Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Laura Xiang Arranz Pérez

Grupoides recubridores.

Covering groupoids.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2021

Dirigido por
Josué Remedios Gómez

Josué Remedios Gómez
Departamento de Matemáticas, Estadística e I.O.
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

La noción de espacio recubridor es esencial en el estudio de la Topología Algebraica. Dado un espacio recubridor se puede obtener un modelo algebraico análogo basado en el concepto de grupoide. Así, para el grupoide fundamental del espacio base se obtendrá un grupoide recubridor que represente el espacio recubridor original. Esta correspondencia entre recubridores de espacios y recubridores de grupoides tiene carácter funtorial y establece una equivalencia de categorías. De esta correlación se pueden derivar todos los resultados clásicos de la teoría de espacios recubridores. Como aplicación en un contexto puramente algebraico, la relación entre grafos y grupoides recubridores permite probar el teorema de Nielsen-Schreier.

Palabras clave: *Espacios recubridores – Categorías – Grupoides – Grupoide fundamental – Grupoides recubridores – Teorema de Nielsen - Schreier.*

Abstract

The notion of covering space is essential in the study of algebraic topology. Given a covering space, one can obtain an analog algebraic model based on the concept of groupoid. Thus, for the fundamental groupoid of the base space, a covering groupoid representing the original covering space is obtained. This correspondence between coverings space and covering groupoid has funtorial character and establishes an equivalence of categories. From this correlation can be derived all the classical results of the theory of covering spaces. As an application in a purely algebraic context, the relationship between graphs and covering groupoids allows the Nielsen-Schreier theorem to be proved.

Keywords: *Covering spaces – Categories – Groupoids – Fundamental groupoid – Covering groupoid – Nielsen - Schreier theorem.*

Contenido

Introducción

La topología algebraica permite asignar a cada espacio topológico invariantes de naturaleza algebraica (grupos, módulos, álgebras) atribuyendo así nuevas propiedades diferenciadoras a dichos espacios. Sus resultados algebraicos subyacentes pueden desarrollarse en un contexto abstracto, puramente algebraico, con aplicaciones a la teoría de grupos y a la teoría de números. Su potencia radica principalmente en que sus conceptos son esencialmente globales, es decir, que dependen de la totalidad del espacio que los determina, al contrario de lo que sucede con la mayoría de los conceptos del cálculo diferencial, que son de naturaleza local.

Las nociones de categoría y funtor son algebraicas. Un tipo particular de categoría son los groupoides, de los cuales a su vez los grupos son casos especiales. Por otro lado los funtores son una buena herramienta para hacer analogías a través de áreas de las matemáticas, como entre topología y álgebra. Tales analogías no son entre las estructuras, los objetos, en sí mismos, sino entre las relaciones entre los objetos de cada tipo. Es decir, hacemos analogías entre estructuras de relaciones.

Así, dado un espacio topológico X, se obtiene la categoría PX de caminos en X, a su vez se puede definir otra categoría πX que se conocerá como grupoide fundamental de X. Dado un espacio recubridor de X, para el grupoide fundamental del espacio base se obtendrá un grupoide recubridor que represente el espacio recubridor original. Esta correspondencia entre espacios recubridores y grupoides recubridores tiene carácter funtorial y establece una equivalencia de categorías.

El álgebra de los grupoides ha sido desarrollada por P. J. Higgins en 1968, [7]. Paralelamente en 1965, Ronald Brown descubría la utilidad de este álgebra para calcular el grupo fundamental. Otras áreas donde se han usado los grupoides más allá del ámbito topológico son la geometría algebraica y el análisis, [16]. Más recientemente se ha encontrado una aplicación de los grupoides a la mecánica de medios continuos, [5].

El trabajo presente tiene como objetivo exhibir la correspondencia entre recubridores de espacios y recubridores de grupoides, mostrar algunas aplicaciones, así como exponer la demostración del teorema de Nielsen-Schreier basada en grupoides recubridores y grafos.

La memoria se estructura de la siguiente manera. Un primer capítulo en el que veremos una extensión de la definición usual de camino y homotopía. A continuación se introduce la teoría de categorías dando conceptos básicos pero cruciales para el desarollo del trabajo. Prestaremos especial atención a los grupoides, un caso particular dentro de las categorías, y estudiaremos sus propiedades caraterísticas. Asimismo construiremos el grupoide fundamental de un espacio topológico. Profundizaremos más en estos objetos algebraicos, se presentan entonces los grupoides universales y los grupoides libres. Además se define la homotopía entre funtores, una herramienta esencial a lo largo del siguiente capítulo. En el segundo y último capítulo se introduce la noción de espacio recubridor de un espacio topológico así como la de grupoide recubridor. Se define lo que llamaremos grupoide recubridor universal y se prueba la existencia de estos grupoides bajo ciertas condiciones. Para finalizar se demuestra el resultado principal, la equivalencia de categorías entre los espacios recubridores de X y los grupoides recubridores de πX (su grupoide fundamental). Como consecuencia de este teorema principal, se obtienen los resultados clásicos sobre espacios recubridores. Cerraremos el capítulo con una aplicación a teoremas de subgrupos en teoría de grupos.

Como un ejemplo motivador de esta memoria pongamos por caso el grupo fundamental $\pi(S^1, 1)$ de la circunferencia S^1. Sabemos que este es un grupo cíclico infinito, es decir, es isomorfo al grupo aditivo de enteros. Los dos diagramas pushout siguientes muestran una analogía entre topología y álgebra:

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ \mathbf{I} \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

espacios grupoides

El diagrama de la izquierda muestra la circunferencia obtenida a partir del intervalo unidad $[0, 1]$ identificando, en la categoría de espacios, los dos puntos finales 0, 1. El diagrama de la derecha muestra el grupo infinito de enteros obtenido a partir del grupoide finito $\mathbf{I}$, de nuevo, mediante la identificación de 0, 1, pero esta vez en la categoría de groupoides. Así, tenemos una verificación de que los groupoides pueden dar un modelado útil de la topología.

Cabe mencionar que debido a que en la literatura muchos términos se encuentran en lengua anglosajona, estos se hallarán entre paréntesis la primera vez que veamos su traducción para evitar ambigüedad.

1

Categorías y grupoides

Este primer capítulo generalizará la idea de camino y homotopía. Asimismo se hace una pequeña introducción a la teoría de categorías. Se verá que a partir de un espacio topológico X, se obtiene la categoría PX de caminos en X, a su vez se puede definir otra categoría πX que se conocerá como grupoide fundamental de X. En las secciones 1.3 y 1.4 veremos su construcción y algunas de sus propiedades. A continuación, profundizaremos más en los objetos algebraicos que dan nombre a este trabajo. Gracias a los funtores entre grupoides podemos definir la categoría de grupoides, **Grpd**. Más aún, se presentarán los grupoides y morfismos universales, asi como los grupoides libres. En esta misma línea veremos la homotopía entre funtores, principal herramienta para probar la correspondencia entre los espacios recubridores y los grupoides recubridores, como se verá en el proximo capítulo.

Se asume que el lector está familiarizado con conceptos básicos del álgebra (grupos), y con la topología general. También se presuponen ciertos conocimientos básicos de topología algebraica (homotopía y grupo fundamental). Es por ello que se omiten las demostraciones de algunos resultados puesto que pueden encontrarse en cualquier referencia estándar sobre introducción a la topología algebraica y sobre teoría de categorías ([2], [6], [11]).

1.1. Caminos y homotopías.

En el estudio de los espacios conexos por caminos, se suele definir un camino como una aplicación continua desde el intervalo unidad, $\mathbb{I}$, hasta un espacio topológico. En esta sección se va a generalizar la definición para intervalos $[0, r]$ arbitrarios. Esto obliga a una nueva definición de la "suma" de caminos, pero permitirá, por otra parte, simplificar ciertas construcciones.

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico. Un camino en X de longitud r es una aplicación continua $a : [0, r] \longrightarrow X$. Denotamos la longitud de a como $|a|$, $|a| = r$. Si a es un camino en X con $a(0) = x$ y $a(r) = y$, se dirá que a es un camino con origen x y final y. Un punto x en X determina una aplicación continua constante única de longitud r con valor x. Si $r = 0$, dicho camino se denomina camino cero en x, y se denota 0_x.*

Definición 1.2. *Sea X un espacio topológico. Si a es un camino en X entonces la aplicación continua $-a : [0, r] \longrightarrow X$, definida por $-a(t) = a(r - t)$, es un camino denominado camino inverso de a.*

Definición 1.3. *Sean a, b caminos en un espacio topológico X. La suma $b+a$ de dos caminos está definida si, y solo si, el punto final de a coincide con el punto inicial de b, es decir, si $a(|a|) = b(0)$. En tal caso, $b + a$ es el camino*

$$\begin{aligned} b + a : [0, |b| + |a|] &\longrightarrow X \\ t &\mapsto \begin{cases} a(t), & 0 \leq t \leq |a| \\ b(t - |a|), & |a| \leq t \leq |a| + |b| \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente, la condición $a(|a|) = b(0)$ es esencial para que se defina $b + a$; y con esta condición, $b + a$ es continua por el lema de continuidad (véase por ejemplo proposición 3.1.6 en [6]). Cabe destacar que la suma de caminos no es conmutativa.

Homotopía de aplicaciones continuas.

Sean X, Y espacios topológicos. Una aplicación continua $F : X \times [0, q] \longrightarrow Y$ se denominará *homotopía de longitud* q. Para tal F, la aplicación inicial y la aplicación final de F son respectivamente

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x, 0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\colon X &\to Y \\ x &\mapsto F(x, q). \end{aligned}$$

Decimos que F es una homotopía de f a g; se denota $F : f \simeq g$. Si existe una homotopía $F : f \simeq g$, entonces decimos que f, g son homótopos, $f \simeq g$.

Sea A un subconjunto de X. Si además se tiene que $F(a, t) = f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$, $\forall t \in [0, r]$, entonces se dice que F es una homotopía relativa al subconjunto A. Esto es una generalización de la definición anterior. Un ejemplo de homotopía relativa es la homotopía de caminos que veremos a continuación.

Homotopía de caminos.

Consideramos dos caminos a, b de la misma longitud r con origen x y final y. Una homotopía relativa a los extremos de longitud q desde a hasta b está definida por la aplicación continua

$$F : [0, r] \times [0, q] \longrightarrow X \quad \text{tal que}$$

$$F(s, 0) = a(s),\ F(s, q) = b(s),\ s \in [0, r] \quad y \quad F(0, t) = x,\ F(r, t) = y,\ t \in [0, q].$$

Observamos que para todo t en $[0, q]$, el camino $F_t : s \mapsto F(s, t)$ es un camino en

X con origen x y final y. La familia F_t podemos verla como una familia continua de caminos entre $F_0 = a$ y $F_1 = b$. Alternativamente, podemos ver F como una deformación de a a b.

Usaremos la notación $F : a \sim b$ para decir que F es una homotopía relativa a los extremos desde a hasta b (de alguna longitud). Hay una única homotopía de longitud 0 de a hasta a. Si $F : a \sim b$ es una homotopía de longitud q, entonces $-F$, definida por $(s, t) \mapsto F(s, q - t)$, es una homotopía $b \sim a$. Si $F : a \sim b$, $G : b \sim c$ son de longitud q, q' respectivamente donde a, b, c son de longitud r, entonces la suma de F y G

$$\begin{array}{lll} G + F : [0, r] \times [0, q + q'] & \longrightarrow & X \\ (s, t) & \mapsto & \begin{cases} F(s, t) & 0 \leq t \leq q \\ G(s, t - q) & q \leq t \leq q + q' \end{cases} \end{array}$$

es continua por el lema de continuidad y es una homotopía $a \sim c$.

Dos caminos a, b de la misma longitud se llaman homótopos relativamente en los extremos denotado $a \sim b$, si hay una homotopía $F : a \sim b$. De ahora en adelante diremos tan solo caminos homótopos para indicar homotopía relativa a los extremos. Todo ello prueba el siguiente resultado.

Proposición 1.1.1 *Sean X e Y dos espacios topológicos. La relación de homotopía relativa es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y.*

Nota 1.1.1 *Sea $\mathbb{I}$ el intervalo unidad en $\mathbb{R}$. Se puede definir sin dificultad una aplicación continua y sobreyectiva $\lambda : \mathbb{I} \longrightarrow [0,\ q]$; así, si $F : X \times [0, q] \longrightarrow Y$ es una homotopía de longitud q, entonces $G = F(1 \times \lambda) : X \times \mathbb{I} \rightarrow Y$ es una homotopía de longitud 1. Además F y G tienen la misma aplicación inicial y final. Por tanto, para estudiar las homotopías de aplicaciones, basta con restringirnos a las homotopías de longitud 1. También denotaremos una homotopía de longitud 1 por $F_t : X \longrightarrow Y$ (donde $t \in \mathbb{I}$).*

Proposición 1.1.2 *Sean $f : W \longrightarrow X$, $g_0, g_1 : X \longrightarrow Y$, $h : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones continuas. Si $g_0 \simeq g_1$, entonces $hg_0f \simeq hg_1f : W \longrightarrow Z$.*

Demostración. Sea $g_t : g_0 \simeq g_1$ una homotopía. Entonces hg_tf es una homotopía $hg_0f \simeq hg_1f$. □

Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ aplicaciones continuas. Si $fg \simeq 1_Y$ entonces decimos que g es un inverso homotópico a derecha de f y que f es un inverso homotópico a izquierda de g. Si g es un inverso homotópico a izquierda y derecha de f, entonces g se denomina simplemente un inverso homotópico; además f se denomina equivalencia de homotopía y lo denotamos $f : X \simeq Y$. Si existe una equivalencia de homotopía $X \rightarrow Y$, entonces decimos que X, Y son homotópicamente equivalentes (o del mismo tipo de homotopía) y se denota $X \simeq Y$.

1.2. Teoría de categorías

En la presente sección se introduce la noción de categoría. Sirviéndonos de diversos ejemplos se entenderá con más claridad la naturaleza de tales objetos. En especial se distinguirán los grupoides, un caso particular de categoría. Finalmente se definirá categorías equivalentes y otros conceptos como pushout y pullback que serán esenciales más adelante.

Definición 1.4. *Una categoría $\mathcal{C}$ consiste en*

a) Una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$.[1]
b) Un conjunto $\mathcal{C}(x, y)$ para cada par de objetos x, y de $Ob(\mathcal{C})$; se denomina conjunto de morfismos en $\mathcal{C}$ de x a y.
c) Una composición $gf \in \mathcal{C}(x, z)$ para cada $g \in \mathcal{C}(y, z)$ y $f \in \mathcal{C}(x, y)$ dados.

$$\mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \longrightarrow \mathcal{C}(x, z)$$

Debe satisfacer:

CAT 1. *Asociatividad.*
Si $h \in \mathcal{C}(z, w)$, $g \in \mathcal{C}(y, z)$, $f \in \mathcal{C}(x, y)$ entonces

$$h(gf) = (hg)f.$$

CAT 2. *Existencia de identidades.*
Para cada $x \in Ob(\mathcal{C})$, $\exists\ 1_x \in \mathcal{C}(x, x)$ tal que si $g \in \mathcal{C}(w, x)$ y $f \in \mathcal{C}(x, y)$ entonces

$$1_x g = g \quad \text{y} \quad f 1_x = f.$$

Nota 1.2.1 *Cuando $Ob(\mathcal{C})$ es un conjunto decimos que $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña.*

Definición 1.5. *Un morfismo f se dice que es una retracción cuado f tiene una inversa por la derecha. Un morfismo f se dice que es una coretracción cuado f tiene una inversa por la izquierda.*

Supondremos siempre que los conjuntos $\mathcal{C}(x, y)$ son disjuntos. Para simplificar consideraremos $\mathcal{C}$ como la unión de estos conjuntos de morfismos y nos referiremos a $f \in \mathcal{C}(x, y)$ para algún par de objetos x, y de $\mathcal{C}$, simplemente como un elemento de $\mathcal{C}$, "$f \in \mathcal{C}$".

Si $f \in \mathcal{C}(x, y)$ entonces también se denotará $f : x \longrightarrow y$, o $x \xrightarrow{f} y$; asimismo $x \longrightarrow y$ simplemente denota un elemento de $\mathcal{C}(x, y)$. Para cada x en $Ob(\mathcal{C})$ la identidad en $\mathcal{C}(x, x)$ es única, ya que si 1_x, $1'_x$ son ambas identidades en $\mathcal{C}(x, x)$ entonces $1_x{=}1_x 1'_x{=}1'_x$.

[1] La clase es una noción más general que la de conjunto. Se introduce para evitar ciertas ambigüedades de la teoría de conjuntos. Para mas detalle ver la sección 1.1 de [2].

Definición 1.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se dice que $\mathcal{D}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$ si*

a) Cada objeto de $\mathcal{D}$ es un objeto de $\mathcal{C}$.
b) Para cada x, y en $Ob(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}(x, y) \subseteq \mathcal{C}(x, y)$.
c) La composición de morfismos en $\mathcal{D}$ es la misma que la composición en $\mathcal{C}$.

$$\forall f \in \mathcal{D}(x, y), \forall g \in \mathcal{D}(y, z) \Rightarrow g \circ_{\mathcal{C}} f = g \circ_{\mathcal{D}} f$$

d) Para cada x en $Ob(\mathcal{D})$, la identidad en $\mathcal{D}(x, x)$ es la identidad en $\mathcal{C}(x, x)$.

Si $\mathcal{D}(x, y) = \mathcal{C}(x, y)$ para cualesquiera objetos x e y de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ se denomina subcategoría llena (full) de $\mathcal{C}$.
Si Ob($\mathcal{D}$)=Ob($\mathcal{C}$), $\mathcal{D}$ se denomina subcategoría extensa (wide) de $\mathcal{C}$.

Proposición 1.2.1 *Sean $f : x \to y$, g_1, $g_2 : y \to x$ morfismos en $\mathcal{C}$ tales que*

$$g_1 f = 1_x, \ f g_2 = 1_y.$$

Entonces $g_1 = g_2$. Además, si existe otro morfismo g tal que $gf = 1_x$, entonces $g = g_1 = g_2$.

Este resultado afirma que si f tiene una inversa por la derecha y por la izquierda entonces f tiene una única inversa a ambos lados. En este caso se dice que el morfismo f es invertible o isomorfismo; el único inverso de f se escribe f^{-1}, o en caso aditivo, $-f$. Si hay un isomorfismo $x \to y$ entonces se dice que x e y son isomorfos. Es fácil probar que cualquier identidad es un isomorfismo; la inversa de un isomorfismo es isomorfismo; la composición gf de dos isomorfismos es un isomorfismo. En este último caso la inversa es $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. De aquí se sigue que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en los objetos de $\mathcal{C}$.

Definición 1.7. *Una categoría pequeña en la cual todo morfismo es un isomorfismo se denomina grupoide.*

Podemos ver un grupo como un grupoide con un solo objeto. A continuación presentamos otros ejemplos de categorías:

1. Categoría de conjuntos, **Set**.
Los objetos son todos los conjuntos (X, Y,...) y los morfismos $X \to Y$ son las aplicaciones de X a Y; la composición es la composición usual de aplicaciones, luego cumple la asociatividad, la identidad en $\mathbf{Set}(X, X)$ es la aplicación identidad entre conjuntos 1_X.

2. Categoría de espacios topológicos, **Top**.
Los objetos son todos los espacios topológicos $((X, T), (Y, T'), \dots)$ y los morfismos $X \to Y$ son aplicaciones continuas entre X e Y; la composición de aplicaciones continuas es una aplicación continua y cumple la asociatividad, la identidad en $\mathbf{Top}((X,T),(X,T))$ es 1_X.

3. Categoría de grupos, **Grp**.
Los objetos son todos los grupos $(G1, G2, \dots)$ y los morfismos $G1 \to G2$ son homomorfismos de grupos; la composición vuelve a ser homomorfismo y es asociativa, la identidad es 1_G.

4. Dado un espacio topológico X, se puede definir la categoría de caminos en X, PX. Los objetos de PX, $Ob(PX)$, son los elementos de X. Sean $x, y \in X$, el conjunto de morfismos $PX(x, y)$ es el conjunto de caminos en X de x hasta y. La composición de caminos $b \in PX(y, z)$, $a \in PX(x, y)$, se denota $b + a$. La identidad en $PX(x, x)$ es el camino constante 0_x.

Observación. La categoría PX de caminos en X no es un grupoide ya que si a es un camino en X de longitud r entonces no hay ningún camino b tal que $b + a$ sea el camino cero.

Como es habitual, una vez vista la definición de un objeto algebraico, se sigue definiendo la relación entre estos objetos. Debemos definir las aplicaciones o morfismos entre categorías; estos morfismos se conocen como *funtores*.

Definición 1.8. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un funtor $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ asigna a cada objeto x de $\mathcal{C}$ un objeto Γx de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f : x \longrightarrow y$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $\Gamma f : \Gamma x \longrightarrow \Gamma y$ en $\mathcal{D}$. Debe satisfacer los siguientes axiomas.*

FUN 1. *Si $1 : x \to x$ es una identidad en $\mathcal{C}$ entonces $\Gamma 1 : \Gamma x \to \Gamma x$ es la identidad en $\mathcal{D}$; esto es, $\Gamma 1_x = 1_{\Gamma x}$.*

FUN 2. *Si $f : x \to y$, $g : y \to z$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $\Gamma(gf) = \Gamma g \Gamma f$.*

Se puede definir entonces la categoría **Cat** como aquella que tiene por objetos todas las categorías pequeñas, y por morfismos, a los funtores entre ellas. Esto es así ya que tenemos un funtor identidad $1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y si $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\Delta : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ son funtores, entonces podemos formar la composición $\Delta\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Además se tiene que las categorías pequeñas con todos sus morfismos invertibles (grupoides), forman los objetos de una categoría que denotaremos **Grpd** cuyos morfismos son los funtores entre grupoides.

Antes de dar ejemplos de funtores, enunciamos un resultado elemental.

Proposición 1.2.2 *Sea $\Gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor. Entonces Γf es una retracción, una co-retracción o isomorfismo si f es respectivamente una retracción, co-retracción o isomorfismo.*

EJEMPLOS

1. Si X es un espacio, entonces PX es una categoría pequeña. Supongamos que $f : X \to Y$ es un aplicación continua entre espacios. Si a es un camino en X de x a y entonces la composición fa es un camino en Y de $f(x)$ a $f(y)$. Si a es un camino cero, entonces también lo es fa. Si $b + a$ está definido en X entonces

$fb + fa$ se define en Y y $fb + fa = f(b + a)$. Por tanto, f determina un funtor entre las categorías PX, PY; $Pf : PX \to PY$.

2. Continuando con el ejemplo anterior, tenemos que P : **Top** $\to$ **Cat** es un funtor: Sea un espacio topológico $X \in Ob(\mathbf{Top})$ se tiene que $PX \in Ob(\mathbf{Cat})$. Sea $f : X \to Y$ un elemento de **Top** entonces $Pf : PX \to PY$ es un elemento de **Cat**. De 1.2.2 deducimos que si X es homeomorfo a Y, entonces PX es isomorfo a PY. Por tanto, PX es un invariante topológico de X.

Introduciremos ahora varios conceptos que serán necesarios conocer en las posteriores secciones.

Definición 1.9. *Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Una transformación natural $\alpha : F \to G$ es una colección de morfismos en $\mathcal{D}$:*

$$\alpha_x : Fx \to Gx, \text{ para todo objeto } x \text{ de } \mathcal{C}$$

tal que para todo morfismo en $\mathcal{C}$, $f : x \to y$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_x"'] & Fy \arrow[d, "\alpha_y"] \\ Gx \arrow[r, "Gf"] & Gy \end{tikzcd}$$

Además, si para cada objeto x de $\mathcal{C}$ existe un inverso α_x^{-1} de α_x en $\mathcal{D}$ decimos que α es una equivalencia natural o un isomorfismo natural entre F y G.

Definición 1.10. *Decimos que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes cuando existen funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ y existen isomorfismos naturales o equivalencias naturales*

$$1_{\mathcal{C}} \to GF \quad y \quad 1_{\mathcal{D}} \to FG.$$

Definición 1.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un coproducto de dos objetos C_1, C_2 de $\mathcal{C}$, es un diagrama*

$$C_1 \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} C_2 \tag{1.1}$$

de morfismos de $\mathcal{C}$ con la siguiente propiedad universal: para cualquier diagrama

$$C_1 \xrightarrow{v_1} C' \xleftarrow{v_2} C_2$$

de morfismos de $\mathcal{C}$, existe un morfismo único $v : C \to C'$ tal que $vi_1 = v_1, vi_2 = v_2$.

Esta propiedad universal garantiza que el coproducto de dos objetos es único salvo isomorfismo. Si 1.1 es un coproducto en $\mathcal{C}$, es habitual escribir

$$C = C_1 \sqcup C_2$$

y por un abuso de lenguaje, referirse a C (en lugar de i_1, i_2) como el coproducto de C_1 y C_2.

En **Set** y **Top** el coproducto de dos objetos es su unión disjunta. El coproducto en **Grpd** se define también de manera sencilla (véase [3], pp. 223).

Definición 1.12. *Un diagrama*

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & C_1 \arrow[d, "u_1"] \\ C_2 \arrow[r, "u_2"'] & C \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

de morfismos de una categoría $\mathcal{C}$ se dice que es un pushout de i_1, i_2 si

a) El diagrama es conmutativo, es decir, $u_1 i_1 = u_2 i_2$.
b) Para cualquier otro diagrama conmutativo de morfismos de C

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & C_1 \arrow[d, "v_1"] \\ C_2 \arrow[r, "v_2"'] & C' \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

existe un único morfismo $v : C \to C'$ tal que $vu_1 = v_1$, $vu_2 = v_2$.

La propiedad universal muestra que si 1.2 es una pushout, entonces 1.3 es una pushout si, y solo si, existe un isomorfismo $v : C \to C'$ tal que $vu_\alpha = v_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Así, un pushout se determina salvo isomorfismo por i_1, i_2. Si 1.2 es un pushout, es habitual escribir

$$C = C_1 \; {}_{i_1}\!\sqcup_{i_2} C_2.$$

Mediante un abuso de lenguaje, nos referiremos a C como el pushout de i_1, i_2.

Es importante señalar que no hemos afirmado que existan pushouts para i_1, i_2. La existencia de pushouts arbitrarios se considera como una buena propiedad de la categoría $\mathcal{C}$. En las categorías **Set**, **Top** y **Grpd** siempre existe el pushout de dos morfismos. (Ver por ejemplo [10], pp. 66, para **Set** y **Top**. Ver [7], Theorem 3, pp. 70 para **Grpd**.)

Proposición 1.2.3 *En cualquier categoría $\mathcal{C}$, la composición de dos diagramas pushouts es un pushout.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[r, "l"] \arrow[d, "k"'] & G \arrow[d, "m"] \\ D \arrow[r, "g"'] & F \arrow[r, "n"'] & H \end{tikzcd}$$

Definición 1.13. *Un diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

de morfismos de una categoría $\mathcal{C}$ se dice que es un pullback de (f, g) si

a) El diagrama es conmutativo.

b) Para cualquier otro diagrama conmutativo de morfismos de C

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "g''"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $q : Q \to P$ *tal que* $f'' = f'q$ *y* $g'' = g'q$.

Tanto en **Top** como en **Grpd**, se puede construir siempre el pullback de f y g tomando P como $A\ {}_f{\times}_p B = \{(a, b) \in A \times B : fa = gb\}$ y donde $f'(a, b) = b$ y $g'(a, b) = a$. Es habitual denotarlo $A \times_C B$.

1.3. Construcción del grupoide fundamental

Dado un espacio topológico X, en la sección anterior hemos construido un invariante topológico, la categoría PX. Sin embargo necesitamos una estructura algebraica más rica. Para ello introduciremos el *grupoide fundamental* del espacio X. Para su construcción usaremos la relación de homotopías de caminos.

El grupoide fundamental πX será un grupoide tal que el conjunto $\pi X(x, y)$ es el conjunto de ciertas clases de equivalencia de $PX(x, y)$. Sean $a, b \in PX(x, y)$ de la misma longitud r. Sea $F : [0, r] \times [0, q] \longrightarrow X$ una homotopía $a \sim b$. Entonces existe una homotopía $F' : a \sim b$ de longitud 1. (Ver Nota 1.1.1). Asumiremos a partir de ahora que las homotopías son de longitud 1.

Pensaremos en una homotopía F (de longitud 1) como una función $t \mapsto F_t$ donde F_t es un camino. Luego, abreviamos $t \mapsto F_t$ a F_t. Esto nos permite decir, por ejemplo, que si $F_t : a \sim b$ entonces $F_{1-t} : b \sim a$.

Para cualquier número real $r \geq 0$ y $x \in X$, r_x es el camino constante en x de longitud r. Cuando no haya confusión, denotaremos r a r_x. En particular, para cualquier camino a y $r \geq 0$, los caminos $a + r$, $r + a$ están bien definidos.

Proposición 1.3.1 *Sea* $a, b \in PX(x, y)$, $c, d \in PX(y, z)$ *donde* $|a| = |b|$, $|c| = |d|$,

a) Si $a \sim b$ *entonces -*$a \sim$ *-*b.
b) Si $a \sim b$, $c \sim d$ *entonces* $c + a \sim d + b$.
c) Para cualquier $r \geq 0$, $a + r \sim r + a$.

Demostración. a) Sea F una homotopía $a \sim b$. Entonces

$$(s, t) \mapsto F(|a| - s, t)$$

es una homotopía $-a \sim -b$.

b) Sea $F : a \sim b$, $G : c \sim d$. Entonces

$$\begin{aligned} H : [0, |a| + |c|] \times \mathbb{I} &\to \mathrm{X} \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} F(s,t) & \text{si} \quad s \leq |a| \\ G(s - |a|, t) & \text{si} \quad |a| \leq s \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía $c + a \sim d + b$.

c) Definimos

$$\begin{aligned} H : [0, r + |a|] \times \mathbb{I} &\longrightarrow X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} x & 0 \leq s \leq tr \\ a(s - tr) & tr \leq s \leq tr + |a| \\ y & tr + |a| \leq s \leq r + |a| \end{cases} \end{aligned}$$

como la homotopía $a + r \sim r + a$. □

Proposición 1.3.2 *Si $a \in PX(x,y)$ y $|a| = r$ entonces*

$$-a + a \sim 2r_x, \quad a - a \sim 2r_y.$$

Demostración. Definiremos la homotopía $2r_x \sim -a + a$ como

$$\begin{aligned} F : [0, 2r] \times \mathbb{I} &\longrightarrow X \\ (s,t) &\mapsto \begin{cases} a(s) & 0 \leq s \leq rt \\ a(2rt - s) & rt \leq s \leq 2rt \\ x & 2rt \leq s \leq 2r \end{cases} \end{aligned}$$

Análogamente, cambiando a por $-a$ se obtiene $a - a \sim 2r_y$. □

Definiremos ahora una relación de equivalencia entre caminos de distinta longitud.

Definición 1.14. *Sean $a, b \in PX(x,y)$. Decimos que a y b son equivalentes si existen número reales $r, s \geq 0$ satisfaciendo $|a| + r = |b| + s$ tal que $r + a$, $s + b$ son homótopos.*

Esta relación es obviamente reflexiva y simétrica, pues la homotopía es reflexiva y simétrica. Es también transitiva: dadas unas homotopías $r + a \sim s + b$, $s' + b \sim t + c$ donde a, b, c son caminos y $r, s, s', t \geq 0$ entonces existen unas homotopías

$$s' + r + a \sim s' + s + b = s + s' + b \sim s + t + c.$$

Los siguientes ejemplos nos proporcionarán resultados útiles que serán necesarios más adelante.

1. Sea $a \in PX(x,y)$ de longitud $r \geq 0$. Sea $r' > 0$, a es equivalente a un camino de logitud r'. Sea $b : s \mapsto a(sr/r')$ el camino de longitud r'. Una homotopía $r' + a \sim r + b$ es

$$F(s,t) = \begin{cases} a(rs/\lambda_t) & 0 \leq s \leq \lambda_t \\ y & \lambda_t \leq s \leq r + r' \end{cases} \qquad \text{donde } \lambda_t = r(1-t) + r't.$$

De este ejemplo no se concluye que todo camino sea equivalente a un camino de longitud 0, ya que, si $r' = 0$, entonces en $F(s,t)$ tendríamos que es continua si, y solo si, a es constante. Sin embargo, nos muestra que cualquier camino constante r es equivalente a un camino de longitud 0 pues $r = r + 0$.

2. Los caminos equivalentes de la misma longitud son homótopos. Esto se puede demostrar construyendo para cualquier $r, s \geq 0$ un homeomorfismo entre los dos rectángulos, $G : [0,r] \times \mathbb{I} \to [0, r+s] \times \mathbb{I}$, que es la identidad en $\{0\} \times \mathbb{I} \cup [0,r] \times \dot{\mathbb{I}}$[2] y que aplica $\{r\} \times \mathbb{I}$ homeomórficamente en $[r, r+s] \times \dot{\mathbb{I}}$ $\cup \{r+s\} \times \mathbb{I}$. Entonces, si $F : [0, r+s] \times \mathbb{I} \to X$ es una homotopía $s + a \sim s + b$ donde a, b tienen longitud r, entonces la composición FG es una homotopía $a \sim b$.

Las clases de equivalencia de caminos desde x hasta y se denominan *clases de caminos desde x hasta y*, la clase de uno de estos caminos a se denotará como $cls\, a$, y el conjunto de estas clases de caminos se denota $\pi X(x,y)$. La clase del camino cero en x se escribe 0, o para evitar ambigüedad, 0_x. Por el ejemplo 1, la clase del camino 0_x incluye a todos los caminos constantes en x.

Proposición 1.3.3 *El inverso de una clase y la suma de clases de caminos están definidas por*

$$\begin{aligned} -cls\, a &= cls(-a), \quad a \in PX(x,y), \quad b \in PX(y,z) \\ cls\, b + cls\, a &= cls(b + a) \end{aligned}$$

Proposición 1.3.4 *La adición de clases de caminos es asociativa. Además, si $\alpha \in \pi X(x,y)$ entonces*

$$\alpha + 0_x = 0_y + \alpha = \alpha,$$

$$-\alpha + \alpha = 0_x, \quad \alpha - \alpha = 0_y$$

Estos resultados nos permiten definir el *grupoide fundamental* de un espacio X.

Definición 1.15. *Un grupoide donde los objetos son los puntos de X y cuyos morfismos $x \to y$ son las clases de caminos desde x hasta y, se denomina grupoide fundamental de X; se denota πX.*

Para cualquier espacio X, hay un funtor $p : PX \to \pi X$ que es la identidad en los objetos y envía cada camino de PX a su clase de equivalencia.

$$\begin{aligned} p : PX &\longrightarrow \pi X \\ x &\mapsto x \\ a : x \to \mathrm{y} &\mapsto cls\, a : x \to y \end{aligned}$$

[2] $\dot{\mathbb{I}} = \{0, 1\}$.

1.4. Propiedades de los grupoides

En esta sección probamos algunas propiedades básicas de los grupoides y las aplicamos al grupoide fundamental de un espacio. Usaremos notación aditiva tanto en los grupoides como en el caso particular de grupos. Estos últimos no tienen que ser necesariamente abelianos. Por otro lado hemos visto la relación entre categorías a través de los funtores. En el caso particular de los grupoides, estos funtores se denominarán *morfismos de grupoides.* Obtenemos así la categoría **Grpd** cuyos objetos son todos los grupoides y sus elementos los morfismos de grupoides.

Definición 1.16. *Sea G un grupoide. Un subgrupoide H de G, es una subcategoría de G que a la vez es un grupoide.*

Podemos construir subgrupoides llenos H de G tomando H como la subcategoría llena de G con cualquier subconjunto de $Ob(G)$. Además el subgrupoide lleno de G con un objeto de x de G se denota $G(x)$. De este modo se puede definir un grupo como el grupoide con un solo objeto. En particular, $G(x)$ lo denominaremos *grupo sobre el vértice x* (vertex group).

Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces $\pi X(x)$ es el conocido *grupo fundamental* de X en x. Este grupo lo podemos ver escrito como $\pi(X, x)$. En general, si A es un conjunto cualquiera entonces el subgrupoide lleno de πX en el conjunto $A \cap X$ se escribe πXA. Los elementos de πXA son todas las clases de caminos que conectan los puntos de $A \cap X$ en X.

Un grupoide G se dice *conexo* si $G(x, y)$ es no vacío para todo objetos x, y de G. En particular, πX es conexo si, y solo si, X es conexo por caminos.

Sea x_0 un objeto de G, y sea Cx_0 el subgrupoide lleno de G con todos los objetos y de G tal que $G(x_0, y)$ es no vacío. Si x, y son objetos de Cx_0 entonces $G(x, y)$ es no vacío ya que contiene elementos $b + a$ para b en $G(x_0, y)$ y a en $G(x, x_0)$. Se sigue que Cx_0 es conexo. Claramente, Cx_0 es el subgrupoide conexo maximal de G que contiene a x_0 como objeto. Llamamos a Cx_0 la componente de G conteniendo a x_0. El conjunto de componentes de G se denota $\pi_0(G)$.

Proposición 1.4.1 *Sean x, y, x', y' objetos del grupoide conexo G. Existe una biyección*

$$\varphi : G(x, y) \longrightarrow G(x', y').$$

Si $x = y$, $x' = y'$ entonces φ será un isomorfismo de grupos.

Este resultado nos dice que los grupos sobre un vértice de un grupoide conexo son todos isomorfos. El isomorfismo $G(x) \to G(x')$ se denota $a_{\#}$. Si además $x = x'$ entonces $a_{\#}$ es un automorfismo interno de $G(x)$.

Proposición 1.4.2 *Sea G un grupo. Entonces todo automorfismo interno es trivial si, y solo si, G es abeliano.*

Proposición 1.4.3 *Sean x, x' pertenecientes a la misma componente de G. Entonces $a_\# = b_\# : G(x) \to G(x')$ para todo $a, b : x \to x'$ si, y solo si, $G(x)$ es abeliano.*

Como consecuencia, las componentes de πX son los grupoides πX_0 para X_0 una componente conexa por caminos de X. Si α es una clase de caminos en πX desde x a x' entonces α determina un isomorfismo $\alpha_\# : \pi(X, x) \longrightarrow \pi(X, x')$ de grupos fundamentales y $\alpha_\#$ es independiente de la elección de α si y solo si, $\pi(X, x)$ es abeliano.

Veamos ahora algunos ejemplos de grupoides:

1. Sea X cualquier conjunto. El grupoide discreto en X también denotado X; tiene X como su conjunto de objetos, una identidad para cada objeto de X y ningún otro morfismo.

2. Sea X un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado. Sea a, b dos caminos en X desde x hasta y de la misma longitud r. Entonces a y b son homótopos ya que $F : [0, r] \times \mathbb{I} \to X, (s, t) \mapsto (1 - t)a(s) + b(s)$ es una homotopía $a \sim b$. Se sigue que, cualesquiera dos caminos desde x hasta y son equivalentes; por tanto $\pi X(x, y)$ tiene exactamente un elemento para todo x, y en X. Un grupoide con esta propiedad se dice que es *1-conexo* o grupoide en árbol (tree groupoid); si πX es un grupoide en árbol decimos que X es 1-conexo, lo que implica que X es conexo por caminos. Por ejemplo el intervalo unidad $\mathbb{I}$ es 1-conexo ya que es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$.

Si cada componente conexa por caminos de X es 1-conexa entonces por cada x, y en X, $\pi X(x, y)$ contiene como mucho un elemento; decimos que X, y también πX, es *simplemente conexo*. Así, que X sea simplemente conexo significa que dos caminos en X con los mismos extremos son equivalentes. Un grupoide G se dice simplemente conexo si $G(x, y)$ no tiene más de un elemento para todo x, y en G.

3. Definimos el grupoide $\mathbf{I}$ como el grupoide en árbol con dos objetos 0, 1 y el único elemento de $\mathbf{I}(0, 1)$ lo denotamos $\imath$. Si un espacio topológico X es 1-conexo y $A \subseteq X$, entonces $\pi X A$ es un grupoide en árbol. En particular

$$\pi\mathbb{I}\{0, 1\} = \mathbf{I}.$$

4. Un grupoide G es totalmente disconexo si

$$G(x, y) = \emptyset, \quad \forall\, x \neq y.$$

Tal grupoide está determinado enteramente por la familia de grupos $\{G(x)\}_{x \in Ob(G)}$. Si X es un espacio y A consta de exactamente un punto en cada componente conexa por caminos de X, entonces $\pi X A$ es totalmente disconexo.

Proposición 1.4.4 *El grupoide fundamental es un funtor*

$$\pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Grpd}.$$

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Grpd} \\ X & \mapsto & \pi X \\ f : X \to Y & \mapsto & \pi\text{f}\colon \pi X \to \pi Y \end{array}$$

Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios y $Pf : PX \to PY$ el correspondiente funtor entre las categoría de caminos. Suponemos primero que a, b son dos caminos homótopos en X de longitud r desde x hasta x'. Entonces existe una aplicación $F : [0, r] \times \mathbb{I} \to X$ tal que $F : a \sim b$. Por tanto se tiene $fF : fa \sim fb$. Si a, b son caminos equivalentes en X desde x hasta x', entonces existen unos caminos constantes r, s tal que $r + a, s + b$ son homótopos, luego

$$r + fa = f(r + a) \sim f(s + b) = s + fb.$$

fa, fb son equivalentes. Tenemos entonces bien definida la aplicación

$$\pi f : \pi X \to \pi Y, \quad cls\, a \mapsto cls\, fa$$

Veamos que πf es un morfismo de grupoides.

FUN 1. Sea $1_x : X \to X$ identidad en **Top**. Sea $x \in X$ se tiene $\pi 1_x(x) = x$ y dado $cls\, a \in \pi X$, entonces $\pi 1_x(cls\, a) = cls(\pi 1_x(a)) = cls(1_x(a)) = cls\, a$.

FUN 2. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Tenemos que ver $\pi(gf) = \pi g \pi f$.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \mapsto \pi X \xrightarrow{\pi f} \pi Y \xrightarrow{\pi g} \pi Z$$

Sea $x \in Ob(\pi X)$. Entonces $\pi g(\pi f(x)) = \pi g(f(x)) = g(f(x)) = gf(x) = \pi(gf)(x)$. Sea $cls\, a \in \pi X(x, x')$. Entonces $\pi g(\pi f(cls\, a)) = \pi g(cls\, fa) = cls\, g(fa) = cls\,(gf)a = \pi(gf)(cls\, a)$. Luego $\pi(gf) = \pi g \pi f$. Concluimos π es un funtor. □

Proposición 1.4.5 *Si X es homeomorfo a Y entonces πX es isomorfo a πY.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de 1.2.2 y 1.4.4. □

Advertimos ahora que el grupo fundamental $\pi(X, x)$ solo está definido para espacios X en un punto x de X. Luego no es un funtor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Grp}$. Para obtener un funtor, se introduce la categoría de espacios punteados (o espacios con punto base), $\mathbf{Top}_\bullet$. Un espacio punteado es un par (X, x) donde $x \in X$ y X es un espacio topológico. Una aplicación punteada $(X, x) \to (Y, y)$ está determinada por los dos espacios punteados y un aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$. A cualquier espacio punteado (X, x) le podemos asignar el grupo fundamental $\pi(X, x)$ y a cualquier aplicación punteada $f : (X, x) \to (Y, y)$ le podemos asignar $f_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, y)$, la restricción de $\pi f : \pi X \to \pi Y$ a los grupos correspondientes. Esto define el *funtor grupo fundamental* $\pi_1 : \mathbf{Top}_\bullet \to \mathbf{Grp}$.

Dado que es más fácil especificar un grupo que un grupoide, el grupo fundamental es el invariante topológico más utilizado en espacios punteados.

Proposición 1.4.6 *Sea $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Entonces f es un isomorfismo si, y solo si, las aplicaciones*

$$Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D}), \quad \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{D}(fx, fy), \quad x, y \in Ob(\mathcal{C})$$

inducidas por f son todas biyecciones.

Dado un grupoide G y dado un elemento a de G, entonces se define el morfismo $\hat{a} : \mathbf{I} \to G$ como el único morfismo que envía $\imath$ a a. Este morfismo aparecerá implicitamente en algunas demostraciones de este capítulo y el siguiente.

Definición 1.17. *Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos categorías. Se define el producto de categorías como $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Tiene como objetos el par (x_1, x_2) para x_1 en $Ob(\mathcal{C}_1)$, x_2 en $Ob(\mathcal{C}_2)$; sus elementos son el par (a_1, a_2) para a_1 en $\mathcal{C}_1$, a_2 en $\mathcal{C}_2$. Así el conjunto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ simplemente es el producto cartesiano de dos conjuntos.*
Si $a_1 : x_1 \to y_1$ en $\mathcal{C}_1$, Si $a_2 : x_2 \to y_2$ en $\mathcal{C}_2$ entonces se tiene

$$(a_1, a_2) : (x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2)$$

La composición está definida como cabe esperar

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1, b_2 a_2)$$

siempre que $b_1 a_1, b_2 a_2$ estén definidos.

Es muy fácil demostrar que $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ es una categoría. Observamos también que si a_1, a_2 tienen inversas a_1^{-1}, a_2^{-1} entonces (a_1, a_2) tiene inversa (a_1^{-1}, a_2^{-1}). De ello se deduce que si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ son ambos grupoides, entonces también lo es $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

1.5. Homotopía entre funtores

Describiremos una noción de homotopía entre funtores equivalente a la homotopía entre aplicaciones continuas, que generaliza la homotopía de caminos empleada para definir el grupoide fundamental de un espacio. Será conveniente hacer, en primer lugar, unas consideraciones sobre funtores y el producto de categorías.

Sea $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un funtor, donde $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ son categorías. Si 1_x es la identidad en x en $\mathcal{C}$, entonces para cada objeto x de $\mathcal{C}$ y para cada objeto y de $\mathcal{D}$, F define, respectivamente, dos funtores $F(1_x, -) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ y $F(-, 1_y) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.

Si $a : x \to x'$, $b : y \to y'$ son morfismos en $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ respectivamente, entonces tenemos un diagrama conmutativo, ya que $F(1_{x'}a, a_y) = F(a, b) = F(a1_x, 1_{y'}b)$. Por simplificar notación, escribimos x en lugar de 1_x e y en lugar de 1_y.

$$\begin{tikzcd} F(x,y) \arrow[r, "F(a,y)"] \arrow[d, "F(x,b)"'] \arrow[dr, "F(a,b)"] & F(x',y) \arrow[d, "F(x,b)"] \\ F(x,y') \arrow[r, "F(a,y')"'] & F(x',y') \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

El siguiente resultado muestra que estos dos funtores determinan F. Su demostración es una comprobación directa de los axiomas FUN 1 y FUN 2, y se ha omitido.

Proposición 1.5.1 *Supongamos que para cada x en $Ob(\mathcal{C})$ e y en $Ob(\mathcal{D})$ se nos dan los funtores $F(x,-) : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, $F(-,y) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ tal que $F(x,y)$ es un objeto único de $\mathcal{E}$. Supongamos que para cada $a : x \to x'$ en $\mathcal{C}$ y $b : y \to y'$ en $\mathcal{D}$ el cuadrado exterior de 1.4 conmuta. Entonces, la composición diagonal $F(a,b)$ hace que F sea un funtor $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Todo funtor $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ viene determinado de esta manera.*

Para modelar la noción de homotopía en categorías necesitamos un análogo al intervalo unidad. Este análogo es el grupoide en árbol $\mathbf{I}$.

Definición 1.18. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{E}$ categorías. Una homotopía (o equivalencia natural) de funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{E}$ es un funtor $F : \mathcal{C} \times \mathbf{I} \to \mathcal{E}$. El funtor inicial de F es entonces $f = F(-,0)$ y el funtor final de F es $g = F(-,1)$; decimos que F es una homotopía desde f hasta g y lo denotamos $F : f \simeq g$. Si existe tal homotopía de f a g, entonces decimos que f, g son homótopos y escribimos $f \simeq g$.*

Según 1.5.1, para especificar una homotopía F es suficiente dar los funtores inicial y final, f y g, de F, y también para cada objeto x de $\mathcal{C}$, un funtor $F(x,-) : \mathbf{I} \to \mathcal{E}$ de tal forma que el exterior de 1.4 conmute. Sin embargo, los funtores $F(x,-) : \mathbf{I} \to \mathcal{E}$ están completamente especificados por elementos invertibles θ_x de $\mathcal{E}$ donde $\theta_x = F(x,\imath)$. En estos términos, 1.4 se convierte (con $b = \imath$) en

$$\begin{tikzcd} fx \arrow[r, "fa"] \arrow[d, "\theta_x"'] & fy \arrow[d, "\theta_y"] \\ gx \arrow[r, "ga"'] & gy \end{tikzcd}$$

cuya conmutatividad afirma

$$(ga)(\theta_x) = (\theta_y)(fa). \tag{1.5}$$

Ya que θ_x es invertible, tenemos que g está determinada por f y θ. En consecuencia, dado cualquier funtor $f : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ y para cualquier objeto x de $\mathcal{C}$, un elemento invertible θ_x de $\mathcal{E}$ con punto inicial fx, entonces existe una homotopía $f \simeq g$ donde g está definido por 1.5. Por tanto podemos decir también que θ es una homotopía desde f hasta g; $\theta : f \simeq g$. En el lenguaje de categorías θ es una equivalencia natural en el sentido de la definición 1.9.

1.6. Grupoides universales y morfismos universales

Se presentan lo que se conoce como grupoides universales y morfismos universales. Las propiedades (universales) que verifican estas dos construcciones permitirán obtener grupoides libres y productos libres de grupoides.

Sea G un grupoide, X un conjunto y $\sigma : Ob(G) \longrightarrow X$ una aplicación. Construiremos un grupoide U y un morfismo de grupoides $\bar{\sigma} : G \longrightarrow U$ de forma que $Ob(U) = X$, $Ob(\bar{\sigma}) = \sigma$.

Nota 1.6.1 *A lo largo de esta sección, usaremos notación multiplicativa, en vez de aditiva, para la composición en el grupoide.*

Definición 1.19. *Sean $x, x' \in X$. Una palabra de longitud $n \geq 1$ desde x hasta x' es una sucesión $a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ de elementos (morfismos) de G tales que si $a_i \in G(x_i, x_i')$ $\forall i = 1 \ldots n$ entonces se debe verificar*

a) $x_i' \neq x_{i+1},\ i = 1 \ldots n-1$
b) $\sigma(x_i') = \sigma(x_{i+1}),\ i = 1 \ldots n-1$
c) $\sigma(x_1) = x, \quad \sigma(x_n') = x'$
d) a_i *es distinto de la identidad* $\forall\ i = 1 \ldots n$

Estas condiciones aseguran que a pesar de no estar definido $a_{i+1}a_i$ en G, $\bar{\sigma}(a_{i+1})\bar{\sigma}(a_i)$ sí lo está en U. Lo cual permite definir la estructura de grupoide sobre U como sigue:

a) La clase de objetos es $Ob(U) = X$
b) Morfismos en U.
Dados x, x' objetos de U se define $U(x, x')$ como el conjunto de todas las palabras desde x hasta x' de long ≥ 1. Además, si $x = x'$ entonces en $U(x, x)$ se incluye también la palabra vacía de longitud 0 que denotamos $(\ )_x$. Suponemos que $(\ )_x \neq (\ )_y$ cuando $x \neq y$.
c) Composición.
La definiremos por inducción sobre la longitud,

$$\begin{array}{rcl} U(x', x'') \times U(x, x') & \longrightarrow & U(x, x'') \\ (b, a) & \mapsto & ba \end{array}$$

Si $a \in U(x, x')$ entonces se define $(\ )_{x'}a = a$, $a(\ )_x = a$. Esto es, la palabra vacía actua como la identidad.
Sean $a = (a_n, \ldots, a_1) \in U(x, x')$ donde $a_i \in G(x_i, x'_i)$ y $b = (b_m, \ldots, b_1) \in U(x', x'')$ donde $b_j \in G(y_j, y'_j)$. Suponemos que tenemos ba definida para longitud de a menor que n y longitud de b menor que m.
Para longitudes n y m tenemos tenemos los siguientes casos:

- $y_1 \neq x'_n$:

  $ba = (b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, a_n, \ldots, a_1) \in U(x, x'')$.
- $y_1 = x'_n$ y $b_1 a_n \neq 1$:

  $ba = (b_m, b_{m-1}, \ldots, b_2, b_1 a_n, a_{n1}, \ldots, a_1) \in U(x, x'')$.
- $y_1 = x'_n$ y $b_1 a_n = 1$:

  $ba = (b_m, b_{m-1}, \ldots, b_2)(a_{n-1}, a_n, \ldots, a_1)$ definido por hipótesis de inducción.

Comprobemos que cumplen los axiomas.

CAT 1. La composición (multiplicación) es asociativa.
Dado $a = (a_n, \ldots, a_1) \in U(x, x')$ donde $a_i \in G(x_i, x'_i)$, $b = (b_m, \ldots, b_1) \in U(x', x'')$ donde $b_j \in G(y_j, y'_j)$, $c = (c_r, \ldots, c_1) \in U(x'', x''')$ donde $c_k \in G(z_k, z'_k)$, ¿$c(ba) = (cb)a$?. Por inducción sobre longitud m:

- Si b tiene longitud $m = 0$, el resultado es trivial. $c(ba) = ca = (cb)a$. Análogamente si a o c tienen longitud 0.
- Si b tiene longitud $m = 1$ se dan 7 casos:
  1. $x'_n \neq y_1$, $y'_1 \neq z_1$.
     $c(ba) = (c_r, \ldots, c_1)(b_1, a_n, \ldots, a_1) = (c_r, \ldots, c_1, b_1, a_n, \ldots, a_1) = (cb)a$.
  2. $x'_n = y_1$, $y'_1 \neq z_1$, $b_1 a_n \neq 1$.
     $c(ba) = (c_r, \ldots, c_1, b_1 a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) = (c_r, \ldots, c_1, b_1)(a_n, \ldots, a_1) = (cb)a$.
  3. $x'_n = y_1$, $y'_1 \neq z_1$, $b_1 a_n = 1$.
     $c(ba) = (c_r, \ldots, c_1)(a_{n-1}, \ldots, a_1) = (cb)a$.
  4. $x'_n \neq y_1$, $y'_1 = z_1$, $c_1 b_1 \neq 1$.
     $c(ba) = (c_r, \ldots, c_1 b_1, a_n, \ldots, a_1) = (cb)a$.
  5. $x'_n \neq y_1$, $y'_1 = z_1$, $c_1 b_1 = 1$.
     $c(ba) = (c_r, \ldots, c_1)(b_1, a_n, \ldots, a_1) = (c_r, \ldots, c_2, a_n, \ldots, a_1) = (cb)a$.
  6. $x'_n = y_1$, $y'_1 = z_1$, $c_1 b_1 a_n \neq 1$.
     c$(ba) = (c_r, \ldots, c_1)(b_1 a_n, \ldots, a_1) = (c_r, \ldots, c_2, c_1 b_1 a_n, a_{n-1} \ldots, a_1) = (cb)a$.
  7. $x'_n = y_1$, $y'_1 = z_1$, $c_1 b_1 a_n = 1$.
     $c(ba) = (c_r, c_{r_1} \ldots, c_1)(b_1 a_n, \ldots, a_1) = (c_r, \ldots, c_2, a_{n-1}, \ldots, a_1) = (cb)a$.

- Si $m > 1$ procedemos por inducción: Suponemos que se da la asociatividad hasta longitud $m-1$. Veamos para m.
  Sea $b = (b_m, \ldots, b_1)$. Ponemos $b = b''b'$ con b'' y b' palabras de longitud $< m$. Entonces $c(ba) = c(b''b'a) = c(b''(b'a)) = cb''(b'a) = (cb'')(b'a) = (cb''b')a = (cb)a$.

CAT 2. Existencia de identidades. Trivial.

Si $a_i \in G(x_i, x_i')$ entonces $a_i^{-1} \in G(x_i', x_i)$ por ser G grupoide. Luego dada $a = (a_n, \ldots, a_1) \in U(x, x')$ tenemos $a^{-1} = (a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) \in U(x', x)$ verificando $(a_n, \ldots, a_1)(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) = (a_n, \ldots, a_2)(a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}) = \ \ldots\ = (a_n)(a_n^{-1}) = (\quad)_{x'}$. Por tanto, toda palabra tiene inversa a derecha y, análogamente, a izquierda. Concluimos que U es grupoide.

Ahora se puede definir un morfismo de grupoides $\bar{\sigma} : G \longrightarrow U$:

- $\forall x \in Ob(G), \quad \bar{\sigma}(x) = \sigma(x) \in X = Ob(U)$
- $a \in G(x_i, x_i')$

$$\bar{\sigma}(a) = \begin{cases} (a) & a \neq 1 \\ (\ )_{x_i} & a = 1 \end{cases}$$

Veamos que cumple los axiomas:

FUN 1. $\bar{\sigma}(1_{x_i}) = (\ )_{x_i}$.

FUN 2. Dado $a_2 a_1 \in G(x_1, x_2')$, $\bar{\sigma}(a_2 a_1) = (a_2 a_1) = (a_2)(a_1) = \bar{\sigma}(a_2)\bar{\sigma}(a_1)$.

El grupoide U depende de G y de σ, por lo que denotaremos $U_\sigma(G)$ a U. Aunque la construcción de $U_\sigma(G)$ mencionada anteriormente ilustra bien su estructura, desde un punto de vista general, la característica principal de $U_\sigma(G)$ es que $\bar{\sigma}$ satisface una importante propiedad universal. Identifiquemos, el conjunto de objetos $Ob(G)$ del grupoide G como un subgrupoide extenso de G, cuyos elementos son solamente las identidades.

Definición 1.20. *Un morfismo de grupoides $f : G \longrightarrow H$ se dice universal respecto a $Ob(f)$ si el siguiente diagrama es un pushout en la categoría de grupoides*

$$\begin{tikzcd} Ob(G) \arrow[r, "Ob(f)"] \arrow[d, "i"] & Ob(H) \arrow[d, "k"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

donde i, k son funtores inclusión.

La aplicación $Ob(f)$ puede ser interpretada como un morfismo entre grupoides discretos, entendiendo que lleva la identidad en cada objeto a la identidad en su imagen.

Proposición 1.6.1 *Un morfismo de grupoides $f : G \longrightarrow H$ se dice universal respecto a $Ob(f)$ si, y solo si, para cualquier morfismo $g : G \longrightarrow K$ y para cualquier aplicación $\tau : Ob(H) \longrightarrow Ob(K)$ que verifique $Ob(g) = \tau Ob(f)$ existe un único morfismo de grupoides $g^* : H \longrightarrow K$ tal que $Ob(g^*) = \tau$ y $g^* f = g$.*

Demostración. Si $k : Ob(K) \longrightarrow K$ es la inclusión entonces $\tau' = k\tau : Ob(H) \longrightarrow K$ está determinado por τ. Además τ' también determina τ, basta tomar $\tau = Ob(\tau')$.
Para la demostración, supongamos primero que f es universal, esto significa que el siguiente cuadrado es un pushout.

$$\begin{tikzcd}
Ob(G) \arrow[r, "Ob(f)"] \arrow[d, "i"'] & Ob(H) \arrow[d, "j"'] \arrow[rrd, bend left, "\tau"] \arrow[rdd, dashed, "\tau'"] & & \\
G \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, "g"'] & H \arrow[rd, dashed] & & Ob(K) \arrow[ld, "k"] \\
 & & K &
\end{tikzcd}$$

Sea $g : G \to K$, $\tau : Ob(H) \to Ob(K)$ tal que $Ob(g) = \tau Ob(f)$. Tenemos $kOb(g) = k\tau Ob(f) \Rightarrow gi = k\tau Ob(f)$. Entonces, por la propiedad universal del pushout, $\exists!\ g^* : H \to K$ tal que $k\tau = g^* j$ y $g = g^* f$.
Como $k\tau = g^* j \Rightarrow Ob(k\tau) = Ob(g^* j) \Rightarrow Ob(k)Ob(\tau) = Ob(g^*)Ob(j) \Rightarrow \tau = Ob(g^*)$.

Recíprocamente, supongamos que tenemos g y τ' tal que $gi = \tau' Ob(f)$. Sabemos que $\exists!\ g^* : H \to K$ tal que $g^* f = g$ y $Ob(g^*) = \tau$ cuando $Ob(g) = \tau Ob(f)$. Definimos $\tau' = k\tau$. Luego $Ob(\tau') = \tau$. Entonces $gi = \tau' Ob(f) = k\tau Ob(f)$. Tenemos que $Ob(gi) = Ob(\tau)Ob(f)$, se sigue que $Ob(g) = \tau Ob(f)$.
Por tanto $\exists!\ g^* : H \to K$ tal que $g^* f = g$ y $Ob(g^*) = \tau$. Como $Ob(g^*) = \tau$, se tiene que $\tau' = k\tau = k' Ob(g^*) = g^* j$. Luego el diagrama es un pushout y f es universal. □

Nota 1.6.2 *Sea $f : G \to H$ universal. Entonces, utilizando la propiedad universal del pushout, se prueba que H está determinado por f y $Ob(f)$. Luego H es único salvo isomorfismo.*

Proposición 1.6.2 *Sea G un grupoide y $\sigma : Ob(G) \to X$ una aplicación. El morfismo $\bar{\sigma} : G \to U_\sigma(G)$ es universal.*

Demostración. Denotamos $Ob(\bar{\sigma}) = \sigma$.

$$\begin{tikzcd}
Ob(G) \arrow[r, "Ob(\bar{\sigma})=\sigma"] \arrow[d, "i"'] & Ob(U) = X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "j"'] & Ob(K) \arrow[d, "k"'] \\
G \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & U_\sigma(G) = U \arrow[r, dashed, "\exists! g^*"] & K
\end{tikzcd}$$

Usaremos la caracterización 1.6.1.
Sea $g : G \longrightarrow K$ un morfismo de grupoides, $\tau : X \longrightarrow Ob(K)$ una aplicación tal que $Ob(g) = \tau\sigma$. Buscamos $g^* : U \longrightarrow K$ tal que $Ob(g^*) = \tau$ y $g^*\bar{\sigma} = g$.
Definamos g^*:

- g viene definido sobre las identidades de U mediante τ, pues $Ob(g^*) = \tau$. Luego $(\ )_x \in U(x, x)$ es la identidad en x en $U \Rightarrow g^*((\ )_x) = 1_{G(x)}$
- Dado un elemento a de $U_\sigma(G)$, $a \neq 1$

$$a = (a_n, \dots a_1) \in U(x, x') \quad a_i \in G(x_i, x_i')$$

  tal que $\sigma x_i' = \sigma x_{i+1}$ y donde $x = \sigma(x_1)$ y $x' = \sigma(x_n')$
  - si a tiene longitud $n = 1$
    Definimos $g^*((a_1)) = g(a_1)$ de esta manera se verifica $g^*\bar{\sigma} = g$. Además (a_1)=$\bar{\sigma}(a_1)$. Luego $g^*(a_1) = g(a_1)$ es la única definición consistente posible con la igualdad.
  - si a tiene longitud $n > 1$

$$gx_i' = \tau\sigma x_i' = \tau\sigma x_{i+1} = gx_{i+1} \Rightarrow gx_i' = gx_{i+1}$$

    Podemos definir $g^*(a) = g^*((a_n, \dots, a_1)) = g(a_n)g(a_{n-1}) \dots g(a_1)$. Luego $g^*\bar{\sigma} = g : G \longrightarrow K$ y $Ob(g^*) = \tau$.

Veamos ahora que g^* es morfismo de grupoides.

FUN 1. Evidente.

FUN 2. Dada $a = (a_n, \dots a_1), b = (b_m, \dots b_1)$ en U, donde $a_i \in G(x_i, x_i')$, $b_j \in G(y_j, y_j')$ tales que la composición ba está definida ($\sigma y_1 = \sigma x_n'$) procedemos por inducción sobre la longitud:

- Si $n = 0$ o $m = 0$
  - $n = 0$
    $ba = b \Rightarrow g^*(ba) = g^*(b) = g^*(b)1_{g^*\sigma(y_1)} = g^*(b)g^*((\ )_{\sigma(y_1)}) = g^*(b)g^*(a)$.
  - $m = 0$
    $ba = a \Rightarrow g^* = (ba) = g^*((\ )_{\sigma(x_n')})g^*(a) = g^*(b)g^*(a)$.
- Supongamos $g^*(ba) = g^*(b)g^*(a)$ para una longitud $m - 1, n - 1$.
- Veamos para m y n

$$g^*(ba) = \begin{cases} g(b_m) \dots g(b1)g(an) \dots g(a_1) & = g^*(b)g^*(a), \quad y_1 \neq x_n' \\ g(b_m) \dots g(b_2), g(b_1 a_n) \dots g(a_1) & = g^*(b)g^*(a), \quad y_1 = x_n' \ \ y \ \ b_1 a_n \neq 1 \\ g^*((b_m, \dots b_2)(a_{n-1}, \dots a_1)) & = g^*(b)g^*(a), \quad y_1 = x_n' \ \ y \ \ b_1 a_1 = 1 \end{cases}$$

La unicidad también se tiene ya que $g^*\bar{\sigma} = g$ implica $g^*(a_1) = ga_1$. Es decir, esta es la única forma posible de definir g^*. $\square$

Definición 1.21. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un morfismo de grupoides. Decimos que f es estrictamente universal si para cualquier morfismo $g : G \longrightarrow K$ tal que $Ob(g)$ se factoriza a través de $Ob(f)$ entonces existe un único morfimso $g^* : H \longrightarrow K$ tal que $g^* f = g$.*

Proposición 1.6.3 *Un morfismo $f : G \longrightarrow H$ es estrictamente universal si, y solo si, f es universal y $Ob(f)$ es sobreyectivo.*

Demostración. Suponemos f estrictamente universal. Sea $g : G \to K$ un morfismo tal que $Ob(g)$ se factoriza a través de $Ob(f)$. Entonces sabemos que existe un morfismo único $g^* : H \to K$ tal que $g^* f = g$. Sea τ la aplicación por la que se factoriza $Ob(g)$ ¿$Ob(g^*) = \tau$? De la relación $g^* f = g$ se tiene $Ob(g^*)Ob(f) = Ob(g) = \tau Ob(f)$. De aquí solo se puede concluir que $Ob(g^*) = \tau$ si $Ob(f)$ es sobre. Veámos la sobreyectividad de $Ob(f)$:

Sea $\sigma = Ob(f) : Ob(G) \to Ob(H)$. Por 1.6.2, $\bar{\sigma} : G \to U_\sigma(G)$ es un morfismo de grupoides universal. Luego existe un único morfismo $f^{**} : U_\sigma(G) \to H$ tal que $f^{**}\bar{\sigma} = f$ y $Ob(f^{**}) = 1_{Ob(H)}$.
Además como f es estrictamente universal y $Ob(\bar{\sigma}) = Ob(f) = 1Ob(f) = \sigma$ entonces existe un morfismo $f^* : H \to U_\sigma(G)$ tal que $f^* f = \bar{\sigma}$.

$$\begin{tikzcd}
Ob(G) \arrow[r, "\sigma=Ob(f)"] \arrow[d] & Ob(H) \arrow[r, "1"] \arrow[d] & Ob(H) \arrow[d, dashed] \\
G \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\sigma}"'] & H \arrow[r, "f^*"] & U_\sigma(G)
\end{tikzcd}$$

Probando $Ob(f^*) = 1$ se sigue que $\bar{\sigma}$ es estrictamente universal. Con ello veremos que $Ob(f)$ es sobreyectiva.

Por una parte, tenemos que $1_{U_\sigma(G)}$ es el único tal que $1_{U_\sigma(G)}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$ y $Ob(1_{U_\sigma(G)})=1_{Ob(H)}$ Luego, por unicidad, $f^* f^{**} = 1_{U_\sigma(G)}$. Por otra parte, como $f^{**} f^* f = f^{**}\bar{\sigma} = f$, también por unicidad se concluye que $f^{**} f^* = 1_H$. Esto implica que $Ob(f^{**} f^*) = Ob(1_H) \Rightarrow Ob(f^{**})Ob(f^*) = 1_{Ob(H)} \Rightarrow Ob(f^*) = 1_{Ob(H)}$.

Como consecuencia veamos que $\bar{\sigma}$ es estrictamente universal:
Sea $h : G \to K$ y $Ob(h) = \tau Ob(f) = \tau' Ob(f)$ dos factorizaciones distintas, como $\bar{\sigma}$ universal, $\exists!\ h^*, !\ h'^* : U_\sigma(G) \to K$ tal que $h^*\bar{\sigma} = h$, $Ob(h^*) = \tau$ y $h'^*\bar{\sigma} = h$ y $Ob(h'^*) = \tau'$. Tenemos $Ob(h)$ que se factoriza a través de $Ob(f)$.
Como f estrictamente universal, existe un único $h'' : H \to K$ tal que $h'' f = h$.
Pero

$$\left.\begin{aligned} h^* f^* f &= h^*\bar{\sigma} = h \\ h'^* f^* f &= h'^*\bar{\sigma} = h \end{aligned}\right\} \Rightarrow h^* f^* = h'^* f^* = h''$$

$$\Rightarrow Ob(h^* f^*) = Ob(h'^* f^*) \Rightarrow Ob(h^*)Ob(f^*) = Ob(h'^*)Ob(f^*) \Rightarrow Ob(h^*) = Ob(h'^*)$$

$$\begin{tikzcd}
Ob(G) \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dd] & & Ob(H) \arrow[rr, "\tau{,}\tau'"] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed] & & Ob(K) \\
& & & H \arrow[dl, dashed, "f^*"] \arrow[dr, dashed, "h''"] & \\
G \arrow[rr, "\bar{\sigma}"] \arrow[urrr, dashed, "f"] \arrow[rrrr, bend right, "h"'] & & U_\sigma(G) \arrow[rr, dashed, "h^*{,}h'^*"] & & K
\end{tikzcd}$$

Concluimos que existe un único $h^* : U_\sigma(G) \to K$ tal que $h^*\bar{\sigma} = h$ y que h^* es independiente de la factorización de $Ob(h)$. Entonces $\bar{\sigma}$ es estrictamente universal.

Supongamos ahora que $Ob(f)$ no es sobre, entonces existe $x' \neq f(x)\ \forall x \in Ob(G)$. Sabemos que $Ob(\bar{\sigma}) = \sigma = Ob(f)$. Luego x' no es imagen mediante $\bar{\sigma}$ de un objeto de G. Pero $1_{x'}$ es un morfismo del grupoide $U_\sigma(G)$. En consecuencia si $Ob(f)$ no es sobreyectiva, habrá un objeto x' en H tal que $g^*(1_{x'})$ no está determinado por la ecuación $g^*\bar{\sigma} = g$, pero esto contradice que $\bar{\sigma}$ sea estrictamente universal. Por tanto $Ob(f)$ es sobre.

Recíprocamente, supongamos que tenemos $g : G \to K$ y $\tau : Ob(H) \to Ob(K)$ tales que $Ob(g) = \tau Ob(f)$. Como f es universal, existe un unico $g^* : H \to K$ tal que $g^*f = g$ y $Ob(g^*) = \tau$.
De la relación $g^*f = g$ se tiene $Ob(g^*)Ob(f) = Ob(g) = \tau Ob(f)$. Como $Ob(f)$ es sobre, se sigue que $Ob(g^*) = \tau$. Es decir, cuando $Ob(f)$ es sobre la condición $Ob(g^*) = \tau$ es superflua, por consiguiente f es estrictamente universal. □

EJEMPLOS

1. Sea G un grupoide y $\sigma : Ob(G) \to \{x\}$ la única aplicación constante. Entonces $U_\sigma(G)$ es un grupoide con un objeto, es decir un grupo, al que llamaremos *grupo universal de* G y se denotará UG.

2. Continuando con el ejemplo anterior. Tomaremos $G = \mathbf{I}$, el grupoide con 2 objetos $\{0{,}1\}$, y con dos morfismos no triviales:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\imath"] & 1 \arrow[l, bend left, "\imath^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Las palabras en el grupo $U\mathbf{I}$=$U_\sigma(\mathbf{I})$ son $\imath\imath\imath\ldots\imath$ o bien $\imath^{-1}\imath^{-1}\ldots\imath^{-1}$. Los denotamos $\imath^n$ o bien $\imath^{-m}$ y obtenemos el isomorfismo de grupos entre $U\mathbf{I}$ y $\mathbb{Z}$ dado por $\iota^k \mapsto k$ para todo entero k, y por $(\ )_x \mapsto 0$ para el neutro del grupo $U\mathbf{I}$.

Definición 1.22. *Sea A un conjunto. Un grupo libre sobre A es un grupo FA y una aplicación $\lambda : A \longrightarrow FA$ que es universal para aplicaciones de A en* *grupos, es decir, para toda aplicación $h : A \longrightarrow G$, G grupo, existe un único homomorfismo de grupos $h^* : FA \longrightarrow G$ tal que $h^*\lambda = h$.*

Proposición 1.6.4 *Para cualquier conjunto A, siempre existe el grupo libre sobre A.*

Demostración. Tomamos A como un grupoide discreto. Definimos FA como el grupo universal de $A \times \mathbf{I}$, $FA := U_\sigma(A \times \mathbf{I})$ siendo $\sigma : Ob(A \times \mathbf{I}) \to \{x\}$. Denotamos $1_a := a$. Sea $i : A \to A \times \ \mathbf{I}$, $i(a) = (a, \imath)$ aplicación, tomamos $\lambda = \bar{\sigma} i : A \to FA$. El resto de la demostración es una mera comprobación. □

En la prueba anterior, notamos que cada elemento $(a, \imath)$ es un elemento de $A \ \times \mathbf{I}$ distinto de la identidad. Entonces $\bar{\sigma}(a, \imath) = (a, \imath) \neq (\ )$. Luego $\bar{\sigma} : Im\, i \to FA$ es inyectiva. Si denotamos a a los elementos $\lambda(a) = \lambda a$ de FA y denotamos a^{-1} a los elementos $(\lambda a)^{-1}$ entonces podemos describir todas las palabras de manera única en FA como $a_n^{\epsilon_n} a_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \ldots a_1^{\epsilon_1}$ con $a_i \in A$, $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ tales que para ningún i se tiene $a_i = a_{i+1}$ y $\epsilon_{i+1} = -\epsilon_i$.

Definición 1.23. *Sea G y H dos grupoides y sean j_1, j_2 dos morfismos de grupoides $G \xrightarrow{j_1} K \xleftarrow{j_2} H$. Decimos que j_1,j_2 presentan K como el producto libre de G y H si se satisface la siguiente propiedad universal: morfismos $g : G \longrightarrow L, h : H \longrightarrow L$ que coincidan en $Ob(G) \cap Ob(H)$ entonces existe un único morfismo $k : K \longrightarrow L$ tal que $kj_1 = g$ y $kj_2 = h$.*

Se puede expresar como un diagrama pushout:

$$\begin{tikzcd}
Ob(G) \cap Ob(H) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & H \arrow[d, "j_2"] \\
G \arrow[r, "j_1"] & K = U_\sigma(G \sqcup H)
\end{tikzcd}$$

El producto libre de G y H se suele denotar también como $G * H$.

Proposición 1.6.5 *Dados dos grupoides G y H siempre existe su producto libre*

Proposición 1.6.6 *La composición de morfismos universales es universal.*

Demostración. Esto es inmediato a partir de la definición y el hecho de que la composición de pushouts es un pushout, [1.2.3].

1.7. Grupoides libres

Los grupoides libres generalizan los grupos libres. Como es de esperar, se definen por medio de una propiedad universal; para expresar esto, necesitaremos lenguaje de la teoría de grafos.

Definición 1.24. *Un grafo Γ consiste en un conjunto de objetos (vértices), $Ob(\Gamma)$, y para cada par de objetos $x, y \in Ob(\Gamma)$ un conjunto $\Gamma(x, y)$ denominado conjunto de aristas de x en y. Denotamos $\gamma : x \to y$ para $\gamma \in \Gamma(x, y)$. Decimos que x es el punto inicial e y el final.*

Los conjuntos $\Gamma(x, y)$ son disjuntos. En particular si $x \neq y$ entonces $\Gamma(x, y) \cap \Gamma(y, x) = \emptyset$[3]. Denotamos $a \in \Gamma$ para indicar $a \in \Gamma(x, y)$ para alguna pareja de puntos $x, y \in Ob(\Gamma)$. Un elemento (arista) $a \in \Gamma$ no tiene porqué tener inversas. Luego un grafo no es grupoide pero todo grupoide es un grafo.

Definición 1.25. *Un objeto x de un grafo Γ se dice discreto si no existen aristas que tengan a x como punto inicial o final.*

Un grafo es discreto si todos sus objetos son discretos. (No hay aristas, ni siquiera identidades).

Definición 1.26. *Dados dos grafos Γ, Δ un morfismo de grafos $f : \Gamma \longrightarrow \Delta$ es una relación que asigna a cada $x \in Ob(\Gamma)$ un objeto $f(x) \in Ob(\Delta)$ y a cada arista $a \in \Gamma(x, y)$ un elemento $f(a) \in \Delta(f(x), f(y))$.*

Nota 1.7.1 *Los grafos y morfismos de grafos forman una categoría.*

Definición 1.27. *Si Γ, Δ son dos grafos tales que $Ob(\Gamma) \subseteq Ob(\Delta)$ y la inclusión $\Gamma \longrightarrow \Delta$ es un morfismo de grafos entonces decimos que Γ es subgrafo de Δ.*

Se dice que Γ es extensa en Δ si $Ob(\Gamma) = Ob(\Delta)$.
Se dice que Γ es llena en Δ si $\Gamma(x, y) = \Delta(x, y)$ para culesquiera x, y de Δ.

Definición 1.28. *Supongamos que Γ' es un subgrafo de Γ y $f : \Gamma \longrightarrow \Delta$ es un morfismo de grafos. Denotamos $f(\Gamma')$ al subgrafo de Δ cuyos objetos son $f(x)$, $\forall\ x \in Ob(\Gamma')$ y tal que las aristas $f(\Gamma')(w, z) = \bigcup_{\substack{f(x)=w \\ f(y)=z \\ x,y \in Ob(\Gamma')}} f(\Gamma'(x, y))$.*

Denotamos Imf al subgrafo $f(\Gamma)$.

Nota 1.7.2
- *En la categoría de grafos siempre existe el coproducto de grafos, y se define como su unión disjunta.*
- *Se define el grafo 2 como el que tiene 2 objetos, $0, 1$, y una única arista, $\iota : 0 \to 1$. Para cualquier otro grafo Γ y cualquier arista $\gamma \in \Gamma$ existe un único morfismo de grafos $\hat{\gamma} : 2 \longrightarrow \Gamma$ tal que $\hat{\gamma}(\iota) = \gamma$.*

Definición 1.29. *Dado un grafo Γ se define su dispersión $D(\Gamma)$ como la unión disjunta de copias del grafo 2, una por cada elemento de Γ y de un grafo discreto con los objetos discretos de Γ.*

[3] En esta memoria consideraremos grafos orientados, también denominados dirigidos.

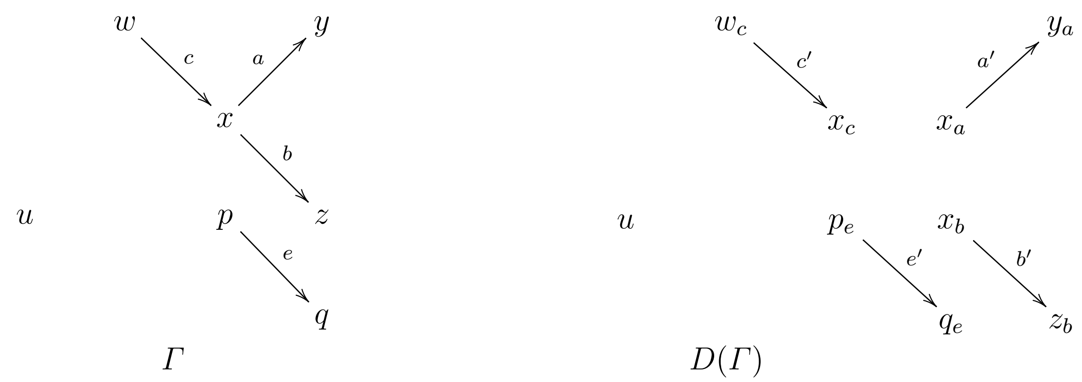


Fig 1. Ejemplo de un grafo y su dispersión.

Por otro lado existe un morfismo de grafos $\varphi : D(\varGamma) \longrightarrow \varGamma$ que reidentifica los objetos de la dispersión para obtener de nuevo $\varGamma$. Para cada elemento $a : x \to y$ de $\varGamma$ existe $a' : x_a \to y_a$ en $D(\varGamma)$ tal que $\varphi(x_a) = x, \varphi(y_a) = y, \varphi(a') = a$. Obviamente $Ob(\varphi)$ es sobreyectivo.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría entonces $\mathcal{C}$ define también un grafo simplemente obviando las composiciones. No las estamos eliminando, si $b+a$ es una composición de $a : x \to y$ y $b : y \to z$ ahora es simplemente una flecha de x a z, no la vemos como composición. Si $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor entonces define también un morfismo de grafos. El inverso es falso en general.

Podemos hablar entonces de los subgrafos de un grupoide. Si $f : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupoides entonces $Im\, f$ es un subgrafo de H pero, en general, $Im\, f$ no es un subgrupoide de H.

Definición 1.30. *Sea $\varGamma$ un grafo en un grupoide G. El subgrupoide $\varGamma'$ de G generado por $\varGamma$ es la intersección de todos los subgrupoides de G que contienen a $\varGamma$. Por tanto, es el menor subgrupoide de G que contiene a $\varGamma$. Sus elementos son todas las identidades en los puntos de $Ob(\varGamma)$ y todos los productos $a_n \cdots a_1$ que están bien definidos en G y tales que $a_i \in \varGamma$ o bien $a_i^{-1} \in \varGamma, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.*

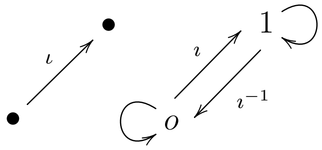
Definición 1.31. *Sea $\varGamma$ un grafo en un grupoide G. Decimos que G es libre sobre $\varGamma$ cuando $\varGamma$ es extenso dentro de G y para cualquier grupoide H y cualquier morfismo de grafos $f : \varGamma \longrightarrow H$ existe una extensión de f a un morfismo de grupoides $f^* : G \longrightarrow H$ único.*

$$\begin{tikzcd} \varGamma \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, dashed, "f^*"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Se dice entonces que G es un grupoide libre sobre $\varGamma$ y se denota $F\varGamma$.

En particular, el grupoide libre sobre un grafo discreto $\varDelta$ es el grupoide discreto en los objetos de $\varDelta$.

Por otro lado el grafo *2* esta contenido en el grupoide **I**.



I es libre sobre el grafo *2*. Si $f : 2 \longrightarrow H$ es un morfismo de grafos entonces se extiende a f^* como $f^*(\iota) = f(\iota)$ y $f^*(\iota^{-1}) = (f(\iota))^{-1}$. Es único, de lo contrario $f(\iota\iota^{-1})$ donde $\iota\iota^{-1} = id$ no lo lleva a la identidad y f^* no sería morfismo.

Definición 1.32. *El grupoide libre sobre un coproducto de grafos, es el coproducto de los grupoides libres de cada uno de ellos.*

Por ejemplo, la dispersión $D(\Gamma)$ es un coproducto de grafos, es la unión disjunta de copias del grafo *2* con un grafo discreto.

Proposición 1.7.1 *Sea Γ un grafo en un grupoide G. Las siguientes condiciones son equivalentes*

a) G es libre sobre Γ.
b) Sea $\varphi : D(\Gamma) \longrightarrow \Gamma$ la dispersión de Γ. El morfismo inducido $\bar{\varphi} : FD(\Gamma) \longrightarrow G$ es estrictamente universal.
c) Γ genera G y los elementos no identidades de G pueden ser expresados de manera única como productos $a_n^{\epsilon_n} \cdots a_1^{\epsilon_1}$ donde $a_i \in \Gamma, \epsilon_i = \pm 1$ tal que para ningún $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ ocurre que $a_i = a_{i+1}$ y $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$.

Demostración. '$a \Rightarrow b$'
Sea $\sigma = Ob(\bar{\varphi}) : Ob(D(\Gamma)) \to Ob(\Gamma)$. Sea $h : FD(\Gamma) \to H$ un morfismo de grupoides y $\tau : Ob(G) \to Ob(H)$ tal que $Ob(h) = \tau\sigma$. Definimos un morfismo de grafos $f : \Gamma \to H$ a partir de h y τ, $\forall\ x \in Ob(\Gamma),\ f(x) = \tau(x)$ y para $a \in \Gamma,\ f(a) = h(a')$.

$$\begin{tikzcd}
Ob(D(\Gamma)) \arrow[r, "Ob(\bar{\varphi})"] \arrow[d] & Ob(\Gamma) = Ob(G) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & Ob(H) \arrow[d] \\
FD(\Gamma) \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & G = U_\sigma(FD(\Gamma)) \arrow[r, dashed, "h^*"] & H
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis, G es libre sobre Γ, luego $f : \Gamma \to H$ se extiende a $h^* : G \to H$ de manera única. Se comprueba fácilmente que $h^*\bar{\varphi} = h$. Además como Γ es extenso sobre G (porque G es libre sobre Γ) entonces

$$\left.\begin{array}{r} Ob(h) = \tau\sigma = \tau Ob(\varphi) = \tau Ob(\bar{\varphi}) \\ Ob(h^*\bar{\varphi})) = Ob(h) \Rightarrow Ob(h^*)Ob(\bar{\varphi}) = Ob(h) \end{array}\right\} \Rightarrow Ob(h^*) = \tau$$

pues $Ob(\bar{\varphi}) = Ob(\varphi)$ es sobreyectiva. La unicidad es evidente.

'$b \Rightarrow a$'

Sea $f : \Gamma \to H$ un morfismo de grafos. Sea $\tau = Ob(f) : Ob(\Gamma) \to Ob(H)$. Definimos un morfismo de grupoides $h : FD(\Gamma) \to H$ con $h(a') = f(a)$ donde $a = \varphi(a')$ y $\varphi : D(\Gamma) \to \Gamma$. Luego $h(a') = f(\varphi(a'))$. Entonces $Ob(h) = Ob(f\varphi) = Ob(f)Ob(\varphi) = \tau\sigma$.
Como $\bar{\varphi}$ es estrictamente universal, existe un único $h^* : G \to H$ tal que $h^*\bar{\varphi} = h$. De aquí

$$Ob(h^*)Ob(\bar{\varphi}) = Ob(h) \Rightarrow Ob(h^*)\sigma = \tau\sigma$$

Se sigue que $Ob(h^*) = \tau = Ob(f)$ pues se tiene que $Ob(\bar{\varphi})$ es sobreyectiva al ser $\bar{\varphi}$ universal. Sea a un elemento de Γ entonces $h^*(a) = h^*\bar{\varphi}(a') = h(a') = f(a)$ y h^* extiende a f.

'$b \Leftrightarrow c$'

Esto es consecuencia de la propia construcción de $U_\sigma(FD(\Gamma))$ pues, que $\bar{\varphi}$ sea estrictamente universal quiere decir que G es, salvo isomorfismo, el grupoide universal de $FD(\Gamma)$, es decir, $G = U_\sigma(FD(\Gamma))$, donde $\sigma = Ob(\varphi)$ y $\varphi : D(F) \to \Gamma$ dispersión. □

Corolario 1.7.1.1 *Sea G un grupoide libre sobre Γ. Si $f : G \longrightarrow H$ es estrictamente universal, entonces H es libre sobre f(Γ). En particular, UG es grupo libre.*

Demostración. Por la proposición 1.6.6, $f\bar{\varphi}$ es universal. Además, como $Ob(f)$ es sobreyectiva se tiene también que $f\bar{\varphi}$ es estrictamente universal. Por la proposición anterior 1.7.1 se tiene que H es libre sobre $f\Gamma$. □

Corolario 1.7.1.2 *Sea G un grupoide libre sobre Γ y sea Δ un subgrafo de Γ. Sea H el subgrupoide de G generado por Δ. Entonces H es el libre sobre Δ.*

Demostración. Usamos 1.7.1 (c). En primer lugar, Δ es extenso en H. Luego, si a es un elemento que no es una identidad de H, entonces, dado que Δ genera H, a es un producto $a_n^{\epsilon_n}, \dots, a_1^{\epsilon_1}$ tal que $a_i \in \Gamma$ y $\epsilon_i = \pm 1$.
Si para algunos i tenemos $a_i = a_{i+1}$, $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, entonces podemos cancelar $a_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} a_i^{\epsilon_i}$. Además, podemos repetir tales cancelaciones hasta que no haya una relación de esta forma. Sin embargo, dado que $\Delta \subseteq \Gamma$ y G es libre en Γ, la expresión resultante para a es única (por 1.7.1 (c)). De nuevo se deduce de 1.7.1 (c) que H es libre sobre Δ. □

Definición 1.33. *Sea G un grupoide libre sobre un grafo Γ. La cardinalidad del conjunto de elementos de Γ se denomina rango de G.*

Veamos que esta definición no depende del grafo Γ que genera G.
Supongamos que $f : G \to H$ es un morfismo de grupoides estrictamente universal, luego tenemos dos diagramas pushout

$$\begin{tikzcd} Ob(\Gamma) \arrow[r, "Ob(f)"] \arrow[d] & Ob(f(\Gamma)) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ob(\Gamma) \arrow[r, "Ob(f)"] \arrow[d] & Ob(f(\Gamma)) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "f"] & U_\sigma(G) \end{tikzcd}$$

Entonces H y $U_\sigma(G)$ son grupoides isomorfos.
Sabemos que $\bar{\sigma}$ es inyectiva sobre los elementos de Γ por la propia construcción. Luego $\bar{\sigma} : \Gamma \to \bar{\sigma}(\Gamma)$ es biyectiva y por tanto $f : \Gamma \to f(\Gamma)$ también lo será. Por el corolario 1 de 1.7.1, sabemos que H está generado por $f(\Gamma)$. Se concluye que $Card(H) = Card(G)$. En otras palabras hemos probado que

Si $f : G \to H$ es estrictamente universal entonces $Card(H) = Card(G)$.

Supongamos que Γ, Γ' son dos grafos diferentes que generan el grupoide G. Consideremos morfismos de grupoides constantes $Ob(\Gamma) \xrightarrow{\sigma} \{*\}$, $Ob(\Gamma') \xrightarrow{\sigma'} \{*\}$. Tenemos

$$\begin{tikzcd} Ob(\Gamma) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ G = F\Gamma \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & UF\Gamma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ob(\Gamma') \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ G = F\Gamma' \arrow[r, "\bar{\sigma}'"] & UF\Gamma' \end{tikzcd}$$

Sabemos que $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}'$ son morfismos universales. Por tanto, los grupos $UF\Gamma$, $UF\Gamma'$ son isomorfos. Luego $rang\,UF\Gamma = rang\,UF\Gamma'$ entonces $rang\ F\Gamma = rang\ UF\Gamma = rang\ UF\Gamma' = rang\ F\Gamma'$. Esta penúltima igualdad se debe a que dos grupos libres son isomorfos si, y solo si tienen el mismo rango (Véase [4], pp. 48).

Nota 1.7.3 *Si G y G' son dos grupoides libres sobre un mismo grafo Γ entonces la propiedad universal nos dice que existe un único isomorfismo $G \to G'$ que es la identidad en Γ.*

A partir de un grafo Γ, 1.7.1 (b) nos dice cómo construir $F\Gamma = U_\sigma(FD(\Gamma))$ y 1.7.1 (c) nos dice cómo son sus elementos. A los elementos de un grupoide libre $F\Gamma$ los llamaremos caminos. Si $w \in F\Gamma(x, y)$ decimos que w es un camino desde x hasta y.

Definición 1.34. *Se dice que un grafo Γ es un un bosque (forest o circuit free) si todos los grupos $F\Gamma(x)$ son triviales.*

Se dice que Γ es un árbol (tree) si el grupoide $F\Gamma$ es un grupoide en árbol, esto es, $F\Gamma(x, y)$ es unitario $\forall\ x, y \in Ob(F\Gamma) = Ob(\Gamma)$.

Se dice que Γ es conexo si $F\Gamma$ es un grupoide conexo.

La siguiente proposición es una consecuencia del Lema de Zorn. Su demostración puede verse, por ejemplo, en el lema de [11], pp. 36.

Proposición 1.7.2 *Si Γ es un grafo conexo entonces Γ contiene un árbol T que es extenso en Γ.*

Tenemos entonces las herramientas necesarias para demostrar el resultado siguiente:

Proposición 1.7.3 *Si G es un grupoide libre conexo entonces cada grupo sobre un vertice x, $G(x)$, es libre. Además si G tiene rango n_1 y tiene n_0 objetos entonces $G(x)$ tiene rango $n_1 - n_0 + 1$.*

Demostración. Sea Γ el grafo conexo que genera a G, sea T un árbol extenso dentro de Γ y sea Δ el grafo formado por los elementos de Γ que no están en T. Sea $x \in Ob(G)$, definimos los siguientes morfismos de grupoides:
$r : FT \to \{x\}$ tal que $r(x_i) = x,\ x_i \in Ob(FT)$ y $r(a) = 1_x$ para todo a en FT;
$r' : G \to G(x)$ de modo que $r'(x_i) = x$ con $x_i \in Ob(G)$ y para $a \in G(x_i, x_j)$, $r'(a) = t_{x_j^{-1}} a t_{x_i}$ donde $\{t_{x_i}\} = FT(x, x_i)$, $\{t_{x_j}\} = FT(x, x_j)$.

Supongamos por el momento (luego se probará), que G es el producto libre de FT con $F\Delta = H$. Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} Ob(G) \arrow[r] \arrow[d] & FT \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i'"'] & \{x\} \arrow[d, "j"] \\ H \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "r'"] & G(x) \end{tikzcd}$$

El cuadrado de la izquierda es un pushout. Verificar que el segundo cuadrado es un pushout es un ejercicio de comprobación. Por 1.2.3 la composición de los cuadrados es un pushout. Como además $Ob(r'i)$ es sobre se tiene que $r'i$ es un morfismo estrictamente universal. Por 1.7.1.1 se sigue que $G(x)$ es libre sobre el grafo $r'i(\Delta) = r'(\Delta)$.

Adicionalmente si G tiene rango n_1 entonces Γ tiene n_1 elementos. Si G tiene n_0 objetos entonces T tiene $n_0 - 1$ elementos. En tal caso Δ, y por tanto $r'i(\Delta)$ tiene $n_1 - (n_0 - 1)$ elementos. Dicho de otro modo, el rango de $G(x)$ es $n_1 - n_0 + 1$.

Veamos finalmente que el grupoide G es el producto libre $FT * H$. Sean $t : FT \to K$ y $h : H \to K$ morfismos de grupoides que coinciden en $Ob(G)$. Las restricciones de t y h nos dan $t' : T \to K$, $h' : \Delta \to K$ coincidiendo tambien en los objetos de $Ob(G)$. Podemos definir así un morfismo de grafos $f : \Gamma \to K$

$$f(a) = \begin{cases} t'(a) & \text{si } a \in T \\ h'(a) & \text{si } a \in \Delta \end{cases}$$

Como G es libre sobre Γ, f se extiende a un morfismo de grupoides $k : G \to K$. Sin embargo, las restricciones de k sobre FT y H extienden a t' y h'. Luego $k_{|FT} = t$ y $k_{|H} = h$. Esto prueba que t y h se extienden a un morfismo $k : G \to K$. La unicidad se comprueba, suponiendo que existe otro morfismo $\bar{k} : G \to H$ tal que $\bar{k}i = t$ y $\bar{k}j = h$ entonces $\bar{k}_{|\Gamma} = f$. Luego $\bar{k} = k$. $\square$

2

Espacios recubridores y grupoides recubridores

Este capítulo resume los desarrollos teóricos llevados a cabo a lo largo de la memoria, cuyo propósito es demostrar la equivalencia entre los recubridores de espacios y su análogo en grupoides. Para ello introduciremos los conceptos espacio recubridor, aplicaciones recubridoras y homotopías recubridoras; del mismo modo presentaremos y aseguraremos la existencia de los grupoides recubridores. Se usarán algunos resultados sobre espacios recubridores y elevaciones, cuyas demostraciones se omitirán; pueden verse, por ejemplo en [12]. Finalmente se expondrá nuestro principal resultado: la correspondencia entre espacios recubridores y grupoides recubirdores. A continuación se presentan algunas aplicaciones de este resultado. Se obtendrán los teoremas clásicos sobre existencia de recubridor universal para un espacio, y sobre el grupo de automorfismos del recubridor universal. Cerraremos esta memoria con una aplicación a la teoría de grupos: el Teorema de Nielsen - Schreier.

A lo largo de este capítulo se asumirá que todos los espacios son localmente conexos por caminos.

2.1. Definiciones y propiedades

Definición 2.1. *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Un subconjunto U de X se dice que es canónico respecto a p si U es un abierto, conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ es abierta en $\tilde{X}$ y además se aplica homeomorficamente sobre U mediante la restricción p (es decir, cada una de esas componentes conexas son homeomorfas a U). Cada componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ también se llama canónico. Si cada $x \in X$ tiene un entorno canónico, la aplicación p se llama aplicación recubridora y $\tilde{X}$ espacio recubridor de X. La aplicación recubridora se dice conexa cuando $\tilde{X}$ y X son conexos por caminos.*

A continuación citamos los dos ejemplos típicos de espacio recubridor de la circunferencia y enunciaremos el conocido *teorema de monodromía.*

1. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi i x} = (cos 2\pi x, sen 2\pi x)$. Sea (S^1, T_u), $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, entonces podemos tomar dos entornos canónicos como $U_1 = S^1 \setminus \{1\}$, $U_{-1} = S^1 \setminus \{-1\}$. Las componentes conexas por caminos de $p^{-1}(U_1)$ y $p^{-1}(U_{-1})$ son:

$$p^{-1}(U_1) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1), \quad p^{-1}(U_{-1}) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}).$$

Entonces $(\mathbb{R}, T_u)$ es un espacio recubridor de S^1 y la aplicación exponencial es una aplicación recubridora.

2. También se tiene que S^1 es espacio recubridor de S^1 con $f: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$. Tomando U_1, U_{-1} del ejemplo anterior, las componentes conexas son:

$$f^{-1}(U_1) = \bigcup_{k=0}^{n-1}(e^{2\pi ik/n}, e^{2\pi it(k+1)/n}), \quad f^{-1}(U_1) = \bigcup_{k=0}^{n-1}(e^{2\pi i(-1/2+k/n)}, e^{2\pi it(1/2+k/n)}).$$

Proposición 2.1.1 (Teorema de monodromía) *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $x = p(\tilde{x})$. Entonces los caminos a, b en X con punto inicial x se elevan de forma unívoca a caminos $\tilde{a}, \tilde{b}$ en $\tilde{X}$. Además, a y b son equivalentes si, y solo si, $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ son equivalentes.*

Puede verse una demostración de este resultado en [3], Teorema 10.1.2. En los textos de introducción a la topología algebraica, por ejemplo [11], se consideran habitualmente caminos de longitud 1. Teniendo en cuenta que nosotros entendemos la relación de equivalencia tal que para dos caminos a, b existe números reales $s, s' \geq 0$ de modo que $s + a, s' + b$ son homótopos relativos a los extremos, entonces $s + \tilde{a}$, $s' + \tilde{b}$ recubren $s + a, s' + b$ respectivamente y por tanto $\tilde{a}$ es equivalente a $\tilde{b}$. Más allá de esto la demostración es, esencialmente, la misma.

Introducimos ahora los conceptos algebraicos equivalentes.

Definición 2.2. *Sea G un grupoide, $x \in G$. Se define la estrella de x en G, $St_G x$, como el conjunto de todos los morfismos de G con punto inicial en x.*

Definición 2.3. *Sea $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ un morfismo de grupoides. Decimos que p es un morfismo recubridor si para cada objeto $\tilde{x}$ de $\tilde{G}$ la restricción de p a $St_{\tilde{G}}\tilde{x}$ es biyectiva.*

$$St_{\tilde{G}}\tilde{x} \longrightarrow St_G p\tilde{x}.$$

En ese caso se dice que $\tilde{G}$ es un grupoide recubridor de G. El morfismo recubridor p se dice conexo si $\tilde{G}$ y G son grupoides conexos.

Definición 2.4. *Para todo morfismo $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ y para todo objeto $\tilde{x}$ de $\tilde{G}$, denominamos al subgrupo $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$ de $G(p\tilde{x})$, grupo característico de p en $\tilde{x}$. Abusando del lenguaje, también lo podemos llamar grupo característico de $\tilde{G}, \tilde{x}$.*

Si p es un morfismo recubridor tenemos un isomorfismo entre $\tilde{G}(\tilde{x})$ y su grupo característico. Si $a \in G(p\tilde{x})$ entonces existe un único elemento $\tilde{a}$ de $St_{\tilde{G}}\tilde{x}$ tal que $p\tilde{a} = a$, es decir, $\tilde{a} \in \tilde{G}(\tilde{x})$ si, y solo si, $a = p\tilde{a} \in p(\tilde{G}(\tilde{x}))$.

EJEMPLOS

1. Sea $\mathbf{I}$ el grupoide 1-conexo definido en el ejemplo 3 de la sección 1.4. Recordemos que tiene dos objetos y un elemento $\imath$ de $\mathbf{I}$(0,1). Denotemos 0 a la identidad de $\mathbf{I}$ en 0 y 1. Tenemos $St_{\mathbf{I}}0 = \{0, \imath\}$, $St_{\mathbf{I}}1 = \{0, -\imath\}$. Tomamos el grupo $\mathbb{Z}_2$, el cual tiene un objeto 0 y dos morfismos 0 y 1. Definimos un morfismo de grupoides p:

$$\begin{array}{rcl} p: \ \mathbf{I} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \\ obj: 0,1 & \mapsto & 0 \\ morf: \ 0 & \mapsto & 0 \\ \imath & \mapsto & 1 \\ -\imath & \mapsto & 1 \end{array}$$

Veamos que además es un morfismo recubridor de grupoides:

Restricción de p a $St_{\mathbf{I}}0$	Restricción de p a $St_{\mathbf{I}}1$
$St_{\mathbf{I}}0 \longrightarrow St_{\mathbb{Z}_2}0$	$St_{\mathbf{I}}1 \longrightarrow St_{\mathbb{Z}_2}0$
$0 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0$
$\imath \mapsto 1$	$-\imath \mapsto 1$

2. En el grupo $\mathbb{Z}_3$, donde el objeto es el 0, y los morfismos son $\{0, 1, -1\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, tenemos $St_{\mathbb{Z}_3}0 = \{0, 1, -1\}$. En este caso no podemos dar un morfismo recubridor de $\mathbf{I}$ en $\mathbb{Z}_3$ porque las estrellas en $\mathbf{I}$ tienen solamente dos elementos.

Proposición 2.1.2 *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora. Sea A un subconjunto de X y sea $\tilde{A} = p^{-1}(A)$. Entonces el morfismo inducido $\pi p : \pi\tilde{X}\tilde{A} \longrightarrow \pi XA$ es un morfismo recubridor.*

Demostración. Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ aplicación recubridora y $\tilde{A} = p^{-1}(A)$, $A \subseteq X$.
(1) Para cada camino a en X con punto inicial en x, denotaremos $\tilde{a}$ al único camino recubridor de $\tilde{X}$ con el punto inicial $\tilde{x}$. Si el punto final de a está en A entonces el punto final de $\tilde{a}$ está en $\tilde{A}$. Por la prop 2.1.1 sabemos que la clase de equivalencia de $\tilde{a}$ solo depende de la clase de equivalencia de a.
(2) La aplicación $cls\, a \to cls\, \tilde{a}$ es la inversa de la restricción de p a $St_{\tilde{X}}\tilde{x}$.
Por (1) tenemos que la restricción es inyectiva y por (2) tenemos que es sobreyectiva. Luego es morfismo recubridor. □

Corolario 2.1.2.1 *La circunferencia S^1 tiene el grupo fundamental isomorfo a los enteros $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ una aplicación recubridora. Entonces $\pi p : \pi\mathbb{R}\mathbb{Z} \to \pi(S^1, 1)$ es un morfismo recubridor. Sabemos además que $\pi\mathbb{R}\mathbb{Z}$ es 1-conexo. Sea $n \in \mathbb{Z}$, existe un único τ_n de $\pi\mathbb{R}(0, n)$. Sea $\tau_1 \in \pi\mathbb{R}(0, 1)$ siendo $t \mapsto t$ el camino que lo representa, entonces $\tau_{n+1} - \tau_n$, que está representado por el camino $t \mapsto t + n$, es el único elemento de $\pi\mathbb{R}(n, n+1)$. Por definición de p se tiene $\pi p(\tau_{n+1} - \tau_n) = \pi p(\tau_1)$.

Si $\tau = \pi p(\tau_1)$ entonces $\pi p(\tau_n) = \pi p(\tau_n - \tau_{n-1}) + \pi p(\tau_{n-1} - \tau_{n-2}) + \cdots + \pi p(\tau_2 - \tau_1) + \pi p(\tau_1) = \pi p(\tau_1) + \cdots + \pi p(\tau_1) = n\tau$. Ya que πp es un morfismo recubridor, tenemos $\pi p(\tau_n) \neq 0$. Por tanto $n\tau \neq 0$. Si $a \in \pi(S^1, 1)$ entonces $a = \pi p(\tau_n)$ para algún n. Luego $a = n\tau$.
Esto muestra que $\pi(S^1, 1)$ es un grupo cíclico infinito con τ como generador. $\square$

Corolario 2.1.2.2 *Para $n > 1$, el espacio proyectivo real n-dimensional $P^n(\mathbb{R})$ tiene el grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.*

Proposición 2.1.3 *Sea $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ un morfismo recubridor tal que G es conexo. Si a, b son elementos de G entonces $p^{-1}(a), p^{-1}(b)$ tienen el mismo cardinal.*

Proposición 2.1.4 *Sean $r : K \longrightarrow H$, $q : H \longrightarrow G$ morfismos de grupoides.*
Si q y r son morfismos recubridores entonces también lo es qr.
Si q y qr son morfismos recubridores entonces también lo es r.
Si r y qr son morfismos recubridores y $Ob(r)$ es sobreyectiva entonces q es un morfismos recubridor.

2.2. Elevación de morfismos

Sea $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ un morfismo recubridor de grupoides. Debido a la analogía con el grupoide fundamental de espacios recubridores, decimos que un elemento $\tilde{a}$ de $\tilde{G}$ *recubre*, o es *una elevación*, de $p\tilde{a}$; de manera similar, decimos que una suma $\tilde{a}_n + \cdots + \tilde{a}_1$ en $\tilde{G}$ recubre, o es una elevación, de $p\tilde{a}_n + \cdots + p\tilde{a}_1$. En este sentido, se puede probar por inducción:

Proposición 2.2.1 *Sea $\tilde{x}$ un objeto de $\tilde{G}$ y sea $p\tilde{x} = x$. Si $a = a_n + \cdots + a_1$ pertenece a $St\,x$ entonces existe elementos $\tilde{a}_n, \ldots, \tilde{a}_1$ de $\tilde{G}$ únicos tal que*

1. *$p\tilde{a}_i = a_i$, i= 1,...,n.*
2. *$\tilde{a} = \tilde{a}_n + \cdots + \tilde{a}_1$ está definido y pertenece a $St\tilde{x}$.*

Definición 2.5. *Los subgrupos C de $G(x)$, D de $G(y)$ se llaman conjugados (en G) si existe un elemento c de $G(x, y)$ tal que $c + C - c = D$ o equivalentemente $-c + D + c = C$.*

El grupo característico de $G, \tilde{x}$, es decir, el subgrupo $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$ de $\tilde{G}(p\tilde{x})$, jugará un papel importante en las siguientes secciones. La relación de estos grupos para varios $\tilde{x}$ se describe en el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2 *Sea C el grupo característico de $\tilde{G}, \tilde{x}$*

a) *Si D es el grupo característico de $\tilde{G}, \tilde{y}$, y $\tilde{x}, \tilde{y}$ caen en la misma componente de $\tilde{G}$, entonces C y D son conjugados.*
b) *Si D es un subgrupo de $G(y)$ y D es conjugado de C, entonces D es el grupo característico de $\tilde{G}, \tilde{y}$ para algún $\tilde{y}$.*

Definición 2.6. *Un grupoide punteado G, x consiste en un grupoide G y un objeto x de G. Un morfismo punteado $G, x \longrightarrow H, y$ de grupoides punteados consiste en G, x ; H, y y un morfismo $f : G \longrightarrow H$ tal que $fx = y$; tal morfismo punteado se suele denotar simplemente por f. El grupo característico de un morfismo punteado $f : G, x \to H, y$ es el grupo característico de f en x.*

Definición 2.7. *Si $p : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow$ G,x es un morfismo punteado entonces decimos que p es un morfismo recubridor si el morfismo $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ es un morfismo recubridor. Similarmente, dado un diagrama conmutativo de morfismos punteados entonces diremos que $\tilde{f}$ es un elevación de f.*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "p"] \\ F, z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & G, x \end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.3 *Sea $p : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow G, x$ un morfismo recubridor, y $f : F, z \longrightarrow G, x$ un morfismo tal que F es conexo. Entonces f se eleva a un morfismo $\tilde{f} : F, z \longrightarrow \tilde{G}, \tilde{x}$ si, y solo si, el grupo característico de f está contenido en el de p. Si esta elevación existe es única.*

Demostración. Suponemos primero que $\tilde{f}$ es elevación de f. Esta relación implica la conmutatividad del diagrama, $f = p\tilde{f}$. Luego $f(F(z)) = p\tilde{f}(F(z)) = p(\tilde{f}(F(z))) \subseteq p(\tilde{G}(\tilde{x}))$.

Supongamos ahora que $f(F(z)) \subseteq p(\tilde{G}(\tilde{x}))$. Denotemos C a $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$. Como p es un morfismo recubridor, $St_{\tilde{G}}\tilde{x} \longrightarrow St_G p\tilde{x} = St_G x$ es biyectiva. En particular para $\tilde{G}(\tilde{x}) \subseteq St_{\tilde{G}}\tilde{x}$ y C $\subseteq St_G x$ se tiene un isomorfismo $\tilde{G}(\tilde{x}) \longrightarrow C$.
Si $a \in F(z)$ entonces $fa \in C$. Por la biyección entre $\tilde{G}(\tilde{x})$ y C, se tiene que existe $\tilde{b} \in \tilde{G}(\tilde{x})$ tal que $\tilde{b} = p^{-1}(fa)$. Luego $\tilde{f} := p^{-1}f$ para lazos en F.
Para cada objeto v en F, tenemos $\tau_v \in F(z, v)$. Si $\tau_z \in F(z, z)$ entonces $\tau_z = 0$. Si $a \in F(u, v)$ entonces a se puede escribir unívocamene como $a = \tau_v + a' - \tau_u$ con $a' \in F(z)$. Ahora cada elemento $f\tau_v$ está recubierto por un único elemento $\tilde{f}\tau_v$ de $St_{\tilde{x}}$. Definimos así $\tilde{f}a = \tilde{f}\tau_v + \tilde{f}a' - \tilde{f}\tau_u$.
De las relaciones $a = \tau_v + a' - \tau_u$, $b = \tau_w + b' - \tau_v$ para $a \in F(u, v)$, $b \in F(v, w)$, se tiene $a' = -\tau_v + a + \tau_u$, $b' = -\tau_w + b + \tau_v$. Luego de $b + a = (\tau_w + b' - \tau_v) + (\tau_v + a' - \tau_u) = \tau_w + b' + a' + \tau_u$, se tiene $b' + a' = -\tau_w + b + a + \tau_u$. Por otro lado sea $b + a \in F(u, w)$, $(b + a) = \tau_w + (b + a)' - \tau_u$, entonces $(b + a)' = -\tau_w + (b + a) + \tau_u$. Por consiguiente $(b + a)' = b' + a'$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{f}b + \tilde{f}a &= (\tilde{f}\tau_w + \tilde{f}b' - \tilde{f}\tau_v) + (\tilde{f}\tau_v + \tilde{f}a' - \tilde{f}\tau_u) \\ &= \tilde{f}\tau_w + \tilde{f}b' + \tilde{f}a' - \tilde{f}\tau_u = \tilde{f}\tau_w + \tilde{f}(b' + a') - \tilde{f}\tau_u \\ &= \tilde{f}\tau_w + \tilde{f}(b + a)' - \tilde{f}\tau_u = \tilde{f}(b + a) \end{aligned}$$

Si existe otro morfismo $\tilde{g}$ que eleva a f entonces $f = p\tilde{g}$. Luego $\tilde{g}$ y $\tilde{f}$ coninciden en $F(z)$ y en los elementos τ_v. Por tanto se prueba la unicidad. □

Corolario 2.2.3.1 *Si* $p : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow G, x$ *y* $q : \tilde{H}, \tilde{y} \longrightarrow G, x$ *son morfismos recubridores conexos con grupos característicos* C*,* D *respectivamente. Si* $C \subseteq D$ *entonces existe un único morfismo recubridor* $r : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow \tilde{H}, \tilde{y}$ *tal que* $p = qr$*. Si* $C = D$ *entonces* r *es un isomorfismo.*

Demostración. Por 2.2.3, p se eleva a un morfismo $r : \tilde{G}, \tilde{x} \to \tilde{H}, \tilde{y}$ de forma única tal que $qr = p$ y por 2.1.4 se obtiene que r es un morfismo recubridor.
Si $C = D$, la unicidad de la elevación nos dice que r es un isomorfismo. □

Corolario 2.2.3.2 *Un grupoide recubridor 1-conexo de* G *recubre cada grupoide recubridor de* G*.*

Demostración. Si $p : \tilde{G}, \tilde{x} \to G, x$ es un morfismo recubridor y $\tilde{G}$ es 1-conexo entonces el grupo característico de p es el trivial y por tanto esá contenido en cualquier subgrupo de $G(x)$. □

Este último corolario introduce lo que llamaremos *grupoide recubridor universal* de G. La existencia de estos grupoides se tratará en la siguiente sección.

2.3. Existencia de grupoides recubridores

Definición 2.8. *La acción de un grupoide* G *sobre un conjunto* S*, consiste en una aplicación* $w : S \longrightarrow Ob(G)$ *y una aplicación parcial* $G \times S \longrightarrow S$*,* $(g, s) \mapsto g \cdot s$ *tales que si* $g \in G(x, y)$ *y* $s \in w^{-1}(x)$ *entonces* $g \cdot s \in w^{-1}(y)$*.*
Se debe verificar:

1) Si $x \in Ob(G)$*,* $s \in w^{-1}(x)$ *entonces* $0_x \cdot s = s$*.*
2) Si $g \in G(x, y)$*,* $h \in G(y, z)$*,* $s \in w^{-1}(x)$ *entonces* $(h + g) \cdot s = h \cdot (g \cdot s)$*.*

Se dice que S *es un* G *conjunto o que* G *actúa sobre* S *vía* w*.*

EJEMPLO

Sea $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ un morfismo recubridor de grupoides tomamos $S = Ob(\tilde{G})$ y $w = Ob(p) : S \longrightarrow Ob(G)$. Dado $s \in S$ y $g \in St_G ps$ existe un único $\tilde{g} \in \tilde{G}$ tal que $\tilde{g}$ tiene origen en s. Se define $g \cdot s$ como el extremo de la elevación $\tilde{g}$.

a) Si tomamos $0_{w(s)}$ entonces 0_s es la única elevación de $0_{w(s)}$ con origen en s. Luego $0_{w(s)} s = s$.
b) Si $g \in G(x, y)$, $h \in G(y, z)$, $s \in w^{-1}(x)$.
Sea $\tilde{g}$ la elevación de g con origen s y sea $\tilde{h}$ la elevación de h con origen en el extremo de $\tilde{g}$. Entonces $\tilde{h} + \tilde{g}$ es una elevación de $h + g$ con origen s, única por la biyección $St_{\tilde{G}} s \longrightarrow St_G x$. Entonces $(h + g) \cdot s = h \cdot (g \cdot s)$.

Si tenemos una acción de G sobre S entonces para todo $g \in G(x, y)$ existe una biyección $g_\sharp : w^{-1}(x) \longrightarrow w^{-1}(y)$, $s \mapsto g \cdot s$.

Definición 2.9. *Una acción se dice transitiva si para cualquier combinación $x, y \in Ob(G)$, $s \in w^{-1}(x)$, $t \in w^{-1}(y)$ existe $g \in G(x,y)$ tal que $g \cdot s = t$. Cuando ocurre esto, los conjuntos $w^{-1}(x)$ tienen todos el mismo cardinal.*

Definición 2.10. *Dado $s \in w^{-1}(x)$, el grupo de estabilidad de s es el subgrupo G_s de G formado por los elementos $g \in G$ tales que $g \cdot s = s$. Se dice que g estabiliza o fija s o también que s es un punto fijo de g.*

Definición 2.11. *Dada una acción del grupoide G sobre el conjunto S, se define el grupoide producto semidirecto $S \rtimes G$ como el grupoide con objetos el conjunto $Ob(S \rtimes G) = S$ y los elementos de $(S \rtimes G)(s,t)$ el conjunto $\{(s,g) \in S \rtimes G \ / \ g \in G(w(s), w(t)) \ y \ g \cdot s = t\}$.*
La operación en este grupoide $S \rtimes G$ se define como $(t,h) + (s,g) = (s, h+g)$.

Con la siguiente proposición veremos que la operación del grupoide está bien definida.

Proposición 2.3.1 *a) La construcción anterior define $S \rtimes G$ como un grupoide.*
b) La proyección $p : S \rtimes G \longrightarrow G$, dada sobre los objetos por w ($w = Ob(p)$) y sobre los elementos (morfismos) por $p(s,g) = g$, es un morfismo recubridor de grupoides.
c) El grupoide $S \rtimes G$ es conexo si, y solo si, la acción es transitiva.
d) Si $s \in S$ entonces el grupo de objecto $S \rtimes G(s)$ se aplica mediante p isomorficamente en G_s, grupo de estabilidad de s.
e) La acción de G sobre S determinada por el morfismo recubridor p es la acción original.

Demostración. a) El cero en s es $(s, 0_{ps})$ y el inverso de (s,g) es $(g \cdot s, -g)$. La asociatividad se comprueba fácilmente.

$$\begin{aligned}(r,f) + ((t,h) + (s,g)) &= (r,f) + (s, h+g) = (s, f+h+g) \\ &= (t, f+h) + (s,g) = ((r,f) + (t,h)) + (s,g).\end{aligned}$$

b) Por cómo está definida, p es un morfismo de grupoides. Además si $(s,g), (s,g') \in St_{S \rtimes G} s$ tales que $p(s,g) = p(s,g')$ entonces $g = g'$. Luego $(s,g) = (s,g')$. Sea $g \in St_G w(s)$, existe $y \in Ob(G)$ tal que $g \in G(w(s), y)$. Entonces $g \cdot s \in w^{-1}(y)$. Por tanto p es recubridor.

c) Si la acción es transitiva, para todo $s, t \in S = Ob(S \rtimes G)$, consideramos $w(s) = x, w(t) = y$, entonces existe $g : x \to y$ tal que $g \cdot s = t$. Por tanto $(s,g) \in S \rtimes G(s,t)$ para todo s,t. Recíprocamente si el grupoide es conexo, dados $x, y \in Ob(G)$, $s \in w^{-1}(x), t \in w^{-1}(y)$ existe $(s,g) \in S \rtimes G(s,t)$. Luego $g \cdot s = t$.

d) La restricción $p : S \rtimes G(x) \longrightarrow G_s \subseteq G$ es un isomorfismo pues $S \rtimes G(s)$ consiste en aquellos elementos (s,g) tal que $g \cdot s = s$. Luego $p(S \rtimes G(s)) = \{g \ / \ g \cdot s = s\} = G_s$.

e) La acción determinada por p viene dada por el conjunto $Ob(S \rtimes G) = S$ y la aplicación $Ob(p) = w$. Además, dada $s \in S$, $g \in St_G ps$ se definió $g \cdot s$ como el extremo de la elevación de $\tilde{g}$ con origen s; es decir, el extremo $g \cdot s$ de (s, g), pero esto es la acción original. $\square$

Proposición 2.3.2 *Sea $x \in Ob(G)$, G grupoide conexo, y sea C un subgrupo del grupo $G(x)$. Sea S el conjunto de clases por la izquierda $a + C = \{a + c / c \in C\}$, $a \in St_G x$; esto es $S = \{a + C / a \in St_G x\}$. Sea $w : S \longrightarrow Ob(G)$ que envía $a + C$ al punto final de a. Entonces G actúa transitivamente sobre S mediante $g \cdot (a + C) = g + a + C$. El morfismo recubridor conexo correspondiente $p : S \rtimes G, \tilde{x} \longrightarrow G, x$ donde $\tilde{x} = C = 0_x + C$ tiene grupo característico C. Además $p^{-1}(x) = G(x)/C$, es decir, son las clases por la izquierda de C en $G(x)$.*

Demostración. Supongamos que $a \in G(x, y)$, $g \in G(y, z)$, $h \in G(z, z')$. Entonces $w(a + C) = y$, $w(g + a + C) = z$, $w(h + g + a + C) = z'$. Se puede comprobar fácilmente que verifica las condiciones de la definición 2.8. La acción es transitiva pues sean $y, z \in Ob(G)$, $a + C \in w^{-1}(y), b + C \in w^{-1}(z)$, si tomamos $g = b - a$ entonces $g \cdot (a + C) = g + a + C = b - a + a + C = b + C$.

El grupo característico requerido es $p(S \rtimes G(\tilde{x}))$. Como $S \rtimes G(\tilde{x}) = \{(0_x + C, g) / g \cdot (0_x + C) = 0_x + C\} = \{(0_x + C, g) / g \in C\}$ se tiene $p(S \rtimes G(\tilde{x})) = \{g \in G / g \in C\}$. Por lo tanto, el grupo característico es C. La afirmación final es obvia. $\square$

La relevancia de esta proposición radica en que cualquier subgrupo de $G(x)$ es el grupo característico de algún morfismo recubridor $p : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow G, x$.

Corolario 2.3.2.1 *Todo grupoide conexo tiene un grupoide recubridor universal.*

Demostración. Es un caso particular de la demostración anterior tomando $C = \{0_x\}$. Entonces S $= \{a + \{0_x\} \ / \ a \in St_G x\} = St_G x$. Luego tenemos una acción de G sobre $St_G x$. El morfismo recubridor es $p : St_G x S \rtimes G, \tilde{x} \longrightarrow G, x$.
$(St_G x \rtimes G)(a, b) = \{(a, g) \in St_G x \times G \ / \ g + a = b\}$=$\{(a, b - a)\}$ es unitario. Por tanto $St_G x \rtimes$G es 1-conexo. $\square$

El grupoide recubridor universal de G construido en este corolario es denominado *grupoide recubridor universal de G basado en x*. Advertimos que si cambiamos el objeto x, cambia la estrella, $St_G x$. Luego los recubridores no son únicos, son isomorfos.

Corolario 2.3.2.2 *Un morfismo recubridor conexo $p : \tilde{G}, \tilde{x} \longrightarrow G{,}x$ es un recubridor de n-hojas si, y solo si, su grupo característico tiene índice n en $G(x)$.*

Recordemos que el índice $[G : L]$ de un subgrupo L de un grupo G es el número de clases laterales de L en G.

Demostración. Sea $C = p(\tilde{G}(\tilde{x}))$. Si tomamos el recubridor $S \rtimes G$ con $S = \{a + C \ / \ a \in St_G x\}$ entonces el colocario 2.3.2.1 nos dice que $\tilde{G}$ es isomorfo a $S \rtimes G$. Entonces $p(\tilde{G}(\tilde{x})) = C$ tiene índice n en $G(x)$ si, y solo si, $Card(G(x)/C) = n$, y esto último se da si, y solo si, p es un recubridor de n hojas. □

2.4. Topología elevada

Dado un espacio topológico X y un grupoide recubridor de πX, definiremos un espacio topológico recubridor de X (con una topología "elevada" a partir de πX) cuyo grupoide fundamental sea isomorfo al grupoide recubridor original. Necesitaremos previamente introducir un concepto nuevo.

Definición 2.12. *Sea $f : H \longrightarrow G$ es un morfismo de grupoides, $x \in Ob(G)$. Definimos el grupoide*

$$\mathcal{X}_f(x) = \begin{cases} G(x) & , f^{-1}(x) = \emptyset \\ \displaystyle\bigcap_{y \in f^{-1}(x)} f(H(y)) & , f^{-1}(x) \neq \emptyset \end{cases}$$

y $\mathcal{X}_f(x, x') = \emptyset$ si $x \neq x'$. Por tanto $\mathcal{X}_f$ es un subgrupoide extenso, totalmente disconexo de G.

A continuación extenderemos este concepto a espacios topológicos.

Definición 2.13. *Si $f : Y \longrightarrow X$ es una aplicación continua entonces el grupo característico de f en y es simplemente el grupo característico de $\pi f : \pi Y \longrightarrow \pi X$ en y. Este grupo lo llamaremos el grupo característico de $f : Y, y \longrightarrow X, x$, o por abuso del lenguaje, el grupo característico de Y, y. Ahora denotaremos $\mathcal{X}_f$ a $\mathcal{X}_{\pi f}$, subgrupoide de πX.*

Definición 2.14. *Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{X}$ un subgrupoide extenso de πX. Un subconjunto U de X se dice débilmente $\mathcal{X}$-conexo si para todo $x \in U$ el grupo característico en x de la inclusión $i : U \longrightarrow X$ está contenido en $\mathcal{X}(x)$, esto es, $\pi i(\pi U(x)) \subseteq \mathcal{X}(x)$ para todo $x \in U$.*

Como consecuencia de la definición se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.4.1 *Cualquier subconjunto de un débilmente $\mathcal{X}$-conexo es débilmente $\mathcal{X}$-conexo.*

Definición 2.15. *Se dice que un espacio X es semilocalmente $\mathcal{X}$-conexo si cada $x \in X$ tiene un entorno débilmente $\mathcal{X}$-conexo.*

Definición 2.16. *Un espacio X es semilocalmente simplemente conexo si todo punto x de X admite un entorno U tal que el homomorfismo inducido por la inclusión $\pi i : \pi U(x) \longrightarrow \pi X(x)$ es trivial.*

Proposición 2.4.2 *Si $\mathcal{X}$ simplemente conexo y X es semilocalmente $\mathcal{X}$-conexo entonces X es semilocalmente simplemente conexo.*

Demostración. Sea U entorno débilmente $\mathcal{X}$-conexo de y en X entonces $\pi i(\pi U(y)) \subseteq \mathcal{X}(y)$. Como $\mathcal{X}$ es simplemente conexo, se tiene $\mathcal{X}(y) = \{0\}$. Por tanto $\pi i(\pi U(y)) \subseteq \mathcal{X}(y) = \{0\}$. □

Proposición 2.4.3 *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora. Entonces X es semilocalmente $\mathcal{X}_p$-conexo.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U entorno canónico de x, veamos que es débilmente $\mathcal{X}_p$-conexo.

Sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, la inclusión $i : U, x \to X, x$ se eleva a una aplicación continua $U, x \to \tilde{X}, \tilde{x}$. Entonces el morfismo de grupoides πi también se eleva y el grupo característico de U, x está contenido en $\mathcal{X}_p(x)$.

$$\pi i(\pi U(x)) = \pi p \pi \tilde{i}(\pi U(x)) \subseteq \pi p(\pi \tilde{X}(\tilde{x})) \quad , \forall \tilde{x} \in p^{-1}(x)$$

o equivalentemente

$$\pi i(\pi U(x)) \subseteq \bigcap_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \pi_p(\pi \tilde{X}(\tilde{x})) = \mathcal{X}_p(x) \quad , \forall x \in U$$

Hemos probado que cualquier subconjunto canónico de x es débilmente $\mathcal{X}_p$-conexo. Es decir, X es semilocalmente $\mathcal{X}_p$-conexo. □

Corolario 2.4.3.1 *Si X es conexo por caminos y tiene un espacio recubridor 1-conexo entonces X es semilocalmente simplemente conexo.*

Demostración. Sea $p : \tilde{X} \to X$ aplicación recubridora, $\tilde{X}$ un espacio recubridor 1-conexo de X. Por 2.4.2, basta ver que $\mathcal{X}_p$ es simplemente conexo y X semilocalmente $\mathcal{X}_p$-conexo. Lo segundo es consecuencia de la proposición anterior. Sea $x \in X$.

$$\mathcal{X}_p(x) = \begin{cases} \pi X(x) & p^{-1}(x) = \emptyset \\ \displaystyle\bigcap_{\tilde{x} \in p^{-1}(x)} \pi p(\pi \tilde{X}(\tilde{x})) = \bigcap \pi p(\{0\}) = \{0\} & p^{-1}(x) \neq \emptyset \end{cases}$$

La primera situación nunca se va a dar, por lo que $\mathcal{X}_p(x) = \{0\}$. □

Sea X un espacio topológico y $q : \tilde{G} \longrightarrow \pi X$ un morfismo recubridor de grupoides. Supongamos que X es semilocalmente $\mathcal{X}_q$-conexo. Se define $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$ y $p = Ob(q) : \tilde{X} \longrightarrow X$. Usaremos q para elevar la topología de X a $\tilde{X}$.

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los subconjuntos de X que son abiertos conexos por caminos y débilmente $\mathcal{X}_q$-conexos. Sea $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$. Si $U \in \mathcal{U}$ tenemos

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "q"] \\ \pi U, x \arrow[ur, "\tilde{i}"] \arrow[r, "\pi i = i"'] & \pi X, x \end{tikzcd}$$

Por 2.2.3 sabemos que i se eleva a un morfismo $\tilde{i}$ si, y solo si, $i(\pi U(x)) \subseteq q(\tilde{G}(\tilde{x}))$. Sea $U \in \mathcal{U}$, U es débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo. Entonces

$$i(\pi U(x)) \subseteq \bigcap_{y \in q^{-1}(x)} q(\tilde{G}(y)) = \mathcal{X}_q(x) \subseteq q(\tilde{G}(\tilde{x})).$$

Tendremos que $\tilde{i}(U) \subseteq Ob(\tilde{G}) = \tilde{X}$. Denotamos $\tilde{U} := \tilde{i}(U)$ y lo denominamos *elevación del entorno* U. Se define el conjunto de todas las elevaciones de elementos de $\mathcal{U}$ como $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U} \ / \ U \in \mathcal{U}\}$. Además será una base de abiertos de $\tilde{X}$. Para probar esta última afirmación necesitaremos algunos resultados previos.

Proposición 2.4.4 *Si X es semilocalmente $\mathcal{X}_q$-conexo, el conjunto $\tilde{\mathcal{U}}$ recubre $\tilde{X}$.*

Demostración. Dado $\tilde{x} \in \tilde{X} = Ob(\tilde{G})$, entonces $x = q(\tilde{x}) \in \pi X$. Como X es semilocalmente $\mathcal{X}_q$-conexo existe U entorno de x débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo. Asimismo por ser X localmente conexo por caminos, existe A abierto, conexo por caminos tal que $x \in A \subseteq U$. Además A es débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo por ser subconjunto de U débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo, $A \in \mathcal{U}$. Entonces $\pi i(\pi A(x)) \subseteq q(\tilde{G}(\tilde{x}))$ y por 2.2.3 se tiene que $\tilde{i}$ elevación de i. De aquí se sigue que $\tilde{i}(x) = \tilde{x} \in \tilde{i}(A)$. Por tanto $\tilde{\mathcal{U}}$ es recubrimiento de $\tilde{X}$. $\square$

Sea V conexo por caminos y sea $g : V \longrightarrow X$ una aplicación continua tal que $g(V) \subseteq U$ para algún U de $\mathcal{U}$. Sea $g' : \pi V \longrightarrow \tilde{G}$ una elevación de $\pi g : \pi V \longrightarrow \pi X$ y $\tilde{U}$ una elevación de U, $\tilde{U} = \tilde{i}(U)$.

Lema 2.4.5 *Sea $\tilde{g} = Ob(g')$. Si $\tilde{g}(V)$ tiene algún punto en común con $\tilde{U}$ entonces $\tilde{g}(V) \subseteq \tilde{U}$.*

Demostración. Sea $\tilde{x} = \tilde{g}v$ un elemento de $\tilde{g}(V) \cap \tilde{U}$ y sea $x = p\tilde{x} = gv$.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "q"] \\ \pi V, v \arrow[urr, "g'"] \arrow[r, "g''"'] & \pi U, x \arrow[ur, "\tilde{i}"'] \arrow[r, "i"'] & \pi X, x \end{tikzcd}$$

g'' es el morfismo de grupoides inducido por g e $\tilde{i}$ es la elevación de $i : \pi U \to \pi X$. Además g' y $\tilde{i}g''$ son elevaciones de $\pi g : \pi V, v \longrightarrow \pi X, x$. Como V conexo por caminos entonces πV es un grupoide conexo. Por 2.2.3 la elvación a πg debe ser única. Es decir $g' = \tilde{i}g''$. Luego $g'(V) = \tilde{i}g''(V) \subseteq \tilde{i}(U) = \tilde{U}$. Se sigue que $\tilde{g}(V) \subseteq \tilde{U}$. $\square$

Corolario 2.4.5.1 *Si dos elevaciones $\tilde{U}, \tilde{U'}$ de un elemento de $U \in \mathcal{U}$ coinciden en algún punto entonces son iguales.*

Demostración. Sea $\tilde{U} = \tilde{i}(U)$ y $\tilde{U'} = \tilde{i'}(U)$. Suponemos que existe $\tilde{x} = \tilde{i}(x) = \tilde{i'}(x)$ entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "q"] \\
\pi U, x \arrow[urr, "\tilde{i'}"] \arrow[r, "\pi id = id"'] & \pi U, x \arrow[ur, "\tilde{i}"'] \arrow[r, "i"'] & \pi X, x
\end{tikzcd}$$

Se tiene $\tilde{i'} = \tilde{i}id = \tilde{i}$. Por tanto $\tilde{U} = \tilde{U'}$. □

Proposición 2.4.6 $\tilde{\mathcal{U}}$ *es una base para los abiertos de una topología en* $\tilde{X}$.

Demostración. Sea $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{i}(U) \ / \ U \in \mathcal{U}\}$ y $\mathcal{U}$ el conjunto de subconjuntos U de X abiertos, conexos por caminos y débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo. Sean $\tilde{U}, \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}$ y sea $\tilde{w} \in \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Si existe $\tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$ tal que $\tilde{w} \in \tilde{W} \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V}$ entonces $\tilde{\mathcal{U}}$ es base. (Véase proposición 1.2.2 en [6]).

Sea $p(\tilde{w}) = w$, $w \in U \cap V$ donde $\tilde{i}(U) = \tilde{U}, \tilde{i}(V) = \tilde{V}$. Como X es localmente conexo por caminos, existe un entorno abierto, conexo por caminos W tal que $w \in W \subseteq U \cap V$. Como W está contenido en U y V que son débilmente $\mathcal{X}_q$-conexos entonces W es débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo. Se tiene que W pertenence a $\mathcal{U}$, luego $\tilde{i}(W) = \tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}$. De aquí se sigue

$$i(W(w)) \subseteq \mathcal{X}_q(w) = \bigcap_{y \in q^{-1}(w)} q(\tilde{G}(y)) \subseteq q(\tilde{G}(\tilde{w}))$$

Por 2.2.3 existe $\tilde{i}$ elevación de i. Como $\tilde{g}(w) = \tilde{w}$ y $\tilde{U}$ tiene al punto $\tilde{w}$. Por lema 2.4.5, sea $g : W \longrightarrow X$ una aplicación continua tal que $g(W) \subseteq U$ para algún U de $\mathcal{U}$. Sea $g' : \pi W \longrightarrow \tilde{G}$ una elevación de $\pi g : \pi V \longrightarrow \pi X$ y $\tilde{U}$ una elevación de U, $\tilde{U} = \tilde{i}(U)$. Sea $\tilde{g} = Ob(g')$, tenemos que $\tilde{g}(w) \subseteq \tilde{U}$, es decir $\tilde{W} \subseteq \tilde{U}$. De forma análoga se tiene $\tilde{W} \subseteq \tilde{V}$. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{U}}$ es base. □

Esta topología en $\tilde{X}$ se denominará *topología elevada de* X *por* q o simplemente *topología elevada*. Supondremos ahora que $\tilde{X}$ tiene esta topología.

Proposición 2.4.7 *Sea* $q : \tilde{G} \longrightarrow \pi X$ *morfismo recubridor. Sea* $f : Z \longrightarrow X$ *continua. Si* $\pi f : \pi Z \longrightarrow \pi X$ *se eleva a un morfismo de grupoides* $f' : \pi Z \longrightarrow \tilde{G}$ *entonces* $\tilde{f} := Ob(f') : Z \longrightarrow \tilde{X}$ *es continua y es una elevación de* $f : Z \longrightarrow X$. *Todas las elvaciones de* f *surgen de esta forma.*

Demostración. Veamos que $\tilde{f}$ es continua. Sea $z \in Z$. Como base de entornos de $\tilde{f}(z)$ tomamos a todas las elevaciones $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ que contienen al punto $\tilde{f}(z)$. Dado uno de estos abiertos $\tilde{U}, \tilde{f}(z) \in \tilde{U}$, sabemos que es la elevación de un entorno abierto U conexo por caminos y débilmente $\mathcal{X}_q$-conexo. U es un entorno abierto que contiene a $f(z)$. Por la continuidad de f existe V entorno abierto de z en el espacio Z (podemos suponer que V es conexo por caminos) tal que $f(z) \in U$. Si $j : V \to Z$ es la inclusión entonces $f'\pi j$ es elevación de $\pi(fj)$. Además $\tilde{f}(V)$ y $\tilde{U}$ contiene a $f(z)$. Como $\tilde{q}(V)$, $\tilde{U}$ contiene a $f(z)$ por 2.4.5 se tiene que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Por tanto $\tilde{f}$ continua en z. Como $\tilde{z}$ es arbitrario, $\tilde{f}$ es continua. Si πf se eleva a f' entonces $\tilde{f}$ eleva a f.

Si $\tilde{f} : Z \to \tilde{X}$ es cualquier elevación de f, entonces $\pi\tilde{f}$ eleva a πf, y así todas las elevaciones vienen determinadas de esta manera. □

La topología elevada cuenta con una importancia significativa para las aplicaciones recubridoras. Probaremos que la topología de un espacio recubridor $\tilde{X}$ de X, coincide con la topología elevada de X. Para ello haremos uso de los siguientes resultados sobre espacios recubridores, cuyas demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [12].

Proposición 2.4.8 *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora entonces p es abierta.*

Corolario 2.4.8.1 *Toda aplicación recubridora es identificación.*

Proposición 2.4.9 *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora. Sea B el conjunto de $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ tal que $\tilde{U}$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ para algún entorno canónico U de X. Entonces B es una base de abiertos de $\tilde{X}$.*

Proposición 2.4.10 *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ una aplicación recubridora. La topología de $\tilde{X}$ es la topología elevada de X por $\pi p : \pi\tilde{X} \longrightarrow \pi X$.*

Demostración. Sea T la topología de $\tilde{X}$. Sea T' la topología elevada sobre $\tilde{X}$. Sea U un subconjunto canónico de X. Sea $\tilde{U}$ una componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$. Veamos que $\tilde{U}$ es una elevación de U. La inclusión $U \to X$ se eleva a un aplicación $U \to \tilde{X}$ con imagen $\tilde{U}$. Es decir, todo subconjunto canónico se eleva a un $\tilde{U}$ de la base $\tilde{\mathcal{U}}$. Por tanto, como todo $\tilde{U}$ es componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$ para cualquier canónico U de X y por 2.4.9 se tiene $T \subseteq T'$.

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de subconjuntos de X abiertos, conexos por caminos y débilmente $\mathcal{X}_p$-conexos. Por 2.4.3 todo subconjunto canónico de X está en $\mathcal{U}$. Sea $U \in \mathcal{U}$, sea $\tilde{U}$ una elevación de U. Como cada punto de U tiene un entorno canónico contenido en $\mathcal{U}$, se puede probar fácilmente que $\tilde{U}$ es un abierto en $\tilde{X}$ y se aplica homeomorficamente a U. Entonces U es canónico. Como consecuencia, para todo $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ se tiene que $\tilde{U} = \tilde{i}(U) = p^{-1}_{|\tilde{U}}(U)$ con U canónico. Por lo tanto todo abierto $\tilde{U}$ de la base de T' es antiimagen de un entorno canónico, es decir, por 2.4.9, todo abierto $\tilde{U}$ de la base de T' está en la base de T; $T' \subseteq T$. □

Corolario 2.4.10.1 *Si $p : \tilde{X}, \tilde{x} \to X, x$, $q : \tilde{Y}, \tilde{y} \to X, x$ aplicaciones recubridoras conexas con grupo característico C y D respectivamente y $C \subseteq D$ entonces* *existe una única aplicación* $r : \tilde{X}, \tilde{x} \to \tilde{Y}, \tilde{y}$ *tal que* $p = qr$. *Además,* r *es una aplicación recubridora. Si* $C = D$ *entonces* r *es un homeomorfismo.*

Demostración. Utilizando el funtor π obtenemos morfismos recubridores de grupoides $\pi p : \pi\tilde{X}, \tilde{x} \to \pi X, x$; $\pi q : \pi\tilde{Y}, \tilde{y}, \tilde{y} \to \pi X, x$. Por el corolario 2.2.3.1 existe un único $r' : \pi\tilde{X}, \tilde{x} \to \pi\tilde{Y}, \tilde{y}$ morfismo recubridor de grupoides tal que $\pi q r' = \pi p$. Por 2.4.7 tenemos que existe $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ continua y elevación de p. Además como r' es única, $r = Ob(r')$ también lo es.
Como $qr = p$ y q son aplicaciones recubridoras, r es una aplicación recubridora (véase [12], lema 80.2). Si $C = D$, por 2.2.3 r' es isomorfismo de grupoides. Entonces $r = Ob(r')$ es biyectiva. Además, por ser recubridora, r es abierta [2.4.8]. Luego r es homeomorfismo. □

Corolario 2.4.10.2 *Un espacio recubridor 1-conexo de* X *recubre a cualquier otro espacio recubridor.*

Demostración. Sean $p : \tilde{X}, \tilde{x} \to X, x$; $q : \tilde{Y}, \tilde{y} \to X, x$ dos espacios recubridores de X donde $\tilde{X}$ es 1-conexo. Entonces $\pi(\tilde{X}(\tilde{x})) = \{0\}$ para todo $\tilde{x} \in X$. Por tanto $p(\pi\tilde{X}(\tilde{x}))$ está contenido trivialmente en el grupo característico de q. Por el corolario 2.4.10.1, se tiene que existe $r : \tilde{X}, \tilde{x} \to \tilde{Y}, \tilde{y}$ aplicación recubridora. Luego $\tilde{X}$ recubridor de $\tilde{Y}$. □

Debido a este último resultado, un espacio recubridor 1-conexo de X se denomina *espacio recubridor universal de* X. Como consecuencia de 2.4.10.1, dos espacios recubridores universales cualesquiera de un espacio conexo X serán homeomorfos.

Ahora mostramos que la topología elevada da lugar a un espacio recubridor. Sea $q : \tilde{G} \to \pi X$ un morfismo recubridor, sea $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$, $p = Ob(q)$. Supongamos también que X es semilocalmente $\mathcal{X}_q$-conexo y que $\mathcal{U}$ es el conjunto de subconjuntos abiertos, conexos por caminos y débilmente $\mathcal{X}_q$-conexos de X.

Proposición 2.4.11 *La topología elevada es la única topología en* $\tilde{X}$ *tal que*

a) $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ *es una aplicación recubridora.*
b) Existe un isomorfismo $r : \tilde{G} \longrightarrow \pi\tilde{X}$ *que es la identidad sobre los objetos y tal que* $\pi p r = q$.

Demostración. Primero probaremos que si $\tilde{X}$ tiene la topología elevada entonces $p : \tilde{X} \to X$ es una aplicación recubridora. Sea $\tilde{\mathcal{U}}$ el conjunto de elevaciones de elementos de $\mathcal{U}$ de modo que $\tilde{\mathcal{U}}$ es una base de la topología elevada de X. Si $U \in \mathcal{U}$ entonces $p^{-1}(U)$ es la unión de elementos de $\tilde{\mathcal{U}}$, luego p es continua. Ahora sea $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ entonces $p(\tilde{U}) \in \mathcal{U}$, es decir, p es abierta. Seguidamente dado $U \in \mathcal{U}$ y dada $\tilde{U}$ elevación de U, se tiene que p restringida a $\tilde{U}$ es biyectiva. Como además es continua y abierta, se concluye que es homeomorfismo. Por último para probar la continuidad de p, comprobaremos que $\tilde{U}$ es una componente conexa por caminos de $p^{-1}(U)$. Sea $\tilde{x} \in \tilde{U}$ y sea $\tilde{x}' \in p^{-1}(U)$ tal que $\tilde{x}'$ está en la misma componente conexa por caminos de $\tilde{x}$. Entonces existe un camino $\tilde{a} : \mathbb{I} \to p^{-1}(U)$ tal que $\tilde{a}(0) = \tilde{x}, \tilde{a}(1) = \tilde{x}'$. Luego $p(\tilde{x}) = x$ y $p(\tilde{x}') = x'$ son puntos de U y $a = p\tilde{a}$ es un camino en U desde x hasta x'. En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "q"] \\
\pi\mathbb{I}, 0 \arrow[r, "\pi a"'] & \pi U, x \arrow[ur, "\tilde{\imath}"] \arrow[r, "i"'] & \pi X
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{U} = \tilde{\imath}(U)$, $\tilde{\imath}\pi a$ es una elevación de $i\pi a$. Asimismo si $\tilde{g} = Ob(\tilde{\imath}\pi a)$ se tiene que $\tilde{g}(\mathbb{I})$ y $\tilde{U}$ tienen en común al punto $\tilde{x}$, luego por 2.4.5, $\tilde{g}(\mathbb{I}) \subseteq \tilde{U}$ y $\tilde{x}' \in \tilde{U}$.

Por otra parte definamos el morfismo $r : \tilde{G} \to \pi\tilde{X}$. Sobre objetos se define como la identidad; sobre los elementos, sea $\alpha \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y})$ veamos cómo definir $r(\alpha)$. Sea $x = q(\tilde{x}), y = q(\tilde{y})$, entonces $q(\alpha) \in \pi X(x, y)$. Sea a un representante de la clase $q(\alpha)$, $a : \mathbb{I} \to X$ entonces se induce el morfismo de grupoides $\pi a : \pi\mathbb{I}, 0 \to \pi X, x$ tal que $\pi a(\imath) = q(\alpha)$, donde $\imath$ es el único elemento de $\pi\mathbb{I}(0, 1)$. Como $\mathbb{I}$ es 1-conexo, por 2.2.3 se eleva a un único morfismo a' en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[d, "q"] \\
\pi\mathbb{I}, 0 \arrow[ur, "a'"] \arrow[r, "\pi a"] & \pi X, x
\end{tikzcd}$$

Entonces, como $a'(\imath)$ es una elevación de $\pi a(\imath) = q(\alpha)$ se concluye, por unicidad, que $a'(\imath) = \alpha$. Ahora aplicando 2.4.7 al morfismo πa y su elevación $a' : \pi\mathbb{I} \to \tilde{G}$, obtenemos una aplicación continua $\tilde{a} = Ob(a') : \mathbb{I} \to \tilde{X}$ que es elevación de a y nos permite definir

$$r(\alpha) = cls\,\tilde{a}.$$

Claramente $r(\alpha) = cls\,\tilde{a} \in \pi\tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y})$. Además por la proposición 2.1.1, $r(\alpha)$ no depende del representante a elegido para la clase $q(\alpha)$, por lo tanto r está bien definido. Por definición de r se tiene $(\pi p)r = q$.

Sea $\tilde{x} \in Ob(\tilde{G})$, sea $id_{\tilde{x}}, 0_{\tilde{x}}$ las identidades en $\tilde{x}$ en $\tilde{G}$ y $\pi\tilde{X}$ respectivamente. Veamos que $r(id_{\tilde{x}}) = 0_{\tilde{x}}$. Sabemos que $(\pi p)r(id_{\tilde{x}}) = q(id_{\tilde{x}}) = 0_x$, donde $x = q(\tilde{x})$. Además, $\pi p 0_{\tilde{x}} = 0_{p(\tilde{x})} = 0_x$. Esto quiere decir que el camino constante en x es un representante tanto de la clase de $q(id_{\tilde{x}})$ como de la clase $\pi p(0_{\tilde{x}})$ y, por tanto, se eleva a un camino $\tilde{\gamma} : \mathbb{I}, 0 \to \tilde{X}, \tilde{x}$ tal que $0_{\tilde{x}} = cls\ \tilde{\gamma} = r(id_{\tilde{x}})$.

Dados $\alpha \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $\beta \in \tilde{G}(\tilde{y}, \tilde{z})$ sabemos que $q(\beta + \alpha) = q(\beta) + q(\alpha)$. Entonces se tiene que un representante γ de $q(\beta + \alpha)$ va a ser equivalente a cualquier otro representante δ de $q(\beta) + q(\alpha)$. Por tanto por 2.1.1, las elevaciones γ', δ' de γ, δ, respectivamente, van a ser también equivalentes entre sí. Luego $r(\beta + \alpha) = cls\ \gamma' = cls\ \delta' = r(\beta) + r(\alpha)$. Esto prueba que r es un morfismo, es más por 2.1.4 podemos asegurar que es recubridor. Esto implica que para cada

$\tilde{x}, \tilde{y} \in X$, $r : \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \pi\tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y})$ es inyectiva. También es sobre ya que cualquier $\gamma \in \pi\tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y})$ está recubierta por un elemento $\tilde{\gamma}$ de $St_{\tilde{G}}\tilde{x}$. Si $\tilde{\gamma} \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}')$ entonces $r\tilde{y} = r\tilde{y}'$. Luego $\tilde{y} = \tilde{y}'$ por ser r biyectiva sobre los objetos. Por tanto $\gamma \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y})$ y r es sobre. Por 1.4.6 se concluye que r es isomorfismo.

La unicidad de la topología elevada de X que satisface $a)$ y $b)$ se sigue de 2.4.10: Sobre $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$ podemos considerar la topología de X elevada por q o por πp. Por 2.4.10 sabemos que la topología de $\tilde{X}$ como espacio recubridor es la de X elevada por πp. Pero como r es la identidad en objetos y $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$ entonces $\tilde{X}$ tiene también la topología X elevada por q. Es decir, la topología es la misma, única. □

2.5. Equivalencia de categorías

En esta sección se probará el principal resultado de esta memoria. Comenzaremos definiendo las categorías implicadas.

1. Sea X un espacio localmente conexo y Hausdorff. La categoría **CovTop(X)** de espacios recubridores de X tiene como objetos las aplicaciones recubridoras de X y como morfismos, diagramas conmutativos de aplicaciones donde p, q son aplicaciones recubridoras.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotaremos al diagrama (f, p, q). La composición en **CovTop(X)** viene dada como sigue $(g, q, r)(f, p, q) = (gf, p, r)$. Cabe mencionar que no estamos suponiendo que los espacios X, Y o Z sean conexos. De nuevo por el lema 80.2 en [12] tenemos que f es una aplicación recubridora.

2. Sea G un grupoide. La categoría **CovGrp(G)** de morfismos recubridores de G tiene como objetos los morfismos recubridores $p : H \longrightarrow G$ y como morfismos, diagramas conmutativos de morfismos donde p, q son morfismos recubridores

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Denotaremos al diagrama (f, p, q). La composición es igual que en el caso topológico. Por 2.1.4 tenemos que f es morfismo recubridor.

Enunciamos entonces nuestro principal resultado.

Teorema 2.5.1 *Si X es un espacio de Hausdorff, localmente conexo y semilocalmente 1-conexo entonces el funtor grupoide fundamental π induce una equivalencia de categorías*

$$\pi! : \mathbf{CovTop(X)} \longrightarrow \mathbf{CovGrp(\pi X)}.$$

Demostración. Por 2.1.2 sabemos que si $p : Y \longrightarrow X$ es una aplicación recubridora de espacios entonces $\pi p : \pi Y \longrightarrow \pi X$ es un morfismo recubridor de grupoides. Denotaremos $\pi!$ al funtor inducido por π entre las categorías $\mathbf{CovTop(X)}$ y $\mathbf{CovGrp(\pi X)}$. Para probar la equivalencia de categorías definimos un funtor

$$\rho : \mathbf{CovGrp(\pi X)} \longrightarrow \mathbf{CovTop(X)}$$

y probaremos que $1 \simeq \rho\pi!$, $1 \simeq \pi!\rho$.

Sea $q : \tilde{G} \longrightarrow \pi X$ un morfismo recubridor de grupoides. Sea $Ob(\tilde{G}) = \tilde{X}$ y $Ob(q) = p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Por 2.4.11 sabemos que existe una topología en $\tilde{X}$ que hace a p una aplicación recubridora y que existe un isomorfismo recubridor $r : \tilde{G} \to \pi\tilde{X}$ tal que es la identidad en objetos y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & \pi\tilde{X} \arrow[d, "\pi p"] \\ & \pi X \end{tikzcd}$$

Sea (f, q, s) un morfismo en $\mathbf{CovGrp(\pi X)}$ donde $f : \tilde{G} \to \tilde{H}$. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todos los subconjuntos U abiertos, conexos por caminos de x tal que la inclusión $U \to x$ induce el homomorfismo trivial $\pi i : \pi U(x) \to \pi X(x)$, se tiene que U es un entorno débilmente $\mathcal{X}_q$ conexo y también débilmente $\mathcal{X}_s$ conexo. En la sección 2.4 vimos cómo elevar un recubridor $\mathcal{U}$ para obtener recubridores $\tilde{\mathcal{U}}_q$, $\tilde{\mathcal{U}}_s$ de $\tilde{X} = Ob(\tilde{G})$ e $\tilde{Y} = Ob(\tilde{H})$ respectivamente. Además vimos que eran base para las topologías de $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ respectivamente. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $\tilde{U}_s \in \mathcal{U}_s$ entonces $f(\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{U}}_s$. Se sigue que $s(\tilde{U}_s) = U \in \mathcal{U}$ y U se eleva a $\tilde{U}_q \in \tilde{\mathcal{U}}_q$ con $\tilde{x} \in \tilde{U}_q$. Además se tiene que $f(\tilde{U}_q) = \tilde{U}_s$. Por tanto $Ob(f) : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ continua. Esto nos define ρ como morfismo.

La homotopía de funtores $r : 1 \simeq \pi!\rho$ está definida en esencia en 2.4.11. Recordemos que, tal y como se explicó en la sección 1.5, la homotopía viene dada por isomorfismos r entre $\tilde{G}$, $\pi\tilde{X}$ y entre $\tilde{H}$, $\pi\tilde{Y}$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \tilde{H} \arrow[d, "r"] \\ \pi\tilde{X} \arrow[r, "\pi(Ob(f))"'] & \pi\tilde{Y} \end{tikzcd}$$

Comprobemos que r es natural, dicho de otra forma, veamos que el diagrama conmuta.

Sea un elemento $\alpha \in \tilde{G}$ que tenga punto inicial en $\tilde{x}$. Sea $a : \mathbb{I} \to X$ un representante de $q(\alpha) \in \pi X$, a induce un morfismo $\pi a : \pi\mathbb{I} \to \pi X$ tal que $(\pi a)(\tau) = q(\alpha)$. Además πa se eleva de forma única a un morfismo $a' : \pi\mathbb{I}, 0 \to \tilde{G}, \tilde{x}$. Entonces $r(\alpha)$ es la clase del camino $Ob(a') : \mathbb{I} \to \tilde{X}$,

$$\pi(Ob(f))r(\alpha) = Ob(f)(cls\, Ob(a')) = cls(Ob(fa')).$$

Sea $f(\alpha)$ elemento de $\tilde{H}$ con origen en $f\tilde{x}$. Sea $b : \mathbb{I} \to X$ un representante de $s(f(\alpha)) \in \pi X$. Como $sf(\alpha) = q(\alpha)$. Tomamos $b = a : \mathbb{I} \to X$. Esto induce el morfismo $\pi b = \pi a : \pi\mathbb{I} \to \pi X$. Se eleva de forma única a $b' : \pi\mathbb{I}, 0 \to \tilde{H}, fx$. Por la unicidad de b' y la conmutatividad del diagrama se tiene $b' = fa'$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{H}, fx \arrow[dd, "s"] \\
 & \tilde{G}, \tilde{x} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "q"] & \\
\pi\mathbb{I}, 0 \arrow[ur, "a'"'] \arrow[rr, "\pi a"'] \arrow[uurr, bend left, "b'"] & & \pi X, x
\end{tikzcd}$$

Luego $\pi(Ob(f))r(\alpha) = cls\, Ob(fa') = cls\, Ob(b')$ y $rf(\alpha) = cls\, Ob(b')$. Por tanto $rf = \pi(Ob(f))r$.

En el caso de la homotopía de funtores $\theta : 1 \simeq \rho\pi!$ observamos que $Ob(\pi\tilde{X}) = \tilde{X}$ y la topología en $\tilde{X}$ es precisamente la topología elevada por 2.4.10. Por lo que se tiene $1 = \rho\pi!$. En particular $1 \simeq \rho\pi!$. □

Este resultado muestra que el funtor $\pi!$ permite traducir un problema topológico en espacios recubridores a un problema algebraico en grupoides recubridores de manera completa y precisa.

Combinando el teorema anterior con el corolario 2.3.2.1 podemos garantizar también la existencia de espacios recubridores universales para espacios conexos, localmente conexos por caminos y semilocalmente simplemente conexos; este es un resultado clásico de la teoría de espacios recubridores, y muestra un ejemplo del enfoque algebraico que queremos dar.

Estudiaremos ahora otro ejemplo más elaborado: los automorfismos de un objeto de la categoría de **CovGrp(G)**. Esto nos da el *grupo de isomorfismos recubridores* de un morfismo recubridor, y nuestros resultados, en virtud de la equivalencia de categorías, producirán resultados análogos en los automorfismos de un objeto de **CovTop(X)**. Para ello necesitaremos alguna notación previa.

Definición 2.17. *Sea A un grupo. F, C subgrupos de A. Definimos $M_A(F, C) = \{a \in A : F \subseteq a + C - a\}$. Para simplificar denotaremos a este conjunto como M.*

En general no es cierto que si $a, b \in M$ entonces $a+b \in M$. Sin embargo si $F = C$ entonces $a + b \in M$, $a, b \in M$. En este último caso M adquiere estructura de monoide, es decir, satisface la asociatividad y axiomas pero la inversa no tiene porqué existir. Para obtener un grupo en este caso consideramos el normalizador usual de F en A denotado $N_A(F) = \{a \in A : F = a + F - a\}$. Es el subgrupo más grande de A en el que F es un subgrupo normal.

Proposición 2.5.1 *Sean Z, G, H grupoides conexos, sea $p : H \longrightarrow G$ un morfismo recubridor. Sea $f : Z \longrightarrow G$ un morfismo de grupoides y sea $L(f, p)$ el conjunto de elevaciones de f a morfismos $Z \to H$. Sea $z \in Ob(Z)$, $x \in Ob(H)$ tal que $p(x) = px = fz = f(z)$. Sea $A = G(px)$, $F = f(Z(z))$, $C = p(H(x))$. Entonces existe $\varphi : M_A(F, C) \longrightarrow L(f, p)$ aplicación sobreyectiva con la propiedad: $\varphi a = \varphi b$ si, y solo si, existe un elemento $c \in C$ tal que $b = a + c$.*

Demostración. Tenemos $M_A(F, C) = \{a \in G(px) : f(Z(z)) \subseteq a+p(H(z))-a\}$ y $L(f, p) = \{\tilde{f} : Z \to H/\tilde{f}$ elevación de $f\}$. Denotamos M a $M_A(F, C)$

Definamos primero $\varphi : M \to L(f, p)$: Sea $a \in M$ entonces $a \in G(px)$ tal que $f(Z(z)) \subseteq a + p(H(x)) - a$, $a \in St_G px$. Como p es morfismo recubridor a se eleva a un elemento $\tilde{a} \in St_H x$. Sea y el punto final de $\tilde{a}$, por 2.2.2, los grupos fundamentales de $H(x), H(y)$ son conjugados; $p(H(y)) = a + p(H(x)) - a = a + C - a$. Ya que $f(Z(z)) \subseteq a + C - a = p(H(y))$, se tiene por 2.2.3 que f se eleva a un morfismo $\tilde{f} : Z, z \to H, y$ de forma única ($\tilde{f}(z) = y$ o equivalentemente $\tilde{f}z = y$). Definimos entonces $\varphi(a) = \tilde{f}$.

Sea $\tilde{f} \in L(f, p), \tilde{f} : Z \to H$. Como H es conexo, existe $\tilde{a} \in H(x, \tilde{f}z)$. Luego $p(\tilde{a}) = a \in G(px)$ tal que $f(Z(z)) \subseteq p(\tilde{f}(Z(z))) \subseteq p(H(y)) = a+p(H(x))-a$.Por tanto existe $a \in M$ tal que $\varphi(a) = \tilde{f}$. Esto prueba la sobreyectividad.

Supongamos ahora que existe $c \in C$ tal que $b = a + c$, con $a, b \in M$. Sean $\tilde{a}, \tilde{b}$ elevaciones de a, b empezando en x. Sea $\tilde{c} \in H(x)$ elevación de c, entonces $\tilde{a} + \tilde{c}$ también eleva a b y tiene los mismos puntos que $\tilde{a}$. Por tanto la elevación es la misma, $\varphi a = \varphi(a + c) = \varphi b$. Por otro lado si $\varphi a = \varphi b$ entonces $-\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{c}$ está bien definido y se tiene $p(\tilde{c}) = p(-\tilde{a} + b) = p(-\tilde{a}) + p(b) = -a + b$. Sea $c = p(\tilde{c})$ entonces $c = -a + b$, es decir, $b = a + c$. □

En el caso $f = p$ podemos dar un resultado un poco más fuerte.

Definición 2.18. *Un isomorfismo recubridor $h : H \longrightarrow H$ de un morfismo recubridor $p : H \longrightarrow G$ es un isomorfismo de grupoides tal que $ph = p$. El conjunto de estos isomorfismos recubridores bajo la composición forman un grupo. Lo denotamos como $Aut(p)$.*

Proposición 2.5.2 *Sea $p : H \longrightarrow G$ un morfismo recubridor de grupoides conexos. Sea $x \in Ob(H)$ y $C = p(H(x))$ el grupo característico de p en x. Entonces $Aut(p)$ es antiisomorfo al cociente del grupo $N_{G(px)}(C)$ por su subgrupo normal C.*

Demostración. C es normal en N, entonces tenemos
$N/C = \{a+p(H(x))\,/\,a \in G(px)\, y\, a+p(H(x))-a = p(H(x))\}$ bien definido. Si $f = p$ por 2.5.1 sabemos que $\varphi : N \to L(p,p)$ es sobreyectiva. Además sabemos que si $a, b \in N$ entonces $\varphi(a) = h \in L(p,p)$, $\varphi(b) = k \in L(p,p)$ tal que $ph = p$ y $pk = p$, por consiguiente $\varphi(a)\varphi(b) = hk$. Veamos que $\varphi(b+a) = hk$.

Sean $a, b \in G(px)$, existen $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathrm{St}_H x$ elevaciones de a, b con punto final y, u respectivamente. Entonces $h(u) = h(k(x)) = hk(x)$. Podemos definir $h(\tilde{b}) + \tilde{a} \in Stx$. Por tanto $p(h(\tilde{b})+\tilde{a}) = ph(\tilde{b})+p(\tilde{a}) = p(\tilde{b})+a = b+a$. Como $ph = p$, $pk = p$ se tiene que $phk = pk = p$. Luego $hk \in Aut(p)$. Se sigue que $\varphi(b+a) = hk$. Ahora $\varphi(a)\varphi(-a) = \varphi(-a+a) = \varphi(0) = 1_H$. Por lo que se tiene que φ es un antiisomorfismo.

Por el Primer Teorema de Isomorfía sabemos que $N/ker\varphi \cong Im\varphi$. Vemos que $Im\,\varphi = Aut(p) \subseteq L(p,p)$. Probemos $Ker\,\varphi = C$.
Sea $a \in N$ tal que $a \in Ker\varphi$, entonces $\varphi(a) = 1_H$, esto significa que la única elevación $\tilde{a} \in St_K x$ tiene extremo final también en x. Si $p(\tilde{a}) = a$, $\tilde{a} \in H(x)$ entonces $a \in p(H(x)) = C$. Partimos ahora de $a \in C$. Existe $\tilde{a} \in H(x)$ tal que $p(\tilde{a}) = a$ es la única elvación de a con origen en x. Luego $\varphi(a) = 1_H$ pues 1_H es la única elvación de p que lleva x a x.

Se concluye que $N/C \cong Aut(p)$, son antiisomorfos. □

Proposición 2.5.3 *Sea $p : H \longrightarrow G$ un morfismo recubridor de grupoides. Consideramos las siguientes condiciones:*

a) Para todo lazo a en G, todas o ninguna elevación de a son lazos.
b) Para todo objeto x de H, el grupo característico $p(H(x))$ es normal en $G(px)$.

Entonces a) $\Rightarrow$ b); si H es conexo, b) $\Rightarrow$ a).

Demostración. $a) \Rightarrow b)$
Sea $x \in Ob(H)$ y $C = p(H(x))$. Sean $c \in C$ y $a \in G(px)$. La composición $-a+c+a \in G(px)$ está bien definida. Veamos que $-a+c+a \in C$ o equivalentemente veamos si existe $a' \in H(x) : p(a') = -a+c+a$. Sea $b \in H(x,y)$ elevación de a. Por $a)$ $c \in C$ se eleva a un elemento $d \in H(y)$. Entonces $-b+d+b \in H(x)$. Aplicandole p se tiene $p(-b+d+b) = -a+c+a \in C$. Luego existe $a' = -b+d+b \in H(x) : p(a') = -a+c+a \in C$. Por tanto C es normal.

$b) \Rightarrow a)$ con H conexo.
Sea c un lazo en C, $c \in G(px)$. Supongamos que c tiene una elevación que es un lazo, basta ver que cualquier otra elevación de c también es un lazo.
Sean $x, y \in Ob(H)$ tal que $p(x) = p(y)$ y sea $c \in C = p(H(x))$. Como H conexo, existe $b \in H(x,y)$. Sea $a = p(b) \in G(px)$, $a \notin p(H(x))$. Ahora la composición $-a+c+a \in C$ pues C es normal en $G(px)$. Luego existe $e \in H(x)$ tal que $p(e) = -a+c+a$. Entonces $b+e-b \in H(y)$, $p(b+e-b) = a-a+c+a-a = c$. Por tanto $c \in p(H(x))$ también se eleva a un lazo en y, $b+e-b \in H(y)$. □

Definición 2.19. *Un morfismo recubridor $p : H \longrightarrow G$ de grupoides se dice regular si H y G son conexos y una de las dos condiciones a) o b) del resultado anterior se cumple.*

Corolario 2.5.3.1 *Si $p : H \longrightarrow G$ es un morfismo regular de grupoides recubridor y C es el grupo característico de p en $x \in Ob(H)$. Entonces el grupo de isomorfismos recubridores de p es antiisomorfo al grupo cociente $G(px)/C$.*

Demostración. $G(px)/C$ está bien definido pues por 2.5.3 b) se tiene que $p(H(x))$ es normal en $G(px)$. Como $N = G(px)$ entonces $N/C = G(px)/C$. Por tanto por 2.5.2 se sigue que $Aut(p)$ es antiisomorfo a $G(px)/C$. □

Ahora podemos usar la equivalencia de categorías para traducir estas ideas y resultados al caso topológico. Sea $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación recubridora. Si Z, Y, X son espacios conexos por caminos, entonces el conjunto de elevaciones de una aplicación $f : Z \longrightarrow X$ a una aplicación $Z \longrightarrow Y$ puede estar enteramente determinada por 2.5.1, considerando el correspondiente problema para grupoides fundamentales. Además, p se dice regular si el correspondiente morfismo recubridor de groupoides $\pi p : \pi Y \longrightarrow \pi X$ es un morfismo recubridor regular. Así obtenemos inmediatamente:

Corolario 2.5.3.2 *Sea $p : Y \longrightarrow X$ una aplicación recubridora regular de espacios. Sea $y \in Y$. Entonces el grupo $Aut(p)$, de homeomorfismos $h : Y \longrightarrow Y$ tal que $ph = p$, es antiisomorfo al grupo cociente del grupo fundamental $\pi(X, py)$ por el subgrupo normal $p_*(\pi(Y, y))$. En particular si X es conexo e Y es el recubridor universal de X, entonces el grupo de homeomorfismos $h : Y \longrightarrow Y$ tal que $ph = p$ es antiisomorfo al grupo fundamental $\pi(X, x)$ en cualquier punto x en X.*

2.6. El Teorema de Nielsen-Schreier

Damos finalmente una aplicación de los grupoides recubridores en un contexto puramente algebraico. Se trata de un resultado clásico, conocido como Teorema de Nielsen - Schreier. Esencialmente dice que todo subgrupo de un grupo libre es también un grupo libre. Necesitaremos dos resultados previos. Se omite la demostración del primero de ellos, pues se trata de una simple comprobación.

Proposición 2.6.1 *Si $f : L \to G$ y $p : H \to G$ son morfismos de groupoides, y p es un morfismo recubridor, entonces la inducida desde el pulback $\bar{p} : L \times_G H \to L$ es también un morfismo recubridor.*

$$\begin{array}{ccc} L \times_G \tilde{G} & \xrightarrow{\bar{f}} & \tilde{G} \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ L & \xrightarrow[f]{} & G \end{array} \tag{2.1}$$

Proposición 2.6.2 *Sea $f : L \longrightarrow G$ un morfismo de grupoides universal y sea $p : \tilde{G} \longrightarrow G$ un morfismo recubridor de grupoides. Considerando el diagrama pullback 2.1 se tiene que $\bar{f}$ es universal.*

Demostración. Sea $h \in \tilde{G}$ un elemento no identidad. Probaremos que tiene una expresión única del tipo $h = (\bar{f}q_n)\dots(\bar{f}q_1)$ donde $q_i \in L \times_G \tilde{G}$ son elementos no identidades tales que las composiciones $q_{i+1}q_i$ no están definidas en $L \times_G \tilde{G}$. Sea $g = ph$ entonces g no es identidad de G porque h no lo es de $\tilde{G}$. Como f es universal, existen $l_i \in L$ no identidades tales que $ph = (fl_n)\dots(fl_1)$. Sabemos además que no existen (no están definidos) los productos $l_{i+1}l_i$. Por 2.2.1 cada camino fl_i se eleva en $\tilde{G}$ de forma que $ph_i = fl_i, \ \forall \ i = 1, \dots, n$ y entonces $h = h_n \dots h_1$ de manera única verificando $ph = g$. Ahora si $(l_i, h_i) \in L \times_G \tilde{G}$ vemos que $\bar{f}(l_i, h_i) = h_i$. Por tanto tomando $q_i = (l_i, h_i)$ tenemos que $h = (h_n)\dots(h_1) = (\bar{f}q_n)\dots(\bar{f}q_1)$.

Veamos que esta representación de h es única: Supongamos que h también se expresa como $h = (\bar{f}q'_m)\dots(\bar{f}q'_1)$ donde $q'_i \in L \times_G \tilde{G}, \ \forall \ i \in \{1 \dots m\}$. Por 2.6.1 $\bar{p}$ es un morfismo recubridor. Los elementos $\bar{p}q'_i$ no son identidades de L. Además los productos $(\bar{f}q'_{i+1})(\bar{f}q'_i)$ existen en G entonces $ph = p((\bar{f}q'_n)\dots(\bar{f}q'_1))$=f$((\bar{p}q'_m)\dots(\bar{p}q'_1))$. Como f universal, se sigue que $n = m$ y $\bar{p}q'_i = l_i$. Por tanto $q'_i = q_i, \ \forall \ i$ y $\bar{f}$ es universal. □

Corolario 2.6.2.1 *Sea $p : H \longrightarrow G$ un morfismo recubridor. Supongamos que G es libre sobre un grafo X. Entonces H es libre sobre el grafo $p^{-1}(X)$.*

Demostración. Sea $\varphi : D(X) \longrightarrow X$ la dispersión de X. Por 1.7.1 (a) sabemos que $\bar{\varphi} : FD(X) \longrightarrow G$ es estrictamente universal

$$\begin{tikzcd} FD(X) \times_G H \arrow[r, "\bar{\bar{\varphi}}"] \arrow[d, "\bar{p}"] & H \arrow[d, "p"] \\ FD(X) \arrow[r, "\bar{\varphi}"'] & G \end{tikzcd}$$

Se observa que $FD(X) \times_G H = \{(l, h) \in FD(X) \times H \ / \ \bar{\varphi}l = ph\} = \{(l, h) \in FD(X) \times H \ / \ ph \in X\}$. Es decir, $FD(X) \times_G H$ es el grupoide libre generado por $p^{-1}(X)$. Por la proposición anterior $\bar{\bar{\varphi}}$ es universal. Luego H es libre sobre el grafo $p^{-1}(X)$. □

Ahora podemos dar nuestro teorema sobre subgrupos.

Teorema 2.6.1 (Th de Nielsen - Schreier) *Un subgrupo L de un grupo libre G es también libre. Además si G es de rango r y L es de índice i en G entonces L es de rango $l = ri - i + 1$.*

$$i = [G : L] = \frac{l - 1}{r - 1}.$$

Demostración. Sea X un grafo generador de G. Sea $p : H \longrightarrow G$ el morfismo recubridor conexo determinado por el subgrupo L de G.

$$H = S \rtimes G, \qquad S = \{a + L \ / \ a \in St_G x\}.$$

Por el corolario 2.6.2.1, H es el grupoide libre sobre el grafo $p^{-1}(X)$. Además por 1.7.3 los grupos $H(\tilde{x})$ son libres para todo vértice $\tilde{x}$ de H. Pero H es el recubridor determinado por L. Luego el grupo característico de p en $\tilde{x} = 0_x + L = L$ es L. Asimismo, $H(\tilde{x}) = \{(0_x + L, g) \ / \ g \in L\} \cong L = p(H(\tilde{x}))$. Por tanto $H(\tilde{x})$ es libre si, y solo si, L es libre.

Ahora X tiene r elementos. Por 2.3.2, $p^{-1}(x) = G(x)/L = G/L$ tiene i elementos (niveles). Pero p es un recubridor de i hojas por el corolario 2.3.2.2. Por 1.7.3, $l = ri - i + 1$. □

La primera versión de este teorema, tan solo para subgrupos finitamente generados, fue probada por Jacob Nielsen en 1921, [13]. El teorema, en la versión general que aquí hemos presentado, fue demostrado en 1927 por Otto Schreier [14]. Se trata de una demostración bastante larga y complicada, basadas en el método de Nielsen de cancelaciones en teoría de grupos combinatoria. En 1936, Reinhold Baer y Friedrich Levi dan la primera demostración topológica [1], que hace uso del grupo fundamental y de la teoría de espacios recubridores. Aunque la primera demostración basada en grupoides aparece en 1971 en el trabajo de P.J. Higgins [7], la que aquí se ha presentado es la desarrollada por R. Brown, [3], a partir de material similar al de Higgins.

En nuestra demostración, el Lema de Zorn (equivalente al Axioma de Elección) es necesario en para probar que todo grafo conexo contiene un árbol extenso (proposición 1.7.2). Más aún, se puede probar [9], que es imposible una demostración del Teorema de Nielsen Schreier sin hacer uso del Axioma de Elección. La pregunta natural es entonces saber si el Axioma de Elección es equivalente al Teorema de Nielsen-Schreier. P. E. Howard en su artículo de 1985, [8], prueba que el Teorema de N-S implica el Axioma de Elección para conjuntos de conjuntos finitos (un caso particular), y da también una versión modificada del Teorema que sí implica el Axioma de Elección (en general). Vemos por tanto que, en este sentido, todavía permanecen problemas abiertos.

Bibliografía

[1] BAER, Reinhold. y LEVI, Friedrich. Freie Produkte und ihre Untergruppen, *Compositio Mathematica* 3, 1936, pp. 391-398.

[2] BORCEAUX, Francis. *Basic category theory.* Great Britain: Cambridge University Press, 1994.

[3] BROWN, Ronald. *Topology and grupoids.* 3rd edition. Deganwy, United Kingdom: Createspace, 2006.

[4] CROWELL, R. H. y FOX, R. H. *Knot theory.* Ginn & Co., Boston (1963). Reprint Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1982).

[5] DE LEÓN, Manuel; EPSTEIN, Marcelo; JIMÉNEZ, Víctor. *Material Geometry. Groupoids in continuum mechanics.* World Scientific, 2021.

[6] DÍAZ, Francisco J. y GARCÍA, José M. *Curso de topología general.* Madrid: Vision Net, 2005.

[7] HIGGINS, P. J. *Notes on categories and groupoids.* Van Nostrand Reinhold, London: Reprints in Theory and Applications of Categories no. 7, 1971.

[8] HOWARD, Paul E. Subgroups of a free group and the axiom of choice, *J. Symbolic Logic 50* (1985), no. 2, pp. 458-467.

[9] LÄUCHLI, H. Auswahlaxiom in der Algebra, *Comment. Math. Helv.* 37, 1962/63, pp. 1-18.

[10] MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician.* New-York: Springer-Verlag, 1971.

[11] MAY, J.P. *A Concise Course in Algebraic Topology.* 2nd edition. Chicago: University of Chicago Press, 1999.

[12] MUNKRES, J. R. *Topología.* Segunda edición. Madrid: Pearson Educación, 2002.

[13] NIELSEN, Jakob. Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien, *Math. Tidsskrift B*, 1921, pp. 78-94.

[14] OTTO Schreier. Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. *Mat Sem. Univ. Hamburg* 3, 1927, pp. 167-169.

[15] ROTMAN, Joseph J. *Advanced Modern Algebra.* 2nd printing. New Jersey: Prentice-Hall, 2003.

[16] WEINSTEIN, Alan. Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry, *Notices of the ams*, 1996, Vol. 43, No. 7, pp. 744-752.

Covering groupoids

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Laura Xiang Arranz Pérez
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101128993@ull.edu.es

Abstract

THE NOTION OF COVERING SPACE *is essential in the study of algebraic topology. Given a covering space, one can obtain an analog algebraic model based on the concept of groupoid. Thus, for the fundamental groupoid of the base space, a covering groupoid representing the original covering space is obtained. This correspondence between coverings space and covering groupoid has funtorial character and establishes an equivalence of categories. From this correlation can be derived all the classical results of the theory of covering spaces. As an application in a purely algebraic context, the relationship between graphs and covering groupoids allows the Nielsen-Schreier theorem to be proved.*

1. Introduction

AS A MOTIVATING EXAMPLE of this dissertation let's focus on the fundamental group $\pi(S^1, 1)$ of the circumference S^1, which is an infinite cyclic group, i.e. is isomorphic to the additive group of integers. The next two pushout diagrams show an analogy between topology and algebra:

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ {[0,1]} \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ \mathbf{I} \arrow[r] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

spaces groupoids

The figure on the left shows the circle obtained from the unit interval $[0, 1]$ by identifying the two end points $0, 1$ in the space category. The figure on the right shows the infinite integer group obtained again from the finite group $\mathbf{I}$ by identifying $0, 1$, but this time in the groupoid category. So we have a verification, groupoids can provide useful topology modeling.

Note 1 *We assume that all the spaces are path conected.*

2. Covering spaces and covering groupoids

Definition 1 *A small category in which each morphism is an isomorphism is called a groupoid.*

Definition 2 *Let $p : \tilde{X} \longrightarrow$ X be a map of topological spaces. A subset U of X is called canonical if U is open, path-connected, and each path-component of p^{-1}(U) is open in $\tilde{X}$ and is mapped by p homeomorphically onto U. The map p is called a covering map if each x in X has a canonical neighbourhood; and in such case $\tilde{X}$ called a covering space of X.*

Definition 3 *Let $p : \tilde{G} \longrightarrow$ G be a morphism of groupoids. We say p is a covering morphism if for each object $\tilde{x}$ of G the restriction of p*

$$St_{\tilde{G}}\tilde{x} \longrightarrow St_G p\tilde{x}.$$

is bijective; in such case, we call G a covering groupoid of G.

Definition 4 *For any morphism $p : \tilde{G} \longrightarrow$ G and object $\tilde{x}$ of G we call the subgroup $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$ of $G(p\tilde{x})$ the characteristic group of p at $\tilde{x}$, by an abuse of language, we also refer to this group as the characteristic group of $\tilde{G}, \tilde{x}$.*

Proposition 1 *Let $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ be a covering map, let A be a subset of X and let $\tilde{A} = p^{-1}(A)$. Then the induced morphism $\pi p : \pi\tilde{X}\tilde{A} \longrightarrow \pi X A$ is a covering morphism.*

Corolary 1 *The circle S^1 has fundamental group isomorphic to the integers $\mathbb{Z}$.*

Corolary 2 *For $n > 1$, real projective n-space $P^n(\mathbb{R})$ has fundamental group isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.*

Corolary 3 *Any connected groupoid has a universal covering groupoid.*

3. The equivalence of categories

Theorem 1 *If X is a Hausdorff, locally connected and semi-locally 1-connected space, then the fundamental groupoid functor π induces an equivalence of categories*

$$\pi! : CovTop(X) \longrightarrow CovGrp(\pi X).$$

By combining the above theorem with corollary 3 we can also guarantee the existence of universal covering spaces for connected, locally path-connected and semilocally simply connected spaces; this is a classic result of the theory of covering spaces, and shows an example of the algebraic approach we want to give. Another elaborate example: the automorphisms of an object in the category of $\mathbf{CovGrp}(\mathbf{G})$.

Corolary 4 *If $p : H \longrightarrow G$ is a regular covering morphism of groupoids, and C is a characteristic group of p at an object x of H, then the group of covering isomorphisms of p is anti-isomorphic to the quotient group $G(px)/C$.*

Corolary 5 *Let $p : Y \longrightarrow X$ be a regular covering map of spaces. Let $y \in Y$. Then the group $Aut(p)$, of homeomorphisms $h : Y \longrightarrow Y$ such that $ph = p$, is anti-isomorphic to the quotient group of the fundamental group $\pi(X, py)$ by the normal subgroup $p_*(\pi(Y, y))$. In particular, if X is connected and Y is a universal cover of X, then the group of homeomorphisms $h : Y \longrightarrow Y$ such that $ph = p$ is anti-isomorphic to the fundamental group $\pi(X, x)$ at any point x in X.*

4. Nielsen - Schreier theorem

An application of the covering groupoids in a purely algebraical context: the classic result known as Nielsen-Schreier theorem.

Theorem 2 (Nielsen - Schreier theorem) *A subgroup L of a free group G is itself a free group. Further, if G is of rank r and L is of index i in G, then L is of rank $l = ri - i + 1$. Hence*

$$i = [G : L] = \frac{l - 1}{r - 1}.$$

The first version of this theorem, for finitely generated subgroups only, was proved by Jacob Nielsen in 1921. The theorem, in the general version presented here, was proved in 1927 by Otto Schreier. The proof is based on Nielsen's method of cancellations in combinatorial group theory. In 1936, Reinhold Baer and Friedrich Levi give the first topological proof, which makes use of the fundamental group and the theory of covering spaces. The first proof based on grupoids appears in 1971 by P.J. Higgins. R. Brown developed another one based on similar material to Higgins'.

References

[1] BROWN, Ronald. *Topology and grupoids.* 3rd edition. Deganwy, United Kingdom: Createspace, 2006.

[2] HIGGINS, P. J. *Notes on categories and groupoids.* Van Nostrand Reinhold, London: Reprints in Theory and Applications of Categories nº 7, 1971.