



Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Introducción al Principio del Máximo

TRABAJO FIN DE GRADO

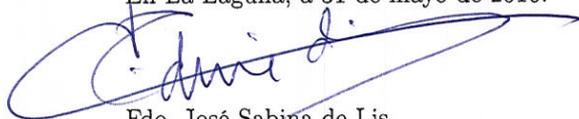
presentado por

MISAELE ENRIQUE PERAZA LUIS

La Laguna, 1 de junio de 2016

La memoria "Introducción al principio del máximo" ha sido realizada en el curso 2015-2016 por D. Misael Peraza Luis al objeto de ser presentada por éste como "Trabajo de Fin de Grado". Como director del trabajo, otorgo el visto bueno a su defensa pública.

En La Laguna, a 31 de mayo de 2016.



Fdo. José Sabina de Lis
Catedrático de Universidad
Departamento de Análisis Matemático

Índice general

INTRODUCCIÓN	VII
1. Principio del máximo en dimensión $N = 1$	1
1.1. Principios del máximo fundamentales	1
1.2. Inclusión de términos de orden cero	4
1.3. Una aplicación al problema de valor inicial	7
2. Principio del máximo: ecuaciones elípticas	9
2.1. Ecuaciones lineales en el plano: clasificación	9
2.2. Ecuaciones elípticas	12
2.3. Ecuación de Laplace: principio débil del máximo	14
2.4. Ecuaciones elípticas: principio débil del máximo	17
2.5. Aplicaciones	19
2.6. El principio fuerte del máximo	22
2.7. Problema de Dirichlet	25
2.8. El teorema de Phragmen–Lindelöff	28
2.9. Problema de Dirichlet: datos continuos a trozos	31
2.10. Singularidades evitables	32
2.11. La ecuación de Poisson	34
3. Principio del máximo: ecuación del calor	37
3.1. La ecuación del calor	37
3.2. La solución fundamental	37
3.3. Principio débil del máximo	38
3.4. Principio fuerte del máximo	40
3.4.1. Bolas calóricas	40
3.4.2. Propiedad de la media	41
3.4.3. Principio fuerte del máximo	44
BIBLIOGRAFÍA	47

Índice de figuras

2.1. La bola interior tangente B del Lema de Hopf.	23
3.1. La frontera parabólica Γ_T de Q_T	38
3.2. La bola calórica para $N = 2$	41
3.3. La zona de Q_T donde $u(x, t) = M$	45

Introducción

Contenido

Esta memoria presenta una introducción al principio del máximo en diversos escenarios: ecuaciones unidimensionales, ecuaciones de Laplace y de Poisson, ecuaciones elípticas en el plano y la ecuación del calor.

El principio del máximo está vinculado con las ecuaciones de segundo orden de tipo elíptico¹ y parabólico². Es una herramienta que proporciona información sobre diversos aspectos fundamentales de éstas: unicidad de las soluciones, signo de las mismas, existencia por comparación y aproximación, cálculo de cotas y estimaciones. Otras cuestiones más avanzadas trascienden los objetivos de esta presentación.

Consta de tres capítulos. El primero se ocupa de las ecuaciones lineales de segundo orden en dimensión 1. Las ecuaciones de Laplace y de Poisson se estudian junto con la clase más amplia de las ecuaciones elípticas en el segundo capítulo. Se han presentado los resultados en dimensión $N = 2$ pero las ideas fundamentales de las demostraciones son válidas en dimensión arbitraria $N \geq 2$. El capítulo 3 presenta los principios débil y fuerte del máximo para la ecuación del calor en dimensión N . En el caso del principio fuerte nos limitaremos a la ecuación del calor y la demostración hace uso de una versión de la propiedad de la media debida a N.Watson ([1]).

Objetivos y plan de trabajo

Un curso de introducción a las ecuaciones en derivadas parciales desde el punto de vista clásico incluye el tema del principio del máximo entre sus objetivos. Por un lado, es válido para las ecuaciones de la física matemática. Por otro, un tema clave como el de la unicidad de soluciones resulta prácticamente inviable sin el concurso del mismo.

Un aspecto que llama inmediatamente la atención en un primer estudio del tema es que las matemáticas implicadas son relativamente elementales. No exceden los conocimientos de un curso de cálculo diferencial para funciones de varias variables.

El objetivo ha sido el análisis detallado de los diversos tratamientos que de la prueba del principio del máximo se recogen en la literatura. Hemos puesto especial atención a las aplicaciones.

El plan de trabajo ha consistido en el estudio de los primeros capítulos de [3]. Esta es la referencia clásica sobre el tema. Otros aspectos de la materia se han extraído de los textos [1], [5]. El ejemplo de no unicidad para la ecuación de Poisson (Teorema 2.44) procede de [2]. Se ha hecho uso asimismo de las notas manuscritas del *Seminario de Ecuaciones de Derivadas Parciales* (POAT), curso 2015–2016.

¹Ecuaciones de Laplace y de Poisson.

²Ecuación del calor.

Summary

This memory provides an introduction to the maximum principle. Such result constitutes a key tool in the theory of partial differential equations. It is involved in fundamental issues concerning the theory. Namely, uniqueness and sign of solutions, comparison, existence by an approximation approach and the finding of “a priori” estimates. All of these subjects have been analyzed here in the framework of classical examples.

Capítulo 1

El Principio del máximo en dimensión uno

1.1. Principios del máximo fundamentales

Comenzamos recapitulando una propiedad elemental.

Propiedad 1.1. *Sea u una función derivable dos veces en el intervalo (a, b) .*

a) Si u tiene un máximo local en un punto $c \in (a, b)$, entonces:

$$u'(c) = 0 \quad y \quad u''(c) \leq 0.$$

b) Si u está definida en $[a, b]$ y en b hay un máximo local, entonces $u'(b) \geq 0$.

Introducimos ahora un poco de notación. Para $u \in C^2(a, b)$ definimos el operador diferencial de segundo orden:

$$L[u] = u'' + g(x)u', \tag{1.1}$$

en donde se supone en lo que sigue que $g(x)$ es una función acotada en (a, b) .

Propiedad 1.2. *Supongamos que $u \in C^2(a, b)$ satisface*

$$L[u] > 0$$

en el intervalo (a, b) . Entonces u no puede tener un punto c de máximo local en dicho intervalo.

Demostración. Supongamos que u tiene un máximo local en $c \in (a, b)$, entonces:

$$u'(c) = 0 \quad y \quad u''(c) \leq 0.$$

Aplicando las condiciones anteriores a $L[u]$ en c , tenemos que:

$$u''(c) + g(x)u'(c) = u''(c) \leq 0,$$

que contradice la hipótesis $L[u] > 0$ en (a, b) . □

Con la ayuda de esta propiedad vamos a demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.3 (Principio fuerte del máximo, $N = 1$). *Supongamos que $u = u(x)$ satisface:*

$$L[u] \geq 0 \quad a < x < b,$$

siendo $g(x)$ una función acotada en (a, b) . Si u toma un máximo absoluto de valor M en un punto c del intervalo (a, b) , entonces $u \equiv M$.

Demostración. Supongamos por contra que $u(c) = M$ y que hay un punto d perteneciente a (a, b) de forma que $u(d) < M$. Admitamos que $d > c$. Definimos la función:

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1,$$

con α una constante positiva que determinaremos. Se observa que si $a < x < c$ entonces $z(x) < 0$, si $c < x < b$ entonces $z(x) > 0$, mientras que $z(c) = 0$. Aplicando L a z :

$$L[z] \equiv z'' + g(x)z' = \alpha[\alpha + g(x)]e^{\alpha(x-c)}.$$

Elegimos un α grande de forma que $L[z] > 0$ para $a < x < b$. En efecto, tomamos $\alpha > -g(x)$ y podemos hacerlo dado que $g(x)$ está acotada en (a, b) . Como la exponencial siempre es positiva, concluimos que $L[z] > 0$. Ahora definimos:

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x),$$

donde ε es una constante positiva elegida de forma que satisfaga la desigualdad:

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

La suposición $u(d) < M$ y el hecho de que $z(d) > 0$ hace posible encontrar tal ε . Dado que z es negativa para $a < x < c$ tenemos:

$$w(x) < M \quad \text{en} \quad a < x < c.$$

Por la definición de ε :

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < u(d) + M - u(d),$$

así que:

$$w(d) < M.$$

En el punto c ,

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M$$

y como $w(a) < M$ (ya que $z(a) < 0$), w tiene un máximo mayor o igual a M el cual es alcanzado en un punto interior del intervalo (a, d) . Por otra parte,

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z]$$

y $L[z] > 0$. Por tanto:

$$L[w] > 0$$

en (a, b) . Esto es imposible por la Propiedad 1.2. Por tanto el caso $d > c$ no es posible. En el caso $d < c$, usamos la función auxiliar

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

con $\alpha > g(x)$ y razonamos igual para concluir que no es posible.

Por tanto $u \equiv M$ que es lo que se pretendía demostrar. \square

Corolario 1.4 (Principio débil del máximo). *Si $u \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ satisface:*

$$L[u] \geq 0$$

en (a, b) entonces:

$$\sup_{(a,b)} u = \max\{u(a), u(b)\}.$$

Corolario 1.5 (Principio del mínimo). *Supongamos u satisface:*

$$L[u] \leq 0,$$

$a < x < b$, con $g(x)$ acotada en (a, b) . Si u tiene un mínimo absoluto m en un punto c de (a, b) , entonces $u \equiv m$. En particular:

$$\inf_{(a,b)} u = \min\{u(a), u(b)\}.$$

Demostración. Llamamos $v = -u$, entonces:

$$L[v] \geq 0,$$

luego v cumple el principio del máximo. Por tanto, v tiene un máximo absoluto en un punto c de (a, b) con valor $v = -m$. Así $v = -m$. \square

Teorema 1.6. *Supongamos que $u \in C^2(a, b)$ es una función no constante, la cual satisface:*

$$u'' + g(x)u' \geq 0,$$

$x \in (a, b)$ la cual tiene derivadas laterales en a y b , con g acotada en cada subintervalo cerrado de (a, b) . Si u alcanza el máximo en a y g está acotada inferiormente en $x = a$ entonces $u'(a) < 0$. Si u alcanza el máximo en b y g está acotada superiormente en $x = b$, entonces $u'(b) > 0$.

Demostración. Supongamos que $u(a) = M$, con $u(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ y que para algún punto d en (a, b) tenemos que $u(d) < M$. Definimos la función auxiliar:

$$z(x) = e^{\alpha(x-a)} - 1 \quad \text{con} \quad \alpha > 0.$$

Elegimos $\alpha > -g(x)$ para $a \leq x \leq d$ de la misma manera que se hizo en la demostración del Teorema 1.3, y así $L[z] > 0$. A continuación, construimos la función:

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x)$$

con ε elegido de tal forma que:

$$0 < \varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Ya que $L[w] > 0$, el máximo de w en el intervalo $[a, d]$ debe ocurrir en uno de los extremos. Tenemos:

$$w(a) = M > w(d)$$

así que el máximo ocurre en a . Por tanto, la derivada lateral de w en a no puede ser positiva:

$$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) \leq 0.$$

Sin embargo,

$$z'(a) = \alpha > 0.$$

Además:

$$u'(a) \leq -\varepsilon z'(a).$$

Por tanto, $u'(a) < 0$.

Si el máximo se alcanza en $x = b$, el argumento es similar. \square

1.2. Inclusión de términos de orden cero

A continuación, definimos el operador diferencial de segundo orden más general:

$$(L + h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0. \quad (1.2)$$

La presencia del término h implica que el principio del máximo en general es falso para $L + h$. Por ejemplo $u = \sin x$ cumple:

$$u'' + u = 0$$

en $(a, b) = (0, \pi)$, alcanza el máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y sin embargo no es constante. En este ejemplo $h(x) = 1$.

Vamos a suponer que $h(x) \leq 0$ en (a, b) y que h es una función acotada.

Propiedad 1.7. *Supongamos que $u \in C^2(a, b)$ cumple:*

$$(L + h)[u] > 0$$

en (a, b) donde $h \leq 0$. Entonces u no puede alcanzar máximos locales en $c \in (a, b)$ tales que $u(c) \geq 0$.

Demostración. En un punto c de máximo local:

$$u''(c) + g(x)u'(c) + h(x)u(c) > 0$$

es decir,

$$u''(c) + h(c)u(c) > 0,$$

$$u''(c) > -h(x)u(c) \geq 0,$$

si se sabe que $u(x) \geq 0$. Luego:

$$u''(c) > 0.$$

Esto no es posible pues $u''(c) \leq 0$. □

Teorema 1.8. *Sean g, h funciones acotadas en (a, b) mientras:*

$$h(x) \leq 0 \quad x \in (a, b).$$

Si u satisface:

$$(L + h)[u] \geq 0 \quad (1.3)$$

en (a, b) junto con:

$$u(c) = \max_{(a,b)} u \geq 0$$

para algún $c \in (a, b)$. Entonces u es constante.

Corolario 1.9. *Bajo las condiciones del Teorema 1.8 para h si:*

$$(L + h)[u] \leq 0$$

en (a, b) y $\exists c \in (a, b)$ tal que $u(c) = \inf_{(a,b)} u = m$ con $m \leq 0$ entonces $u \equiv m$.

Corolario 1.10. *En las condiciones del Teorema 1.8 si $\sup u \geq 0$ entonces u alcanza el máximo en $x = a$ ó $x = b$. Análogamente si $\inf u \leq 0$ entonces u alcanza el mínimo en $x = a$ ó $x = b$.*

Observación 1.1. En los Teoremas 1.3 y 1.6 no se requería que $M \geq 0$.

Demostración del Teorema 1.8. Igual que en la demostración del Teorema 1.3, introducimos $z = e^{\alpha(x-c)} - 1$. Tenemos que encontrar α para que se tenga:

$$(L + h)[z] > 0 \quad \text{en } (a, b).$$

Aplicando $(L + h)[z]$ y dividiendo por el factor exponencial la desigualdad equivale a:

$$\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x) \left(1 - e^{-\alpha(x-c)}\right) > 0.$$

Usando que $h \leq 0$ basta con tener que:

$$\alpha^2 - \alpha|g(x)| + h(x) > 0.$$

Dividiendo por α y despejando:

$$\alpha > -|g(x)| - \frac{h(x)}{\alpha}. \quad (1.4)$$

Se puede entonces encontrar un α suficientemente grande de forma que (1.4) se cumpla porque g y h están acotadas. Con esa elección de α se tiene:

$$(L + h)[z] > 0.$$

Razonando como en el Teorema 1.3 mediante la función $w = u + \varepsilon z$ y usando la misma notación llegamos a que w alcanza un máximo interior en (a, d) . Al ser $(L + h)[w] > 0$ la Propiedad 1.7 impide que eso ocurra. Luego no puede ser en $c < d < b$. En el caso $d < c$, usamos la función auxiliar:

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

con α suficientemente grande, y razonamos igual para concluir que no es posible. \square

Teorema 1.11. *Supongamos que u es no constante, satisface (1.3) en (a, b) y tiene derivadas laterales en $x = a$ y $x = b$. Se admite que $h(x) \leq 0$ y que h, g son acotadas en (a, b) . Si u tiene un máximo no negativo en a entonces $u'(a) < 0$. Si u tiene un máximo no negativo en b entonces $u'(b) > 0$.*

Demostración. Sigue el argumento del Teorema 1.6. \square

Corolario 1.12. *Si u satisface (1.3) en (a, b) con $h(x) \leq 0$, es continua en $[a, b]$ y $u(a) \leq 0$, $u(b) \leq 0$, entonces $u(x) < 0$ en (a, b) a menos que $u \equiv 0$.*

En el siguiente resultado relajamos la condición $h \leq 0$ de los teoremas anteriores.

Teorema 1.13. *Sean g, h funciones acotadas en $[a, b]$. Supongamos que existe $w \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$ tal que:*

i) $w > 0$ en $[a, b]$.

ii) $(L + h)w \leq 0$ en (a, b) . Entonces si:

$$(L + h)u \geq 0$$

se tiene que $\frac{u}{w}$ satisface las conclusiones de los Teoremas 1.8 y 1.11

Demostración. Se introduce la función:

$$v = \frac{u}{w}.$$

Entonces:

$$(\tilde{L} + \tilde{h})[v] \geq 0,$$

donde:

$$(\tilde{L} + \tilde{h})[v] = v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g\right)v' + \left[\frac{1}{w}(L + h)[w]\right]v.$$

Nótese que $\tilde{h} \leq 0$ sale de *ii*) y que por tanto estamos bajos las condiciones de los Teoremas 1.8 y 1.11. \square

Teorema 1.14. *Supongamos que el operador $L + h$ satisface (1.3) en (a, b) con h y g acotadas. Si $[a, b]$ es pequeño se puede encontrar una función w satisfaciendo las condiciones *i*), *ii*) del Teorema 1.13. Por tanto si u es solución de (1.3) en (a, b) , la función $\frac{u}{w}$ verifica las conclusiones de los Teoremas 1.8 y 1.11.*

Demostración. Vamos a construir w y $[a, b]$ tales que se cumplen las condiciones del Teorema 1.13. Definamos así w :

$$w(x) = 1 - \beta(x - a)^2,$$

con β una constante adecuada. En a se alcanza el máximo, cuyo valor es 1. La gráfica es una parábola que corta por segunda vez al eje x en el punto $a + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Luego $b < a + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, lo que nos lleva a:

$$R = b - a < \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} & (L + h)[w] \\ &= w'' + g(x)w' + h(x)w = -2\beta - g(x)2\beta(x - a) + h(x)(1 - \beta(x - a)^2). \\ &= -2\beta - 2\beta(x - a)g(x) + h(x)(1 - \beta(x - a)^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Necesitamos encontrar un β suficientemente grande de forma que $(L + h)[w] \leq 0$. Como $h(x)$ está acotada superiormente:

$$h(x)(1 - \beta(x - a)^2) \leq 2\beta(1 + g(x)(x - a)),$$

$$h(x) \leq 2\beta(1 + g(x)(x - a)) + h(x)\beta(x - a)^2,$$

dividiendo por 2 nos queda:

$$\frac{h(x)}{2[1 + g(x)(x - a) + \frac{\beta}{2}(x - a)^2]} \leq \beta.$$

También tenemos que:

$$|h(x)| \leq K_1$$

$$|g(x)| \leq K_2.$$

Entonces:

$$-K_1 \leq h(x) \leq K_1$$

$$-K_2 \leq g(x) \leq K_2.$$

Como $0 < x - a < R$, podemos hacer:

$$\begin{aligned} \frac{-K_1 R^2}{2} &\leq \frac{-K_1 (x-a)^2}{2} \leq \frac{h(x)}{2} (x-a)^2 \leq \frac{K_1 (x-a)^2}{2} \leq \frac{K_1 R^2}{2} \\ -K_2 R &\leq -K_2 (x-a) \leq g(x)(x-a) \leq K_2 (x-a) \leq K_2 R. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{h(x)}{2[1 + g(x)(x-a) + \frac{h}{2}(x-a)^2]} \leq \frac{h(x)}{2[1 - K_2 R - \frac{K_1}{2} R^2]} \leq K_1 \quad \text{si } R < R_0.$$

Basta con tomar:

$$\beta > K_1 \quad \& \quad R < \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

con R pequeño. Entonces tenemos $w > 0$ en (a, b) . □

1.3. Una aplicación al problema de valor inicial

En el capítulo siguiente estudiaremos, en forma general, las aplicaciones del principio del máximo al estudio de problemas de contorno del estilo:

$$\begin{aligned} u'' + g(x)u' + h(x)u &= f(x) & x \in (a, b) \\ u(a) &= \gamma_1 & u(b) = \gamma_2, \end{aligned}$$

donde las funciones f, g y h están definidas en (a, b) , g y h funciones acotadas (γ_1 y γ_2 constantes). Por eso nos limitaremos, en cuanto a las aplicaciones de dicho principio, al problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x) \\ u(a) = \gamma_1 & u'(a) = \gamma_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Teorema 1.15 (Unicidad de soluciones). *Supongamos que u_1 y u_2 son soluciones del problema (1.5) definidas en el intervalo $[a, b]$. Entonces $u_1 \equiv u_2$.*

Demostración. La función $u = u_1 - u_2$ satisface $(L + h)[u] = 0$ en (a, b) con $u = u' = 0$ en $x = a$. Queremos probar que $u \equiv 0$. El Teorema 1.13 asegura la existencia de $\varepsilon > 0$ y $w > 0$ tal que dicho teorema es aplicable en $(a, a + \varepsilon)$. Vamos a probar que $u \equiv 0$ en $(a, a + \varepsilon)$. Afirmamos que, ó bien:

$$\sup_{(a, a+\varepsilon)} \frac{u}{w} = \frac{u(a)}{w(a)}$$

ó bien

$$\inf_{(a, a+\varepsilon)} \frac{u}{w} = \frac{u(a)}{w(a)}. \quad (1.6)$$

En efecto, si $\sup \frac{u}{w} \leq 0$ como $\frac{u}{w}(a) = 0$ entonces el máximo se alcanza en $x = a$. Si por contra $\sup \frac{u}{w} > 0$ del Corolario 1.10 se tiene que ha de alcanzarse en $x = a + \varepsilon$. Entonces

$$\frac{u}{w}(a + \varepsilon) > 0.$$

Sin embargo, en este caso se tiene que:

$$\inf_{(a, a+\varepsilon)} \frac{u}{w} = 0. \quad (1.7)$$

Si no, $\inf \frac{u}{w} < 0$ y como $\frac{u}{w} = 0$ en $x = a$ y $\frac{u}{w} > 0$ en $x = a + \varepsilon$, el ínfimo se alcanza en un punto interior. El Corolario 1.10 implicaría $\frac{u}{w} = C < 0$ (C constante) lo cual es incompatible con los valores de $\frac{u}{w}$ en $x = a, a + \varepsilon$. Por tanto no puede cumplirse $\inf \frac{u}{w} < 0$ y se tiene (1.7). En particular,

$$\inf_{(a, a+\varepsilon)} \frac{u}{w} = \frac{u(a)}{w(a)}. \quad (1.8)$$

Tanto en (1.6) como en (1.8) se tiene del Teorema 1.13 que:

$$\left(\frac{u}{w}\right)'(a) \neq 0, \quad (1.9)$$

salvo que $\frac{u}{w} \equiv 0$ en $(a, a + \varepsilon)$. Ahora (1.9) es imposible pues:

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = 0 \quad \text{en } x = a.$$

Por tanto $\frac{u}{w} \equiv 0$ en $(a, a + \varepsilon)$. Entonces

$$u \equiv 0 \quad \text{en } (a, a + \varepsilon).$$

Finalmente, para probar que $u \equiv 0$ en (a, b) , repetimos el argumento en $(a + \varepsilon, a + 2\varepsilon)$ y así sucesivamente. Teniendo en cuenta que ε sólo depende de g y h esto termina la demostración. \square

Una consecuencia del Teorema 1.15 es el siguiente teorema de unicidad para un problema de valor inicial más general. Supondremos que $F = F(x, y, z)$ es una función C^1 de sus argumentos en \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.16. *El problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} u'' = F(x, u, u') \\ u(a) = \gamma_1 \quad u'(a) = \gamma_2, \end{cases}$$

admite a lo más una solución.

Demostración. Si u_1, u_2 son soluciones definidas en $[a, b)$, introducimos $w = u_2 - u_1$ y restando las ecuaciones tenemos que:

$$\begin{cases} w'' = a_1(x) + a_2(x)w + a_3(x)w' \\ w(a) = 0 \quad w'(a) = 0, \end{cases}$$

donde:

$$a_1 = F(x, u_1, u_1'), \quad a_2 = F_y(x, u_1, u_1'), \quad a_3 = F_z(x, u_1, u_1').$$

El Teorema 1.15 aplicado al último problema de valor inicial permite concluir que $w = 0$. Por tanto $u_1 = u_2$ en $[a, b)$. \square

Capítulo 2

El principio del máximo para ecuaciones elípticas

2.1. Ecuaciones lineales en el plano: clasificación

Se llama ecuación en derivadas parciales a una identidad de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0.$$

Para $N = 2$:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial}{\partial x}u(x, y), \frac{\partial}{\partial y}u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x \partial x}u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u(x, y), \frac{\partial^2}{\partial y \partial y}u(x, y)\right) = 0.$$

Las ecuaciones lineales homogéneas son:

$$Lu = 0,$$

donde

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu, \quad (2.1)$$

y los coeficientes son funciones de (x, y) definidas en un dominio Ω del plano. Conviene representar:

$$Lu = L_1u + gu, \quad L_1u = L_0u + du_x + eu_y + gu \quad \text{y} \quad L_0u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}.$$

Se simplifican mediante un cambio de variable de la forma:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y). \end{aligned}$$

El operador L se escribe en coordenadas ξ, η como:

$$\bar{L}u = \bar{a}u_{\xi\xi} + 2\bar{b}u_{\xi\eta} + \bar{c}u_{\eta\eta} + \bar{d}u_{\xi} + \bar{e}u_{\eta} + \bar{g}u, \quad (2.2)$$

con:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 & \bar{d} &= L_1(\xi) \\ \bar{b} &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y & \bar{e} &= L_1(\eta) \\ \bar{c} &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned}$$

Se buscan ξ, η para que L_0 sea lo más sencillo posible. Las identidades $\bar{a} = 0$ y $\bar{c} = 0$ conducen a la ecuación:

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0.$$

Dividiendo por ϕ_y :

$$a\left(\frac{\phi_x}{\phi_y}\right)^2 + 2b\frac{\phi_x}{\phi_y} + c = 0, \quad (2.3)$$

y llamando $\lambda = \frac{\phi_x}{\phi_y}$ se obtiene:

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Cabe considerar tres opciones:

i) Caso Hiperbólico. El discriminante:

$$d = b^2 - ac > 0,$$

en Ω . La ecuación (2.3) equivale al par de ecuaciones:

$$\frac{\phi_x}{\phi_y} = \lambda_{\pm}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{a},$$

también:

$$\phi_x - \lambda_{\pm}\phi_y = 0.$$

Hallar soluciones de las ecuaciones anteriores consiste en hallar la solución general

$$y = Y_{\pm}(x, c)$$

de:

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_{\pm}(x, y).$$

Después se despeja c en términos de x e y , de forma que $c = \phi_{\pm}(x, y)$. En este caso:

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \phi_+(x, y) \\ \eta(x, y) &= \phi_-(x, y). \end{aligned}$$

Entonces la nueva ecuación es:

$$2\bar{b}u_{\xi\eta} + \bar{d}u_{\xi} + \bar{e}u_{\eta} + \bar{g}u = 0,$$

donde $\bar{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y = -\frac{2d}{a}\xi_y\eta_y$. Es habitual referirse a ξ, η como las coordenadas características.

Ejemplo 2.1. Para el operador de ondas:

$$\square_c u = u_{tt} - c^2 u_{xx}$$

la ecuación de las curvas características es:

$$\phi_t^2 - c^2 \phi_x^2 = 0,$$

es decir

$$\phi_t \pm c\phi_x = 0,$$

luego una elección de coordenadas características es:

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct.$$

Así ($d = c^2$):

$$\square_c u = -4c^2 u_{\xi\eta}.$$

ii) *Caso Parabólico*. Es el correspondiente a :

$$d = b^2 - ac = 0,$$

en Ω . Tenemos una sola raíz:

$$\lambda = -\frac{b}{a}.$$

Eligiendo como en el caso anterior una solución de:

$$\phi_x + \frac{b}{a}\phi_y = 0,$$

y tomando por ejemplo:

$$\eta = x,$$

llegamos a que:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= 0 \\ \bar{b} &= a\xi_x + b\xi_y = 0 \\ \bar{c} &= a, \end{aligned}$$

con lo que la nueva ecuación es:

$$u_{\eta\eta} + \bar{d}u_\xi + \bar{e}u_\eta + \bar{g}u = 0.$$

Ejemplo 2.2.

1. La ecuación del calor $L(u) = u_t - u_{xx}$ es el ejemplo por antonomasia de operador parabólico.
2. La ecuación:

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0,$$

es parabólica ($d = 0$). Una elección de ξ resultará la solución general de $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, es decir, $\xi = yx$. Tomando $\eta = x$, la ecuación transformada es:

$$\eta u_{\eta\eta} + u_\eta = 0,$$

pues $L(\xi) = 0, L(\eta) = \eta$. Las soluciones son de la forma: $u = F(\xi) + G(\xi) \log \eta = F(xy) + G(xy) \log x$.

iii) *Caso Elíptico*. Cuando $d = b^2 - ac < 0$ en Ω la ecuación:

$$a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2 = 0, \tag{2.4}$$

carece de soluciones reales. La función:

$$\lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

toma valores complejos. La ecuación $\frac{dy}{dx} = -\lambda(x, y)$ admite una solución general:

$$y = Y(x, c),$$

donde $x, y, x \in \mathbb{C}$. De ahí $c = \phi(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ cumple la ecuación (2.4). Luego:

$$\begin{aligned} a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) &= 0, \\ a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto $\bar{b} = 0$ mientras $\bar{a} = \bar{c}$. La nueva expresión de la ecuación es:

$$\bar{L} = \bar{a}(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})\bar{d}u_\xi + \bar{e}u_\eta + \bar{g}u = 0.$$

Ejemplo 2.3. Ecuación de Tricomi.

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

tiene $d = -y$. Es hiperbólica en $y < 0$. En este caso tenemos $\lambda = \pm 1/\sqrt{-y}$ que dan posibles ξ, η bajo la forma:

$$\xi = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} \quad \eta = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2},$$

mientras $L(\xi) = -L(\eta) = 1/(2\sqrt{-y}), \bar{b} = 2y$. Luego en la región $y < 0$ la ecuación de Tricomi adopta la forma:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{8(-y)^{3/2}}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.$$

La ecuación es elíptica en $y > 0$ con $\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{y}}$. Integrando $dy/dx = -i/\sqrt{y}$ obtenemos como candidatas a ξ, η las funciones:

$$\xi = \frac{2}{3}y^{3/2} \quad \eta = x,$$

con lo que $\bar{a} = y$. Así mismo $L(\xi) = 1/(2\sqrt{y}), L(\eta) = 0$. La ecuación de coordenadas características adopta la forma:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{3}{2}u_{\xi} = 0$$

Definición 2.1. *Un operador lineal L con coeficientes variables definidos en Ω es decir,*

$$Lu = Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu,$$

se dice elíptico en Ω si

$$d(x, y) = b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) < 0,$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

2.2. Ecuaciones elípticas

Vamos ahora a considerar la noción de operador elíptico desde un punto de vista más habitual en la literatura que se extiende además a dimensión $N \geq 2$.

Proposición 2.2. *Sea A la matriz simétrica:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

y

$$q(v) = av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2, \quad v = (v_1, v_2),$$

la forma cuadrática asociada. Si

$$a > 0 \quad \& \quad ac - b^2 > 0 \tag{2.5}$$

entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que:

$$av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2 \geq \lambda_0|v|^2. \tag{2.6}$$

Demostración. Se tiene:

$$q(v) = g\left(\frac{v_2}{v_1}\right)v_1^2 = h\left(\frac{v_1}{v_2}\right)v_2^2$$

donde

$$g(t) = a + 2bt + ct^2 \quad h(t) = at^2 + 2bt + c.$$

Se comprueba que:

$$g(t) \geq \frac{ac - b^2}{c} \quad \& \quad h(t) \geq \frac{ac - b^2}{a},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por eso:

$$q(v) \geq \frac{ac - b^2}{c}v_1^2 \quad \& \quad q(v) \geq \frac{ac - b^2}{a}v_2^2$$

luego:

$$q(v) \geq \frac{ac - b^2}{2} \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{c}\right\} |v|^2,$$

y

$$\lambda_0 = \frac{ac - b^2}{2} \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{c}\right\}.$$

□

Proposición 2.3. *Sea A una matriz simétrica 2×2 y supongamos que:*

$$q(v) > 0, \forall v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0.$$

Entonces se cumplen las condiciones (2.5) y existe λ_0 de forma que se satisface (2.6).

Demostración. Como $a = q(e_1)$, $a > 0$. Como $g(t) > 0$ para todo t la ecuación:

$$g(t) = 0$$

no tiene raíces reales y $ac - b^2 > 0$. Estas son las condiciones (2.5) que entonces implican (2.6). □

Proposición 2.4. *Sea ahora $A(x, y)$ la matriz simétrica de coeficientes variables:*

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & c(x, y) \end{pmatrix},$$

con a, b, c continuos en $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Si las condiciones:

$$a(x, y) > 0 \quad \& \quad a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 > 0 \tag{2.7}$$

se cumplen en todos los puntos de $\overline{\Omega}$ entonces existe una constante positiva μ tal que:

$$q(v) = a(x, y)v_1^2 + 2b(x, y)v_1v_2 + c(x, y)v_2^2 \geq \mu|v|^2$$

para todo $v \in \mathbb{R}^2$ y $(x, y) \in \Omega$.

Demostración. La función

$$\lambda_0(x, y) = \frac{a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2}{2} \min\left\{\frac{1}{a(x, y)}, \frac{1}{c(x, y)}\right\}$$

es continua y positiva en $\overline{\Omega}$. Así:

$$\lambda_0(x, y) \geq \min_{\overline{\Omega}} \lambda_0(x, y) = \mu > 0.$$

□

Definición 2.5. *El operador:*

$$Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + e(x, y)u_x + d(x, y)u_y + g(x, y)u$$

cuyos coeficientes están definidos en un abierto Ω del plano se dice *elíptico en Ω* si

$$a(x, y)v_1^2 + 2b(x, y)v_1v_2 + c(x, y)v_2^2 > 0$$

para $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ y $(x, y) \in \Omega$ arbitrarios.

Observación 2.4. Un operador diferencial de segundo orden en N variables:

$$Lu = \sum_{ij=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u$$

se dice *elíptico en Ω* si para todo $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$ se tiene:

$$\sum_{ij=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0.$$

Esta noción admite una generalización conveniente a operadores de orden m .

De las propiedades precedentes se deduce que L es *elíptico en Ω* si y sólo si se cumplen las condiciones (2.7) en cuyo caso existe una función positiva $\lambda_0(x, y)$ de forma que se satisface la condición:

$$a(x, y)v_1^2 + 2b(x, y)v_1v_2 + c(x, y)v_2^2 \geq \lambda_0(x, y)|v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, (x, y) \in \Omega. \quad (2.8)$$

Definición 2.6. *El operador L se dice uniformemente elíptico en Ω si λ_0 se puede tomar constante (y positiva) en (2.8).*

Corolario 2.7. *Si el operador L :*

$$Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + e(x, y)u_x + d(x, y)u_y + g(x, y)u$$

es *elíptico en cada uno de los puntos $(x, y) \in \bar{\Omega}$ donde Ω es un abierto acotado del plano, y los coeficientes a, b, c son funciones continuas en $\bar{\Omega}$ entonces L también es uniformemente elíptico en Ω .*

2.3. Ecuación de Laplace: principio débil del máximo

Definición 2.8. *Se dice que $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω si:*

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ es el operador Laplaciano y la ecuación precedente es la ecuación de Laplace.

Propiedad 2.9. *Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en Ω y $f = u + iv$, entonces:*

$$\Delta u = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = 0.$$

Las funciones armónicas lo siguen siendo tras cambios de variables $g = \xi + i\eta$ derivables (en sentido complejo) en un dominio Ω .

Propiedad 2.10. Sea $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, una función armónica. Si $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow Q$, $g(z) = \xi + i\eta$, con $z = x + iy$, es holomorfa y biyectiva entonces $\bar{u}(\xi, \eta)$, $\bar{u} = u \circ g^{-1}$, también es armónica en Q .

Demostración. Se sabe:

$$Lu = \bar{L}\bar{u} = a\bar{u}_{\xi\xi} + 2b\bar{u}_{\xi\eta} + c\bar{u}_{\eta\eta} + d\bar{u}_\xi + e\bar{u}_\eta,$$

que se aplica como caso particular a:

$$\Delta u = a\bar{u}_{\xi\xi} + 2b\bar{u}_{\xi\eta} + c\bar{u}_{\eta\eta} + d\bar{u}_\xi + e\bar{u}_\eta,$$

donde $a = 1, b = 0, c = 1, e = 0, d = 0$. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $g = \xi + i\eta$ se tiene:

$$\bar{b} = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0 \quad \bar{a} = \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad \bar{c} = \eta_x^2 + \eta_y^2,$$

mientras $\bar{d} = \Delta\xi = 0, \bar{e} = \Delta\eta = 0$. Como u es armónica:

$$\Delta u = \bar{a}(\bar{u}_{\xi\xi} + \bar{u}_{\eta\eta}) = 0.$$

Entonces \bar{u} también es armónica. □

Definición 2.11 (Problema de Dirichlet). El problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace con dato f en la frontera $\partial\Omega$, consiste en hallar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u = f(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observación 2.5. La misma definición se aplica a ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u = f(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observación 2.6. En dimensión 1, una versión de estos problemas es:

$$\begin{cases} u'' + g(x)u' + h(x)u = F(x) & a < x < b \\ u(a) = a_0 & u(b) = b_0 \end{cases}$$

$u \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$.

Teorema 2.12 (Principio débil del máximo). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, Ω acotado, que cumple:

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u. \tag{2.9}$$

Observación 2.7. Si Ω es acotado, u alcanza el ínfimo y el supremo en $\bar{\Omega}$.

Observación 2.8. Se cumple $\sup_{\Omega} u = \sup_{\bar{\Omega}} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$. Luego (2.9) equivale a:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$$

Demostración del Teorema 2.12. Para $\Delta u > 0$ en Ω sabemos que u no puede tener máximos relativos en Ω ya que en un máximo relativo la matriz hessiana D^2u es semidefinida negativa y por tanto su traza $\Delta u \leq 0$. Si el máximo no está en Ω estará en la frontera, así que sabemos que:

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Si ahora suponemos que $\Delta u \geq 0$, no podemos hacer el mismo razonamiento, pero podemos aproximar u por funciones que sí tienen Laplaciano mayor que cero. En el argumento que sigue suponemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ pues se abrevia la notación. Se introduce la función auxiliar:

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2.$$

Entonces $\Delta u_\varepsilon > 0$. Usando la primera parte, se tiene:

$$\sup_{\overline{\Omega}} \{u(x) + \varepsilon|x|^2\} = \sup_{\partial\Omega} \{u(x) + \varepsilon|x|^2\}.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en:

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup_{\partial\Omega} |x|^2,$$

se tiene que:

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$$

que equivale a:

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

□

Corolario 2.13. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

entonces:

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

Demostración. Llamamos $v = -u$ que cumple el principio del máximo, entonces:

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial\Omega} v \quad \Rightarrow \quad \sup_{\Omega} (-u) = \sup_{\partial\Omega} (-u) \quad \Rightarrow \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

□

Corolario 2.14. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y $\Delta u = 0$ entonces:

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Demostración. Sabemos que:

$$u(x) \leq \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} |u|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Por otro lado,

$$u(x) \geq \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} -|u| = -\sup_{\partial\Omega} |u|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Esto quiere decir:

$$|u(x)| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Entonces:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Luego $\sup_{\partial\Omega} |u| = \sup_{\Omega} |u|$.

□

2.4. Ecuaciones elípticas: principio débil del máximo

Estudiamos el principio del máximo para ecuaciones más generales.

Lema 2.15. Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función que cumple:

$$-\Delta u + (b_1(x, y), b_2(x, y))\nabla u(x, y) < 0 \quad \text{en } \Omega. \quad (2.10)$$

Entonces u no admite máximos relativos en Ω .

Demostración. Si (x_0, y_0) es un máximo relativo, entonces $\nabla u(x_0, y_0) = 0$ y $\Delta u(x_0, y_0) \leq 0$. Por lo tanto, la condición (2.10) no se satisface. \square

Lema 2.16. Sea $u \in C^2(\Omega)$ que cumple:

$$-(a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}) + (b_1(x, y), b_2(x, y))\nabla u < 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.11)$$

donde L_0 es elíptico en Ω . Entonces u no admite máximos relativos en Ω . Por tanto si $u \in C(\bar{\Omega})$ entonces:

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Demostración. En efecto, sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un máximo relativo. Entonces:

$$\nabla u(x_0, y_0) = 0 \quad \Delta u(x_0, y_0) \leq 0.$$

Como L_0 es elíptico, aplicaremos el concepto de elipticidad en el punto (x_0, y_0) , es decir, existe $\lambda_0 > 0$ de forma que:

$$(v_1 \ v_2)A(x_0, y_0) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ b(x_0, y_0) & c(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \geq \lambda_0 |v|^2,$$

para todo $v = (v_1, v_2)$. De ahí se deduce la existencia de $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$ y de una matriz $P \in M_{2 \times 2}$ invertible tal que:

$$P A P^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Introducimos el cambio lineal:

$$\begin{aligned} \xi &= x_0 + v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) \\ \eta &= y_0 + w_1(x - x_0) + w_2(y - y_0), \end{aligned}$$

y resulta:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ b(x_0, y_0) & c(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación (2.11) se escribe en la forma:

$$-(\lambda_1 \bar{u}_{\xi\xi} + \lambda_2 \bar{u}_{\eta\eta}) + \bar{d}\bar{u}_{\xi} + \bar{e}\bar{u}_{\eta} < 0 \quad (2.12)$$

Si u tiene un máximo local en (x_0, y_0) , entonces $\bar{u}(\xi, \eta)$ tiene un máximo local en $(\xi, \eta) = (x_0, y_0)$ y $\nabla \bar{u}(x_0, y_0) = 0$, luego:

$$\bar{u}_{\xi\xi}(x_0, y_0) + \bar{u}_{\eta\eta}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Por lo tanto:

$$\lambda_1 \bar{u}_{\xi\xi} + \lambda_2 \bar{u}_{\eta\eta} \leq 0,$$

pero al hacer $(\xi, \eta) = (x_0, y_0)$ en (2.12) llegamos a que:

$$\lambda_1 \bar{u}_{\xi\xi} + \lambda_2 \bar{u}_{\eta\eta} > 0,$$

lo cual es imposible. \square

Teorema 2.17 (Principio del máximo débil). *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ cumpliendo:*

$$-L_0u + (b_1, b_2)\nabla u(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

donde $L_0u = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ es elíptico en Ω , y a, b, c, b_1, b_2 son funciones acotadas. Entonces:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

Demostración. Denotamos:

$$Lu = -L_0u + (b_1, b_2)\nabla u(x, y)$$

y distinguimos dos casos. Si $Lu < 0$ se utiliza el Lema 2.17 y se tiene el resultado.

Si $Lu \leq 0$ se forma la función auxiliar:

$$u_\varepsilon = u - \varepsilon w$$

donde w es:

$$w = 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}|\bar{x} - \bar{x}_0|^2},$$

donde $\bar{x} = (x, y), \bar{x}_0 = (x_0, y_0)$. Se puede entonces hallar α tal que:

$$Lw > 0 \quad \text{en } \Omega.$$

En efecto, aplicando L a w y simplificando $\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}A}$, donde $A = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, la desigualdad equivale a:

$$-a(1 - \alpha(x - x_0)^2) + 2b\alpha(x - x_0)(y - y_0) - c(1 - \alpha(y - y_0)^2) + b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) > 0.$$

Debemos encontrar un α de forma que se satisfaga la desigualdad anterior. Despejando α :

$$\alpha > \frac{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + a + c}{a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2}.$$

La desigualdad debe cumplirse $\forall (x, y) \in \overline{\Omega}$. Así elegimos $P_0 = (x_0, y_0) \notin \overline{\Omega}$. Por un lado, como L_0 es elíptico en Ω :

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 \geq \lambda_0\{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2\} \geq \lambda_0 d(P_0, \Omega)^2,$$

siendo $d(P_0, \Omega)$ la distancia de P_0 a Ω . Por otro lado:

$$b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + a + c \leq |(b_1, b_2)||P - P_0| + |a| + |c| \leq M_1|P - P_0| + M_2 + M_3 \leq M,$$

pues los coeficientes están acotados.

En conclusión:

$$\frac{b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + a + c}{a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2} \leq \frac{M}{\lambda_0 d(P_0, \Omega)^2}.$$

Basta con tomar $\alpha = \frac{M}{\lambda_0 d(P_0, \Omega)^2}$.

Llegados a este punto, hacemos:

$$L(u - \varepsilon w) = Lu - \varepsilon Lw \leq -\varepsilon Lw < 0.$$

Aplicando nuevamente el Lema 2.17 tenemos que:

$$\sup_{\overline{\Omega}} (u - \varepsilon w) = \sup_{\partial\Omega} (u - \varepsilon w).$$

Ahora:

$$u - \varepsilon \sup_{\bar{\Omega}} w \leq u - \varepsilon w \quad \Rightarrow \quad \sup_{\bar{\Omega}} u - \varepsilon \sup_{\bar{\Omega}} w \leq \sup_{\bar{\Omega}} (u - \varepsilon w),$$

mientras

$$\sup_{\bar{\Omega}} (u - \varepsilon w) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \Rightarrow \quad \sup_{\bar{\Omega}} u - \varepsilon \sup_{\bar{\Omega}} w \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene:

$$\sup_{\bar{\Omega}} u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

□

2.5. Aplicaciones

Teorema 2.18 (Unicidad del problema de Dirichlet). *El problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Demostración. Sean u_1, u_2 soluciones y definimos $v = u_1 - u_2$. Entonces v cumple:

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Del principio del máximo:

$$\sup_{\Omega} |v| = \sup_{\partial\Omega} |v| = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto

$$u_1 = u_2.$$

□

Observación 2.9. El mismo resultado se cumple si el Laplaciano Δ se reemplaza por un operador elíptico L como en el Teorema 2.17.

Teorema 2.19 (Principio de Comparación). *Sean f_1, f_2, F_1, F_2 tales que:*

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{en } \partial\Omega \quad \& \quad F_1 \leq F_2 \quad \text{en } \Omega,$$

y sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluciones de:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = F_1 & \text{en } \Omega \\ u_1 = f_1 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = F_2 & \text{en } \Omega \\ u_2 = f_2 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Entonces:

$$u_1 \leq u_2.$$

Demostración. Para ello, se observa que la diferencia $u_2 - u_1$ cumple:

$$\begin{cases} -\Delta(u_2 - u_1) = F_2 - F_1 & \geq 0 \text{ en } \Omega \\ (u_2 - u_1) = f_2 - f_1 & \geq 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego:

$$-\Delta(u_2 - u_1) \geq 0.$$

Por tanto:

$$u_2 - u_1 \geq \inf_{\Omega}(u_2 - u_1) = \inf_{\partial\Omega}(u_2 - u_1) = \inf_{\Omega}(f_2 - f_1) \geq 0.$$

Entonces $u_1 \leq u_2$ en Ω . □

Observación 2.10. De nuevo, el principio de comparación se satisface para operadores elípticos L en las condiciones del Teorema 2.17. La misma observación se aplica a la totalidad de los resultados de la presente sección.

Corolario 2.20 (Signo de las soluciones). *Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es solución de:*

$$\begin{cases} -\Delta u = F \\ u = f \end{cases}$$

donde $F \geq 0$ en Ω y $f \geq 0$ en $\partial\Omega$. Entonces $u \geq 0$ en Ω .

Demostración. De $F \geq 0$:

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y u cumple el principio del mínimo en Ω . Como u alcanza el mínimo en la frontera y sabemos que $f \geq 0$, entonces:

$$u \geq 0 \quad \text{en } \Omega. \quad \square$$

Teorema 2.21 (Aproximación de soluciones). *Sean F_n, f_n sucesiones tales que $F_n \rightarrow F$ uniformemente en Ω y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\partial\Omega$. Sean $u_n, u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ soluciones de:*

$$\begin{cases} -\Delta u_n = F_n & \text{en } \Omega \\ u_n = f_n & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente. Entonces:

$$u_n \rightarrow u \quad \text{uniformemente en } \overline{\Omega}.$$

Demostración. Dado $\varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \leq F_n(x, y) - F(x, y) \leq \varepsilon & \quad n \geq n_0, \forall (x, y) \in \Omega \\ -\varepsilon \leq f_n(x, y) - f(x, y) \leq \varepsilon & \quad n \geq n_0, \forall (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Se sabe que existe w tal que $-\Delta w > 0$ en $\overline{\Omega}$ y $w > 0$ en $\partial\Omega$. En efecto, basta tomar $w = M - (x^2 + y^2)$ que cumple:

$$-\Delta w = 4 \text{ en } \mathbb{R}^2,$$

mientras que $w > 0$ en $\partial\Omega$ si $x^2 + y^2 < M$ en $\partial\Omega$. Esto cierto, porque la función $\sqrt{x^2 + y^2}$ está acotada en $\partial\Omega$ (que es un compacto). Por otro lado, elijamos $K_2 > 0$ tal que:

$$w > K_2 > 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Tomando $k = \min\{4, K_2\}$ se tiene que:

$$\begin{cases} -\Delta\left(\frac{1}{k}w\right) \geq 1 & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{1}{k}w\right) \geq 1 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definiendo la función $\phi = \frac{w}{k}$ resulta que:

$$\begin{cases} -\Delta\phi \geq 1 & \text{en } \Omega \\ \phi \geq 1 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por tanto de (2.13):

$$\begin{aligned} -\Delta(-\varepsilon\phi) \leq -\varepsilon \leq F_n(x, y) - F(x, y) \leq \varepsilon \leq -\Delta(\varepsilon\phi) & \text{en } \Omega \\ -\varepsilon\phi \leq -\varepsilon \leq f_n(x, y) - f(x, y) \leq \varepsilon \leq \varepsilon\phi & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De aquí:

$$\begin{aligned} -\Delta(-\varepsilon\phi) \leq -\Delta(u_n - u) \leq -\Delta(\varepsilon\phi) & \text{en } \Omega \\ -\varepsilon\phi \leq u_n - u \leq \varepsilon\phi & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Del principio de comparación (Teorema 2.19) se deduce que:

$$-\varepsilon\phi \leq u_n - u \leq \varepsilon\phi \text{ en } \overline{\Omega}.$$

Por tanto,

$$|u_n - u| \leq \varepsilon\phi \text{ en } \overline{\Omega},$$

lo que implica (al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario) que $u_n \rightarrow u$ uniformemente en $\overline{\Omega}$. \square

Corolario 2.22 (Estimaciones ‘a priori’). *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución del problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

y supongamos que F está acotada en Ω . Entonces:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max\{\|F\|_{\infty}, \|f\|_{\infty}\} \sup_{\Omega} \phi,$$

donde ϕ es la función introducida en la prueba del Teorema 2.21 mientras $\|F\|_{\infty}, \|f\|_{\infty}$ representan los supremos de $|F|$ y $|f|$, respectivamente.

Corolario 2.23 (Existencia por aproximación). *Sean F_n, f_n sucesiones tales que $F_n \rightarrow F$ uniformemente en Ω y $f_n \rightarrow f$ en $\partial\Omega$. Admitamos que para cada n existe $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ resolviendo:*

$$\begin{cases} -\Delta u_n = F_n & \text{en } \Omega \\ u_n = f_n & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que:

$$u_n \rightarrow u \text{ uniformemente en } \overline{\Omega}.$$

Demostración. De las condiciones de Cauchy uniforme para F_n y f_n , se tiene que dado ε , existe n_0 tal que:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq F_n(x, y) - F_m(x, y) \leq \varepsilon & n \geq n_0, \forall (x, y) \in \Omega \\ -\varepsilon &\leq f_n(x, y) - f_m(x, y) \leq \varepsilon & n \geq n_0, \forall (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

y usando la función ϕ de la prueba anterior se tiene:

$$\begin{aligned} -\Delta(-\varepsilon\phi) &\leq -\varepsilon \leq F_n(x, y) - F_m(x, y) \leq \varepsilon \leq -\Delta(\varepsilon\phi) \text{ en } \Omega \\ -\varepsilon\phi &\leq -\varepsilon \leq f_n(x, y) - f_m(x, y) \leq \varepsilon \leq \varepsilon\phi \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|u_n - u_m| \leq \varepsilon\phi \text{ en } \overline{\Omega},$$

lo que implica (al ser otra vez $\varepsilon > 0$ arbitrario) que u_n es de Cauchy uniformemente en $\overline{\Omega}$. Esto prueba el corolario. \square

Observación 2.11. Bajo condiciones adecuadas se puede demostrar que la función u obtenida en el teorema anterior es solución del problema límite:

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Una prueba de esta afirmación excede los objetivos de este trabajo.

2.6. El principio fuerte del máximo

Teorema 2.24 (Principio fuerte del máximo). *Sea $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio tal que:*

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si existe $\bar{x}_0 \in \Omega$ tal que:

$$u(\bar{x}_0) = \sup_{\Omega} u = M,$$

entonces $u \equiv M$.

Para demostrar el Teorema 2.24 introducimos el siguiente lema:

Lema 2.25 (Lema de Hopf). *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una función que cumple:*

$$-L_0u + (b_1, b_2)\nabla u \leq 0 \text{ en } \Omega,$$

siendo L_0 un operador elíptico como en el Teorema 2.17 y donde b_1, b_2 son funciones acotadas en Ω . Supongamos que $\exists \bar{x}_0 \in \partial\Omega$, $B \subset \Omega$ cumpliendo $\partial B \cap \partial\Omega = \{\bar{x}_0\}$ y que $u(x) < u(\bar{x}_0), \forall x \in B$. Entonces:

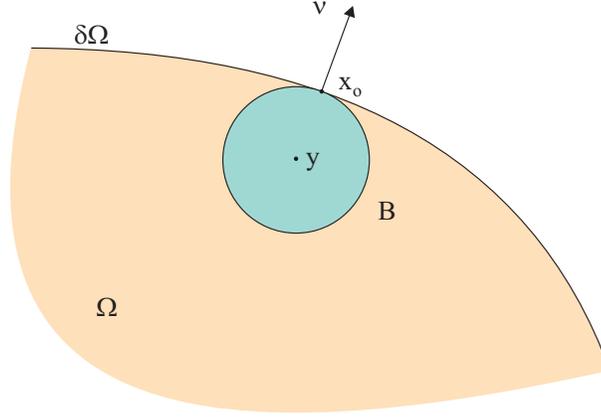
$$\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x}_0) > 0.$$

Observación 2.12. La bola B del Lema de Hopf es una bola tangente a $\partial\Omega$ en \bar{x}_0 que es interior al dominio Ω (véase la Figura 2.1).

Dando el lema por conocido, demostramos el Teorema 2.24.

Demostración del Teorema 2.24. Denotamos $\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \emptyset$. Si $\Omega_M \neq \Omega$ entonces

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) < M\} \neq \emptyset.$$

Figura 2.1: La bola interior tangente B del Lema de Hopf.

Afirmamos que existe $x^* \in \partial\Omega_M$ relativa a Ω , es decir, un punto $x^* \in \Omega_M$ (pues Ω_M es cerrado en Ω) tal que en toda bola $B(x^*, R)$ hay un punto de Ω_1 . En caso contrario, todos los puntos de Ω_M serían interiores, luego Ω_M sería abierto en Ω y como $\Omega_M \neq \emptyset$, $\Omega_M = \Omega$.

Tomamos $B(x^*, R) \subset \Omega$ y en $B(x^*, \frac{R}{2})$ un elemento $y \in \Omega_1$ donde $u(y) < M$. Existe $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$ tal que $B = B(y, \varepsilon) \subset \Omega_1$ mientras $u \equiv M$ en algún $\bar{x}_0 \in \partial B$. Aplicando el Lema de Hopf:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{x}_0) > 0.$$

Sin embargo, esto no es posible porque $\nabla u(\bar{x}_0) = 0$.

□

Demostración del Lema de Hopf. Denotamos $\bar{y} = (\hat{a}, \hat{b})$ el centro de $B = B(\bar{y}, R)$. Introducimos el anillo:

$$A = \{\bar{x} : \frac{R}{2} < |\bar{x} - \bar{y}| < R\}.$$

Abreviamos $r^2 = |\bar{x} - \bar{y}|^2 = (x - \hat{a})^2 + (y - \hat{b})^2$. Existe una función auxiliar $w(x)$ tal que:

- 1) $w(x) = 0$ en $\{x : |x - y| = R\}$.
- 2) $w(x) < 0$ en $\{x : |x - y| = \frac{R}{2}\}$.
- 3) $L_w = -L_0 w + b \nabla w > 0$, $\forall (x, y) \in A$.

En efecto, se puede encontrar $\alpha > 0$ tal que:

$$w(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}R^2} - e^{-\frac{\alpha}{2}r^2} \quad \frac{R}{2} < r < R,$$

satisface 1), 2) y 3). Aplicando L a w y simplificando $\alpha e^{-\frac{\alpha}{2}C}$, donde $C = (x - \hat{a})^2 + (y - \hat{b})^2$, la desigualdad equivale a:

$$-a + \alpha a(x - \hat{a})^2 - 2b\alpha(x - \hat{a})(y - \hat{b}) - c + \alpha a(y - \hat{b})^2 + b_1(x - \hat{a}) + b_2(y - \hat{b}) > 0.$$

Debemos encontrar un α de forma que se cumpla la desigualdad anterior. Despejando α :

$$\alpha > \frac{a + c - b_1(x - \hat{a}) - b_2(y - \hat{b})}{a(x - \hat{a})^2 - 2b(x - \hat{a})(y - \hat{b}) + c(y - \hat{b})^2}.$$

Esta desigualdad debe cumplirse $\forall (x, y) \in A$. Así elegimos $P_0 = (\hat{a}, \hat{b})$ el centro del anillo A . Por un lado como L_0 es elíptico:

$$a(x - \hat{a})^2 - 2b(x - \hat{a})(y - \hat{b}) + c(y - \hat{b})^2 \geq \lambda_0 \{(x - \hat{a})^2 + (y - \hat{b})^2\} \geq \lambda_0 \frac{R^2}{4}.$$

Por otro lado:

$$a + c + b_1(x - \hat{a}) + b_2(y - \hat{b}) \leq |(b_1, b_2)| |P - P_0| + |a| + |c| \leq M_1 + M_2 + R(M_3 + M_4) \leq M + RM^*.$$

Entonces, basta tomar $\alpha = \frac{M + RM^*}{\lambda_0 \frac{R^2}{4}}$.

Ahora definimos:

$$\phi = M + \varepsilon w,$$

donde por hipótesis $u < M$ en B . Se deduce que:

$$\phi \geq u \text{ en } \{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{y}| = \frac{R}{2}\}$$

mientras $\phi = M \geq u$ en $\{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{y}| = R\}$. Es decir,

$$\phi \geq u \quad \text{en } \partial A.$$

Por otro lado,

$$L\phi = L(M + \varepsilon w) = \varepsilon Lw > 0,$$

pues $\varepsilon > 0$. Como $Lu \leq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} L\phi &\geq Lu & (x, y) \in A \\ \phi &\geq u & (x, y) \in \partial A. \end{aligned}$$

Del principio de comparación (Teorema 2.19):

$$\phi \geq u, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Esto implica que:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) \geq \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) \quad \text{en } \partial A.$$

Sin embargo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) = \varepsilon \frac{\partial w}{\partial n}(x, y) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r}(w(r))|_{r=R} = R\varepsilon \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}R^2} > 0.$$

Por tanto:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) > 0.$$

□

Usando el Lema de Hopf se puede extender el principio fuerte del máximo a operadores elípticos.

Teorema 2.26. *Sea $-L_0 + b_1\partial_x + b_2\partial_y$ un operador elíptico en las condiciones del Lema 2.25 y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ un función que satisface:*

$$-L_0u + b_1\partial_x u + b_2\partial_y u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si Ω es un dominio y $\exists \bar{x}_0 \in \Omega$ tal que:

$$u(\bar{x}_0) = \sup_{\Omega} u =: M,$$

entonces $u \equiv M$.

2.7. Problema de Dirichlet

Comenzamos con el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el disco unidad $B(0, 1)$ del plano:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x, y) \in B \\ u = \tilde{f}(x, y) & (x, y) \in \partial B \end{cases} \quad (2.14)$$

Se busca una solución clásica de (2.14), es decir la que satisface $u \in C^2(B) \cap \overline{B}$ ($B := B(0, 1)$) y se parte de un dato \tilde{f} que es continuo en la frontera del disco. Nuestro propósito es demostrar la existencia de soluciones clásicas. La ecuación de Laplace en coordenadas polares es:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \quad (2.15)$$

La condición de contorno se expresa como:

$$u(1, \theta) = f(\theta) = \tilde{f}(\cos \theta, \sen \theta).$$

Luego f es continua y 2π -periódica. Usando el método de separación de variables (ver [5]) se comprueba que las funciones:

$$u_N(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta),$$

$a_n, b_n \in \mathbb{R}$, son armónicas en B , para todo $N \in \mathbb{N}$. Además,

$$u_N(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta.$$

Como f puede representarse¹ en serie de Fourier en la forma:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta,$$

donde $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen ntdt$ y $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, esto sugiere proponer la serie:

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sen n\theta) \quad (2.16)$$

como solución formal de (2.14). A tales efectos se tiene lo siguiente.

Teorema 2.27. *Sea $f \in C[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica. Entonces:*

i) $|a_n| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$ y $|b_n| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, para todo n .

ii) La función (2.16) es de clase C^∞ en B . Más aún, es armónica en B .

iii) La función $u(r, \theta)$ se puede escribir en la forma:

$$u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{r^2 + 1 - 2r \cos(\theta - t)} dt \quad 0 \leq r < 1. \quad (2.17)$$

¹Si f es sólo continua la convergencia no es en general puntual.

Omitiremos los detalles de la demostración.

Observación 2.13.

- i) La expresión (2.17) se denomina la fórmula de Poisson.
 ii) En coordenadas cartesianas (2.17) se escribe como la integral de línea:

$$u(\bar{x}) = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}. \quad (2.18)$$

- iii) La fórmula (2.17) define una función armónica en B . Sin embargo, necesitaremos comprobar que se cumple:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \tilde{f}(x_0,y_0), \quad \forall (x_0,y_0) \in \partial B. \quad (2.19)$$

Si la condición (2.19) se satisface, entonces (2.18) es la solución clásica del problema de Dirichlet. La relación (2.19) es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 2.28. *Si $f \in C^1[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica entonces,*

1. *La convergencia de:*

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N(\theta) \quad (2.20)$$

es uniforme en $[-\pi, \pi]$, donde $S_N(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$.

2. *La convergencia de la serie:*

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_N(r, \theta)$$

es uniforme para $(r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi]$. Por tanto,

$$u(1, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(1, \theta) = f(\theta) \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (2.21)$$

Observación 2.14. La relación (2.21) prueba (2.19).

Demostración. El punto 1) es un hecho conocido de series de Fourier (ver [5]). Para 2) hace falta comprobar que $\{u_N(r, \theta)\}$ define una sucesión que es de Cauchy uniformemente en $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$ es decir en \bar{B} . La condición de Cauchy es:

$$|u_M(r, \theta) - u_N(r, \theta)| \leq \varepsilon, \quad \forall M \geq N \geq N_\varepsilon, \quad \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi]. \quad (2.22)$$

Sin embargo,

$$\begin{cases} \Delta(u_M - u_N) = 0 & \text{en } B \\ u_M(1, \theta) - u_N(1, \theta) = S_M(\theta) - S_N(\theta) \end{cases}$$

donde

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N(\theta).$$

Del principio débil del máximo:

$$\sup_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi}} |u_M(r, \theta) - u_N(r, \theta)| \leq \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |S_M(\theta) - S_N(\theta)|.$$

Como la serie (2.20) converge uniformemente, entonces:

$$\sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |S_M(\theta) - S_N(\theta)| \leq \varepsilon, \quad \forall M \geq N \geq N_\varepsilon.$$

Esto prueba (2.22). \square

Hemos resuelto pues el problema de Dirichlet (2.14) mediante la fórmula de Poisson sólo cuando $\tilde{f}(x, y)$ es C^1 . Extenderemos este resultado al caso en que $\tilde{f}(x, y)$ es continua.

Teorema 2.29. *Cuando \tilde{f} es continua en ∂B la fórmula de Poisson (2.18) proporciona la solución del problema de Dirichlet.*

Demostración. Ahora $f(\theta) = \tilde{f}(\cos \theta, \sin \theta) \in C[-\pi, \pi]$ y 2π -periódica. Se sigue del Teorema de Stone-Weierstrass (ver [4]) que una función de esta clase se puede aproximar uniformemente en $[-\pi, \pi]$ por funciones 2π -periódicas del tipo:

$$f_m(\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta.$$

Como $f_m \in C^1[-\pi, \pi]$, la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B \\ u = f_m(x, y) & \text{en } \partial B \end{cases}$$

es:

$$u_m(\bar{x}) = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}_m(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}.$$

Del Corolario 2.23 existe $u \in C(\overline{B})$ tal que:

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m.$$

uniformemente en \overline{B} .

Por otro lado, tomando límites en la fórmula de Poisson y usando que $f_m \rightarrow f$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$ resulta:

$$u(\bar{x}) = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}.$$

Como u es armónica en B y:

$$u(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{f}_m(x, y) = \tilde{f}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial B,$$

entonces $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ y es la solución clásica del problema de Dirichlet. \square

Con un cambio de variable se prueba lo siguiente.

Corolario 2.30. *La solución del problema (2.14) en la bola $B(\bar{x}_0, R)$ es:*

$$u(\bar{x}) = \frac{R^2 - |\bar{x} - \bar{x}_0|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}.$$

La siguiente propiedad muestra que las funciones armónicas en un abierto Ω son de clase C^∞ en Ω .

Corolario 2.31. Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica. Entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración. Tomamos una bola $B(\bar{x}_0, R) \subset \overline{B(\bar{x}_0, R)} \subset \Omega$. Aplicando la fórmula de Poisson:

$$u(x, y) = \frac{R^2 - |\bar{x} - \bar{x}_0|^2}{2\pi R} \int_{|\bar{y} - \bar{x}_0| = R} \frac{f(y_1, y_2)}{(x - y_1)^2 + (y - y_2)^2} dS_{\bar{y}}, \quad (2.23)$$

donde $\bar{x} = (x, y)$ y donde $f(y_1, y_2) = u(y_1, y_2)$ con $(y_1, y_2) \in \partial B$. Como $(x, y) \in B(\bar{x}_0, R)$ la identidad (2.23) se puede derivar infinitas veces con respecto a (x, y) . \square

Corolario 2.32 (Propiedad de la media). Si u es armónica en Ω y $B(\bar{x}_0, R) \subset \Omega$ entonces:

$$u(\bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\bar{y} - \bar{x}_0| = R} u(\bar{y}) dS_{\bar{y}}.$$

Demostración. Hacer $\bar{x} = \bar{x}_0$ en (2.23). \square

De la propiedad de la media se puede obtener una demostración del principio fuerte del máximo para funciones armónicas.

Teorema 2.33. Sea $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ armónica en Ω donde Ω es un dominio. Si $\exists \bar{x}_0 \in \Omega$ tal que

$$u(\bar{x}_0) = \sup_{\Omega} u = M,$$

entonces

$$u \equiv M.$$

Demostración. Sea $\Omega_M = \{x \in \Omega : u = M\}$. Como $\bar{x}_0 \in \Omega_M$, $\Omega_M \neq \emptyset$. Además Ω_M es cerrado en Ω . Ahora vemos que Ω_M es abierto en Ω_M . Sea $\bar{x}_1 \in \Omega_M$ entonces vamos a probar que $\exists R > 0$, tal que $B(\bar{x}_1, R) \subset \Omega_M$, es decir, $u = M$, $\forall x \in B_R(\bar{x}_1)$. En efecto para todo $0 < \rho < R$, de la propiedad de la media:

$$u(\bar{x}_1) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\bar{y} - \bar{x}_1| = \rho} u(\bar{y}) \partial S_{\bar{y}}.$$

Ahora:

$$M = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\bar{y} - \bar{x}_1| = \rho} u(\bar{y}) \partial S_{\bar{y}},$$

entonces:

$$0 = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{|\bar{y} - \bar{x}_1| = \rho} (u(\bar{y}) - M) \partial S_{\bar{y}}.$$

Por lo tanto:

$$u(\bar{y}) = M, \quad \forall \bar{y} \in \partial B(\bar{x}_1, \rho).$$

Como ρ es arbitrario entonces $u(\bar{y}) = M$ en $B(\bar{x}_1, R)$. Luego Ω_M es abierto, por tanto $\Omega_M = \Omega$. \square

2.8. El teorema de Phragmen–Lindelöff

Definición 2.34. Se dice que $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua a trozos si existen valores $-\pi \leq \theta_1 < \dots < \theta_N \leq \pi$ tales que f es continua en $[-\pi, \pi] \setminus \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ y además f admite límites laterales en cada punto θ_i .

Definición 2.35. Se dice que \tilde{f} es continua a trozos en ∂B si $f(\theta) = \tilde{f}(\cos \theta, \sin \theta)$ es continua a trozos en $[-\pi, \pi]$.

Observación 2.15. Toda función f continua a trozos en $[-\pi, \pi]$ está acotada en $[-\pi, \pi]$.

Nos proponemos estudiar ahora el problema de Dirichlet (2.14) con datos \tilde{f} que son sólo continuos a trozos en ∂B . En la siguiente definición denotamos por $P_k = e^{i\theta_k}$, $1 \leq k \leq N$, los puntos de discontinuidad de \tilde{f} .

Definición 2.36. Se dice que $u \in C^2(\Omega)$ es una solución clásica de (2.14) si:

a) $\Delta u = 0$ en B .

b) $u \in C(\overline{B} \setminus \{P_1, \dots, P_N\})$ y

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} u(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x}_0) \quad (2.24)$$

si $\bar{x}_0 \in \partial B$ es un punto de continuidad de \tilde{f} .

c) u está acotada en B .

Observación 2.16. La función:

$$u^*(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta},$$

cumple las siguientes propiedades:

i) u es armónica en B .

ii) $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = 0$, si $\theta \neq 0$.

iii) $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, 0) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{(1-r)^2} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1+r}{1-r} = \infty$.

Así $u^*(x, y)$ es una función armónica en B que toma un dato \tilde{f} continuo a trozos en la frontera y que, sin embargo, no está acotada en B . Más precisamente, si consideramos el problema de Dirichlet (2.14) y $\tilde{f}(x, y) = 0$ si $(x, y) \neq (1, 0)$, $\tilde{f}(1, 0) = 1$ entonces $u^*(x, y)$ no define una solución clásica. Falla la condición c) a pesar de que (2.24) se cumple para todo $\bar{x}_0 \neq (1, 0)$.

Observación 2.17. Supongamos que u resuelve (2.14) con un dato discontinuo a trozos \tilde{f} y discontinuidades en P_1, \dots, P_N , $P_k = e^{i\theta_k}$, $k = 1, \dots, N$. Nótese entonces que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$u_\lambda(x, y) = u(x, y) + \lambda u^*(r, \theta - \theta_1)$$

define una familia infinita de soluciones de (2.14), que están no acotadas. Esto significa que si quitamos la condición c) en la definición de solución clásica no podemos aspirar a la unicidad de soluciones.

El siguiente resultado proporciona dicha unicidad de soluciones clásicas del problema (2.14) cuando los datos \tilde{f} son sólo continuos a trozos.

Teorema 2.37 (Teorema de Phragmen-Lindelöff). Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \{P_1, \dots, P_N\})$ donde Ω es un dominio acotado del plano y $\{P_1, \dots, P_N\} \subset \partial\Omega$. Supongamos además que u está acotada y

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u$$

y

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u.$$

Corolario 2.38. Sea \tilde{f} una función continua a trozos en ∂B . Entonces el problema (2.14) admite a lo más una solución clásica.

Demostración. Si u_1, u_2 son soluciones de (2.14) entonces $u = u_1 - u_2$ es una solución clásica de (2.14) en $\tilde{f} = 0$ en $\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$. Aplicando el teorema:

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u = 0.$$

Análogamente $\inf_{\Omega} u = 0$, luego $u = 0$. Así $u_1 = u_2$. \square

Demostración del Teorema de Phragmen–Lindelöff. En las condiciones del enunciado se cumple siempre que:

$$\sup_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u \leq \sup_{\Omega} u.$$

Por tanto, basta con demostrar que:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u.$$

Para ello fijamos $\bar{x}_1 \in \Omega$ y probamos que:

$$u(\bar{x}_1) \leq M_1 := \sup_{\partial\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u.$$

A tal efecto, se forma la función auxiliar:

$$w(\bar{x}) = M_1 + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^N -\ln \frac{|\bar{x} - P_i|}{D} \right)$$

donde $\varepsilon > 0$, $D > 0$ son constantes que vamos a elegir. En primer lugar se toma D tal que $|\bar{x} - P_i| \leq D, \forall \bar{x} \in \partial\Omega, i = 1, \dots, N$. Bajo esta elección se tiene que:

$$w(\bar{x}) \geq M_1 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Ahora para $\delta > 0$ suficientemente pequeño se forma el dominio:

$$\Omega_{\delta} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_{\delta}(P_i)}.$$

Denotemos

$$\Gamma_{\delta} = \Omega \cap \left(\bigcup_{i=1}^N \partial B_{\delta}(P_i) \right).$$

Se comprueba que:

$$\partial\Omega_{\delta} = \Gamma_{\delta} \cup \left\{ \partial\Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N B_{\delta}(P_i) \right) \right\}.$$

Además,

$$u \leq w,$$

en $\partial\Omega_{\delta}$. Como $\Delta w = 0$ en Ω_{δ} se tiene del principio de comparación:

$$u(\bar{x}) \leq w(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \Omega_{\delta}.$$

Teniendo en cuenta que $\bar{x}_1 \in \Omega_{\delta}$ si δ es pequeño, entonces:

$$u(\bar{x}_1) \leq M_1 + \varepsilon \sup_{\partial\Omega_{\delta}} \left(\sum_{i=1}^N -\ln \frac{|\bar{x} - P_i|}{D} \right).$$

Al hacer $\varepsilon \rightarrow 0+$ se tiene que:

$$u(\bar{x}_1) \leq M_1,$$

y hemos terminado la demostración. \square

2.9. Problema de Dirichlet: datos continuos a trozos

Teorema 2.39. Sea \tilde{f} una función continua a trozos en ∂B . Entonces el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B \\ u = \tilde{f} & \text{en } \partial B \end{cases}$$

admite una única solución clásica.

Demostración. Probemos que:

$$u = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}(\bar{y})}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} \quad (2.25)$$

es la solución buscada.

Como primera observación se cumple que:

$$1 = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}},$$

$\forall \bar{x} \in B$. Como $\tilde{f}(\bar{y})$ está acotada:

$$|\tilde{f}(\bar{y})| \leq M,$$

entonces de (2.25) se deduce que:

$$|u(\bar{x})| \leq M, \quad \bar{x} \in B.$$

Por otro lado, vamos a probar que:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} u(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{x}_0)$$

si $\bar{x}_0 \in \partial B$ es un punto de continuidad de \tilde{f} . En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)| < \varepsilon, \quad \text{si } |\bar{y} - \bar{x}_0| < \delta,$$

con $\bar{y} \in \partial B$. Ahora escribiremos:

$$u(\bar{x}) - \tilde{f}(\bar{x}_0) = \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}.$$

Tomando valores absolutos:

$$|u(\bar{x}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)| \leq \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}. \quad (2.26)$$

Ahora escribiremos la integral así:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{|\bar{y}|=1} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} = \\ & \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| < \delta\}} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} + \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| \geq \delta\}} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}}. \end{aligned}$$

Respecto al primer sumando:

$$\frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| < \delta\}} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} \leq \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| < \delta\}} \frac{\varepsilon}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} \leq \varepsilon.$$

Para el segundo, tomamos $\bar{x} \in B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{x}_0)$. Entonces $\forall \bar{y} \in \partial B$ cumpliendo $|\bar{y} - \bar{x}_0| \geq \delta$ se tiene:

$$|\bar{y} - \bar{x}| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

luego,

$$|\bar{y} - \bar{x}|^2 \geq \frac{\delta^2}{4}.$$

Así, la segunda integral cumple:

$$\begin{aligned} \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| \geq \delta\}} \frac{|\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)|}{|\bar{x} - \bar{y}|^2} dS_{\bar{y}} &\leq \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \frac{4}{\delta^2} \int_{\partial B \cap \{|\bar{y} - \bar{x}_0| \geq \delta\}} |\tilde{f}(\bar{y}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)| dS_{\bar{y}} \\ &\leq \frac{1 - |\bar{x}|^2}{2\pi} \frac{4}{\delta^2} 2M2\pi = \frac{8M}{\delta^2} (1 - |\bar{x}|^2). \end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} 1 - |\bar{x}|^2 = 0$$

la segunda integral es menor que ε si $|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta_1$ con δ_1 suficientemente pequeño. Así, se deduce de (2.26) que:

$$|u(\bar{x}) - \tilde{f}(\bar{x}_0)| \leq 2\varepsilon$$

para $|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta_1$ y hemos terminado. \square

2.10. Singularidades evitables de las funciones armónicas en el plano

En el siguiente resultado estudiamos cuándo una función $u \in C^2(\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\})$ que satisface:

$$\Delta u = 0 \quad \bar{x} \in \Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\},$$

donde Ω es un dominio del plano, se puede extender a una función armónica a todo el dominio Ω .

Teorema 2.40. *Sea $u \in C^2(\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\})$, donde $\{P_1, \dots, P_N\}$ es una familia de puntos de Ω , una función armónica en $\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$. Si para cada P_i se cumple que:*

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow P_i} \frac{u(\bar{x})}{\ln |\bar{x} - P_i|} = 0 \tag{2.27}$$

entonces u se puede extender a una única función armónica \bar{u} en Ω .

La demostración hace uso de la siguiente versión del principio del máximo.

Teorema 2.41 (Principio del máximo y singularidades). *Sea $u \in C^2(\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\})$ una función que cumple:*

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}.$$

junto con las condiciones (2.27) en cada P_i . Entonces:

$$\sup_{\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}} u = \sup_{\partial \Omega} u.$$

Demostración. Llamamos:

$$M_1 = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Podemos suponer que $M_1 < \infty$. Fijamos $\bar{x}_1 \in \Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$. Probaremos que:

$$u(\bar{x}_1) \leq M_1.$$

Para ello introducimos la función:

$$w(\bar{x}) = M_1 + \varepsilon \sum_{i=1}^N -\ln |\bar{x} - P_i|,$$

donde $\varepsilon > 0$ es una cantidad fijada. De la condición (2.27) existe δ (independiente de i) tal que:

$$u(\bar{x}) \leq -\varepsilon \ln |\bar{x} - P_i| \quad (2.28)$$

para todo \bar{x} tal que:

$$|\bar{x} - P_i| = \delta.$$

Formamos el dominio:

$$\Omega_\delta = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B_\delta(P_i)}.$$

cuya frontera tiene la forma:

$$\partial\Omega_\delta = \partial\Omega \cup \Gamma_\delta$$

donde,

$$\Gamma_\delta = \bigcup_{i=1}^N \partial B_\delta(P_i).$$

Podemos elegir δ tal que $\bar{x}_1 \in \Omega_\delta$. Por otro lado, se sigue de las condiciones (2.28) que:

$$u(\bar{x}) \leq -\varepsilon \ln |\bar{x} - P_i|$$

en $\partial B_\delta(P_i)$. Luego,

$$w(\bar{x}) \geq u(\bar{x}) \quad \text{en } \Gamma_\delta,$$

lo que implica que:

$$u(\bar{x}) \leq w(\bar{x}) \quad \text{en } \partial\Omega_\delta.$$

Como u y w son armónicas en Ω_δ del principio de comparación (Teorema 2.19) se sigue que:

$$u(\bar{x}) \leq w(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \Omega_\delta.$$

Haciendo $\bar{x} = \bar{x}_1$:

$$u(\bar{x}_1) \leq M_1 + \varepsilon \sum_{i=1}^N -\ln |\bar{x}_1 - P_i|.$$

Tomando límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0+$ se concluye que $u(\bar{x}_1) \leq M_1$. □

Corolario 2.42. *La conclusión del Teorema 2.41 es válida si las condiciones (2.27) se cambian por u acotada en $\Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}$.*

Demostración del Teorema 2.40. Basta construir la extensión \bar{u} en una bola $\overline{B_\delta(P_i)}$ para cada $i = 1, \dots, N$. Para ello formaremos el problema:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B_\delta(P_i) \\ v = u & \text{en } \partial B_\delta(P_i), \end{cases}$$

con δ pequeño. De la fórmula de Poisson se sigue la existencia de $v \in C^2(B_\delta(P_i))$, la solución del problema. Como v acotada y $u - v$ es armónica en $B_\delta(P_i) \setminus \{P_i\}$, del Teorema 2.41 se concluye:

$$u = v \text{ en } B_\delta(P_i) \setminus \{P_i\}.$$

Por tanto, $\bar{u} = v$. Además, del teorema de la media:

$$\bar{u}(P_i) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{|\bar{y}-P_i|=\delta} u(\bar{y}) dS_{\bar{y}}.$$

Esto demuestra que los valores de \bar{u} en los puntos P_i están unívocamente determinados por u . \square

Uno corolario de la demostración que acabamos de terminar es el que sigue.

Corolario 2.43. *El problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } Q \\ u = f & \text{en } \partial Q, \end{cases}$$

está mal planteado en un dominio del plano de la forma

$$Q = \Omega \setminus \{P_1, \dots, P_N\}.$$

2.11. La ecuación de Poisson

El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y) & \text{en } B \\ u = \tilde{f}(x, y) & \text{en } \partial B \end{cases} \quad (2.29)$$

se puede estudiar por el método de separación de variables. Se demuestra, por ejemplo, que si $F \in C^1(\overline{B})$ y $\tilde{f} \in C(\partial B)$ entonces (2.29) admite una única solución clásica (ver detalles en [5]).

La unicidad es consecuencia del principio del máximo (ver el Teorema 2.18). A primera vista da la impresión de que $F \in C^1(\overline{B})$ es una condición excesiva para la existencia de una solución clásica y debería ser suficiente con que $F \in C(\overline{B})$. Esto es lo que ocurre en dimensión $N = 1$. Sin embargo, para $N \geq 2$ la continuidad de F en \overline{B} no basta para garantizar la existencia de solución. Esto se prueba con el siguiente ejemplo que constituye otro ejemplo más de aplicación del principio del máximo.

Teorema 2.44 ([2]). *El problema*

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{y^2 - x^2}{2R^2} \left[4(-\log R)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-\log R)^{-\frac{3}{2}} \right] & \text{en } B_R(0, 0) \\ u = (-\log R)^{\frac{1}{2}}(x^2 - y^2) & \text{en } \partial B_R(0, 0), \end{cases} \quad (2.30)$$

donde $0 < R < 1$, no admite solución clásica.

Observación 2.18. $F(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2R^2} \left[4(-\log R)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-\log R)^{-\frac{3}{2}} \right]$ es continua en $\overline{B}_R(0, 0)$.

Demostración. Supongamos que existe una solución clásica $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$ de (2.30). La función:

$$v = (-\log r)^{\frac{1}{2}}(x^2 - y^2),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, cumple la ecuación en $B_R(0,0) \setminus \{(0,0)\}$ y la condición de contorno. Además $v \in C^1(\overline{B_R})$ pero $v \notin C^2(B)$. La función

$$w = u - v$$

es armónica en $\overline{B_R} \setminus \{(0,0)\}$ y

$$w = u - v = 0 \quad \text{en } \partial\overline{B_R}.$$

Como w está acotada en $\overline{B_R}$ del Teorema 2.41 se sigue:

$$w \equiv 0 \text{ en } \overline{B_R} \setminus \{(0,0)\}.$$

Entonces

$$v = u \text{ en } \overline{B_R} \setminus \{(0,0)\}.$$

Esto no es posible porque v no es C^2 en B_R y se está suponiendo que u sí lo es. □

Capítulo 3

El principio del máximo para la ecuación del calor

3.1. La ecuación del calor

La ecuación del calor en dimensión N se define como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

donde $u = u(x, t)$ representa la temperatura de un sólido en el punto x y el instante t , y D es el denominado coeficiente de difusión térmica. Tras un cambio de escala, la ecuación se simplifica así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{abreviadamente} \quad u_t = \Delta u.$$

Aparte de la difusión del calor, otros procesos que se asocian a dicha ecuación son la difusión de sustancias en disolución (ley de Fick), los procesos de reacción-difusión, es decir de transporte y generación de masa o energía en reactores químicos, y en biología matemática (dinámica de poblaciones, morfogénesis). En reacción-difusión la ecuación toma la forma no lineal siguiente:

$$u_t = \Delta u + f(u).$$

La ecuación logística en dinámica de poblaciones, es un caso particular de esta clase de ecuaciones. A saber:

$$u_t = \Delta u + \lambda u - u^2.$$

Todos los cálculos de la presente sección los efectuaremos en \mathbb{R}^N . De hecho no reporta simplificación alguna considerar $N = 2$.

3.2. La solución fundamental

La función:

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^N \quad t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \quad (x, t) \neq (0, 0), \end{cases}$$

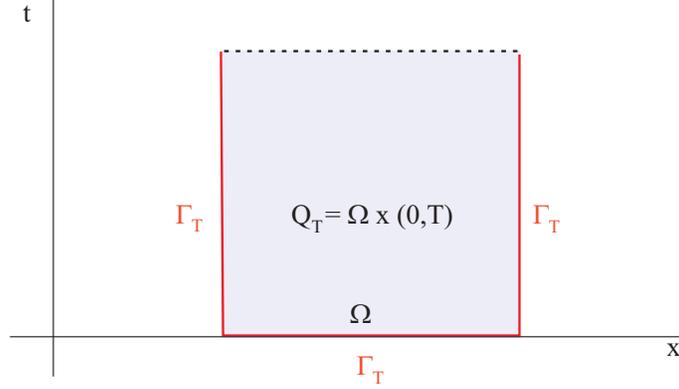


Figura 3.1: La frontera parabólica Γ_T de Q_T .

se denomina la solución fundamental de la ecuación del calor en $t > 0$. Representa la difusión del calor generada por una fuente puntual en $x = 0$. Resuelve la ecuación del calor en $\mathbb{R}^N \setminus \{(0, 0)\}$ y aparece implicada en los argumentos de la Sección 3.4. Es inmediato comprobar que:

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \rightarrow \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0, \end{cases}$$

cuando $t \rightarrow 0+$.

3.3. Principio débil del máximo

Vamos a estudiar el principio del máximo para la ecuación del calor en ciertas regiones específicas. Sea

$$Q_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado y $T > 0$. Definimos la frontera parabólica de Q_T (véase la Figura 3.1) como:

$$\Gamma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]) = \partial Q_T \setminus \Omega \times \{T\}.$$

Escribiremos:

$$Lu = u_t - \Delta u,$$

para representar el operador del calor.

Se define el espacio de funciones:

$$C^{2,1}(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}) = \{u \in C(Q_T) : u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_t \in C(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}), 1 \leq i, j \leq N\}.$$

Teorema 3.1 (Principio débil del máximo). *Sea $u \in C^{2,1}(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}) \cap C(\overline{Q_T})$ tal que:*

$$Lu \leq 0$$

en Q_T . Entonces,

$$\sup_{Q_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} u.$$

Para la demostración del principio del máximo hace falta un lema previo.

Lema 3.2. Si $u \in C^{2,1}(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\})$ cumple $Lu < 0$ en $Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}$ entonces u no puede tomar un máximo local en un punto $(x_0, t_0) \in Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}$.

Demostración. Si $(x_0, t_0) \in Q_T$ entonces:

$$u_t = 0 \quad \& \quad \nabla u = 0$$

en (x_0, t_0) . Además

$$\Delta u(x_0, t_0) \leq 0.$$

Por tanto

$$Lu(x_0, t_0) = -\Delta u(x_0, t_0) \geq 0,$$

contra lo supuesto. Si el máximo se alcanza en (x_0, T) , $x_0 \in \Omega$, entonces $\Delta u(x_0, T) \leq 0$ y sin embargo $u_t(x_0, T) \geq 0$. Por tanto:

$$Lu(x_0, T) = u_t(x_0, T) - \Delta u(x_0, T) \geq 0,$$

lo cual no es posible. □

Demostración del Teorema 3.1. Se sabe que $u \in C^{2,1}(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}) \cap C(\overline{Q}_T)$, luego basta con demostrar que:

$$\sup_{\overline{Q}_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} u,$$

ya que la desigualdad contraria se cumple siempre. Por otro lado, si fuese:

$$Lu < 0, \quad (x, t) \in Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\},$$

el Lema 3.2 asegura que el supremo tiene que alcanzarse en Γ_T . Por tanto, admitimos que:

$$Lu \leq 0 \quad (x, t) \in Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}.$$

Introducimos entonces la función auxiliar:

$$u_\varepsilon = u - \varepsilon \phi(x) \quad \varepsilon > 0,$$

donde:

$$\phi(x) = \frac{M^2 - |x|^2}{2N},$$

y M se define como el radio de una bola $B(0, M)$ tal que $\Omega \subset B(0, M)$. Entonces:

$$Lu_\varepsilon \leq -\varepsilon < 0 \quad \text{en } Q_T \cup (\Omega \times T)$$

y usando el Lema 3.2 se tiene que:

$$\sup_{\overline{Q}_T} u_\varepsilon \leq \sup_{\Gamma_T} u_\varepsilon \leq \sup_{\Gamma_T} u,$$

para tales $\varepsilon > 0$. Argumentando como en el Capítulo 2 se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\overline{Q}_T} u_\varepsilon = \sup_{\overline{Q}_T} u,$$

de donde se sigue la conclusión. □

Observación 3.1. Las hipótesis del teorema se pueden relajar y suponer que:

$$u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T).$$

Incluso se puede asumir solamente que

$$u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{\Omega} \times [0, T]).$$

En este último caso se entiende que el supremo podría ser infinito en el segundo miembro de la desigualdad:

$$\sup_{Q_T} u \leq \sup_{\Gamma_T} u.$$

Como consecuencia del Teorema 3.1 se tiene el siguiente principio de comparación para el operador del calor.

Corolario 3.3 (Principio de comparación). *Sean $u, v \in C^{2,1}(Q_T \cup \{\Omega \times \{T\}\}) \cap C(\overline{Q}_T)$ tales que:*

$$Lu \leq Lv \quad (x, t) \in Q_T,$$

y

$$u \leq v \quad (x, t) \in \Gamma_T.$$

Entonces:

$$u \leq v \quad (x, t) \in Q_T.$$

Del principio de comparación se sigue la unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet.

Corolario 3.4. *Para cada F, f y α el problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + F(x, t) & x \in \Omega \quad t > 0 \\ u(x, t) = \alpha(x, t) & x \in \partial\Omega \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

admite a lo más una solución clásica:

$$u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T).$$

3.4. El principio fuerte del máximo para la ecuación del calor

3.4.1. Bolas calóricas

Usando la solución fundamental:

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad t > 0,$$

y para $R > 0$ se introduce en $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ el conjunto:

$$E_R^*(0, 0) = \left\{ (y, s) : U(y, s) \geq \frac{1}{R^N} \right\}$$

En otros términos:

$$E_R^*(0, 0) = \left\{ (y, s) : |y|^2 \leq 2Ns \ln \left(\frac{R^2}{4\pi s} \right) \right\}.$$

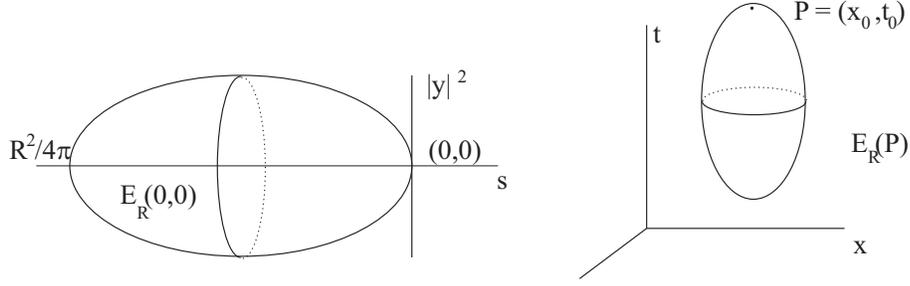


Figura 3.2: La bola calórica para $N = 2$.

La bola calórica que pasa por $(0, 0) \in \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ es (ver Figura 3.2):

$$E_R(0, 0) = \{(y, s) : (y, -s) \in E_R^*(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0].$$

La correspondiente bola que pasa por $P_0 = (x_0, t_0)$ es:

$$E_R(P_0) = E_R(0, 0) + P_0.$$

En términos de x y t :

$$E_R(P_0) = \left\{ (x, t) : |x - x_0| \leq \sqrt{2N(t_0 - t) \ln \left(\frac{R^2}{4\pi(t_0 - t)} \right)} \right\}.$$

3.4.2. Propiedad de la media

El que sigue es la generalización del teorema de la media (ver Corolario 2.32) para la ecuación del calor. En él las bolas euclídeas se han sustituido por bolas calóricas.

Teorema 3.5 (Teorema de la media, N. Watson, 1973 [1]). *Sea $u \in C^{2,1}(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, una solución de:*

$$Lu = 0.$$

Entonces, $\forall E_R(P) \subset \overline{E_R(P)} \subset Q_T$ con $P = (x, t)$, se cumple la identidad:

$$u(P) = \frac{1}{4R^N} \int \int_{E_R(P)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds.$$

La demostración del resultado usa el siguiente lema:

Lema 3.6. *Se tiene que:*

$$\int \int_{E_1(0,0)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4. \quad (3.1)$$

Más aún:

$$\int \int_{E_R(x,t)} \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds = 4R^N. \quad (3.2)$$

Demostración. Denotemos por I a la integral en (3.1). Entonces:

$$I = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{|y| \leq \sqrt{2N(-s) \ln \left(\frac{1}{4\pi(-s)} \right)}} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,$$

y haciendo un cambio de variable:

$$I = \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{s^2} \int_{|y| \leq \sqrt{2Ns \ln\left(\frac{1}{4\pi s}\right)}} |y|^2 dy ds.$$

Usando coordenadas esféricas en \mathbb{R}^N se tiene:

$$I = w_N \int_0^{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{s^2} \int_0^{\rho(s)} \rho^{N+1} d\rho ds,$$

donde $\rho(s) = \sqrt{2Ns \ln\left(\frac{1}{4\pi s}\right)}$ y w_N es el área de $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, es decir,

$$w_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)},$$

siendo $\Gamma(t)$ es la función gamma de Euler. Por tanto:

$$I = \frac{w_N}{N+2} \int_0^{\frac{1}{4\pi}} s^{-2} \left(2Ns \ln\left(\frac{1}{4\pi s}\right)\right)^{\frac{N+2}{2}} ds.$$

Ahora hacemos $s_1 = 4\pi s$:

$$I = \frac{w_N}{N+2} 4\pi^{-\frac{N}{2}} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N+2}{2}} \int_0^1 s_1^{\frac{N-2}{2}} (-\ln s_1)^{\frac{N+2}{2}} ds_1.$$

Si $J = \int_0^1 s_1^{\frac{N-2}{2}} (-\ln s_1)^{\frac{N+2}{2}} ds_1$ definimos $z = -\ln s_1$ y:

$$J = \int_0^\infty e^{-\frac{N}{2}z} z^{\frac{N+2}{2}} dz.$$

Tomando $\sigma = \frac{N}{2}z$:

$$J = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{N+4}{2}} \int_0^\infty e^{-\sigma} \sigma^{\frac{N+4}{2}-1} d\sigma = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{N+2}{2}} \frac{N+2}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right).$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{w_N}{N+2} 4\pi^{-\frac{N}{2}} \left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N+2}{2}} \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{N+2}{2}} \frac{N+2}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = w_N 2\pi^{-\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = 4.$$

Con esto queda probada la identidad (3.1), mientras (3.2) se sigue de la primera trasladando las variables. \square

Demostración del Teorema 3.5. Se toma $R = r$ variable y se define la función de r :

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^N} \int \int_{E_r(x,t)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds.$$

Haciendo $y_1 = y - x$, $s_1 = s - t$:

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^N} \int \int_{E_r(0,0)} u(y_1 + x, s_1 + t) \frac{|y_1|^2}{s_1^2} dy_1 ds_1.$$

Vamos a demostrar que $\phi(r)$ es constante en “ r ”. Una vez probado esto, introduciendo $y_2 = \frac{y_1}{r}$, $s_2 = \frac{s_1}{r^2}$ en la integral:

$$\phi(r) = \frac{1}{4} \int \int_{E_1(0,0)} u(ry_2 + x, r^2s_2 + t) \frac{|y_2|^2}{s_2^2} dy_2 ds_2.$$

Como $\phi(r) = c \equiv$ constante, se tiene que:

$$c = \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = \left(\frac{1}{4} \int \int_{E_1(0,0)} \frac{|y_2|^2}{s_2^2} dy_2 ds_2 \right) u(x, t) = u(x, t),$$

donde hemos usado la identidad (3.6) del Lema 3.6.

Para probar que ϕ es constante primero observamos que la ecuación $Lu = 0$ es invariante frente a traslaciones. Podemos por ello suponer que $(x, t) = (0, 0)$. La función $\phi(r)$ es:

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^N} \int \int_{E_r(0,0)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{4} \int \int_{E_1(0,0)} u(ry_2, r^2s_2) \frac{|y_2|^2}{s_2^2} dy_2 ds_2.$$

Para simplificar escribimos y, s en lugar de y_2, s_2 . Derivamos con respecto a r y resulta:

$$\phi'(r) = \frac{1}{4} \int \int_{E_1(0,0)} \left\{ \sum_{i=1}^N y_i u_{y_i}(ry, r^2s) + 2rsu_s(ry, r^2s) \right\} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Volvemos a hacer $y_1 = ry, s_1 = r^2s$,

$$\phi'(r) = \frac{1}{4r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left\{ \sum_{i=1}^N (y_1)_i u_{y_i} + 2s_1 u_s \right\} \frac{|y_1|^2}{s_1^2} dy_1 ds_1,$$

pero para simplificar volvemos a escribir y, s en lugar de y_1, s_1 , es decir:

$$\phi'(r) = \frac{1}{4r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left\{ \sum_{i=1}^N y_i u_{y_i} + 2su_s \right\} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = A + B,$$

donde

$$A = \frac{1}{4r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left(\sum_{i=1}^N y_i u_{y_i} \right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,$$

$$B = \frac{1}{4r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left(\sum_{i=1}^N 2su_s \right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Introducimos la función:

$$\psi(y, s) = -\frac{N}{2} \ln(-s) - \frac{N}{2} \ln 4\pi + N \ln r + \frac{|y|^2}{4s}.$$

Nótese que $\psi = 0$ describe precisamente la frontera $\partial E_r(0, 0)$ de $E_r(0, 0)$. Entonces:

$$B = \frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} u_s \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy ds.$$

Ahora recordamos que el teorema de la divergencia afirma, para funciones $v(y, s), w(y, s)$ que:

$$\int \int_{E_r(0,0)} vw_{y_i} dy ds = - \int \int_{E_r(0,0)} v_{y_i} w dy ds + \int \int_{\partial E_r(0,0)} vw\nu_i dS,$$

donde ν_i es la componente i -ésima de la normal unitaria exterior ν a $\partial E_r(0,0)$. Aplicado a la integral B y observando que $\psi = 0$ sobre $\partial E_r(0,0)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left[Nu_s \psi + \psi \sum_{i=1}^N u_{sy_i} y_i \right] dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} Nu_s \psi + \frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \sum_{i=1}^N \psi_s y_i u_{y_i} dy ds. \end{aligned}$$

La segunda de las integrales:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \sum_{i=1}^N \psi_s y_i u_{y_i} dy ds = \\ &-\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \sum_{i=1}^N \frac{N}{2s} y_i u_{y_i} dy ds - \frac{1}{4r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \left(\frac{|y|^2}{s^2} \sum_{i=1}^N y_i u_{y_i} \right) dy ds = \\ &-\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} \sum_{i=1}^N \frac{N}{2s} y_i u_{y_i} dy ds - A. \end{aligned}$$

Por tanto (recuérdese que $\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$):

$$\begin{aligned} \phi' &= -\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} Nu_s \psi dy ds - \frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} N \sum_{i=1}^N \psi_{y_i} u_{y_i} dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} Nu_s \psi dy ds - \frac{1}{r^{N+1}} \int \int_{E_r(0,0)} N \psi \Delta u dy ds. \end{aligned}$$

Usando la ecuación del calor $u_s - \Delta u = 0$, se tiene:

$$\phi'(r) = 0.$$

□

3.4.3. Principio fuerte del máximo

La que sigue es la versión parabólica del principio fuerte del máximo. El caso general del resultado donde el laplaciano Δ se reemplaza por un operador elíptico se debe a L. Nirenberg (1953). La demostración que se presenta, aunque más breve, sólo es válida para la ecuación del calor.

Teorema 3.7 (Principio fuerte del máximo). *Sea $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, donde $Q_T = \Omega \times (0, T)$ y Ω es abierto y conexo, una función tal que:*

$$Lu = 0 \quad \text{en } Q_T.$$

Supongamos que existe $(x_0, t_0) \in Q_T$ tal que:

$$u(x_0, t_0) = \sup_{Q_T} u =: M.$$

Entonces:

$$u(x, t) = M,$$

$\forall (x, t) \in Q_T$ con $t \leq t_0$.

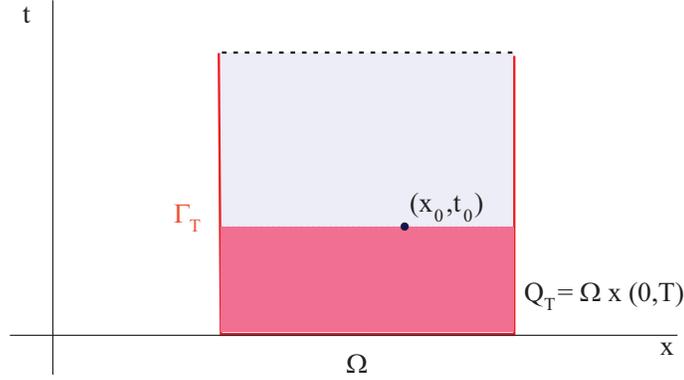


Figura 3.3: La zona de Q_T donde $u(x, t) = M$.

Observación 3.2. A diferencia del caso elíptico (Teorema 1.8) la solución u no es idénticamente M en Q_T , sólo en la parte de Q_T donde $t \leq t_0$ (véase la Figura 3.3).

Observación 3.3. En general $u(x, t) \neq M$ para $t > t_0$. Tómese por ejemplo un punto $x_1 \notin \bar{\Omega}$ y considérese la función:

$$u(x, t) = -U(x - x_1, t - t_0)$$

definida en el dominio $Q := \Omega \times (0, \infty)$. Entonces, u satisface la ecuación del calor en Q y $\max_Q u = 0$. De hecho $u = 0$ para $0 \leq t \leq t_0$. Sin embargo, $u(x, t) < 0$ siempre que $t > t_0$.

Demostración del Teorema 3.7. Supongamos que $u(x_0, t_0) = M$ y tomemos $(x_1, t_1) \in Q_T$ con $t_1 < t_0$. Vamos a probar que $u(x_1, t_1) = M$. Para ello se sabe que x_0 se puede conectar con x_1 en Ω (Ω es abierto y conexo) mediante una poligonal de vértices $y_0 = x_0, \dots, y_m = x_1$. Correspondiente a cada y_i , $i = 0, 1, \dots, m$, tomamos un tiempo $t'_i \in (0, T)$ tal que $t'_0 = t_0 > t'_1 > \dots > t'_m = t_1$. Llamamos $P_i = (y_i, t'_i)$, $i = 0, \dots, m$, y formamos la poligonal Γ de vértices P_0, P_1, \dots, P_m constituida por la unión en Q_T de los segmentos lineales $[P_{i-1}, P_i]$, $i = 1, \dots, m$. Vamos a probar que $u(x, t) \equiv M, \forall (x, t) \in \Gamma$. En particular, $u(x_1, t_1) = u(P_m) = M$ que es lo que queremos demostrar. Partiendo de P_0 y usando el Teorema 3.5 se tiene que:

$$M = u(x_0, t_0) = \int \int_{E_r(P_0)} u(y, s) \frac{|y_0 - y|^2}{(t'_0 - s)^2} dy ds$$

donde $E_r(P_0) \subset Q_T$. Entonces:

$$0 = \int \int_{E_r(P_0)} (u(y, s) - M) \frac{|y_0 - y|^2}{(t'_0 - s)^2} dy ds;$$

y como $u \leq M$ entonces $u \equiv M$ en $E_r(P_0)$. En particular, $u \equiv M$ en $E_r(P_0) \cap \Gamma$. Esto quiere decir que:

$$u(x, t) = M,$$

para todo $(x, t) \in \Gamma$ con $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$ donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. Definimos:

$$\bar{t} = \inf\{t : (x, t) \in \Gamma \ \& \ u(y, s) = M, \forall (y, s) \in \Gamma \text{ con } t \leq s \leq t_0\},$$

es decir, \bar{t} es el mínimo tiempo t donde un punto $(x, t) \in \Gamma$ cumple $u(x, t) = M$. Afirmamos que $\bar{t} = t_1$. En caso contrario, $t_1 < \bar{t}$. Aplicando el argumento anterior existiría $\varepsilon > 0$ tal que $u(x, t) = M$ para todo $(x, t) \in \Gamma$ cumpliendo $\bar{t} - \varepsilon \leq t \leq \bar{t}$. Esto va contra la definición de \bar{t} . Por lo tanto $\bar{t} = t_1$. \square

Bibliografía

- [1] L. C. EVANS, *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [2] V.MIJAILOV, *Ecuaciones de la física matemática*. Mir, Moscú, 1978.
- [3] M. PROTER, H.F. WEIBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, New York, 1984.
- [4] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw–Hill, New York, 1977.
- [5] H.F. WEIBERGER, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Reverté, Barcelona, 1970.