Hipercuádricas en el espacio afín real de dimensión 4

Hyperquadrics in the four-dimensional real affine space

Iván Trujillo Trujillo

Trabajo de Fin de Grado

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 16 de junio de 2016

Dr. D. **Francisco Martín Cabrera**, Profesor Titular de Universidad, adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e I. O. de la Universidad de La Laguna y con N.I.F. 42003509N.

C E R T I F I C A:

Que la presente memoria titulada

"*Hipercuádricas en el espacio afín real de dimensión 4*"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Iván Trujillo Trujillo**, con N.I.F. 78641672A.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 16 de junio de 2016

Francisco Martín Cabrera

Agradecimientos

A mi familia, por su incesante apoyo y cariño.
A mi tutor, Francisco Martín, por todas las horas que ha pasado ayudándome y por su constante seguimiento.
A mis amigos, con ellos la carrera ha sido más llevadera.
A Claudia, porque es el pilar que sustenta mi vida.

Resumen

Estudiamos las variedades cuadráticas o hipercuádricas en dimensión 4. Hemos considerado esta dimensión porque al realizar intersecciones de hiperplanos con hipercuádricas se obtienen cuádricas, objetos que percibimos intuitivamente. Ello nos permite, aunque estemos en dimensión 4, visualizar de alguna manera estas hipercuádricas. Los métodos aquí desarrollados, fuertemente basados en el álgebra lineal, son aplicables en cualquier dimensión. Los hemos particularizado a dimensión 4 por las razones antes dichas. El estudio no se limita al ámbito proyectivo, sino que además hemos considerados hipercuádricas inmersas en el espacio afín real de dimensión 4. Así, la clasificación afín es mostrada. Presentamos nombres para las distintas hipercuádricas, sugeridos por la naturaleza y propiedades de cada una de ellas en los ambientes proyectivo y afín. Se estudia, para cada tipo de hipercuádrica, su intersección con un hiperplano cualquiera, obteniéndose las secciones cuádricas de ella. Finalmente, hemos también descrito las distintas hipercuádricas tangentes desde puntos P cualesquiera a una hipercuádrica dada. Ello nos suministra conocimiento sobre la posición relativa de P respecto de ella.

Abstract

We study quadratic manifolds or hyperquadrics in four-dimensional spaces. We have considered this dimension because when we do intersections of hyperplanes with hyperquadrics we obtain quadrics, objects which are intuitively perceived. This allows us, although in dimension four, to visualize these hyperquadrics in some way. The methods here developed, strongly based on linear algebra, can be applied in any dimension. We have particularized them to dimension four because the reasons above mentioned. This study is not limited just to the projective ambient, we have also considered hyperquadrics as included in the affine space. Thus the affine classification for them is given. Names for the each type of hyperquadric are presented, they are suggested by the nature and properties of each one of them in the projective and affine ambients. For each type of hyperquadric, it is studied its intersection with an any arbitrary hyperplane. Then it is obtained the possible quadric sections for the type considered. Finally, we also describe tangent hyperquadrics from arbitrary points P to a given hyperquadric. Such tangent hyperquadrics provide us information about the relative position of the point P with respect to the hyperquadric.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las variedades cuadráticas son objetos geométricos que han despertado gran interés y fascinación a lo largo de la historia. Ya en la Antigua Grecia, el estudio de las cónicas y de las cuádricas fue objeto de intensa atención. Mención especial en este sentido merece Apolonio (262-190 a. C.), su obra *Secciones Cónicas* es tan original y completa que se considera, tras los *Elementos* de Euclides, la más importante de la matemática griega. Fue el primero en basar la teoría de las tres cónicas en secciones de un cono circular, recto u oblicuo y en reconocer las dos ramas de la hipérbola. Con la llegada del Renacimiento, los artistas, al estudiar y desarrollar técnicas que reflejen realismo en sus obras, se vieron necesitados de usar los principios de proyección y sección de la geometría proyectiva. Esto, la leyes de Kepler(1571-1630) sobre las órbitas de los planetas y las traducciones de la obra de Apolonio dio lugar a un creciente interés por la geometría proyectiva y, en particular, por las cónicas y cuádricas, reflejado en las obras de Desargues (1591-1661), Pascal (1623-1662) y La Hire (1640-1718). Ellos, aparte de demostrar nuevos resultados, desarrollaron métodos de prueba y principios generales basados en herramientas genuinamente propias de la geometría proyectiva. Durante la segunda mitad del siglo XVII y a lo largo del siglo XVIII, por influencia de la introducción de coordenadas por Descartes y el extraordinario desarrollo del análisis matemático, los métodos analíticos fueron predominantes en el estudio de la geometría. Dichos métodos consisten en estudiar propiedades geométricas mediante la aplicación del cálculo, del álgebra y el uso de coordenadas. A principios del siglo XIX, hubo un movimiento de reacción a todo esto, matemáticos como Carnot, Brianchon, Poncelet, Steiner, etc., se mostraron firmemente partidarios de retomar los métodos sintéticos (desarrollar la geometría a partir de axiomas inicialmente establecidos), desechando el uso de coordenadas. Esto dio origen a una gran controversia. Otros matemáticos como Möbius y PlücKer siguieron reivindicando los métodos analíticos. La llamada geometría sintética es de indudable atractivo, fomenta la intuición de manera notable y, además, las aportaciones de sus partidarios han sido más que relevantes: el principio de dualidad establecido por Poncelet, los resultados de Steiner sobre las cónicas y las cuádricas, etc. Por otro lado, Möbius introdujo las coordenadas baricéntricas y Plúcker, las coordenadas homogéneas. Estas últimas han resultado ampliamente utilizadas. Además, en la segunda mitad del siglo XIX, entra en escena el álgebra lineal, desarrollada fundamentalmente por matemáticos británicos: Hamilton, Cayley, Sylvester, etc. Esta rama de las matemáticas es de enorme utilidad en muchos campos, entre ellos la geometría, y su uso está más acorde con los métodos analíticos. La dificultad que presenta la geometría sintética es que a medida que se incrementa la dimensión, se debe aumentar el número de axiomas inicialmente fijados. Esto hace que los métodos sintéticos no sean adecuados para la geometría considerada en espacios de dimensiones superiores. Actualmente, en el desarrollo de técnicas geométricas para investigar en visión por ordenador, el uso de coordenadas resulta imprescindible. En esta memoria estudiamos las variedades cuadráticas o hipercuádricas en dimensión 4. Hemos considerado esta dimensión porque al realizar intersecciones de hiperplanos con hipercuádricas se obtienen cuádricas, objetos que percibimos intuitivamente. Ello nos permite, aunque estemos en dimensión 4, visualizar de alguna manera estas hipercuádricas. Hemos de decir que los métodos aquí desarrollados, fuertemente basados en el álgebra lineal, son aplicables en cualquier dimensión. Los hemos particularizado a dimensión 4 por las razones antes dichas. El estudio no se limita al ámbito proyectivo, sino que además se consideran hipercuádricas inmersas en el espacio afín de dimensión 4. Así, uno de nuestros principales objetivos es construir la clasificación afín dada en la tabla 4.1. Es sabido que esta clasificación es una especialización de la clasificación proyectiva. Hemos asignado nombres a las distintas hipercuádricas, sugeridos por la naturaleza y propiedades de cada una en los ámbitos proyectivo y afín. Como antes hemos mencionado, para cada tipo de hipercuádrica, se estudia su intersección con un hiperplano cualquiera obteniéndose las distintas secciones cuádricas de ella. Esto en realidad es extender, a dimensión 4, el hecho descubierto por Apolonio con las secciones de un cono. Finalmente, hemos descrito también las distintas hipercuádricas tangentes desde puntos P cualesquiera a una hipercuádrica dada. Ello, además de añadir información sobre la naturaleza de la hipercuádrica considerada, nos suministra conocimiento sobre la posición relativa de P respecto de la hipercuádrica. Finalmente nos resta indicar que hipercuádricas en dimensiones superiores se identifican con espacios de objetos geométricos más familiares: la cuádrica de Lie en dimensión 4 se indetifica con el espacio de las circunferencias orientadas del plano, la cuádrica de Klein en dimensión 5 se identifica con el espacio de las rectas del espacio proyectivo tridimensional, etc. (ver [4], [11]).

Seguidamente se describe como está estructurada esta memoria. En el capítulo 1, se introducen nociones y propiedades relativas a variedades cuadráticas en el contexto de la geometría proyectiva. Se asume que el lector ya dispone de conocimientos básicos de geometría proyectiva y de álgebra lineal. No se muestran demostraciones explícitas de algunos resultados aquí relacionados por ser considerados suficientemente conocidos. Exponemos con detalle sólo aquellas que prueban resultados no muy conocidos y que son cruciales en el contexto de la presente memoria. Por ejemplo, la proposición 2.2.1 que trata sobre la dimensión de un subespacio proyectivo contenido en una variedad cuadrática. Aunque se puede consultar en tal sentido en [3], aquí hemos incluido algunos hechos adicionales. En el estudio de intersecciones de hiperplanos con hipercuádricas es aplicada la proposición 2.4.1. En la construcción de hipercuádricas tangentes, información sobre su signatura se obtiene usando la proposición 2.5.1. La posición relativa de un punto con respecto a una hipercuádrica se describe mediante la proposición 2.5.3. En esta memoria, para estas proposiciones que se han mencionado, se incluyen pruebas detalladas.

En el capítulo 2, se recuerdan aquellos elementos afines más notables relativos a variedades cuadráticas y los principios que rigen su clasificación desde el punto de vista afín. Asimismo, con el objeto de que el presente texto sea lo más autocontenido posible, se describe brevemente la relación entre espacio afín y espacio proyectivo. También, porque van a ser continuamente referidas en el siguiente capítulo, se muestra la tabla 3.1 conteniendo la clasificación afín de las cuádricas.

En el capítulo 3, se estudian las hipercuádricas en el espacio afín de dimensión 4. Así, se construye la clasificación afín de dichas hipercuádricas y se estudian sus intersecciones con hiperplanos. Relativo a las hipercuádricas tangentes, indicamos que aquí sólo las hemos descrito para ciertos tipos de hipercuádricas. Se ha elegido una muestra de tipos que resulte ilustrativa y sirva de base para los otros. Un estudio exhaustivo para todos los tipos resultaría muy extenso, fuera del alcance de este trabajo.

Finalmente, se ha incluido un apéndice donde se recuerda lo relativo a formas cuadráticas más utilizado a lo largo del texto.

En relación a las referencias bibliográficas, queremos comentar que no son muy numerosas las que tratan sobre variedades cuadráticas en dimensión n. Además, la mayoría de ellas no son de reciente publicación. Es por ello que la publicación en 2014 de la magnífica obra de Casas-Alvero ([3]), cuyo contenido es muy completo, ha rellenado un hueco importante en la bibliografía. Para detalles sobre los comentarios históricos hechos aquí ver [7].

Capítulo 2

Variedades cuadráticas en el espacio proyectivo real

En este capítulo recordaremos algunas nociones y propiedades relevantes desde el punto de vista proyectivo relativas a variedades cuadráticas. Sólo introduciremos aquello que nos va a ser necesario mas adelante. Asumiremos que ya se cuenta con nociones básicas de geometría proyectiva (para más detalles ver [1], [2], [8], [10]). Sólo para resultados que, a nuestro juicio, no sean generalmente muy conocidos, escribiremos con detalle la demostración correspondiente.

2.1. Variedades cuadráticas

Definición 2.1.1. Sean V un espacio vectorial real de dimensión mayor que 1, $\mathcal{Q}(V, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las formas cuadráticas sobre V y, para $\vec{x} \in V$ no nulo, $\langle \vec{x} \rangle$ el subespacio vectorial de V generado por $\vec{x}$. Una *variedad cuadrática* en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ es todo punto $\langle \omega \rangle$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V, \mathbb{R}))$. Los *ceros* de $\langle \omega \rangle$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ dado por $\mathcal{C}(\omega) = \{\langle \vec{x} \rangle \in \mathcal{P}(V) / \omega(\vec{x}) = 0\}$.

Si dim $\mathcal{P}(V) = 2$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *cónica*.
Si $\dim \mathcal{P}(V) = 3$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *cuádrica*.
Si $\dim \mathcal{P}(V) > 3$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *hipercuádrica*.

Observación 2.1.2. En la definición anterior, hemos establecido que es diferente hablar de una variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ que considerar sus ceros $\mathcal{C}(\omega)$. Sin embargo, por razones de simplicidad, en lo sucesivo cometeremos abuso de lenguaje escribiendo $\mathcal{C}(\omega)$, en lugar de $\langle \omega \rangle$, para referirnos a una variedad cuadrática. Asimismo, debemos indicar que, para lo relativo a formas cuadráticas, el lector puede consultar el apéndice incluido al final.

La siguiente proyectividad juega un papel esencial en el estudio de variedades cuadráticas.

Definición 2.1.3. La *polaridad* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es la proyectividad $\widetilde{f}$: $\mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ que se deduce de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f} : V \to V^*$

de ω (ver apéndice). Para un punto $Y = \langle \vec{y} \rangle \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, se dice que $\widetilde{f}(Y) = \langle \hat{f}(\vec{y}) \rangle$ es el *hiperplano polar* de Y y que Y es un *polo* de $\widetilde{f}(Y)$.

Asimismo, las nociones contenidas en lo siguiente tienen una notable relevancia.

Definición 2.1.4. Sea la polaridad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$, definida a partir de una forma cuadrática ω con forma polar f. Dos puntos $\langle \vec{x} \rangle = X$ e $\langle \vec{y} \rangle = Y$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *conjugados*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Un punto $\langle \vec{x} \rangle = X \in \mathcal{P}(V)$ se dice que es *singular*, si es conjugado a todos los puntos de $\mathcal{P}(V)$. El conjunto de los puntos singulares es $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\ker \hat{f})$.

Para $\langle \vec{y} \rangle = Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$, se tiene $\widetilde{f}(Y) = \{ \langle \vec{x} \rangle \in \mathcal{P}(V) \mid 0 = \hat{f}(\vec{y})(\vec{x}) = f(\vec{y}, \vec{x}) \}$. Esto es, el hiperplano polar $\widetilde{f}(Y)$ está formado por los puntos que son conjugados a Y.

Fijamos ahora una referencia $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$ en $\mathcal{P}(V)$ y la correspondiente referencia dual $\mathcal{R}^* = \{U_0^*, \ldots, U_n^*; U^*\}$ en el espacio proyectivo dual $\mathcal{P}(V^*)$. Seguidamente, tomamos bases normalizadas de dichas referencias $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ y su dual $\{\vec{e}_0^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}\}$ (ver [2,10]). Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, sea A una matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ respecto de $\mathcal{R}$. Pues bien, para $X \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$ con coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$, si $\widetilde{f}(X)$ tiene coordenadas homogéneas $(u_0, \ldots, u_n)$, entonces la ecuación matricial de la polaridad $\widetilde{f}$ viene dada por

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde ρ es un número real distinto de 0.

Nótese que si $\dim \mathcal{P}(V) = n$ y el rango de ω es r, entonces $\dim(\ker \hat{f}) + r = n + 1$. Por lo que $\dim \mathcal{S} = n - r$.

Lema 2.1.5. *Para $\mathcal{P}(V)$ de dimensión finita, el conjunto imagen de la polaridad $\widetilde{f}$ es igual al conjunto de hiperplanos que contienen el conjunto de puntos singulares $\mathcal{S}$.*

Definición 2.1.6. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$, se dice que es *autoconjugada respecto de* $\mathcal{C}(\omega)$, si sus puntos básicos $U_0, \ldots, U_n$ son conjugados dos a dos respecto de $\mathcal{C}(\omega)$.

El resultado siguiente caracteriza y justifica la noción de referencia autoconjugada.

Lema 2.1.7. *Una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$ es autoconjugada respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si una ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ respecto de $\mathcal{R}$ viene dada por*

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0,$$

la cual se denomina ecuación diagonal de $\mathcal{C}(\omega)$.

Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con signatura (p, q), es sabido que se puede encontrar una base $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de V, respecto de la cual, se tiene la expresión canónica de ω (ver apéndice). Si ahora consideramos la referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{\langle\vec{e}_0\rangle, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; \langle\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n\rangle\}$ de $\mathcal{P}(V)$, $\mathcal{R}$ será autoconjugada respecto de $\mathcal{C}(\omega)$. La ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a $\mathcal{R}$ estará dada por

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_0^2 + \cdots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \cdots - x_{p+q-1}^2 = 0.$$

Así, se ha obtenido lo que se denomina *ecuación canónica* de $\mathcal{C}(\omega)$. A lo largo de la exposición, siempre ordenaremos los puntos básicos de las referencias para que primero se escriban los sumandos positivos y después los negativos.

2.2. Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas

Para proceder a clasificar las variedades cuadráticas desde el punto vista proyectivo, previamente desarrollaremos unos resultados que nos ayudarán describir la naturaleza geométrica de los distintos tipos de variedades cuadráticas.

La siguiente proposición está parcialmente mostrada en [3, página 263], la hemos completado con algunos detalles adicionales. Asimismo, incluimos una demostración para ella.

Proposition 2.2.1. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n con signatura $\mathrm{sig}(\omega) = (p, q)$, $p \geqslant q$, y tal que el subespacio proyectivo $\mathcal{S}$ de sus puntos singulares es de dimensión s. Para dicha variedad cuadrática se verifica:*

(i) *Si un subespacio proyectivo de dimensión a está contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, entonces $q+s \geqslant a$. Además, existe al menos un subespacio proyectivo de dimensión $q + s$ contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ y un tal subespacio necesariamente contiene al conjunto de puntos singulares $\mathcal{S}$.*

(ii) *Si P es un punto de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces siempre existe un subespacio proyectivo $\mathcal{R}$ de dimensión $q + s$ tal que $P \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. En particular, si P es un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$, se tiene que $P \in \mathcal{R} \subseteq H$, donde H es el hiperplano polar de P.*

(iii) *Si un subespacio proyectivo de dimensión b es disjunto con $\mathcal{C}(\omega)$, entonces $p - 1 \geqslant b$. Además, hay subespacios proyectivos de dimensión $p - 1$ que son disjuntos con $\mathcal{C}(\omega)$.*

Demostración: Veamos (i), supongamos que $q + s < a$ y que, para una cierta referencia, $\mathcal{C}(\omega)$ viene dada por su exprésión canónica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - y_1^2 - \ldots - y_q^2 = 0. \tag{1}$$

(usamos esta notación para las coordenadas por razón de sencillez en la exposición) El subespacio proyectivo $\mathcal{T}$ determinado por la intersección de los hiperplanos $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_q = 0$ es de dimensión $n - q = p + s$, puesto que $n = p + q + s$. Para el subespacio suma $\mathcal{T} + \mathcal{R}$, se tiene:

$$n \geq \dim(\mathcal{T} + \mathcal{R}) = p + s + a - x > p + s + q + s - x = n + s - x,$$

donde x es la dimensión de $\mathcal{T} \cap \mathcal{R}$. Esto implica $0 > s - x$. Por tanto, $x > s \geq -1$. De esto se sigue $x \geq 0$. Luego $\mathcal{T} \cap \mathcal{R}$ es no vacío. Pero si $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, utilizando la expresión canónica de $\mathcal{C}(\omega)$ y las ecuaciones de $\mathcal{T}$, se sigue de que X tiene como coordenadas $(0,\ldots,0,0,\ldots,0,z_0,\ldots,z_s)$. Por tanto, X es un punto singular. Esto es, $\mathcal{T}\cap\mathcal{R}\subseteq\mathcal{S}$ y $x\leq s$. Esto condradice el hecho $x>s$ antes probado. Contradicción que viene de suponer $q+s<a$.

Mostremos ahora que existe un subespacio proyectivo $\mathcal{R}_0$ de dimensión $q+s$ tal que $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}_0\subseteq\mathcal{C}(\omega)$. Para ello, consideramos de nuevo una referencia proyectiva para la que se obtiene la expresión canónica de $\mathcal{C}(\omega)\equiv x_1^2+x_2^2+\ldots+x_p^2-y_1^2-\ldots-y_q^2=0$. Sea el subespacio proyectivo $\mathcal{R}_0$ determinado por la intersección de los hiperplanos

$$x_1=0,\ \ldots,\ x_{p-q}=0,\ x_{p+1-q}-y_1=0,\ \ldots,\ x_p-y_q=0.$$

La dimensión $\mathcal{R}_0$ es $n-p=q+s$. Además, es inmediato que $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}_0\subseteq\mathcal{C}(\omega)$. Nótese que los puntos singulares $(0,\ldots,0,0,\ldots,0,z_0,\ldots,z_s)$ satisfacen las ecuaciones de los hiperplanos considerados. Si existiese un subespacio proyectivo $\mathcal{R}_1$ de dimensión $q+s$ contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ tal que $\mathcal{S}\nsubseteq\mathcal{R}_1$, entonces considerando el subespacio $\{S\}+\mathcal{R}_1$, con $S\in\mathcal{S}$ y $S\notin\mathcal{R}_1$, sería de dimensión $q+s+1$ y estaría contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, contradicción.

Para ver (ii), supongamos en primer lugar que $q+s=-1$, entonces $q=0$ y $s=-1$. Esto es, $n=p+0-1$, por lo que $\mathrm{sig}(\omega)=(n+1,0)$. En este caso, $\mathcal{C}(\omega)$ no contiene puntos. Luego no contradice lo afirmado en (ii), pues no se da la existencia de un punto P en $\mathcal{C}(\omega)$.

Supongamos que $q+s=0$, entonces se tienen dos alternativas:

- $q=1$ y $s=-1$. Es inmediato que $\mathcal{R}=\{P\}\subseteq\mathcal{C}(\omega)$.
- $q=0$ y $s=0$, entonces $n=p+0+0$. Por lo que $\mathrm{sig}(\omega)=(n,0)$ y la variedad cuadrática consiste en un único punto singular Q. Esto es, se tiene que $\mathcal{C}(\omega)=\{Q\}=\{P\}$. Luego se sigue que $\mathcal{R}=\{P\}\subseteq\mathcal{C}(\omega)=\{P\}$.

Supongamos finalmente que $q+s>0$. En este caso se tienen igualmente dos alternativas:

(a) Si P es un punto singular, podemos considerar el subespacio proyectivo $\mathcal{R}=\mathcal{R}_0$ antes considerado. Se tiene $P\in\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}=\mathcal{R}_0\subseteq\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, (ii) se verifica.

(b) Si P no es un punto singular, consideramos su hiperplano polar $\widetilde{f}(P)=H$. Se tiene que $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}_0$ y las siguientes dos posibilidades:

- $\mathcal{R}_0\subseteq H$, esto implica $P\in\mathcal{R}_0$. Puesto que si $P\notin\mathcal{R}_0$, entonces $\dim(\{P\}+\mathcal{R}_0)=0+q+s-(-1)>q+s$. Lo cual no es posible, pues $\{P\}+\mathcal{R}_0\subseteq\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, en esta situación se tiene $P\in\mathcal{R}_0\subseteq\mathcal{C}(\omega)$. Lo que implica que (ii) se verifica.
- $\mathcal{R}_0\nsubseteq H$, esto implica $P\notin\mathcal{R}_0$. Puesto que si $P\in\mathcal{R}_0$, entonces $\mathcal{R}_0\subseteq H$. Por tanto, en este caso el subespacio proyectivo $\{P\}+\mathcal{R}_0\cap H$ es de dimensión $0+q+s-1-(-1)=q+s$ y se satisface $\{P\}+\mathcal{R}_0\cap H\subseteq\mathcal{C}(\omega)$.

Nótese que para todo P en $\mathcal{C}(\omega)$ no singular, si se tiene que $P\in\mathcal{R}\subseteq\mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{R}\subseteq\widetilde{f}(P)=H$. Pues para todo $X\in\mathcal{R}$, la recta PX está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Lo que implica que P y X son conjugados, esto es $X\in H$.

Para (iii), sea $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, z_0, z_1, \dots z_s)$ unas coordenadas homogéneas de un punto X respecto de una referencia proyectiva que nos haya dado la ecuación canónica (1) de $\mathcal{C}(\omega)$. Sea el subespacio proyectivo $\mathcal{T}'$ que resulta de la intersección de los hiperplanos

$$y_1 = 0, \ \dots, y_q = 0, \ z_0 = 0, \ \dots, z_s = 0.$$

Se tiene que $\dim \mathcal{T}' = n - (q + s + 1) = p - 1$ y que $\mathcal{T}' \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. Por otro lado, si hubiera un subespacio proyectivo $\mathcal{T}''$ tal que $\mathcal{T}'' \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$ con $\dim \mathcal{T}'' > p - 1$, se tendría

$$n \geq \dim(\mathcal{T}'' + \mathcal{R}_0) > p - 1 + q + s - \dim(\mathcal{T}'' \cap \mathcal{R}_0) = n - 1 - \dim(\mathcal{T}'' \cap \mathcal{R}_0).$$

Esto implica $\dim(\mathcal{T}'' \cap \mathcal{R}_0) > -1$. Luego $\mathcal{T}'' \cap \mathcal{R}_0$ es no vacío y ello implica que $\mathcal{T}'' \cap \mathcal{C}(\omega)$ contiene puntos, contradicción. □

Corolario 2.2.2. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n con signatura* $\mathrm{sig}(\omega) = (p, q)$, *$p \geqslant q$, y tal que el subespacio proyectivo $\mathcal{S}$ de sus puntos singulares es de dimensión s, entonces son equivalentes:*

(*i*) *Existe un hiperplano $H = \mathcal{P}(W)$ tal que $H \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*

(*ii*) $p = 1$.

(*iii*) $\mathrm{sig}(\omega) = (1, 1)$ *o* $(1, 0)$.

(*iv*) *Es nula la restricción $\omega_{|W}$ de ω al subespacio vectorial W.*

Demostración: Si se tiene $H \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces $n - 1 = p + q + s - 1 = q + s$. De lo que se sigue $p = 1$. De $p = 1$, es inmediato que $\mathrm{sig}(\omega) = (1, 1)$ o $(1, 0)$. En ambos casos, $\mathcal{C}(\omega)$ contiene hiperplanos. La equivalencia de (iv) es trivial. □

Clasificacion proyectiva: Aquí se tiene en cuenta la proposición 2.2.1 y el corolario 2.2.2. Así, para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, de signatura (p, q), $p \geq q$, y de rango $r = p + q$, se tienen los siguientes casos:

1. $\mathcal{C}(\omega)$ es *ordinaria*, si $r = n + 1$. A su vez, teniendo en cuenta la signatura (p, q), una variedad cuadrática ordinaria se dice que es:

   (*i*) *totalmente imaginaria*, si $q = 0$. En este caso $\mathcal{C}(\omega) = \emptyset$ no contiene puntos, $q + s = -1$.

   (*ii*) *real*, si $q \neq 0$. Aquí, $q + s = q - 1 \geq 0$ y se tiene que $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por subespacios proyectivos $\mathcal{R}$ de dimensión $q - 1$. Así, se tendrá que $\mathcal{C}(\omega)$ estará constituida por puntos, rectas, planos, etc., según las posibilidades de $q - 1$.

2. $\mathcal{C}(\omega)$ es *degenerada*, si $r < n + 1$. A su vez, teniendo en cuenta la signatura (p, q), $\mathcal{C}(\omega)$ puede ser:

   (i) *imaginaria*, si $q = 0$. La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida únicamente por los puntos singulares, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$.

(ii) *real*, si $q \neq 0$. Se tendrá que $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por subespacios proyectivos $\mathcal{R}$ de dimensión $q+s$ que contienen a $\mathcal{S}$.

Casos particulares que debemos mencionar son:

$(i)^*$ *Producto de dos hiperplanos imaginarios*, si $\mathcal{C}(\omega)$ tiene signatura $(2,0)$.

$(ii)^*$ *Producto de dos hiperplanos reales*, si $\mathcal{C}(\omega)$ tiene signatura $(1,1)$.

$(iii)^*$ *Hiperplano doble*, si $\mathcal{C}(\omega)$ tiene signatura $(1,0)$.

A partir de lo dicho anteriormente, diremos que una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es *real*, si existe un punto P no singular tal que $P \in \mathcal{C}(\omega)$. Esto es equivalente a decir, que si $\operatorname{sig}(\omega) = (p,q)$ con $p \geq q$, entonces $q \neq 0$. Por otro lado, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es *imaginaria*, si es vacía o está constituida únicamente por sus puntos singulares. Lo que es equivalente a decir, que si $\operatorname{sig}(\omega) = (p,q)$ con $p \geq q$, entonces $q = 0$.

2.3. Subespacios proyectivos tangentes

Aquí recordamos las condiciones necesarias y suficientes para que un subespacio proyectivo sea tangente a una variedad cuadrática. Para ello, veamos primero lo que sucede cuando consideramos una variedad cuadrática y una recta.

Incidencia de una recta y una variedad cuadrática: Dada la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y la recta $r = PQ$ que une los puntos $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$. La intersección de $\mathcal{C}(\omega)$ y r estará formada por los puntos $X = \langle \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \rangle$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, que satisfagan la ecuación

$$\lambda^2\omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p},\vec{q}) + \mu^2\omega(\vec{q}) = 0.$$

Cuyas soluciones dependen de

$$\Delta = (f(\vec{p},\vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}).$$

Se tienen las siguientes posibilidades:

(i) Si $\Delta > 0$, habrá únicamente dos puntos comunes a la variedad cuadrática y a la recta. En este caso se dice que la recta es *secante* a la variedad cuadrática.

(ii) Si $\Delta < 0$, la variedad cuadrática y la recta no tienen ningún punto en común. En este caso se dice que la recta es *exterior* a la variedad cuadrática.

(iii) Cuando $\Delta = 0$ hay dos situaciones posibles:

(a) Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$ o $\omega(\vec{q}) \neq 0$, entonces $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto.

(b) Si $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces $r \subseteq \mathcal{C}(\omega$.

Todo esto justifica lo siguiente.

Definición 2.3.1.

Se dice que una recta r es *tangente* a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto o $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Se dice que un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$, de dimensión mayor o igual a 1, es *tangente* a $\mathcal{C}(\omega)$, si existe un punto P de $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo X de $\mathcal{P}(W)$ distinto de P se tiene que la recta PX es tangente. A P se le denomina *punto de tangencia* de $\mathcal{P}(W)$.

Se tienen las dos caracterizaciones siguientes de subespacio proyectivo tangente.

Proposition 2.3.2.

(*i*) *Un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si existe un punto P de $\mathcal{P}(W)$ tal que para todo X de $\mathcal{P}(W)$ se tiene que $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$.*

(*ii*) *Un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ o $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W)$ es una variedad cuadrática degenerada de $\mathcal{P}(W)$.*

Es oportuno indicar que si un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ es tal que $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$, se dice que es *exterior* a $\mathcal{C}(\omega)$. Por otra parte, si $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática ordinaria real en $\mathcal{P}(W)$, se dice que es *secante* con $\mathcal{C}(\omega)$,

2.4. Incidencia de un hiperplano con una variedad cuadrática

Seguidamente se describe con detalle la intersección de un hiperplano con una variedad cuadrática.

Proposition 2.4.1. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n con signatura $\operatorname{sig}(\omega) = (p, q)$, $p \geqslant q$, y tal que el subespacio proyectivo $\mathcal{S}$ de sus puntos singulares es de dimensión s, y sea $H = \mathcal{P}(W)$ un hiperplano no contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, entonces $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(\omega_{|W})$. Esto es, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en H determinada por la forma cuadrática $\omega_{|W}$.*

Con respecto a los puntos singulares y la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$, se tiene lo siguiente:

(*i*) *Si $\mathcal{S} \nsubseteq H$, entonces $H \cap \mathcal{S}$ son los puntos singulares de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ y $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p, q)$.*

(*ii*) *Si $\mathcal{S} \subseteq H$, entonces se tienen dos posibilidades:*

(a) *Si H contiene algún P, tal que $\widetilde{f}(P) = H$, entonces $\{P\} + \mathcal{S}$ son los puntos singulares de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p-1, q-1)$.*

(b) *Si H no contiene algún P, tal que $\widetilde{f}(P) = H$, entonces $\mathcal{S}$ son los puntos singulares de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ y $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p, q-1)$ o $(p-1, q)$. Además, cuando $q > 0$, se dan ambas signaturas.*

Demostración: Supongamos $\mathcal{S} \nsubseteq H$. Es evidente que $H \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_H$, donde $\mathcal{S}_H$ denota el conjunto de los puntos singulares de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{S}_H$ y no fuera punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces H sería el hiperplano polar de Q. Contradicción, pues H, al no contener a $\mathcal{S}$, no está en el conjunto imagen de la polaridad. Luego $Q \in H \cap \mathcal{S}$.

Si la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es $\mathrm{sig}(\omega_{|W}) = (p_1, q_1)$, $p_1 \geq q_1$, entonces $n - 1 = p_1 + q_1 + s - 1 = p + q + s - 1$. Por lo que $p_1 + q_1 = p + q$. Además, también se tiene que $q_1 + s - 1 \leq q + s$. Esto es, $q_1 \leq q + 1$. Por otro lado, se tiene que existe $Q \in \mathcal{S}$ y $Q \notin H$ y sabemos que existe un subespacio proyectivo $\mathcal{R}$ de dimensión $q + s$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. De esto se sigue que $\mathcal{S} \cap H \subseteq H \cap \mathcal{R} \subseteq H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Como la dimensión de $\mathcal{R} \cap H$ es $q + s - 1$, se tiene que $q + s - 1 \leq q_1 + s - 1$. Por tanto, $q \leq q_1 \leq q + 1$. La situación $q_1 = q + 1$ no se puede dar. En tal caso, existiría un $\mathcal{R}_1$ tal que $H \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq H \cap \mathcal{C}(\omega)$ con $\dim \mathcal{R}_1 = q + s$. Lo que implica $\mathcal{S}$ no estaría contenido en $\mathcal{R}_1$, contradicción.

Sea ahora $\mathcal{S} \subseteq H$ y supongamos que para un punto $P \in H$ se tenga $\widetilde{f}(P) = H$. En este caso, es evidente que $\{P\} + \mathcal{S}$ está contenido en el conjunto $\mathcal{S}_H$ de puntos singulares de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{S}_H$ y $Q \notin \mathcal{S}$, entonces $\widetilde{f}(Q) = H = \widetilde{f}(P)$. De esto se sigue que $\langle \hat{f}(\vec{q}) \rangle = \langle \hat{f}(\vec{p}) \rangle$. Ello implica que $\vec{q} - \lambda\vec{p} \in \ker(\hat{f})$. Si $\vec{q} - \lambda\vec{p} = \vec{0}$, entonces $Q = P$. Si $\vec{q} - \lambda\vec{p} \neq \vec{0}$, entonces $Q = \langle \lambda\vec{p} + \vec{s} \rangle$, donde $\langle \vec{s} \rangle \in \mathcal{S}$. Por lo que se tiene $Q \in \{P\} + \mathcal{S}$.

Con las mismas notaciones que anteriormente, se satisface $q_1 + s + 1 \leq q + s$. Además, por la proposición 2.2.1 se deduce que $q + s \leq q_1 + s + 1$. Por tanto, $q_1 = q - 1$ y $n - 1 = p_1 + q - 1 + s + 1 = p + q + s - 1$. Luego $\mathrm{sig}(\omega_{|W}) = (p - 1, q - 1)$ y (ii) (a) está probado.

Finalmente, para el último apartado, si existiera algún Q que fuera punto singular de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ y no estuviera en $\mathcal{S}$, entonces $\widetilde{f}(Q) = H$ y $Q \in H$, contradicción. En este caso, $q_1 + s \leq q + s$. Por otro lado, para un subespacio proyectivo $\mathcal{R}$ de dimensión $q + s$ tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ se dan las siguientes alternativas:

· $\mathcal{R} \nsubseteq H$. Entonces $\mathcal{R} \cap H \subseteq H \cap \mathcal{C}(\omega)$ y $q + s - 1 \leq q_1 + s$.

· $\mathcal{R} \subseteq H$. Entonces $\mathcal{R} \subseteq H \cap \mathcal{C}(\omega)$ y $q + s \leq q_1 + s$.

Se concluye que $q_1 = q - 1$ o $q_1 = q$. Es decir, $\mathrm{sig}(\omega_{|W})(p, q - 1)$ o $\mathrm{sig}(\omega_{|W})(p - 1, q)$. □

2.5. Variedad cuadrática tangente a una variedad cuadrática desde un punto

En un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1, sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea hiperplano doble y sea P un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Es sabido que si consideramos el conjunto de rectas que pasen por P y sean tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$, dicho conjunto constituye una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega_P)$, que se denomina *variedad cuadrática tangente* a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P. Además, si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hiperplano doble coincidente con el hiperplano polar de P. En cambio, si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\{P\} + \mathcal{S}$ son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$, donde $\mathcal{S}$ son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. El siguiente resultado es sobre la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ del segundo caso.

Proposition 2.5.1. *En un espacio proyectivo de dimensión mayor que* 1*, sea una variedad cuadrática* $\mathcal{C}(\omega)$ *que no sea hiperplano doble con signatura* (p, q)*,* $p \geq q$*, y sea un punto* P *no perteneciente a* $\mathcal{C}(\omega)$ *con hiperplano polar* H*, entonces las signaturas de* $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ *y de* $\mathcal{C}(\omega_P)$ *coinciden. Esto es, ambas valen* $(p - 1, q)$ *o* $(p, q - 1)$*.*

Demostración: Supongamos que (p_1, q_1), con $p_1 \geq q_1$, es la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$, entonces existe una referencia proyectiva $\{U_1, \ldots, U_n; U = \langle \vec{u} \rangle\}$ del hiperplano H para la cual la variedad cuadrática $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ tiene por ecuación

$$H \cap \mathcal{C}(\omega) \equiv x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - y_1^2 - \cdots - y_{q_1}^2 = 0.$$

Considerando ahora la referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ dada por $\{P = \langle \vec{p} \rangle, U_1, \ldots, U_n; \langle \vec{p} + \vec{u} \rangle\}$, se tiene que

$$f_P(\vec{p}, \vec{u}_i) = 0, \quad f_P(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = f(\vec{p}, \vec{u}_i) f(\vec{p}, \vec{u}_j) - f(\vec{u}_i, \vec{u}_j)\omega(\vec{p}) = 0,$$

donde $f_P(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{p}, \vec{x}) f(\vec{p}, \vec{y}) - \omega(\vec{p}) f(\vec{x}, \vec{y})$ (ver [2, 8]). Nótese que hemos tenido en cuenta que P es punto singular de $\mathcal{C}(\omega_P)$, U_i está en el hiperplano polar de P, y U_i y U_j son conjugados para $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\{P = \langle \vec{p} \rangle, U_1, \ldots, U_n; \langle \vec{p} + \vec{u} \rangle\}$ es una referencia autoconjugada de $\mathcal{C}(\omega_P)$. La ecuación diagonal de $\mathcal{C}(\omega_P)$ respecto de esta referencia es

$$\omega_P(\vec{p})x_0^2 + \omega_P(\vec{u}_1)x_1^2 + \cdots + \omega_P(\vec{u}_{p_1})x_{p_1}^2 + \omega_P(\vec{u}_{p_1+1})y_1^2 + \cdots + \omega_P(\vec{u}_{p_1+q_1})y_{q_1}^2 = 0.$$

Como $\omega_P(\vec{p}) = 0$ y $\omega_P(\vec{u}_i) = -\omega(\vec{u}_i)\omega(\vec{p})$, con $\omega(\vec{p}) \neq 0$, la anterior ecuación diagonal está dada por

$$-\omega(\vec{u}_1)\omega(\vec{p})x_1^2 - \cdots - \omega(\vec{u}_{p_1})\omega(\vec{p})x_{p_1}^2 - \omega(\vec{u}_{p_1+1})\omega(\vec{p})y_1^2 - \cdots - \omega(\vec{u}_{p_1+q_1})\omega(\vec{p})y_{q_1}^2 = 0.$$

De esto se deduce que (p_1, q_1), con $p_1 \geq q_1$, es signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$. $\square$

Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión mayor que 1, se tiene que $\mathcal{C}(\omega)$ delimita al espacio en dos zonas: una formada por los puntos X tales que $\omega(\vec{x}) > 0$ y otra constituida por los puntos X tales que $\omega(\vec{x}) < 0$. Relativo a estas zonas es lo siguiente.

Definición 2.5.2. En un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1, sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea hiperplano doble y sea un punto P no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$. Diremos que P es *interior* a $\mathcal{C}(\omega)$, si $\mathcal{C}(\omega_P)$ es imaginaria. Por otro lado, diremos que P es *exterior* a $\mathcal{C}(\omega)$, si $\mathcal{C}(\omega_P)$ es real.

La noción de punto exterior es equivalente a decir que por dicho punto, no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$, pasa alguna recta tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ tal que su punto de tangencia es no singular.

Relativo a los conceptos de punto interior y exterior se tiene lo siguiente (ver [3]).

Proposition 2.5.3. *En un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión mayor que 1, sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con signatura (p, q), $p \geq q$, que no sea hiperplano doble y sean* $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega))$ *y* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega))$ *los conjuntos de los puntos interiores y exteriores, respectivamente. Se tiene lo siguiente:*

(*i*) *Si $q = 0$, entonces* $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$ *y* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega)) = \emptyset$. *Además, hay una única zona delimitada por $\mathcal{C}(\omega)$.*

(*ii*) *Si $q \geq 2$, entonces* $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega)) = \emptyset$ *y* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{P}(V) - \mathcal{C}(\omega)$. *Además, hay una dos zonas (de puntos exteriores) delimitadas por $\mathcal{C}(\omega)$.*

(*iii*) *Si* $p = 1$*, entonces* $(p, q) = (1, 1)$*,* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega)) = \emptyset$ *y* $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{P}(V) - \mathcal{C}(\omega)$*. Además, hay dos zonas (de puntos interiores) delimitadas por* $\mathcal{C}(\omega)$*.*

(*iv*) *Si* $p > 1$ *y* $q = 1$*, entonces* $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega)) \neq \emptyset$*,* $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega)) \neq \emptyset$*,* $\omega(\vec{x})$ *tiene el mismo signo para todo* $X \in \mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega))$ *y* $\omega(\vec{x})$ *tiene el mismo signo para todo* $X \in \mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega))$ *que será el signo opuesto al de los interiores.*

Demostración: Para probar, los distintos apartados hacemos uso de la proposición 2.4.1. Para (*i*), si $q = 0$, para todo $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ con $\widetilde{f}(P) = H$, se tiene que la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es la misma que la de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Esto es, $(p-1, 0)$.

Para (*ii*), si $q \geq 2$, para todo $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ con $\widetilde{f}(P) = H$, se tiene que la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(p-1, q)$ o $(p, q-1)$. En ambos casos, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es real.

Para (*iii*), si $(p, q) = (1, 1)$, para todo $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ con $\widetilde{f}(P) = H$, se tiene que la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(1, 0)$.

Para lo afirmado en los casos (*i*), (*ii*) y (*iii*) relativo a zonas delimitadas por $\mathcal{C}(\omega)$, considerando las correspondientes ecuaciones canónicas, se sigue fácilmente.

Para (*iv*), si $(p, q) = (p, 1)$ con $p > 1$, para todo $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ con $\widetilde{f}(P) = H$, se tiene que la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(p-1, 1)$ o $(p, 0)$. Considerando la ecuación canónica correspondiente a una ω con signatura (p, q), se ve que ambos casos se dan y que para los puntos interiores se tiene $\omega(\vec{x}) < 0$ y para los puntos exteriores $\omega(\vec{x}) > 0$.

Si un punto P es interior, entonces $(p, 0)$ es la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. Entonces se consideran $P_1, \ldots, P_p$, de modo que P_i estén en H , sean conjugados dos a dos y no sean puntos singulares. Completamos este conjunto con $s+1$ puntos singulares independientes $S_0, S_1, \ldots, S_s$ que sabemos están en H. Ahora ponemos un punto unidad U, se tiene para $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ una ecuación diagonal $(p, 0)$ con respecto a $\{S_0, S_1, \ldots, S_s, P_1, \ldots, P_p; U\}$. Pues bien, añadiendo P como punto básico y poniendo $\langle \vec{p} + \vec{u} \rangle$ como punto unidad, se tiene para $\mathcal{C}(\omega)$ una ecuación diagonal $(p, 1)$. De ahí que $\omega(\vec{p}) < 0$.

Si punto P es exterior, procediendo de una manera análoga obtenemos una ecuación diagonal $(p-1, 1)$ para $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ con respecto a una cierta referencia autoconjugada en H. Si a esta referencia le añadimos P como punto básico, obtenemos una referencia autoconjugada de $\mathcal{P}(V)$ y una ecuación diagonal $(p, 1)$ para $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\omega(\vec{p}) > 0$. $\square$

Observación 2.5.4. Si $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$ es un hiperplano doble, entonces $\omega = h^2$, donde h es una forma lineal que determina $\mathcal{S}$. En este caso, para todo punto $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ se tiene $\omega(\vec{p}) > 0$ y $\omega_P = 0$ es de signatura $(0, 0)$. Esto es, podemos considerar que $\mathrm{Int}(\mathcal{C}(\omega)) = \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$ y $\mathrm{Ext}(\mathcal{C}(\omega)) = \emptyset$.

Capítulo 3

Estudio afín de las variedades cuadráticas

En esta sección describiremos algunas nociones y propiedades que son relevantes en el estudio afín de las variedades cuadráticas. Primeramente, describimos de forma breve la relación entre espacio afín y espacio proyectivo.

3.1. Estructura afín del complemento de un hiperplano proyectivo

Dado un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ y un hiperplano $H = \mathcal{P}(W)$ de dicho espacio, vamos a dotar al conjunto $E = \mathcal{P}(V) - H$ de estructura de espacio afín (ver [6]). Para ello, fijamos una referencia proyectiva $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(V)$ y una base normalizada $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ de $\mathcal{R}$. Con respecto a $\mathcal{R}$, supongamos que una ecuación del hiperplano H está dada por

$$H \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Sea $h : V \to \mathbb{R}$ la forma lineal dada por

$$h(\vec{v}) = h(v_0\vec{e}_0 + \cdots + v_n\vec{e}_n) = a_0v_0 + \cdots + a_nv_n,$$

Nótese que $W = \ker h$ y que h es una forma lineal que determina H, $\langle h\rangle = H \in \mathcal{P}(V^*)$.

Dotaremos a $E = \mathcal{P}(V) - H$ de la estructura de espacio afín con dirección W mediante la aplicación $E \times E \longrightarrow W$, definida por $(P, Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$, siendo $\langle\vec{p}\rangle = P$, $\langle\vec{q}\rangle = Q$ y $h(\vec{p}) = h(\vec{q}) = 1$. Se puede comprobar que esta aplicación está bién definida y que satisface las condiciones requeridas en la definición espacio afín. Si se dota así a E de estructura de espacio afín, a los puntos de E se les llama *puntos propios* de $\mathcal{P}(V)$ y a los puntos de H se les denomina *puntos impropios* de $\mathcal{P}(V)$. Asimismo, recordamos también que en el espacio afín E se tiene la operación $P * \vec{w} = \langle\vec{p} + \vec{w}\rangle$, donde $P = \langle\vec{p}\rangle \in E$ con $h(\vec{p}) = 1$ y $\vec{w} \in W$.

Relación entre referencias afines y referencias proyectivas: Sea una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, U_1, \ldots, U_n; U\}$ tal que $U_1, \ldots, U_n \in H$. Con respecto a la referencia $\mathcal{R}$, una ecuación del hiperplano H viene dada por $x_0 = 0$. En efecto, no hay mas que sustituir las coordenadas de los puntos $U_1, \ldots, U_n$ en la ecuación general de un hiperplano. Nótese que U_0 y U no pertenecen H. Sea $\mathcal{E} = \{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base normalizada de la referencia $\mathcal{R}$

tal que $h(\vec{e}_0) = 1$, donde h es la forma lineal que se utilizó para construir la estructura afín, y sea la referencia afín $\mathcal{A} = \{U_0; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ en E. Si $X \in E$ y $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ son coordenadas homogéneas de X respecto de la referencia proyectiva $\mathcal{R}$, se tiene que existe un vector $\vec{x}$ que define X tal que $\vec{x} = x_0\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Además, $x_0 \neq 0$ ya que $X \in E$.

Considerando $\frac{1}{x_0}\vec{x}$, resulta $h(\frac{1}{x_0}\vec{x}) = \frac{1}{x_0}x_0 = 1$. Luego $X = U_0 * \overrightarrow{U_0X} = U_0 * (\frac{1}{x_0}\vec{x} - \vec{e}_0)$. De donde

$$X = U_0 * \left(\frac{x_1}{x_0}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{x_n}{x_0}\vec{e}_n\right).$$

Por consiguiente, $\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ son las coordenadas afines de X respecto de $\mathcal{A}$.

Recíprocamente, si $(y_1, \ldots, y_n)$ son las coordenadas afines de $X \in E$ respecto de $\mathcal{A}$, entonces

$$X = U_0 * (y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n).$$

Por tanto, $\overrightarrow{U_0X} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$. Por lo que $\vec{x} - \vec{e}_0 = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$, lo que implica $\vec{x} = \vec{e}_0 + y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n$. A partir de lo cual podemos afirmar que $(1, y_1, \ldots, y_n)$ son unas coordenadas homogéneas de X respecto de $\mathcal{R}$.

Si lo que ahora se tiene de partida es una referencia afín $\mathcal{A} = \{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, se sigue fácilmente que $\mathcal{R} = \{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \ldots, \langle\vec{e}_n\rangle; O * (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ es una referencia proyectiva y que $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, donde $O = \langle\vec{e}_0\rangle$ y $h(\vec{e}_0) = 1$, es una base normalizada de $\mathcal{R}$.

Si $(y_1, \ldots, y_n)$ son las coordenadas afines de $X \in E$ con respecto a $\mathcal{A}$, se tiene que $(1, y_1, \ldots, y_n)$ son unas coordenadas homogéneas de X respecto de $\mathcal{R}$. Recíprocamente, si se tienen unas coordenadas homogéneas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $X \in E$ con respecto a $\mathcal{R}$, entonces $(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_1}{x_0})$ son las coordenadas afines de X respecto de $\mathcal{A}$. Tras todo esto, diremos que $\mathcal{R}$ es la referencia proyectiva *asociada* a la referencia afín $\mathcal{A}$.

3.2. El espacio afín como subconjunto del espacio proyectivo

Veamos ahora como en general un espacio afín E, de dimensión n y con dirección un espacio vectorial real W, se puede extender de modo natural mediante el añadido de un conjunto de puntos que denominaremos impropios. Este espacio ampliado o proyectivizado $\overline{E}$, se identificará con el espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathbb{R}\times W)$. Para hacer esta identificación, fijamos un punto O de E y definimos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R} \times W) \\ X & \longrightarrow & \langle(1, \overrightarrow{OX})\rangle. \end{array}$$

Se puede comprobar que es inyectiva y, si se considera el hiperplano $\mathcal{P}(\{0\} \times W)$, se tiene que el conjunto imagen es $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$.

Ahora consideramos la forma lineal $h : \mathbb{R} \times W \to \mathbb{R}$ dada por $h(\lambda, \vec{v}) = \lambda$. El núcleo de h es el hiperplano vectorial $\{0\} \times W$ de $\mathbb{R} \times W$. Utilizando la forma lineal h, dotamos a $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$ con estructura de espacio afín. La dirección de este espacio afín es $\{0\} \times W$ que se identifica con W.

Proposition 3.2.1. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{R}\times W) - \mathcal{P}(\{0\}\times W) \\ X & \longrightarrow & \langle (1, \overrightarrow{OX}) \rangle \end{array}$$

es afín y biyectiva.

3.3. Clasificación afín de las variedades cuadráticas

Abordaremos ahora el estudio afín de la variedades cuadráticas. Para ello, supondremos siempre que estamos trabajando con referencias proyectivas asociadas a referencias afines en la forma que hemos anteriormente indicado. Esto es, en el espacio proyectivo real n-dimensional $\mathcal{P}(V)$ consideramos el hiperplano $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y damos a $E = \mathcal{P}(V) - H_\infty$ una estructura de espacio afín utilizando una forma lineal h definida sobre V tal que $\ker h = W$.

Si $\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E, entonces $\mathcal{R} = \{O = \langle \vec{e}_0 \rangle, \langle \vec{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n \rangle ; U = \langle \vec{e}_0 + \cdots + \vec{e}_n \rangle\}$, donde $h(\vec{e}_0) = 1$, es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ asociada a dicha referencia afín. Otro modo de expresar el punto unidad es $U = O * (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)$. A H_∞ se le denomina *hiperplano impropio o del infinito*. Una ecuación de H_∞ con respecto a $\mathcal{R}$ es $x_0 = 0$. Una referencia proyectiva de H_∞ es $\mathcal{R}_\infty = \{\langle \vec{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \vec{e}_n \rangle ; \langle \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n \rangle\}$.

A continuación, consideraremos variedades cuadráticas en el espacio afín E. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si $H_\infty \nsubseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}(\omega_{|W}) = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ será su *variedad cuadrática en el infinito*. Supongamos que A es una matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia $\mathcal{R}$. Si denotamos por α_{00} al menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces α_{00} es una matriz asociada a $\mathcal{C}_\infty$ con respecto a $\mathcal{R}_\infty$. Nótese que $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si α_{00} es la matriz cero.

En lo sucesivo supondremos que la signatura de ω es (p, q) con $p \geq q$. En ocasiones resultará que hemos estudiado $\mathcal{C}(-\omega)$ en lugar de $\mathcal{C}(\omega)$. Esto no es problema, pues son la misma variedad cuadrática. Asimismo, (p_∞, q_∞), $p_\infty \geq q_\infty$, será la signatura de α_{00}.

Definición 3.3.1. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ definida en un espacio afín E de dimensión n, diremos que es:

(i) de *tipo parabólico*, si $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ o, cuando $H_\infty \nsubseteq \mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}_\infty$ es degenerada. Esto es, cuando $A_{00} = 0$.

(ii) de *tipo elíptico*, cuando $\mathcal{C}_\infty$ es ordinaria y totalmente imaginaria. Esto es, $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (n, 0)$.

(ii) de *tipo hiperbólico*, cuando $\mathcal{C}_\infty$ es ordinaria y real. Esto es, $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (p_\infty, q_\infty)$ con $p_\infty + q_\infty = n$ y $q_\infty \neq 0$.

Para clasificar las variedades cuadráticas desde el punto de vista afín, se parte de la clasificación desde el punto vista proyectivo. En dicha clasificación, considerando los posibles valores para la signatura (p, q) de ω, se obtienen los distintos tipos de variedades cuadráticas. La clasificación afín se puede considerar como una especialización de la clasificación proyectiva. A partir de un determinado tipo proyectivo (p, q), se consideran las distintas posibilidades para (p_∞, q_∞). Usando la proposición 2.4.1 y el corolario 2.2.2, se obtienen que dichas posibilidades son a lo sumo (p, q), $(p-1, q)$, $(p, q-1)$ o $(p-1, q-1)$. Atendiendo a esto se obtendrá la clasificación afín de las variedades cuadráticas en el espacio afín de dimensión n. En el capítulo siguiente describiremos con detalle dicha clasificación para $n = 4$. Este es uno de los objetivos principales de este trabajo.

Como será de utilidad en el capítulo siguiente, en la tabla 3.1 se muestra la clasificación afín de las cuádricas. Esta hecha siguiendo lo aquí dicho. También incluye información sobre algunas de sus propiedades afines. Para obtener dicha información, se usan las proposiciones 3.4.2, 3.4.7, 3.4.8 y 3.4.10.

3.4. Elementos afines relativos a variedades cuadráticas

Aquí recordamos algunas nociones y propiedades que reúnen interés dentro del estudio afín de las variedades cuadráticas.

Definición 3.4.1. Se llama *centro* de una variedad cuadrática a un polo del hiperplano del infinito, caso de que exista y sea propio.

En lo siguiente se caracteriza la existencia de centro de una variedad cuadrática.

Proposition 3.4.2 (ver [8]). *Sean $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ el hiperplano impropio, $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática y f la forma polar de ω. Entonces son equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}(\omega)$ *tiene centro.*

(ii) $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{S}_\infty = \mathcal{P}(\ker \hat{f}_{|W})$, *donde $f_{|W}$ es la forma polar de $\omega_{|W}$.*

(iii) $\mathrm{rango}(\omega_{|W}) = \mathrm{rango}(\omega) - 1$.

Seguidamente se ven otras nociones relacionadas con el concepto de centro.

Definición 3.4.3. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Se llama *variedad cuadrática asintótica* de $\mathcal{C}(\omega)$, a la variedad cuadrática tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ desde un centro.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, entonces el centro es el único punto singular de la variedad cuadrática asintótica que sería de rango n. Como dicho punto singular es propio, la llamaremos *hipercono asintótico.*

Un *diámetro* de $\mathcal{C}(\omega)$, es toda recta que contiene un centro y sólo uno.

La siguiente proposición justifica el uso de la palabra "centro".

Proposition 3.4.4. *Sea C un centro de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Si d es un diámetro que pasa por C, entonces C es el punto medio de $\{P, Q\} = \mathcal{C}(\omega) \cap d$, siendo P y Q puntos reales o imaginarios.*

Ahora veremos cómo se caracteriza la existencia de una ecuación diagonal respecto de alguna referencia afín.

Definición 3.4.5. Una referencia afín $\mathcal{A} = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se dice que es *autoconjugada* con respecto a una variedad cuadrática, si los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle\vec{e}_1\rangle, \dots, \langle\vec{e}_n\rangle; O * (\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n)\}$ son conjugados dos a dos.

Proposition 3.4.6. *Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada con respecto a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si la ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto de $\mathcal{A}$ toma la forma*

$$a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 + a_0 = 0,$$

donde $(y_1, \dots, y_n)$ denotan las coordenadas afines de un punto, $a_i = \omega(\vec{e}_i)$, $i \neq 0$, y $a_0 = \omega(\vec{e}_0)$, siendo $\langle\vec{e}_0\rangle = O$ y $h(\vec{e}_0) = 1$. Tal ecuación se dice que es una ecuación diagonal afín de $\mathcal{C}(\omega)$.

Cuando hay centro, se tiene lo siguiente.

Proposition 3.4.7. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática con centro. Una referencia afín $\{C; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada con respecto $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si C es un centro y $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ son las direcciones de diámetros que pasan por C que son conjugados dos a dos. Además, una ecuación diagonal afín de $\mathcal{C}(\omega)$ viene dada por*

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv a_0 + a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 = 0,$$

donde $a_i = \omega(\vec{e}_i)$, $i \neq 0$, y $a_0 = \omega(\vec{c}) = a_{00} + a_{01}c_1 + \cdots + a_{0n}c_n \neq 0$, siendo $\vec{c}$ tal que $\langle\vec{c}\rangle = C$ y $h(\vec{c}) = 1$, los a_{0i} de una matriz A asociada a ω respecto de una referencia afín cualquiera y $(c_1, \dots, c_n)$ las coordenadas afines de C respecto de tal referencia.

Cuando hay punto singular propio (en esta situación no hay centro), se tiene lo siguiente.

Proposition 3.4.8. *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática que no tiene centro. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es autoconjugada con respecto $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si O es un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos. Además, en tal caso, la ecuación diagonal afín toma la forma*

$$a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 = 0,$$

donde $a_i = \omega(\vec{e}_i)$.

Seguidamente se introduce la noción de asíntota y se caracteriza su existencia.

Definición 3.4.9. Se dice que una recta propia r es *asíntota* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ y hay un punto no singular $P_\infty = \langle\vec{p}\rangle$ de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ contenido en el hiperplano impropio H_∞. Nótese que $\mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente real y que para todo $X = \langle\vec{x}\rangle$ de una asíntota r se tiene $f(\vec{p}, \vec{x}) = 0$. Esto es, P_∞ es un punto de tangencia no singular de r.

El siguiente resultado nos dice cuando una variedad cuadrática tiene asíntotas.

Proposition 3.4.10. *Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio afín E de dimensión n. Si la signatura de ω es (p, q) y la signatura de $\omega_{|W}$ es (p_∞, q_∞), donde W es el espacio vectorial dirección de E, entonces son equivalentes:*

(*i*) $\mathcal{C}(\omega)$ *tiene asíntotas.*

(*ii*) $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ *es una variedad cuadrática real. Esto es,* $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(\omega_{|W})$ *tiene algún punto no singular.*

(*iii*) $q_\infty \neq 0$.

(*iv*) $\mathcal{C}(\omega)$ *es de tipo parabólico con* $q_\infty \neq 0$ *o de tipo hipérbólico.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntotas. Entonces $\mathcal{C}(\omega)$ tiene algún punto P_∞ no singular en el infinito determinado por la dirección de una asíntota r. Si P_∞ fuese punto singular de $\mathcal{C}(\omega_{|W})$ en H_∞, sería conjugado a todos los puntos impropios y ya se tiene que P_∞ es conjugado a todos los puntos de r, por su condición de tangente. Por tanto, P_∞ sería punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, contradicción. Lo que implica (*ii*).

Veamos (*ii*) implica (*i*). Si la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega_{|W})$ en H_∞ contiene algún punto P_∞ no singular, entonces será también punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Esto implica que el hiperplano polar H de P_∞ es propio (distinto de H_∞). Una asíntota se obtiene tomando una recta propia r contenida en H con dirección P_∞.

La equivalencia entre (*ii*) y (*iii*) es inmediata. Lo mismo que entre (*iii*) y (*iv*). □

Corolario 3.4.11.

(*i*) *Si* $\dim E = 1$*, cualquier variedad cuadrática no tiene asíntotas.*

(*ii*) *Una cónica tiene asíntotas si y sólo si es de tipo hiperbólico.*

(*iii*) *Una cuádrica ordinaria tiene asíntotas si y sólo si es un paraboloide reglado o un hiperboloide.*

(*iv*) *Una cuádrica de rango* 3 *tiene asíntotas si y sólo si es un cono real o un cilindro hiperbólico.*

(*v*) *Si* $\dim E = n > 1$*, una variedad cuadrática de rango menor o igual que 2 tiene asíntotas si y sólo si es el producto de dos hiperplanos reales no paralelos.*

Observación 3.4.12. Sea una variedad cuadrática con centros y asíntotas. Una asíntota se obtiene considerando una recta r que pase por un centro C y por un punto no singular P_∞ de $\mathcal{C}_\infty$. Dicha r es tal que $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P_\infty\}$ y está contenida en la variedad cuadrática asintótica $\mathcal{C}(\omega_C)$.

Por otro lado, sea una variedad cuadrática con asíntotas y algún punto singular propio Q. Una asíntota se obtiene considerando una recta r que pase por Q y por un punto no singular P_∞ de $\mathcal{C}_\infty$. Dicha recta es tal que $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

nombre	(p,q)	(p_∞,q_∞)	centro	asíntotas	ec. diag. afín	$q+s$
elipsoide imaginario	$(4,0)$	$(3,0)$	si	no	si	-1
paraboloide no reglado	$(3,1)$	$(2,0)$	no	no	no	0
elipsoide real	$(3,1)$	$(3,0)$	si	no	si	0
hiperboloide no reglado	$(3,1)$	$(2,1)$	si	si	si	0
paraboloide reglado	$(2,2)$	$(1,1)$	no	si	no	1
hiperboloide reglado	$(2,2)$	$(2,1)$	si	si	si	1
cono imaginario	$(3,0)$	$(3,0)$	no	no	si	0
cilindro imaginario	$(3,0)$	$(2,0)$	si	no	si	0
cono real	$(2,1)$	$(2,1)$	no	si	si	1
cilindro parabólico	$(2,1)$	$(1,0)$	no	no	no	1
cilindro elíptico real	$(2,1)$	$(2,0)$	si	no	si	1
cilindro hiperbólico	$(2,1)$	$(1,1)$	si	si	si	1
dos planos imaginarios no paralelos	$(2,0)$	$(2,0)$	no	no	si	1
dos planos imaginarios paralelos	$(2,0)$	$(1,0)$	si	no	si	1
dos planos propios reales no paralelos	$(1,1)$	$(1,1)$	no	si	si	2
plano propio por el plano impropio	$(1,1)$	$(0,0)$	no	no	no	2
dos planos propios reales paralelos	$(1,1)$	$(1,0)$	si	no	si	2
plano propio doble	$(1,0)$	$(1,0)$	no	no	si	2
plano impropio doble	$(1,0)$	$(0,0)$	si	no	si	2

Tabla 3.1: Clasificación afín de las cuádricas

Capítulo 4

Hipercuádricas en el espacio afín real de dimensión 4

El objetivo de esta sección es de describir con detalle la clasificación, desde el punto de vista afín, de las hipercuádricas en dimensión 4. Asimismo, intentaremos ver con la mayor claridad posible la naturaleza geométrica de cada tipo de hipercuádrica afín que tenga lugar. Para ello, fijaremos notaciones análogas a las usadas en el capítulo anterior. Esto es, en el espacio proyectivo real $\mathcal{P}(V)$ de dimensión 4, consideramos un hiperplano $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ y damos a $E = \mathcal{P}(V) - H_\infty$ una estructura de espacio afín utilizando una forma lineal h sobre V tal que $\ker h = W$. Igualmente, si $\mathcal{A} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ es una referencia afín de E, entonces $\mathcal{R} = \{O = \langle \vec{e}_0 \rangle, \langle \vec{e}_1 \rangle, \langle \vec{e}_2 \rangle, \langle \vec{e}_3 \rangle, \langle \vec{e}_4 \rangle; U = \langle \vec{e}_0 + \cdots + \vec{e}_4 \rangle\}$, con $h(\vec{e}_0) = 1$, es la referencia proyectiva asociada a $\mathcal{A}$. Una referencia proyectiva de H_∞ es $\mathcal{R}_\infty = \{\langle \vec{e}_1 \rangle, \langle \vec{e}_2 \rangle, \langle \vec{e}_3 \rangle, \langle \vec{e}_4 \rangle; \langle \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_4 \rangle\}$.

4.1. Clasificación afín de las hipercuádricas en dimensión 4

A continuación, clasificaremos las hipercuádricas desde el punto de vista afín. Iremos enumerando los distintos tipos incluyendo sus propiedades afines más importantes; si tiene centro, asíntotas o si es posible encontrar una ecuación diagonal afín. Asimismo, para obtener una idea intuitiva de la naturaleza geométrica de cada tipo, describiremos las posibles intersecciones de hiperplanos con una hipercuádrica dada. Para ello, $\mathcal{C}(\omega)$ será una hipercuádrica, $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}(\omega_{|W}) = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ será su *cuádrica en el infinito* y H denotará un hiperplano propio, siendo $\pi_\infty(H) = H \cap H_\infty$ el plano del infinito de H. Con respecto a la referencia $\mathcal{R}$, supongamos que A es una matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$. Denotamos por α_{00} al menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} el adjunto de este elemento. Con respecto a $\mathcal{R}_\infty$, α_{00} es una matriz asociada a $\mathcal{C}_\infty$.

A lo largo de lo que sigue el lector debe tener siempre presente la proposición 2.2.1, el corolario 2.2.2 y la proposición 2.4.1. No haremos mención expresa de que los estamos utilizando. Asimismo, para la información que se da sobre elementos afines, centro, asíntotas, etc., se va haciendo uso de las proposiciones 3.4.2, 3.4.7, 3.4.8 y 3.4.10.

Clasificación afín: desde el punto de vista afín se obtienen los tipos de hipercuádricas siguientes:

1.- Si rango $A = 5$. La hipercuádrica es ordinaria y no hay puntos singulares ($\mathcal{S} = \emptyset$). Por tanto, cualquier hiperplano, H_∞ o H, está en la imagen de la polaridad. El punto P_o denotará el polo de H_∞. Los casos que se pueden dar para la signatura de ω son:

(i) $\text{sig}(\omega) = (5, 0)$. Aquí $q+s = -1$ y $\mathcal{C}_\infty$ tiene signatura $(4, 0)$, ya que $P_o \notin H_\infty$. Luego, como es ordinaria, de tipo elíptico e imaginaria, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperelipsoide imaginario.* Tiene un centro, no tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Como el polo de H no está en H, la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es $(4, 0)$. Esto era de esperar, pues $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. Nótese que la cónica $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(3, 0)$.

(ii) $\text{sig}(\omega) = (4, 1)$. Como $q + s = 0$, la hipercuádrica contiene puntos. Se tendrán los siguientes casos:

(a) Si P_o pertenece a H_∞, entonces sig $\alpha_{00} = (3, 0)$ y $\mathcal{C}_\infty = \{P_o\}$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$es un *hiperparaboloide no reglado.* Esta hipercuádrica no posee ni centro, ni asíntotas, ni admite ecuación diagonal afín.

La signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser $(4, 0)$, $(3, 1)$ o $(3, 0)$. En el primer caso, se tiene que $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede tener como signatura $(3, 0)$ o $(2, 0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un elipsoide real o un paraboloide no reglado. En el último caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P\}$, con P propio. Por tanto, tendremos que la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será necesariamente $(3, 0)$, no puede ser $(2, 0)$. Luego $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono imaginario.

Si P_o no pertenece a H_∞, tendremos las dos siguientes situaciones:

(b) $\text{sig}\,\alpha_{00} = (4, 0)$. Como es ordinaria, de tipo elíptico y real, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperelipsoide real.* Tiene centro, ecuación diagonal afín y no posee asíntotas.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(4, 0)$, $(3, 1)$ o $(3, 0)$. La signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ es necesariamente $(3, 0)$ en los tres casos. Por tanto, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será vacío, un elipsoide real o un cono imaginario, respectivamente.

(c) $\text{sig}\,\alpha_{00} = (3, 1)$. Al ser ordinaria, de tipo hiperbólico y no contener rectas, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperhiperboloide no reglado.* Tiene un centro, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

La signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ puede ser $(4, 0)$, $(3, 1)$ o $(3, 0)$. En el primer caso, se tiene que $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede tener como signatura $(3, 0)$, $(2, 1)$ o $(2, 0)$. De esto se deduce que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un elipsoide real, un hiperboloide no reglado o un paraboloide no reglado, respectivamente. En el tercer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(3, 0)$ o $(2, 0)$, luego $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono imaginario o un cilindro imaginario.

iii) $\text{sig}\,\omega = (3, 2)$. Esta hipercuádrica está formada por rectas, ya que $q + s = 1$. Si P es un punto propio de $\mathcal{C}(\omega)$, las rectas contenidas en $\mathcal{C}(\omega)$ que pasan por P forman un cono real con vértice P en $\widetilde{f}(P) = H$. Si P es un punto impropio de $\mathcal{C}(\omega)$, las rectas contenidas en $\mathcal{C}(\omega)$ que pasan por P forman: si $\widetilde{f}(P) = H_\infty$, $P = P_o$, una cuádrica real de rango 3 en H_∞ con punto singular $P = P_o$ o si $\widetilde{f}(P) = H \neq H_\infty$, un cilindro real (de tipo parabólico, elíptico o hiperbólico) en H con punto singular P.

Observación 4.1.1. En ciertas referencias, esta hipercuádrica, considerada meramente desde el punto de vista proyectivo, se denomina *cuádrica de Lie* y se identifica con el espacio cuyos elementos son las circunferencias orientadas del plano. El estudio de dicho espacio es un caso particular de lo que es usualmente referido como *geometría de Lie de las esferas orientadas* (ver [4]).

Los casos que se pueden dar aquí son:

(a) Si $P_o \in H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (2,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperparaboloide reglado*. No tiene centro, tiene asíntotas y no admite ecuación diagonal afín.

La signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ puede ser $(3,1)$, $(2,2)$ o $(2,1)$. En el primer caso, entonces $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(2,1)$ o $(2,0)$. Ello implica que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide no reglado o un paraboloide no reglado. En el segundo caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(2,1)$ o $(1,1)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide reglado o un paraboloide reglado. En el último caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá ser $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. Así, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono real, un cilindro elíptico real, un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico, respectivamente.

Si $P_o \notin H_\infty$, tendremos una de las dos situaciones siguientes:

(b) $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (3,1)$. Como $\mathcal{C}_\infty$ es ordinaria y no reglada, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperhiperboloide reglado con cuádrica del infinito no reglada*. Posee centro, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

La cuádrica $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ tendrá signatura $(3,1)$, $(2,2)$ o $(2,1)$. En el primer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(3,0)$, $(2,1)$ o $(2,0)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un elipsoide real, un hiperboloide no reglado o un paraboloide no reglado, respectivamente. En el segundo caso, $(2,1)$ es necesariamente la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un hiperboloide reglado. En el tercer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede ser $(2,1)$ o $(2,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono real o un cilindro elíptico real.

(c) $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (2,2)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperhiperboloide reglado con cuádrica del infinito reglada*. Tiene centro, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,1)$, $(2,2)$ o $(2,1)$. En el primer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ sólo podrá ser $(2,1)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide no reglado. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,1)$ o $(1,1)$, de ahí que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ resultará un hiperboloide reglado o un paraboloide reglado. En el tercer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede ser $(2,1)$ o $(1,1)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono real o un cilindro hiperbólico.

Observación 4.1.2. Una hipercuádrica ordinaria en dimensión 4 no contiene planos. Comenzando por las dimensiones bajas, la hipercuádrica de signatura $(3,3)$ en dimensión

5, denominada *cuádrica de Klein*, es la primera variedad cuadrática ordinaria formada por planos. Mediante el embebimiento de Plücker, dicha hipercuádrica se identifica con el espacio de las rectas en el espacio proyectivo de dimensión 3 (ver [11]).

2.- Si rango $A = 4$. La hipercuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ es degenerada y el conjunto de sus puntos singulares consiste en un único punto, $\mathcal{S} = \{Q\}$. En cuanto al estudio afín, aquí se tiene una situación adicional que no se daba en las ordinarias. Dicha situación es que el hiperplano del infinito no contenga al punto singular.

(i) $\operatorname{sig}\omega = (4, 0)$. En este caso $q + s = 0$ y $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida únicamente por el punto singular Q. Aquí sólo se distinguen dos casos:

(a) Si $Q \notin H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (4, 0)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercono imaginario.* No tiene centro, ni asíntotas. Sin embargo, tiene ecuación diagonal afín, ya que su punto singular es propio.

Para $H \cap \mathcal{C}(\omega)$, si $Q \notin H$, entonces $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ tendrá signatura $(4, 0)$ y la de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(3, 0)$. Por consiguiente, $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. En cambio, si $Q \in H$, la signatura de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será $(3, 0)$ y la de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ también será $(3, 0)$, entonces $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono imaginario.

(b) Si $Q \in H_\infty$, entonces existe un punto P_o que será un polo de H_∞. Aquí necesariamente P_o no pertenece a H_∞. Luego, $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (3, 0)$. Diremos $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro imaginario.* Tiene centro, ecuación diagonal afín, y no hay asíntotas.

Para $H \cap \mathcal{C}(\omega)$, si $Q \notin H$, entonces $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \emptyset$. Si $Q \in H$, entonces $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(2, 0)$. Por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro imaginario.

(ii) $\operatorname{sig}\omega = (3, 1)$. Aquí se tiene que $q + s = 1$. Ello implica que $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por rectas que pasan por el punto singular Q. Se pueden dar los siguientes casos:

(a) Si $Q \notin H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (3, 1)$. Nótese que $\mathcal{C}_\infty$ es ordinaria real y no reglada. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercono real que no contiene planos.* No tiene centro, tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Observación 4.1.3. Este tipo de hipercuádrica tiene lugar en el espacio-tiempo de Minskowki dentro del estudio de la relatividad especial. Constituye lo que en ese contexto se denomina el *cono de luz.* La historia de una partícula material transcurre a lo largo de puntos interiores de dicha hipercuádrica (ver [9]).

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3, 1)$, $(3, 0)$, $(2, 1)$ o $(2, 0)$. En el primer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(3, 0)$, $(2, 1)$ o $(2, 0)$. Por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un elipsoide real, un hiperboloide no reglado o un paraboloide no reglado, respectivamente. En el segundo caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(3, 0)$, ($(2, 0)$ no se puede dar), lo que implica que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono imaginario. En el tercer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2, 1)$, resultando $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ un cono real. En el último caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2, 0)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos.

Si $Q \in H_\infty$, entonces existe un punto P_o que será polo de H_∞.

(b) Si $P_o \in H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (2,0)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro parabólico que no contiene planos*. No tiene centros, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,1)$, $(3,0)$, $(2,1)$ o $(2,0)$. En los dos primeros casos, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un paraboloide no reglado o un cilindro imaginario. En los dos últimos casos, $(2,1)$ o $(2,0)$, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,0)$ o $(1,0)$. Para $(2,1)$, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro elíptico real o un cilindro parabólico. Para $(2,0)$, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos o paralelos.

Si $P_o \notin H_\infty$, entonces se tienen dos posibilidades:

(c) sig $\alpha_{00} = (3,0)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro elíptico real*. Tiene una recta de centros, no tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,1)$, $(3,0)$, $(2,1)$ o $(2,0)$. En el primer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un elipsoide real. En el segundo caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro imaginario. En los dos últimos casos, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,0)$. Ello implica que, en el tercer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro elíptico real y, en el último caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos imaginarios no paralelos.

(d) sig $\alpha_{00} = (2,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro hiperbólico que no contiene planos*. Tiene una recta de centros, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,1)$, $(3,0)$, $(2,1)$ o $(2,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ es de signatura $(2,1)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide no reglado. En el segundo caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(2,0)$ y tendremos que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro imaginario. En el tercer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$, ya que $(2,1)$ no puede ser porque $Q \in \pi_\infty(H)$. Por tanto, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro elíptico real, un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico, respectivamente. En el último caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(2,0)$ o $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos o paralelos.

(iii) sig $\omega = (2,2)$. Aquí se tiene $q + s = 2$. Ello implica que $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por planos que pasan por el punto singular Q. Si P es un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces por el punto P pasan únicamente dos planos contenidos en $\mathcal{C}(\omega)$ que se intersecan según la recta PQ. Se pueden dar los casos siguientes:

(a) Si $Q \notin H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (2,2)$. Diremos que es un *hipercono que contiene planos*. No hay centro, tiene asíntotas y ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,2)$, $(2,1)$ o $(1,1)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,1)$ o $(1,1)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide reglado o un paraboloide reglado. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ también tendrá signatura $(2,1)$, luego $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono real. En el último caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será $(1,1)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios no paralelos.

Si $Q \in H_\infty$, existe un punto P_o que será polo H_∞. Se tienen las posibilidades:

(b) Si $P_o \in H_\infty$, entonces $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (1,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro parabólico que contiene planos*. No tiene centro, tiene asíntotas y no admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,2)$, $(2,1)$ o $(1,1)$. En el primer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un paraboloide reglado. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(1,1)$ o $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico. En el tercer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede tener signatura $(1,1)$, $(1,0)$ o $(0,0)$. Por tanto, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios no paralelos, dos planos reales propios paralelos o el producto de un plano propio por un plano impropio, respectivamente.

(c) Si $P_o \notin H_\infty$, entonces $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (2,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro hiperbólico que contiene planos*. Tiene centros, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,2)$, $(2,1)$ o $(1,1)$. En el primer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide reglado, ya que $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tiene signatura $(2,1)$. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro elíptico real, un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico, respectivamente. En el último caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede ser $(1,1)$ o $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios no paralelos o paralelos.

3.- Si rango $A = 3$. El conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ constituyen una recta $\mathcal{S}$. Se tienen los casos:

(i) $\operatorname{sig} \omega = (3,0)$. Aquí $q + s = 1$ y $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ está constituida por la recta de puntos singulares. Distinguimos a su vez los casos:

(a) Si $\mathcal{S} \not\subseteq H_\infty$, entonces $\operatorname{sig}\ \alpha_{00} = (3,0)$. Se tiene que $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ es una recta propia cuya dirección determina el único punto singular en H_∞. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *conoide imaginario*. No tiene centro, ni asíntotas y, como hay puntos singulares propios, admite ecuación diagonal afín.

Las signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ pueden ser $(3,0)$ o $(2,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(3,0)$ o $(2,0)$. Así, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono imaginario o un cilindro imaginario. En el segundo caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos.

(b) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$, entonces $\operatorname{sig}\ \alpha_{00} = (2,0)$. Se tiene que $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ es una recta impropia. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindroide imaginario*. Tiene centros, no tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,0)$ o $(2,0)$. En el primer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro imaginario. En el otro caso, si $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty = \mathcal{S}$ es de signatura $(1,0)$, entonces $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios paralelos.

(ii) $\operatorname{sig}\omega = (2,1)$. Aquí $q+s=2$ y $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por planos que contienen a $\mathcal{S}$. Si P es un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces hay un único plano π contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ tal que $P \in \pi$. Dicho plano π es el determinado por el punto P y la recta $\mathcal{S}$. Aquí se tienen cuatro posibilidades:

(a) Si $\mathcal{S} \nsubseteq H_\infty$, entonces $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (2,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *conoide real*. No tiene centro, tiene asíntotas y, como cuenta con puntos singulares propios, admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá tener signatura $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. Por tanto, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono real, un cilindro elíptico real, un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico, respectivamente. En el segundo caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá ser $(2,0)$ o $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos o paralelos. En el tercer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá tener signatura $(1,1)$ o $(1,0)$ y $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios no paralelos o paralelos. En el último caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un plano propio doble.

(b) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$ y existe un punto $P_o \in H_\infty$ cuyo hiperplano polar es H_∞, entonces $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (1,0)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindroide parabólico*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.

La intersección $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ tendrá signatura $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. En los dos primeros casos, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ sólo podrá ser de signatura $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro parabólico o dos planos imaginarios paralelos, respectivamente. En los dos últimos casos, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá ser $(1,0)$ o $(0,0)$. Para $(1,1)$, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios paralelos o un producto de un plano propio por un plano impropio. Para $(1,0)$, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble o un plano impropio doble.

Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$ y existe un punto $P_o \notin H_\infty$ cuyo hiperplano polar es H_∞, entonces se tienen los dos casos siguientes:

(c) $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (2,0)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindroide elíptico*. Tiene un plano de centros y admite ecuación diagonal afín. No tiene asíntotas.

Las posibles signaturas $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ serán $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. En los dos primeros casos, $(2,1)$ y $(2,0)$, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ tendrá signatura $(2,0)$ y $(1,0)$, respectivamente. Luego, para $(2,1)$, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro elíptico real y, para $(2,0)$, será dos planos imaginarios paralelos. Para los dos últimos casos, $(1,1)$ o $(1,0)$, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ sólo podrá ser $(1,0)$, por lo que se obtendrá que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales paralelos o un plano propio doble.

(d) $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (1,1)$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es una *cilindroide hiperbólico*. Tiene un plano de centros, asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ serán $(2,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ solo podrá tener signatura $(1,1)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro hiperbólico. En el segundo caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios paralelos. En el tercer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá ser $(1,0)$ o $(0,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios paralelos o un producto de un plano propio por un plano impropio. En el último caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble o un plano impropio doble.

4.- Si rango $A = 2$. Aquí el conjunto de sus puntos singulares $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}(\omega)$ es un plano. Los casos que se pueden dar son los siguientes:

(i) $\operatorname{sig} \omega = (2,0)$. Se tiene que $q+s=2$ y $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ está constituida simplemente por el plano de puntos singulares. Las posibilidades que pueden tener lugar son:

(a) Si $\mathcal{S} \nsubseteq H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (2,0)$. Se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *producto de dos hiperplanos imaginarios no paralelos.* No tiene centro, ni asíntotas. Sin embargo, admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,0)$ o $(1,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá tener signatura $(2,0)$ o $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios no paralelos o paralelos. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble, $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$.

(b) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$, entonces existe un punto $P_o \notin H_\infty$ cuyo hiperplano polar es H_∞. Por tanto, se tiene que $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (1,0)$. Se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *producto de dos hiperplanos imaginarios paralelos.* Tiene centro, no tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,0)$ o $(1,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos imaginarios paralelos. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty = \mathcal{S} = \pi_\infty(H)$ tendrá signatura $(0,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ será un plano impropio doble.

(ii) $\operatorname{sig} \omega = (1,1)$. Se tiene $q+s=3$ y $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por dos hiperplanos que contienen al plano $\mathcal{S}$ de puntos singulares. Los casos posibles son los siguientes:

(a) Si $\mathcal{S} \nsubseteq H_\infty$, sig $\alpha_{00} = (1,1)$. Se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *producto de dos hiperplanos propios reales no paralelos.* No hay centro, tiene asíntotas y ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(1,1)$, $(1,0)$ o $(0,0)$. En el primer caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ puede ser igualmente de signatura $(1,1)$, $(1,0)$ o $(0,0)$. Por lo tanto, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos reales propios no paralelos, paralelos o un producto de un plano impropio por un plano real propio. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ será de signatura $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$ es un plano propio doble. En el tercer caso, $H \cap \mathcal{C}(\omega) = H$ es uno de los dos hiperplanos que constituyen $\mathcal{C}(\omega)$.

(b) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$ y existe un punto $P_o \in H_\infty$ cuyo hiperplano polar es H_∞, entonces se tiene que $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (0,0)$. Se dirá que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *producto de un hiperplano* *propio real por el hiperplano impropio*. No posee centro, ni asíntotas, ni admite ecuación diagonal afín.

Sea H_o el hiperplano propio tal que $\mathcal{C}(\omega) = H_o.H_\infty$. Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(1,1)$, $(1,0)$ o $(0,0)$. Aquí, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty = \pi_\infty(H)$ es de signatura $(0,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el producto de un plano propio por un plano impropio $((H \cap H_o).\pi_\infty(H))$, un plano impropio doble $(\pi_\infty(H)^2 = \mathcal{S}^2)$ o simplemente $H \cap \mathcal{C}(\omega) = H = H_o$.

(c) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$ y existe un punto $P_o \notin H_\infty$ cuyo hiperplano polar es H_∞, entonces se tiene que sig $\alpha_{00} = (1,0)$. Se tiene que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *producto de dos hiperplanos reales paralelos*. Tiene centro, no tiene asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

Denotamos $\mathcal{C}(\omega) = H_1.H_2$. Las posibles signaturas $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(1,1)$, $(1,0)$ o $(0,0)$. En el primer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ es $(1,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos reales paralelos. En el segundo caso, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty = \pi_\infty(H) = \mathcal{S}$ será de signatura $(0,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el plano impropio doble $\mathcal{S}^2$. En el último caso, $H = H_1$ o $H = H_2$.

5.- Si rango $A = 1$, entonces $\operatorname{sig} \omega = (1,0)$. Se tiene que $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano doble que coincide con el conjunto de sus puntos singulares, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$. Bajo la perspectiva afín, se contemplan dos casos:

(a) Si $\mathcal{S} \not\subseteq H_\infty$, entonces sig $\alpha_{00} = (1,0)$. Aquí $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$ es un *hiperplano propio doble*. No cuenta con centro, ni con asíntotas, aunque tiene ecuación diagonal afín.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(1,0)$ o $(0,0)$. En el primer caso, la signatura de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ podrá ser $(1,0)$ o $(0,0)$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble (H no es paralelo a $\mathcal{S}$) o un plano impropio doble ($H \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{S} = \pi_\infty(H)^2$, H y $\mathcal{S}$ son paralelos y distintos). En el segundo caso, se tiene que $H = \mathcal{S}$, por lo que $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}$.

(b) Si $\mathcal{S} \subseteq H_\infty$, entonces $\operatorname{sig} \alpha_{00} = (0,0)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2 = H_\infty^2$ es el *hiperplano impropio doble*. Tiene centros, no hay asíntotas y admite ecuación diagonal afín.

La intersección $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ siempre es un plano impropio doble, $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \pi_\infty(H)^2$.

En la tabla 4.1 son mostrados los diferentes tipos de hipercuádrica que se han en la clasificación anterior. Dicha tabla también contiene la información mas relevante relativa a cada tipo.

nombre	(p, q)	(p_∞, q_∞)	centro	asÌntotas	ec. diag. afÌn	$q + s$
hiperelipsoide imaginario	$(5, 0)$	$(4, 0)$	si	no	si	-1
hiperparaboloide no reglado	$(4, 1)$	$(3, 0)$	no	no	no	0
hiperelipsoide real	$(4, 1)$	$(4, 0)$	si	no	si	0
hiperhiperboloide no reglado	$(4, 1)$	$(3, 1)$	si	si	si	0
hiperparaboloide reglado	$(3, 2)$	$(2, 1)$	no	si	no	1
hiperhiperboloide reglado con $\mathcal{C}_\infty$ no reglada	$(3, 2)$	$(3, 1)$	si	si	si	1
hiperhiperboloide reglado con $\mathcal{C}_\infty$ reglada	$(3, 2)$	$(2, 2)$	si	si	si	1
hipercono imaginario	$(4, 0)$	$(4, 0)$	no	no	si	0
hipercilindro imaginario	$(4, 0)$	$(3, 0)$	si	no	si	0
hipercono real que no contiene planos	$(3, 1)$	$(3, 1)$	no	si	si	1
hipercilindro parabólico que no contiene planos	$(3, 1)$	$(2, 0)$	no	no	no	1
hipercilindro elíptico real	$(3, 1)$	$(3, 0)$	si	no	si	1
hipercilindro hiperbólico que no contiene planos	$(3, 1)$	$(2, 1)$	si	si	si	1
hipercono que contiene planos	$(2, 2)$	$(2, 2)$	no	si	si	2
hipercilindro parabólico que contiene planos	$(2, 2)$	$(1, 1)$	si	si	si	2
hipercilindro hiperbólico que contiene planos	$(2, 2)$	$(2, 1)$	si	si	si	2
conoide imaginario	$(3, 0)$	$(3, 0)$	no	no	si	1
cilindroide imaginario	$(3, 0)$	$(2, 0)$	si	no	si	1
conoide real	$(2, 1)$	$(2, 1)$	no	si	si	2
cilindroide parabólico	$(2, 1)$	$(1, 0)$	no	no	no	2
cilindroide elíptico real	$(2, 1)$	$(2, 0)$	si	no	si	2
cilindroide hiperbólico	$(2, 1)$	$(1, 1)$	si	si	si	2
dos hiperplanos imaginarios no paralelos	$(2, 0)$	$(2, 0)$	no	no	si	2
dos hiperplanos imaginarios paralelos	$(2, 0)$	$(1, 0)$	si	no	si	2
dos hiperplanos propios reales no paralelos	$(1, 1)$	$(1, 1)$	no	si	si	3
hiperplano propio por el hiperplano impropio	$(1, 1)$	$(0, 0)$	no	no	no	3
dos hiperplanos propios reales paralelos	$(1, 1)$	$(1, 0)$	si	no	si	3
hiperplano propio doble	$(1, 0)$	$(1, 0)$	no	no	si	3
hiperplano impropio doble	$(1, 0)$	$(0, 0)$	si	no	si	3

Tabla 4.1: Clasificación de las hipercuádricas en el espacio afín de dimensión 4

4.2. Hipercuádricas tangentes

Para conocer aún mejor la naturaleza geométrica de las distintas hipercúadricas que surgen en la clasificación anteriormente expuesta, procedemos describir la hipercuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ a una hipercuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ desde un punto P. Esto también nos dará información sobre la posición relativa de P respecto de $\mathcal{C}(\omega)$ (ver la definición 2.5.2).

Por razones de espacio y por no ser demasiado reiterativos, no haremos una exposición exhaustiva para todos los tipos de hipercuádrica que surgen en la clasificación descrita en la sección anterior. En su lugar, veremos hipercuádricas tangentes únicamente para ciertas hipercuádricas que consideramos representativas y cuyo estudio resulte ilustrativo. A partir de ellos, el lector podrá describir la situación para cualquier otro tipo cualquiera de hipercuádrica. Finalmente, indicamos que, a lo largo de esta sección, seguimos considerando $\operatorname{sig}(\omega) = (p, q)$ con $p \geq q$.

1.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hiperparaboloide no reglado. En primer lugar, observamos que existe un único punto $P_\infty \in H_\infty$ tal que $\widetilde{f}(P_\infty) = H_\infty$. Se tiene $\mathcal{C}(\omega_{P_\infty}) = H_\infty^2$ y que $\mathcal{C}(\omega_{P_\infty}) \cap \mathcal{C}(\omega) = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}_\infty$ es de signatura $(3, 0)$. Recordamos que la signatura de $\mathcal{C}(\omega)$ es $(4, 1)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega_{P_\infty}) \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P_\infty\}$ es una cuádrica imaginaria de rango 3 en H_∞.

Sea P un punto cualquiera distinto de P_∞ y sea $H = \widetilde{f}(P)$ su hiperplano polar. Se tiene que H es un hiperplano propio. Hemos ya visto que las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(4, 0)$, $(3, 1)$ o $(3, 0)$.

En el primer caso, $(4, 0)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En virtud de la proposición 2.5.1, la signatura $\mathcal{C}(\omega_P)$ es también $(4, 0)$. El punto P no puede ser impropio, pues en tal caso $\mathcal{C}(\omega_P)$ tendría un punto no singular P_∞. Por tanto, P necesariamente es propio, $\mathcal{C}(\omega_P) = \{P\}$ es un hipercono imaginario y P es un punto interior a $\mathcal{C}(\omega)$.

En el segundo caso, $(3, 1)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En virtud de la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es también $(3, 1)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercono real que no contiene planos. Si P es impropio, entonces $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es la cuádrica tangente a $\mathcal{C}_\infty$ desde P y $\pi_\infty(H)$ es el plano polar de P. Por tanto, la signatura de $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ coincide con la de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ que es de signatura $(3, 0)$ o $(2, 0)$. Como $P_\infty \in H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$, la signatura tiene que ser $(2, 0)$. Lo que implica que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercilindro parabólico que no contiene planos y P es un punto exterior a $\mathcal{C}(\omega)$.

En el tercer caso, $(3, 0)$, necesariamente $P \in \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$ es un hiperplano propio doble. Como estamos asumiendo $P \neq P_\infty$, entonces P es propio y $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P\}$ es un cono imaginario.

En resumen, hay dos tipos de puntos no pertecientes a $\mathcal{C}(\omega)$: los que la signatura de la correspondiente hipercuádrica tangente es $(4, 0)$, que son los puntos interiores a $\mathcal{C}(\omega)$, y aquellos en la signatura de dicha hipercuádrica tangente es $(3, 1)$, que son los puntos exteriores a $\mathcal{C}(\omega)$. Los puntos impropios no pertenecientes a $\mathcal{C}(\omega)$ son exteriores.

2.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hiperhiperboloide reglado con $\mathcal{C}_\infty$ reglada. En primer lugar, observamos que su hipercono asintótico es un hipercono que contiene planos. Además, al considerar una recta r contenida en dicho hipercono y que pase por el centro, obtendremos que r es una asíntota de $\mathcal{C}(\omega)$. Nótese que el centro $C = \langle \vec{c} \rangle$ es un punto exterior a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\omega(\vec{c}) > 0$.

Sea P un punto cualquiera distinto del centro y sea $H = \widetilde{f}(P)$ su hiperplano polar. Se tiene que H es un hiperplano propio, ya que P no es el centro. Sabemos que las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,1)$, $(2,2)$ o $(2,1)$.

En el primer caso, $(3,1)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Teniendo en cuenta la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(3,1)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercono real que no contiene planos. Si P es impropio, entonces $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es la cuádrica tangente a $\mathcal{C}_\infty$ desde P y $\pi_\infty(H)$ es el plano polar de P. Por tanto, la signatura de $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ coincide con la de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ que es $(2,1)$. Lo que implica que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercilindro hiperbólico que no contiene planos. Obsérvese que en este caso, P también es punto exterior a $\mathcal{C}(\omega)$, pero está en la zona del espacio delimitada por $\mathcal{C}(\omega)$ $(\omega(\vec{p}) < 0)$ donde no está situado el centro de $\mathcal{C}(\omega)$.

En el segundo caso, $(2,2)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercono que contiene planos. Si P es impropio, entonces $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ es de signatura $(2,1)$ ($(1,1)$ no puede ser, porque entonces se tendría $P \in \pi_\infty(H)$). Además, como antes, $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es la cuádrica tangente a $\mathcal{C}_\infty$ desde P en el espacio H_∞, luego tendrá la misma signatura que $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$, ya que $\pi_\infty(H)$ es el plano polar de P. Por todo ello se tiene que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercilindro hiperbólico que contiene planos. En este caso P es también un punto exterior que está situado en la misma zona del espacio delimitada por $\mathcal{C}(\omega)$ $(\omega(\vec{p}) > 0)$ donde está situado el centro de $\mathcal{C}(\omega)$.

En el tercer caso, $(2,1)$, necesariamente $P \in \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$ es un hiperplano propio doble. Si P es propio, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un cono real. Si P es impropio, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro hiperbólico.

Obsérvese que los puntos no pertenecientes a $\mathcal{C}(\omega)$ son de dos tipos: los que la correspondiente hipercuádrica tangente tiene cuádrica de contacto $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega)$ real no reglada y aquellos en que la correspondiente hipercuádrica tangente tiene cuádrica de contacto $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega)$ reglada. El centro es de este segundo tipo. Al ser reales las hipercuádricas tangentes, ambos tipos son puntos exteriores a $\mathcal{C}(\omega)$, pero situados en zonas distintas.

3.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hipercono real que no contiene planos y Q su único punto singular que es propio. Consideremos un punto P cualquiera que no sea singular y $H = \widetilde{f}(P)$. Se tiene que H es un hiperplano propio que contiene al punto singular. Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(3,0)$, $(2,1)$ o $(2,0)$.

En el primer caso, $(3,0)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Teniendo en cuenta la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(3,0)$. Tanto si P es propio como si es impropio, tenemos que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un conoide imaginario. El punto P es exterior.

En el segundo caso, $(2,1)$, también $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es también $(2,1)$. Tanto si P es propio como si es impropio, tenemos que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un conoide real. El punto P es interior.

En el último caso, $(2,0)$, P pertenece a $\mathcal{C}(\omega)$ y, como es distinto de Q, $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$. Tanto si P es propio como si impropio, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega) = PQ$ es dos planos imaginarios no paralelos.

4.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hipercilindro parabólico que contiene planos y $Q_\infty \in H_\infty$ su único punto singular. Aquí H_∞ contiene a todos sus polos. Si P_o es un polo de H_∞, entonces $\mathcal{C}(\omega_{P_o}) = H_\infty^2$. Se tiene que $\mathcal{C}(\omega_{P_o}) \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}_\infty$ es dos planos impropios reales cuya intersección es la recta impropia P_oQ_∞.

Consideremos un punto no singular P que no sea polo de H_∞ y $H = \widetilde{f}(P)$. Se tiene que las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,1)$ o $(1,1)$.

En el primer caso, $(2,1)$, se tiene $P \notin H$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(2,1)$. Aquí, los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ forman la recta PQ_∞. Si P es propio, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un conoide real. Si P es impropio, $H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es la cuádrica tangente a $\mathcal{C}_\infty$ desde P cuya signatura es $(1,0)$, la de $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cilindroide parabólico. Así, en este caso, P es exterior. Se observa que para esta hipercuádrica todos los puntos no pertenecientes son exteriores.

En el segundo caso, $(1,1)$, se tiene $P \in H$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$. Si P es propio, se tiene que $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos propios reales no paralelos cuya intersección es la recta propia PQ_∞. Si P es impropio, se tiene que $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos propios reales paralelos cuya intersección es la recta impropia PQ_∞.

5.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un cilindroide parabólico. En primer lugar, observamos que H_∞ contiene a la recta $\mathcal{S}$ de punto singulares y a todos sus polos. Si P_o es un polo de H_∞, entonces $\mathcal{C}(\omega_{P_o}) = H_\infty^2$. Además, $\mathcal{C}(\omega_{P_o}) \cap \mathcal{C}(\omega) = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P_o\} + \mathcal{S}$ es el plano impropio formado por los polos de H_∞ y la recta de puntos singulares $\mathcal{S}$.

Sea P un punto cualquiera que no sea polo de H_∞, ni punto singular, y sea $H = \widetilde{f}(P)$ su hiperplano polar. Se tiene que H es un hiperplano propio que contiene la recta impropia $\mathcal{S}$ de puntos singulares. Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$.

En el primer caso, $(2,0)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(2,0)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos imaginarios no paralelos que se intersecan según el plano propio $\{P\} + \mathcal{S}$. Si P es impropio $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos imaginarios paralelos que se intersecan según el plano impropio $\{P\} + \mathcal{S}$. El punto P de este caso ya sea propio o impropio es interior.

En el segundo caso, $(1,1)$, también $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(1,1)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un dos hiperplanos reales no paralelos que se intersecan en el plano propio $\{P\} + \mathcal{S}$. Si P es impropio $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos reales paralelos que se intersecan según el plano impropio $\{P\} + \mathcal{S}$. El punto P de este caso ya sea propio o impropio es exterior.

En el tercer caso, $(1,0)$, necesariamente $P \in \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$ es un hiperplano propio doble. Si P es propio, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el plano propio doble $\{P\} + \mathcal{S}$. Si P es impropio, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el plano impropio doble $\{P\} + \mathcal{S}$.

6.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un cilindroide elíptico. En primer lugar, observamos que, considerando uno de sus centros C y usando la proposición 2.5.1, la correspondiente hipercuádrica asíntótica $\mathcal{C}(\omega_C)$ es dos hiperplanos imaginarios no paralelos que se intersecan según el plano propio $\{C\} + \mathcal{S}$, el plano de centros. Al considerar una recta propia contenida en dicho plano, dicha recta es tangente pero no es asíntota, pues su dirección determina un punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Nótese que $C = \langle \vec{c} \rangle$ es un punto interior a $\mathcal{C}(\omega)$ y que $\omega(\vec{c}) < 0$.

Sea P un punto cualquiera que no sea centro, ni punto singular, y sea $H = \widetilde{f}(P)$. Se tiene que H es un hiperplano propio que contiene la recta $\mathcal{S}$, ya que P no es centro. Si P es impropio necesariamente es exterior. En efecto, en tal caso, se puede formar una referencia proyectiva autoconjugada respecto de $\mathcal{C}(\omega)$ cuyos puntos básicos sean C, P, P_1, S_1, S_2, donde P_1 es un punto no singular de $\pi_\infty(H)$ y $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$. Como la signatura es $(2,1)$ y

$\omega(\vec{c}) < 0$, se sigue que $\omega(\vec{p}) > 0$. Ello implica que P es punto exterior.

Las posibles signaturas de $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ son $(2,0)$, $(1,1)$ o $(1,0)$.

En el primer caso, $(2,0)$, necesariamente $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(2,0)$. Aquí P necesariamente es propio por ser interior y $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos imaginarios no paralelos que se intersecan según el plano propio $\{P\} + \mathcal{S}$. Por tanto, los puntos P de este caso son propios, interiores y están situados en la misma zona donde están los centros.

En el segundo caso, $(1,1)$, también $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por la proposición 2.5.1, la signatura de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $(1,1)$. Si P es propio, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos reales no paralelos que se intersecan según el plano propio $\{P\} + \mathcal{S}$. Si P es impropio $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos reales paralelos que se intersecan según el plano impropio $\{P\} + \mathcal{S}$. Los puntos P de este caso ya sean propios o impropios son exteriores.

En el tercer caso, $(1,0)$, necesariamente $P \in \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$ es un hiperplano propio doble. Al ser no singular, necesariamente P es propio y $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el plano propio doble $\{P\} + \mathcal{S}$.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo hemos alcanzado los principales objetivos que nos habíamos inicialmente planteado: dar la clasificación afín de las hipercuádricas en dimensión 4 y, de alguna manera, visualizarlas geométricamente. A su vez hemos presentado nombres para las distintas hipercuádricas, sugeridos por las propiedades proyectivas y afines que se satisfacen en cada caso. Dichos nombres han resultado más intuitivos de lo esperado.

Para el logro de los objetivos mencionados en el párrafo anterior, se han analizado con detalle ciertas propiedades de las variedades cuadráticas enmarcadas en un ámbito general de dimensión n. Esto ha sido ha realizado para los contextos afín y proyectivo. Es por ello, aunque aquí están aplicados en dimensión 4, los métodos desarrollados pueden naturalmente extenderse a cualquier dimensión. Particular mención en este sentido merecen los resultados relativos a:

- subespacios proyectivos contenidos en una variedad cuadrática.
- la incidencia de un hiperplano con una variedad cuadrática. En particular, en geometría afín, cuando dicha incidencia es considerando el hiperplano del infinito, nos suministra información sobre la variedad cuadrática del infinito de una variedad cuadrática dada.
- la signatura de la variedad cuadrática tangente desde un punto a una variedad cuadrática dada.
- posición relativa de un punto respecto de una variedad cuadrática.
- elementos afines de una variedad cuadrática como: asíntotas, centro, etc.

Apéndice A

Formas cuadráticas reales

Aquí se exponen las nociones y propiedades relativas a las formas cuadráticas reales que se utilizan a lo largo del trabajo. Este material se incluye con el ánimo de que el texto sea lo más autocontenido posible (para más detalles ver [2, 5, 8]).

A.1. Formas bilineales

Definición A.1.1. Sea V un espacio vectorial real, una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{R}$ se dice que es una *forma bilineal* sobre V, si satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}\,', \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}\,', \vec{y})$, (ii) $f(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{y}\,') = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}, \vec{y}\,')$,

para todo $\vec{x}, \vec{x}\,', \vec{y}, \vec{y}\,' \in V$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

El conjunto de las formas bilineales sobre V, denotado por $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$, tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

$$(f + g)(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y}), \qquad (\lambda f)(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}).$$

- Una forma bilineal f sobre V se dice que es *simétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales simétricas S^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$.
- Una forma bilineal f sobre V se dice que es *antisimétrica*, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$. El conjunto de las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$.

El espacio $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$ es suma directa de los subespacios S^2V^* y Λ^2V^*. Esto es, $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R}) = \mathsf{S}^2V^* \oplus \Lambda^2V^*$. Para $f \in \mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$, se tiene que $f = f_{\mathbf{s}} + f_{\mathbf{a}}$, donde

$$f_{\mathbf{s}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x})), \qquad f_{\mathbf{a}}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{y}, \vec{x})).$$

Teniéndose $f_{\mathbf{s}} \in \mathsf{S}^2V^*$ y $f_{\mathbf{a}} \in \Lambda^2V^*$.

A.2. Matriz asociada a una forma bilineal

Supongamos que dim $V = n$, y sea $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Si f es una forma bilineal sobre V, entonces

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

Si consideramos la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, obtenemos, por un lado, que la expresión de f está dada por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

y, por otro, que f se expresa matricialmente por

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t A Y.$$

Se dice que A es la matriz *asociada* a f respecto de la base $\mathcal{E}$.

Una matriz A es *simétrica*, si todo elemento a_{ij} de ella es tal que $a_{ij} = a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}} = A$, donde A^{t} denota la traspuesta de A. Una forma bilineal sobre V es simétrica si y sólo si está asociada a una matriz simétrica.

Cambios de base. Matrices congruentes: Sean $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ bases de V. Supongamos A y B son las matrices asociadas a f con respecto de las bases dadas. Es decir, $A = (a_{ij}) = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))$ y $B = (b_{ij}) = (f(\vec{u}_i, \vec{u}_j))$. Veamos como están relacionadas las matrices A y B. Para ello, supongamos que la segunda base viene dada en función de la primera. Esto es, para $j = 1, \ldots, n$, se tiene $\vec{u}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}\vec{e}_i$. Denotemos por $P = (p_{ij})$ la matriz cuya columna j está formada por las componentes de $\vec{u}_j$ respecto de la primera base. Entonces sabemos que el cambio de componentes viene dado por $X = PX'$. Así, tenemos que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t A Y = (PX')^t A (PY') = X'^t P^t A P Y' = X'^t B Y'.$$

Como $X'^t P^t A P Y' = X'^t B Y'$ se satisface para todo X', Y', se tiene que $B = P^t A P$.

Definición A.2.1. Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden n son *congruentes*, si existe una matriz cuadrada regular P de orden n tal que $B = P^t A P$.

Proposition A.2.2. *Dos matrices están asociadas a una misma forma bilineal si y sólo si son congruentes.*

A.3. Formas cuadráticas reales

Definición A.3.1. Dada $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Se llama *forma cuadrática* asociada a f, a la aplicación $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$. En este caso, la forma bilineal simétrica f se denomina *forma polar* de ω.

Como consecuencia tenemos las siguientes propiedades.

Proposition A.3.2. *Si ω es una forma cuadrática sobre V con forma polar f, entonces para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisfacen:*

$$\text{(i) } \omega(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\omega(\vec{x}), \qquad \text{(ii) } \omega(\vec{0}) = 0, \qquad \text{(iii) } \omega(\vec{x}+\vec{y}) = \omega(\vec{x}) + \omega(\vec{y}) + 2f(\vec{x},\vec{y}).$$

De la propiedad (iii) se deduce que $f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega(\vec{x}+\vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})\right)$. Ello permite calcular la forma polar a partir de la forma cuadrática. Por consiguiente, si dos formas bilineales simétricas definen la misma forma cuadrática, entonces son iguales. Así, podemos afirmar que existe una correspondencia biyectiva entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de modo que a cada forma cuadrática ω se le hace corresponder su forma polar. Asimismo, se comprueba sin dificultad que el conjunto $\mathcal{Q}(V,\mathbb{R})$ de las formas cuadráticas sobre V tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$(\omega + \omega')(\vec{x}) = \omega(\vec{x}) + \omega'(\vec{x}), \qquad (\lambda\omega)(\vec{x}) = \lambda\omega(\vec{x}).$$

Definición A.3.3. Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática, $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ su forma polar y V^* el espacio vectorial dual de V. La *aplicación lineal de polaridad* de ω es la aplicación $\hat{f} : V \longrightarrow V^*$ tal que $\hat{f}(\vec{v})$ es la forma lineal dada por $\hat{f}(\vec{v})(\vec{x}) = f(\vec{x},\vec{v})$.

Sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V y $\{\vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$ su base dual. Denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal $\hat{f}$ con respecto a dichas bases. Es decir, la matriz tal que $\hat{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\vec{e}_i^*$. Entonces se tiene que $a_{ij} = \hat{f}(\vec{e}_j)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, por lo que la matrices asociadas a la forma polar y a la aplicación lineal de polaridad coinciden.

Definición A.3.4. Se llama *rango* de una forma cuadrática, al rango de su aplicación lineal de polaridad, o lo que es lo mismo, al rango de una matriz asociada a la forma polar.

Una forma cuadrática se dice que es *ordinaria*, si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Es decir, si su matriz asociada es regular.

Una forma cuadrática se dice que es *degenerada*, si su rango es menor que la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada es singular.

A.4. Diagonalización de formas cuadráticas. Ley de inercia de Sylvester

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V y sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Para todo $\vec{x} \in V$, se tiene

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j f(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = X^t A X = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Por tanto, una forma cuadrática se expresa por un polinomio homogéneo de segundo grado $\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^n a_{ij}x_i x_j$, o bien, en forma matricial, por $\omega(\vec{x}) = X^t A X$.

Para toda forma cuadrática se puede buscar una base de modo que, respecto de la cual, la forma cuadrática se expresa como suma de únicamente términos cuadráticos. Un resultado básico para ello es el siguiente.

Proposition A.4.1. *Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática con forma polar f y sea $\vec{x} \in V$ tal que $\omega(\vec{x}) \neq 0$, entonces el conjunto $\{\vec{x}\}^f = \{\vec{y} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V tal que $V = \langle \vec{x} \rangle \oplus \{\vec{x}\}^f$.*

Usando de forma reiterada lo afirmado en la proposición anterior, se prueba lo siguiente.

Proposition A.4.2. *Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$,* dim $V = n$*, siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.*

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de rango r y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base tal que la matriz asociada a ω sea diagonal. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es usual ordenar la base para que primero figuren los d_i positivos y luego los d_i negativos.

Definición A.4.3. Se llama *signatura* de ω, al par (p, q), donde p es el número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a ω y q el número de elementos negativos.

Lo anterior tiene sentido debido al siguiente importante resultado dado a continuación.

Teorema A.4.4 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *El número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática real, es el mismo; tal número no depende, pues, de la diagonalización que se considere de ω, sino que es un número intrínsecamente ligado a la forma cuadrática.*

También el número de elementos negativos ha de coincidir, puesto que $p + q = r$.

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y sean r y (p, q) el rango y la signatura de ω. Sabemos existe una base de V, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, con respecto a la cual ω está dada por

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 - a_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - a_{p+q}^2 x_{p+q}^2,$$

donde $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, p + q$. La igualdad anterior es una *expresión diagonal* de ω.

Si tomamos la base, $\vec{u}_1 = \frac{\vec{e}_1}{a_1}, \ldots, \vec{u}_{p+q} = \frac{\vec{e}_{p+q}}{a_{p+q}}, \vec{u}_{p+q+1} = \vec{e}_{p+q+1}, \ldots, \vec{u}_n = \vec{e}_n$, entonces $\omega(\vec{u}_i) = \frac{\omega(\vec{e}_i)}{a_i^2} = \pm\frac{a_i^2}{a_i^2} = \pm 1$, para $i = 1, \ldots, p + q$. Por tanto, respecto de esta nueva base, se obtiene la *expresión canónica* de ω que estará dada por

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Bibliografía

[1] M. Berger, *Geometry*, Volumes I and II, Universitex, Spinger-Verlag (1987).

[2] J. de Burgos, *Curso de Algebra y Geometría*, Alhambra (1987).

[3] E. Casas-Alvero, *Analytic Projective Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics (2014).

[4] T. E. Cecil, *Lie Sphere Geometry*, Univesitext, Springer, second edition (2007).

[5] A. Doneddu, *Compléments de géométrie algébrique*, Dunod (1968).

[6] J. Frenkel, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann, Paris (1973).

[7] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Volúmenes I, II y III, Alianza Universidad, Madrid (1992).

[8] F. Martín Cabrera, *Variedades cuadráticas*, Proyecto Open Course Ware en la ULL (2013): https://campusvirtual.ull.es/ocw/course/view.php?id=87

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press (1983).

[10] L.A. Santaló, *Geometría Proyectiva*, Eudeba (1966).

[11] R. S. Ward, R. O. Wells, *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press (1980).

Hyperquadrics in the four-dimensional real affine space

Iván Trujillo Trujillo

Geometría y Aplicaciones

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

alu0100780314@ull.edu.es

Abstract

We study quadratic manifolds or hyperquadrics in four-dimensional spaces. We have considered this dimension because when we do intersections of hyperplanes with hyperquadrics we obtain quadrics, objects which are intuitively perceived. This allows us, although in dimension four, to visualize these hyperquadrics in some way. This study is not limited just to the projective ambient, we have also considered hyperquadrics as included in the real affine space of dimension four. Thus the affine classification for them is given. Names for the each type of hyperquadric are presented, they are suggested by the nature and properties of each one of them in the projective and affine ambients. For each type of hyperquadric, it is studied its intersection with an any arbitrary hyperplane. Then it is obtained the possible quadric sections for the type considered. Finally, we also describe tangent hyperquadrics from arbitrary points P to a given hyperquadric. Such tangent hyperquadrics provide us information about the relative position of the point P with respect to the hyperquadric.

1. Introduction

The quadratic manifolds are geometric objects which have raised a great interest and fascination along the history. In ancient Greece, the study of conics and quadrics was the subject of intense attention. Special mention deserves Apolonio, his work *Conics Sections* is so original and complete and its considers the second most important of Greek mathematics. With the arrival of the Renaissance, the artists, when studied and developed techniques which express realism in his works, needed use proyection and section principles of the proyective geometry. This, the Kepler's laws about the orbits of planets and the translations of the work of Apolonio lead a growing interest in proyective geometry. Furthermore, the contributions of supporters of synthetic geometry have been particularly relevant: duality principle of Poncelet, Steiner's results about conics and quadrics, etc. Otherwise, Möbius introduced barycentric coordinates and Plúcker gets in homogeneous coordinates. These last have resulted widely used.

2. Quadratic manifolds in proyective space

In this chapter we'll remember some important notions and properties from the point of proyective view relative to the quadratic manifolds. We'll only introduce these that will be needed later. First, we'll expose the most relevant definitions.

Definition 2.1 Let V be a real vector space of dimension more than 1 and $\mathcal{Q}(V,\mathbb{R})$ the vector space of the quadratic forms in V. A *quadratic manifold* in the proyective space $\mathcal{P}(V)$ is all point $\langle\omega\rangle$ of the proyective space $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V,\mathbb{R}))$. The *zeros* of $\langle\omega\rangle$ is the subset of $\mathcal{P}(V)$ given by $\mathcal{C}(\omega) = \{\langle\vec{x}\rangle \in \mathcal{P}(V)/\omega(\vec{x}) = 0\}$.

If $\dim \mathcal{P}(V) = 2$, the quadratic manifold $\langle\omega\rangle$ is called *conic*.
If $\dim \mathcal{P}(V) = 3$, the quadratic manifold $\langle\omega\rangle$ is called *quadric*.
If $\dim \mathcal{P}(V) > 3$, the quadratic manifold $\langle\omega\rangle$ is called *hyperquadric*.

Definition 2.2 The *polarity* of a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$ is the proyectivity $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ that is obtained from the linear map of polarity $\hat{f} : V \to V^*$ of ω. For a point $Y = \langle\vec{y}\rangle \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, it's says that $\widetilde{f}(Y) = \langle\hat{f}(\vec{y})\rangle$ is the *polar hyperplane* of Y and Y is a *pole* of $\widetilde{f}(Y)$.

Definition 2.3 Let the polarity $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ be, defined from a quadratic form ω with polar form f. Two point $\langle\vec{x}\rangle = X$ and $\langle\vec{y}\rangle = Y$ of $\mathcal{P}(V)$ is said that are *conjugate*, if $f(\vec{x},\vec{y}) = 0$. A point $\langle\vec{x}\rangle = X \in \mathcal{P}(V)$ is said that is *singular*, if it's conjugate to all the point of $\mathcal{P}(V)$. The set of the singular points is $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\ker \hat{f})$.

To proceed to classify the quadratic manifolds from the point of proyective view previously we develop results that will help us to describe the geometric nature of the different types of quadratic manifolds.

Proposition 2.4 *Let $\mathcal{C}(\omega)$ be a quadratic manifold in the proyective space $\mathcal{P}(V)$ of dimension n with signature $\operatorname{sig}(\omega) = (p,q)$, $p \geqslant q$, and such that the proyective subspace $\mathcal{S}$ of the singular points has dimension s. For this quadratic manifold verified:*

(i) *If a proyective subspace is contained in $\mathcal{C}(\omega)$ and it has dimension a, then $q + s \geqslant a$. It also exists at least a proyective subspace of dimension $q+s$ content in $\mathcal{C}(\omega)$ and a subspace contains necessarily to the set of singular points $\mathcal{S}$.*

(ii) *If P is a point of $\mathcal{C}(\omega)$, then always it exists a proyective subspace $\mathcal{R}$ of dimension $q+s$ such that $P \in \mathcal{R}$ and $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. In particular, if P is a not singular point of $\mathcal{C}(\omega)$, it has that $P \in \mathcal{R} \subseteq H$, where H is the polar hyperplane of P.*

(iii) *If a proyective subspace is disjoint to $\mathcal{C}(\omega)$ and it has dimension b, then $p - 1 \geqslant b$. There are also proyective subspaces of dimension $p-1$ that are disjoint to $\mathcal{C}(\omega)$.*

Definition 2.5
It's said that a line r is *tangent* to a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$, if $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ is a point or $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
It's said that proyective subspace $\mathcal{P}(W)$, of dimension equal or greater than 1, is *tangent* to $\mathcal{C}(\omega)$, if it exists a point P of $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ such that for all X in $\mathcal{P}(W)$ different to P it has that the line PX is tangent. P is called *tangent point* of $\mathcal{P}(W)$.

We'll describe the intersection of an hyperplane with a quadratic manifold.

Proposition 2.6 *Let $\mathcal{C}(\omega)$ be a quadratic manifold in a proyective space $\mathcal{P}(V)$ of dimension n with signature $\operatorname{sig}(\omega) = (p,q)$, $p \geqslant q$, and such that the proyective subspace $\mathcal{S}$ of its singular points has dimension s, and let $H = \mathcal{P}(W)$ be an hyperplane not contained in $\mathcal{C}(\omega)$, then $H \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(\omega_{|W})$. This is, $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ is a quadratic manifold in H given by the quadratic form $\omega_{|W}$.*
In respect to the singular points and the signature of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$, it has that:

(i) *If $\mathcal{S} \nsubseteq H$, then $H \cap \mathcal{S}$ are the singular points of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ and $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p,q)$.*

(ii) *If $\mathcal{S} \subseteq H$, then it has two possibilities:*

(a) *If H contains some P, such that $\widetilde{f}(P) = H$, then $\{P\} + \mathcal{S}$ are the singular points of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$. In this case, $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p-1, q-1)$.*

(b) *If H not contains some P, such that $\widetilde{f}(P) = H$, then $\mathcal{S}$ are singular points of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ and $\operatorname{sig}(\omega_{|W}) = (p, q-1)$ or $(p-1, q)$. When $q > 0$, is also given both signatures.*

Let the quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$ be which isn't a double hyperplane and let P be a not singular point of $\mathcal{C}(\omega)$. It's know that if we consider the set of lines which goes through P and are tangent to $\mathcal{C}(\omega)$, this set is a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega_P)$, that it's called *tangent quadratic manifold* of $\mathcal{C}(\omega)$ from P. If $P \in \mathcal{C}(\omega)$, then $\mathcal{C}(\omega_P)$ is a double hyperplane coincident with the polar hyperplane of P. Instead, if $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, then $\{P\} + \mathcal{S}$ are the singular points of $\mathcal{C}(\omega_P)$, where $\mathcal{S}$ are the singular points of $\mathcal{C}(\omega)$. The following result is about the signature of $\mathcal{C}(\omega_P)$ of the second case.

Proposition 2.7 *Let a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$ be which isn't a double hyperplane with signature (p,q), $p \geq q$, and let a point P be which doesn't belong to $\mathcal{C}(\omega)$ with polar hyperplane H, then the signatures of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ and $\mathcal{C}(\omega_P)$ coincide. This is, both are $(p-1,q)$ or $(p,q-1)$.*

3. Affine study of quadratic manifolds

In this section we'll describe some notions and properties that are important in the affine study of quadratic manifolds. First, we'll describe the relation between affine space and proyective space.
Given a proyective space $\mathcal{P}(V)$ and an hyperplane $H = \mathcal{P}(W)$ of this space, we'll go to give to the set $E = \mathcal{P}(V) - H$ of affine space structure. For these, we set a proyective reference $\mathcal{R}$ in $\mathcal{P}(V)$ and a normed basis $\{\vec{e}_0, \dots, \vec{e}_n\}$ of $\mathcal{R}$. In respect to $\mathcal{R}$, let's suppose an equation of the hyperplane H is given by

$$H \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Let $h : V \to \mathbb{R}$ be the linear form given by

$$h(\vec{v}) = h(v_0\vec{e}_0 + \cdots + v_n\vec{e}_n) = a_0v_0 + \cdots + a_nv_n,$$

We'll give to $E = \mathcal{P}(V) - H$ of affine space structure with direction W through the map $E \times E \longrightarrow W$, defined by $(P,Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$, being $\langle\vec{p}\rangle = P$, $\langle\vec{q}\rangle = Q$ y $h(\vec{p}) = h(\vec{q}) = 1$. It can check that this map is well defined and satisfies the requested conditions in the affine space definition.
If it gives it to E of affine space structure, the points of E are called *proper points* of $\mathcal{P}(V)$ and the points of H are called *improper points* of $\mathcal{P}(V)$.
Likewise, we also remember in the affine space E it has the operation $P * \vec{w} = \langle\vec{p} + \vec{w}\rangle$, where $P = \langle\vec{p}\rangle \in E$ with $h(\vec{p}) = 1$ and $\vec{w} \in W$.
Next, we establish the relation between proyective reference and affine reference.
If $(y_1, \dots, y_n)$ are the affine coordinates of $X \in E$ respect to $\mathcal{A}$, it has that $(1, y_1, \dots, y_n)$ are homogeneous coordinates of X respect to $\mathcal{R}$. Reciprocally, if it has the homogeneous coordinates $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ of $X \in E$ respect to $\mathcal{R}$, then $(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_1}{x_0})$ are affine coordinates of X respect to $\mathcal{A}$.
After this, we'll say $\mathcal{R}$ is the proyective reference *associated* to the affine reference $\mathcal{A}$.
In general a affine space E, with dimension n and direction a real vector space W, it can be extended with the addition of the set of points which are called impropers. This extended space $\overline{E}$ identifies with the proyective space $\mathcal{P}(\mathbb{R} \times W)$.
We'll board the affine study of quadratics manifolds.

Definition 3.1 Given a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$ defined in a affine space E with dimension n, we'll say that it's:

(i) *parabolic type*, if $H_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ or, when $H_\infty \nsubseteq \mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}_\infty$ is degenerated. This is, when $A_{00} = 0$.

(ii) *elliptical type*, when $\mathcal{C}_\infty$ is ordinary and totally imaginary. This is, $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (n,0)$.

(ii) *hiperbolic type*, when $\mathcal{C}_\infty$ is ordinary and real. This is, $\operatorname{sig}\alpha_{00} = (p_\infty, q_\infty)$ with $p_\infty + q_\infty = n$ y $q_\infty \neq 0$.

Here we'll rembember some relevant properties inside the affine study of quadratic manifolds.

Definition 3.2 It's called *center* of a quadratic manifold to a pole of the hyperplane of the infinity, if it exists and is proper.

Definition 3.3 Given a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$ with center. It's called *asymptotic quadratic manifold* of $\mathcal{C}(\omega)$ to the tangent quadratic manifold to $\mathcal{C}(\omega)$ from the center.
If $\mathcal{C}(\omega)$ is ordinary, then the center is the unique singular point of the asymptotic quadratic manifold of range n. As this singular point is proper, we'll call *asymptotic hypercone*.
A *diameter* of $\mathcal{C}(\omega)$, is all line which contains only one center.

Definition 3.4 It's said that a proper line r is *asymptote* of a quadratic manifold $\mathcal{C}(\omega)$, if it's tangent to $\mathcal{C}(\omega)$ and there is a not singular point $P_\infty = \langle\vec{p}\rangle$ of $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ contained in the improper hyperplane H_∞. Note that $\mathcal{C}(\omega)$ is necessarily real and for all $X = \langle\vec{x}\rangle$ of an asymptote r it's has $f(\vec{p},\vec{x}) = 0$. This is, P_∞ is a not singular tangent point of r.

4. Hyperquadrics in the four-dimensional affine space

The objective of this section is to describe in detail the classification, from the point of affine view, of the hyperquadrics in dimension four. Likewise, we'll try yo see clearly the geometry nature for each type of affine hyperquadric. For it, we'll set analogous notations to the those used in the previous chapter. This is, in the four-dimensional real proyective space $\mathcal{P}(V)$ we consider a hyperplane $H_\infty = \mathcal{P}(W)$ and we give to $E = \mathcal{P}(V) - H_\infty$ a structure of affine space using a lineal form h in V such that $\ker f = W$.
In the table 1 we show the different types of hyperquadrics which it will get with the most important information for each one. Then, we'll enumerate their affine properties: if it has center, asymptotes or if it's possible to find a diagonal affine equation. Futher, to get an intuitive idea of the geometry nature for each type, we'll describe the possible intersections of hyperplanes with a given hyperplane. For this, $\mathcal{C}(\omega)$ will be an hyperquadric, $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}(\omega_{|W}) = H_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ will be its *quadric in the infinity* and H will denote a proper hyperplane, being $\pi_\infty(H) = H \cap H_\infty$ the plane of the infinity for H.
An example for this is the following hyperquadric:
If rank $A = 4$, $\mathcal{C}(\omega)$ is degenerate and the set of its singular points is only one point, $\mathcal{S} = \{Q\}$. One of the hyperquadrics which we can find in this case has signature $\operatorname{sig}\omega = (3,1)$ and $Q \notin H_\infty$. This hyperquadric is formed by lines which goes through the singular point Q because $q + s = 1$. We name it *real hypercone which not contain planes.* It hasn't center, it has asymptotes and diagonal affine equation.

Remark 4.1 This type of hyperquadric takes place in the space-time of Minskowki in the special relativity study. It establishes the *light cone*. The history of a material particle elapses throughout to the interior points of the hyperquadric.

The possible signatures of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ are $(3,1)$, $(3,0)$, $(2,1)$ or $(2,0)$. In the first case, the signature of $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ will be $(3,0)$, $(2,1)$ or $(2,0)$. So $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ will be a real ellypsoid, a not ruled hyperboloid or a not ruled paraboloid, respectively. In the second case, the signature of $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ will be $(3,0)$, so $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ will be an imaginary cone. In the third case, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ will have signature $(2,1)$, resulting $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ a real cone. In last case, $\pi_\infty(H) \cap \mathcal{C}_\infty$ will have signature $(2,0)$ and $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ will be two imaginary not ruled planes.

name	(p,q)	(p_∞, q_∞)	$q+s$
imaginary hyperellipsoid	$(5,0)$	$(4,0)$	-1
not ruled hyperparaboloid	$(4,1)$	$(3,0)$	0
real hyperellipsoid	$(4,1)$	$(4,0)$	0
nor ruled hyperhyperboloid	$(4,1)$	$(3,1)$	0
ruled hyperparaboloid	$(3,2)$	$(2,1)$	1
ruled hyperhyperboloid with not ruled $\mathcal{C}_\infty$	$(3,2)$	$(3,1)$	1
ruled hyperhyperboloid with ruled $\mathcal{C}_\infty$	$(3,2)$	$(2,2)$	1
imaginary hypercone	$(4,0)$	$(4,0)$	0
imaginary hypercylinder	$(4,0)$	$(3,0)$	0
real hypercone which not contain planes	$(3,1)$	$(3,1)$	1
parabolic hypercylinder which not contain planes	$(3,1)$	$(2,0)$	1
real elliptical hypercylinder	$(3,1)$	$(3,0)$	1
hyperbolic hypercylinder which not contain planes	$(3,1)$	$(2,1)$	1
hypercone which contain planes	$(2,2)$	$(2,2)$	2
parabolic hypercylinder which contain planes	$(2,2)$	$(1,1)$	2
hyperbolic hypercylinder which contain planes	$(2,2)$	$(2,1)$	2
imaginary conoid	$(3,0)$	$(3,0)$	1
imaginary cylindroid	$(3,0)$	$(2,0)$	1
real conoid	$(2,1)$	$(2,1)$	2
parabolic cylindroid	$(2,1)$	$(1,0)$	2
elliptical cylindroid	$(2,1)$	$(2,0)$	2
hyperbolic cylindroid	$(2,1)$	$(1,1)$	2
two non-parallel imaginary hyperplanes	$(2,0)$	$(2,0)$	2
two parallel imaginary hyperplanes	$(2,0)$	$(1,0)$	2
two non-parallel real proper hyperplanes	$(1,1)$	$(1,1)$	3
improper hyperplane by a proper hyperplane	$(1,1)$	$(0,0)$	3
two parallel real proper hyperplanes	$(1,1)$	$(1,0)$	3
double proper hyperplane	$(1,0)$	$(1,0)$	3
double improper hyperplane	$(1,0)$	$(0,0)$	3

Table 1: *Clasification of hyperquadrics in the four-dimension real affine space*

To better understand the geometric nature of each hyperquadrics which are in the previous clasification, we'll describe the tangent hyperquadric from a no singular point P when $\mathcal{C}(\omega)$ isn't a double hyperplane. This also gives us information about the relative position of P in respect of $\mathcal{C}(\omega)$.
For reasons of space and not being too repetitive, we won't make a thorough exposure to all types of hyperquadrics that arise in the clasification. Instead, we'll see tangent hyperquadrics only for certain hyperquadrics we consider representative and whose study will be illustrative. From them, the reader can describe the situation for any other type of hyperquadric.
Here, we have an example where we study the tangent hyperquadric in the same case which we exposed in the clasification.
Let $\mathcal{C}(\omega)$ be a real hypercone which not contain planes and Q its singular and proper point. We consider any point P that isn't singular and $H = \widetilde{f}(P)$. It has H is a proper hyperplane which contains the singular point. The possible signatures of $H \cap \mathcal{C}(\omega)$ are $(3,0)$, $(2,1)$ or $(2,0)$.
In the first case, $(3,0)$, necessarily $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. Taking into account the proposition 2.7, the signature of $\mathcal{C}(\omega_P)$ is $(3,0)$. Whether or not P is proper, we have that $\mathcal{C}(\omega_P)$ is an imaginary conoid. The point P is external.
In the second case, $(2,1)$, $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ too. By the proposition 2.7, the signature of $\mathcal{C}(\omega_P)$ is also $(2,1)$. Whether or not P is proper, we have that $\mathcal{C}(\omega_P)$ is a real conoid. The point P is interior.
In last case, $(2,0)$, P belongs to $\mathcal{C}(\omega)$ and, as it's diferent to Q, $\mathcal{C}(\omega_P) = H^2$. Whether or not P is proper, $\mathcal{C}(\omega_P) \cap \mathcal{C}(\omega) = H \cap \mathcal{C}(\omega) = PQ$ is two imaginary non-parallel planes.

References

[1] M. Berger, *Geometry*, Volumes I and II, Universitex, Spinger-Verlag (1987).

[2] J. de Burgos, *Curso de Algebra y Geometría*, Alhambra (1987).

[3] E. Casas-Alvero, *Analytic Projective Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics (2014).

[4] T. E. Cecil, *Lie Sphere Geometry*, Univesitext, Springer, second edition (2007).

[5] A. Doneddu: *Compléments de géométrie algébrique*, Dunod (1968).

[6] J. Frenkel: *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann, Paris (1973).

[7] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Volúmenes I, II y III, Alianza Universidad, Madrid (1992).

[8] F. Martín Cabrera, *Variedades cuádráticas*, Proyecto Open Course Ware en la ULL (2013): https://campusvirtual.ull.es/ocw/course/view.php?id=87

[9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press (1983).

[10] L.A. Santaló, *Geometría Proyectiva*, Eudeba (1966).

[11] R. S. Ward, R. O. Wells, *Twistor geometry and field theory*, Cambridge University Press (1980).