\frac{11}{6}} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{18} \left[1 + \frac{24}{7} + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + \frac{6}{5} + \frac{24}{11} + \frac{1}{2} \right] \\ &\approx 0,6931697932, \end{aligned}$$

mientras que usando una calculadora convencional:

$$\ln 2 = 0,6931471806.$$

□

Ejemplo 2.2.8. Se determinan experimentalmente los valores de cierta función que se muestran en la siguiente tabla:

x	$f(x)$
1	4
1,5	5
2	6
2,5	8
3	9
3,5	11
4	14

Estimar

$$\int_1^4 f(x) dx$$

mediante las reglas trapezoidal y de Simpson.

RESOLUCIÓN.

- Regla trapezoidal:

$$\int_1^4 f(x) dx \simeq \frac{4-1}{6} \left[\frac{4}{2} + 5 + 6 + 8 + 9 + 11 + \frac{14}{2} \right] = 24.$$

- Regla de Simpson:

$$\int_1^4 f(x) dx \simeq \frac{4-1}{3 \cdot 6} [4 + (4 \cdot 5) + (2 \cdot 6) + (4 \cdot 8) + (2 \cdot 9) + (4 \cdot 11) + 14] = 24.$$

□

2.3. Aplicaciones de la integral definida

2.3.1. Valor medio de una función

Recordemos que la media aritmética \bar{a} de n números a_1, \dots, a_n se define por:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y

$$\mathcal{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$$

es una partición de $[a, b]$ en $n + 1$ nodos equiespaciados:

$$x_n = a + k\Delta x, \quad \text{con } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n),$$

y si además tomamos

$$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k] \quad (1 \leq k \leq n)$$

entonces la media aritmética de los valores $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$ será:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) = \frac{1}{n} \frac{b-a}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) = \frac{1}{b-a} \Delta x \sum_{k=1}^n f(x_k^*) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x.$$

Si se incrementa el número de nodos de la partición, en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene, atendiendo a la definición de la integral definida:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Definición 2.3.1. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ al número:

$$A(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Ejemplo 2.3.2. Hallar el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

RESOLUCIÓN. El valor medio de x^2 en $[0, 3]$ es:

$$A(f) = A(x^2) = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{9} \right]_0^3 = 3.$$

□

2.3.2. Respuesta cardiaca

En fisiología, se llama *respuesta cardiaca* R al volumen de sangre que el corazón impulsa por unidad de tiempo. Una respuesta cardiaca anormal es indicativa de una enfermedad. La respuesta cardiaca puede ser medida mediante el llamado *método de dilución por tinción*. Una cantidad D de tinte (medida en miligramos) es inyectada en la arteria pulmonar, cerca del corazón. El tinte circula a través de los pulmones y regresa por las venas pulmonares a la aurícula izquierda siendo luego expulsado a través de la aorta, donde una sonda comprueba la cantidad de tinte saliente a intervalos regulares dentro de un determinado periodo de tiempo, digamos $[0, T]$ (segundos). Supongamos que la concentración de tinte medida en cada instante puede ser descrita mediante una función continua $c(t)$ (miligramos por litro). Si subdividimos $[0, T]$ en n intervalos de igual longitud $\Delta t = T/n$, la cantidad de tinte que circula frente

a la sonda en cada subintervalo será, aproximadamente,

$$\begin{aligned}\Delta D_k &= c(t_k^*) R \Delta t \text{ (concentración)} \times \text{(volumen/tiempo)} \times \text{(tiempo)} \\ &\quad \text{(concentración)} \times \text{(volumen)} \\ &\quad \text{(masa/volumen)} \times \text{(volumen)} = \text{masa},\end{aligned}$$

donde t_k^* es un punto cualquiera del subintervalo considerado. Por tanto, la cantidad aproximada de tinte medida en el intervalo $[0, T]$ es

$$\sum_{k=1}^n \Delta D_k = \sum_{k=1}^n c(t_k^*) R \Delta t = R \sum_{k=1}^n c(t_k^*) \Delta t.$$

Tomando cada vez un número mayor de subintervalos en $[0, T]$ tenemos, en el límite para $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta D_k = \lim_{n \rightarrow \infty} R \sum_{k=1}^n c(t_k^*) \Delta t,$$

así que

$$D = R \int_0^T c(t) dt.$$

Luego, la respuesta cardiaca R viene dada por:

$$R = \frac{D}{\int_0^T c(t) dt} \text{ L/s.}$$

Ejemplo 2.3.3. *Se inyectan 5 miligramos de tinte en la arteria pulmonar. Determinar la respuesta cardiaca en un periodo de 30 segundos, si la concentración del tinte es*

$$c(t) = -\frac{1}{100} t(t-30)$$

miligramos por litro.

RESOLUCIÓN. Conforme a la discusión anterior, la respuesta cardiaca es:

$$\begin{aligned}R &= \frac{5}{\int_0^{30} -\frac{1}{100} t(t-30) dt} = -\frac{500}{\int_0^{30} (t^2 - 30t) dt} = -\frac{500}{\left[\frac{t^3}{3} - 15t^2\right]_0^{30}} = -\frac{500}{9000 - 13500} \\ &= \frac{500}{45} = \frac{1}{9} \text{ L/s} \\ &= \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \text{ L/min.}\end{aligned}$$

□

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Función para aproximar la temperatura									
	T(t)=47+3t-0.5t^2				Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 de la tarde					
					Subintervalos		a	b		
					4		0	6		

Figura 2.5. Datos principales del problema en Excel.

2.4. Actividades

En estas actividades trabajaremos las fórmulas de integración numérica anteriormente introducidas y sus aplicaciones. Se mostrará cómo, con la ayuda de una hoja de cálculo (Excel o cualquier alternativa de software libre), es posible obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden ser calculadas analíticamente.

Actividad 1

La función $T(t) = 47 + 3t - 0,5t^2$ aproxima la temperatura t horas después del mediodía en un día típico de agosto en Madrid. Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 de la tarde. Utilizando Excel, aproximar el resultado por medio de las reglas a) trapezoidal y b) de Simpson, con 4 intervalos.

Sol.: $\bar{T} = 50$; a) $\bar{T} \approx 49,81$; b) $\bar{T} \approx 50$.

RESOLUCIÓN. Primero debemos tener en cuenta que el intervalo donde $T(t)$ está definida será $[0, 6]$, que es el tiempo en el que se quiere estudiar la temperatura media. Por tanto, debemos tomar como límite de integración inferior 0 y límite de integración superior 6. El valor medio de la función $T(t)$ en $[0, 6]$ es entonces

$$\bar{T} = \frac{1}{6-0} \int_0^6 T(t) dt = \frac{1}{6} \int_0^6 (47 + 3t - 0,5t^2) dt = \frac{1}{6} \left[47t + \frac{3t^2}{2} - \frac{0,5t^3}{3} \right]_0^6 = 47 + 9 - 6 = 50.$$

El ejercicio nos pide hallar la temperatura media aproximando la integral correspondiente mediante la regla trapezoidal y la regla de Simpson con 4 subintervalos. Al tomar una subdivisión del intervalo $[0, 6]$ en 4 subintervalos de igual longitud, tendremos 5 nodos x_k ($0 \leq k \leq 4$). Disponemos en una columna los valores de k y en otra columna paralela calculamos los correspondientes valores de x_k , tomando el límite de integración inferior más el valor de k multiplicado por la amplitud del intervalo y dividido

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following content:

- Formula bar: $=\$H\$4+C7*(\$I\$4-\$H\$4)/\$F\4
- Row 1: "Función para aproximar la temperatura" (colspan 3)
- Row 2: $T(t)=47+3t-0.5t^2$
- Row 3: "Subintervalos" (colspan 3)
- Row 4: 4
- Row 5: "Nodos:" (colspan 3)
- Row 6: Headers: k, x_k, T(x_k)
- Row 7: 0, 0, 47
- Row 8: 1, 1,5, 50,375
- Row 9: 2, 3, 51,5
- Row 10: 3, 4,5, 50,375
- Row 11: 4, 6, 47

Figura 2.6. Captura de la hoja Excel con los valores de los nodos equiespaciados y la evaluación en ellos de la función T .

por el número de subintervalos:

$$x_k = x_0 + \frac{k}{n}(b - a) \quad (0 \leq k \leq 4).$$

El paso siguiente es evaluar la función T en los nodos x_k ($0 \leq k \leq 4$). Una vez obtenidos los valores de $T(x_k)$ ($0 \leq k \leq 4$), aproximamos el valor de la integral usando las dos reglas.

Para aplicar la regla trapezoidal calculamos

$$\frac{T(x_0)}{2} + T(x_1) + \dots + T(x_{n-1}) + \frac{T(x_n)}{2}.$$

Luego multiplicamos el resultado, 199,250, por la amplitud del intervalo y lo dividimos entre el número de subintervalos, obteniendo así una aproximación al valor de la integral, 298,875. Por último, dividimos este valor por la amplitud del intervalo, lo que da una temperatura media aproximada de $49,813 \approx 49,81$.

De la misma forma, aproximamos la integral usando la regla de Simpson. Comenzamos calculando

$$T(x_0) + 4T(x_1) + 2T(x_2) + 4T(x_3) + \dots + 2T(x_{n-2}) + 4T(x_{n-1}) + T(x_n),$$

cuyo resultado es 300. Luego multiplicamos este valor por la amplitud del intervalo dividida por 3 veces el número de subintervalos, lo que proporciona 300 como aproximación al valor de la integral. Por último, dividiendo esta aproximación por la amplitud del intervalo resulta una temperatura media de 50, que en este caso coincide con la temperatura media exacta. □

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O		
1		Función para aproximar la temperatura															
2		T(t)=47+3t-0.5t^2				Encontrar la temperatura media entre el mediodía y las 6 de la tarde											
3						Subintervalos		a	b								
4						4		0	6								
5				Nodos:													
6		k	x_k			T(x_k)											
7		0	0			47				Aproximación de la integral mediante la Regla Trapezoidal		TEMPERATURA MEDIA					
8		1	1,5			50,375						298,875				49,8125	
9		2	3			51,5											
10		3	4,5			50,375				Aproximación de la integral mediante la Regla de Simpson		TEMPERATURA MEDIA					
11		4	6			47						300				50	
12																	
13																	
14				Valores de los corchetes de las integrales mediante las dos reglas				199,25									
15																	
16																	

Figura 2.7. Temperatura media usando la regla trapezoidal y la regla de Simpson en Excel.

Actividad 2

Aproximar la siguiente integral definida de la función que se presenta en la viñeta de la figura 2.1

$$f(x) = \int_0^2 e^{x^2} dx,$$

usando:

- la regla trapezoidal con 5 nodos;
- la regla de Simpson con 7 nodos.

Observa qué ocurre al considerar un número cada vez mayor de nodos.

Sol.: a) 20,644559049038; b) 16,691883387416.

Actividad 3

Se inyectan 5 mg de tinte en la arteria pulmonar de un paciente. Hallar la respuesta cardiaca durante un periodo de 30 s, si para determinar la concentración de tinte se han tomado las siguientes mediciones:

t	$c(t)$
0	0
5	1,25
10	2
15	2,25
20	2
25	1,25
30	0

Sol.: $R \approx 0,11$ L/s.

Referencias

- [1] Alavez Ramírez J. (2006): *Métodos Numéricos I*, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, México.
- [2] Marrero I. et al. (2013): *Curso de Matemática Aplicada y Estadística*, <https://campusvirtual.u11.es/ocw/course/view.php?id=78>.
- [3] Mathews J.H. (2000): *Métodos numéricos con Matlab*, Prentice Hall, Madrid.

Estadística: Media, mediana, moda



Figura 3.1. «En el medio está la virtud». *Matemática*, vol. 6, núm. 3 (septiembre 2010).

3.1. Introducción

La Estadística es una ciencia que se encarga de recopilar un conjunto de datos de la población y analizarlos para facilitar su interpretación.

Una *variable aleatoria* o *variable estocástica* es una variable estadística cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio.

Las *variables cuantitativas* son aquellas que adoptan valores numéricos. De este modo se diferencian de las *variables cualitativas*, que expresan cualidades, atributos, categorías o características.

En el conjunto de las variables cuantitativas también podemos reconocer varios tipos de variables. Las *variables cuantitativas continuas* pueden adoptar cualquier valor en el marco de un determinado intervalo. De acuerdo a la precisión del instrumento que realiza la medición, pueden existir otros valores en el medio de dos valores. La altura de una persona, por ejemplo, es una variable cuantitativa continua (puede tomar valores como 1,70 m, 1,71 m, 1,72 m, etc.).

Las *variables cuantitativas discretas*, en cambio, adquieren valores que están separados entre sí en la escala. Dicho de otro modo: no existen otros valores entre los valores específicos que la variable adquiere. La cantidad de mascotas que tiene una persona es una variable cuantitativa discreta: se pueden tener 2, 3 ó 4 perros, pero nunca 2,5 ó 3,25 perros. En este caso, 2 y 3 son valores que la variable está en condiciones de adoptar, sin que exista ningún otro valor posible en el medio de ambos.

Cuando se recoge información de una población de interés, o de una muestra si aquella fuese muy numerosa, al registrar varios caracteres sobre cada individuo seleccionado se genera un conjunto de datos más o menos extenso. Para analizarlos debemos extraer las características principales del grueso de los datos, indicando qué parámetros son más importantes así como la precisión de los mismos.

Una vez ordenadas sistemáticamente en una tabla las modalidades registradas de una variable estadística y tras realizar las representaciones gráficas más comunes se procede a la obtención de una serie de parámetros estadísticos, que van a caracterizar el conjunto de los datos observados en relación a la posición general de éstos y su dispersión en torno a los valores centrales mediante valores numéricos que indicarán de manera objetiva el comportamiento del cuerpo de datos.

Tales números, que resumen la información y que suelen situarse hacia el centro de la distribución de datos, se denominan *medidas* o *parámetros de tendencia central* o *de centralización*. Cuando se hace referencia únicamente a la posición de estos parámetros dentro de la distribución, independientemente de que ésta esté más o menos centrada, se habla de estas medidas como *medidas de posición*. Entre las medidas de centralización tenemos:

- La media.
- La mediana.

- La moda.

Su cálculo varía ligeramente según tratemos con variables aleatorias cuantitativas continuas o discretas.

El presente capítulo se focaliza en el estudio de las medidas de posición central: media, mediana y moda. Se discuten las diferencias y la confusión entre ellas en algunos enunciados estadísticos que proporcionan los medios de comunicación y que llegan a ser engañosos. Finalmente, se proponen algunas actividades para calcularlas con ayuda de Excel (o de cualquier alternativa de software libre), tanto para variables continuas como discretas.

3.2. Variables aleatorias discretas

En esta sección definiremos e ilustraremos el cálculo de la media, la mediana y la moda para variables cuantitativas discretas.

3.2.1. La media

Es la más conocida de las medidas de centralización.

Definición 3.2.1. La media aritmética \bar{x} se define como el promedio de todas las observaciones recogidas. Dado el conjunto numérico de datos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, es

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

También puede expresarse de manera alternativa como

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \sum_{i=1}^k x_i f_i,$$

donde n_i es la frecuencia absoluta de la modalidad x_i , es decir, el número de veces que se repite. La frecuencia relativa de la modalidad x_i , que se denota por f_i , es el cociente $f_i = \frac{n_i}{n}$. Se verifica que $0 < f_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) y $\sum_{i=1}^k f_i = 1$.

Las principales propiedades de la media aritmética son:

- Está definida de manera objetiva, su cálculo es muy sencillo y en él intervienen todos los datos.
- No depende del orden de las observaciones.
- La media es única: dado un conjunto de datos, la media tiene un solo valor.
- Es aplicable a valores numéricos (variables cuantitativas).

Su uso también tiene inconvenientes, como son:

- Es sensible a la presencia de valores alejados del grueso de los datos, de modo que cuanto menos homogéneos sean éstos, menos información proporciona. Dicho de otro modo, poblaciones muy distintas en su composición pueden tener la misma media.
- En el cálculo de la media no todos los valores contribuyen de la misma manera: los valores grandes tienen más peso que los valores cercanos a cero.

Ejemplo 3.2.2. *La inspección de 60 cajas con 50 piezas cada una, durante un día de producción, arrojó los números de piezas defectuosas por caja que recogemos de manera sistemática en la siguiente tabla estadística, llamada tabla de distribución de frecuencias.*

Nº de piezas defectuosas	n_i	f_i	N_i
0	7	0,1167	7
1	11	0,1833	18
2	14	0,2333	32
3	15	0,2500	47
4	5	0,0833	52
5	3	0,0500	55
6	3	0,0500	58
7	2	0,0333	60

La frecuencia absoluta acumulada N_i de la modalidad x_i (que usaremos para la mediana) es la suma del número de individuos que presentan las modalidades inferiores o iguales a x_i , y vale $N_i = \sum_{j=1}^i n_j$.

La media aritmética de esta variable estadística discreta es

$$\bar{x} = \frac{0 \times 7 + 1 \times 11 + 2 \times 14 + 3 \times 15 + 4 \times 5 + 5 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 2}{60} = 2,5,$$

valor que nos indica que, por término medio, en cada caja encontramos 2,5 piezas defectuosas de las 50 piezas fabricadas.

3.2.2. La mediana

La mediana es un parámetro estadístico que, al contrario que la media, no está basado en los valores numéricos de la variable, sino en la posición relativa de los datos.

Suponiendo que la variable tiene al menos una escala ordinal, podemos ordenar los datos de menor a mayor. Sean éstos $\{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}\}$, donde $x_{(1)}$ representa el menor valor observado, hasta $x_{(n)}$, que representa al mayor valor observado.

Definición 3.2.3. *En las condiciones anteriores, la mediana es el valor que ocupa la posición central de la lista de datos.*

Cuando el número de términos de la lista es impar, la mediana es sencillamente el término central:

$$Me = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

En caso de un número par de datos la mediana no correspondería a ningún valor, por lo que se conviene en tomar como mediana el valor intermedio entre los dos valores centrales:

$$Me = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}.$$

Las principales propiedades de la mediana son:

- Es menos sensible que la media a oscilaciones de los valores de la variable.
- No se ve afectada por la dispersión. De hecho, es más representativa que la media aritmética cuando la población es bastante heterogénea.

Su uso también tiene inconvenientes, como son:

- No se presta a cálculos algebraicos tan bien como la media aritmética.
- En el caso de datos agrupados en intervalos, su valor varía en función de la amplitud de éstos.

Ejemplo 3.2.4. *Tomando el número de piezas defectuosas introducido en el Ejemplo 3.2.2, se comprueba que no aparece el valor de $\frac{n}{2} = 30$ en la columna de las frecuencias absolutas, N_i . Realmente tenemos que*

$$N_2 = 18 < \frac{n}{2} = 30 < N_3 = 32.$$

Entonces el valor $x_3 = 2 = Me$ es la mediana de la distribución.

3.2.3. La moda

Definición 3.2.5. *La moda de una distribución de frecuencias es la modalidad con mayor frecuencia, absoluta o relativa.*

Las principales propiedades de la moda son:

- Su cálculo es inmediato.
- Tiene una interpretación muy clara.
- Al depender sólo de las frecuencias, puede calcularse para variables cualitativas. Es por ello el parámetro más utilizado cuando al resumir una población no es posible realizar otros cálculos.

Su uso también presenta inconvenientes, como son:

- Su valor es independiente de la mayor parte de los datos, lo que la hace muy sensible a variaciones muestrales.
- Usa muy pocas observaciones, de tal modo que grandes variaciones en los datos fuera de la moda no afectan en modo alguno a su valor.
- No siempre se sitúa hacia el centro de la distribución.
- Puede haber más de una moda en el caso en que dos o más valores de la variable presenten la misma frecuencia.

Ejemplo 3.2.6. *Observando la distribución de frecuencias para el número de piezas defectuosas del Ejemplo 3.2.2, la moda es $Mo = 3$ puesto que $n_4 = 15$ tiene el valor máximo.*

3.3. Variables aleatorias continuas

Cuando la variable estadística es continua el número de valores diferentes es elevado, de manera que la tabla estadística puede ser muy amplia impidiendo apreciar a simple vista el aspecto general de los datos, que es uno de los objetivos fundamentales que se persigue al construirla. En estos casos los valores se agrupan en intervalos semiabiertos por la izquierda del tipo $(e_{i-1}, e_i]$, llamados *intervalos de clase*, que serán considerados modalidades, y se asocia a cada intervalo un valor representativo del mismo denominado *marca de clase*, la cual se toma como el punto medio

$$x_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2},$$

donde e_1, e_2, \dots, e_k son los extremos de los intervalos de clase.

Para este tipo de variables, la amplitud $a_i = e_i - e_{i-1}$ de los intervalos de clase puede ser constante o variable. Hay un consenso generalizado de que, en ausencia de información, debemos escoger amplitud constante, mientras que cuando se conoce un carácter específico de la población que deseamos destacar, elegiremos amplitud variable.

En el caso continuo, el cálculo de la media se efectúa utilizando las marcas de clase como valores de la variable y procediendo de igual forma que el caso discreto.

Para determinar la mediana, calculamos $\frac{n}{2}$ y trazamos la curva acumulada o de distribución, también llamada *polígono de frecuencias acumuladas*, que es la gráfica de la función $F(x)$ obtenida definiendo

$$F(e_i) = \sum_{j=1}^i f_j \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

y uniendo mediante segmentos rectilíneos los valores consecutivos de $F(e_i)$. Las pendientes de los seg-

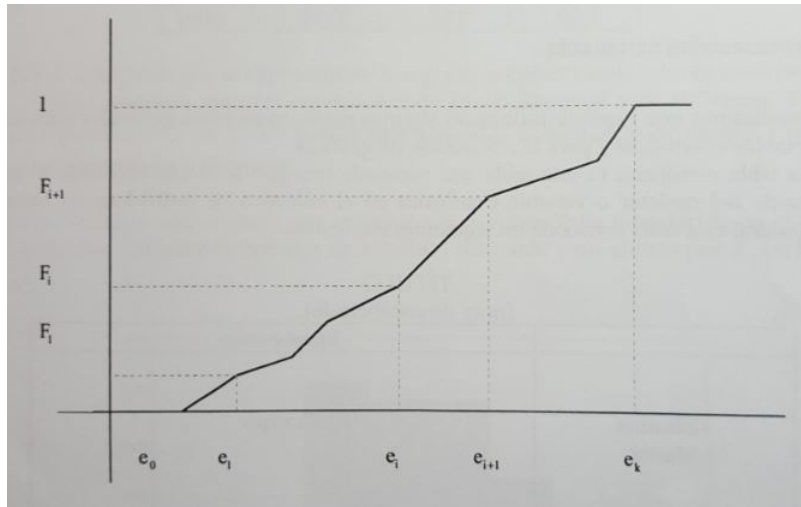


Figura 3.2. Curva acumulada o de distribución.

mentos que conforman la poligonal no decreciente resultante indican la mayor o menor densidad de observaciones en el intervalo.

Si el valor $\frac{n}{2}$ coincide con alguno de la columna de las frecuencias absolutas acumuladas de los intervalos de clase, tenemos solución única y la mediana es el extremo derecho del intervalo encontrado.

Supongamos que el valor de $\frac{n}{2}$ no aparece en la columna de frecuencias absolutas acumuladas, es decir, que $N_{i-1} < \frac{n}{2} < N_i$. Como sólo conocemos los valores de la curva de distribución en los extremos de clase e_i y habíamos interpolado linealmente en el resto, para delimitar un punto dentro del intervalo i -ésimo (e_{i-1}, e_i] como valor de la mediana planteamos la siguiente semejanza de triángulos (figura 3.3):

$$\frac{Me - e_{i-1}}{\frac{n}{2} - N_{i-1}} = \frac{e_i - e_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}.$$

La ordenada buscada es entonces

$$Me = e_{i-1} + a_i \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i}.$$

Indiquemos que esta interpolación lineal presupone que la distribución de las observaciones dentro de cada intervalo de clase es uniforme, lo que no suele ocurrir en general. Así, para el caso continuo, el parámetro estadístico de la mediana obtenido a partir de una tabla estadística es una aproximación del calculado con todos los datos sin tabular mediante el uso de un software estadístico.

Por último, en el caso continuo, si los intervalos de clase son de amplitud constante entonces el intervalo modal se corresponde con aquel cuya frecuencia absoluta o relativa es máxima. En caso de tener intervalos de amplitud variable, el intervalo modal es el intervalo de clase con mayor frecuencia n_i ó f_i por amplitud de base, y para determinarlo basta buscar el mayor de los valores $h_i = \frac{n_i}{a_i}$ ó $h_i = \frac{f_i}{a_i}$.

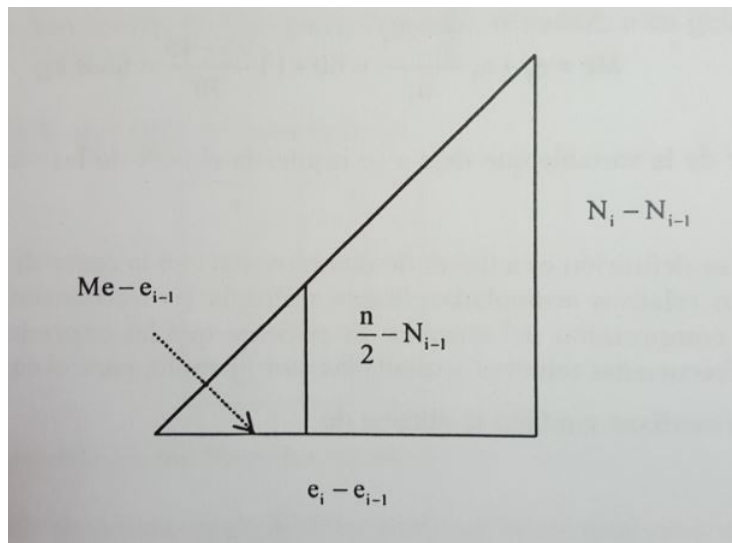


Figura 3.3. Curva de distribución en el intervalo i -ésimo $(e_{i-1}, e_i]$.

3.4. Enunciados engañosos

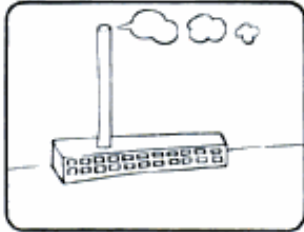
En esta sección se discuten las diferencias y la confusión entre los conceptos de media, mediana y moda en algunos enunciados estadísticos que proporcionan los medios de comunicación y que llegan a ser engañosos. También ilustraremos con un ejemplo la forma en que una representación inadecuada de los datos puede inducir a errores interesados.

3.4.1. El «término medio»

Después de explicar las diferentes medidas de posición central debemos observar que las informaciones sobre estadísticas pueden resultar desconcertantes a causa de la definición de «término medio», que se aplica, en ocasiones, no a la media, sino a la mediana o la moda, lo cual conduce a enunciados y conclusiones directamente engañosos. La viñeta de la figura 3.1 intenta poner de manifiesto este hecho.

Un ejemplo de confusiones frecuentes entre media, mediana y moda es la historia de la fábrica imaginaria PRODILUGIO, S.A. que se relata en la figura 3.4. En ella sucede que hay valores extremos muy dispares, los elevados salarios de los *enchufados* de la fábrica. Esto hace que el «salario medio» cree una impresión falsa. A Félix la mediana le da una información más útil que la media, pero incluso la mediana aporta una imagen deformada de los salarios de su empresa. Lo que realmente le convenía conocer es la moda, el salario que más personas perciben.

Es muy fácil encontrar situaciones parecidas donde la media induce a error. Por ejemplo, para atraer al comercio minorista, la Cámara de Comercio pública que la renta media per cápita de una determinada ciudad es muy alta. Casi todo el mundo daría por supuesto que se trata de una población rica,



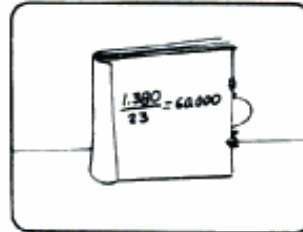
Productos Artilugio (PRODILUGIO, S.A.) tiene una pequeña fábrica de superartilugios.



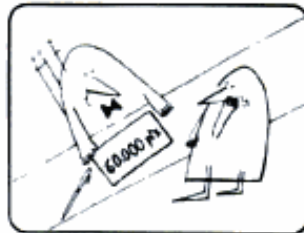
Señor Artilugio: He aquí la nómina semanal. Yo gano 480.000; mi hermano, 200.000, mis seis parientes sacan 50.000 cada uno; los cinco capataces, 40.000, y los 10 operarios, 20.000 cada uno. El total semanal es de 1.380.000 para 23 personas. ¿Me equivoco?



La dirección de la empresa está a cargo del señor Artilugio, su hermano y seis parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica precisa un operario más.



Félix: ¡Vale, vale! Tiene usted razón. El promedio es de 60 billetes a la semana. Pero, aún así, usted me ha engañado.



El señor Artilugio está entrevistando a Félix, candidato al puesto.
Señor Artilugio: Aquí pagamos muy bien. El salario medio es de 60.000 pesetas semanales. Durante el periodo de formación sólo cobrará usted 15.000, pero pronto le subiremos el sueldo.



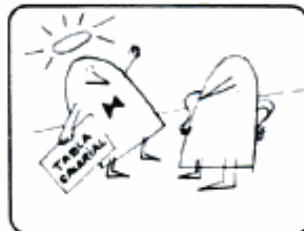
Señor Artilugio: No estoy de acuerdo. Lo que pasa es que usted no ha comprendido nada. Puede haber ido diciéndole los salarios por orden; el salario medio serían entonces 40.000 pesetas. Pero eso no es la media, sino la mediana.



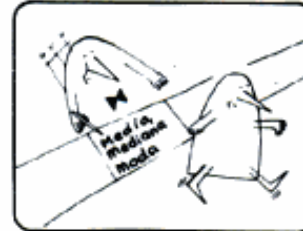
Al cabo de unos cuantos días, Félix quiso ver al jefe.
Félix: ¡Me ha engañado usted! He hablado con los otros operarios y ninguno gana más de 20.000 pesetas a la semana. ¿Cómo puede ser de 60.000 pesetas el salario medio?



Félix: ¿Y qué pintan aquí las 20.000?
Señor Artilugio: Eso se llama moda. Es el salario ganado por máximo número de personas.



Señor Artilugio: Vamos, Félix, no se excite. El salario medio es de 60.000 pesetas. Se lo voy a demostrar.



Señor Artilugio: Muchacho, lo malo es usted es que no distingue entre media, mediana y moda.
Félix: Bueno, ahora ya sé la diferencia. Y... ¡me despido!

Figura 3.4. El engañoso término medio.

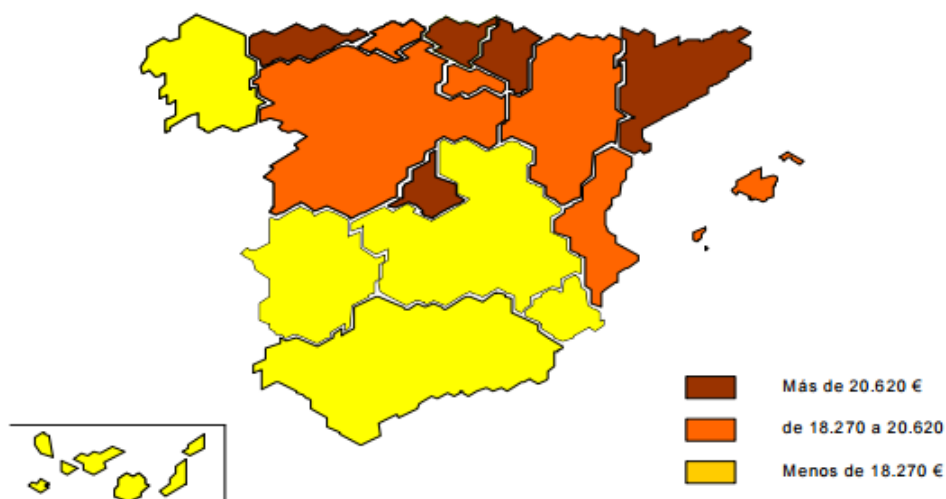
cuyos residentes gozan de ingresos muy elevados. A pesar de eso, en esta ciudad se aprecia una mayor desigualdad de renta entre los ciudadanos. Por ejemplo, una familia de la ciudad que represente la moda de ingresos, tiene una renta mucho más baja comparándola con la renta media. Esto se debe a un reducido número de gente muy rica que la eleva.

Un estudio realizado por el Instituto Nacional de Estadística (INE) sobre la estructura salarial anual de 2007 dice que la ganancia media anual por trabajador en ese año fue de 20.390,35 euros. Además, resalta que una característica de las funciones de distribución salarial es que presentan muchos más trabajadores en los valores bajos que en los salarios más elevados. Este hecho da lugar a que el salario medio sea superior tanto al salario mediano como al salario más frecuente, o sea, a la moda. Así, el salario mediano presentó un valor de 16.718,44 euros y el salario más frecuente ascendió a 14.503,61 euros.

Esta situación queda reflejada en el cuadro de la figura 3.5. Los datos de ganancia media por comunidades autónomas confirman que los salarios más elevados correspondieron en 2007 a la Comunidad de Madrid (24.242,08 euros anuales por trabajador), País Vasco (23.892,65 euros) y Comunidad Foral de Navarra (22.219,46 euros). Estas tres comunidades, junto con Cataluña y el Principado de Asturias, presentaron una ganancia media anual superior a la media nacional. El resto de comunidades autónomas tuvo un salario medio inferior a la media nacional. Extremadura (16.298,30 euros), Región de Murcia (17.173,76 euros) y Canarias (17.189,07) presentaron los salarios más bajos.

Otro ejemplo: las sociedades anónimas pueden declarar que su política está democráticamente controlada por sus accionistas. Supongamos que una sociedad tiene 50 socios que reúnen en total 600 acciones, o sea, 12 acciones cada uno por término medio; pero que, en realidad, 45 de ellos sólo tienen 4 acciones, mientras que los otros 5 disponen de 84 por cabeza. El promedio seguiría siendo de 12 votos, pero tan sólo 5 bastarían para controlar totalmente la sociedad.

Casos como el anterior se ven reflejados actualmente en la sociedad anónima deportiva del C.D. Tenerife, la cual consta de 175.000 acciones repartidas entre 31.300 accionistas, es decir, una media de 5 acciones por socio. A pesar de eso, la mayoría del capital se concentra en pocas manos. Un artículo publicado en el periódico local *Diario de Avisos* habla sobre el cambio del consejo de administración del C.D. Tenerife y cómo este vendrá determinado por empresarios importantes de la isla que cuentan con la mayor cantidad de acciones de la sociedad. En torno al 40% de las acciones de la entidad están en manos de 10 ó 12 empresarios, mientras que el 50% y pico restante está en manos de accionistas que manejan de 1 a 8 acciones. Esto supone que los pocos empresarios que controlan la mayoría de las acciones verdaderamente tienen el poder, de manera que si este empresariado va unido, será el que determine el nuevo consejo de administración. Otras sociedades en una situación semejante son el Banco Santander o Nestlé S.A..



Principales resultados por comunidades autónomas

	Salario bruto anual		
	Total	Hombres	Mujeres
TOTAL NACIONAL	20.390,35	22.780,29	16.943,89
Andalucía	17.987,33	20.042,29	14.398,98
Aragón	20.015,81	22.771,23	15.694,24
Asturias (Principado de)	20.623,81	23.347,87	16.376,95
Balears (Illes)	18.886,80	20.846,75	16.627,15
Canarias	17.189,07	18.196,14	15.721,06
Cantabria	18.697,63	21.049,99	14.915,34
Castilla y León	18.274,08	20.394,78	15.027,97
Castilla-La Mancha	17.908,64	19.350,01	15.095,11
Cataluña	21.998,10	25.109,98	18.136,60
Comunitat Valenciana	18.547,94	20.518,95	15.567,62
Extremadura	16.298,30	17.279,58	14.553,56
Galicia	17.603,45	19.511,30	15.007,78
Madrid (Comunidad de)	24.242,08	27.609,53	19.688,59
Murcia (Región de)	17.173,76	19.052,23	14.242,71
Navarra (Comunidad Foral de)	22.219,46	25.273,34	18.129,02
País Vasco	23.892,65	26.911,37	19.771,83
Rioja (La)	18.860,52	21.179,14	15.637,54

Figura 3.5. Diferencias de salarios por comunidad autónoma.



Figura 3.6. Una gráfica desproporcionada.

3.4.2. Lies, damned lies, and statistics

La frase *There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics*, popularizada en EEUU por el escritor norteamericano Mark Twain (quien, a su vez, la atribuye al primer ministro británico Benjamin Disraeli) refleja que, más allá de los errores derivados de la confusión entre media, mediana y moda, hay también otros enunciados o representaciones estadísticas susceptibles de ser utilizados torticeramente por parte de quien los expone para tratar de engañar al lector. Reseñamos a continuación un ejemplo reciente.

El periódico *La Razón* publicó el 19 de octubre de 2015 los resultados de una encuesta electoral sobre las próximas elecciones del 20 de diciembre, realizada por la consultoría NC REPORT. Lo importante en este caso no es la credibilidad de la encuesta, sino el gráfico que usaba el periódico para describir los resultados. El titular y los datos, reproducidos en la figura 3.6, expresan que el Partido Popular (PP) dobla a Ciudadanos (C's) en intención de voto pero en la gráfica casi lo quintuplica, desproporción que induce, consciente o inconscientemente, a un error.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	5	4	3	8	7	5	3	2	0
2	9	8	1	2	0	1	3	2	8	6
3	4	7	2	4	5	4	7	10	3	6
4	6	3	9	7	3	1	4	5	7	10
5	5	10	8	6	2	5	0	2	9	5
6					N. de datos	50				
7										

Figura 3.7. Actividad 1: columnas de datos introducidos en Excel.

3.5. Actividades

En estas actividades trabajaremos las medidas de posición utilizando el conocido programa Excel o algún software equivalente no propietario.

Actividad 1

La puntuaciones de los alumnos de una asignatura han sido:

1	5	4	3	8	7	5	3	2	0
9	8	1	2	0	1	3	2	8	6
4	7	2	4	5	4	7	10	3	6
6	3	9	7	3	1	4	5	7	10
5	10	8	6	2	5	0	2	9	5

Se pide:

- Elaborar la tabla de frecuencias.
- Hallar la media, la mediana y la moda.

Sol.: $\bar{x} = 4,7$; $Me = 5$; $Mo = 5$.

RESOLUCIÓN. Primero insertamos los datos que nos dan sobre las puntuaciones de los alumnos. Una vez introducidos calculamos el número total de datos, parámetro que se halla igualando en una celda a la función CONTAR y seleccionando todos los datos anteriores. Obtenemos así que el número de datos es igual a 50.

La variable aleatoria $X = \{\text{calificaciones de la asignatura}\}$ es cuantitativa discreta. Teniendo esto presente, hallaremos su distribución de frecuencias. Los posibles valores de x_i son las diferentes pun-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	5	4	3	8	7	5	3	2	0
2	9	8	1	2	0	1	3	2	8	6
3	4	7	2	4	5	4	7	10	3	6
4	6	3	9	7	3	1	4	5	7	10
5	5	10	8	6	2	5	0	2	9	5
6					N. de datos	50				
8						PUNTUACIONES	ni	fi	Ni	Fi
9						0	3	0,06	3	0,06
10						1	4	0,08	7	0,14
11						2	6	0,12	13	0,26
12						3	6	0,12	19	0,38
13						4	5	0,1	24	0,48
14						5	7	0,14	31	0,62
15						6	4	0,08	35	0,7
16						7	5	0,1	40	0,8
17						8	4	0,08	44	0,88
18						9	3	0,06	47	0,94
19						10	3	0,06	50	1

Figura 3.8. Actividad 1: tabla de distribución de frecuencias en Excel.

tuciones que pueden obtener los alumnos en el examen, esto es, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, con $i = 1, \dots, 11$.

La frecuencia absoluta acumulada N_i de cada modalidad x_i es la suma del número de individuos que presentan las modalidades inferiores o iguales a x_i . En Excel se halla igualando a la función FRECUENCIA del total de datos, que en este caso será fijo, y de la variable x_i que queremos calcular.

La frecuencia absoluta n_i de la primera modalidad coincide con la frecuencia absoluta acumulada, pero a partir de la segunda será la frecuencia absoluta acumulada de la modalidad x_i menos la frecuencia absoluta acumulada de la modalidad x_{i-1} .

La frecuencia relativa f_i de cada x_i se calcula igualando a la frecuencia absoluta dividida por el número de datos, que será fijo.

Para terminar la tabla de frecuencias se halla la frecuencia relativa acumulada F_i de cada modalidad x_i . La primera variable coincide con la frecuencia relativa, pero a partir de la segunda será la frecuencia relativa de la modalidad x_i más las frecuencias relativas de las modalidades inferiores.

Por último, tenemos que calcular la media, la mediana y la moda. Con el programa Excel es muy fácil, pues son funciones ya implementadas en la propia hoja de cálculo. La media se halla igualando a la función MEDIA y seleccionando el total de datos y la columna con las frecuencias relativas. La mediana y la moda se hallan igualando a la función MEDIANA y a la función MODA, respectivamente, del total de datos. \square

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	5	4	3	8	7	5	3	2	0
2	9	8	1	2	0	1	3	2	8	6
3	4	7	2	4	5	4	7	10	3	6
4	6	3	9	7	3	1	4	5	7	10
5	5	10	8	6	2	5	0	2	9	5

	N. de datos
	50

	PUNTUACIONES	ni	fi	Ni	Fi
9	0	3	0,06	3	0,06
10	1	4	0,08	7	0,14
11	2	6	0,12	13	0,26
12	3	6	0,12	19	0,38
13	4	5	0,1	24	0,48
14	5	7	0,14	31	0,62
15	6	4	0,08	35	0,7
16	7	5	0,1	40	0,8
17	8	4	0,08	44	0,88
18	9	3	0,06	47	0,94
19	10	3	0,06	50	1

Media	4,729
Mediana	5
Moda	5

Figura 3.9. Actividad 1: media, mediana y moda en Excel.

Actividad 2

Con ayuda del programa Excel, elaborar la tabla de distribución de frecuencias y calcular la media, la mediana y la moda de la variable considerada en el Ejemplo 3.2.2.

Sol.: $\bar{x} = 2,5$; $Me = 2$; $Mo = 3$.

Actividad 3

Se han medido las estaturas, en metros, de 50 personas obteniéndose los siguientes resultados:

1,62	1,71	1,57	1,67	1,80	1,91	1,58	1,63	1,63	1,70
1,68	1,64	1,79	1,72	1,68	1,90	1,69	1,73	1,60	1,77
1,71	1,89	1,92	1,99	1,67	1,55	1,62	1,65	1,75	1,73
1,80	1,83	1,75	1,66	1,93	1,85	1,84	1,68	1,75	1,77
1,84	1,85	1,90	1,83	1,82	1,65	1,72	1,68	1,73	1,65

Se pide:

- Elaborar la tabla de frecuencias, agrupando los valores en intervalos de amplitud 10 cm y tomando como primer intervalo (1,50, 1,60].
- Hallar la media, la mediana y la moda.

Sol.: $\bar{x} = 1,736$; $Me = 1,727$; $Mo = (1,60, 1,70]$.

RESOLUCIÓN. En primer lugar, introducimos los datos del enunciado sobre las estaturas de la población estudiada. Hecho esto, calculamos el número total de datos, parámetro que se halla igualando en una

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a data table in columns A through J and rows 1 through 5. The formula bar at the top shows the formula `=CONTAR(A1:J5)` in cell B7. Below the data table, row 7 contains summary statistics: 'N.deDatos' with a value of 50, 'Amplitud' with a value of 0,1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1,62	1,71	1,57	1,67	1,8	1,91	1,58	1,63	1,63	1,7
2	1,68	1,64	1,79	1,72	1,68	1,9	1,69	1,73	1,6	1,77
3	1,71	1,89	1,92	1,99	1,67	1,55	1,62	1,65	1,75	1,73
4	1,8	1,83	1,75	1,66	1,93	1,85	1,84	1,68	1,75	1,77
5	1,84	1,85	1,9	1,83	1,82	1,65	1,72	1,68	1,73	1,65
6										
7	N.deDatos	50		Amplitud	0,1					

Figura 3.10. Actividad 2: columnas de datos introducidos en Excel.

celda a la función CONTAR y seleccionando todos los datos anteriores. Obtenemos así que el número de datos es igual a 50.

La variable aleatoria $X = \{\text{estatura de las personas}\}$ es cuantitativa continua. Teniendo esto presente, hallaremos su distribución de frecuencias.

Como los valores han de ser agrupados en intervalos de 10 cm de amplitud, disponemos de cinco intervalos de clase, siendo el primer intervalo $(1,50, 1,60]$ y el último intervalo $(1,90, 2,00]$.

A continuación, se calculan las marcas de clase x_i como el punto medio de cada intervalo. Encontramos así que los valores de x_i son $X = \{1,55, 1,65, 1,75, 1,85, 1,95\}$, con $i = 1, \dots, 5$.

La frecuencia absoluta acumulada N_i de cada marca x_i es la suma del número de individuos que presentan las marcas inferiores o iguales a x_i . En Excel se halla igualando a la función FRECUENCIA del total de datos, que en este caso será fijo, y del extremo superior del intervalo de clase cuya frecuencia queremos calcular.

La frecuencia absoluta n_i de la primera marca coincide con la frecuencia absoluta acumulada, pero a partir de la segunda será la frecuencia absoluta acumulada de la marca x_i menos la frecuencia absoluta acumulada de la marca x_{i-1} .

La frecuencia relativa f_i de cada x_i se calcula igualando a la frecuencia absoluta dividida por el número de datos, que es fijo.

Se completa la tabla de frecuencias hallando la frecuencia relativa acumulada F_i de cada marca x_i . Para la primera marca coincide con la frecuencia relativa, pero a partir de la segunda será la frecuencia relativa de la marca x_i más las frecuencias relativas de las modalidades inferiores.

Por último calcularemos la media, la mediana y la moda.

La media se halla efectuando el sumatorio de las marcas de clase x_i por la frecuencia relativa f_i , y vale $\bar{x} = 1,736$.

Para la mediana, calculamos el valor $\frac{n}{2}$, que no coincide con ninguno de la columna de las frecuencias absolutas acumuladas de los intervalos de clase: $N_2 < \frac{n}{2} = 25 < N_3$. Como sólo conocemos los valo-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1,62	1,71	1,57	1,67	1,8	1,91	1,58	1,63	1,63	1,7
2	1,68	1,64	1,79	1,72	1,68	1,9	1,69	1,73	1,6	1,77
3	1,71	1,89	1,92	1,99	1,67	1,55	1,62	1,65	1,75	1,73
4	1,8	1,83	1,75	1,66	1,93	1,85	1,84	1,68	1,75	1,77
5	1,84	1,85	1,9	1,83	1,82	1,65	1,72	1,68	1,73	1,65
6										
7	N.deDatos	50		Amplitud	0,1					
8										
9		INTERVALOS		xi	ni	fi	Ni	Fi		
10		1,5	1,6	1,55	4	0,08	4	0,08		
11		1,6	1,7	1,65	17	0,34	21	0,42		
12		1,7	1,8	1,75	15	0,3	36	0,72		
13		1,8	1,9	1,85	10	0,2	46	0,92		
14		1,9	2	1,95	4	0,08	50	1		

Figura 3.11. Actividad 2: tabla de distribución de frecuencias en Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1,62	1,71	1,57	1,67	1,8	1,91	1,58	1,63	1,63	1,7			
2	1,68	1,64	1,79	1,72	1,68	1,9	1,69	1,73	1,6	1,77			
3	1,71	1,89	1,92	1,99	1,67	1,55	1,62	1,65	1,75	1,73			
4	1,8	1,83	1,75	1,66	1,93	1,85	1,84	1,68	1,75	1,77			
5	1,84	1,85	1,9	1,83	1,82	1,65	1,72	1,68	1,73	1,65			
6													
7	N.deDatos	50		Amplitud	0,1								
8													
9		INTERVALOS		xi	ni	fi	Ni	Fi					
10		1,5	1,6	1,55	4	0,08	4	0,08				MEDIA	1,736
11		1,6	1,7	1,65	17	0,34	21	0,42				MEDIANA	1,72666667
12		1,7	1,8	1,75	15	0,3	36	0,72				MODA	(1,60;1,70]
13		1,8	1,9	1,85	10	0,2	46	0,92					
14		1,9	2	1,95	4	0,08	50	1					

Figura 3.12. Actividad 2: media, mediana y moda en Excel.

res de la curva de distribución en los extremos de clase 1,70 y 1,80 y habíamos interpolado linealmente en el resto, para delimitar un punto dentro del intervalo i -ésimo $(1,70, 1,80]$ como valor de la mediana planteamos la siguiente semejanza de triángulos:

$$Me = e_2 + a_3 \frac{\frac{n}{2} - N_2}{n_3} = 1,7 + 0,1 \frac{25 - 21}{15}.$$

De aquí resulta $Me = 1,727$.

Finalmente, como los intervalos de clase son de amplitud constante, el intervalo modal se corresponde con aquel cuya frecuencia absoluta o relativa es máxima: $Mo = (1,60, 1,70]$. □

Actividad 4

Las puntuaciones de un test de inteligencia, sobre una muestra de tamaño 198, se han distribuido según la tabla:

Puntuaciones	Frecuencia
20-40	6
40-60	93
60-80	90
80-100	9

Se pide:

- a) Elaborar la tabla de frecuencias.
- b) Hallar la media, la mediana y la moda.

Sol.: $\bar{x} = 60,3$; $Me = 60$; $Mo = (40, 60]$.

Referencias

- [1] Gardner M. (1983): *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*, Labor, Barcelona.
- [2] González Sierra M.A. (2011): *Lecciones de Estadística Descriptiva*, Fotocopias Campus, La Laguna (Tenerife).
- [3] Instituto Nacional de Estadística (22/09/2009): *Notas de prensa*, <http://www.ine.es/prensa/np568.pdf>.
- [4] Diario de Avisos (27/11/2015): *El poder en manos de unos pocos*, <http://www.diariodeavisos.com/2015/11/poder-en-manos-unos-pocos/>.
- [5] Malaprensa (20/10/2015): *Otra portada, otro gráfico enloquecido*, <http://www.malaprensa.com/2015/10/otra-portada-otro-grafico-enloquecido.html>.

Geometría: El teorema de Pitágoras



Figura 4.1. «Pitágoras». *Matemática*, vol. 7, núm. 3 (septiembre 2011).

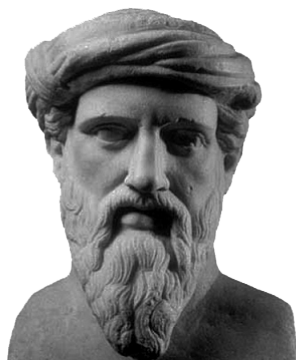


Figura 4.2. Escultura de Pitágoras (s. V a.C.).

4.1. Introducción

Pitágoras es el matemático más conocido en todo el mundo, pero, en el ámbito más general de la historia de la cultura, es realmente un personaje célebre. Su figura es una de las más apasionantes e interesantes de la historia del pensamiento. Racionalista y místico, filósofo y teólogo, matemático y experimentador, sabio y profeta, maestro y asceta, psicólogo y orador, promotor religioso y taumaturgo, interrogador del cosmos y gran conversador, hombre de carne y hueso y personaje mítico, y como veremos, perdurando a lo largo del tiempo.

Entre la historia y la ficción, la extraordinaria figura de Pitágoras ha sido muy controvertida, estando incluso inmersa en una especie de halo misterioso que envuelve las leyendas y tradiciones sobre el personaje. Se ha llegado a dudar de su existencia debido a que los datos verificables sobre su vida son escasos: no existen textos de su autoría ni bibliografías firmadas por contemporáneos. Los primeros escritos detallados, que datan de entre 150 y 250 años después de su muerte, se basan en historias transmitidas de manera oral y muestran grandes diferencias entre sí.

Dedicamos este capítulo al bien conocido teorema de Pitágoras. Se comentan su historia, diversos aspectos del teorema y sus numerosas demostraciones, incluyendo algunas de ellas.

4.2. El personaje

Pitágoras era natural de Samos, una de las islas de Dodecaneso, próxima a Mileto. Se admite como fecha probable de su nacimiento el año 569 a.C. Como aseguran Heráclito y otros escritores, su padre fue Mnesarco, quizás un rico comerciante de Tiro, y su madre Pitia de Grecia. Como en el caso de Tales, tenía sangre griega y fenicia.

Muy poco se conoce de su adolescencia. Pitágoras debió recibir una educación exquisita que se

iniciaría con su formación intelectual en su isla natal bajo la dirección de los filósofos Ferecides y, sobre todo, Hermodomas de quien aprendería la matemática y astronomía de Tales. Es muy probable que visitara a Tales en Mileto y aprendiera directamente de él. Aconsejado por la experiencia personal de Tales y ansioso de ampliar conocimientos, es posible que fuera a Egipto y Mesopotamia, donde debieron hacerle partícipe no sólo de la ciencia exotérica, sino también de la ciencia esotérica que impregnaría toda su elaboración científica y la transmisión de la misma a sus discípulos. También puede que realizase un viaje hasta la India, asimilando mucho bagaje religioso, en particular las doctrinas sobre la reencarnación y la transmigración de las almas. Incluso se le atribuyen viajes por el Mediterráneo desde Fenicia hasta las columnas de Hércules, y de aquí a Gran Bretaña para aprender de los druidas. El saber milenario de egipcios, fenicios, judíos, árabes, caldeos, persas, indios y druidas habría conformado la extraordinaria sabiduría de Pitágoras.

Enriquecido con la sabiduría oriental y sintiéndose preparado para la transmisión de la verdad y el conocimiento, Pitágoras regresó a Samos y empezó a exponer doctrinas filosóficas y religiosas. Éstas no fueron entendidas por sus conciudadanos por su grado de abstracción, de modo que se decidió a abandonar su ciudad natal para establecerse en la ciudad de Crotona, situada en la costa sudeste de Italia. A su llegada y por requerimiento de los habitantes de Crotona, Pitágoras dio cuatro discursos públicos plagados de recomendaciones morales. Se cree que sus discursos impactaron en toda la comunidad, haciendo que se convirtiera en un hombre pleno de majestad, distinción y excelencia.

Algunos historiadores aseguran que allí habitaba Teano, que llegó a ser la discípula predilecta de Pitágoras y, según algunos biógrafos, su esposa y madre de dos hijas y un hijo llamado Telauges. Fue en Crotona donde Pitágoras fundó una sociedad de carácter científico y religioso donde las armonías y misterios de la matemática y de la filosofía eran partes esenciales, y cuya influencia no tardó en hacerse sentir en toda la Magna Grecia e, incluso, en Roma.

No se conocen con seguridad los detalles de sus últimos días. Una de las versiones es que terminó refugiándose en Lócride, después en Tarento y finalmente en Mesaponto donde moriría hacia el año 500 a.C., haciendo que los metapontinos convirtieran la casa en que murió en un santuario.

4.3. El teorema de Pitágoras

Las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo han sido siempre un tema de interés esencial para las matemáticas de casi todas las civilizaciones. La primera y más sobresaliente de estas relaciones es el teorema conocido por el nombre de Pitágoras:

El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

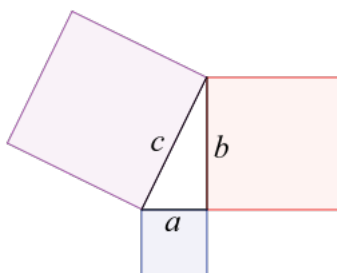


Figura 4.3. Teorema de Pitágoras.

Si el triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b y la medida de la hipotenusa es c , el enunciado anterior establece que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Este es considerado por muchos historiadores como el más fascinante, atractivo, famoso y útil teorema de la geometría elemental, y ha marcado un hito en la historia de las matemáticas. Ningún teorema ha recibido tanta atención y tantas demostraciones. Es un teorema que ha causado admiración a todo tipo de personas, pero también una gran extrañeza y perplejidad a otras, porque, a diferencia de otros resultados, no existe ninguna razón intuitiva para que el triángulo rectángulo deba tener un vínculo tan preciso con los cuadrados construidos sobre sus lados. El teorema de Pitágoras es la base de multitud de teoremas geométricos, de la trigonometría y de la geometría analítica. La ecuación pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$ es la ecuación de la circunferencia y la base de la fórmula trigonométrica fundamental $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

4.4. El teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas

Un examen arqueológico realizado en nuestro siglo de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia pertenecientes a las civilizaciones que se desarrollaron en el segundo milenio a.C., ha revelado que los antiguos babilonios conocían aspectos del teorema más de mil años antes que el propio Pitágoras. Algo similar se puede afirmar respecto a las antiguas civilizaciones hindú y chinas y las grandes civilizaciones egipcias.

Entre las tablillas recuperadas gracias a la arqueología sobresale la tablilla Yale, fechada hacia 1600 a.C. Figuran en ella un cuadrado, los triángulos resultantes de trazar las diagonales y varios números escritos en el sistema de numeración sexagesimal babilónico, basado en las potencias de 60. La relación con el teorema de Pitágoras se observa al traducir estos números a nuestro sistema decimal.

$$42,426389 = 30 \times 1,41421.$$

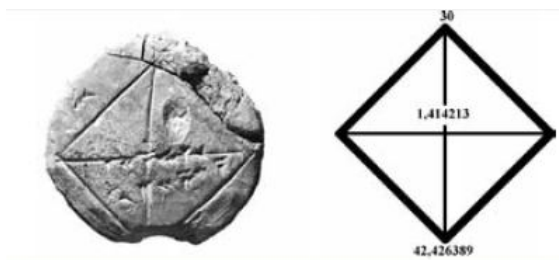


Figura 4.4. Tablilla Yale (1600 a.C.).



Figura 4.5. Tablilla Plimpton (1800 a.C.).

Las referencias prehelénicas al teorema no contienen, sin embargo, pruebas del mismo, mientras que es generalizada la creencia de que Pitágoras fue el primero en proporcionarnos una demostración lógica del mismo.

4.4.1. El teorema de Pitágoras en Mesopotamia

Mucho antes de que Pitágoras enunciara el teorema, en Babilonia sabían cómo calcular ternas de números pitagóricos. La tablilla Plimpton es el documento matemático más importante de Babilonia.

Consta de cuatro columnas de números distribuidos en 15 filas horizontales. En la primera tabla se reproducen las tres últimas columnas en nuestro sistema decimal. La columna del extremo derecho contiene los números del 1 al 15 y representa meramente el número de orden de cada línea de números. La parte de la tablilla que se conserva está algo dañada, de forma que no permite leer algunos números, sobre todo en la primera columna, pero una vez descubierta la ley de formación de la tabla ha sido posible reconstruir los números que faltaban. Las columnas segunda y tercera representan el cateto menor b y la hipotenusa c de triángulos rectángulos de lados enteros, o la altura b y la diagonal c de un rectángulo.

De las diversas investigaciones parece deducirse que los escribas que construyeron la tablilla Plimpton debieron comenzar por tomar dos enteros sexagesimales regulares (enteros cuyos únicos divisores primos son 2, 3 y 5, es decir, los divisores primos de 60) u, v , con $u > v$, y formar con ellos la terna de números:

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2,$$

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Tabla 4.1. Tabla Plimpton.

que, como se comprueba fácilmente, forman una *terna pitagórica*: $a^2 + b^2 = c^2$. Así se obtendría la segunda tabla que contiene los valores de a, b, c , que corresponden a valores de v menores que 60 y a valores de u tales que $1 < \frac{u}{v} < 1 + \sqrt{2}$, es decir, a triángulos rectángulos con catetos $b < a$.

4.4.2. El teorema de Pitágoras en Egipto

En el antiguo Egipto, el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 era también conocido como *triángulo de Isis* y tenía un cierto carácter sagrado, ya que el número tres representaba a Osiris, el cuatro a Isis y el cinco a Horus. Por eso utilizaban el triángulo de lados 3, 4 y 5 (o cantidades proporcionales a estos números) para trazar una línea perpendicular a otra, a modo de escuadra de carpintero, práctica habitual de los agrimensores tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del río Nilo. Fue precisamente a partir de esta práctica como se llegó al conocimiento de la geometría en Egipto.

Una mención interesante es que todas las pirámides de Egipto incorporan, de alguna manera, el triángulo de Isis en su construcción, el cual añade a su sencillez el hecho de ser el único cuyos lados son números enteros consecutivos.

4.4.3. El teorema de Pitágoras en la India

En la India se desarrollan conocimientos aritmético-geométricos, prácticos y primitivos relacionados con el teorema de Pitágoras como resultado de la planificación de templos y la construcción de altares. Todo este saber adoptó entre los siglos VIII y II a.C. la forma de un cuerpo de doctrina conocido por el nombre de *sulvasutras*, término que se refiere a las cuerdas utilizadas para realizar mediciones. Así pues, los *sulvasutras* hindúes eran una especie de manuales donde se detallaban prescripciones para

u	v	a	b	c
12	5	120	119	169
64	27	3456	3367	4825
75	32	4800	4601	6649
125	54	13500	12709	18541
9	4	72	65	97
20	9	360	319	481
54	25	2700	2291	3541
32	15	960	799	1249
25	12	600	481	769
81	40	6480	4961	8161
2	1	60	45	75
48	25	2400	1679	2929
15	8	240	161	289
50	27	2700	1771	3229
9	5	90	56	106

Tabla 4.2. Terna pitagórica mesopotámica.

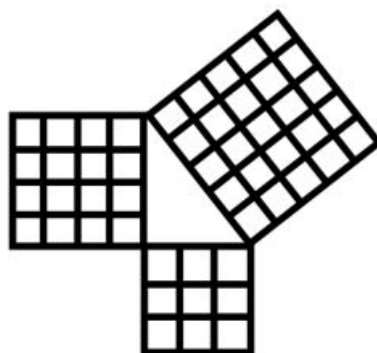


Figura 4.6. Triángulo de Isis.

$c - b = 1$	$c - b = 2$	$c - b = 3$
$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$
3 4 5	8 15 17	15 36 39
5 12 13	12 35 37	
7 24 25		

Tabla 4.3. Terna pitagórica india.

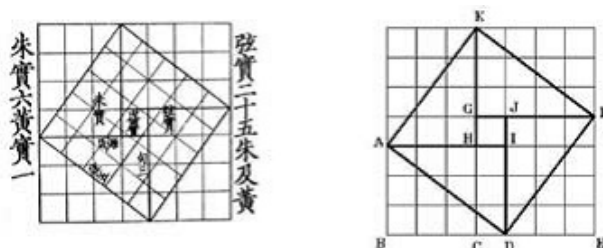


Figura 4.7. El Diagrama de la Hipotenusa del tratado chino Chou-Pei Suan-Ching.

la construcción ritual de altares de forma y tamaños determinados. Los más interesantes son los Baudhayana y Apastamba; en ellos se describe el uso de la cuerda no sólo para medir, sino también para el trazado de líneas perpendiculares por medio de ternas de cuerdas cuyas longitudes constituyen ternas pitagóricas.

4.4.4. El teorema de Pitágoras en China

Hay dos tratados clásicos chinos de contenido matemático donde se relacionan aspectos vinculados al teorema de Pitágoras: el Chou-Pei Suan-Ching y el Chui-Chang Suang-Shu, datados en torno a los años 300 ó 250 a.C.. Todo lo que se conoce en la literatura china antigua relativo al teorema de Pitágoras está incluido en estas obras, que son el resultado de la recopilación de conocimientos añadidos sucesivamente en diversas épocas anteriores a las fechas citadas.

La parte más antigua del Chou-Pei se abre con una discusión sobre triángulos rectángulos, pero lo más destacable es la descripción de la figura llamada *Diagrama de la Hipotenusa*. En la porción inferior de este diagrama, el hexágono $AHGFEB$ se compone de dos cuadrados $AHCB$ y $CEFG$ que tienen por lados los catetos del triángulo rectángulo. Este área es equivalente al cuadrado $ADFK$ sobre la hipotenusa del rectángulo, de donde resulta una elegante prueba del teorema de Pitágoras.

4.5. Las demostraciones de Pitágoras

Muchos historiadores coinciden en que la demostración de Pitágoras se basaría en su propia teoría de las proporciones y podría haber sido alguna de las dos que exponemos a continuación, basadas en

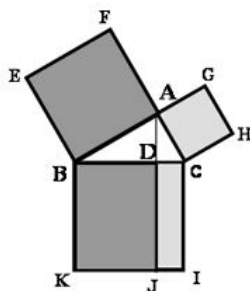


Figura 4.8. Demostración del teorema de Pitágoras.

el enunciado siguiente:

Sea ABC un triángulo rectángulo, con el ángulo recto en A, y sea AD perpendicular al lado BC. Según la proposición de Euclides, los triángulos DBA y DAC son ambos semejantes al triángulo ABC.

- Primera prueba

De la semejanza de los triángulos ABC , DBA y DAC resulta:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC},$$

lo que conduce a las expresiones del llamado «teorema del cateto»:

$$BA^2 = BD \times BC, \quad AC^2 = CD \times BC.$$

Sumándolas miembro a miembro se obtiene:

$$BA^2 + AC^2 = (BD + CD) \times BC = BC \times BC = BC^2.$$

Entonces:

$$BA^2 + AC^2 = BC^2.$$

- Segunda prueba

De la semejanza de los triángulos ABC , DBA y DAC y del hecho de que la razón entre las áreas de los triángulos semejantes será igual al cuadrado de la razón de semejanza, resulta:

$$\frac{DBA}{AB^2} = \frac{DAC}{AC^2} = \frac{ABC}{BC^2}.$$

m	a	b	c
3	3	4	5
5	5	12	13
7	7	24	25
9	9	40	41
11	11	60	61
13	13	84	85

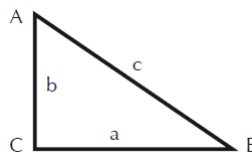


Tabla 4.4. Terna pitagórica de Pitágoras.

Pero, por las propiedades de la suma de proporciones:

$$\frac{ABC}{BC^2} = \frac{DBA}{AB^2} = \frac{DAC}{AC^2} = \frac{DBA + DAC}{AB^2 + AC^2} = \frac{ABC}{AB^2 + AC^2}.$$

Por tanto:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

4.5.1. Ternas pitagóricas

Los pitagóricos buscaron ávidamente el camino para obtener ternas de números a, b, c cumpliendo $a^2 + b^2 = c^2$ y encontraron una ley de formación que se puede expresar como:

$$a = m \quad (m \text{ impar}), \quad b = \frac{1}{2}(m^2 - 1), \quad c = \frac{1}{2}(m^2 + 1).$$

Esta ley permite obtener ternas pitagóricas en las que la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en una unidad.

4.5.2. El teorema de Pitágoras en Platón

Platón trata el teorema de Pitágoras en el caso particular del triángulo rectángulo isósceles en el diálogo *Menón* a propósito del problema de la «duplicación del cuadrado», antesala del famoso problema délico de la «duplicación del cubo».

En la búsqueda de ternas pitagóricas, Platón encontró la ley de formación

$$a = 2m, \quad b = (m^2 - 1), \quad c = (m^2 + 1),$$

la cual permite obtener las llamadas *ternas pitagóricas de Platón*. Resultan ser ternas en las que la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en dos unidades.

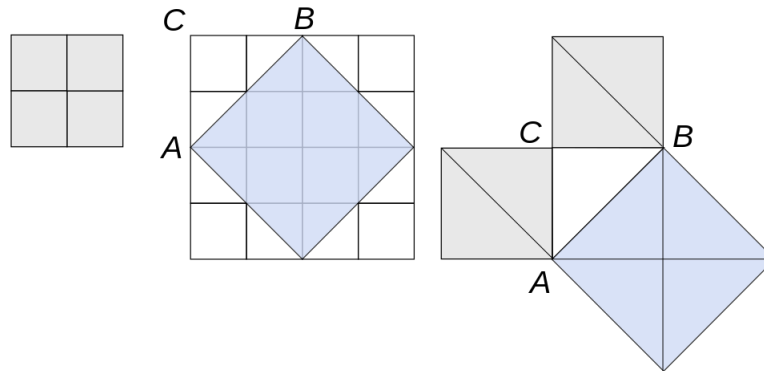


Figura 4.9. Demostración de Platón del teorema de Pitágoras.

m	a	b	c
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37
7	14	48	50

Tabla 4.5. Terna pitagórica de Platón.

4.5.3. La demostración de Euclides

El Libro I de *Los Elementos* de Euclides termina con el teorema de Pitágoras. Su demostración es muy elegante y la tradición se la ha atribuido. La diferencia con la demostración de Pitágoras es que Euclides utiliza las relaciones entre un paralelogramo y un triángulo de igual base situados entre las mismas rectas paralelas:

Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tienen el mismo área.

Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas, el área del paralelogramo es el doble de la del triángulo.

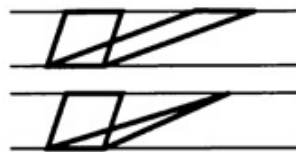


Figura 4.10. Los paralelogramos en la demostración de Euclides.

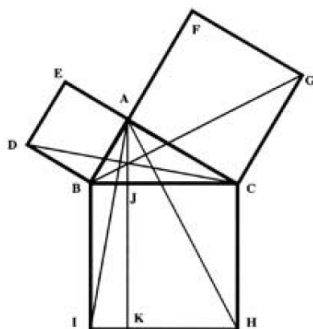


Figura 4.11. La demostración del teorema de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides.

Parece que Euclides está ansioso de situar el teorema de Pitágoras en *Los Elementos* lo más pronto posible, de la manera más rápida y directa; por eso realiza, con inefable estética y sublime sutileza, la siguiente demostración:

- Los triángulos DCB y ABI son iguales, ya que $AB = BD$, $BI = BC$ y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI .
- El área del cuadrado $ABDE$ es el doble del área del triángulo DCB , ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.
- El área del rectángulo $BIKJ$ es el doble del área del triángulo ABI , ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.

Combinando los tres resultados anteriores, resulta que el área del rectángulo $BIKJ$ es igual al área del cuadrado $ABDE$:

$$\text{Área}(BIKJ) = 2\text{Área}(ABI) = 2\text{Área}(DCB) = \text{Área}(ABDE).$$

Razonando de forma análoga se demuestra que el área del rectángulo $CHKJ$ es igual al área del cuadrado $ACGF$:

$$\text{Área}(CHKJ) = 2\text{Área}(AHC) = 2\text{Área}(BCG) = \text{Área}(ACGF).$$

Luego, ya que el área del cuadrado $BIHC$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos $BIKJ$ y $CHKJ$, definitivamente, el área del cuadrado cuyo lado subtiende el ángulo recto, $BIHC$, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, $ABDE$ y ACG , cuyos lados comprenden el ángulo recto:

$$\text{Área}(ABDE) + \text{Área}(ACGF) = \text{Área}(BIKJ) + \text{Área}(CHKJ) = \text{Área}(BIHC).$$

4.5.4. El recíproco del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras marca la cumbre del Libro I de *Los Elementos*, pero el ingenio de Euclides va todavía más allá, demostrando el resultado inverso:

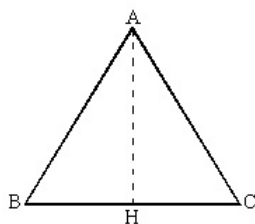


Figura 4.12. El recíproco del teorema de Pitágoras.

Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

En la demostración Euclides traza un segmento $HB = HC$, perpendicular a HA (figura 4.12).

De la hipótesis:

$$HC^2 + HA^2 = CA^2,$$

y al ser rectángulo el triángulo HBA , resulta:

$$HB^2 + HA^2 = BA^2.$$

Pero como $HC = HB$, será:

$$CA^2 = HC^2 + HA^2 = HB^2 + HA^2 = BA^2.$$

Por tanto, $CA = BA$; de manera que los triángulos BHA y AHC son congruentes, ya que al ser el lado HA común, los dos triángulos tienen los tres lados iguales. Por tanto, el ángulo AHC , que es igual al AHB , debe ser recto.

4.6. Las demostraciones más famosas del teorema de Pitágoras

Quizás ningún teorema matemático haya sido demostrado de modos tan diversos como el teorema de Pitágoras. En la Edad Media, a este se le consideraba la base de toda sólida formación matemática. En algunos centros docentes, además de exigir un profundo conocimiento del teorema para llegar a ser maestro, se obligaba a exhibir una nueva demostración. Este hecho es la explicación de las innumerables demostraciones que matemáticos y no matemáticos han dado sobre el teorema más famoso de la geometría.

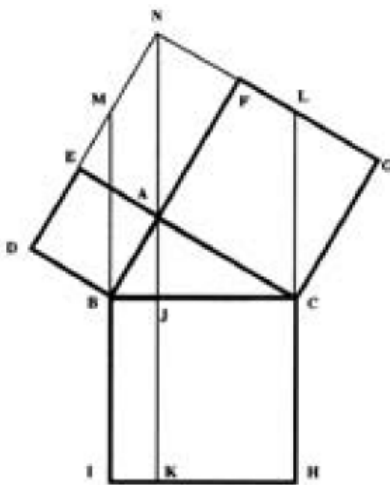


Figura 4.13. Demostración de Pappus.

4.6.1. La demostración de Pappus

La demostración de Pappus es muy similar a la de Euclides y se basa en la comparación de áreas de figuras de igual base, situadas entre paralelas (figura 4.13). Como los segmentos JK y AN son iguales, el rectángulo $JKIB$ y el paralelogramo $NABM$ son iguales entre sí, e iguales, a su vez, al cuadrado $ABDE$. Por lo tanto, el rectángulo $JKIB$ es igual al cuadrado $ABDE$. Análogamente se comprueba que el rectángulo $JKHC$ es igual al cuadrado $ACGF$. Así pues, el cuadrado $BIHC$ sobre la hipotenusa BC es igual a la suma de los cuadrados $ABDE$ y $ACGF$ sobre los catetos AB y AC , respectivamente.

4.6.2. La demostración de Thâbit Ibn Qurra

La demostración de Thâbit Ibn Qurra es la respuesta a la carta de un amigo que, conociendo el caso particular para un triángulo rectángulo isósceles, le solicitaba que le comunicara la prueba del caso general. Thâbit Ibn Qurra da dos demostraciones del tipo de congruencia por sustracción; una de ellas es la siguiente (figura 4.14).

Sea el triángulo rectángulo ABC . Si a la figura $ABCDEF$ se le sustraen los triángulos ABC y CDE iguales al dado, resulta el cuadrado $ACEF$ construido sobre la hipotenusa AC , mientras que sustrayendo los triángulos AHF y FGE , resulta la figura formada por los cuadrados $ABIH$, $GIDE$, construidos sobre los catetos AB , BC .

4.6.3. La demostración de Bhaskara

El monje, matemático y astrónomo hindú Bhaskara dio una demostración muy sencilla del teorema de Pitágoras. El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la figura 4.15, en cuatro triángulos

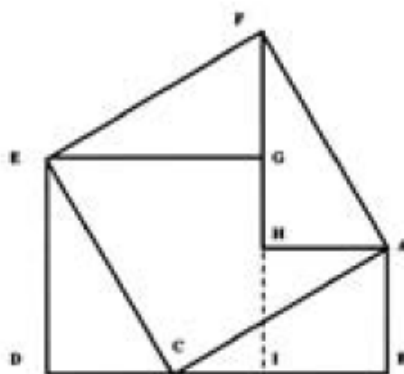


Figura 4.14. Demostración de Thâbit Ibn Qurra.

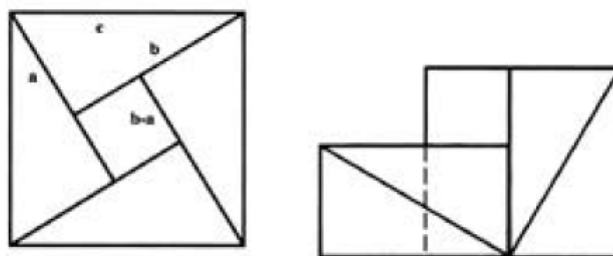


Figura 4.15. Demostración de Bhaskara.

equivalentes al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos. Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la unión de los cuadrados sobre los catetos. La prueba geométrica se traduce enseguida en términos algebraicos al expresar la igualdad de las figuras dibujadas:

$$c^2 = 4 \left(\frac{1}{2} \right) ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = b^2 + a^2.$$

4.6.4. La demostración de Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci muestra también su ingenio con una prueba del teorema de Pitágoras (figura 4.16). El esquema habitual de los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo dado ABC es completado con los triángulos MBG y ENF equivalentes al dado. La recta LH común a las diagonales de los cuadrados sobre los catetos determina dos cuadriláteros $LMGH$, $LACH$, iguales. Asimismo la recta NB determina dos cuadriláteros $BAEN$, $BCFN$, iguales, y a su vez iguales a los resultantes de la división anterior, de donde resulta el teorema al sustraer a cada uno de los pares de cuadriláteros dos triángulos

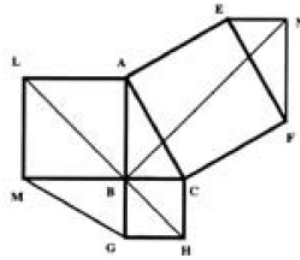


Figura 4.16. Demostración de Leonardo da Vinci.

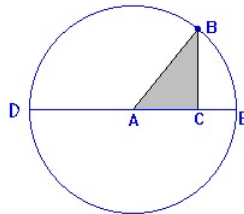


Figura 4.17. Demostración de Vieta.

rectángulos equivalentes al dado.

4.6.5. La demostración de Vieta

La demostración de Vieta (figura 4.17) es, sin duda, una de las más sencillas y originales.

Se tiene:

$$DC = DA + AC = AB + AC$$

$$CE = AE - AC = AB - AC$$

$$DC \times CE = (AB + AC)(AB - AC) = AB^2 - AC^2.$$

Aplicando potencia respecto de la circunferencia resulta:

$$DC \times CE = CB^2.$$

Por tanto,

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

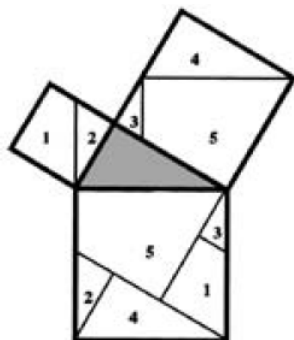


Figura 4.18. Demostración de Anaricio.

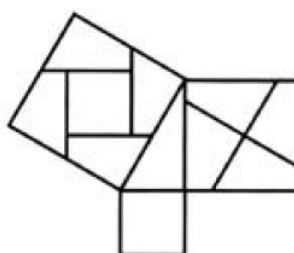


Figura 4.19. Demostración de Perigal.

4.6.6. La demostración de Anaricio

La prueba de Anaricio-Göpel (figura 4.18) es de tipo puzle. El cuadrado construido sobre la hipotenusa se descompone en cinco partes, que reordenadas convenientemente proporcionan los cuadrados construidos sobre los catetos. Constituye una de las más notables, si se toma como criterio de sencillez el número de partes en que se divide el cuadrado sobre la hipotenusa.

4.6.7. La demostración de Perigal

Henry Perigal (1801-1898) era un corredor de bolsa londinense y astrónomo aficionado que ideó hacia 1830 una sencilla prueba del teorema de Pitágoras, muy singular y elegante por su simetría, la cual publicó en la revista *The Messengers of Mathematics*¹. El cuadrado sobre el mayor de los catetos del triángulo rectángulo se divide en cuatro partes iguales, mediante dos segmentos perpendiculares que se cortan en el centro del cuadrado, siendo, además, uno de ellos paralelo a la hipotenusa. Desplazando paralelamente estas cuatro piezas, junto con el cuadrado sobre el cateto menor, es posible componer, uniendo las cinco piezas, el cuadrado sobre la hipotenusa.

¹ Perigal H. (1874): On Geometric Dissections and Transformations, *The Messengers of Mathematics* 103–106. [Disponible en <http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/perigal/perigal.html>].

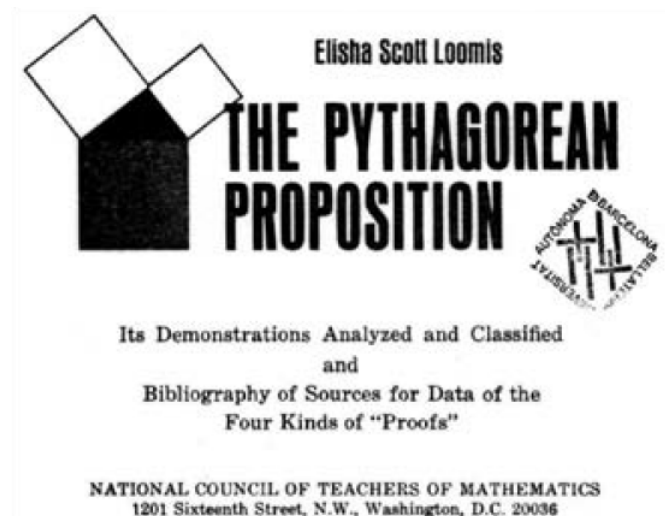


Figura 4.20. El mayor repertorio de demostraciones del teorema de Pitágoras.

4.6.8. El mayor repertorio de demostraciones del teorema pitagórico

E.S. Loomis, profesor de matemáticas de la universidad de Baldwin (Estados Unidos), realizó durante muchos años una recopilación exhaustiva de las múltiples pruebas del teorema de Pitágoras que se han dado a lo largo de la historia. Su encomiable labor de investigación fructificó en la publicación, en 1927, de una obra de gran valor didáctico, *The Pythagorean Proposition*, auténtica compilación donde se codifican hasta 370 demostraciones. Sin duda alguna, es todavía la colección más importante de pruebas y demostraciones del teorema de Pitágoras.

En el prefacio de su obra, Loomis intenta diferenciar entre lo que es una auténtica demostración de una mera ilustración del teorema de Pitágoras, y realiza una clasificación de las pruebas en cuatro tipos:

- a) Pruebas algebraicas: basadas en relaciones entre lados y segmentos (109).
- b) Pruebas geométricas: basadas en comparaciones de áreas (255).
- c) Pruebas dinámicas: basadas en los conceptos de masa, velocidad, fuerza, etc. (4).
- d) Pruebas cuaterniónicas: basadas en operaciones vectoriales (2).

4.7. Actividades

En estas actividades trabajaremos con el teorema de Pitágoras. Se ilustrarán diferentes demostraciones de este teorema y se plantearán problemas de la vida real cuya resolución requiera de su aplicación.

Actividad 1

Crear con cartulina o goma eva un puzle para demostrar el teorema de Pitágoras, tomando como referencia las figuras 4.21 a 4.24 y el vídeo disponible en YouTube *La demostración del teorema de Pitágoras por Anaricio* [<https://youtu.be/IasqyWdIJG4>²] (figura 4.25).

Las figuras 4.21 a 4.24 muestran la demostración de Pitágoras por Anaricio, de carácter dinámico y manipulativo.

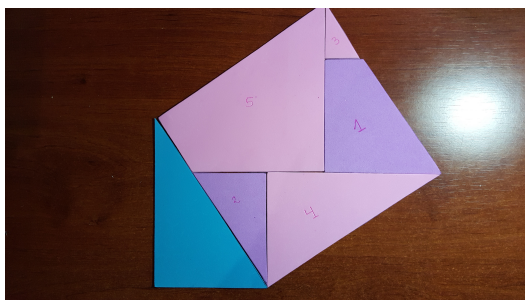


Figura 4.21. Demostración de Anaricio, 1. El triángulo utilizado es rectángulo. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es la longitud de la hipotenusa al cuadrado.

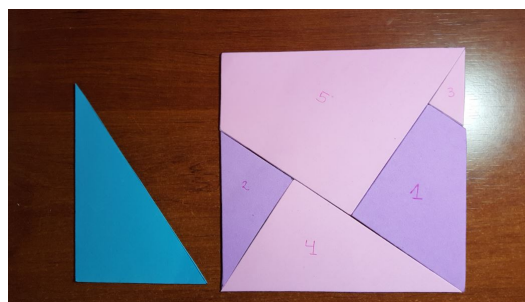


Figura 4.22. Demostración de Anaricio, 2. El cuadrado construido sobre la hipotenusa se descompone en cinco partes.

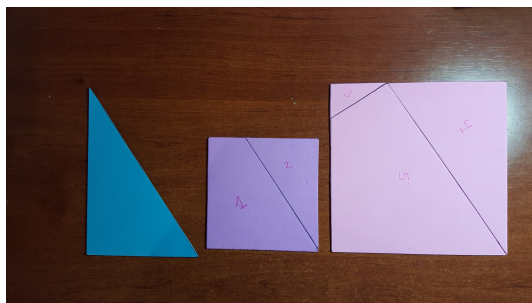


Figura 4.23. Demostración de Anaricio, 3. Separando los cinco trozos y reordenándolos formamos dos cuadrados.

² Autora: Patricia A. Suárez Hernández.

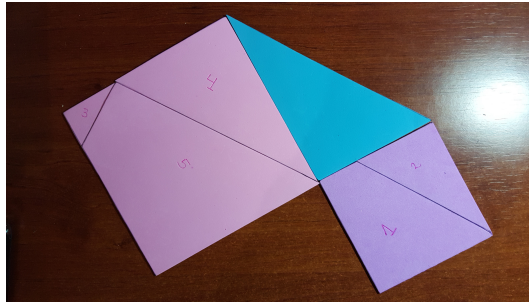


Figura 4.24. Demostración de Anaricio, 4. El área de cada cuadrado es igual al cuadrado de la longitud del cateto sobre el que se apoya. Se concluye que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



Figura 4.25. Código QR del video en YouTube *La demostración del teorema de Pitágoras por Anaricio*. En el video se explica brevemente el teorema y su contexto histórico, para finalizar con la demostración de Anaricio.

Actividad 2

Crear con cartulina o goma eva un puzle para demostrar el teorema de Pitágoras tomando como referencia la viñeta de la figura 4.1, y redactar un texto explicativo. Investigar en internet sobre las fuentes de esa demostración.

Actividad 3

Construir dos ternas pitagóricas de cada tipo, y a continuación completar la tabla.

RECORDATORIO

- *Terna pitagórica de Mesopotamia:* $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$, $c = u^2 + v^2$.
- *Terna pitagórica de Pitágoras:* $a = m$ (m impar), $b = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $c = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$.
- *Terna pitagórica de Platón:* $a = 2m$, $b = m^2 - 1$, $c = m^2 + 1$.

Tipo de terna	a	b	c	$a^2 + b^2 = c^2$
Mesopotamia $u =$, $v =$				
Mesopotamia $u =$, $v =$				
Pitágoras $n =$				
Pitágoras $n =$				
Platón $n =$				
Platón $n =$				
	27	36	45	
	200	9999	10001	
	19	180	181	
	31	480	481	
	84	1763	1765	

Tabla 4.6. Ternas pitagóricas.

Actividad 4

Utilizar el teorema de Pitágoras para resolver los siguientes problemas con ayuda de la calculadora.

- a) Por la acción del viento, un globo se ha alejado 25 m de P , su punto de amarre, y se halla a una altura de 80 m respecto del suelo. Calcular la longitud de la soga con la que está amarrado.



Figura 4.26. Actividad 4a).

- b) Una escalera de 2,4 m está apoyada sobre una pared tal como muestra la figura 4.27.

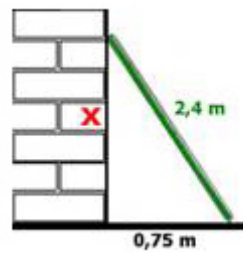


Figura 4.27. Actividad 4b).

- b.1) ¿A qué altura de la pared se apoya la escalera?
- b.2) ¿Y si la distancia que separa a la escalera de la pared desde el piso fuese de 1,14 m?

Actividad 5

GeoGebra es un software libre de geometría dinámica. Utilizar la hoja de trabajo disponible en GeoGebraTube *El teorema de Pitágoras con GeoGebra* [<http://ggbtu.be/m2037903>³] (figura 4.29) para visualizar el teorema de Pitágoras y completar los valores que faltan en las siguientes tablas.

cateto1 $\equiv \overline{AB}$	cateto2 $\equiv \overline{AC}$	Hipotenusa $\equiv \overline{CB}$
3,8	2,6	
		6,1
5		

Área($AFGB$) $\equiv \overline{AB}^2$	Área($DCAE$) $\equiv \overline{AC}^2$	Área($JKBC$) $\equiv \overline{CB}^2$
16		
	9	25
		34

Tabla 4.7. El teorema de Pitágoras con GeoGebra.

³ Autora: Patricia A. Suárez Hernández.

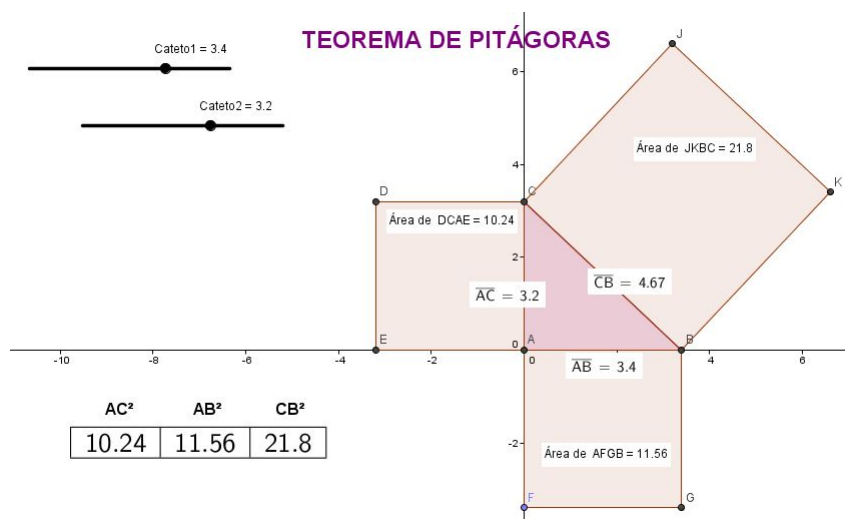


Figura 4.28. Captura de pantalla de la actividad en GeoGebraTube *El teorema de Pitágoras con GeoGebra*.



Figura 4.29. Código QR de la actividad en GeoGebraTube *El teorema de Pitágoras con GeoGebra*.

Referencias

- [1] González Urbaneja P.M. (2001): *Pitágoras, el filósofo del número*, Nivola, Madrid.
- [2] *Ternas pitagóricas*, Estalmat, Madrid.
- [3] Educ.ar: *Teorema de Pitágoras*, <http://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=15218>.

Historia: Las medallas Fields



Figura 5.1. «La medalla Fields». *Matematicalia*, vol. 2, núm. 3 (junio 2006).

5.1. Introducción

La medalla Fields es una distinción que concede la Unión Matemática Internacional (conocida por sus siglas en inglés, IMU) en los Congresos Internacionales de Matemáticos (ICM) que se celebran cada cuatro años, ante la carencia de un Premio Nobel en matemáticas.

En este capítulo se relata el devenir de la Medalla Fields y se relacionan los matemáticos galardonados con ella, prestando especial atención a la primera mujer que la obtuvo y a su investigación en el campo de las geometrías no euclídeas.

5.2. Algo de historia

Los ICM's nacieron con el objetivo primordial de fomentar la cooperación internacional en matemáticas. Como sede para el primero de ellos se escogió la ciudad suiza de Zúrich, en 1887. Su elección fue motivada por el deseo de internacionalidad, pues tradicionalmente Suiza es un país que se encarga de intermediar entre las relaciones de los países internacionales y se caracteriza por su afán de cooperación.

Los primeros congresos tuvieron lugar sucesivamente cada cuatro años, en Francia (1900), Alemania (1904), Italia (1908) e Inglaterra (1912), pero con la Primera Guerra Mundial cesan los congresos y los lazos de colaboración. A su término se expulsa a las potencias vencidas de los organismos internacionales y en particular se prohíbe la participación en los ICM's a los matemáticos de estos países.

A raíz de estos acontecimientos se crea la Unión Matemática Internacional (IMU), y se decide que sea este organismo quien gestione a partir de entonces los Congresos Internacionales de Matemáticos, que habrían de celebrarse, como ya se acostumbraba, cada cuatro años.

El matemático canadiense John Charles Fields fue el presidente del comité organizador del siguiente Congreso, el de Toronto de 1924. El delicado esfuerzo organizativo y diplomático de Fields no logró que se levantara el veto a los matemáticos de las potencias centrales, pero sí permitió poco a poco la normalización. En cualquier caso, Fields propuso, para incentivar la cooperación internacional en matemáticas, unos premios «de un carácter tan internacional e impersonal como fuera posible» que pudiesen ayudar. Cuando, por fin, se le permitió la participación (puesto que era un matemático alemán), Hilbert afirmó en el Congreso de Bolonia de 1928 que «todos los límites, particularmente los nacionales, son contrarios a la naturaleza de las matemáticas [...] para las matemáticas, todo el mundo cultural es un único país».

Al proponer la creación de los premios, Fields insistía en que éstos no tuvieran ninguna adscripción nacional ni personal y escribió una carta sugiriendo las condiciones para su concesión. En ella propuso un establecimiento de un fondo para el otorgamiento de dos medallas de oro que se entregarían en los

Congresos Internacionales de Matemáticas y que reconocieran los logros sobresalientes en esta ciencia, justificando que fueran dos en la multiplicidad de las ramas de las matemáticas y en el intervalo de cuatro años entre congresos. Afirmó que estos premios estarían abiertos a todo el mundo y serían concedidos por un Comité Internacional. También señalaba que las medallas serían acuñadas en la Casa de la Moneda de Ottawa y que, dado su carácter internacional, la lengua a emplear en las inscripciones debería ser el latín o el griego.

La Unión Matemática Internacional aprobó la propuesta de Fields de crear las medallas y aceptó su donación en el Congreso de Zúrich de 1932. En él se estableció una Fundación que debía encargarse de administrar los fondos que las financiarían y se determinó cómo proceder si hubiese escasez o exceso de fondos, o en caso de que no se continuasen celebrando los congresos.

De acuerdo con los deseos de Fields, las medallas son acuñadas actualmente por la Real Casa de la Moneda de Ottawa. Están fabricadas en oro de 14 kilates (58,33% de oro y 41,67% de plata), tienen un peso de 176,25 gramos y miden 63,5 mm de diámetro, con un grosor de 4,83 mm. El diseño fue encargado al escultor canadiense Robert Tait McKenzie, quien respetó los deseos de Fields. En el anverso la medalla contiene una efigie de Arquímedes, y rodeándola la inscripción latina

TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI,

que significa

Superar los límites de su propio pensamiento y conquistar el mundo.

En el fondo, a la derecha, aparece la palabra griega

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΟΣ,

Arquímedes,

y a la izquierda las iniciales del artista y la fecha en números romanos.

El reverso tiene una tablilla con la inscripción latina

CONGREGATI EX TOTO ORBI MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE,

que significa

*Los matemáticos, congregados desde todo el mundo,
le rindieron este homenaje por sus escritos insignes.*



Figura 5.2. La Medalla Fields.

En el fondo, tras una rama de olivo, luce la famosa construcción de Arquímedes de la esfera inscrita en un cilindro. Y por último, en el canto de la medalla se inscribe el nombre del galardonado.

Aunque la tradición ha establecido que nadie de más de cuarenta años reciba la medalla, Fields no estipuló ningún límite de edad, pero sí se preocupó de recomendar que se otorgara no sólo como reconocimiento de trabajo matemático ya hecho, sino también para animar y estimular posteriores logros de los premiados. Desde el ICM de Moscú, en 1966, se pueden conceder hasta cuatro medallas.

Tras la Segunda Guerra Mundial la IMU se rehace con un espíritu internacional y alejándose al máximo de intereses nacionales. Sus dos primeras acciones son las de iniciar la organización del siguiente congreso, el de Cambridge, en Massachusetts, y la de nombrar el comité que habría de elegir los galardonados con la Medalla Fields y que presidió el matemático danés Harald Bohr. Hoy en día, cada cuatro años, desde 1962, el Comité Ejecutivo de la IMU nombra un comité internacional que ha de seleccionar a los galardonados con la medalla Fields en el próximo congreso. En Norteamérica se han celebrado 4 ICM's, en Asia 5, y el resto, 18, en Europa. Hasta el momento no ha habido ningún español galardonado con la medalla Fields, pero sí se celebró en España, en el año 2006, uno de los 27 Congresos Internacionales de Matemáticos.

5.3. Los galardonados

Hasta el momento, han resultado galardonados con la medalla Fields 52 matemáticos (tabla 5.1).

Los trabajos matemáticos por los que fueron galardonados son:

1. Lars Ahlfors (1936): Premiado por su investigación en superficies de recubrimiento relacionadas con superficies de Riemann de inversas de funciones enteras y meromorfas.
2. Jesse Douglas (1936): Premiado por su importante trabajo en el problema de Plateau.
3. Laurent Schwartz (1950): Premiado por desarrollar la teoría de distribuciones, una nueva noción de función generalizada motivada por la delta de Dirac.

año	Medallistas	Medallistas
1936	Lars Ahlfors (Finlandia)	Jesse Douglas (Estados Unidos)
1950	Laurent Schwartz (Francia)	Atle Selberg (Noruega)
1954	Kunihiko Kodaira (Japón)	Jean-Pierre Serre (Francia)
1958	Klaus Friedrich Roth (Reino Unido)	René Thom (Francia)
1962	Lars V. Hörmander (Suecia)	John Willard Milnor (Estados Unidos)
1966	Michael Francis Atiyah (Reino Unido) Alexander Grothendieck (Francia)	Paul Joseph Cohen (Estados Unidos) Stephen Smale (Estados Unidos)
1970	Alan Baker (Reino Unido) Sergéi Nóvikov (Unión Soviética)	Heisuke Hironaka (Japón) John Griggs Thompson (Estados Unidos)
1974	Enrico Bombieri (Italia)	David Bryant Mumford (Reino Unido)
1978	Pierre René Deligne (Bélgica) Grigori Margulis (Unión Soviética)	Charles Louis Fefferman (Estados Unidos) Daniel G. Quillen (Estados Unidos)
1982	Alain Connes (Francia) Shing-Tung Yau (China China)	William P. Thurston (Estados Unidos)
1986	Simon Donaldson (Reino Unido) Michael Freedman (Estados Unidos)	Gerd Faltings (Alemania)
1990	Vladímir Drínfeld (Unión Soviética) Shigefumi Mori (Japón)	Vaughan Jones (Nueva Zelanda) Edward Witten (Estados Unidos)
1994	Pierre-Louis Lions (Francia) Jean Bourgain (Bélgica)	Jean-Christophe Yoccoz (Francia) Yefim Zelmánov (Rusia)
1998	Richard Ewen Borcherds (Sudáfrica) Maxim Kontsevich (Rusia)	W. Timothy Gowers (Inglaterra) Curtis T. McMullen (Estados Unidos)
2002	Vladimir Voevodsky (Rusia)	Laurent Lafforgue (Francia)
2006	Andréi Okounkov (Rusia) Terence Tao (Australia)	Grigori Perelmán (Rusia) Wendelin Werner (Francia)
2010	Elon Lindenstrauss (Israel) Stanislav Smirnov (Rusia)	Ngô Bào Châu (Vietnam y Francia) Cédric Villani (Francia)
2014	Artur Ávila (Brasil y Francia) Martin Hairer (Austria)	Manjul Bhargava (Canadá y Estados Unidos) Maryam Mirzakhani (Irán)

Tabla 5.1. Científicos galardonados con la Medalla Fields.

4. Atle Selberg (1950): Premiado por desarrollar la generalización de los métodos sieve de Viggo Brun.
5. Kunihiko Kodaira (1954): Premiado por sus importantes resultados en la teoría de integrales armónicas y numerosas aplicaciones a variedades algebraicas.
6. Jean-Pierre Serre (1954): Premiado por sus importantes resultados en grupos de homotopía de esferas. Reformuló algunos de los principales resultados de la teoría de variable compleja.
7. Klaus Friedrich Roth (1958): Premiado por resolver el famoso problema de Thue-Siegel y una conjetura de Erdős-Turán.
8. René Thom (1958): Premiado por sus desarrollos y estudios en topología algebraica.
9. Lars V. Hörmander (1962): Premiado por sus trabajos en ecuaciones en derivadas parciales y por contribuir a la teoría general de operadores diferenciales lineales.
10. John Willard Milnor (1962): Premiado por comprobar que la esfera 7-dimensional puede tomar varias estructuras diferenciales.
11. Michael Francis Atiyah (1966): Premiado por sus trabajos conjuntos con Hirzebruch, Singer y Bott sobre operadores diferenciales lineales.
12. Paul Joseph Cohen (1966): Premiado por probar la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo generalizada en teoría de conjuntos.
13. Alexander Grothendieck (1966): Premiado por sus trabajos en geometría algebraica.
14. Stephen Smale (1966): Premiado por sus trabajos en topología diferencial.
15. Alan Baker (1970): Premiado por generalizar el teorema de Gelfond-Schneider y aplicar su trabajo a la resolución de ecuaciones diofánticas.
16. Heisuke Hironaka (1970): Premiado por generalizar el trabajo de Zariski, que había probado, para dimensión menor o igual que 3, el teorema concerniente a la resolución de singularidades en variedades algebraicas.
17. Sergéi Nóvikov (1970): Premiado por sus importantes avances en topología algebraica y la teoría de solitones.
18. John Griggs Thompson (1970): Premiado por sus trabajos en teoría de grupos finitos.
19. Enrico Bombieri (1974): Premiado por sus trabajos en teoría de funciones de varias variables complejas y ecuaciones en derivadas parciales.
20. David Bryant Mumford (1974): Premiado por su trabajo en teoría de superficies algebraicas.

21. Pierre René Deligne (1978): Premiado por unificar la geometría algebraica y la teoría algebraica de números.
22. Charles Louis Fefferman (1978): Premiado por sus innovaciones en el estudio del análisis complejo multidimensional y por generalizaciones de resultados clásicos de menor dimensión.
23. Grigori Margulis (1978): Premiado por sus trabajos en combinatoria, geometría diferencial, teoría ergódica, sistemas dinámicos y grupos de Lie.
24. Daniel G. Quillen (1978): Premiado por crear la K -teoría algebraica y nuevas y exitosas herramientas en geometría y métodos topológicos.
25. Alain Connes (1982): Premiado por su contribución a la teoría de operadores algebraicos y geometría diferencial en general.
26. William P. Thurston (1982): Premiado por revolucionar el estudio de la topología en 2 y 3 dimensiones, mostrando la interacción entre el análisis, la topología y la geometría.
27. Shing-Tung Yau (1982): Premiado por sus contribuciones en ecuaciones diferenciales, geometría algebraica, teoría de la relatividad y ecuaciones reales y complejas de Monge-Ampère.
28. Simon Donaldson (1986): Premiado por sus trabajos en topología.
29. Gerd Faltings (1986): Premiado por probar la conjetura de Mordell.
30. Michael Freedman (1986): Premiado por desarrollar métodos topológicos; uno de sus resultados fue la demostración de la conjetura 4-dimensional de Poincaré.
31. Vladímir Drínfeld (1990): Premiado por sus trabajos en teoría de grupos y teoría de números.
32. Vaughan Jones (1990): Premiado por sus trabajos sobre el álgebra de Von Neumann y la teoría de nudos.
33. Shigefumi Mori (1990): Premiado por la demostración de la conjetura de Hartshorne y su trabajo en la clasificación de variedades algebraicas tridimensionales.
34. Edward Witten (1990): Premiado por sus estudios en física teórica.
35. Pierre-Louis Lions (1994): Premiado por sus trabajos en ecuaciones en derivadas parciales, especialmente en ecuaciones de Hamilton-Jacobi.
36. Jean-Christophe Yoccoz (1994): Premiado por sus trabajos en sistemas dinámicos.
37. Jean Bourgain (1994): Premiado por sus trabajos en ecuaciones en derivadas parciales con aplicaciones a la física.

38. Yefim Zelmánov (1994): Premiado por el estudio y solución del problema restringido de Burnside.
39. Richard Ewen Borcherds (1998): Premiado por sus trabajos en álgebra y geometría, y en particular por sus introducciones en álgebra de vértices y álgebras de Kac-Moody.
40. W. Timothy Gowers (1998): Premiado por sus trabajos en análisis funcional, basados en gran medida en la utilización de métodos combinatorios.
41. Maxim Kontsevich (1998): Premiado por sus trabajos en física matemática, geometría y topología algebraica.
42. Curtis T. McMullen (1998): Premiado por sus trabajos en dinámica compleja (teoría del caos) y geometría hiperbólica.
43. Vladimir Voevodsky (2002): Premiado por su trabajo en teoría de números y geometría algebraica.
44. Laurent Lafforgue (2002): Premiado por sus trabajos en la conjetura y programa de Langlands.
45. Andréi Okounkov (2006): Premiado por sus contribuciones a la unión entre la probabilidad, la teoría de la representación y la geometría algebraica.
46. Grigori Perelmán (2006): Premiado por sus contribuciones históricas a la geometría riemanniana y a la topología geométrica y, en particular, por la demostración de la conjetura de geometrización de Thurston.
47. Terence Tao (2006): Premiado por sus contribuciones al análisis, incluyendo su trabajo sobre la conjetura de Kakeya y sobre los mapas de ondas.
48. Wendelin Werner (2006): Premiado por sus contribuciones en el área de los paseos aleatorios, la evolución estocástica de Schramm-Loewner y otras teorías relacionadas en probabilidades y física matemática.
49. Elon Lindenstrauss (2010): Premiado por sus contribuciones en la teoría ergódica y sus aplicaciones a la teoría de números; fue el primero en probar la conjetura de Peter Sarnak.
50. Ngô Bào Châu (2010): Premiado por haber demostrado el lema fundamental de la teoría de formas automorfas, propuesto por Langlands y Shelstad, mediante nuevos métodos algebraico-geométricos.
51. Stanislav Smirnov (2010): Premiado por su trabajo sobre los fundamentos matemáticos de la física estadística, concretamente por los modelos de red finita.
52. Cédric Villani (2010): Premiado por sus contribuciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales relacionadas con la física estadística, específicamente con la ecuación de Boltzmann.
53. Artur Ávila (2014): Premiado por su trabajo sobre la teoría de sistemas dinámicos.

año	Congreso-País
1936	X Congreso-Noruega
1950	XI Congreso-Estados Unidos
1954	XII Congreso-Países Bajos
1958	XIII Congreso-Reino Unido
1962	XIV Congreso-Suecia
1966	XV Congreso-Unión Soviética
1970	XVI Congreso-Francia
1974	XVII Congreso-Canadá
1978	XVIII Congreso-Finlandia
1982	XIX Congreso-Polonia
1986	XX Congreso-Estados Unidos
1990	XXI Congreso-Japón
1994	XXII Congreso-Suiza
1998	XXIII Congreso-Alemania
2002	XXIV Congreso-China
2006	XXV Congreso-España
2010	XXVI Congreso-India
2014	XXVII Congreso-Corea del Sur
2018	XXVIII Congreso-Brasil

Tabla 5.2. Años y países donde se han celebrado los ICM's.

54. Manjul Bhargava (2014): Premiado por sus contribuciones a la teoría de números y por demostrar la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer para una proporción positiva de curvas elípticas.
55. Martin Hairer (2014): Premiado por sus contribuciones en el campo de análisis estocástico, en particular a las ecuaciones en derivadas parciales.
56. Maryam Mirzakhani (2014): Premiada por sus destacadas contribuciones a la dinámica y geometría de las superficies de Riemann y sus espacios modulares.

Del último Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Corea del Sur en 2014, cabe destacar que la iraní Maryam Mirzakhani, una de los cuatro premiados con la medalla Fields, es la primera mujer que recibe dicha distinción desde su instauración en 1936. Fue galardonada en reconocimiento a sus avances sobresalientes en la dinámica y geometría de las superficies de Riemann y sus espacios modulares. Tres características singulares de este premio son la juventud de la premiada, con tan sólo 37 años; su lugar de procedencia, Irán; y, sobre todo, lo novedoso del trabajo realizado.

La viñeta de la figura 5.1 fue publicada en 2006 cuando, con ocasión del primer y único ICM organizado hasta el momento en España, se especulaba con la posibilidad de que, también por vez primera, la medalla Fields fuese concedida a una mujer.



Figura 5.3. Maryam Mirzakhani recibe la medalla Fields de manos de la presidenta surcoreana, Park Geun-Hye, el 13 de agosto de 2014.

5.4. Maryam Mirzakhani

Maryam Mirzakhani nació en 1977 en Teherán, Irán, en medio de un país preparado para la guerra con Irak. Creció en el seno de una familia con tres hermanos, cuyos padres le dieron todo el apoyo necesario para desarrollar su talento. Acudió en su ciudad a la escuela de secundaria Farzanegan, perteneciente a la National Organization for Development of Exceptional Talents. De aquel entonces, es conocida su voracidad lectora; ella misma afirma que leía todo lo que caía en sus manos y que soñaba con ser escritora. Quizás, cuando empezó a interesarse por los números, su capacidad para imaginar los mundos que descubría a través de la lectura hizo surgir esa enorme creatividad y audacia que la han llevado a la cumbre de las matemáticas.

Mirzakhani narra que su primer recuerdo matemático es el problema de la adición de los números de 1 al 100 y la forma en que Gauss lo resolvió. A partir de ahí comenzó a sentir fascinación por la resolución de problemas matemáticos cada vez más complejos, lo que le llevó a participar en las Olimpiadas Matemáticas, ganando la medalla de oro en la Olimpiada Matemática Internacional de Hong Kong en 1994 y en el mismo certamen el año siguiente en Canadá, esta vez con la máxima puntuación.

Se licenció en Matemáticas en 1999 en la Universidad de Sharif de Teherán y se doctoró en 2004 en la Universidad de Harvard bajo la supervisión del Dr. Curtis McMullen, una de las referencias mundiales en geometría hiperbólica, premiado también con la Medalla Fields en 1998; de él aprendió y avanzó en sus estudios de análisis complejo. Entre 2004 y 2008 fue becaria de investigación del Clay Mathematics Institute. Unos años más tarde resultó galardonada con el Clay Research Award 2014, por sus muchas e importantes contribuciones a la geometría y a la teoría ergódica. En la actualidad vive en California con su marido y su hija de 5 años y ejerce como profesora de matemáticas en la Universidad de Stanford.



Figura 5.4. Maryam Mirzakhani.

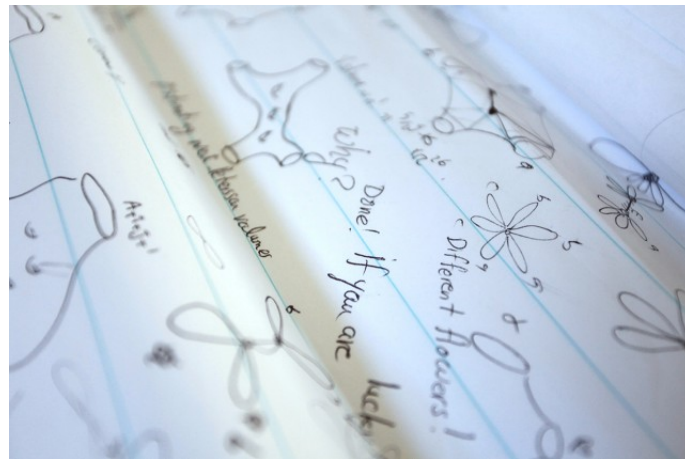


Figura 5.5. Manuscritos de Maryam Mirzakhani.

Su obra ha estado muy influenciada por su director de tesis doctoral. En ella presentó una fórmula para estimar cómo crece el número de geodésicas simples en una superficie hiperbólica en función de su longitud. Desde entonces trabaja en superficies hiperbólicas, espacios de moduli y sistemas dinámicos. Mirzakhani ha encontrado que los sistemas dinámicos que evolucionan de manera que se retuercen y estiran su forma tienen trayectorias estrictamente limitadas a seguir leyes algebraicas que ella está descifrando. De este modo, pese a su relativa juventud y teniendo en su haber no más de 20 publicaciones ya ha logrado situarse a la cabeza mundial de los matemáticos más creativos y prestigiosos.

Con la concesión de esta medalla Fields no sólo se ha roto la barrera del género sino también la geográfica, al ser Mirzakhani la primera persona de su país que gana un premio tan importante por su labor investigadora. Tampoco supone estrictamente un reconocimiento a la innovación en matemáticas; con él se rompen fronteras y se acercan culturas: sienta precedentes para inspirar a las autoridades del mundo islámico a fomentar las mentes científicas sólo con su trabajo y su notoriedad, mostrando cómo la libertad de las mujeres es necesaria y enriquecedora para un país.

5.5. La obra de Mirzakhani

Recordemos que Mirzakhani fue galardonada con la medalla Fields en reconocimiento a sus avances sobresalientes en la dinámica y geometría de las superficies de Riemann y sus espacios modulares. Ella misma ha dado un ejemplo que le ha servido para explicar de forma sencilla y precisa estos avances¹. Su trabajo estudia, entre otras cosas, las mesas de billar; pero no considerando una única mesa, sino el universo de todas las posibles mesas de billar. Y el tipo de dinámica que estudia no se refiere al movimiento de las bolas en la mesa, sino a una transformación de la propia mesa, que cambia de forma según unas reglas determinadas.

Para ser un poco más precisos, pensemos en una mesa de billar. Si le damos un golpe a una bola, dependiendo del ángulo en que le demos, y suponiendo que pueda recorrer la mesa infinitamente (como si no hubiera fricción), ¿qué tipo de patrones hará? ¿Recorrerá toda la superficie? Si consideramos la mesa como un espacio, estamos ante un espacio euclídeo, es decir, «plano», donde los ángulos internos de los triángulos siempre suman 180° y todo funciona tal y como estamos acostumbrados.

Pero la cosa va más allá. Ahora cogemos la mesa y la deformamos, le damos mil vueltas, le hacemos agujeros... Hemos perdido el espacio euclídeo y estamos ante una superficie de Riemann. ¿Qué tipo de ángulos surgen en estas nuevas estructuras? ¿Cómo se mueven las cosas en ellas? Mirzakhani ha sido premiada por sus logros en las respuestas a estas preguntas.

Las geometrías no euclídeas nacieron como un problema puramente matemático, resuelto en el siglo XIX, cuya resolución condujo a otras teorías matemáticas que fueron imprescindibles para la cosmología moderna, la de la teoría de la relatividad. Son un claro ejemplo de cómo las matemáticas plantean sus propios problemas, avanzan en sus soluciones y, al cabo de los años, resulta que esas nociones matemáticas son las que sirven para describir fenómenos del Universo.

Para entender un poco más debemos remontarnos a *Los Elementos* de Euclides, un tratado matemático y geométrico del siglo III a.C. considerado como uno de los textos más divulgados en la historia. Consta de tres ingredientes principales:

- Los *objetos geométricos*: puntos, rectas, planos, circunferencias, ángulos, etc.
- Los *postulados*, relaciones dadas entre esos elementos.
- Los *teoremas*, relaciones que se demuestran a partir de los postulados.

Para el caso de la geometría del plano, es decir, la conocida actualmente como geometría euclídea, Euclides enunció cinco postulados.

Postulado 1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.

¹ Maryam Mirzakhani wins 2014 Fields medal - first woman to do so, https://www.youtube.com/watch?v=4GhbMhQLI_g&feature=youtu.be.

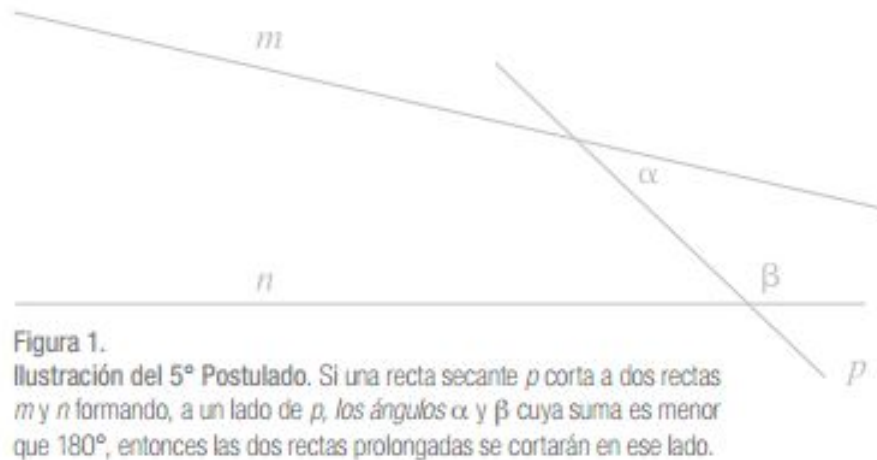


Figura 5.6. Postulado 5.

Postulado 2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

Postulado 3. Es posible trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualesquiera.

Postulado 4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Postulado 5 (o de las paralelas). Si una línea recta corta a otras dos de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, entonces las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán por el mismo lado en que se forman los ángulos menores a los dos rectos.

Este último postulado tiene un equivalente, que es el más usado en los libros de geometría:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Ya desde los tiempos de Euclides se suscitó la cuestión de si el quinto postulado era realmente un postulado o si era un teorema, es decir, si era independiente de los otros postulados o si se podría deducir de ellos (al final, Euclides tenía razón al afirmar que el quinto postulado no era un teorema sino un postulado).

La línea más sólida para intentar demostrar que era un teorema fue la reducción al absurdo: suponer que no se verifica y alcanzar una contradicción. El quinto postulado establece una condición doble (existencia y unicidad), por lo que su negación consiste en alguno de los dos enunciados siguientes:

- Por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela.



Figura 5.7. Ejemplo de superficie de Riemann con algunas geodésicas.

Estos enunciados conducen a dos tipos de geometrías no euclídeas:

- Geometría elíptica: asume los primeros cuatro postulados más la no existencia de ninguna paralela.
- Geometría hiperbólica: asume los primeros cuatro postulados más la existencia de al menos dos paralelas.

Para estudiar las geometrías no euclídeas se recurre a las superficies, cambiando la noción de «recta» por la de «geodésica». Básicamente, una *geodésica* es la línea más corta que une dos puntos de una superficie. Con la ayuda de las geodésicas se comprueba que:

- En la geometría elíptica, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es mayor que 180° .
- En la geometría euclídea, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo da siempre 180° .
- En la geometría hiperbólica, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es inferior a 180° .

Puede que las geodésicas sean infinitas o que formen circuitos cerrados. Además, el número de geodésicas en una superficie hiperbólica (de Riemann) aumenta exponencialmente conforme la longitud de las geodésicas aumenta. En sus estudios sobre los espacios modulares, Mirzakhani ha dado respuesta a cómo ocurre esto.

Todas estas ideas de pensar en superficies, en vez de en planos, tomando como rectas las geodési-

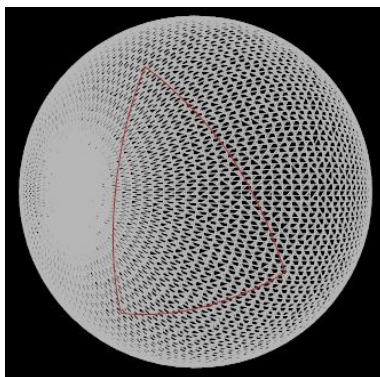


Figura 5.8. Esfera con un triángulo cuyos ángulos suman más de 180° .

cas, enlazan con el gran estudio de Gauss *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828). En él, Gauss consigue asociar a cada punto de la superficie un número, denominado actualmente *curvatura de Gauss*, que expresa cómo se curva la superficie en ese punto. Además, demuestra que esa cantidad permanece invariante por isometrías locales; Gauss llamó «teorema egregio» a este resultado fundamental, y así lo seguimos denominando hoy en día. Pues bien, el nexo entre lo estudiado por Gauss y las geometrías no euclídeas es el siguiente:

- La geometría elíptica tiene curvatura positiva.
- La geometría euclídea tiene curvatura nula.
- La geometría hiperbólica tiene curvatura negativa.

5.5.1. Geometría elíptica

La superficie esférica, reconocida y estudiada desde la antigüedad, forma parte del tipo de geometrías elípticas si se toman como rectas sus geodésicas: los círculos máximos. Por otra parte, la curvatura de una esfera es constante y positiva.

En la esfera, los ángulos internos de un triángulo suman más de dos rectos (figura 5.8), y no existen paralelas: todas sus rectas se cortan en dos puntos.

Hay muchas formas de proyectar una esfera, como la superficie de la Tierra, en un plano; estas proyecciones necesariamente distorsionan las distancias y el área o los ángulos. La geometría elíptica viene a ser una formalización axiomática de la geometría esférica en la que cada par de puntos antipodales es tratado como un único punto.

El estudio de la geometría esférica ha tenido un gran impulso a lo largo de la historia para dar satisfacción a las necesidades de los cartógrafos, pero no fue hasta el siglo XIX que Riemann introdujo una visión analítica intrínseca de dicha geometría, la cual se conoce como *esfera de Riemann* y se estudia en cursos universitarios de análisis complejo.

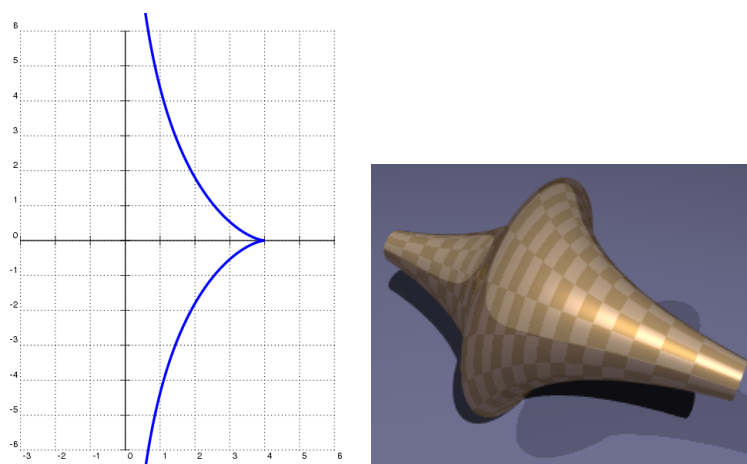


Figura 5.9. Tractriz (i) y tractoide (d).

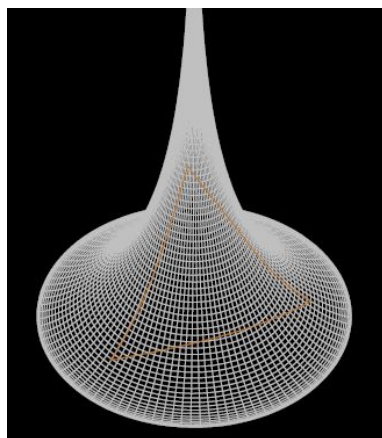


Figura 5.10. Pseudoesfera con un triángulo cuyos ángulos suman menos de 180° . Compárese con la figura 5.8.

5.5.2. Geometría hiperbólica

Las propiedades fundamentales de la geometría hiperbólica fueron obtenidas por Lobachevski, Gauss y los Bolyai, padre e hijo (1820-1830). La correspondiente trigonometría, no por casualidad, está regida por las funciones hiperbólicas.

Inicialmente estos descubrimientos no lograron interesar a otros matemáticos, no sólo por el enfrentamiento que suponían contra la muy arraigada tradición de la geometría euclídea, sino también porque fueron realizados por matemáticos jóvenes, con escaso reconocimiento y sin acceso a las revistas importantes. Gauss es el único que hubiera logrado posicionar a la nueva geometría en la comunidad matemática de la época, pero no quiso hacer frente a la controversia que se habría generado.

El tema volvió a surgir en la conferencia ofrecida por Riemann en 1854 para su habilitación como profesor de la Universidad de Gotinga. En ella definió espacios n -dimensionales (hoy llamados *varieda-*

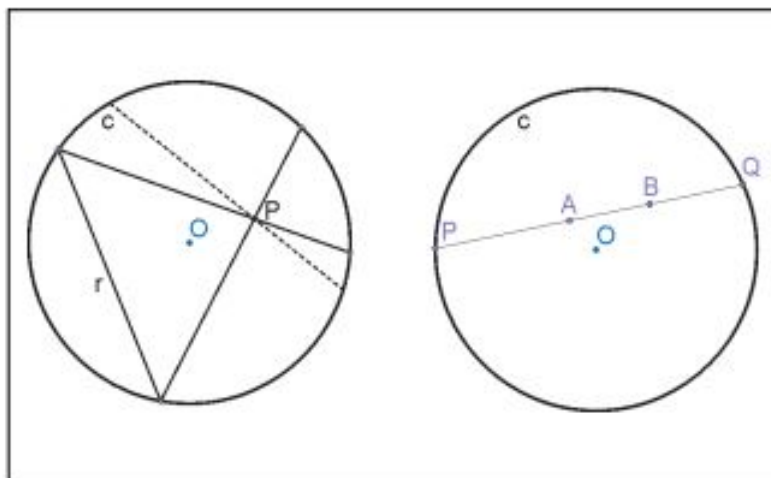


Figura 5.11. Modelo de Klein-Beltrami.

des riemannianas) en analogía a las superficies, que, para este estudio, tienen dos dimensiones. También definió la curvatura y las geodésicas de tales variedades, generalizando el trabajo de Gauss sobre geometría diferencial de superficies.

Pero no sería hasta 14 años más tarde, con la reedición en francés del trabajo de Lobachevsky y de ciertas cartas de Gauss, que se despertó finalmente el interés por la geometría hiperbólica. Beltrami leyó este material y logró ver su conexión con las superficies o variedades 2-dimensionales de Riemann.

Así, la primera superficie con geometría hiperbólica que se estudió fue la *pseudoesfera de Beltrami* (1869). En su interpretación general es cualquier superficie de curvatura constante negativa, por analogía con la esfera, que es una superficie de curvatura constante positiva. Un ejemplo es la *tractoide*, obtenida por rotación de la curva tratriz alrededor de su asíntota (figuras 5.9 y 5.10).

Rápidamente le siguieron otros modelos para la geometría hiperbólica, que hoy en día interpretamos como proyecciones (o transformaciones) de una superficie hiperbólica. El primero de ellos fue el *modelo hiperbólico de Klein-Beltrami* (1871). En dos dimensiones, este modelo usa el interior del círculo unidad como plano hiperbólico, y sus cuerdas son las rectas hiperbólicas. Los puntos de la circunferencia unidad son los del infinito. Por un punto exterior a una recta existen dos rectas que cortan a la dada en puntos del infinito, es decir, paralelas. Las comprendidas entre ambas paralelas son secantes a la dada, según la región en que estén de las definidas por las dos paralelas (figura 5.11, izquierda). Además, la distancia entre dos puntos A y B viene descrita por

$$d(A, B) = \frac{1}{2} \log([A, B, P, Q]),$$

donde el corchete denota la razón doble y P y Q son los puntos del infinito de la recta determinada por A y B (figura 5.11, derecha).

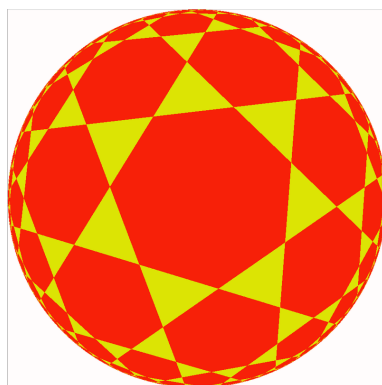


Figura 5.12. Disco de Klein-Beltrami con mosaico triheptagonal.

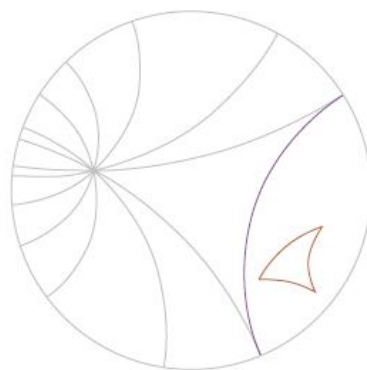


Figura 5.13. Construcciones de la geometría hiperbólica en el disco de Poincaré, 1. Una recta (en morado) tiene una familia de paralelas (en gris) por un punto exterior dado. Entre las paralelas hay dos que se acercan asintóticamente a la recta. Además, los ángulos internos de un triángulo (en rojo) suman menos de 180° .

Este modelo no es conforme, lo que significa que los ángulos y círculos están distorsionados.

El *modelo del disco de Poincaré*, o *modelo del disco conforme* (c. 1880), es otro modelo de la geometría hiperbólica n -dimensional en el que los puntos de la geometría están también en un disco o bola n -dimensional. Las líneas rectas son arcos de circunferencia contenidos en el disco y ortogonales a su frontera, o bien diámetros del disco.

Mencionaremos, por último, el *modelo de Poincaré del semiplano*, coetáneo con el anterior, en el que la superficie hiperbólica se aplica en dicho semiplano y las geodésicas hiperbólicas se transforman en semicírculos (o rayos verticales) que intersecan al eje de abscisas en ángulos rectos. Como el anterior, este modelo de Poincaré distorsiona las distancias pero preserva los ángulos, medidos en las tangentes.

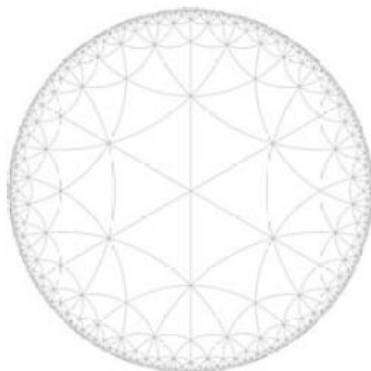


Figura 5.14. Construcciones de la geometría hiperbólica en el disco de Poincaré, 2. En esta geometría, dos triángulos son congruentes si sus ángulos son congruentes. Como los triángulos de esta figura tienen dos ángulos de 45° y uno de 60° , todos son congruentes y por lo tanto sus lados correspondientes y sus áreas son iguales.

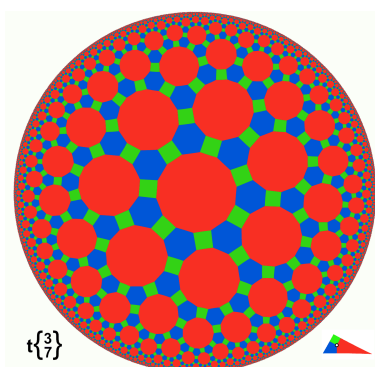


Figura 5.15. Disco de Poincaré con mosaico triheptagonal truncado.

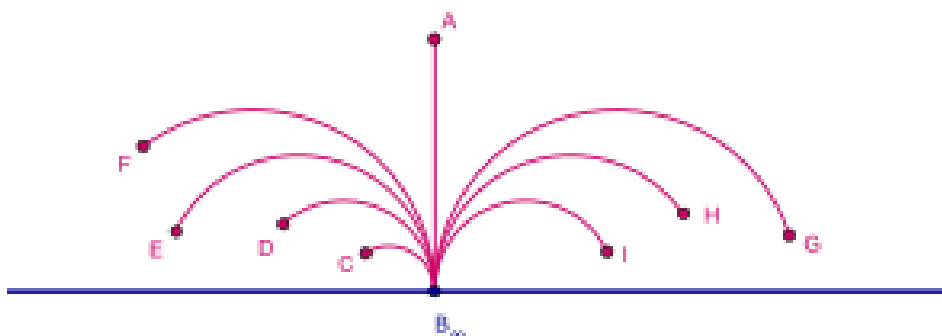


Figura 5.16. Rayos paralelos en el modelo de Poincaré del semiplano.

5.5.3. Repercusiones de las geometrías no euclídeas

Las matemáticas fueron expandiéndose en el campo de la física. Desde la aparición de la memoria de habilitación de Riemann en 1854 hasta la teoría especial de la relatividad, enunciada por Einstein en 1905, se fue desarrollando el cálculo en variedades de dimensión arbitraria con las contribuciones de matemáticos como Christoffel, Ricci y Levi-Civita; las fórmulas que vemos en la teoría de la relatividad están expresadas en los términos matemáticos que estos autores crearon. En 1915, en la teoría de la relatividad general, Einstein combinó todo lo anterior con la geometría del espacio-tiempo de Minkowski y propuso una variedad espacio-tiempo de cuatro dimensiones con una distancia espacio-temporal minkowskiana que varía como una métrica, de un punto a otro, según la intensidad del campo gravitacional. En esta variedad, tanto los rayos de luz como los diferentes cuerpos celestes describen trayectorias geodésicas. Por ello, la teoría de la relatividad es, en su fundamento, geometría, y la forma del Universo puede tener globalmente geometría de tipo elíptico, hiperbólico o euclídeo, dependiendo de la cantidad de masa y energía (de cualquier tipo) que contenga.

De otra parte, la existencia de diferentes geometrías y la aparición de la teoría de conjuntos de Cantor, con sus paradojas, llevaron a reflexionar sobre la consistencia de las propias matemáticas y sus fundamentos. Así, desde finales del siglo XIX hasta más allá de mediados del XX se desarrolló una ingente labor de fundamentación, de aplicación del rigor más estricto y de axiomatización de la geometría y la aritmética, con la aparición de nuevas ramas muy teóricas y rigurosas como la topología y el análisis funcional, por citar sólo dos ejemplos.

Aparejada con esta labor de depuración rigurosa dentro de las matemáticas, apareció una reflexión filosófica sobre el sentido de esta ciencia. Brotaron diferentes corrientes de pensamiento, los diferentes «-ismos», como en la pintura y el arte de la época. Por ser breves, podemos citar cuatro corrientes, con algunos de sus más señalados defensores:

Realismo matemático. Las entidades matemáticas existen con independencia de la mente humana y por tanto se descubren, no se inventan (Erdős, Gödel).

Formalismo. Las matemáticas son un juego formal, con sus reglas y su lenguaje, en el que la consistencia es esencial (Hilbert, Tarski).

Intuicionismo. Las matemáticas son obra de la mente humana y no existirían si no hubiera Humanidad (Brouwer).

Logicismo. Las matemáticas son parte de la lógica (Frege).

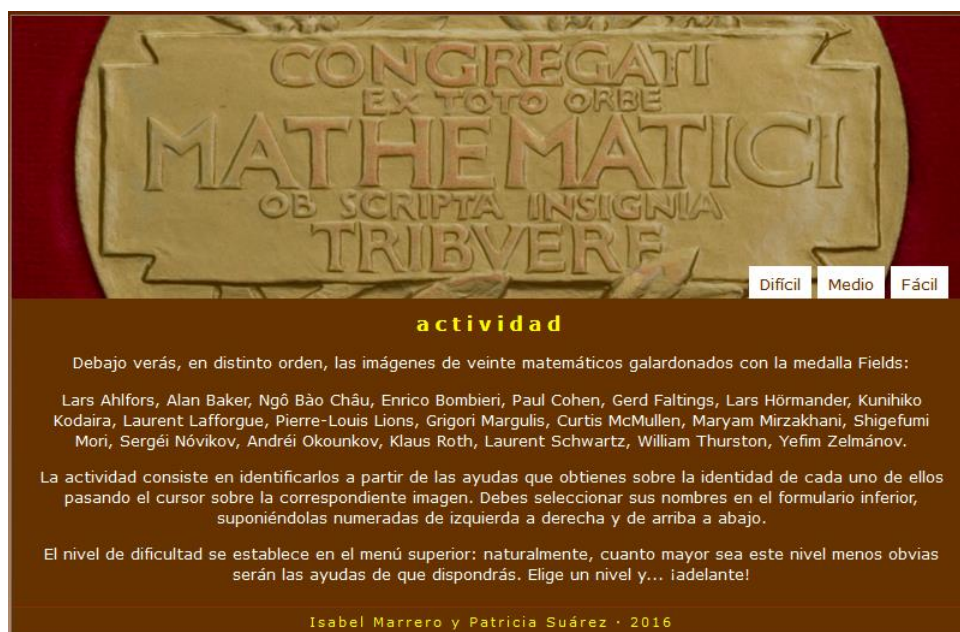


Figura 5.17. Captura de pantalla de la actividad online *Veinte galardonados con la medalla Fields*.

5.6. Actividades

A continuación proponemos algunas actividades relativas a los galardonados con la medalla Fields y a las geometrías no euclídeas, concretamente al modelo hiperbólico del disco de Poincaré.

Actividad 1

La actividad online *Veinte galardonados con la medalla Fields* [imarrero.webs.u11.es/TFG/2] (figura 5.18) consiste en identificar los nombres de veinte científicos galardonados con las medallas Fields a partir de las ayudas que se obtienen sobre la identidad de cada uno de ellos pasando el cursor sobre la correspondiente imagen. Se deben seleccionar sus nombres en el formulario inferior, suponiéndolos numerados de izquierda a derecha y de arriba a abajo. El nivel de dificultad se establece en el menú superior: cuanto mayor sea este nivel, menos obvias serán las ayudas disponibles.

Actividad 2

Siguiendo los pasos enumerados a continuación, construir una geodésica hiperbólica del disco de Poincaré que pase por dos puntos A y B no situados en un diámetro.

1. Encontrar los inversos de A y B respecto de la circunferencia, que denominaremos A' y B' , respecti-

² Autoras: Isabel Marrero y Patricia Suárez.

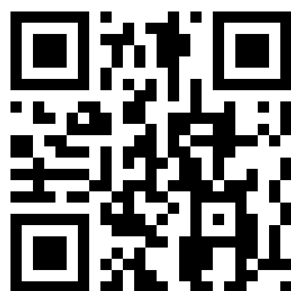


Figura 5.18. Código QR de la actividad online *Veinte galardonados con la medalla Fields*.

vamente.

- a) Dibujar un rayo r desde el centro O del disco a través del punto A .
 - b) Dibujar la recta s perpendicular a r por el punto A .
 - c) Denotar por L uno de los puntos donde se cortan el disco y la recta s .
 - d) Dibujar el segmento OL .
 - e) Dibujar la recta t perpendicular a OL por L .
 - f) Entonces A' será el punto donde se cruzan t y r .
 - g) Seguir los mismos pasos anteriores para determinar B' .
2. Determinar los puntos medios M y N de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$, respectivamente.
 - a) Dibujar circunferencias de radio suficientemente grande centradas una en A y otra en A' .
 - b) Dibujar la recta m que une los dos puntos donde los arcos se cruzan.
 - c) Entonces M será el punto de intersección entre el segmento $\overline{AA'}$ y la recta m .
 - d) Seguir los mismos pasos anteriores para determinar N .
 3. La recta m que pasa por M es perpendicular al segmento $\overline{AA'}$.
 4. Denotar n a la recta que pasa por N y es perpendicular al segmento $\overline{BB'}$.
 5. Denotar C al punto donde se cortan las rectas m y n .
 6. Dibujar una circunferencia c con centro C que pase por A (y B).
 7. La parte de la circunferencia c que cae dentro del disco es la geodésica hiperbólica.

Construcción de Geodésicas en el Disco de Poincare

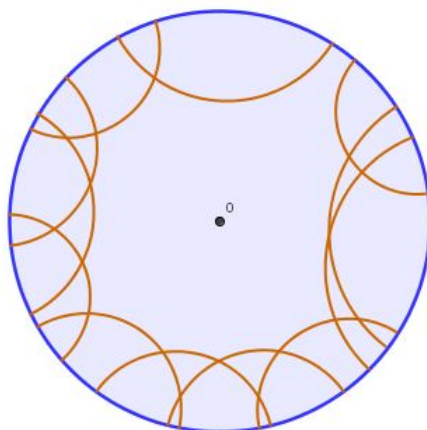


Figura 5.19. Captura de pantalla de la actividad en GeoGebraTube *Construcción de geodésicas en el disco de Poincaré*.



Figura 5.20. Código QR de la actividad en GeoGebraTube *Construcción de geodésicas en el disco de Poincaré*.

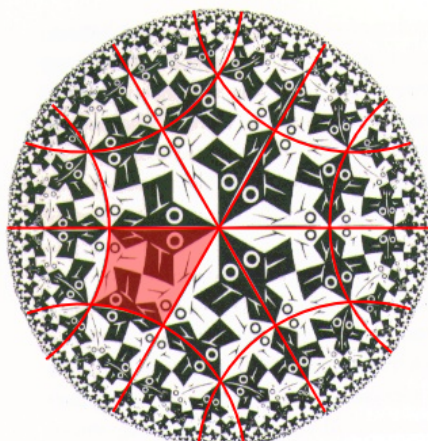


Figura 5.21. M.C. Escher, *Límite Circular I* (1958) con las geodésicas en rojo.

Actividad 3

GeoGebra es un software libre de geometría dinámica. Seguir las indicaciones de la Actividad 2 para construir en GeoGebra las geodésicas hiperbólicas del disco de Poincaré, tomando como referencia la hoja de trabajo disponible en GeoGebraTube *Construcción de geodésicas en el disco de Poincaré* [<http://ggbtu.be/m21177653>] (figura 5.20).

Actividad 4

El artista holandés M.C. Escher exploró la forma de representar el infinito en un plano. Sus conversaciones con el matemático canadiense H.S.M. Coxeter, en torno a 1956, despertaron su interés por las *teselaciones hiperbólicas*, que son embaldosados regulares del plano hiperbólico. Sus grabados *Límite Circular I-IV* (1958-1960) ilustran este concepto, usando el modelo del disco de Poincaré.

1. Las líneas rojas que se muestran sobre *Límite Circular I* (figura 5.21) son geodésicas hiperbólicas. Estas curvas desempeñan el papel de las rectas en la geometría euclídea. Cada línea roja sigue la espina dorsal de una fila de peces.

En *Límite Circular I* hay marcados dos tipos de líneas rojas.

- a) Describirlos.
 - b) Dibujar nuevas geodésicas siguiendo las espinas dorsales de otras filas de peces.
 - c) Describir las curvas resultantes.
2. Las geodésicas hiperbólicas son de dos tipos: o bien diámetros del disco, o bien arcos de circunferencia que intersecan a la frontera del disco en un ángulo de 90° . Los segmentos de geodésica forman

³ Autora: Patricia A. Suárez Hernández.



Figura 5.22. M.C. Escher, *Límite Circular II* (1959).

lados de polígonos.

- a) ¿Qué tipos de polígonos se ven en *Límite Circular I*?
 - b) Comparar la suma de los ángulos de esos polígonos con la suma de los ángulos correspondientes a polígonos del mismo tipo en la geometría euclídea.
3. Dibujar las geodésicas de *Límite Circular II* (figura 5.22).
4. a) Dibujar las geodésicas de *Límite Circular IV* (figura 5.23).
 b) Trazar una que no pase por el centro del disco.
 c) ¿Cuántas geodésicas se pueden dibujar que pasen por el centro sin cortar a la geodésica anterior? Dicho de otro modo, ¿cuántas geodésicas se pueden dibujar que pasen por un punto y que sean paralelas a la primera geodésica?
5. El *Límite Circular III* (figura 5.25) es el más sutil. Las líneas blancas parecen geodésicas, pero no lo son.
- a) Elegir un triángulo. Determinar los ángulos de los vértices, considerando el número de polígonos en cada vértice y suponiendo que todos los ángulos de un vértice son iguales (lo son, aunque no lo parezca debido a la distorsión).
 - b) ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo? ¿Es ello posible en la geometría hiperbólica?
 - c) Elegir una línea blanca y seguirla hasta el punto donde corta a la frontera del disco. Trazar las tangentes al disco y a la línea blanca en ese punto. ¿Cuánto vale el ángulo que forman?



Figura 5.23. M.C. Escher, *Límite Circular IV - Heaven and Hell* (1960).

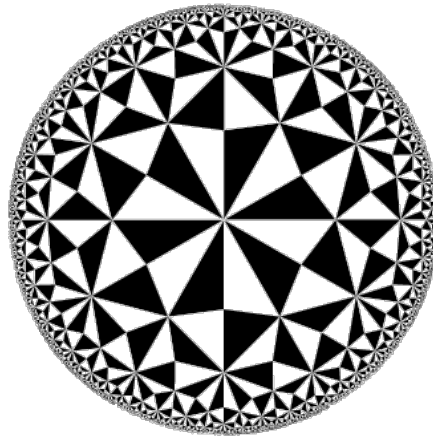


Figura 5.24. Teselación hiperbólica similar a la utilizada en *Límite Circular IV*.

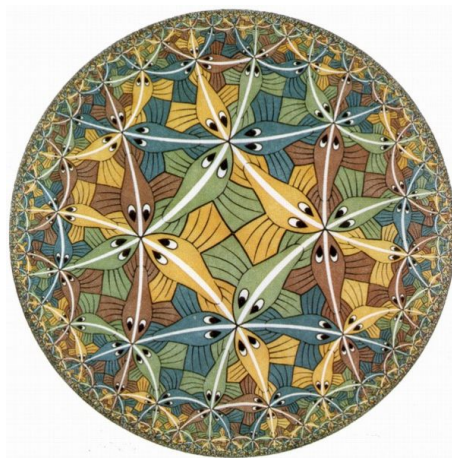


Figura 5.25. M.C. Escher, *Límite Circular III* (1959).

Actividad 5

Visitar la página web <http://www.geometrygames.org/> para aprender a confeccionar una manta hiperbólica [<http://www.geometrygames.org/HyperbolicBlanket/index.html>] o jugar al sudoku, billar y laberinto en superficies hiperbólicas [<http://www.geometrygames.org/HyperbolicGames/>].

Referencias

- [1] Aznar E.R.: *Premios Fields*, <http://www.ugr.es/~eaznar/fields.htm>.
- [2] Bart A., Clair B.: *Math and the Art of M. C. Escher*, http://euler.slu.edu/escher/index.php/Math_and_the_Art_of_M._C._Escher.
- [3] Echeverri Dávila H. (2006): El quinto postulado de Euclides, *Hipótesis* **8**, 10–26. [Disponible en http://hipotesis.uniandes.edu.co/hipotesis/ediciones/08/download/Edicion_08.pdf].
- [4] Etayo Gordejuela F. (2010): Matemáticas y realidad: geometrías no euclídeas y Universo, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat.* **104**, no. 1, 97–105. [Disponible en <http://www.rac.es/ficheros/doc/00905.pdf>].
- [5] Fernández Pérez J.L., Quirós Gracián A. (2000): Las Medallas Fields y los Congresos Internacionales de Matemáticos, *La Gaceta de la RSME* **3**, no. 2, 325–329. [Disponible en <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=269>].
- [6] Quirós Gracián A. (1999): Las medallas Fields, *La Gaceta de la RSME* **2**, no. 2, 353–356. [Disponible en <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=393>].
- [7] Scire Science (17/08/2014): *¿Por qué se ha premiado a los matemáticos?*, <https://scirescience.wordpress.com/2014/08/17/por-que-se-ha-premiado-a-los-matematicos/>.
- [8] Simon B. (2014): *Maryam Mirzakhani explains the work that made her the first woman to win a prize in mathematics*. [Disponible en <http://www.inquisitr.com/1412120/maryam-mirzakhani-explains-the-work-that-made-her-the-first-woman-to-win-a-prize-in-mathematics/>].
- [9] Valle Lázaro F. (2014): Maryam Mirzakhani, la primera mujer que recibe la medalla Fields, *Boletín de la Titulación de Matemáticas de la UAL* **8**, no. 1, 12–13. [Disponible en http://boletinmatematico.ual.es/Boletin/Boletines/Entradas/2014/10/28_Numero_1_del_volumen_VIII_files/Vol8_1.pdf].

Topología: Tazas y donuts



Figura 6.1. «¿Sabes aquel que dice...?». *Matematicalia*, vol. 5, núm. 2 (abril 2009).

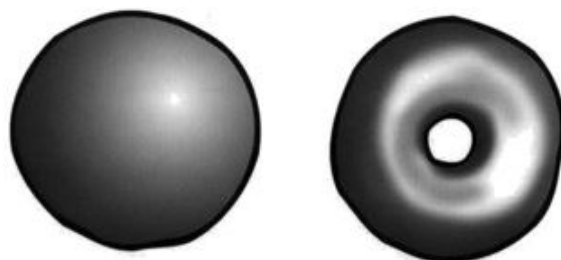


Figura 6.2. Superficies no equivalentes topológicamente.

6.1. Introducción

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo XVII, con el nombre de *analysis situs*, esto es, *análisis de la posición*.

La topología se dedica al estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: es decir, trabajamos con *homeomorfismos*.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera en la forma de las figuras. Un topólogo se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto; compara objetos y clasifica múltiples atributos, entre los que destacan conexidad, compacidad o metrizabilidad, entre otros.

A menudo se presenta a la topología como la matemática de la goma elástica, precisamente para insistir en que la topología estudia las propiedades cualitativas de los cuerpos, aquellas que permanecen aunque los objetos sean sometidos a deformaciones como estiramientos, dilataciones, giros, etc. y siempre sin cortar, pegar o rasgar durante el proceso.

Dos figuras que se pueden obtener la una de la otra mediante este tipo de transformaciones se dicen *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de una a la otra mediante una transformación continua y reversible. En topología, dos objetos equivalentes han de tener el mismo número de trozos, huecos, intersecciones, etc. Por ejemplo, un triángulo es topológicamente lo mismo que una circunferencia, ya que podemos deformar uno en otra de forma continua, sin romper ni pegar. Pero un toro, que es una figura tridimensional que tiene la forma de una rosquilla, con su agujero en medio no es topológicamente

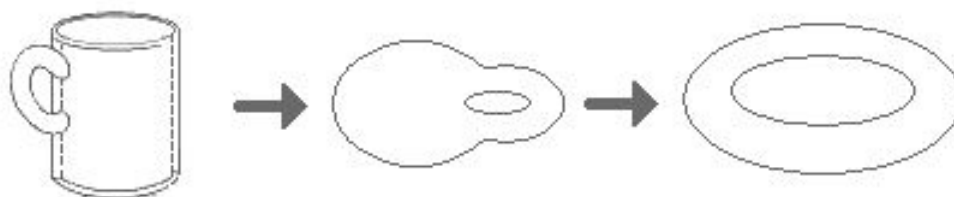


Figura 6.3. Una taza transformándose en una rosquilla.

equivalente a una esfera, ya que habría que pegar para hacer desaparecer el agujero.

Un chiste habitual entre los matemáticos es que «un topólogo es una persona incapaz de distinguir una taza de una rosquilla» (figura 6.1), lo que quiere decir que ambas son iguales desde un punto de vista topológico: si la taza estuviese hecha de plastilina podríamos deformarla continuamente hasta obtener la forma de una rosquilla¹.

En este capítulo, tras un breve recorrido por el nacimiento y desarrollo de la topología se abordan algunos objetos topológicos muy conocidos como la *banda de Möbius*, la *botella de Klein*, los *nudos* y los *fractales*, en concreto el *copo de nieve de Koch* y la *alfombra de Sierpiński*.

6.2. Algo de historia

Para profundizar un poco en la historia de la topología hemos de remontarnos hasta 1679, cuando G. Leibniz (1646-1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el cual intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Aun así, se suele datar el origen de la topología en la resolución por parte L. Euler (1707-1783) del famoso problema de los puentes de Königsberg, que publicó en 1736 con el título *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, una forma de pensar totalmente topológica.

El término «topología» fue usado por primera vez por J.B. Listing (1802-1882) en su artículo *Vorstudien zur Topologie*, publicado en 1847. Sus ideas topológicas se deben principalmente a su maestro C.F. Gauss (1777-1855). En 1861, publica otro artículo en el cual describe la banda de Möbius y estudia la noción de conexidad de las superficies. Cuatro años después, en 1865, A.F. Möbius (1790-1868) publica una descripción de la banda que lleva su nombre e intenta escribir la propiedad de una única cara de la banda en términos de no orientabilidad. Listing no es el primero en examinar las componentes conexas de las superficies; también B. Riemann (1822-1866) estudia este concepto en 1851 y de nuevo en 1857 cuando introduce las superficies de Riemann.

¹ En https://es.wikipedia.org/wiki/Topología#/media/File:Mug_and_Torus_morph.gif se puede ver una ani-



Figura 6.4. Möbius, la banda y Listing.

Listing examina la conexidad en el espacio euclídeo de dimensión tres, pero es E. Betti (1823- 1892) quien extiende estas ideas a dimensiones arbitrarias.

La idea de conexidad es descrita con rigor por H. Poincaré (1854-1925) en 1895, en una serie de artículos bajo el título *Analysis situs*. Poincaré introduce el concepto de homología y da una definición precisa de los números de Betti asociados a un espacio. También introduce el concepto de grupo fundamental de una variedad y la noción de homotopía.

Un segundo camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de la idea de convergencia. Este proceso se inicia en 1817, cuando B. Bolzano (1781-1848) asocia la convergencia con un subconjunto infinito acotado de números reales, en vez de pensar exclusivamente en sucesiones numéricas.

G. Cantor (1845-1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto derivado o familia de puntos límite de un conjunto. En 1906, M. Fréchet (1878-1973) llama a un espacio compacto si cada subconjunto infinito acotado contiene un punto límite. Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los espacios métricos. La definición de espacio topológico abstracto vendrá de la mano de F. Riesz (1880-1956) y F. Hausdorff (1868-1942), quienes entre 1909 y 1914 proponen un enfoque axiomático, sin consideraciones métricas.

Por último, hay una tercera vía por la que los conceptos topológicos entran en las matemáticas y es a través del análisis funcional. Este área surge de la física matemática y la astronomía, como alternativa a los métodos del análisis clásico que resultaban inadecuados para abordar determinados problemas. E. Schmidt (1876-1959) examina en 1907 la noción de convergencia en espacios de funciones, definiendo la distancia a través de un producto interior. S. Banach (1892-1945) da un paso más hacia la abstracción cuando en 1932 pasa de los espacios con producto interior a los espacios normados. Poincaré desarrolla muchos de sus métodos topológicos cuando estudia ecuaciones diferenciales ordinarias que provienen de ciertos problemas astronómicos. En 1912, L.E.J. Brouwer (1881-1966) transforma esta colección de métodos en una completa teoría topológica.

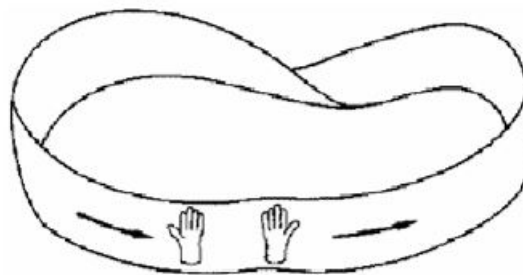


Figura 6.5. La orientabilidad de la banda de Möbius.

6.3. La banda de Möbius

La *banda de Möbius* es, desde el punto de vista topológico, una superficie de dimensión dos, con un único borde y una única cara. Además, tiene la propiedad matemática de ser un objeto no orientable. Fue descubierta de forma independiente por los matemáticos J.B. Listing y A.F. Möbius.

Para construir una cinta de Möbius, se toma una tira de papel. Si se pegan los extremos se obtiene lo que en matemáticas se denomina un *cilindro*, es decir, una superficie que obviamente tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados, la cara interior y la exterior de la figura. Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180° , el objeto que se obtiene es una banda de Möbius. La banda de Möbius, como el cilindro, es un objeto geométrico de dimensión dos pero, sorprendentemente, posee un único borde (el doble de largo, pues su longitud es la suma de las longitudes de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara. En efecto, para cerciorarse basta con recorrer con un dedo el borde de la cinta hasta comprobar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento; y pasar, por ejemplo, un lápiz por la cara de la banda, sin levantarlo tampoco, comprobando que al regresar al punto de partida las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

La banda de Möbius es no orientable; todas sus propiedades singulares (y de cualquier otro objeto que «la contenga») se derivan de esta última propiedad. En efecto, si se dibuja una mano sobre la banda y se mueve a lo largo de su única cara, al regresar al punto de partida, ¡la mano ha cambiado de sentido!

¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360° ? Se trata (topológicamente) de un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son homeomorfos.

Es fácil comprobar que, de hecho, sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180°), o bien una banda de Möbius (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo impar de 180°).

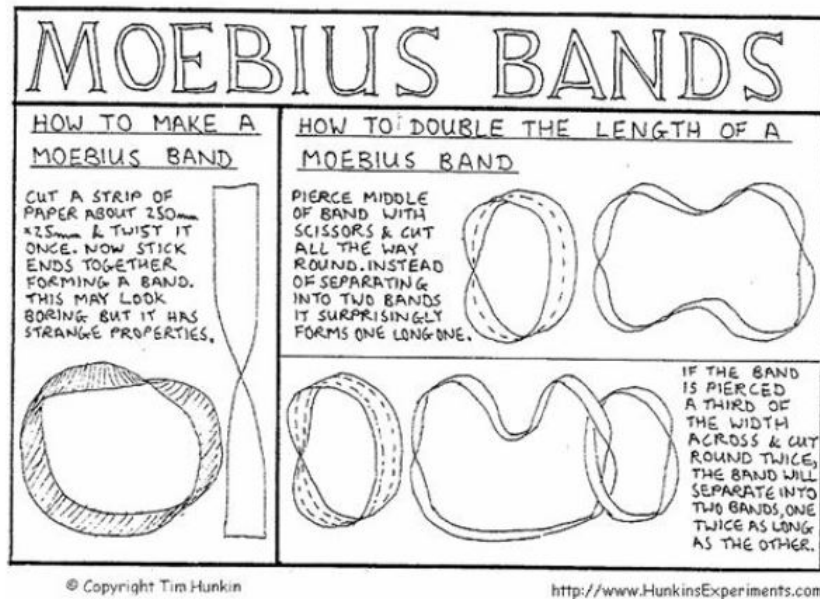


Figura 6.6. Cómo hacer una banda de Möbius y doblar su longitud.

Se obtienen otros resultados insólitos cuando practicamos cortes a la banda de Möbius.

- Al cortar por la mitad de un cilindro se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original. Al hacer lo mismo con la banda de Möbius parecería lógico obtener dos bandas de Möbius más pequeñas; pero en realidad se obtiene una única cinta, que es un cilindro, pues posee dos caras.
- Al cortar por su tercera parte un cilindro se obtienen dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original. Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, resulta una banda de Möbius, igual de larga y un tercio de ancha, y un cilindro, el doble de largo y un tercio de ancho, entrelazados.

Una forma de representar la banda de Möbius como subconjunto del espacio euclídeo de dimensión tres es mediante la parametrización

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\y(u, v) &= \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \\z(u, v) &= \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2},\end{aligned}$$

donde $0 \leq u < 2\pi$ y $-1 \leq v \leq 1$. Su anchura es unitaria, su circunferencia central tiene radio 1, y se encuentra en el plano coordenado OXY , centrada en el origen de coordenadas.

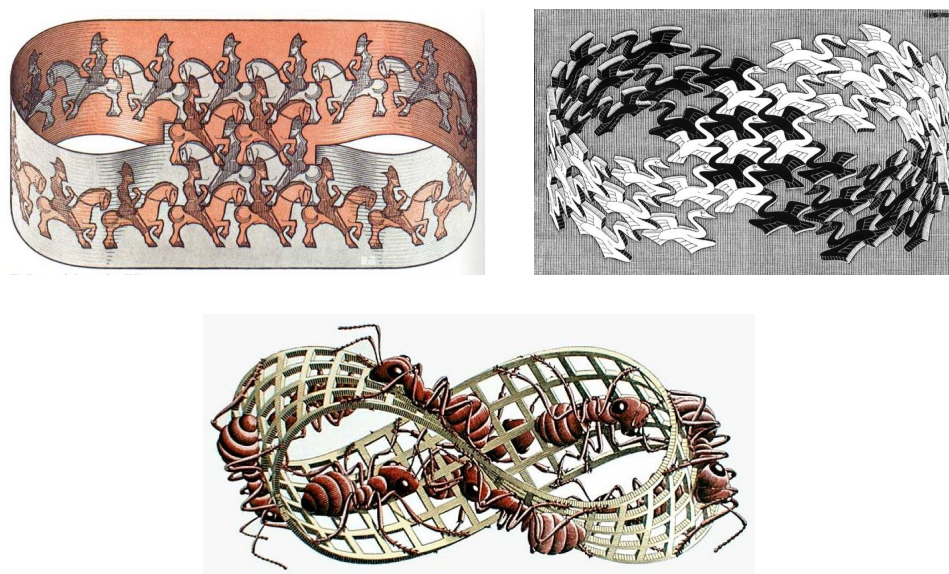


Figura 6.7. La banda de Möbius en la obra de M.C. Escher (1898-1972).

La banda de Möbius ha inspirado a científicos y artistas.

En ingeniería se ha aplicado a películas, a filtros autolimpiantes y a cintas magnetofónicas, transportadoras, de impresoras y de máquinas de escribir. Se ha conseguido sintetizar cristales con estructura de banda de Möbius que podrían ser útiles en el estudio de efectos topológicos de la mecánica cuántica. En química orgánica tiene especial relevancia la llamada aromaticidad de Möbius. Cierta proteína antiviral se enrolla siguiendo una banda de Möbius. Y cada vez con más frecuencia, diferentes estudios científicos descubren objetos con topología de Möbius.

Probablemente varias de las representaciones artísticas más conocidas de la banda de Möbius sean las debidas a M.C. Escher (1898-1972); véase la figura 6.7.

La película argentina *Moebius* (1996) narra la inexplicable desaparición de un tren lleno de viajeros en el entramado viario del metro de Buenos Aires. Para resolver el misterio los ingenieros de la red recurren a los servicios de un joven topólogo, cuyas deducciones le conducirán a un alucinante viaje a través de la cuarta dimensión. *Thru the Moebius strip* (2005) es la primera película china de animación 3D. Narra las aventuras de Jac, un chico de 14 años que, incapaz de aceptar la muerte de su padre, se embarca en un viaje en su busca. El guión y diseños de la película son del dibujante e ilustrador francés Jean «Moebius» Giraud (1938-2012). Giraud participó en los diseños de muchas otros videojuegos y de conocidas películas, como *Alien* (1979), *Tron* (1982), *Masters del Universo* (1986), *Willow* (1987), *Abyss* (1989) o *El quinto elemento* (1997). George Lucas también usó un diseño de «Moebius» para la Imperial Probe Droid en *Star Wars Episodio V: El Imperio Contraataca*.

En arquitectura y mobiliario urbano se pueden encontrar variados ejemplos de proyectos basados en la banda de Möbius. Uno de ellos es el *Möbius Climber Lands*, una atracción para niños que se en-

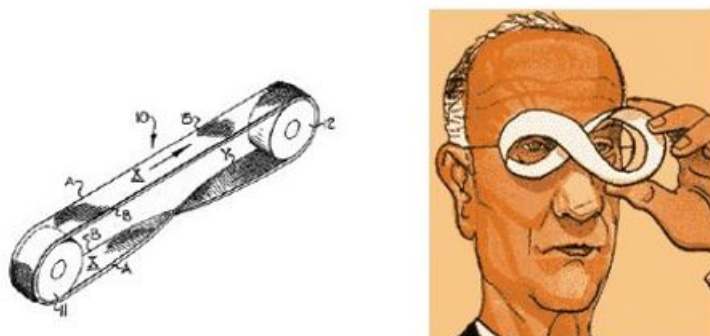


Figura 6.8. La banda de Möbius en ingeniería (i) y autocaricatura de Jean Giraud, portada de su autobiografía *Mi doble y yo*.

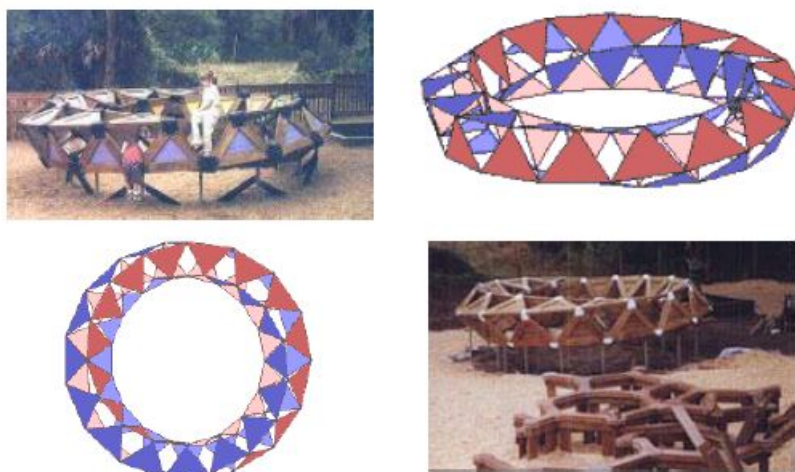


Figura 6.9. Möbius Climber Lands.

cuentra en el Sugar Sand Science Playground de Boca Ratón, Florida. Esta atracción, diseñada con ayuda del programa Mathematica por el catedrático de matemáticas de la Florida Atlantic University Gerald Harnett, está compuesta por 64 triángulos enlazados de manera que, en cada punto, la estructura torcida parece tener 4 caras, cuando en realidad tiene 2.

En nuestra vida cotidiana también podemos encontrar imágenes u objetos basados en la banda de Möbius. El conocido símbolo del reciclaje, consistente en tres flechas de color verde que se persiguen sobre las aristas de un triángulo, no es más que una banda de Möbius. Fue creado en 1970 por Gary Anderson (1947-), y representa el proceso de transformación del material de desecho en recursos útiles. Por otra parte, Elisabeth Zimmermann (1910-1999) introdujo en 1983 las bufandas de Möbius, excelentes para el frío y que no han dejado de ser imitadas por numerosas firmas.



Figura 6.10. Bufanda de Möbius.

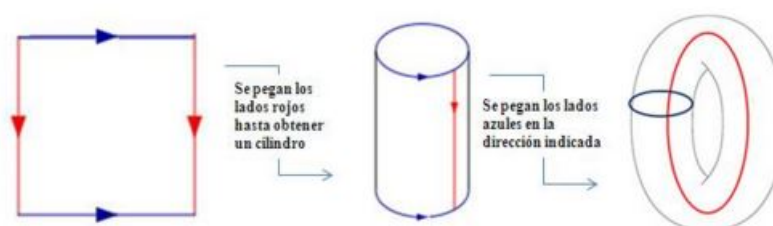


Figura 6.11. Construcción del toro.

6.4. La botella de Klein

En topología, la *botella de Klein* es una superficie compacta (cerrada y acotada), conexa (de una pieza) y no orientable. No tiene ni interior ni exterior (posee un solo lado) y carece de borde (donde la superficie se detenga abruptamente).

La botella de Klein fue descrita por primera vez en 1882 por el matemático alemán F.C.Klein (1849-1925). El nombre original del objeto no fue el de «botella de Klein», sino el de «superficie de Klein». El traductor de la primera referencia al objeto del alemán al inglés confundió los términos. Como la apariencia de la representación tridimensional recuerda a una botella, casi nadie se dio cuenta del error.

Lo que en matemáticas se denomina un *toro* se obtiene a partir de un cuadrado haciendo las identificaciones de sus bordes que se indican en la figura 6.11, de forma que el sentido de las flechas coincida.

Para construir una botella de Klein se toma un cuadrado con los bordes coloreados como en la figura 6.12. Una vez obtenido el cilindro, para pegar sus extremos de manera que las flechas de los círculos coincidan, pasamos un extremo por el lado del cilindro. Por último, curvamos el borde haciendo que se unan los extremos. Se crea así una autointersección circular que proporciona una proyección de la botella de Klein en tres dimensiones.

Añadiendo una cuarta dimensión al espacio tridimensional conseguimos que la botella pase a través de sí misma sin necesidad de un agujero. Para ello empujamos suavemente un trozo de tubo que contenga la intersección fuera del espacio tridimensional original. Una analogía útil es considerar una

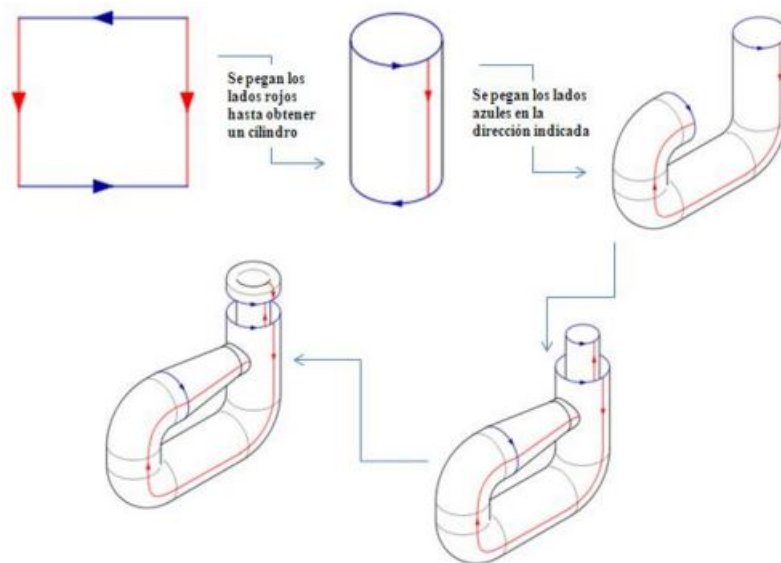


Figura 6.12. Construcción de la botella de Klein.

curva que se autointerseca en el plano; las intersecciones se pueden eliminar levantando un arco fuera del mismo.

Por tanto, al autointersecarse, esta figura no puede embeberse en el espacio de dimensión tres, pero sí que está contenida en el espacio de dimensión cuatro como hemos visto.

La botella de Klein puede obtenerse a partir de dos bandas de Möbius, de las que hereda sus *extrañas* propiedades. A tal fin, basta identificar los bordes de las dos bandas como se indica en la figura 6.13: la circunferencia frontera que es el único borde de la banda de Möbius A se pega con la circunferencia frontera que también es el único borde de la banda de Möbius B .

También es posible obtener la botella de Klein a partir de una única banda de Möbius: si se identifican en primer lugar los dos lados marcados en azul en la figura 6.12 resulta una banda de Möbius, cuyo borde debería identificarse ahora siguiendo las indicaciones de las flechas rojas.

Inversamente, es posible obtener una banda de Möbius a partir de la botella de Klein. Desde la figura 6.14 se enlaza un video de la Universidad de Hannover donde se explica con claridad cómo se obtiene la botella de Klein con el proceso indicado en la figura 6.12; después se corta por la línea roja (también en topología cortar es el proceso inverso a pegar) para deshacer el cilindro obtenido en primer lugar y conseguir la banda de Möbius.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes de las figuras 6.15 y 6.16.

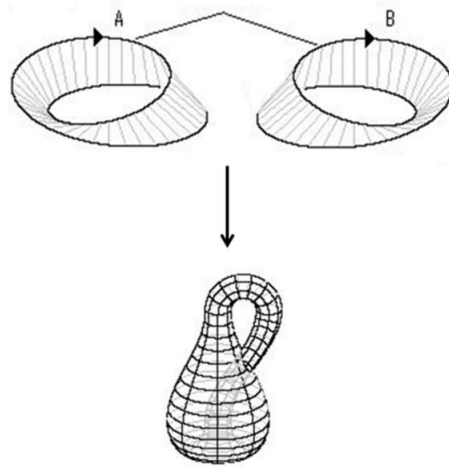


Figura 6.13. A partir de dos bandas de Möbius se obtiene la botella de Klein.



Figura 6.14. Fotograma del video *The Klein Bottle* [<https://www.youtube.com/watch?v=E8rifK1q5hc>].



Figura 6.15. Botellas de Klein de LEGO y de origami creadas por Andrew Lipson y Robert Lang, respectivamente.



Figura 6.16. Botellas de Klein fabricadas por el físico Cliff Stoll, a la venta en *ACME Klein Bottles* [<http://kleinbottle.com/>].

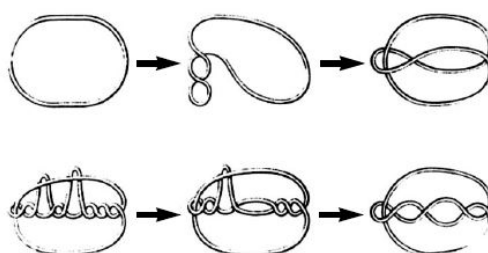


Figura 6.17. Nudos de apariencia complicada.

6.5. La teoría de nudos

La *teoría de nudos* es la rama de la topología que se encarga de estudiar el objeto matemático llamado *nudo*. El nudo es una curva continua, cerrada y sin puntos dobles. Esta curva está situada en un espacio de dimensión tres y se admite que pueda ser deformada, estirada, comprimida, pero está prohibido hacer cortes. Cuando se puede pasar de un nudo a otro a través de manipulaciones de este tipo, se dice que ambos nudos son *equivalentes*. En general, es muy difícil decidir cuándo dos nudos son equivalentes, y gran parte de la teoría de nudos está precisamente dedicada a intentar resolver esa cuestión.

Por ejemplo, el nudo trivial, sin cruce, equivale a los de apariencia complicada de la figura 6.17.

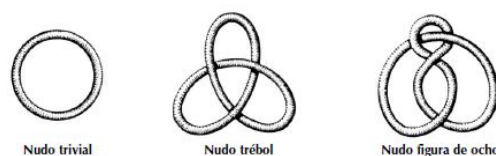


Figura 6.18. Nudos con diferente número de cruce.

El nacimiento de la teoría de nudos se produjo a finales del siglo XVIII. El primer tratado escrito que tuvo relación con la teoría de nudos fue un estudio de las órbitas planetarias debido a Gauss, en el que se describe el primer invariante de los enlaces. Gauss estudia los nudos junto a su alumno Listing, quien posteriormente, influenciado por su maestro, prosigue su estudio en sus escritos de topología. Pero no es hasta el año 1860 que se producen más avances, cuando Lord Kelvin (1824-1907) formula su teoría de que los átomos son nudos en un espacio relleno de éter. Tras ser rechazada esta teoría, el estudio de los nudos no tiene más interés que el puramente matemático. A lo largo del siglo XX, figuras como Kauffman y Reidemeister desarrollan la mayor parte de la teoría de nudos y se establecen nuevas conexiones con otras disciplinas científicas.

Los nudos están catalogados en función de su complejidad. Una medida de la complejidad es el *número de cruce*, es decir, el número de puntos dobles en la proyección plana más simple del nudo. El nudo trivial tiene número de cruce cero, mientras que el trébol y la figura de ocho son los únicos nudos con número de cruce tres y cuatro, respectivamente (figura 6.18).

Hay dos nudos con número de cruce cinco, tres con número de cruce seis, y siete con número de cruce siete. El número crece radicalmente: hay 12.965 nudos con trece o menos cruces y 1.701.935 con dieciséis o menos cruces.

Una de las aplicaciones más conocidas de la teoría de nudos es el estudio de la estructura del ADN. El ADN (ácido desoxirribonucleico) es una molécula que contiene nuestro código genético y que se encuentra en el núcleo de cada una de nuestras células. Tiene forma de dos cuerdas enrolladas formando una doble hélice.

El ADN puede realizar cambios o movimientos como la replicación (reproducción), la transcripción (copia de segmentos del ADN) o la recombinación (que modifica la molécula). Para que se den estos cambios es necesario manipular las moléculas de alguna manera, función de la que se encargan otras moléculas llamadas *enzimas*, en concreto una denominada *topoisomerasa*, que tiene la capacidad de modificar la topología del ADN con movimientos donde el nudo se atraviesa a sí mismo y el cruce cambia de signo. Con el conocimiento de estas proteínas y de su interacción con el ADN se abren nuevas perspectivas en la lucha contra las enfermedades genéticas, los virus, las bacterias o el cáncer.

Otras aplicaciones de la teoría de nudos se dan en las ecuaciones que determinan flujos. Estudios recientes muestran cómo las partículas pueden moverse en complicados caminos de nudos. Combi-

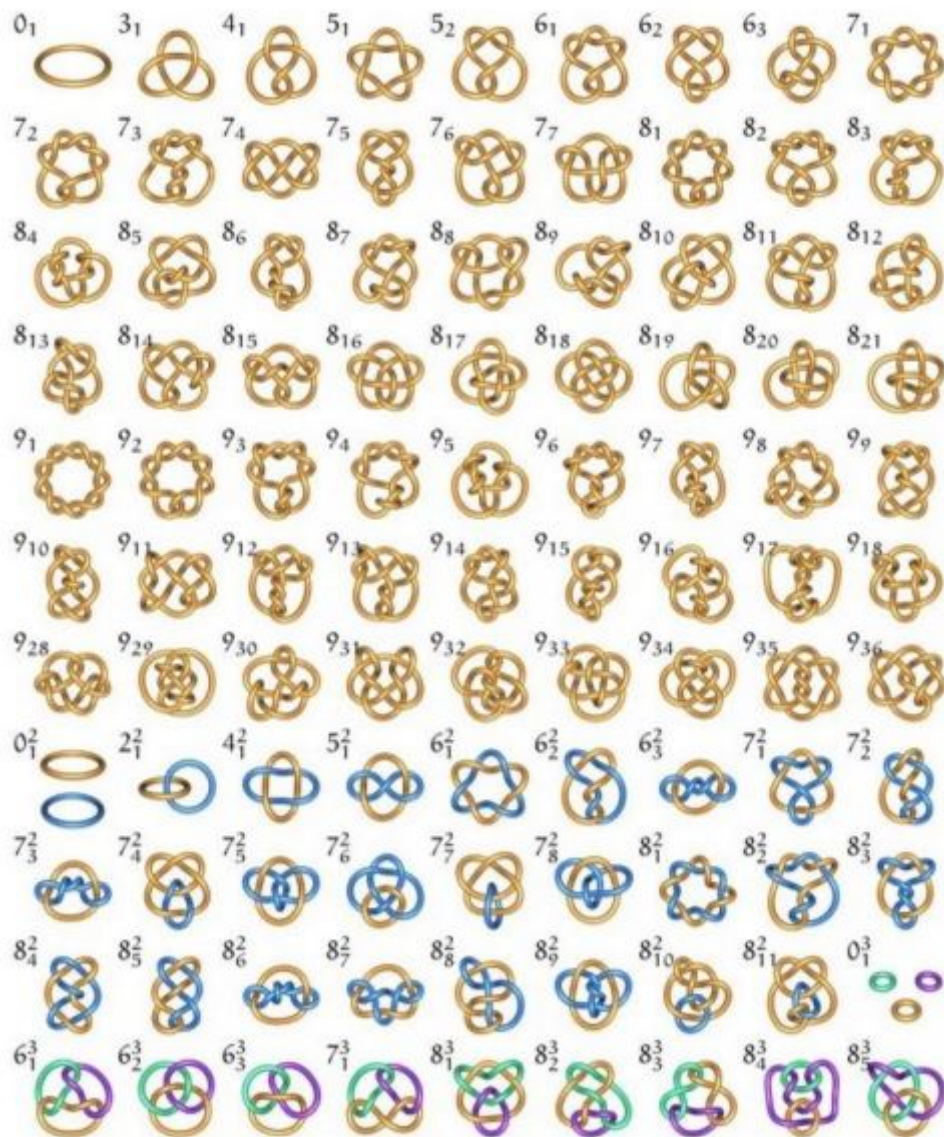
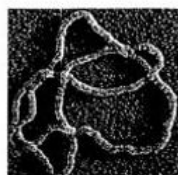
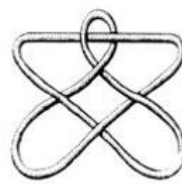


Figura 6.19. Clasificación de los nudos según el número de cruces.



Fotografía ADN



Nudo que la representa

Figura 6.20. El ADN.

nando la teoría de nudos con la teoría física de cuerdas se ha podido dar una descripción unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo y las interacciones fuertes y débiles entre partículas.

6.6. Los fractales

El matemático B. Mandelbrot (1924-2010) es considerado el principal responsable de desarrollar, en 1975, el concepto de fractal, término proveniente del vocablo latino *fractus*, que significa *quebrado* o *fracturado*.

Un *fractal* es una figura, espacial o plana, formada por componentes infinitos. Su principal característica es que su apariencia o la manera en que se distribuye estadísticamente no varía aun cuando se modifique la escala empleada en la observación. Por tanto, los fractales son elementos semigeométricos que disponen de una estructura esencial repetida a diferentes escalas.

Se atribuyen a un fractal, entre otras, las siguientes características:

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Es autosimilar: su forma está hecha de copias más pequeñas de la misma figura.
- Se define mediante un simple algoritmo recursivo.

No basta con una sola de estas características para definir un fractal. Por ejemplo, la recta real no se considera un fractal, pues a pesar de ser un objeto autosimilar carece del resto de propiedades exigidas.

Los fractales pueden presentar tres clases diferentes de autosimilitud:

- *Autosimilitud exacta*: el fractal resulta idéntico a cualquier escala.
- *Cuasiautosimilitud*: con el cambio de escala, las copias del conjunto son muy semejantes, pero no idénticas.
- *Autosimilitud estadística*: el fractal debe tener dimensiones estadísticas o de número que se conserven con la variación de la escala.

La geometría clásica no es lo suficientemente amplia como para abarcar los conceptos necesarios para medir las diferentes formas fractales. Si tenemos en cuenta que se trata de elementos cuyo tamaño cambia incesantemente no es fácil, por ejemplo, calcular su longitud. La razón es que si se intenta realizar una medición de una línea fractal utilizando una unidad tradicional, existirán siempre componentes tan pequeños y delgados que no podrán ser delimitados con precisión. Es por ello que se ha creado el concepto de *dimensión fractal* que permite, cuando hablamos de líneas fractales, conocer de qué manera o en qué grado ocupan una porción de plano.

Esparcido por la literatura científica, el concepto de dimensión fractal se utiliza indiscriminada-

mente para designar dimensión de autosimilitud, dimensión de capacidad, dimensión de correlación, dimensión de información y muchas otras. La *dimensión de autosimilitud* D de un objeto, hecho de N copias exactas a sí mismo y reducidas en un factor de escala r , es:

$$D = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln r}.$$

Una definición más general de dimensión fractal que la de autosimilitud viene proporcionada por la llamada *dimensión de capacidad*. Para poder medir la dimensión de autosimilitud necesitamos que nuestro objeto sea perfectamente autosimilar. Podemos relajar esta condición y utilizar el mismo método de recubrimiento para medir la dimensión de capacidad. Independientemente de la figura geométrica a estudio, la recubriremos con bolas de radio ε . La dimensión de capacidad D_F puede definirse en términos del mínimo número $N(\varepsilon)$ de bolas de radio ε necesarias para recubrir el conjunto, como el límite:

$$D_F = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

La dimensión de capacidad es así una generalización de la dimensión de autosimilitud y ambas coinciden para objetos totalmente autosimilares.

Muchos de los objetos matemáticos que hoy denominamos fractales eran bien conocidos desde principios del siglo XX. Ya en 1872 apareció la función de Weierstrass, cuyo grafo hoy en día consideramos fractal, como ejemplo de función continua no derivable en ningún punto. Posteriormente aparecieron otros elementos con propiedades parecidas pero con una definición más geométrica. Todos ellos podían construirse partiendo de una figura inicial, a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite, que correspondía a lo que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch. En 1915, Waclaw Sierpiński construyó el triángulo y, un año después, la alfombra que llevan su nombre.

En la actualidad podemos destacar tres técnicas comunes para generar fractales:

- *Sistemas de funciones iteradas (IFS)*: unos conjuntos se reemplazan recursivamente por su imagen bajo un sistema de aplicaciones. Algunos ejemplos son el conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpiński, el triángulo de Sierpiński, la curva de Peano, la curva del dragón, el copo de nieve de Koch y la esponja de Menger.
- *Fractales de algoritmos de escape*: están definidos por una relación de recurrencia en cada punto del espacio; ejemplos en el plano complejo son el conjunto de Mandelbrot, el conjunto de Julia y el fractal de Lyapunov.
- *Fractales aleatorios*: generados por procesos estocásticos, no deterministas, como por ejemplo el movimiento browniano, el vuelo de Lévy, los paisajes fractales y los árboles brownianos.

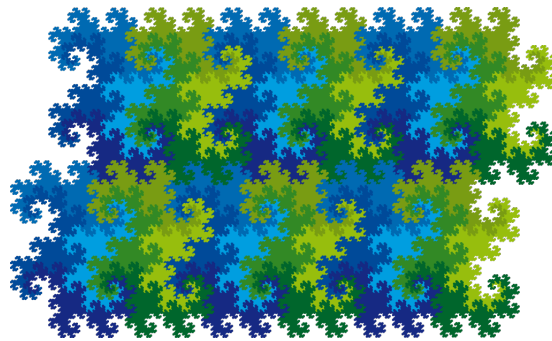


Figura 6.21. Teselado del plano con la curva del dragón. [Fuente: Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_del_dragón#/media/File:Full_tiling_dragon.svg].

Ciertos objetos naturales poseen un número finito de grados de autosimilitud, y pueden ser considerados como fractales naturales. Bajo esta premisa, la geometría fractal ha ayudado enormemente a explicar diversos fenómenos naturales tales como el curso de los ríos, la formación de nubes, el crecimiento de las plantas, las cordilleras, la evolución de las galaxias, el crecimiento poblacional, el funcionamiento de los huracanes, el ruido electrónico y los atractores caóticos. Todos estos fenómenos comparten un principio unificador: sus patrones generales se repiten a diferentes escalas dentro del mismo objeto.

Los fractales poseen, además, aplicaciones tecnológicas. El diseño de antenas ha sido siempre un tema complejo. La solución tradicional de utilizar conductores largos y de pequeña sección está siendo reemplazada por *arrays* de antenas. Éstos consisten en miles de pequeñas antenas que son situadas o bien de forma aleatoria o bien según un patrón regular. Los fractales proporcionan la combinación perfecta entre aleatoriedad y orden, con el menor número de componentes.

Una segunda aplicación tecnológica es la compresión de imágenes. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un IFS, dando como resultado una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente regenerada a cualquier grado de resolución con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el IFS que describa la imagen (*problema inverso*).

Otras aplicaciones importantes de los fractales son:

- Evolución de los mercados bursátiles.
- Estudio de la relación entre la mecánica cuántica y la relatividad especial.
- Análisis del nacimiento de los planetas.
- Medición de fronteras y costas.
- Análisis y predicción de condiciones meteorológicas, terremotos y volcanes.
- Análisis espectroscópico.

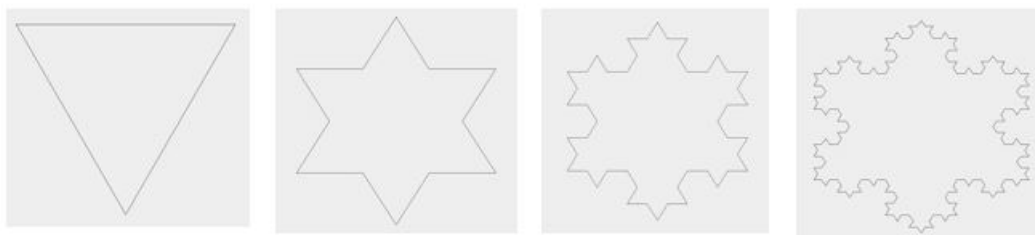


Figura 6.22. Hasta la tercera iteración del copo de Koch.

- Análisis estructural y morfológico en polímeros.
- Caracterización de agregados.
- Análisis de fenómenos caóticos, como el movimiento browniano o la formación de nebulosas siderales.

Dedicaremos el resto de esta sección al análisis de dos ejemplos de fractales de tipo IFS: el copo de nieve de Koch y la alfombra de Sierpiński.

6.6.1. El copo de nieve de Koch

El *copo de nieve de Koch*, también llamado *estrella de Koch*, es una curva cerrada continua pero no diferenciable en ningún punto, descrita por el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924). La peculiaridad de esta figura es que aun encerrando un área finita o pudiendo ser dibujada en una superficie acotada, su perímetro es infinito. Se construye de manera iterativa, es decir, repitiendo un mismo proceso infinitas veces.

Inicialmente, el copo es un simple triángulo equilátero. Para seguir construyendo el copo, se debe repetir indefinidamente el siguiente proceso:

- Dividir el segmento en tres segmentos de igual longitud.
- Dibujar un triángulo equilátero cuya base es el segmento central. El triángulo debe apuntar «hacia afuera».
- Eliminar el segmento central.

En cada iteración se va obteniendo un nuevo copo. Tras repetir el proceso infinitas veces, se obtiene el susodicho copo de Koch. Dicho de otro modo, la curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

En la iteración inicial el copo es un simple triángulo equilátero, cuyos lados supondremos que tienen longitud l . En un triángulo equilátero, la altura es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces su lado; por tanto, el perímetro y el área de

este triángulo son:

$$P_0 = 3l,$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2.$$

En la siguiente iteración se observa que el número de lados es 12. Como cada lado en la nueva figura tiene una longitud igual a un tercio de la longitud del lado de la figura anterior, se deduce que los nuevos perímetro y área son:

$$P_1 = 3 \frac{4}{3} l,$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3}\right)^2.$$

En cada iteración un segmento genera 4 nuevos y la longitud de cada uno de ellos se reduce en un factor de $\frac{1}{3}$. Por tanto, el área y el perímetro tras n iteraciones serán:

$$P_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n l,$$

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 3 \sum_{k=1}^n 4^{k-1} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^k}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{3^2}\right)^k \right].$$

La sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una progresión geométrica de razón $\frac{4}{3}$ que, obviamente, tiende a infinito con n , lo que significa que el copo de nieve de Koch tiene una longitud infinita, como anteriormente se mencionó. Sin embargo, en la expresión de S_n comparece la suma parcial de una serie geométrica de razón $\frac{4}{3^2}$ y ésta es convergente, por lo que en el límite cuando $n \rightarrow \infty$ resulta un área finita e igual a

$$\frac{8}{5} \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{8}{5} S_0.$$

Este resultado guarda relación con el hecho de que la dimensión de autosimilitud del copo de Koch es $D > 1$. Para calcular D , tenemos en cuenta que el número de segmentos en cada iteración es $N_n = 4^n$ y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Por tanto:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln 4^n}{\ln 3^{-n}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,261859507.$$

6.6.2. La alfombra de Sierpiński

La alfombra de Sierpiński es un conjunto fractal descrito por primera vez por Waclaw Sierpiński (1882-1969) en 1916. Su construcción se hace mediante un proceso similar al copo de nieve de Koch. Se

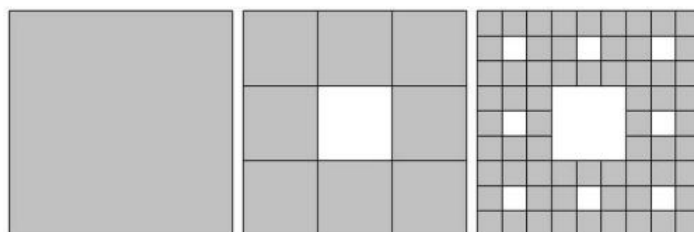


Figura 6.23. Hasta la segunda iteración de la alfombra de Sierpiński.

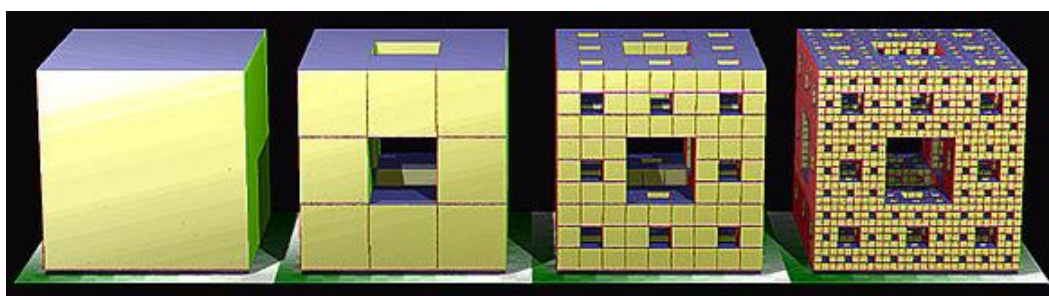


Figura 6.24. Hasta la tercera iteración de la esponja de Menger.

debe repetir indefinidamente el siguiente proceso:

- Comenzar con un cuadrado.
- El cuadrado se corta en 9 cuadrados iguales, y eliminamos el cuadrado central.
- El paso anterior vuelve a aplicarse a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

Repitiendo el proceso infinitas veces, se obtiene como resultado final la alfombra de Sierpiński. La dimensión de la alfombra de Sierpiński está comprendida entre 1 y 2. En la n -ésima iteración tendremos $N_n = 8^n$ réplicas del cuadrado, cada una de ellas reducidas en un factor $r = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Por lo tanto:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\ln 8^n}{\ln 3^{-n}} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,892789260.$$

Se puede hacer una generalización de esta construcción para tres dimensiones, que se conoce como *esponja de Menger*. La figura de la que se parte es un cubo, que se divide en 27 cubos más pequeños, de los cuales se eliminan los cubos centrales de cada una de las 6 caras y el cubo situado en el centro del cubo original. Este procedimiento se repite sucesivamente para todos los cubos creados, de manera que cada cara del cubo se ve como una alfombra de Sierpiński.

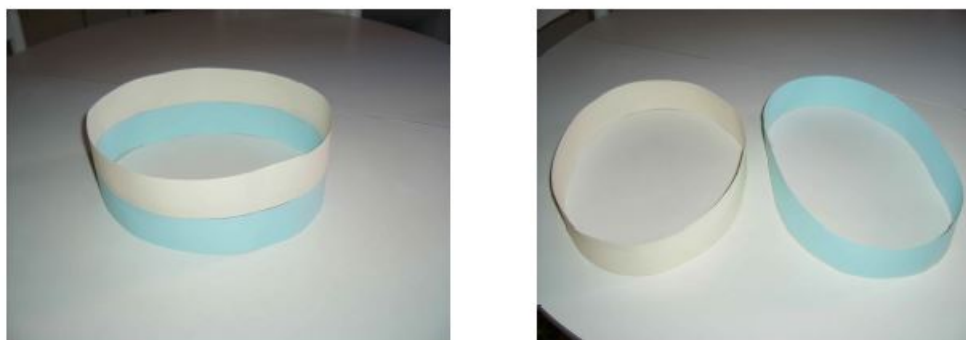


Figura 6.25. Cortando un cilindro por la mitad.

6.7. Actividades

En estas actividades trabajaremos de forma manipulativa algunos objetos topológicos muy conocidos como la banda de Möbius, la botella de Klein, los nudos, y la alfombra de Sierpiński.

Actividad 1

Experimentar con el cilindro y la banda de Möbius usando tiras de papel.

Materiales

- Tiras de papel de, al menos, dos colores distintos pero de igual anchura y longitud suficiente como para permitir manipularlas sin ninguna dificultad.
- Cinta adhesiva.
- Lápiz.
- Tijeras.

Manipulaciones

- Formar un cilindro con dos tiras de papel, cortarlo por la mitad y observar que resultan dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original (figura 6.25).
- Formar una banda de Möbius con otras dos bandas de papel y cortarla por la mitad. Se obtiene una cinta el doble de larga que a simple vista parece una banda de Möbius. ¿Lo es realmente? Recorrer con un lápiz todo el borde de la cinta sin levantarla en ningún momento, comprobando que al regresar al punto de partida sólo una cara ha quedado marcada. Por tanto, la cinta tiene dos caras y se trata de un cilindro formado de manera que uno de los extremos se ha girado un múltiplo par de 180° (figura 6.26).
- Formar un cilindro alternando tres tiras de papel de dos colores distintos. Cortarlo por su tercera

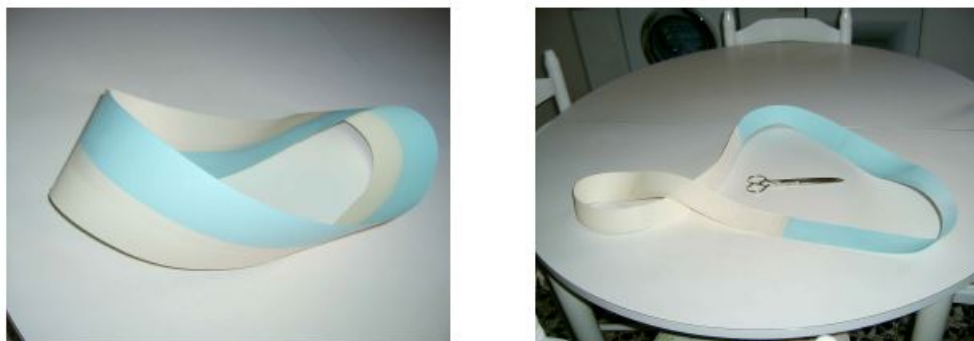


Figura 6.26. Cortando una banda de Möbius por la mitad.

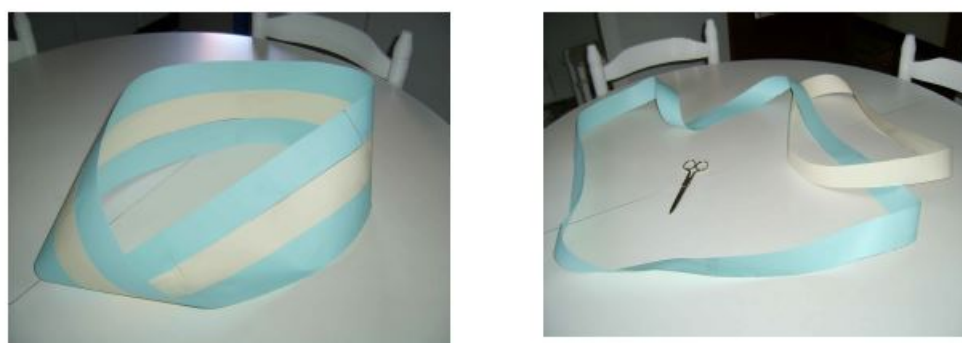


Figura 6.27. Cortando una banda de Möbius por su tercera parte.

parte para obtener dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original.

- Formar una banda de Möbius alternando tres tiras de papel de dos colores distintos y cortarla por su tercera parte. Observar que se obtienen dos cintas entrelazadas que a simple vista parecen dos bandas de Möbius. Recorriéndolas con un lápiz, comprobar que una de las cintas es una banda de Möbius, igual de larga y un tercio de ancha, pues sólo tiene una cara y uno de los extremos se ha girado 180° , mientras que la otra cinta es un cilindro, el doble de largo y un tercio de ancho, pues tiene dos caras y uno de los extremos se ha girado un múltiplo par de 180° (figura 6.27).

Cuestión

¿Qué obtendríamos si una vez realizado el corte por la mitad de la banda de Möbius volvemos a cortar por la mitad de la cinta? ¿Seguiríamos obteniendo un cilindro?

Actividad 2

Experimentar con la banda de Möbius y la botella de Klein usando cremalleras.



Figura 6.28. Captura de pantalla del video en YouTube *Topology with zippers*.

Materiales

- Cinco cremalleras de distintos colores que midan medio metro cada una, para facilitar su manipulación.
- Velcro.
- Hilo.
- Aguja de coser.

Manipulaciones

- Coser las cremalleras una al lado de otra.
- Colocar el velcro en los extremos de cada una de las cremalleras.
- Visionar el video disponible en YouTube *Topology with zippers* [https://www.youtube.com/watch?v=fSZg_ywTDb02] (figura 6.29) y realizar los experimentos que en ella se muestran:
 - Cortar una banda de Möbius por la mitad.
 - Cortar una banda de Möbius formada por varias cremalleras.
 - Hacer una botella de Klein con un cilindro.
 - Hacer una botella de Klein con una banda de Möbius.
 - Descomponer una botella de Klein en dos bandas de Möbius.

² Autor: José L. Rodríguez Blancas.



Figura 6.29. Código QR del video en YouTube *Topology with zippers*.

Actividad 3

Elaborar rosquillas con diversas formas topológicas: toro, doble toro, nudos, enlaces de Hopf (dos rosquillas enlazadas), y otras.

Ingredientes (por cada huevo)

- 1 huevo
- 2 cucharadas de aceite
- 2 cucharadas de anís
- 2 cucharadas de leche
- 2 cucharadas de azúcar
- Raspadura de limón
- 1 cucharita de levadura (o gaseosa)
- 200 g de harina (o la que admita)

Manipulaciones

- Visionar el video disponible en YouTube *Rosquillas La Pascualilla* [<https://topologia.wordpress.com/2014/08/20/rosquillas-topologicas/>³] (figura 6.31), que explica paso a paso la elaboración de la masa y de las clásicas rosquillas con forma de toro.
- Utilizando la misma receta, intentar hacer algunas rosquillas con formas topológicas diversas: doble toro, triple toro, nudos, enlace de Hopf (dos rosquillas enlazadas), anillos de Borromeo, y otras.

³ Autor: José L. Rodríguez Blancas.



Figura 6.30. Rosquillas topológicas de José Luis Rodríguez Blancas. Sobre la elaboración de la masa véase el video en YouTube *Rosquillas La Pascualilla*.



Figura 6.31. Código QR del video en YouTube *Rosquillas La Pascualilla*.

Actividad 4

Construir una botella de Klein poliédrica.

Materiales

Papel, cartulina, acetato o goma eva.

Manipulaciones

Trasladar las plantillas de la figura 6.32 al material elegido rescalándolas según el tamaño que se desee, recortarlas, construir los correspondientes bloques y ensamblarlos para formar la botella completa (en la figura 6.33 se muestra un posible resultado).

Actividad 5

Esta actividad consiste en construir un rompecabezas topológico. Se trata de una estructura compuesta por dos piezas de alambre entrelazadas, que el jugador debe separar sin hacer deformaciones ni cortes.

Materiales

Alambre y alicates.

Manipulaciones

Con ayuda de los alicates, formar con el alambre un corazón y un arco enlazados como se muestra en la figura 6.34.

Enigmas

- Separar el corazón del arco.
- Enlazar el corazón con el arco.

Actividad 6

Construir colaborativamente un mural con la cuarta iteración de la alfombra de Sierpiński.

Materiales

- 64 niños y niñas.
- 4096 pegatinas, la mitad (2048) moradas y la otra mitad, verdes.
- 32 fotocopias de la plantilla de tipo M (con esquinas moradas, figura 6.35).

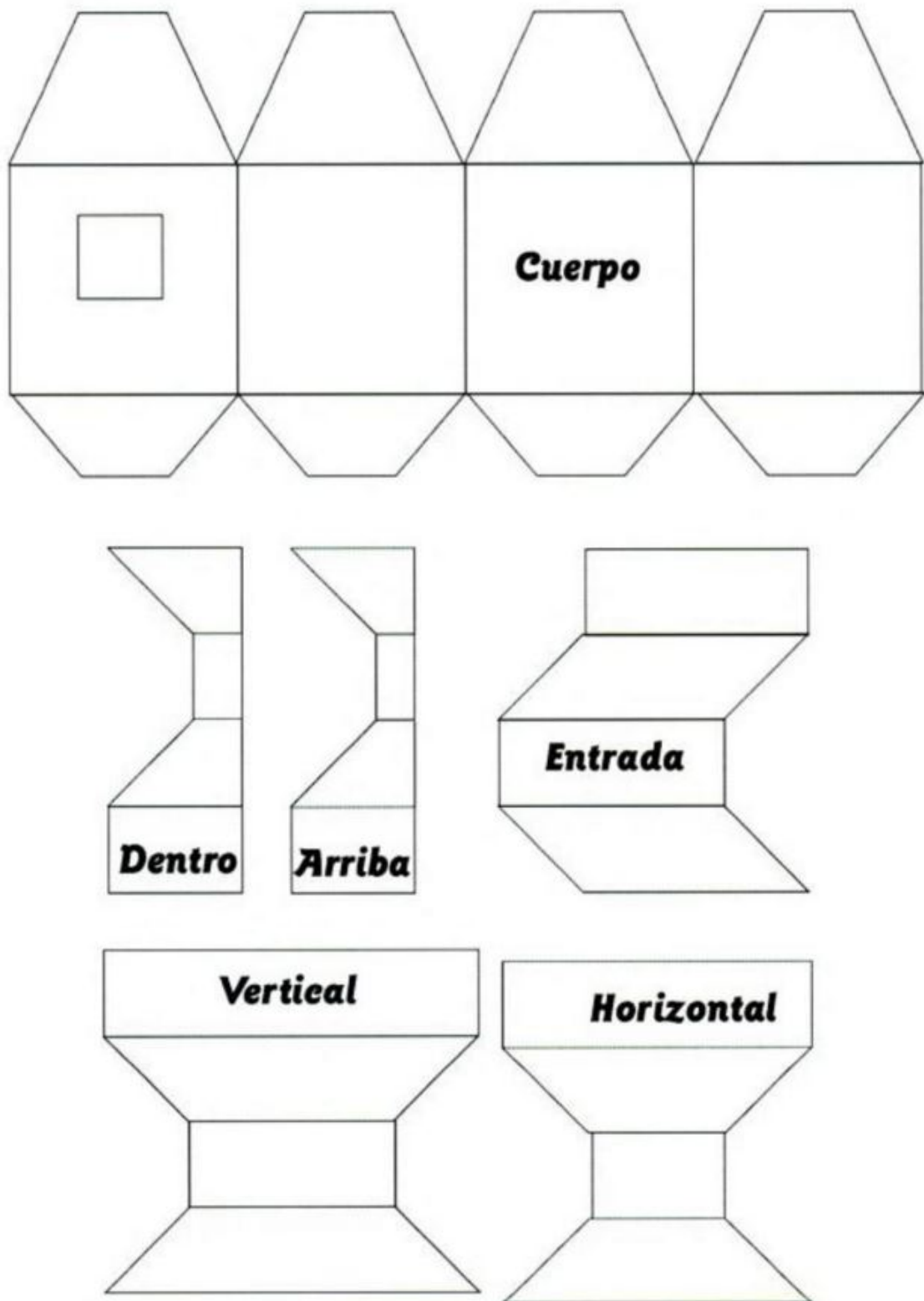


Figura 6.32. Plantillas para construir la botella de Klein poliédrica.



Figura 6.33. Botella de Klein poliédrica en acetato transparente.



Figura 6.34. Enigma del corazón atrapado.

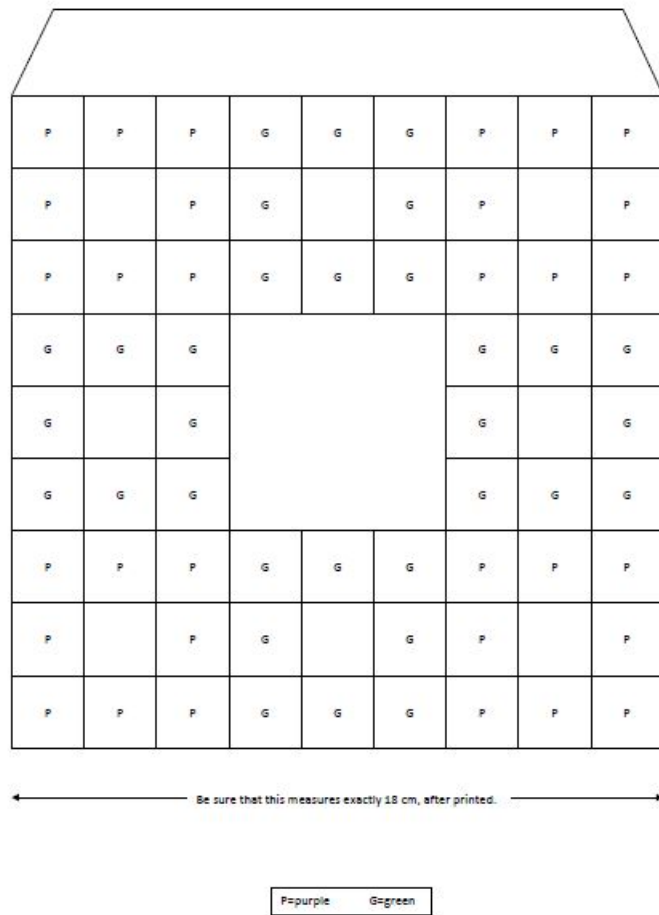


Figura 6.35. Plantilla tipo *M*.

- 32 fotocopias de la plantilla de tipo *V* (con esquinas verdes, figura 6.36).

Manipulaciones

- Entregar a cada niño/a sólo una de las plantillas fotocopias junto con 64 pegatinas (32 moradas y 32 verdes). Una vez que las ha colocado, recortar la hoja manteniendo la pestaña superior.
- Formar 8 grupos de 8 niños cada uno y montar su correspondiente tercera iteración. Deben agruparse 4 hojas con esquinas moradas y otras 4 con esquinas verdes sin juntar cuadrados del mismo color. Es necesario que estén correctamente pegadas para que la figura final no salga descuadrada (figura 6.37).
- Montar las 8 copias de la tercera iteración para obtener la cuarta iteración de la alfombra de Sierpiński. El montaje se puede hacer sobre el suelo, o sobre una pared blanca (figura 6.38).

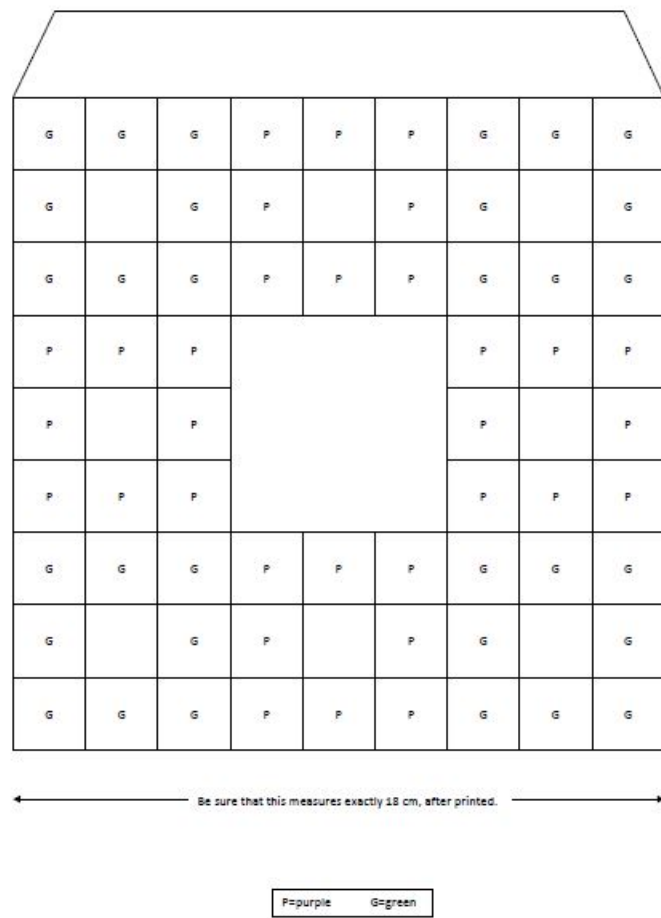


Figura 6.36. Plantilla tipo V.

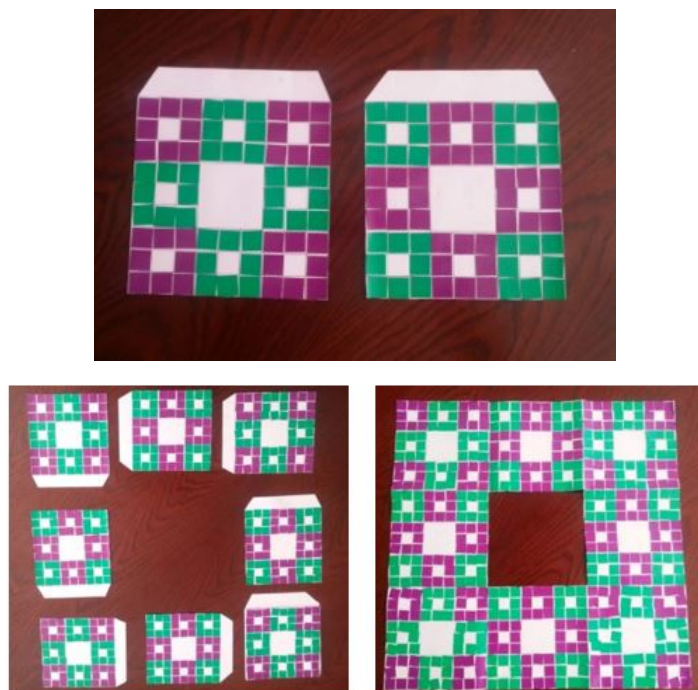


Figura 6.37. Montaje de la tercera iteración de la alfombra de Sierpiński.



Figura 6.38. Cuarta iteración de la alfombra de Sierpiński.

Referencias

- [1] Definición.de: *Fractal*. [Disponible en <http://definicion.de/fractal/>].
- [2] Freiburger M. (06/01/2015): Introducing the Klein bottle, *Plus Magazine*. [Disponible en <https://plus.maths.org/content/introducing-klein-bottle>].
- [3] Inquietudes de un ciudadano de a pie (01/2012): *Paradojas matemáticas, el copo de nieve de Koch*. [Disponible en <http://odracirnumira.blogspot.com.es/2012/01/paradojas-matematicas-el-copo-de-nuevo.html>].
- [4] Luque B., Agea A.: *Fractales en la red*. [Disponible en <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/index.html>].
- [5] Macho Stadler M. (2002): ¿Qué es la Topología?, *Sigma* **20**, 63–67. [Disponible en http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_20/7_Que_es_Topologia.pdf].
- [6] Macho Stadler M. (2006): Las sorprendentes aplicaciones de la banda de Möbius, *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y en la Arquitectura*, Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 29–61. [Disponible en <http://www.ehu.es/~mtwmastm/Arquitectura2008.pdf>].
- [7] Macho Stadler M. (2006): La paradoja en la ciencia y el arte I, *Matematicalia* **2**, no. 2. [Disponible en http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=196&Itemid=143].
- [8] Macho Stadler M. (09/12/2015): La botella de Klein: geometría «palindrómica», *Cuaderno de Cultura Científica*. [Disponible en <http://culturacientifica.com/2015/12/09/la-botella-de-klein-geometria-palindromica/>].
- [9] Macho Stadler M. (13/02/2015): «La botella de Klein. Topología de la novela», de Enrique Anderson Imbert, *DivulgaMAT*. [Disponible en http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=16405:93-febrero-2015-qla-botella-de-klein-topologia-de-la-novelaq-de-enrique-anderson-imberty-matemcas&catid=70:literatura-y-matemcas&directory=67].
- [10] Montesdeoca Pérez P. (2005): *Longitud y área de curvas fractales. Dimensión fractal*. [Disponible en www.dma.ulpgc.es/profesores/personal/aph/ficheros/resolver/ficheros/fractales.pdf].
- [11] Polthier K. (01/09/2003): Imaging maths - Inside the Klein bottle, *Plus Magazine*. [Disponible en <https://plus.maths.org/content/imaging-maths-inside-klein-bottle>].

-
- [12] Reyes M. (05/2006): Fractales. Conjuntos fractales. Dimensión fractal, *Estalmat-Real Academia de Ciencias*. [Disponible en https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/MiguelReyes/Fractales.pdf].
- [13] Reyes M. (2009): Fractales. [Disponible en <https://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/ReunionMadrid2009/fractales.pdf>].
- [14] Rodríguez Blancas J.L. (20/10/2011): *Juegos Topológicos: Topología con cremalleras*. [Disponible en <https://topologia.wordpress.com/2011/10/20/topologia-con-cremalleras/>].
- [15] Rodríguez Blancas J.L. (03/06/2014): *Juegos Topológicos: Proyecto alfombra de Sierpiński*. [Disponible en <https://topologia.wordpress.com/2014/06/03/proyecto-alfombra-de-Sierpinski/>].
- [16] Rodríguez Blancas J.L. (20/08/2014): *Juegos Topológicos: Rosquillas topológicas*. [Disponible en <https://topologia.wordpress.com/2014/08/20/rosquillas-topologicas/>].
- [17] Thibaut Tadeo E. (2008): Topología para 2º de ESO con la técnica del puzzle de Aronson, *Suma* **58**, 41–48. [Disponible en <http://revistasuma.es/IMG/pdf/58/041-048.pdf>].

Apéndice 1: Catálogo de viñetas de *Matematicalia.net*



Figura A.1. «Sin palabras...». *Matematicalia*, vol. 2, núm. 2 (abril 2006).



Figura A.2. «Las medallas Fields». *Matematicalia*, vol. 2, núm. 3 (junio 2006).



Figura A.3. «Serpiente de verano». *Matemática*, vol. 2, núm. 4 (octubre 2006).



Figura A.4. «Sea V un villancico...». *Matemática*, vol. 2, núm. 5 (diciembre 2006).



Figura A.5. «Una de elecciones». *Matemática*, vol. 3, núm. 1 (febrero 2007).

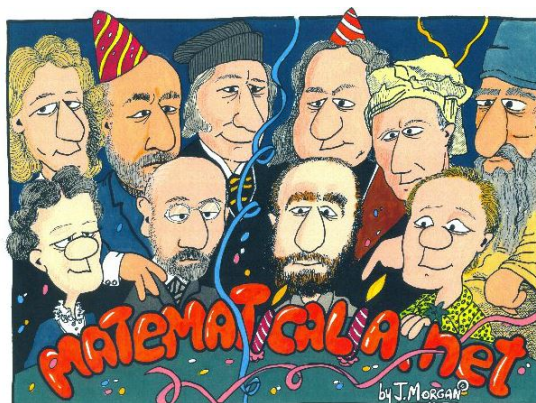


Figura A.6. «¡Feliz Cumpleaños!». *Matematicalia*, vol. 3, núm. 2 (abril 2007).

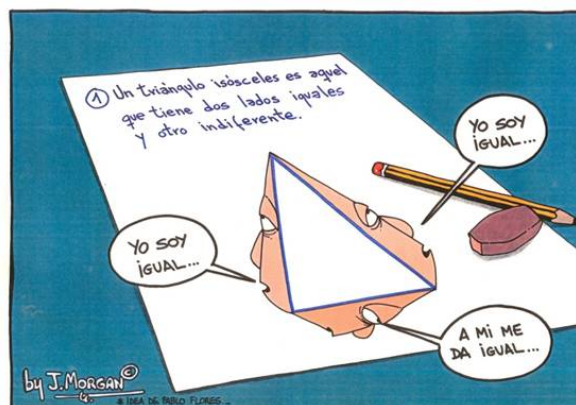


Figura A.7. «Lección de trigonometría». *Matematicalia*, vol. 3, núm. 4-5 (octubre-diciembre 2007).



Figura A.8. «Se reserva el derecho de admisión». *Matematicalia*, vol. 4, núm. 1 (febrero 2008).



Figura A.9. «El niño anumérico». *Matemática*, vol. 4, núm. 2 (abril 2008).



Figura A.10. «Un nuevo sistema de numeración». *Matemática*, vol. 4, núm. 3 (junio 2008).



Figura A.11. «Sentido práctico». *Matemática*, vol. 4, núm. 4 (octubre 2008).



Figura A.12. «Todo es relativo». *Matematicalia*, vol. 4, núm. 5 (diciembre 2008).



Figura A.13. «A vueltas con el cero». *Matematicalia*, vol. 5, núm. 1 (febrero 2009).



Figura A.14. «¿Sabes aquel que dice...?». *Matematicalia*, vol. 5, núm. 2 (abril 2009).



Figura A.15. «Terapias alternativas». *Matemática*, vol. 5, núm. 3 (junio 2009).



Figura A.16. «¿Qué pasa cuando x tiende a infinito?». *Matemática*, vol. 5, núm. 4 (octubre 2009).

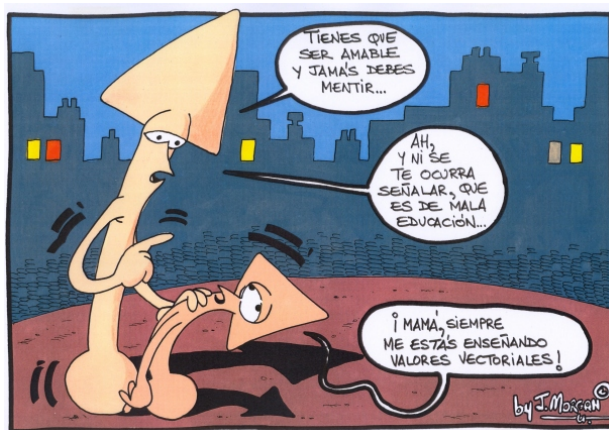


Figura A.17. «Educación en valores (vectoriales)». *Matemática*, vol. 5, núm. 5 (diciembre 2009).



Figura A.18. «El problema...¡son los datos!». *Matematicalia*, vol. 6, núm. 1 (marzo 2010).



Figura A.19. «Lógica infantil». *Matematicalia*, vol. 6, núm. 2 (junio 2010).



Figura A.20. «En el medio está la virtud». *Matematicalia*, vol. 6, núm. 3 (septiembre 2010).



Figura A.21. «El poder de los números negativos». *Matemática*, vol. 6, núm. 4 (diciembre 2010).



Figura A.22. «No sin mi calculadora». *Matemática*, vol. 7, núm. 1 (marzo 2011).



Figura A.23. «Magnitudes». *Matemática*, vol. 7, núm. 2 (junio 2011).



Figura A.24. «Pitágoras». *Matematicalia*, vol. 7, núm. 3 (septiembre 2011).



Figura A.25. «Los orígenes del cálculo infinitesimal». *Matematicalia*, vol. 7, núm. 4 (diciembre 2011).

Apéndice 2: Póster

Humor for Mathematics Outreach

Patricia A. Suárez Hernández

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

June 2016

Introduction

Humor combines a certain playful potential with the cognition of the reader who interprets the message to be transmitted. Humorous cartoons are one of the most used resources for the dissemination and teaching of Mathematics in a more enjoyable and entertaining way. Five nice cartoons from the *Humor* section of the electronic journal *Matemática.net* have been chosen for this purpose. For each one, a factsheet and a bunch of (online-ready) activities have been designed in order to facilitate the understanding of the mathematical concepts involved.

Mathematical Analysis: Numerical methods



Numerical integration is an essential tool to obtain approximate values of definite integrals that cannot be calculated through the Barrow Rule, because the integrand either does not admit an elementary primitive or is not known explicitly. The geometric interpretation of the definite integral as an area leads to two approximation formulas, at least. Let $f(x)$ be defined in $[a, b]$ and let $\mathcal{P}_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b\}$ be a partition of $[a, b]$ in $n + 1$ equally spaced nodes $x_k = x_0 + \frac{k}{n}(b - a)$ ($0 \leq k \leq n$).

- **Trapezoidal Rule:** $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]$.
- **Simpson's Rule:** $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$, if n is even.

Can you think of any application of such approaches to the definite integral?

Statistics: Mean, Median, Mode



The position measurements are numbers we get when we analyze a data set and only the position of these parameters within the distribution is considered.

- The **mean** is the average of all the observations.
- The **median** is the central position of the data.
- The **mode** is the most frequent value.

Some statistical statements can be misleading because of the usual confusion between these three measures. Do you think that the average annual salary of a worker in Spain are 20,390 euros?

Geometry: The Pythagorean Theorem



The Pythagorean theorem is a well-known one. For practical reasons, almost all ancient civilizations were interested in the relationship between the sides of a right triangle and hence were aware of some version of this theorem: "The area of the square on the hypotenuse of a right triangle equals the sum of the areas of the squares built on the legs". In symbols: if the triangle has legs of lengths a and b and the measure of its hypotenuse is c , then $a^2 + b^2 = c^2$.

Do you know how many proofs of the Pythagorean theorem can be found, at least, in the literature?

History: The Fields Medal



The Fields Medal is a distinction awarded since 1962 by the International Mathematical Union (IMU) at every International Congress of Mathematicians (ICM), which are held every four years. One of the inscriptions on the medal is "TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI", which means "Rise above oneself and grasp the world".

There have been no Spanish recipients as yet, although one of the 27 ICM's was held in Spain in 2006. Overall, 52 mathematicians have been awarded the Fields Medal up to date.

Do you know how many women have won this medal and what their mathematical achievements are?

Topology: Cups and Donuts



Topology is probably the youngest of the classical branches of mathematics. It studies the properties of bodies that remain invariant under deformations such as stretching, dilation, turn, etc., provided that no cutting, pasting or tear are involved in the process. Some well known topological objects are:

- The **Moebius Band**: a non-orientable surface with a single edge and a single face.
- The **Klein Bottle**: a non-orientable surface having neither inside nor outside and lacking edges.
- **Knots**: continuous, closed curves without double points.
- **Fractals**: structures that are repeated at different scales, such as the Koch Snowflake and the Sierpinski Carpet.

Do you think you could (topologically) distinguish between a cup and a donut?

Main Bibliography

- P. Flores: *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Ariel, 2003.
- P. Flores, A. Moreno: *Matemáticamente competentes... para reír*. Graó, 2011.
- J.A. Paulos: *Mathematics and humor*. The University of Chicago Press, 1980.
- A. Vinik et al.: *Mathematics and humor*. National Council of Teachers of Mathematics, 1979.

Índice de figuras

1.1 Viñeta 1.	2
1.2 Viñeta 2.	2
1.3 Viñeta 3.	2
1.4 Viñeta 4.	3
1.5 Viñeta 5.	3
1.6 Viñeta 6.	5
1.7 Viñeta 7.	6
1.8 Viñeta 8.	8
1.9 Viñeta 9.	9
1.10 Viñeta 10.	10
1.11 Viñeta 11.	10
1.12 Viñeta 12.	11
1.13 Viñeta 13.	11
1.14 Viñeta 14.	12
1.15 Viñeta 15.	12
1.16 Viñeta 16.	12
1.17 Viñeta 17.	12
1.18 Viñeta 18.	13
2.1 «Terapias alternativas». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 3 (junio 2009).	15
2.2 Integral de Riemann: aproximación del área bajo la curva por rectángulos.	16
2.3 Regla trapezoidal.	18
2.4 Regla de Simpson.	19
2.5 Datos principales del problema en Excel.	24
2.6 Captura de la hoja Excel con los valores de los nodos equiespaciados y la evaluación en ellos de la función T	25
2.7 Temperatura media usando la regla trapezoidal y la regla de Simpson en Excel.	26
3.1 «En el medio está la virtud». <i>Matematicalia</i> , vol. 6, núm. 3 (septiembre 2010).	29
3.2 Curva acumulada o de distribución.	35
3.3 Curva de distribución en el intervalo i -ésimo $(e_{i-1}, e_i]$	36
3.4 El engañoso término medio.	37
3.5 Diferencias de salarios por comunidad autónoma.	39
3.6 Una gráfica desproporcionada.	40
3.7 Actividad 1: columnas de datos introducidos en Excel.	41

3.8	Actividad 1: tabla de distribución de frecuencias en Excel.	42
3.9	Actividad 1: media, mediana y moda en Excel.	43
3.10	Actividad 2: columnas de datos introducidos en Excel.	44
3.11	Actividad 2: tabla de distribución de frecuencias en Excel.	45
3.12	Actividad 2: media, mediana y moda en Excel.	45
4.1	«Pitágoras». <i>Matematicalia</i> , vol. 7, núm. 3 (septiembre 2011).	47
4.2	Escultura de Pitágoras (s. V a.C.).	48
4.3	Teorema de Pitágoras.	50
4.4	Tablilla Yale (1600 a.C.).	51
4.5	Tablilla Plimpton (1800 a.C.).	51
4.6	Triángulo de Isis.	53
4.7	El Diagrama de la Hipotenusa del tratado chino Chou-Pei Suan-Ching.	54
4.8	Demostración del teorema de Pitágoras.	55
4.9	Demostración de Platón del teorema de Pitágoras.	57
4.10	Los paralelogramos en la demostración de Euclides.	57
4.11	La demostración del teorema de Pitágoras en <i>Los Elementos</i> de Euclides.	58
4.12	El recíproco del teorema de Pitágoras.	59
4.13	Demostración de Pappus.	60
4.14	Demostración de Thâbit Ibn Qurra.	61
4.15	Demostración de Bhaskara.	61
4.16	Demostración de Leonardo da Vinci.	62
4.17	Demostración de Vieta.	62
4.18	Demostración de Anaricio.	63
4.19	Demostración de Perigal.	63
4.20	El mayor repertorio de demostraciones del teorema de Pitágoras.	64
4.21	Demostración de Anaricio, 1. El triángulo utilizado es rectángulo. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es la longitud de la hipotenusa al cuadrado.	65
4.22	Demostración de Anaricio, 2. El cuadrado construido sobre la hipotenusa se descompone en cinco partes.	65
4.23	Demostración de Anaricio, 3. Separando los cinco trozos y reordenándolos formamos dos cuadrados.	65
4.24	Demostración de Anaricio, 4. El área de cada cuadrado es igual al cuadrado de la longitud del cateto sobre el que se apoya. Se concluye que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.	66
4.25	Código QR del video en YouTube <i>La demostración del teorema de Pitágoras por Anaricio</i> . En el video se explica brevemente el teorema y su contexto histórico, para finalizar con la demostración de Anaricio.	66
4.26	Actividad 4a).	67
4.27	Actividad 4b).	68
4.28	Captura de pantalla de la actividad en GeoGebraTube <i>El teorema de Pitágoras con GeoGebra</i>	69
4.29	Código QR de la actividad en GeoGebraTube <i>El teorema de Pitágoras con GeoGebra</i>	69
5.1	«La medalla Fields». <i>Matematicalia</i> , vol. 2, núm. 3 (junio 2006).	71
5.2	La Medalla Fields.	74
5.3	Maryam Mirzakhani recibe la medalla Fields de manos de la presidenta surcoreana, Park Geun-Hye, el 13 de agosto de 2014.	80
5.4	Maryam Mirzakhani.	81

5.5	Manuscritos de Maryam Mirzakhani.	81
5.6	Postulado 5.	83
5.7	Ejemplo de superficie de Riemann con algunas geodésicas.	84
5.8	Esfera con un triángulo cuyos ángulos suman más de 180°	85
5.9	Tractriz (i) y tractoide (d).	86
5.10	Pseudoesfera con un triángulo cuyos ángulos suman menos de 180° . Compárese con la figura 5.8.	86
5.11	Modelo de Klein-Beltrami.	87
5.12	Disco de Klein-Beltrami con mosaico triheptagonal.	88
5.13	Construcciones de la geometría hiperbólica en el disco de Poincaré, 1. Una recta (en morado) tiene una familia de paralelas (en gris) por un punto exterior dado. Entre las paralelas hay dos que se acercan asintóticamente a la recta. Además, los ángulos internos de un triángulo (en rojo) suman menos de 180°	88
5.14	Construcciones de la geometría hiperbólica en el disco de Poincaré, 2. En esta geometría, dos triángulos son congruentes si sus ángulos son congruentes. Como los triángulos de esta figura tienen dos ángulos de 45° y uno de 60° , todos son congruentes y por lo tanto sus lados correspondientes y sus áreas son iguales.	89
5.15	Disco de Poincaré con mosaico triheptagonal truncado.	89
5.16	Rayos paralelos en el modelo de Poincaré del semiplano.	89
5.17	Captura de pantalla de la actividad online <i>Veinte galardonados con la medalla Fields</i>	91
5.18	Código QR de la actividad online <i>Veinte galardonados con la medalla Fields</i>	92
5.19	Captura de pantalla de la actividad en GeoGebraTube <i>Construcción de geodésicas en el disco de Poincaré</i>	93
5.20	Código QR de la actividad en GeoGebraTube <i>Construcción de geodésicas en el disco de Poincaré</i>	93
5.21	M.C. Escher, <i>Límite Circular I</i> (1958) con las geodésicas en rojo.	94
5.22	M.C. Escher, <i>Límite Circular II</i> (1959).	95
5.23	M.C. Escher, <i>Límite Circular IV - Heaven and Hell</i> (1960).	96
5.24	Teselación hiperbólica similar a la utilizada en <i>Límite Circular IV</i>	96
5.25	M.C. Escher, <i>Límite Circular III</i> (1959).	96
6.1	«¿Sabes aquel que dice...?». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 2 (abril 2009).	99
6.2	Superficies no equivalentes topológicamente.	100
6.3	Una taza transformándose en una rosquilla.	101
6.4	Möbius, la banda y Listing.	102
6.5	La orientabilidad de la banda de Möbius.	103
6.6	Cómo hacer una banda de Möbius y doblar su longitud.	104
6.7	La banda de Möbius en la obra de M.C. Escher (1898-1972).	105
6.8	La banda de Möbius en ingeniería (i) y autocaricatura de Jean Giraud, portada de su autobiografía <i>Mi doble y yo</i>	106
6.9	Möbius Climber Lands.	106
6.10	Bufanda de Möbius.	107
6.11	Construcción del toro.	107
6.12	Construcción de la botella de Klein.	108
6.13	A partir de dos bandas de Möbius se obtiene la botella de Klein.	109
6.14	Fotograma del video <i>The Klein Bottle</i> [https://www.youtube.com/watch?v=E8rifKlq5hc].	109
6.15	Botellas de Klein de LEGO y de origami creadas por Andrew Lipson y Robert Lang, respectivamente.	109
6.16	Botellas de Klein fabricadas por el físico Cliff Stoll, a la venta en <i>ACME Klein Bottles</i> [http://kleinbottle.com/].	110

6.17 Nudos de apariencia complicada.	110
6.18 Nudos con diferente número de cruce.	111
6.19 Clasificación de los nudos según el número de cruces.	112
6.20 El ADN.	112
6.21 Teselado del plano con la curva del dragón. [Fuente: Wikipedia, https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_del_dragón##/media/File:Full_tiling_dragon.svg].	115
6.22 Hasta la tercera iteración del copo de Koch.	116
6.23 Hasta la segunda iteración de la alfombra de Sierpiński.	118
6.24 Hasta la tercera iteración de la esponja de Menger.	118
6.25 Cortando un cilindro por la mitad.	119
6.26 Cortando una banda de Möbius por la mitad.	120
6.27 Cortando una banda de Möbius por su tercera parte.	120
6.28 Captura de pantalla del video en YouTube <i>Topology with zippers</i>	121
6.29 Código QR del video en YouTube <i>Topology with zippers</i>	122
6.30 Rosquillas topológicas de José Luis Rodríguez Blancas. Sobre la elaboración de la masa véase el video en YouTube <i>Rosquillas La Pascualilla</i>	123
6.31 Código QR del video en YouTube <i>Rosquillas La Pascualilla</i>	123
6.32 Plantillas para construir la botella de Klein poliédrica.	125
6.33 Botella de Klein poliédrica en acetato transparente.	126
6.34 Enigma del corazón atrapado.	126
6.35 Plantilla tipo M	127
6.36 Plantilla tipo V	128
6.37 Montaje de la tercera iteración de la alfombra de Sierpiński.	129
6.38 Cuarta iteración de la alfombra de Sierpiński.	129
A.1 «Sin palabras...». <i>Matematicalia</i> , vol. 2, núm. 2 (abril 2006).	133
A.2 «Las medallas Fields». <i>Matematicalia</i> , vol. 2, núm. 3 (junio 2006).	133
A.3 «Serpiente de verano». <i>Matematicalia</i> , vol. 2, núm. 4 (octubre 2006).	134
A.4 «Sea V un villancico...». <i>Matematicalia</i> , vol. 2, núm. 5 (diciembre 2006).	134
A.5 «Una de elecciones». <i>Matematicalia</i> , vol. 3, núm. 1 (febrero 2007).	134
A.6 «¡Feliz Cumpleaños!». <i>Matematicalia</i> , vol. 3, núm. 2 (abril 2007).	135
A.7 «Lección de trigonometría». <i>Matematicalia</i> , vol. 3, núm. 4-5 (octubre-diciembre 2007).	135
A.8 «Se reserva el derecho de admisión». <i>Matematicalia</i> , vol. 4, núm. 1 (febrero 2008).	135
A.9 «El niño anumérico». <i>Matematicalia</i> , vol. 4, núm. 2 (abril 2008).	136
A.10 «Un nuevo sistema de numeración». <i>Matematicalia</i> , vol. 4, núm. 3 (junio 2008).	136
A.11 «Sentido práctico». <i>Matematicalia</i> , vol. 4, núm. 4 (octubre 2008).	136
A.12 «Todo es relativo». <i>Matematicalia</i> , vol. 4, núm. 5 (diciembre 2008).	137
A.13 «A vueltas con el cero». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 1 (febrero 2009).	137
A.14 «¿Sabes aquel que dice...?». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 2 (abril 2009).	137
A.15 «Terapias alternativas». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 3 (junio 2009).	138
A.16 «¿Qué pasa cuando x tiende a infinito?». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 4 (octubre 2009).	138
A.17 «Educación en valores (vectoriales)». <i>Matematicalia</i> , vol. 5, núm. 5 (diciembre 2009).	138
A.18 «El problema...;son los datos!». <i>Matematicalia</i> , vol. 6, núm. 1 (marzo 2010).	139

A.19 «Lógica infantil». <i>Matematicalia</i> , vol. 6, núm. 2 (junio 2010).	139
A.20 «En el medio está la virtud». <i>Matematicalia</i> , vol. 6, núm. 3 (septiembre 2010).	139
A.21 «El poder de los números negativos». <i>Matematicalia</i> , vol. 6, núm. 4 (diciembre 2010).	140
A.22 «No sin mi calculadora». <i>Matematicalia</i> , vol. 7, núm. 1 (marzo 2011).	140
A.23 «Magnitudes». <i>Matematicalia</i> , vol. 7, núm. 2 (junio 2011).	140
A.24 «Pitágoras». <i>Matematicalia</i> , vol. 7, núm. 3 (septiembre 2011).	141
A.25 «Los orígenes del cálculo infinitesimal». <i>Matematicalia</i> , vol. 7, núm. 4 (diciembre 2011).	141

Índice de tablas

4.1	Tabla Plimpton.	52
4.2	Terna pitagórica mesopotámica.	53
4.3	Terna pitagórica india.	54
4.4	Terna pitagórica de Pitágoras.	56
4.5	Terna pitagórica de Platón.	57
4.6	Ternas pitagóricas.	67
4.7	El teorema de Pitágoras con GeoGebra.	68
5.1	Científicos galardonados con la Medalla Fields.	75
5.2	Años y países donde se han celebrado los ICM's.	79

