Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Aridane Rodríguez Moreno

Operadores de composición en espacios clásicos de funciones analíticas

Composition operators in classical spaces of analytic functions

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2021

Dirigido por
María José Martín Gómez

María José Martín Gómez
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En pocas palabras que resumen mi enorme gratitud, a mi tutora María José, por compartir su amor a las matemáticas conmigo y por ser uno de pilares más importantes en mi formación como futuro matemático.

En agradecimientos también a familiares y amigos, por su apoyo y cariño. Y en especial a mi madre, la razón de quién soy.

Aridane Rodríguez Moreno
La Laguna, 10 de septiembre de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

Este trabajo de fin de grado recoge algunos resultados sobre los operadores de composición en distintos espacios clásicos de funciones analíticas en el disco unidad. Concretamente, en los espacios de Hardy, de Bergman con peso estándar y el espacio de Bloch (y su relevante subespacio, el llamado espacio pequeño de Bloch). En el primer capítulo se examinan algunas de las propiedades de las funciones en estos espacios. A continuación, se estudia la continuidad de los operadores de composición y se caracterizan las isometrías a través de dichos operadores en los capítulos 2 y 3, respectivamente.

Palabras clave: *Operadores de composición – Espacios de Hardy – Espacios de Bergman – Espacio de Bloch – Isometrías.*

Abstract

This Bachelor Thesis summarizes different results on composition operators acting on different classical spaces of analytic functions in the unit disk. Specifically, on the Hardy spaces, the standard weighted Bergman spaces, as well as on the Bloch space (and the little Bloch space). In the first chapter, some of the properties of functions in these spaces are reviewed. Chapter 2 is devoted to the study of continuous composition operators in the spaces mentioned. Finally, Chapter 3 studies the isometries among the composition operators.

Keywords: *Composition Operators – Hardy spaces – Bergman spaces – Bloch space – Continuous composition operators – Isometries.*

Contenido

Introducción

Sea φ una aplicación holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ que verifica la condición $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. El operador de composición C_φ con símbolo φ está definido por

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi\,,$$

donde f es analítica en $\mathbb{D}$.

Son muchos los expertos que se han sentido atraídos por el estudio de estos objetos, que tienen su propia área en la Clasificación por Áreas de las Matemáticas (MSC por sus siglas en inglés) desde 1990. Desde entonces, la literatura al respecto ha aumentado enormemente. De hecho, como se menciona en [2], "ha aumentado hasta tal punto que sería difícil para una persona novel en el área leer todos los artículos sobre el tema".

El estudio de los operadores de composición vincula algunas de las cuestiones más básicas sobre operadores lineales con algunos de los resultados clásicos de la teoría geométrica de funciones. Muchos de los trabajos sobre este tipo de operadores establecen las condiciones geométricas sobre φ en distintos espacios clásicos de funciones analíticas en el disco unidad, de manera que C_φ resulte ser acotado, compacto, etc.

En este trabajo los espacios de funciones analíticas que se consideran son el espacio de Bloch, el espacio pequeño de Bloch, los espacios de Hardy y los espacios de Bergman con peso estándar. En cada uno de ellos, las técnicas a aplicar para deducir las propiedades del operador de composición son distintas, pues la naturaleza de las funciones en cada uno de los espacios lo son.

El primer capítulo recopila las propiedades de las funciones en los espacios mencionados, con especial énfasis en los espacios de Bloch y de Hardy. Se han omitido algunas demostraciones por cuestiones de espacio (aunque se indican las referencias oportunas). No obstante, se ha procurado incluir las pruebas detalladas de algunos resultados que, aunque conocidos, no son fáciles de encontrar explícitamente en la literatura.

Los contenidos del capítulo 2 muestran que todo operador de composición está acotado en los espacios de Bloch, de Hardy y de Bergman con peso estándar, no siendo este el caso del espacio pequeño de Bloch. También se obtienen estimaciones para la norma de los operadores (en los casos en los que son continuos) y el valor exacto para la norma de un operador de composición inducido por un automorfismo involutivo del disco. Este capítulo finaliza con algunas propiedades de los operadores de composición en referencia a las propiedades del rango cerrado y la compacidad.

Finalmente, en el capítulo 3, se caracterizan los operadores de composición isométricos en los espacios de Hardy y de Bergman y, también, en los espacios de Bloch.

1

Espacios clásicos de funciones analíticas

En este primer capítulo se presentan los espacios de funciones holomorfas en el disco unidad del plano complejo, denotado por $\mathbb{D}$, que se considerarán a lo largo de este trabajo. Se señalan, también, algunas de las propiedades y características más significativas de las funciones que pertenecen a ellos.

1.1. El espacio H^∞

El primer espacio a considerar queda definido como sigue.

Definición 1.1. *Es espacio H^∞ es el espacio de las funciones analíticas y acotadas en el disco unidad $\mathbb{D}$.*

Teorema 1.2. *El espacio H^∞ con la norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} |f(z)|$$

es un espacio de Banach.

Demostración. La demostración de que $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado es fácil y se omiten los detalles. Para comprobar que H^∞ es completo, consideremos una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones en este espacio. Puesto que toda sucesión de Cauchy es acotada, existe un número real positivo M tal que, para todo $n \geq 1$,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n(z)| \leq M\,.$$

Sea K un subconjunto compacto arbitrario contenido en el disco unidad. Puesto que

$$\|f\|_K := \sup_{z\in K} |f(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|\,,$$

se tiene que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de la funciones continuas en K con la norma $\|\cdot\|_K$ definida anteriormente. Basta aplicar, por ejemplo, [17, Prop. 1.15] para concluir que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a una función continua f definida en K tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \right) = 0\,.$$

Tomando el compacto $K = \{z\}$, donde $z \in \mathbb{D}$, se tiene que $(f_n(z))_{n\geq 1}$ converge a $f(z)$, de manera que tomando n suficientemente grande para que $|f_n(z) - f(z)| \leq 1$, se sigue

$$|f(z)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z)| \leq 1 + M \,.$$

Es decir, f está acotada en el disco unidad. Y aplicando el Teorema de Morera, se sigue que f, límite puntual de $(f_n)_{n\geq 1}$, es holomorfa en $\mathbb{D}$. Por lo tanto, $f \in H^\infty$.

Para concluir la demostración, observemos que, puesto que $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en H^∞, dado $\varepsilon > 0$, existe un N tal que si $n, m \geq N$ y $z \in \mathbb{D}$,

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

Dejando m tender a infinito, se tiene que para todo $|z| < 1$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. □

Cualquier función holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}$ (en particular, los polinomios) pertenecen a H^∞. Además, si $f \in H^\infty$ tiene norma $\|f\|_\infty = M \neq 0$, la función $F = f/M$ también pertenece a este espacio y tiene norma igual a 1. Las funciones en H^∞ con norma menor o igual a 1 serán fundamentales en los capítulos posteriores. Dedicamos a ellas el siguiente apartado.

1.1.1. Autoaplicaciones del Disco

Definición 1.3. *Una función φ holomorfa en $\mathbb{D}$ y distinta de una constante de módulo uno que verifica $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ se llama* ***autoaplicación del disco****.*

La denominación del concepto en la definición anterior es completamente adecuado: si φ es una autoaplicación del disco unidad, se cumple $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. En efecto, dado $z \in \mathbb{D}$,

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1 \,,$$

luego $\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. No obstante, si existe $z \in \mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z)| = 1$, el principio del módulo máximo implica que φ es una constante (de módulo 1). Como este caso ha sido excluido, se sigue que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Algunos ejemplos importantes de autoaplicaciones del disco son los siguientes.

1.1.1.1. Automorfismos de $\mathbb{D}$

Una autoaplicación biyectiva es un automorfismo del disco unidad. Ejemplos sencillos de este tipo de aplicaciones son los siguientes:

- Dado $|\lambda| = 1$, la **rotación** R_λ, definida por $R_\lambda(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{D}$.
- Los **automorfismos involutivos** φ_a, donde $a \in \mathbb{D}$, dados por

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{1.1}$$

también son aplicaciones holomorfas y biyectivas en el disco unidad.

En efecto, puesto que el denominador $1 - \overline{a}z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene que φ_a es holomorfa en $\mathbb{D}$. Además, siendo una aplicación de Möbius, se sigue que son funciones inyectivas en todo su dominio. Puesto que $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, se tiene $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$. Por lo tanto, son sobreyectivas. Observemos que se cumple $\varphi_a(0) = a$ y $\varphi_a(a) = 0$.

La importancia de estos ejemplos queda recogida en el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea ψ una función holomorfa en el disco unidad. Entonces, ψ es un automorfismo de $\mathbb{D}$ si y solo si existen $|\lambda| = 1$ y $a \in \mathbb{D}$ tales que $\psi = \lambda\varphi_a$.*

La demostración de este teorema (omitimos los detalles, que pueden verse en [16], por ejemplo) se basa en el llamado lema de Schwarz-Pick que enunciamos a continuación utilizando los automorfismos definidos en (1.1).

Lema 1.5 (Lema de Schwarz-Pick). *Sea φ una autoaplicación del disco. Entonces,*

(i) *Para todo $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$|\varphi_{\varphi(w)}(\varphi(z))| = \left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} \right| = |\varphi_w(z)| \,.$$

(ii) *Para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2} \,.$$

Se da la igualdad en (i) para dos puntos distintos $z, w \in \mathbb{D}$ o en (ii) para algún $z \in \mathbb{D}$ si y solo si φ es un automorfismo del disco. En estos casos, la igualdad se da para todos los $z, w \in \mathbb{D}$.

De nuevo, remitimos al lector interesado a [16] para la demostración de este resultado.

1.1.1.2. Las aplicaciones lente

Sea

$$\sigma(z) = \frac{1 + z}{1 - z} \,, \quad z \in \mathbb{D} \,.$$

Es fácil comprobar que σ es una transformación holomorfa en $\mathbb{D}$ y que es una biyección del disco sobre el semiplano derecho $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$. Su inversa es

$$\sigma^{-1}(w) = \frac{w - 1}{w + 1} \,, \quad w \in \mathbb{H} \,.$$

Además, para todo $0 < s < 1$ y para todo $w = re^{i\theta}$ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, se tiene que $w^s = r^s e^{is\theta} \in \mathbb{H}$. De hecho, esta transformación es holomorfa en $\mathbb{H}$, dado que el logaritmo principal es una función holomorfa en todo el plano menos los puntos $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Claramente, al aplicar esta aplicación al semiplano $\mathbb{H}$, resulta la región $\{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Arg} z| < s\pi/2\}$, donde Arg es la rama principal del argumento, determinada por $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Todas estas consideraciones dan lugar a las autoaplicaciones de $\mathbb{D}$ recogidas en la siguiente definición.

Definición 1.6. *Sea $s \in [0, 1]$. Una **aplicación lente** es una función de la forma*

$$\ell_s(z) = \begin{cases} 0\,, & s = 0 \\ z\,, & s = 1 \\ \frac{\sigma(z)^s - 1}{\sigma(z)^s + 1}\,, & s \in (0,1) \end{cases} \,, \quad z \in \mathbb{D} \,. \tag{1.2}$$

La única aplicación lente que resulta ser un automorfismo del disco es ℓ_1. Es decir, la función identidad, que será denotada en este trabajo por I. Para el resto de las aplicaciones lente, debe cumplirse, por el lema de Schwarz-Pick,

$$\frac{|\ell_s'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\ell_s(z)|^2} < 1\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

El siguiente lema, probado en [6], produce una mejor estimación que la anterior. Incluimos la prueba porque será importante para los resultados del capítulo 3.

Proposición 1.7. *Dada una aplicación lente, se cumple*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\ell_s'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\ell_s(z)|^2} = s\,.$$

Demostración. Sea z un punto en el disco unidad y sea $w = \sigma(z) = (1+z)/(1-z) = re^{i\theta}$, donde, como se ha justificado anteriormente, $r > 0$ y $|\theta| < \pi/2$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{|\ell_s'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\ell_s(z)|^2} &= \frac{1-|z|^2}{1-\left|\frac{\sigma(z)^s-1}{\sigma(z)^s+1}\right|^2}\cdot\frac{2s|\sigma'(z)||\sigma(z)|^{s-1}}{|\sigma(z)^s+1|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\cdot\frac{2s|\sigma(z)|^{s-1}}{2\left(\sigma(z)^s+\overline{\sigma(z)^s}\right)}\\ &= \frac{1-\left|\frac{w-1}{w+1}\right|^2}{\left|1-\frac{w-1}{w+1}\right|^2}\cdot\frac{sr^{s-1}}{r^s\cos(s\theta)} = \frac{s\cos(\theta)}{\cos(s\theta)}.\end{aligned}$$

Como $\cos(s\theta) \geq \cos(\theta) > 0$ para $|\theta| < \pi/2$, se tiene que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\ell_s'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\ell(z)|^2} \leq s\,.$$

De hecho, si $z \in (-1,1)$ (es decir, si $\theta = 0$) se verifica la igualdad $\cos(s\theta) = \cos(\theta)$. Esto concluye la demostración. ☐

1.1.1.3. Productos de Blaschke.

Consideremos, de nuevo, los automorfismos del disco φ_a definidos en (1.1).

Definición 1.8. *Un* ***producto de Blaschke finito*** *es una función de la forma*

$$B = \lambda \prod_{n=1}^{N} \varphi_{a_n}\,, \tag{1.3}$$

donde $|\lambda| = 1$ *y* $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{D}$.

Es claro que los productos de Blaschke finitos son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y verifican que, para todo $|z| < 1$,

$$|B(z)| = \prod_{n=1}^{N} |\varphi_{a_n}(z)| < 1\,.$$

Es decir, todo producto de Blaschke finito es una autoaplicación del disco. También hemos de destacar que un producto de Blaschke como en (1.3) se anula, precisamente, en los puntos $a_1, \dots, a_N$, siendo la multiplicidad del cero a_i igual al número de veces que este punto se repite en el producto que define al producto de Blaschke.

A la vista de la definición de los productos de Blaschke finitos, surge la cuestión natural sobre la definición correcta del análogo infinito. En este caso, deben verificarse restricciones para asegurar que el producto infinito converja. Más aún, debido al teorema de los ceros aislados, es claro que solo las sucesiones de puntos en el disco que se acumulan en la circunferencia unidad podrían considerarse. En el siguiente teorema se obtienen de forma precisa las condiciones que debe satisfacer una sucesión de puntos en el disco para dar lugar a una función holomorfa en el disco unidad que involucra un producto infinito de automorfismos. La demostración de este resultado puede encontrarse en [3, p. 19].

Teorema 1.9. *Sea $a_1, a_2, \dots$ una sucesión de números complejos tal que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Entonces el producto infinito*

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

converge uniformemente en cada disco $|z| \leq R < 1$. Cada a_n es un cero de $B(z)$, con multiplicidad igual al número de veces que aparece en la sucesión y $B(z)$ no tiene otros ceros en $\mathbb{D}$. Además, $|B(z)| < 1$ si $|z| < 1$.

Definición 1.10. *Un **producto de Blaschke** es una función de la forma*

$$B(z) = \lambda z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.4}$$

donde $|\lambda| = 1$, m es un entero no negativo y $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. El conjunto $\{a_n\}$ puede ser finito o vacío. Si $\{a_n\}$ es vacío, se entiende que $B(z) = \lambda z^m$.

*Todo producto de Blaschke finito es un producto de Blaschke. Si un producto de Blaschke no es finito se denomina **producto de Blaschke infinito**.*

De entre los productos de Blaschke infinitos, destacamos los recogidos en la siguiente definición.

Definición 1.11. *Se dice que un producto de Blaschke B es **delgado** si sus ceros no nulos $\{a_n\}_{n \geq 1}$ con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ cumplen que*

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k \neq n} \left| \frac{a_k - a_n}{1 - \overline{a_k} a_n} \right| = 1. \tag{1.5}$$

Una manera quizá más sencilla de comprobar si un producto de Blaschke es delgado viene dada en el siguiente lema.

Lema 1.12. *Sea B un producto de Blaschke infinito con ceros no nulos $\{a_n\}_{n \geq 1}$, con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$. Entonces, B es delgado si y solo si*

$$\lim_{n \to \infty} |B'(a_n)|(1 - |a_n|^2) = 1.$$

Demostración. Sea

$$B(z) = \lambda z^m \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \varphi_{a_j}(z) = \lambda z^m b(z).$$

Entonces, puesto que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ y que $b(a_n) = \varphi_{a_n}(a_n) = 0$ para todos los a_n en la sucesión que son distintos de cero, resulta

$$
\begin{aligned}
|B'(a_n)| &= \left| m a_n^{m-1} b(a_n) + a_n^m \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} \varphi'_{a_j}(a_n) \prod_{k\neq j} \frac{|a_k|}{a_k} \varphi_{a_k}(a_n) \right| = \left| a_n^m \, \varphi'_{a_n}(a_n) \prod_{k\neq n} \varphi_{a_k}(a_n) \right| \\
&= \frac{|a_n|^m}{1-|a_n|^2} \prod_{k\neq n} \left| \frac{a_k - a_n}{1-\overline{a_k} a_n} \right| .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\lim_{n\to\infty} |B'(a_n)|(1-|a_n|^2) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k\neq n} \left| \frac{a_k - a_n}{1-\overline{a_k} a_n} \right| .
$$

□

Un resultado importante para los contenidos en el capítulo 3 es el recogido en el siguiente teorema. Su demostración utiliza distintas propiedades y resultados relacionados con las llamadas funciones internas. Por cuestiones de espacio, omitimos los detalles y remitimos al lector a [5] para la demostración.

Proposición 1.13. *Si B es un producto de Blaschke delgado y $a \in \mathbb{D}$, entonces $\varphi_a \circ B$ es un producto de Blaschke delgado.*

1.1.2. Las métrica hiperbólica

Dedicamos este último apartado de la sección a una métrica en $\mathbb{D}$ que se define utilizando los automorfismos φ_a definidos en (1.1) y que será relevante para las posteriores secciones y capítulos.

Definición 1.14. *Se llama* ***distancia o métrica hiperbólica*** *a la aplicación*

$$
\rho(z,w) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+|\varphi_w(z)|}{1-|\varphi_w(z)|} \right), \qquad z,w \in \mathbb{D}. \tag{1.6}
$$

Antes de comprobar que ρ es realmente una métrica, recogemos algunas de las propiedades que se siguen del lema de Schwarz-Pick.

Proposición 1.15. *Sea ψ una autoaplicación del disco. Entonces, para todo $z,w \in \mathbb{D}$,*

$$
\rho\left(\psi(z), \psi(w)\right) \leq \rho(z,w).
$$

Se da la igualdad para dos puntos distintos z,w si y solo si ψ es un automorfismo del disco, en cuyo caso se tiene la igualdad en todos los puntos de $\mathbb{D}$.

Demostración. La demostración se deduce fácilmente del lema 1.5 y teniendo en cuenta que la función $x \mapsto (1+x)/(1-x)$ es creciente en el intervalo $(0,1)$ y la función logaritmo (como función real de variable real) lo es también en su dominio de definición.

□

Como habíamos mencionado, comprobamos ahora que la función ρ dada en (1.6) es una métrica en el disco unidad.

Es claro que se verifica que para todos los puntos $z,w \in \mathbb{D}$, $\rho(z,w) \geq 0$ con igualdad si y solo si $z = w$. Además, ρ es simétrica:

$$|\varphi_w(z)| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = |\varphi_z(w)|\,.$$

Demostrar que verifica la desigualdad triangular requiere un poco más de trabajo. Hemos de probar que dados z, w y $\zeta \in \mathbb{D}$, se cumple

$$\rho(z,w) \leq \rho(z,\zeta) + \rho(\zeta,w)\,. \tag{1.7}$$

Aplicando la proposición anterior con el automorfismo φ_z, se tiene $\rho(z,w) = \rho(\varphi_z(z),\varphi_z(w)) = \rho(0,\varphi_z(w))$, de manera que demostrar (1.7) es equivalente a demostrar que para todos los puntos p y q en el disco unidad (que serían, respectivamente, $\varphi_z(w)$ y $\varphi_z(\zeta)$) se tiene

$$\rho(0,p) \leq \rho(0,q) + \rho(q,p)\,.$$

Utilizando las propiedades del logaritmo y el hecho de que la función definida por $x \mapsto (1+x)/(1-x)$ es creciente en el intervalo $(0,1)$, se prueba que la desigualdad anterior puede rescribirse como

$$|p| \leq \frac{|q| + |\varphi_q(p)|}{1+|q||\varphi_q(p)|}$$

o, también, como

$$|\varphi_q(p)| \geq \frac{||p|-|q||}{1-|pq|}\,. \tag{1.8}$$

Sustituyendo la expresión de $|\varphi_q(p)|$, elevando al cuadrado y simplificando (utilizando que los puntos p y q pertenecen al disco unidad), se obtiene que (1.8) es lo mismo que $\operatorname{Re}(\overline{p}q) \leq |pq|$, lo que es claramente cierto.

Teorema 1.16. *El disco unidad con la métrica hiperbólica es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy con respecto a la métrica hiperbólica, de manera que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon\,, \quad \text{si} \quad n,m \geq N\,.$$

Por ser una sucesión de Cauchy, está acotada. Por tanto, existe $M > 0$ tal que, para todo $n \geq 1$, $\rho(0,x_n) \leq M$. Pero eso es equivalente a que se cumpla que todos los elementos de la sucesión de Cauchy satisfagan

$$|x_n| \leq \widetilde{M} = \frac{e^{M^2}-1}{e^{M^2}+1} < 1\,,$$

de manera que la sucesión está contenida en el compacto $\overline{\mathbb{D}_{\widetilde{M}}} = \{z \in \mathbb{D}\colon |z| \leq \widetilde{M}\}$. Por lo tanto, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y existe $x_0 \in \overline{\mathbb{D}_{\widetilde{M}}}$ tal que $|x_{n_k} - x_0| \to 0$ cuando $n_k \to \infty$. Se sigue, entonces, por la continuidad del automorfismo φ_{x_0}, que

$$\lim_{n_k\to\infty} |\varphi_{x_0}(x_{n_k}) - \varphi_{x_0}(x_0)| = \lim_{n_k\to\infty} |\varphi_{x_0}(x_{n_k})| = 0\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n_k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = \lim_{n_k\to\infty} \rho(\varphi_{x_0}(x_{n_k}), 0) = \lim_{n_k\to\infty} \frac{1}{2}\log\frac{1+|\varphi_{x_0}(x_{n_k})|}{1-|\varphi_{x_0}(x_{n_k})|} = 0\,.$$

Es decir, toda sucesión de Cauchy en $(\mathbb{D},\rho)$ contiene una subsucesión que converge, en esta métrica, a $x_0 \in \mathbb{D}$. Usando que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión que converge entonces la sucesión converge, se concluye la demostración. $\square$

Involucrando a la métrica hiperbólica, se introduce el concepto definido a continuación.

Definición 1.17. *Sea φ una autoaplicación de $\mathbb{D}$. La* ***derivada hiperbólica*** *φ^* de φ viene dada por*

$$\varphi^*(z) = \varphi'(z)\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Es claro que, usando de nuevo el lema de Schwarz-Pick, se tiene que para toda autoaplicación del disco unidad, su derivada hiperbólica está acotada (en módulo) por 1. Además, es equivalente que exista un punto $z \in \mathbb{D}$ tal que $|\varphi^*(z)| = 1$ con que φ sea un automorfismo del disco y, por tanto, se tenga $|\varphi^*(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

En la siguiente proposición se presenta el resultado que justifica la denominación "derivada hiperbólica" en la definición anterior.

Proposición 1.18. *Sea φ una autoaplicación del disco unidad. Entonces,*

$$|\varphi^*(z)| = \lim_{w\to z} \frac{\rho\left(\varphi(z), \varphi(w)\right)}{\rho(z,w)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{D}$ fijo, se definen $p(w) = \varphi_{\varphi(z)}\left(\varphi(w)\right)$ y $q(w) = \varphi_z(w)$, $w \in \mathbb{D}$. Es claro que $\lim_{w\to z} p(w) = \lim_{w\to z} q(w) = 0$.

Puesto que $(1+x)/(1-x) = 1 + 2x/(1-x)$, aplicando infinitésimos queda

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to z} \frac{\rho\left(\varphi(z), \varphi(w)\right)}{\rho(z,w)} &= \lim_{w\to z} \left[\log\left(\frac{1+|p(w)|}{1-|p(w)|}\right) \Big/ \log\left(\frac{1+|q(w)|}{1-|q(w)|}\right)\right] \\
&= \lim_{w\to z} \frac{|p(w)| \cdot (1-|q(w)|)}{|q(w)| \cdot (1-|p(w)|)} = \lim_{w\to z} \frac{|p(w)|}{|q(w)|} \\
&= \lim_{w\to z} \left(\frac{|\varphi(w)-\varphi(z)|}{|w-z|} \cdot \frac{|1-\overline{w}z|}{|1-\overline{\varphi(w)}\varphi(z)|}\right) = |\varphi'(z)|\frac{1-|z^2|}{1-|\varphi(z)|^2}.
\end{aligned}$$

□

Una última propiedad de la derivada hiperbólica que mencionamos es la siguiente.

Teorema 1.19 (Regla de la cadena). *Sean ψ y φ dos autoaplicaciones de $\mathbb{D}$ tales que la composición $\varphi \circ \psi$ está bien definida. Entonces,*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \varphi^*\left(\psi\right) \cdot \psi^*.$$

Demostración. La demostración es una consecuencia directa de la regla de la cadena habitual: para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)^*(z) &= (\varphi \circ \psi)'(z) \frac{1-|z|^2}{1-|(\varphi\circ\psi)(z)|^2} \\
&= \varphi'\left(\psi(z)\right)\psi'(z) \cdot \frac{1-|\psi(z)|^2}{1-|(\varphi\circ\psi)(z)|^2} \cdot \frac{1-|z|^2}{1-|\psi(z)|^2} \\
&= \varphi^*\left(\psi(z)\right) \cdot \psi^*(z).
\end{aligned}$$

□

1.2. Los espacios de Bloch

Recordemos la siguiente definición.

Definición 1.20. *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea f una aplicación de X en Y. Se dice que la función $f : X \to Y$ es **Lipschitz-continua** si existe $M > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in X$,*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq M\, d_X(x_1, x_2)\,.$$

*La constante M se llama la **constante de Lipschitz de la función** f y se dice que f es una **contracción** si su constante de Lipschitz es menor que 1.*

Tomando, como espacios métricos particulares, $(X, d_X) = (\mathbb{D}, \rho)$, donde ρ es la métrica hiperbólica definida en la sección anterior, e $(X, d_X) = (\mathbb{C}, d_e)$, donde d_e es la distancia euclídea en el plano, se define el espacio de Bloch como sigue.

Definición 1.21. *El **espacio de Bloch**, denotado por $\mathcal{B}$, es el espacio de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que son Lipschitz-continuas como funciones entre los espacios métricos $(\mathbb{D}, \rho)$ y $(\mathbb{C}, d_e)$.*

Así, una función f pertenece a $\mathcal{B}$ si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y existe una constante $M > 0$ tal que, para todos los puntos $z, w \in \mathbb{D}$,

$$|f(z) - f(w)| \leq M\rho(z, w)\,.$$

Teorema 1.22. *Sea f una función analítica en el disco unidad. Entonces, $f \in \mathcal{B}$ si y solo si*

$$s(f) = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1 - |z|^2) < \infty\,.$$

Demostración. Observemos que, dados $z, w \in \mathbb{D}$, utilizando los mismos argumentos que en la demostración de la proposición 1.18, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{w \to z} \frac{|z-w|}{\rho(z,w)} &= 2 \lim_{w \to z} \frac{|z-w|}{\log\left(\frac{1+|\varphi_z(w)|}{1+|\varphi_z(w)|}\right)} = \lim_{w \to z} \frac{|z-w|(1-|\varphi_z(w)|)}{|\varphi_z(w)|} \\ &= \lim_{w \to z} (1 - \overline{z}w) = 1 - |z|^2\,. \end{aligned}$$

Supongamos que $f \in \mathcal{B}$, de manera que para todo $z, w \in \mathbb{D}$, $|f(z) - f(w)| \leq M\rho(z, w)$. Entonces,

$$M \geq \lim_{w \to z} \frac{|f(z) - f(w)|}{|z-w|} \frac{|z-w|}{\rho(z,w)} = |f'(z)|(1 - |z|^2)\,,$$

de donde se sigue que $s(f) < \infty$.

Si $s(f) < \infty$, se tiene que, dado $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, por el teorema fundamental del cálculo, integrando sobre el segmento rectilíneo $[0, z]$ que une 0 y z, y haciendo el cambio de variable $\zeta = tz$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &= \left| \int_{[0,z]} f'(\zeta)\, d\zeta \right| = \left| z \int_0^1 f'(zt)\, dt \right| \\ &\leq |z| \int_0^1 |f'(zt)|\, dt \leq s(f) \int_0^1 \frac{1}{1 - |zt|^2}\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{s(f)}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = s(f)\rho(0,z)\,.$$

Observemos que, dado un automorfismo del disco ψ, por el lema de Schwarz-Pick (y por el hecho de que este tipo de transformaciones son biyectivas), resulta

$$s(f \circ \psi) = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(\psi(z))|(1-|\psi(z)|)\frac{|\psi'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\psi(z)|^2} = s(f)\,.$$

Por lo tanto, dados $z, w \in \mathbb{D}$ y aplicando el razonamiento anterior a la función $f \circ \varphi_z$ con $p = \varphi_z(w)$, se tiene

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= |f\circ\varphi_z(0) - f\circ\varphi_z(p)| \le s(f\circ\varphi_z)\rho(0,p) \\ &= s(f)\rho(\varphi_z(z), \varphi_z(w)) = s(f)\rho(z,w)\,. \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es Lipschitz-continua (con constante de Lipschitz igual a $s(f)$). □

El siguiente corolario se sigue de los argumentos en la prueba del teorema anterior.

Corolario 1.23. *Si $f \in \mathcal{B}$ y ψ es un automorfismo del disco, entonces $f\circ\psi \in \mathcal{B}$ y $s(f\circ\psi) = s(f)$.*

No es difícil comprobar que toda función holomorfa y acotada pertenece al espacio de Bloch. De hecho, es una consecuencia directa del lema de Schwarz-Pick.

Proposición 1.24. *El espacio $H^\infty \subset \mathcal{B}$. Más aún, si $f \in H^\infty$, $s(f) \le \|f\|_\infty$.*

Demostración. Sea $f \in H^\infty$. Si f es la función idénticamente nula, claramente, $f \in \mathcal{B}$. De hecho, lo mismo ocurre si f es constante. En ambos casos, $s(f) \le \|f\|_\infty$. Si f es una función no constante en H^∞, consideramos $F = f/\|f\|_\infty$ que tiene norma menor o igual a 1 en H^∞. Como la función no es constante, por el principio del módulo máximo, se tiene que $|F|$ no alcanza su máximo en el disco unidad. Por lo tanto, $|F(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$. Es decir, F es una autoaplicación de $\mathbb{D}$. Por el lema de Schwarz-Pick,

$$|F'(z)| \le \frac{1-|F(z)|^2}{1-|z|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}\,,$$

de donde se sigue que

$$1 \ge \sup_{z\in\mathbb{D}} |F'(z)|(1-|z|^2) = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left|\frac{f'(z)}{\|f\|_\infty}\right|(1-|z|^2) = \frac{1}{\|f\|_\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2)\,.$$

□

Existen funciones no acotadas en el espacio de Bloch. En particular, sea λ un número complejo de módulo 1. Definamos

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{1.9}$$

donde log es el logaritmo principal determinado por la rama del argumento $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$.

Es fácil comprobar que todas estas funciones transforman el disco unidad sobre la banda horizontal de anchura $\pi/2$, simétrica con respecto al eje real. Además, se tiene que $s(L_\lambda) = 1$, por lo que pertenecen al espacio de Bloch. También verifican la siguiente propiedad: si λ y μ son dos números complejos de módulo 1, entonces, tomando el límite cuando $r \to 1^-$ en los puntos de la forma $z = r\overline{\mu}$, $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} s(L_\lambda - L_\mu) &= \sup_{z\in\mathbb{D}} |\lambda-\mu| \left| \frac{1+\mu\lambda z^2}{(1-\lambda^2 z^2)(1-\mu^2 z^2)} \right| (1-|z|^2) \\ &\geq |\lambda - \mu| \lim_{r\to 1^-} \frac{|1+\lambda\overline{\mu} r^2|}{|1-\lambda^2\overline{\mu}^2 r^2|} = \frac{|\lambda-\mu|}{|1-\lambda\overline{\mu}|} = 1\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Los siguientes corolarios se obtiene directamente de estas consideraciones y de la prueba del teorema 1.22.

Corolario 1.25. *Sea $f \in \mathcal{B}$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{D}$,*

$$|f(z) - f(0)| \leq s(f)\,\frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\,.$$

Las funciones L_λ definidas en (1.9) muestran que esta cota para el crecimiento de una función en el espacio de Bloch es precisa.

El siguiente lema también será útil.

Lema 1.26. *Sea $f \in \mathcal{B}$ y sea $0 < r < 1$. Definamos las dilataciones de f por $f_r(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces,*

$$\lim_{r\to 1^-} s(f_r) = s(f)\,.$$

Más aún, si $0 < r_1 < r_2 < 1$, entonces $s(f_{r_1}) \leq s(f_{r_2})$.

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} s(f_r) &= \sup_{z\in\mathbb{D}} |f_r'(z)|(1-|z|^2) = r\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz)|(1-|z|^2) \\ &= r\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz)|(1-|rz|^2)\frac{1-|z|^2}{1-|rz|^2} \leq r\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz)|(1-|rz|^2) \\ &= r\sup_{|z|\leq r} |f'(z)|(1-|z|^2) \leq s(f)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $0 < r_1 < r_2 < 1$, tomando r tal que $r_2 = rr_1$ y aplicando el argumento anterior, se sigue que $s(f_{r_1}) \leq s(f_{r_2})$. Así, los valores de $s(f_r)$ dan lugar a una función no decreciente (en r) y acotada por $s(f)$. Sea $L = \lim_{r\to 1^-} s(f_r)$ y supongamos, para llegar a contradicción que $L < s(f)$.

Por la definición de supremo, existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|f'(z_0)|(1-|z_0|^2) > s(f) - \varepsilon$, donde $\varepsilon > (s(f) - L)/2$. Es decir,

$$|f'(z_0)|(1-|z_0|^2) > \frac{s(f)+L}{2} = L + a\,, \quad a > 0\,.$$

Es claro que z_0 pertenece al disco centrado en el origen y de radio r para todo $r > |z_0|$. Por lo tanto, para todos esos valores de r, podemos tomar un punto z_1 del disco unidad tal que $z_0 = rz_1$. Entonces, se obtiene

$$L > r\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz)|(1-|rz|^2)\frac{1-|z|^2}{1-|rz|^2} \geq r|f'(z_0)|(1-|z_0|^2)\frac{1-|z_1|^2}{1-|rz_1|^2}$$

$$> (L+a)r\frac{1-|z_1|^2}{1-|rz_1|^2},$$

como se cumple para todos los valores de $r > |z_0|$, podemos tomar r lo suficientemente cercano a 1 y usar que $\lim_{r\to 1}(r - r|z_1|^2)/(1-|rz_1|^2) = 1$ para obtener que $L > (L+a)$, lo que da lugar a la contradicción.

□

Teorema 1.27. *El espacio de Bloch con la norma*

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + s(f) = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2)$$

es un espacio de Banach no separable.

Demostración. Comprobar que el espacio de Bloch es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ es una norma en ese espacio es muy sencillo. Se omiten los detalles. Para demostrar la completitud, sea $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$ una sucesión de Cauchy, de manera que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n, m \geq N$,

$$|f_n(0) - f_m(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f_n'(z) - f_m'(z)|(1-|z|^2) < \varepsilon\,.$$

Esto implica que, por un lado, $(f_n(0))_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en el plano complejo con la métrica euclídea. Por lo tanto, existe una subsucesión (f_{n_k}) de $(f_n)_{n\geq 1}$ (a la que denotamos de nuevo por (f_n) para no complicar la notación) para la que existe $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = a_0$.

Por otro lado, también se cumple que

$$|f_n'(z) - f_m'(z)| < \frac{\varepsilon}{(1-|z|^2)}, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Como dado un compacto $K \in \mathbb{D}$, existe $R \in (0,1)$ tal que K está contenido en el disco cerrado de centro 0 y radio R, se tiene que, para todo $z \in K$,

$$|f_n'(z) - f_m'(z)| < \frac{\varepsilon}{(1-|z|^2)} \leq \frac{\varepsilon}{(1-R^2)}\,.$$

Es decir, la sucesión de funciones holomorfas (f_n') es una sucesión de Cauchy con respecto a la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos del disco. Por lo tanto, existe una función f' (que debe ser holomorfa por el teorema de Morera) tal que, en esta topología, f_n' converge a f'. Siendo el disco un dominio simplemente conexo, se tiene, por el teorema integral de Cauchy, que la primitiva de la función f' que toma el valor a_0 en el origen (y a la que denotamos por f), es analítica en $\mathbb{D}$.

Hemos de probar que $\|f\|_{\mathcal{B}} < \infty$ y que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos un número natural N tal que $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. Considerando las dilataciones definidas en el lema anterior, el resultado del mismo y observando que $((f_m)_r)'$ converge a $(f_r)'$ uniformemente en $\mathbb{D}$ (lo que permite acotar la cantidad en la última línea de las siguientes desigualdades por ε), se tiene

$$\begin{aligned}\|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}} &\leq \|(f_n)_r - (f_m)_r\|_{\mathcal{B}} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}} < \varepsilon + \varepsilon.\end{aligned}$$

Basta dejar que $r \to 1$ para concluir que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Por lo tanto, puesto que

$$\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} + \|f_n\|_{\mathcal{B}}\,,$$

el resultado se sigue fácilmente usando que toda sucesión de Cauchy está acotada y que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, también lo hace la sucesión.

Para concluir la demostración, supongamos que $\mathcal{B}$ es separable, de manera que existe un conjunto numerable $\mathcal{F}$ denso en el espacio de Bloch. Para cada λ de módulo 1, sea $D_\lambda = \{f \in \mathcal{B} \colon \|f - L_\lambda\|_{\mathcal{B}} < 1/2\}$, donde L_λ son las funciones definidas en (1.9).

Observemos que si λ y μ son dos números complejos de módulo 1, entonces $D_\lambda \cap D_\mu = \emptyset$. En efecto, si suponemos que existe $f \in D_\lambda \cap D_\mu$, se tiene, usando (1.10) y la desigualdad triangular,

$$1 \leq \|L_\lambda - L_\mu\| \leq \|L_\lambda - f\| + \|f - L_\mu\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Por otro lado, siendo $\mathcal{F}$ denso, se tiene que debe existir, al menos, un elemento de $\mathcal{F}$ en cada D_λ. Dado que el conjunto $\{\lambda \colon |\lambda| = 1\}$ es no numerable, se sigue que $\mathcal{F}$ no puede serlo tampoco. $\square$

1.2.1. El espacio pequeño de Bloch

Definición 1.28. *El* ***espacio pequeño de Bloch****, denotado $\mathcal{B}_0$, es conjunto de funciones $f \in \mathcal{B}$ que cumplen*

$$\lim_{|z|\to 1} (1 - |z|^2)\, |f'(z)| = 0.$$

Toda función holomorfa en un abierto que contenga al disco cerrado pertenece a $\mathcal{B}_0$ dado que, en este caso, la derivada de la función está acotada (en módulo) en el disco unidad cerrado. Como consecuencia, todo polinomio pertenece al espacio de Bloch. De hecho, el espacio pequeño de Bloch coincide con la clausura de los polinomios en la norma del espacio de Bloch. Se omiten los detalles de la prueba, que pueden encontrarse en [4, p. 45].

Otros ejemplos de funciones en el espacio pequeño de Bloch son los productos de Blaschke finitos, que también son funciones analíticas en un abierto que contiene al disco cerrado. En efecto, este tipo de funciones son racionales con polos en los puntos $1/\overline{a}_n$, donde a_n, $n = 1, \ldots, N$, son los ceros no nulos del producto de Blaschke. Por lo tanto, la función es holomorfa en el disco $\{z \in \colon |z| < M\}$, donde $M = \min_{1\leq n\leq N}\{1/|a_n|\} > 1$.

También pertenecen a $\mathcal{B}_0$ las aplicaciones lentes definidas por (1.2), como se prueba en el siguiente lema.

Lema 1.29. *Todas las aplicaciones lente ℓ_s pertenecen a $\mathcal{B}_0$.*

Demostración. El resultado es obvio si $s = 0$ o si $s = 1$. Para $0 < s < 1$, observemos que existe $\ell_s'(z_0)$ para todo z_0 de módulo 1 distinto de 1 y de -1.

Si $z_0 = 1$ (o si $z_0 = -1$), una aplicación de la regla de L'Hopital prueba que

$$\lim_{z\to z_0} \ell_s(z) = z_0\,.$$

Aplicando la proposición 1.7, se tiene

$$\begin{aligned}0 &\leq \limsup_{z\to z_0} |\ell_s'(z)|(1-|z|^2) = \limsup_{z\to z_0} \frac{|\ell_s'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\ell_s(z)|^2}(1-|\ell_s(z)|^2)\\ &\leq s \lim_{z\to z_0} (1-|\ell_s(z)|^2) = 0\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que si $z \in \mathbb{D}$ y $|z-1| < R_1$ o $|z+1| < R_1$, resulta

$$|\ell_s'(z)|(1-|z|^2) < \varepsilon\,.$$

Consideremos ahora el compacto $K = \overline{\mathbb{D}} \setminus (D_1 \cup D_2)$, donde $D_1 = \{z \in \mathbb{D}\colon |z-1| < R_1\}$ y $D_2 = \{z \in \mathbb{D}\colon |z+1| < R_1\}$. Observemos que existe $\max_{z\in K} |\ell_s'(z)| = M$.

Basta tomar $R > 1 - R_1$ suficientemente cercano a 1 para obtener que $|\ell_s'(z)|(1-|z|^2) \leq M(1-|z|^2) < \varepsilon$ para todo $z \in K$ con $|z| > R$, lo que prueba el resultado. □

Es claro que los productos de Blaschke delgados no pertenecen al espacio pequeño de Bloch. Así, se tiene que $H^\infty \not\subset \mathcal{B}_0$.

1.3. Los espacios de Hardy

Muchos de los resultados que pretendemos destacar sobre las funciones en los espacios de Hardy se siguen de los correspondientes resultados para las funciones armónicas y subarmónicas. Por ello, comenzamos esta sección con dos apartados auxiliares. Enunciamos todas las definiciones y los resultados en los casos particulares en que las funciones están definidas en un disco, que será el caso a considerar en las secciones y capítulos siguientes.

1.3.1. Funciones armónicas y subarmónicas

Definición 1.30. *Una función real $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es* ***armónica*** *en un disco abierto del plano complejo si es de clase C^2 en ese disco y satisface*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad z = x + iy.$$

Es bien conocido que las partes real e imaginaria de una función holomorfa (y la propia función, por linealidad) son funciones armónicas. Otra propiedad de este tipo de funciones, conocida como la propiedad del valor medio, se recoge en el siguiente teorema, cuya demostración se omite por ser bien conocida. Puede encontrarse en [1, Sec. 6.2].

Teorema 1.31. *Sea u es una función armónica en un disco D y sea $z_0 \in D$. Entonces, para todo número real positivo r tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \subset D$ se tiene*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Las funciones armónicas no constantes no pueden alcanzar el valor máximo ni el mínimo en su dominio de definición. Por lo tanto, si una función armónica definida en $\mathbb{D}$ (o, más generalmente, en un disco $D(z_0, r)$ de centro z_0 y radio r) es continua en $\overline{D(z_0, r)}$, entonces alcanza el máximo y el mínimo en la frontera de este disco. Una consecuencia importante es que una función armónica definida en una región que contiene a un disco cerrado está unívocamente determinada por los valores frontera. La fórmula de Poisson determina la mencionada función.

Teorema 1.32. *Sea u una función armónica en el disco $D = \{w \in \mathbb{C}\colon |w| < R\}$ y continua en $\overline{D}$. Entonces, para todo $z = re^{i\varphi}$ con $r < R$,*

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|w-z|^2} u(w)\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R - 2rR\cos(\theta - \varphi) + r^2} u(Re^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

El teorema anterior resuelve el **problema de Dirichlet** en el disco D. Esto es, determina la solución u, armónica en D y continua en $\overline{D}$ que verifica las siguientes propiedades, dada cualquier función continua φ en ∂D:

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, \quad z \in D. \\ u(Re^{i\theta}) = \varphi(Re^{i\theta})\,, \ \theta \in [0, 2\pi]\,. \end{cases}$$

En otras palabras, la fórmula de Poisson (1.11) resuelve el problema de Dirichlet en un disco centrado en el origen.

Definición 1.33. *Una función real $u : D \to \mathbb{R}$ continua en el disco D es **subarmónica** si verifica la siguiente propiedad: para todo dominio B con $\overline{B} \subset D$ y para toda función U armónica en B y continua en $\overline{B}$ tal que $u(z) \le U(z)$ en ∂B, se tiene $u(z) \le U(z)$ en B.*

Otras definiciones equivalentes de este concepto son las que siguen. La demostración de la equivalencia se omite por cuestiones de espacio. Referimos al lector interesado a los libros [1] y [3].

Teorema 1.34. *Una función u es subarmónica en un disco D si para todo $z_0 \in D$ y para todo número real positivo r tal que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} \subset D$ se tiene*

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{1.12}$$

Esta condición es equivalente a que u sea de clase C^2 en ese disco y satisfaga $\Delta u \ge 0$.

Dada una función holomorfa f en el disco unidad y dado $p > 0$, se tiene que $u = |f|^p$ es una función subarmónica. La demostración de este hecho es como sigue. Tomemos $z_0 \in \mathbb{D}$. Si $f(z_0) = 0$, entonces se cumple (1.12) con $u = |f|^p$, de manera trivial. Si $f(z_0) \ne 0$, se tiene que f es distinta de cero en un disco de centro z_0 y radio R para algún $R > 0$. Por lo tanto, existe una rama analítica de f^p en ese disco (que es un dominio simplemente conexo). Como f^p es holomorfa, también es armónica. Entonces, se cumple

$$f^p(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^p(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Basta tomar módulos en la ecuación anterior y utilizar las desigualdades básicas para comprobar que también se verifica (1.12) en este caso.

Definición 1.35. *Una función f definida en $|z| < 1$ se dice que está **subordinada** a la función F si $f(z) = F(w(z))$ para alguna función analítica w en $|z| < 1$ que cumple $|w(z)| \le |z|$, $z \in \mathbb{D}$. En este caso, usamos la notación $f \prec F$.*

Lema 1.36. *Sea G una función subarmónica en $|z| < 1$, y sea $g \prec G$. Entonces, para todo* $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta. \tag{1.13}$$

Demostración. Sea $0 < r < 1$. Resolviendo el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta U(z) = 0\,, & |z| < r\,, \\ U(re^{i\theta}) = G(re^{i\theta})\,, & \theta \in [0, 2\pi]\,, \end{cases}$$

obtenemos una función armónica U en $|z| < r$ e igual a G en $|z| = r$. Entonces, por ser G subarmónica, se sigue que $G(z) \le U(z)$ para todo $|z| < r$.

Por hipótesis, existe una función analítica w en $|z| < 1$ que cumple $|w(z)| \le |z|$, $z \in \mathbb{D}$, y tal que $g = G \circ w$. Sea $u(z) = U(w(z))$, $|z| < r$, de manera que se tiene $g(z) \le u(z)$ en $|z| = r$. Luego, usando también la propiedad del valor medio y el hecho de que $w(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta &\le \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = u(0) \\ &= U(0) = \int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta. \end{aligned}$$

Esto es cierto para todo $r < 1$, lo que concluye la demostración.

□

1.3.2. Otros resultados auxiliares importantes

Definición 1.37. *La* ***variación total*** *de una función real (o compleja) f, continua en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es*

$$V_a^b(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

donde el conjunto $\mathcal{P} = \{P = \{x_0, \dots, x_{n_P}\} : P$ es una partición del intervalo $[a, b]$ que satisface $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n_P-1} < x_{n_P} = b\}$.

Se dice que f es una función de ***variación acotada*** *en $[a, b]$ cuando $V_a^b(f) < \infty$.*

Lema 1.38. *Toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones acotadas no decrecientes.*

Demostración. Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Sea

$$F(x) = Var[a, x] := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)|,$$

donde $\mathcal{P} = \{x_1, \dots x_n\}$ que satisfacen $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$.

Como f es de variación acotada, entonces F es acotada y por definición, no decreciente. Consideramos ahora $G = F - f$. Es trivial comprobar que G es acotada. Tomamos

$a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y debido a que $Var[a,x_1]+f(x_2)-f(x_1) \leq Var[a,x_1]+|f(x_2)-f(x_1)| \leq Var[a,x_2] = F(x_2)$, obtenemos finalmente que G es no decreciente

$$G(x_2) - G(x_1) = F(x_2) - f(x_2) - F(x_1) + f(x_1) \geq 0.$$

□

Definición 1.39. *Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n\geq 1}$ definidas en $[a,b]$, se dice que es **uniformemente acotada** en $[a,b]$ si existe $M > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in [a,b].$$

Lema 1.40. *Supongamos una sucesión uniformemente acotada de funciones crecientes $(\rho_j)_{j\geq 1}$ en un intervalo I. Entonces existe una subsucesión de $(\rho_j)_{j\geq 1}$ que converge puntualmente a una función creciente.*

Demostración. Sea $r_1, r_2, \ldots$ una sucesión densa en I, por ejemplo una enumeración de los números racionales en I. Por el teorema de Bolzano-Weirstrass, podemos encontrar una subsucesión $(\rho_j^1)_{j\geq 1}$ de $(\rho_j)_{j\geq 1}$ de tal manera que $\rho_j^1(r_1)$ converge cuando $j \to \infty$.

De manera similar, podemos obtener una subsucesión $(\rho_j^2)_{j\geq 1}$ de $(\rho_j^1)_{j\geq 1}$ de manera que $\rho_j^2(r_2)$ converge cuando $j \to \infty$. Y como $(\rho_j^2)_{j\geq 1}$ es una subsucesión de $(\rho_j^1)_{j\geq 1}$ se tiene que $\rho_j^2(r_1)$ converge cuando $j \to \infty$. Continuando de esta manera, obtenemos una sucesión de sucesiones $(\rho_j^k)_{j\geq 1}$, $k = 1, 2, \ldots$ de tal manera que cada sucesión cumple que $\rho(r_n) = \lim_{j\to\infty} \rho_j^k(r_n)$ existe para todo $n \leq k$.

Sea $x \in I$ no perteneciente a esa sucesión densa, se define $\rho(x) = \sup\{\rho(r_n) \colon r_n \leq x\}$ y se obtiene, así, una función no decreciente y acotada en I.

Para comprobar la convergencia puntual, supongamos que x es un punto de continuidad de ρ. Si $r_k < x < r_n$ tenemos

$$\rho_j^j(r_k) - \rho(r_n) \leq \rho_j^j(x) - \rho(x) \leq \rho_j^j(r_n) - \rho(r_k).$$

Dado un $\epsilon > 0$, podemos elegir k y n tal que $\rho(r_n) - \rho(r_k) < \epsilon$. Obtenemos que

$$-\epsilon \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\rho_j^j(x) - \rho(x)\right) \leq \limsup_{j\to\infty} \left(\rho_j^j(x) - \rho(x)\right) \leq \epsilon.$$

Por tanto, $(\rho_j^j)_{j\geq 1}$ converge puntualmente a ρ, excepto para posibles puntos de discontinuidad. Ahora bien, siendo ρ una función no decreciente y acotada, el conjunto de puntos de discontinuidad es, a lo sumo, numerable. Por lo tanto, basta repetir el proceso y extraer una nueva subsucesión que converja en estos puntos para obtener el resultado.

□

Como corolario de los dos lemas anteriores, se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 1.41 (Teorema de selección de Helly). *Sea $\{\mu_n(t)\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones de variación acotada en un intervalo finito $[a,b]$. Entonces existe una subsucesión $\{\mu_{n_k}(t)\}$ que converge puntualmente en $[a,b]$ a una función $\mu(t)$ de variación acotada.*

El núcleo de Poisson, es decir, la función

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}\,, \quad 0 \leq r < 1\,, \quad \theta \in [0,2\pi]\,, \tag{1.14}$$

tiene un gran importancia en el análisis complejo. Como el lector puede comprobar, coincide con la función en la integral (1.11) con $R = 1$. Este núcleo es la base en la siguiente definición.

Definición 1.42. *Una* ***integral de Poisson-Stieltjes*** *es una función de la forma:*

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)d\mu(t), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

donde $\mu(t)$ es una función de variación acotada en $[0,2\pi]$. Toda integral de Poisson-Stieltjes es armónica en $|z| < 1$.

Nótese que, por la periodicidad en la variable θ del núcleo de Poisson (1.14), la definición anterior es equivalente a:

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta - t)d\mu(t), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

con $\mu(t)$ una función de variación acotada en $[-\pi,\pi]$.

Finalmente, tenemos todas las herramientas para enunciar y demostrar el teorema principal de este apartado que tendrá importantes consecuencias.

Teorema 1.43. *Las 3 siguientes clases de funciones en $|z| < 1$ son equivalentes:*

(1) integrales de Poisson-Stieltjes;
(2) diferencias de dos funciones armónicas positivas;
(3) h^1, es decir, las funciones armónicas u en el disco unidad que verifican

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta < \infty\,.$$

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Utilizando el lema 1.38 podemos expresar $\mu(t)$ como diferencia de dos funciones acotadas no decrecientes y por tanto, toda integral de Posisson-Stieltjes es diferencia de dos funciones armónicas positivas.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Supongamos $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, donde u_1 y u_2 son funciones armónicas positivas. Entonces, por la desigualdad triangular y por la propiedad del valor medio para funciones armónicas, se tiene

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|d\theta \leq \int_0^{2\pi} u_1(re^{i\theta})d\theta + \int_0^{2\pi} u_2(re^{i\theta})d\theta = 2\pi[u_1(0) + u_2(0)] < \infty\,.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1). Dado $u \in h^1$, definimos

$$\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})d\theta.$$

Entonces $\mu_r(0) = 0$, y para $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu_r(t_k) - \mu_r(t_{k-1})| \leq \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Entonces las funciones μ_r son funciones uniformemente acotadas de variación acotada. Por el lema 1.41, existe una sucesión $\{r_n\}$ tendiendo a 1 y tal que $\mu_{r_n} \to \mu(t)$, con $\mu(t)$ una función de variación acotada en $0 \leq t \leq 2\pi$. Además, se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) u(r_n e^{i\theta}) dt = \\ &= \lim_{n\to\infty} u(r_n r e^{i\theta}) = u(re^{i\theta}). \end{aligned}$$

□

Ahora veamos algunos resultados para discutir el comportamiento de las integrales de Poisson-Stieltjes en la frontera.

Teorema 1.44. *Sea $u(z)$ una integral de Poisson-Stieltjes como en la definición 1.14 y definimos*

$$D\mu(\theta_0) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(\theta_0 + t) - \mu(\theta_0 - t)}{2t}.$$

Si existe $D\mu(\theta_0)$, entonces el límite radial, $\lim_{r\to 1} u(re^{i\theta_0})$, existe y coincide con $D\mu(\theta_0)$.

Demostración. Aplicando una rotación a u, podemos asumir $\theta_0 = 0$. Sea $A = D\mu(\theta_0)$, de manera que podemos escribir

$$\begin{aligned} u(r) - A &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) \, (d\mu(t) - A dt) \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} P(r, t) \, (\mu(t) - At) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mu(t) - At) \, \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mu(t) - At) \, \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \, . \end{aligned}$$

Sea $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$. Entonces,

$$\left| \frac{\partial P}{\partial t}(r, t) \right| = \left| \frac{-2r(1 - r^2) \sin \delta}{(1 - 2r \cos \delta + r^2)^2} \right| \leq \frac{2r(1 - r^2)}{(1 - 2r \cos \delta + r^2)^2} \to 0 \quad \text{cuando} \quad r \to 1.$$

Por lo tanto, para cada $\delta > 0$ fijo, $u(r) - A - I_\delta \to 0$ cuando $r \to 1$, donde

$$\begin{aligned} I_\delta &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} (\mu(t) - At) \, \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \left(\frac{\mu(t) - \mu(-t)}{2t} - A \right) t \left[-\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \right] dt \, . \end{aligned}$$

Por la definición de A, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t \leq \delta$,

$$\left| \frac{\mu(t) - \mu(-t)}{2t} - A \right| \leq \varepsilon \, .$$

Por lo tanto, para ese valor de δ

$$|I_\delta| \leq \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^\pi t \left| \frac{\partial P}{\partial t} \right| dt = \frac{\epsilon}{\pi} \int_0^\pi t \left(- \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt \,.$$

Utilizando también que las funciones t y $\frac{\partial P}{\partial t}$ son impares, resulta

$$|I_\delta| \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi t \left(- \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt \,.$$

Finalmente, integrando por partes la integral y utilizando la fórmula de Poisson (1.11) con $u \equiv 1$, resulta

$$|I_\delta| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi P(r,t) dt = \varepsilon$$

En consecuencia, $u(r) \to A$ cuando $r \to 1$, y la demostración está completa.

□

Como clara implicación de estos teoremas obtenemos lo siguiente.

Corolario 1.45. *Toda función $u \in h^1$ tiene límite radial en casi todo punto.*

1.3.3. Los espacios H^p, $1 \leq p < \infty$

Definición 1.46. *Sea f una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$ y sea $0 \leq p < \infty$. Se definen las **medias integrales de orden** p de la siguiente manera:*

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} .$$

Se dice que f pertenece al espacio H^p si

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r,f) < \infty. \tag{1.15}$$

De manera análoga, se definen los espacios de Hardy de funciones armónicas en el disco unidad, que serán denotados por h^p.

El resultado en el siguiente lema, además de tener como consecuencia directa que los espacios de Hardy son espacios vectoriales, será de gran utilidad.

Lema 1.47. *Sean $a, b \geq 0$ y $0 < p < \infty$. Entonces,*

$$(a+b)^p \leq 2^p (a^p + b^p) \,. \tag{1.16}$$

Demostración (Desigualdad). Si $a = 0$, la desigualdad (1.16) es obvia. En el resto de casos es equivalente a probar

$$(1+x)^p \leq 2^p (1+x^p), \quad x = \frac{b}{a} \geq 0.$$

Distinguimos según los distintos valores de p. En concreto, si $p = 1$, el resultado es trivial:

$$(1+x) \leq 2(1+x), \quad x \geq 0.$$

Para demostrar los casos $p < 1$, consideremos

$$f(x) = 2^p(1 + x^p) - (1 + x)^p\,, \quad x \geq 0\,.$$

Hemos de probar que f es positiva para $x \geq 0$. Estudiamos su derivada. Como $1/a^x$ es una función decreciente en la variable x para todo valor positivo $a > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) =& 2^p \cdot px^{p-1} - p(1 + x)^{p-1} \geq 2^p \cdot p \left(x^{p-1} - (1 + x)^{1-p}\right) = \\ & 2^p \cdot p \left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1 + x)^{1-p}}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Basta observar que $f(0) = 2^p - 1 \geq 0$ para concluir la demostración de este caso.

Por último, si $p > 1$, la función $\varphi(x) = x^p$, es una función convexa en $(0, +\infty)$. Por lo tanto,

$$\varphi\left(\frac{1 + x}{2}\right) \leq \frac{\varphi(1) + \varphi(x)}{2},$$

que era lo que queríamos demostrar.

□

El siguiente resultado se sigue directamente del lema anterior.

Proposición 1.48. *Una función analítica pertenece a H^p si y solo si sus partes real e imaginaria pertenecen a h^p.*

Demostración. Recordemos que si f es analítica entonces sus partes real e imaginaria son armónicas. Supongamos que $f \in H^p$. Entonces,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\,(f(z))|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^p d\theta < \infty,$$

luego la parte real de f pertenece a h^p. Que la parte imaginaria también está en este espacio se prueba de la misma manera.

Supongamos ahora que $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f \in h^p$. Utilizando la desigualdad (1.16), queda, para todo $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\,(f(re^{i\theta})) + i\,\mathrm{Im}\,(f(re^{i\theta}))|^p d\theta \\ &\leq \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Re}\,(f(re^{i\theta}))|^p d\theta + \frac{2^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathrm{Im}\,(f(re^{i\theta}))|^p d\theta\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $f \in H^p$. □

Como se ha mencionado anteriormente, la desigualdad (1.16) prueba que H^p y h^p son espacios lineales. No obstante, no es suficiente para comprobar que la expresión dada es una norma en los espacios H^p. De hecho, no lo es si $0 < p < 1$, aunque sí verifica la desigualdad triangular para los valores $p \geq 1$, como consecuencia directa de la desigualdad de Minkowsky que utiliza, para su demostración, la desigualdad de Hölder. Aunque omitimos el enunciado y la demostración de la desigualdad de Minkowsky por cuestiones de espacio, sí presentamos la desigualdad de Hölder, que será utilizada posteriormente.

Teorema 1.49 (Desigualdad de Hölder). *Sean* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* F *y* G *dos funciones medibles. Entonces, dados dos números reales* p *y* $q > 1$ *tales que* $1/p + 1/q = 1$,

$$\int_X |FG|\, d\mu \leq \left(\int_X |F|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |G|^q\, d\mu\right)^{1/q}. \tag{1.17}$$

La igualdad se da si y solo si se cumple que, en casi todo punto, $|F|^p$ *es un múltiplo constante de* $|G|^q$.

A pesar de haber excluido en el teorema anterior el caso $p = 1$ (que correspondería a $q = \infty$ para recoger los casos de igualdad, también es cierta la desigualdad de Hölder en estos casos, tomando el límite cuando q tiende a infinito, obteniendo, en el lado derecho de (1.17) el supremo esencial de la función $|G|$ en lugar de la integral.

En el siguiente teorema se enuncian las consecuencias directas más importantes de las desigualdades mencionadas. Remitimos al lector al libro de Rudin [18] para la demostración detallada.

Teorema 1.50. *Si* $1 \leq p < \infty$, *los espacios de Hardy con la norma dada por* (1.15) *son espacios de Banach separables. De hecho, coinciden con la clausura de los polinomios en la norma mencionada.*

Se verifica que si $1 \leq p < q \leq \infty$, *entonces* $H^q \subset H^p$. *En particular, el espacio* H^∞ *definido en la sección 1.1 está contenido en todos los espacios de Hardy* H^p, $p \geq 1$, *y todos ellos están contenidos en* H^1.

A partir de este momento, todos los espacios de Hardy que consideraremos en este trabajo serán los espacios H^p con $p \geq 1$. Puesto que todos ellos están contenidos en H^1, por el corolario 1.45, se tiene que todas las funciones en los espacios de Hardy mencionados tienen límite radial en casi todo punto de la circunferencia unidad. El resultado preciso es el siguiente.

Teorema 1.51. *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y sea* $f \in H^p$. *Entonces, para casi todo* $\theta \in [0, 2\pi]$, *existe la función límite radial*

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

Más aún, se tiene que

$$\|f\|_{H^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p\, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es fácil comprobar que los productos de Blaschke finitos tienen límite radial de módulo 1 en todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$. No obstante, este resultado no es necesariamente cierto para los productos de Blaschke infinitos, aunque se cumple el siguiente teorema (véase [3]).

Teorema 1.52. *Sea* B *un producto de Blaschke infinito. Entonces, la función límite radial* $B(e^{i\theta})$ *definida en el teorema 1.51 tiene módulo* 1 *en casi todo* $\theta \in [0, 2\pi]$.

De entre todos los espacios de Hardy mencionados, el espacio H^2 es el único que es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.53. *Sea* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* H^p *es un espacio de Hilbert si y solo si* $p = 2$.

Demostración. Recordemos que en todo espacio de Hilbert debe verificarse la identidad del paralelogramo, es decir, debe cumplirse, para todo par de funciones f y g en X,

$$\|f+g\|_X^2 + \|f-g\|_X^2 = 2\left(\|f\|_X^2 + \|g\|_X^2\right) .$$

Sean $X = H^p$, f la función idénticamente igual a 1 y $g = I$, la función identidad dada por $I(z) = z$. Ambas funciones tienen norma 1 en H^p para todo $p \in [1,\infty]$.

Por otro lado, $\|f+g\|_{H^\infty} = \|f-g\|_{H^\infty} = 2$, por lo que H^∞ no cumple esta identidad y no es, por tanto, un espacio de Hilbert.

Calcular la norma de las funciones $1+I$ y $1-I$ en otros espacios H^p no es tan sencillo. No obstante, sí es fácil ver que ambas funciones tienen la misma norma:

$$\begin{aligned}\|1+I\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{i\theta}|^p\, d\theta \\ &= 2^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+\cos\theta|^{\frac{p}{2}}\, d\theta = 2^{\frac{p}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1-\cos\theta|^{\frac{p}{2}}\, d\theta = \|1-I\|_{H^p}^p .\end{aligned}$$

Por lo tanto, si ha de cumplirse la identidad del paralelogramo para estas funciones en particular, debe tenerse $2\|1+I\|_{H^p}^2 = 4$, es decir, $\|1+I\|_{H^p}^2 = 2$. Esta identidad es claramente cierta en el caso $p = 2$ puesto que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\, d\theta = 1 .$$

Sea $p < 2$, de manera que existe $P > 1$ tal que $2 = pP$. Sea Q tal que $1/P + 1/Q = 1$. Utilizando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que $|1+e^{i\theta}|^p$ no es una función constante en casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$, se tiene

$$\begin{aligned}\|1+I\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{i\theta}|^p\, d\theta < \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{i\theta}|^{pP}\, d\theta\right)^{\frac{1}{P}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1|^Q\, d\theta\right)^{\frac{1}{Q}} \\ &= \|1+I\|_{H^2}^p .\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|1+I\|_{H^p}^2 < \|1+I\|_{H^2}^2 = 2$.

El caso $p > 2$ es análogo. Concretamente, tomando $P > 1$ tal que $p = 2P$ (y Q como antes), resulta

$$2 = \|1+I\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{i\theta}|^2\, d\theta < \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{i\theta}|^{2P}\, d\theta\right)^{\frac{1}{P}} = \|1+I\|_{H^p}^2 .$$

El hecho de que la transformación

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, d\theta\,, \tag{1.18}$$

donde $f(e^{i\theta})$ y $g(e^{i\theta})$ son las funciones límites radiales de f y g, respectivamente, dadas por el teorema 1.51, sea un producto escalar en H^2, finaliza la demostración. $\square$

Es muy fácil comprobar que los monomios $(z^n)_{n\geq 0}$ forman un sistema ortonormal en H^2: También, que si f tiene desarrollo en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ y pertenece a H^2, entonces

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 .$$

El último teorema que mencionamos en esta sección es el siguiente.

Teorema 1.54 (Teorema de Riesz). *Toda función f no idénticamente nula en H^p $(p \geq 1)$ puede ser factorizada de la forma $f = Bg$, donde B es un producto de Blashke y g es una función de H^p que no se anula en el disco unidad. Más aún, $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$.*

Demostración. El resultado es claramente cierto si suponemos que f tiene un número finito de ceros en el disco. Supongamos, por tanto, que los ceros de f son infinitos. Denotemos a los ceros no nulos de f por a_k, $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$.

Sean

$$B_n(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$$

y $g_n(z) = f(z)/B_n(z)$.

Fijado un número natural n y un número real $\varepsilon > 0$, es fácil ver que $|B_n(z)| > 1 - \varepsilon$ para $|z|$ suficientemente cerca de 1. Por tanto,

$$\int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq (1-\varepsilon)^{-p} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq (1-\varepsilon)^{-p} M$$

para r suficientemente grande y, por lo tanto, para todo $r \in (0,1)$. Así, dejando que ε tienda a cero, resulta que, para todo n,

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p d\theta \leq M.$$

Por el teorema 1.9, g_n tiende a $g = f/B$ uniformemente en cada circunferencia $|z| = R < 1$ y por tanto $g \in H^p$.

Veamos que $g(z)$ no tiene ceros. Supongamos, para llegar a contradicción, que $g(z_k) = 0$, de manera que, entonces, $f(z_k) = 0$. Pero, por la construcción de B, también debe cumplirse que $B(z_k) = 0$, siendo la multiplicidad del cero z_k de B la misma que la de f. Esto da lugar a la buscada contradicción:

$$g(z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{f(z)}{B(z)} \neq 0.$$

Para comprobar que las normas de f y g coinciden, basta utilizar el teorema 1.52:

$$\|f\|_{H^p}^p = \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})|^p |g(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta\,.$$

$\square$

El teorema de Riesz es una herramienta fundamental en el estudio de los espacios de Hardy, pues permite reducir en muchos casos el problema a considerar al caso del espacio de Hilbert H^2. La reducción a aplicar se basa en que, dada una función f holomorfa y sin ceros en el disco (que es un dominio simplemente conexo), es posible determinar una rama analítica del logaritmo complejo de manera que la potencia $f^{2/p}$ resulte analítica en $\mathbb{D}$.

1.4. Espacios de Bergman con peso estándar

Denotaremos por dA a la medida de área de Lebesgue normalizada del disco unidad $\mathbb{D}$. Esto es

$$dA(z) = \frac{dxdy}{\pi} = \frac{rdrd\theta}{\pi}, \quad z = x + iy = re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Definición 1.55. *Para $0 < p < \infty$ y $-1 < \alpha < \infty$, se definen los* ***espacios de Bergman de peso estándar*** *A^p_α como el conjunto de funciones analíticas del disco unidad tales que*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, (1 - |z|^2)^\alpha \, dA(z) < \infty.$$

Cuando $\alpha = 0$ obtenemos los ***espacios clásicos de Bergman****, denotados por A^p.*

Observemos que se tiene, usando coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) = (\alpha + 1) \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right) 2r(1 - r^2)^\alpha \, dr,$$

de manera que resulta, claramente, que $H^p \subset A^p_\alpha$.

Al igual que en el caso de los espacios de Hardy, nos centraremos en los valores $p \geq 1$. En estos casos, son espacios de Banach con la norma

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \right)^{1/p}.$$

También es cierto que los espacios A^2_α son espacios de Hilbert con producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{A^2_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} \, dA_\alpha(z).$$

Esta expresión para el producto escalar nos permite obtener el valor de la norma en términos de los coeficientes de Taylor, como en el caso del espacio de Hardy H^2. En particular, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.56. *Sea $f \in A^2$ de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces,*

$$\|f\|^2_{A^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

2

Continuidad de los operadores de composición en algunos espacios clásicos de funciones analíticas

Dada una autoaplicación del disco unidad $\mathbb{D}$, es decir, una función φ holomorfa en el disco unidad con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, el operador de composición con símbolo φ viene dado por la fórmula

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)),$$

donde f es una función analítica en el disco unidad.

Claramente, este tipo de operadores son lineales: dado $\lambda \in \mathbb{C}$ y funciones analíticas f y g en el disco, se cumple que $C_\varphi(\lambda f) = \lambda C_\varphi(f)$ y $C_\varphi(f+g) = C_\varphi(f) + C_\varphi(g)$.

De hecho, gracias al principio de unicidad de las funciones holomorfas y al teorema de la aplicación abierta, son operadores inyectivos siempre que φ no sea constante, que es el caso interesante a estudiar. En efecto, si $C_\varphi(f) = C_\varphi(g)$, entonces las funciones f y g coinciden en el abierto $\varphi(\mathbb{D})$ y son, por tanto iguales.

En este capítulo se plantea analizar cuándo estos operadores lineales resultan ser acotados en los espacios clásicos de funciones analíticas presentados en el capítulo 1. Así mismo, se incluye una sección que recoge los detalles sobre las normas de los operadores de composición acotados en los distintos espacios considerados. Todos los resultados se basan en [2], [19] y [12]. No obstante, algunos de los teoremas en la sección 2.3 forman parte del manuscrito [11], que no está publicado. No conocemos ninguna referencia en la literatura que recoja el resultado en la proposición 2.10 aunque suponemos que es conocido por los expertos.

2.1. Continuidad de los operadores de composición en los espacios de Hardy y de Bergman con peso estándar

Recordemos las siguientes definiciones sobre la continuidad y la acotación de operadores lineales en espacios normados.

Definición 2.1. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. Entonces $T : X \to Y$ es* ***acotado*** *si existe una constante $M > 0$ tal que para todo $x \in X$,*

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X .$$

El operador es ***continuo en el punto*** *$x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $\|x - y\|_X < \delta$ entonces $\|Tx - Ty\|_Y < \epsilon$. T es* ***continuo*** *si es continuo en todo $x \in X$.*

El siguiente teorema es bien conocido. Se omiten los detalles de la prueba, que es sencilla.

Teorema 2.2. *Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espacios normados y sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal. Son equivalentes:*

(1) T *es acotado,*
(2) T *es continuo,*
(3) T *es continuo en* $x = 0$.

La demostración de que todo operador de composición está acotado en los espacios de Hardy H^p, $1 \le p < \infty$, y en los espacios de Bergman con peso estándar A^p_α, $1 \le p < \infty$ y $\alpha > -1$, se sigue del teorema de subordinación de Littlewood, consecuencia del lema 1.36. Recordemos que la notación $f \prec F$ significa que existe una autoaplicación del disco w que fija el origen tal que $f = F \circ w$.

Teorema 2.3 (Teorema de subordinación de Littlewood). *Sea* F *una función analítica en el disco unidad y* $0 < p < \infty$. *Si* $f \prec F$, *entonces para* $0 < r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta. \tag{2.1}$$

Demostración. Basta aplicar el lema 1.36 a la función $G = |F|^p$ que, como se ha demostrado en la sección 1.3.1, es subarmónica para toda función holomorfa f.

□

Veamos ahora que todo operador de composición está acotado en los espacios de Hardy y en los espacios de Bergman con peso.

Teorema 2.4. *Sea* φ *es una función analítica definida en el disco unidad con* $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. *Entonces,* C_φ *es un operador continuo en los espacios de Hardy* H^p, $1 \le p < \infty$.

Demostración. Siendo C_φ un operador lineal, basta comprobar que C_φ es un operador acotado en los espacios considerados.

Supongamos, en primer lugar, que $\varphi(0) = 0$. Tenemos que comprobar (nótese que estamos considerando que $C_\varphi(f)$ es una función holomorfa en el disco unidad siempre que f lo sea) que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|C_\varphi(f)\|_{H^p} \le M\|f\|_{H^p}\,, \quad f \in H^p\,.$$

Para ello, basta observar que la desigualdad anterior es equivalente a comprobar que

$$\lim_{r\to 1^-}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f\circ\varphi)(re^{i\theta})|^p d\theta\right) \le \lim_{r\to 1^-}\left(\frac{M^p}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right),$$

que se sigue de (2.1), tomando $M = 1$.

El caso siguiente a considerar es cuando φ es uno de los automorfismos φ_a, $a \in \mathbb{D}$, definidos en (1.1). Veamos que existe $M > 0$ tal que

$$\|C_{\varphi_a}(f)\|_{H^p} \le M\|f\|_{H^p}\,, \quad f \in H^p\,. \tag{2.2}$$

Para ello, sea $f \in H^p$. De hecho, podemos suponer que f es un polinomio ya que estos son densos en H^p. Con el cambio de variable $\varphi_a(e^{i\theta}) = e^{it}$ y por la desigualdad triangular obtenemos,

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_a\|_{H^p}^p &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\varphi_a(e^{i\theta}))|^p d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p|\varphi_a'(e^{it})|dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{it}|^2}dt\\ &\leq \frac{1-|a|^2}{(1-|a|)^2}\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p dt\right) = \frac{1+|a|}{1-|a|}\cdot\|f\|_{H^p}^p\,,\end{aligned}$$

que es, justamente, (2.2) con

$$M = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p}.$$

Para el caso general en el que φ no fija el origen ni es, necesariamente, uno de los automorfismos especiales φ_a, argumentamos como sigue.

Observemos que si $\varphi(0)=a$, la función $\psi_a=\varphi_a\circ\varphi$ es una autoaplicación del disco que cumple $\psi_a(0)=0$. Además,

$$C_\varphi(f) = f\circ\varphi_a\circ\psi_a = C_{\psi_a}\left(C_{\varphi_a}(f)\right).$$

Por lo tanto, para toda f en H^p, se tiene, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente,

$$\|C_\varphi(f)\|_{H^p} = \|C_{\psi_a}\left(C_{\varphi_a}(f)\right)\|_{H^p} \leq \|C_{\varphi_a}(f)\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p}\|f\|_{H^p}\,.$$

□

Veamos ahora la continuidad en los operadores de composición en los espacios de Bergman con peso estándar.

Teorema 2.5. *Sea φ una autoaplicación del disco y sea f una función en el espacio A^p_α, $1\leq p<\infty$, $\alpha>-1$. Entonces,*

$$\|C_\varphi(f)\|_{A^p_\alpha} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{|2-\alpha|/p}\|f\|_{A^p_\alpha}\,.$$

Es decir, C_φ es un operador continuo en A^p_α.

Demostración. El resultado se sigue fácilmente utilizando un procedimiento similar al de la prueba del teorema 2.4 y usando, de nuevo, el teorema de subordinación de Littlewood tras utilizar el teorema de Fubini.

Concretamente, supongamos, en primer lugar, que $\varphi(0)=0$. Entonces, por el teorema de subordinación de Littlewood, resulta:

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(f)\|_{A^p_\alpha}^p &= (\alpha+1)^p\int_0^1 2r(1-r^2)^\alpha\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(f\circ\varphi)(re^{i\theta})|^p\right)dr\\ &\leq (\alpha+1)^p\int_0^1 2r(1-r^2)^\alpha\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\frac{d\theta}{2\pi}\right)dr = \|f\|_{A^p_\alpha}^p.\end{aligned}$$

En el caso de que φ sea uno de los automorfismos φ_a definidos en (1.1). El cambio de variable $\varphi_a(z)=w$, que da lugar, por ser φ_a una aplicación involutiva, a la identidad

$dA(z) = |\varphi_a'(w)|^2 dA(w)$, junto con el lema de Schwarz-Pick 1.5, da lugar a la siguiente estimación.

$$\begin{aligned}
\|C_{\varphi_a}(f)\|_{A^p_\alpha}^p &= (\alpha+1)^p \int_{\mathbb{D}} |f(\varphi_a(z))|^p (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= (\alpha+1)^p \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1-|\varphi_a(w)|^2)^\alpha |\varphi_a'(w)|^2 dA(w) \\
&= (\alpha+1)^p \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p (1-|w|^2)^\alpha |\varphi_a'(w)|^{2-\alpha} dA(w) \\
&\leq \left(\max_{|z|=1} |\varphi_a'(z)|^{2-\alpha} \right) \|f\|_{A^p_\alpha}^p .
\end{aligned}$$

Observemos que si $\alpha \leq 2$,

$$|\varphi_a'(z)|^{2-\alpha} = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \right)^{2-\alpha} \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{2-\alpha} .$$

Por otro lado, si $2-\alpha < 0$,

$$|\varphi_a'(z)|^{2-\alpha} = \left(\frac{|1-\bar{a}z|^2}{1-|a|^2} \right)^{\alpha-2} \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|} \right)^{\alpha-2} .$$

La demostración de este teorema concluye siguiendo la misma línea que en la demostración del teorema 2.4. □

2.2. Continuidad de los operadores de composición en el espacio de Bloch y el espacio pequeño de Bloch

Para probar que todo operador de composición está acotado en el espacio de Bloch, usaremos los resultados expuestos en la sección 1.2. Hasta donde conocemos, la cota proporcionada más adelante, en la ecuación (2.3), es la mejor cota conocida. No hemos encontrado una referencia salvo el trabajo en preparación [11] aunque, posiblemente, esta estimación sea conocida por los expertos en el área.

Teorema 2.6. *Todo operador de composición C_φ es continuo en el espacio de Bloch.*

Demostración. Sean $\rho(0, \varphi(0))$ la distancia hiperbólica entre los puntos 0 y $\varphi(0)$, tal y como se define en (1.6) y sea

$$\|\varphi^*\| = \sup_{|z|<1} \frac{|\varphi'(z)|\,(1-|z|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)} .$$

Sea $f \in \mathcal{B}$. Entonces, por el lema 1.5 y el corolario 1.25,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|_{\mathcal{B}} = \|f \circ \varphi\|_{\mathcal{B}} &= |f(\varphi(0))| + \sup_{|z|<1} |f'(\varphi(z))||\varphi'(z)| \left(1-|z|^2\right) \\
&= |f(\varphi(0))| + \sup_{|z|<1} |f'(\varphi(z))| \left(1-|\varphi(z)|^2\right) \frac{|\varphi'(z)|\,(1-|z|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)} \\
&\leq \rho(0, \varphi(0)) \cdot s(f) + |f(0)| + \|\varphi^*\| \sup_{z \in \varphi(\mathbb{D})} |f'(z)|(1-|z|^2)
\end{aligned}$$

$$\leq |f(0)| + (\rho(0, \varphi(0)) + \|\varphi^*\|)\, s(f)$$
$$\leq \text{máx}\,\{1, \rho(0, \varphi(0)) + \|\varphi^*\|\}\, \|f\|_{\mathcal{B}} \,.$$

Por lo tanto, se cumple que $\|C_\varphi(f)\|_{\mathcal{B}} \leq M\|f\|_{\mathcal{B}}$, para

$$M = \text{máx}\,\{1, \rho(0, \varphi(0)) + \|\varphi^*\|\}\ . \tag{2.3}$$

Es decir, el operador de composición C_φ está acotado en el espacio de Bloch y es, por tanto, continuo.

□

Finalmente, consideramos el caso del espacio pequeño de Bloch $\mathcal{B}_0$. Como veremos, en este espacio se requiere una condición adicional sobre el símbolo φ del operador de composición C_φ para que resulte ser continuo en $\mathcal{B}_0$. El resultado se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea φ una autoaplicación del disco. Entonces, C_φ es un operador continuo en $\mathcal{B}_0$ si y solo si $\varphi \in \mathcal{B}_0$.*

Demostración. Si el operador C_φ es acotado en $\mathcal{B}_0$, como la función identidad $I(z) = z$ pertenece a $\mathcal{B}_0$, se tiene que $\varphi = C_\varphi I$ pertenece a $\mathcal{B}_0$.

Supongamos ahora que $\varphi \in \mathcal{B}_0$. Sea f una función en este espacio. Los mismos argumentos que los usados en la demostración del teorema 2.6 muestran que $f \circ \varphi \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, para concluir la prueba, basta ver que $f \circ \varphi \in \mathcal{B}_0$. Puesto que esta condición es clara si f es idénticamente nula, suponemos que $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$. Seguimos el procedimiento explicado en [7].

Sea $f \in \mathcal{B}_0$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| = 0\,.$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $(1 - |z|^2)\,|f'(z)| < \varepsilon$ cuando $|z| > \sqrt{1-\delta_1}$. De la misma manera, como $\varphi \in \mathcal{B}_0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|z| > \sqrt{1-\delta_2}$,

$$\left(1 - |z|^2\right) |\varphi'(z)| < \frac{\delta_1}{\|f\|_{\mathcal{B}}}\varepsilon\,.$$

Debemos probar que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(1 - |z|^2\right) |(f\circ\varphi)'(z)| = 0\,.$$

Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $|z| > \sqrt{1-\delta}$.

Si $|\varphi(z)| > \sqrt{1-\delta_1}$, entonces, por el lema de Schwarz-Pick 1.5 y por lo mencionado anteriormente,

$$\begin{aligned}(1 - |z|^2)|(f\circ\varphi)'(z)| &= |f'(\varphi(z))|(1 - |\varphi(z)|^2)\frac{|\varphi'(z)|\,(1 - |z|^2)}{(1 - |\varphi(z)|^2)} \\ &\leq |f'(\varphi(z))|(1 - |\varphi(z)|^2) < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Si $|\varphi(z)| \leq \sqrt{1-\delta_1}$, se tiene entonces que $1/(1 - |\varphi(z)|^2) \leq 1/\delta_1$, por lo tanto,

$$(1 - |z|^2)|(f\circ\varphi)'(z)| = \frac{|f'(\varphi(z))|(1 - |\varphi(z)|^2)}{(1 - |\varphi(z)|^2)}|\varphi'(z)|\left(1 - |z|^2\right)$$

$$\leq \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{\delta_1} |\varphi'(z)| \left(1 - |z|^2\right) < \varepsilon \,.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \left(1 - |z|^2\right) |(f \circ \varphi)'(z)| < \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| < \varepsilon.$$

□

2.2.1. Algunos ejemplos

Como se ha mencionado, los productos de Blaschke finitos pertenecen a $\mathcal{B}_0$. Así, todo operador de composición inducido por un producto de Blaschke finito es continuo en *todos* los espacios de funciones analíticas considerados en este capítulo.

Los productos de Blaschke delgados con ceros a_n (que, necesariamente se acumulan en $|z| = 1$) considerados en la sección 1.1 , verifican

$$\lim_{n\to\infty} |B'(a_n)|(1 - |a_n|^2) = 1 \,.$$

Por lo tanto, este tipo de productos de Blaschke no pertenecen al espacio pequeño de Bloch. Así, inducen operadores de composición que no son acotados en el espacio $\mathcal{B}_0$, aunque sí lo son en los espacios de Hardy H^p, $1 \leq p < \infty$, en los espacios de Bergman con peso estándar A^p_α, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$ y en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$.

2.3. Norma de los operadores de composición

La norma de un operador lineal acotado (y, en particular de un operador de composición C_φ) en un espacio de Banach X puede calcularse de distintas maneras. Algunas de ellas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \|C_\varphi\| &= \sup_{f\in X\colon \|f\|_X = 1} \|C_\varphi(f)\|_X = \sup_{f\in X\colon \|f\|_X \neq 0} \frac{\|C_\varphi(f)\|_X}{\|f\|_X} \\ &= \inf\{M > 0\colon \|C_\varphi(f)\|_X \leq M\|f\|_X\} \,. \end{aligned}$$

El cálculo exacto de la norma de un operador de composición C_φ es considerado un problema difícil. Como ejemplo, podemos mencionar que en el espacio de Hardy H^2, se conoce esta norma cuando el símbolo es una función interna, es decir, una autoaplicación del disco cuya función límite radial tiene módulo 1 en casi todo punto de la circunferencia unidad. También, cuando es de la forma $\varphi(z) = az + b$, con $|a| + |b| \leq 1$. Estos resultados pueden encontrarse en [2] y [19]. Para obtenerlos, los autores usan técnicas distintas de las explicadas en este trabajo. Una situación similar ocurre en el caso de los espacios de Bergman con peso estándar, en los espacios de Bloch y el espacio pequeño de Bloch: tampoco es conocido, en general, el valor exacto de la norma de un operador de composición. No obstante, en estos últimos casos, sí se conoce el valor de $\|C_\varphi\|$ considerando los llamados *espacios de Bloch conciente*, como explicaremos en esta sección. Antes de hacerlo, comenzamos con algunos resultados generales y algunas estimaciones para las normas de los operadores de composición, sencillos de obtener.

Teorema 2.8. *Sea C_φ un operador de composición en el espacio de Hardy H^p, $1 \leq p < \infty$. Entonces,*

(i)

$$\|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{1/p}.$$

(ii) *Si* $\varphi(0)=0$, $\|C_\varphi\|=1$.

(iii) *Dado un autormorfismo* φ_a *de la forma* (1.1),

$$\|C_{\varphi_a}\| = \left(\frac{1+|\varphi_a(0)|}{1-|\varphi_a(0)|}\right)^{1/p}.$$

Demostración. La demostración de (i) se sigue de la prueba del teorema 2.4.

En el caso de que $\varphi(0)=0$, se tiene que $\|C_\varphi\| \leq 1$ por el apartado (i). Como la función idénticamente 1 pertenece a H^p y tiene norma 1, se tiene que $\|C_\varphi\| \geq \|C_\varphi(1)\| = 1$. Esto demuestra (ii).

El hecho de que

$$\|C_{\varphi_a}\| \leq \left(\frac{1+|\varphi_a(0)|}{1-|\varphi_a(0)|}\right)^{1/p}$$

se sigue de (i). Para demostrar la desigualdad contraria, observemos que, dado $\alpha \in \mathbb{D}$, la función $z \mapsto 1/(1-\overline{\alpha}z)$ no se anula en el disco, que es simplemente conexo. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema de Cauchy para concluir que existe una rama analítica en $\mathbb{D}$ de la potencia $2/p-$ésima de esta función. Sea, entonces,

$$k_\alpha(z) = \frac{1}{(1-\overline{\alpha}z)^{2/p}}$$

la función holomorfa en $\mathbb{D}$ determinada por esa rama analítica. Veamos que estas funciones pertenecen a H^p, $1 \leq p < \infty$, y calculemos su norma.

En efecto, usando la expresión de la norma en términos de los coeficientes de Taylor de las funciones en el espacio e Hardy H^2,

$$\|k_\alpha\|_{H^p}^p = \left\|\frac{1}{1-\overline{\alpha}z}\right\|_{H^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}.$$

Por lo tanto, $k_\alpha \in H^p$ y $\|k_\alpha\|_{H^p} = (1-|\alpha|^2)^{-1/p}$.

Un razonamiento análogo y unos cálculos directos muestran que,

$$\|k_\alpha \circ \varphi_a\|_{H^p}^p = \frac{1}{|1-\overline{\alpha}a|^2}\left\|\frac{1-\overline{a}z}{1-\mu z}\right\|_{H^2}^2 = \frac{1+|a|^2-2Re\{\mu\overline{a}\}}{(1-|a|^2)(1-|\alpha|^2)}, \quad \mu = \frac{\overline{a}-\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}a}.$$

Así, si tomamos $\alpha = (a|a|-r\overline{a})/(|a|-\overline{a}^2r)$ con $r<1$ suficientemente cerca de 1, obtenemos $\mu = -ra/|a|$ y

$$\|C_{\varphi_a}\| \geq \lim_{r\to 1^-} \frac{\|K_\alpha \circ \varphi_a\|_{H^p}}{\|K_\alpha\|_{H^p}} = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p} = \left(\frac{1+|\varphi_a(0)|}{1-|\varphi_a(0)|}\right)^{1/p}.$$

□

Resultados análogos pueden obtenerse en los espacios clásicos de Bergman $A^p = A^p_0$ considerando (cambiando los exponentes $1/p$ por $2/p$ en el teorema anterior). También en otros espacios de Bergman con peso estándar A^p_α, $\alpha > -1, \alpha \neq 0$, aunque en este último caso los cálculos directos se complican y es más habitual utilizar otras técnicas para llegar al resultado correspondiente que omitimos en este trabajo.

Consideramos, a continuación, la norma de los operadores de composición en el espacio de Bloch. El teorema análogo al teorema 2.8 es el siguiente.

Teorema 2.9. *Sea C_φ un operador de composición acotado en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$. Entonces,*

(i)
$$\|C_\varphi\| \leq \text{máx}\{1, \rho(0,\varphi(0)) + \|\varphi^*\|\} ,$$
donde $\rho(0,\varphi(0))$ es la distancia hiperbólica entre los puntos 0 y $\varphi(0) \in \mathbb{D}$, dada por (1.6), y
$$\|\varphi^*\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|(1-|z|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)} .$$

(ii) Si se tiene, utilizando los mismos términos que en el apartado anterior, que
$$\text{máx}\{1, \rho(0,\varphi(0)) + \|\varphi^*\|\} = 1 .$$
En particular si $\varphi(0) = 0$, $\|C_\varphi\| = 1$.

(iii) Dado un autormorfismo φ_a de la forma (1.1),
$$\|C_{\varphi_a}\| = 1 + \rho(0,\varphi_a(0)) .$$

Demostración. La estimación proporcionada en (i) fue obtenida en la demostración del teorema 2.6.

La prueba de (ii) sigue los mismos argumentos que la demostración del correspondiente apartado en el teorema 2.8: basta observar que la función idénticamente 1 pertenece al espacio de Bloch y tiene norma 1.

Finalmente, para demostrar (iii), observamos que si $a = 0$, el resultado se sigue del apartado (ii). Si $a \neq 0$, utilizamos el lemma de Schwarz-Pick para obtener que $\|\varphi_a^*\| = 1$, de manera que
$$\text{máx}\{1, \rho(0,\varphi(0)) + \|\varphi^*\|\} = 1 + \rho(0,\varphi_a(0))$$
y se tiene, entonces,
$$\|C_\varphi\| \leq 1 + \rho(0,\varphi_a(0)) .$$

Tomando la función $f = L_{\frac{\bar{a}}{|a|}}$ dada por (1.9), que pertenece al espacio de Bloch y tiene norma 1, se obtiene
$$\begin{aligned} \|f\circ\varphi_a\|_{\mathcal{B}} &= |f(a)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\varphi_a'(z)|(1-|z|^2)}{\left|1-\left(\frac{\bar{a}}{|a|}\right)^2 \varphi_a^2(z)\right|} \\ &\geq \rho(0,|a|) + \frac{|\varphi_a'(0)|}{1-|\varphi_a(0)|^2} = \rho(0,|a|) + 1 , \end{aligned}$$
lo que demuestra que
$$\|C_{\varphi_a}\| = \rho(0,|a|) + 1 .$$
□

En el caso del espacio pequeño de Bloch, los resultados en los apartados (i) e (ii) del teorema anterior son, exactamente, los mismos. No obstante, para demostrar la cota inferior en el apartado (iii), debemos utilizar argumentos diferentes puesto que las funciones L_λ utilizadas en el teorema 2.6 no pertenecen al espacio pequeño de Bloch. No obstante, podemos modificarlas de manera apropiada para obtener un análogo. No hemos conseguido encontrar una referencia explícita que recoja este resultado.

Proposición 2.10. *El operador C_{φ_a} en el espacio pequeño de Bloch, inducido por un automorfismo de la forma (1.1), satisface*

$$\|C_{\varphi_a}\| = \rho(0, \varphi_a(0)) + 1\,.$$

Demostración. El caso $a = 0$ se sigue, como en la demostración del teorema anterior, del hecho de que la función idénticamente 1 pertenece al espacio pequeño de Bloch, tiene norma 1 y cumple que $\|C_{\varphi_a}(1)\| = 1 = \rho(0, \varphi_a(0)) + 1$.

Supongamos, por tanto, que $a \neq 0$ y consideremos, para $0 < r < 1$, las funciones $f_r(z) = L_{\frac{\bar{a}}{|a|}}(rz)$ que pertenecen al espacio pequeño de Bloch. Se sigue

$$\begin{aligned}
\|C_{\varphi_a}\| &\geq \lim_{r\to 1^-} \frac{\|C_{\varphi_a}(f_r)\|}{\|f_r\|} = \lim_{r\to 1^-} \frac{\rho(0, r|a|) + r\sup_{|z|<1} \frac{|\varphi_a'(z)|(1-|z|^2)}{\left|1-\left(\frac{\bar{a}}{|a|} r\varphi_a(z)\right)^2\right|}}{r} \\
&\geq \lim_{r\to 1^-} \frac{\rho(0, r|a|) + r\frac{|\varphi_a'(0)|}{\left|1-\left(\frac{\bar{a}}{|a|} r\varphi_a(0)\right)^2\right|}}{r} = \lim_{r\to 1^-} \frac{\rho(0, r|a|) + r\frac{(1-|a|^2)}{(1-r|a|^2)}}{r} \\
&= \rho(0, |a|) + 1\,.
\end{aligned}$$

□

2.3.1. Los espacios de Bloch cociente

El valor exacto de la norma de un operador de composición C_φ en el espacio de Bloch y en el espacio pequeño de Bloch no se sabe calcular para un símbolo general φ. No obstante, este es un resultado conocido desde finales del siglo pasado, y debido a Montes-Rodríguez (véase [12]), en los llamados *espacios de Bloch cociente* que definimos a continuación.

Definición 2.11. *Sean f y g funciones en el espacio de Bloch. Se define la relación de equivalencia $\sim$ como sigue:*

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \text{ es constante.}$$

El conjunto de las clases de equivalencia bajo esta relación es el espacio de Bloch módulo funciones contantes y se denota $\mathcal{B}/\mathbb{C}$ (o, de manera completamente análoga, considerando funciones en $\mathcal{B}_0$ y la misma relación de equivalencia, el espacio pequeño de Bloch cociente $\mathcal{B}_0/\mathbb{C}$).

Observemos que cada clase de equivalencia según la relación anterior viene reprensentada por la función f en esa clase que cumple $f(0) = 0$. Abusando de la notación, representaremos a la clase de equivalencia $[f]$ en $\mathcal{B}/\mathbb{C}$ por f, entendiendo que $f(0) = 0$. La norma, en este espacio, viene dada, entonces, por

$$\|f\|_{\mathcal{B}/\mathbb{C}} = \sup_{|z|<1} |f'(z)| \left(1 - |z|^2\right).$$

Teorema 2.12. *Todo operador de composición está acotado en $\mathcal{B}/\mathbb{C}$. Además,*

$$\|C_\varphi\| = \sup_{|z|<1} |\varphi^*(z)| = \|\varphi^*\|. \tag{2.4}$$

Demostración. Basta seguir las pautas mostradas en las pruebas de los teoremas sobre los operadores de composición en el espacio de Bloch en este capítulo. Omitimos los detalles. □

Teorema 2.13. *Un operador de composición C_φ está acotado en $\mathcal{B}_0/\mathbb{C}$ si y solo si $\varphi \in \mathcal{B}_0$. En este caso,*

$$\|C_\varphi\| = \sup_{|z|<1} |\varphi^*(z)| = \|\varphi^*\|. \tag{2.5}$$

Demostración. Al igual que en el teorema anterior, la demostración de que C_φ está acotado en $\mathcal{B}_0/\mathbb{C}$ si y solo si $\varphi \in \mathcal{B}_0$ es completamente análoga a la del correspondiente resultado en el espacio pequeño de Bloch.

En cuanto al cálculo de la norma, debemos mencionar que Montes-Rodríguez, en [12] utiliza argumentos de dualidad para obtener el resultado. No obstante, se sigue directamente utilizando las funciones f_r consideradas en la prueba de la proposición 2.10. De nuevo, omitimos los detalles por ser completamente análogos a los ya considerados en la demostración de esa proposición. □

En los espacios usados en este apartado, es posible definir fácilmente operadores de composición C_φ tal que $\|C_\varphi\| = s$ para cualquier valor $s \in (0,1)$. Para ello, basta considerar las aplicaciones lente ℓ_s definidas en (1.2), que cumplen $\|\ell_s^*\| = s$.

2.4. Operadores de composición de rango cerrado

Una vez analizada la continuidad de los operadores de composición, otra propiedad natural a analizar es la compacidad.

Definición 2.14. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es un* ***operador compacto*** *si para todo conjunto $A \subset X$ acotado se tiene que $T(A)$ es relativamente compacto.*

Así, mientras que un operador acotado transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados, un operador compacto transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Es decir, conjuntos cuya clausura es compacta y, por lo tanto, cerrados y acotados.

La caracterización de los operadores de composición compactos en los espacios de funciones analíticas considerados en este trabajo es conocida. Las referencias son [2] y [19], para los espacios de Hardy y de Bergman; y [7] y [13] para el espacio de Bloch y el espacio pequeño de Bloch. Esta cuestión no será considerada en este trabajo. No obstante, sí referimos algunos resultados importantes al respecto que darán pie al estudio que se realizará en el capítulo siguiente en relación con los operadores de rango cerrado y, más particularmente, con las isometrías. Puesto que los espacios que consideraremos son espacios de Banach, asumimos esta condición en las siguientes definiciones.

Definición 2.15. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre los espacios de Banach X e Y. El* ***rango de*** *T es definido por*

$$\mathrm{R}(T) = \{Tx : \, x \in X\} = \{y \in Y : \text{existe } x \in X \text{ con } Tx = y\}.$$

Es muy fácil comprobar que $\mathrm{R}(T)$ es un subespacio vectorial de Y, En efecto, dado $y \in \mathrm{R}(T)$, se tiene que existe $x \in X$ con $y = Tx$. Siendo X un despacio vectorial, y dado el escalar λ, ocurre que $\lambda x \in X$. Por ser T lineal, $T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda y$. Luego $\lambda y \in \mathrm{R}(T)$.

De manera similar, si $y_1, y_2 \in \mathrm{R}(T)$ con $Tx_1 = y_1$ y $Tx_2 = y_2$ para $x_1, x_2 \in X$, resulta $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \in \mathrm{R}(T)$.

Definición 2.16. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal continuo entre los espacios de Banach X e Y. Si $\dim(\mathrm{R}(T)) < \infty$, T se dice **de rango finito**. Si $\mathrm{R}(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de Y, T se dice **de rango cerrado**.*

Puesto que todo subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio de Banach es cerrado, se tiene que todo operador de rango finito es de rango cerrado.

Teorema 2.17. *Un operador de composición continuo $C_\varphi : X \to X$ en un espacio de Banach X de funciones analíticas de dimensión infinita, nunca tiene rango finito.*

Demostración. Supongamos, para llegar a contradicción, que $\dim(\mathrm{R}(C_\varphi)) < \infty$, de manera que podemos escoger una base $(g_i)_{i=1}^N$ de $\mathrm{R}(T)$ con $g_i = C_\varphi(f_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Sea $f \in X$. Entonces, existen números complejos $(a_i)_{i=1}^N$ tales que

$$C_\varphi(f) = g = \sum_{i=1}^{N} a_i C_\varphi(f_i) = C_\varphi\left(\sum_{i=1}^{N} a_i f_i\right).$$

Pero esto implica, siendo los operadores de composición inyectivos, que, para toda $f \in X$ se tiene

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i f_i\,.$$

Esto es una contradicción con el hecho de que la dimensión de X sea infinita. □

No obstante, sí existen operadores de composición con rango cerrado, que quedan descritos en el siguiente teorema.

Teorema 2.18. *Un operador de composición continuo $C_\varphi : X \to X$ en un espacio de Banach $X \neq \{0\}$ de funciones analíticas tiene rango cerrado si y solo si existe un número real positivo M tal que para toda $f \in X$*

$$\|C_\varphi f\|_X \geq M\|f\|_X\,. \tag{2.6}$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que C_φ tiene rango cerrado. Entonces, siendo $\mathrm{R}(C_\varphi)$ un subespacio cerrado de un espacio de Banach, es un espacio de Banach y se sigue, siendo C_φ inyectivo, que $C_\varphi : X \to \mathrm{R}(C_\varphi)$ es biyectivo. Existe, entonces, $C_\varphi^{-1} : \mathrm{R}(C_\varphi) \to X$, definido como sigue: si $g \in \mathrm{R}(C_\varphi)$ con $C_\varphi(f) = g$, $C_\varphi^{-1}(g) = f$.

Es fácil comprobar que C_φ^{-1} es lineal (usando el mismo argumento que se utilizó anteriormente para comprobar que el rango de un operador lineal es un espacio vectorial). Además, es claro que $C_\varphi^{-1}C_\varphi(f) = f$ para toda f in X y $C_\varphi C_\varphi^{-1}(g) = g$ para toda $g \in \mathrm{R}(C_\varphi)$.

También es cierto que C_φ^{-1} es continuo. El resultado se sigue del teorema del grafo cerrado (véase [18]).

Se tiene, entonces, que existe un número real positivo M (dado que el operador C_φ^{-1} es inyectivo) para el que se cumple que, para toda $f \in X$,

$$\|f\|_X = \|C_\varphi^{-1}(C_\varphi)(f)\|_X \leq M\|C_\varphi(f)\|_X \,,$$

de donde se deduce (2.6).

Supongamos ahora que se cumple (2.6). Sea $(g_n)_{n\geq 1}$ una sucesión $\mathrm{R}(C_\varphi)$ que converge a g_0. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g_0\|_X = 0 \,.$$

Siendo X un espacio de Banach, es claro que $g_0 \in X$. No obstante, para terminar la demostración, hemos de demostrar que $g_0 \in \mathrm{R}(C_\varphi)$.

Puesto que la sucesión es convergente, es de Cauchy. Considerando las funciones f_n dadas por $C_\varphi(f_n) = g_n$ y usando (2.6), se tiene, para todo par de números naturales n y m,

$$\|g_m - g_n\|_X = \|C_\varphi(f_m) - C_\varphi(f_n)\|_X = \|C_\varphi(f_m - f_n)\|_X \geq M\|f_m - f_n\|_X \,,$$

de manera que $(f_n)_{n\geq 1}$ es, también, una sucesión de Cauchy en X. Sea $f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Veamos que $g_0 = C_\varphi(f_0)$, lo que concluirá la demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|g_n - C_\varphi(f_0)\|_X &= \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi(f_n) - C_\varphi(f_0)\|_X \\ &= \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi(f_n - f_0)\|_X \leq \|C_\varphi\| \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_0\|_X = 0 \,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la unicidad de los límites, se tiene $g_0 = C_\varphi(f_0)$, como queríamos demostrar. □

Finalmente, demostramos que los operadores de composición de rango cerrado no son compactos en los espacios de funciones analíticas que se consideran en este trabajo, porque todos ellos tienen dimensión infinita.

Teorema 2.19. *Sea $C_\varphi : X \to X$ un operador de composición continuo en un espacio de Banach de funciones analíticas en del disco unidad de dimensión infinita. Si C_φ tiene rango cerrado, entonces C_φ no es compacto.*

Demostración. Argumentando como en la demostración del teorema anterior, si C_φ tiene rango cerrado, entonces $C_\varphi : X \to \mathrm{R}(C_\varphi)$ es biyectivo y el operador $C_\varphi^{-1} : \mathrm{R}(C_\varphi) \to X$ es continuo.

Pero, en este caso, por el teorema 2.2 de [17], el operador identidad $I = C_\varphi^{-1} C_\varphi : X \to X$ es compacto. Esto no es posible, siendo la dimensión de X infinita, como queda probado en la página 26 de [17].

□

3

Isometrías entre de los operadores de composición en espacios clásicos de funciones analíticas

En este capítulo, caracterizamos las isometrías entre los operadores de composición en los espacios estudiados en capítulos anteriores. Concretamente, en los espacios de Hardy, en los espacios de Bergman con peso estándar y en los espacios de Bloch y pequeño de Bloch. Es decir, pretendemos caracterizar los operadores de composición $C_\varphi : X \to X$, donde X es uno de los espacios mencionados, que cumplen

$$\|C_\varphi(f)\|_X = \|f\|_X \,, \quad f \in X \,.$$

A la vista de los resultados mencionados en la sección 2.4, estos operadores de composición son de rango cerrado y, por lo tanto, no son compactos.

3.1. Operadores de composición isométricos en los espacios de Hardy

Los resultados de esta sección y de la siguiente se recogen en [9] aunque incluimos más detalles. Veremos que un operador de composición inducido por una aplicación interna es una isometría en los espacios de Hardy $H^p, 1 \leq p < \infty$. Definamos este tipo de funciones de manera concreta.

Definición 3.1. *Una* ***función interna*** *es una autoaplicación del disco cuya función límite radial tiene módulo* 1 *en casi todo punto de la circunferencia unidad.*

A la vista del teorema 1.52, todo producto de Blaschke de la forma (1.4) es una función interna.

Comenzamos con dos lemas auxiliares que nos permitirán deducir que aquellas autoaplicaciones φ del disco unidad que inducen operadores de composición isométricos en los espacios de Hardy H^p, $1 \leq p < \infty$, necesariamente fijan el origen.

Lema 3.2. *Sea μ una medida positiva en el espacio Ω. Supongamos que f y g son funciones en $L^p(\Omega, d\mu)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces, la función $N_{f,g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$N_{f,g}(t) = \int_\Omega |tf + g|^p d\mu$$

es diferenciable y su derivada en $t = 0$ es

$$N'_{f,g}(0) = \frac{p}{2} \int_\Omega |g|^{p-2} \left(\overline{g} f + \overline{f} g\right) d\mu.$$

Demostración. Tenemos, utilizando la regla de L'Hopital, que la derivada de la función auxiliar $n(t) = |tf + g|^p$ en $t = 0$ es

$$n'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{|tf+g|^p - |g|^p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(|tf+g|^2)^{p/2} - |g|^p}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2|f|^2 + |g|^2 + 2t\mathrm{Re}\{f\overline{g}\})^{p/2} - |g|^p}{t} = \frac{p}{2}|g|^{p-2}\left(f\overline{g} + \overline{f}g\right).$$

Basta tomar $|t| < 1$, aplicar la desigualdad en el lema 1.47 y tener en cuenta que f y g son funciones en $L^p(\Omega, d\mu)$ para concluir, por el teorema de la convergencia dominada, la demostración del lema.

□

Lema 3.3. *Sea μ una medida positiva en el espacio de medida Ω, M un subespacio de $L^p(\Omega, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, y sea T una isometría lineal de M. Entonces,*

$$\int_\Omega Tf|Tg|^{p-2}\overline{Tg}d\mu = \int_\Omega f|g|^{p-2}\overline{g}d\mu$$

para todas las funciones f, g en M.

Demostración. Como T es una isometría, tenemos que $N_{Tf,Tg}(t) = N_{f,g}(t)$, donde la función N es la utilizada en el lema anterior. Así, se tiene, que $N'_{Tf,Tg}(0) = N'_{f,g}(0)$. Por tanto,

$$\int_\Omega |g|^{p-2}\left(g\overline{f} + f\overline{g}\right)d\mu = \int_\Omega |Tg|^{p-2}\left(Tg\overline{Tf} + Tf\overline{Tg}\right)d\mu\,. \tag{3.1}$$

Como la identidad anterior se cumple para cualesquiera sean las funciones f y g, podemos reemplazar g por ig y obtener

$$\int_\Omega |g|^{p-2}\left(g\overline{f} - f\overline{g}\right)d\mu = \int_\Omega |Tg|^{p-2}\left(Tg\overline{Tf} - Tf\overline{Tg}\right)d\mu. \tag{3.2}$$

Sumando las igualdades (3.1) y (3.2) y tomando conjugados, teniendo en cuenta que la medida es real, obtenemos la igualdad deseada

$$\int_\Omega f|g|^{p-2}\overline{g}d\mu = \int_\Omega Tf|Tg|^{p-2}\overline{Tg}d\mu.$$

□

Como ya avanzábamos anteriormente, los resultados anteriores permiten obtener el siguiente.

Proposición 3.4. *Si un operador de composición C_φ es una isometría en H^p, $1 \le p < \infty$, entonces $\varphi(0) = 0$.*

Demostración. Consideramos, en el lema 3.2, la medida normalizada de longitud de arco en la circunferencia unidad, es decir, $d\mu = d\theta/2\pi$. También, $M = H^p$, $g \equiv 1$, $f \in H^p$ y $T = C_\varphi$. Entonces, usando también la propiedad del valor medio, resulta

$$f(\varphi(0)) = \int_0^{2\pi} C_\varphi(f)\,d\mu = \int_0^{2\pi} f\,d\mu = f(0).$$

Basta particularizar la función f como la identidad en el disco unidad para obtener $\varphi(0) = 0$.

□

Finalmente, ya estamos en disposición de caracterizar los operadores de composición isométricos en los espacios de Hardy.

Teorema 3.5. *Sea $1 \leq p < \infty$. Un operador de composición C_φ es una isometría de H^p si y solo si φ es una función interna y $\varphi(0) = 0$.*

Demostración. Si C_φ es una isometría, entonces la norma de la función identidad I coincide con la norma de φ, es decir, $||I|| = ||\varphi||$, entonces

$$0 = ||I||^p - ||\varphi||^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - |\varphi(e^{i\theta})|^p\right) d\theta \,.$$

Como φ es una autoaplicación del disco, tiene que $|\varphi(e^{i\theta})| \leq 1$ en casi todo punto en la circunferencia unidad. Se sigue entonces que $1 - |\varphi(e^{i\theta})|^p = 0$ en casi todo punto $\theta \in [0, 2\pi]$. Es decir, φ es una función interna. Además, sabemos por la proposición anterior que si C_φ es una isometría $\varphi(0) = 0$.

Para demostrar que toda función interna φ que fija el origen induce un operador de composición isométrico, procedemos como sigue. En primer lugar, comprobamos que los operadores de composición inducidos por este tipo de funciones son isométricos en el espacio H^2.

Este resultado se debe a Nordgren [15] y se basa en demostrar que si φ es un función interna con $\varphi(0) = a$, se tiene, para toda $f \in H^2$,

$$\left(\frac{1 - |a|}{1 + |a|}\right)^{1/2} ||f||_{H^2} \leq ||C_\varphi(f)||_{H^2} \leq \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|}\right)^{1/2} ||f||_{H^2}.$$

Omitimos los detalles, pues la prueba no es difícil. Por lo tanto, si $a = 0$, se tiene que para toda $f \in H^2$,

$$||C_\varphi(f)||_{H^2} = \|f\|_{H^2} \,.$$

La demostración, para otros valores de p, utiliza el teorema 1.54. Como ya se ha mencionado en los capítulos anteriores, este es un argumento de gran utilidad para obtener los resultados en los espacios de Hardy H^p, $p \neq 2$, una vez que se han obtenido para el espacio H^2. Más concretamente, sea f una función en H^p sin ceros en el disco. Entonces, existe una rama analítica de $f^{p/2}$ y se sigue fácilmente que esta función está en el espacio H^2:

$$\int_0^{2\pi} |f^{p/2}(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

Pero, por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} ||C_\varphi(f)||_{H^p}^p &= \int_0^{2\pi} |(f \circ \varphi)(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |(f^{p/2} \circ \varphi)(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= ||C_\varphi \left(f^{p/2}\right)||_{H^2}^2 = \|f^{p/2}\|_{H^2}^2 = \|f\|_{H^p}^p \,. \end{aligned}$$

Así si $f \in H^p$ no se anula en el disco unidad, y φ es una función interna que fija el origen,

$$||C_\varphi(f)||_{H^p} = \|f\|_{H^p} \,.$$

Sea ahora $f \in H^p$ arbitraria, entonces por el teorema 1.54, $f = B \cdot g$, donde B es un producto de Blaschke y g no se anula en $\mathbb{D}$. Además, $||f||_{H^p} = ||g||_{H^p}$. Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
||C_\varphi f||_{H^p}^p &= \int_0^{2\pi} |B\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)|^p \, |g\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} |g\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right)|^p \frac{d\theta}{2\pi} = ||g||_{H^p}^p = ||f||_{H^p}^p .
\end{aligned}
$$

□

3.2. Operadores de composición isométricos en los espacios de Bergman con peso estándar

Los lemas 3.2 y 3.3 son válidos para otras medidas más generales que las consideradas en la sección 3.1. En particular, para las medidas definidas por $d\mu(z) = dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \, dA(z)$, $\alpha > -1$, $z \in \mathbb{D}$, que dan lugar a los espacios de Bergman con peso estándar A^p_α, presentados en la sección 1.4. Procederemos, para obtener el resultado principal de esta sección, de manera similar a la expuesta en la sección anterior para los espacios de Hardy. Concretamente, comenzamos demostrando que las autoaplicaciones del disco φ que inducen operadores de composición isométricos en los espacios de Bergman con peso estándar deben fijar el origen.

Proposición 3.6. *Si un operador de composición C_φ es una isometría en A^p_α, $1 \le p < \infty$, $\alpha > -1$, entonces $\varphi(0) = 0$.*

Demostración. La demostración es completamente análoga, como decíamos, a la de la proposición 3.4. En este caso, consideramos la medida dA_α definida anteriormente, $M = A^p_\alpha$, $g \equiv 1$, $f \in A^p_\alpha$ y $T = C_\varphi$. Aplicando el lema 3.3, resulta, usando la propiedad del valor medio,

$$
\begin{aligned}
f(\varphi(0)) = (\alpha+1) \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi(re^{i\theta}))\, d\theta \right) 2r(1-r^2)^\alpha dr &= \int_{\mathbb{D}} C_\varphi(f)(z) dA_\alpha(z) \\
= \int_{\mathbb{D}} f(z) dA_\alpha(z) = (\alpha+1) \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta \right) 2r(1-r^2)^\alpha dr &= f(0).
\end{aligned}
$$

Basta particularizar la función f como la identidad en el disco unidad para obtener $\varphi(0) = 0$. □

En el siguiente resultado caracterizamos completamente a los operadores de composición que son isometrías en los espacios considerados en esta sección.

Teorema 3.7. *Sea $1 \le p < \infty$ y sea $\alpha > -1$. Un operador de composición C_φ es una isometría en A^p_α si y solo si φ es una rotación.*

Demostración. Por el lema anterior, si C_φ es una isometría, se tiene que $\varphi(0) = 0$. Luego, por el lema de Schwarz, $|\varphi(z)| \le |z|$ para todo z en $\mathbb{D}$. Además, la norma es este espacio de la función identidad I es igual a la norma de φ. Por lo tanto, resulta

$$
0 = ||I||_{A^p_w}^p - ||\varphi||_{A^p_w}^p = \int_{\mathbb{D}} \left(|z|^p - |\varphi(z)|^p\right) dA_\alpha(z) .
$$

Siendo dA_α una medida positiva en el disco unidad y el integrando una función no negativa, se sigue que para casi todo punto $z \in \mathbb{D}$, $|\varphi(z)| = |z|$. Es decir, φ es un automorfismo que fija el origen o, lo que es lo mismo, una rotación.

Es trivial comprobar que las rotaciones inducen operadores de composición isométricos en el espacio A^p_α.

□

3.3. Operadores de composición isométricos en los espacios de Bloch

Trivialmente, se puede comprobar que toda rotación induce un operador de composición isométrico en este espacio. Discutiremos en esta sección qué otras autoaplicaciones, si existen, inducen operadores de composición isométricos en este espacio y, también, en el espacio pequeño de Bloch. Todos estos resultados sobre el espacio de Bloch se encuentran en [10]. En nuestro caso, añadimos la caracterización de las isometrías en el espacio de Bloch pequeño.

Comenzamos, siguiendo el mismo esquema que en las secciones anteriores, probando que todo operador de composición isométrico en el espacio de Bloch (o en el espacio pequeño de Bloch) debe estar inducido por un símbolo que fija el origen.

Lema 3.8. *Si un operador de composición C_φ es una isometría en el espacio de Bloch $\mathcal{B}$ o en el espacio pequeño de Bloch $\mathcal{B}_0$, entonces $\varphi(0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que C_φ es una isometría en $\mathcal{B}$, entonces por el lema de Schwarz-Pick 1.5, tenemos

$$||f \circ \varphi||_{\mathcal{B}} = |f(\varphi(0))| + s(f \circ \varphi) \leq |f(\varphi(0))| + s(f) \leq |f(\varphi(0))| - |f(0)| + ||f \circ \varphi||_{\mathcal{B}}.$$

Se sigue que $|f(\varphi(0))| \geq |f(0)|$ para toda función f en $\mathcal{B}$. Escribiendo $\varphi(0) = a$ y tomando $f = \varphi_a$, donde φ_a es el automorfismo definido en (1.1), conseguimos

$$0 = |\varphi_a(a)| \geq |\varphi_a(0)| = |a|,$$

y por tanto $\varphi(0) = 0$.

Como también $\varphi_a \in \mathcal{B}_0$, el mismo argumento sirve en el caso del espacio pequeño de Bloch.

□

Teorema 3.9. *Sea φ una autoaplicación del disco. Entonces el operador de composición C_φ es una isometría en el espacio de Bloch si y solo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

(a) φ es una rotación,
(b) $\varphi(0) = 0$ y satisface la siguiente propiedad.

(M) Para todo $a \in \mathbb{D}$ existe una sucesión $(z_n) \subset \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$, $\varphi(z_n) \to a$ y $|\varphi^*(z_n)| \to 1$, $n \to \infty$.

Antes de demostrar el teorema, observemos que las condiciones (a) y (b) son excluyentes. En efecto, si φ es una rotación y, también, cumple (b), se sigue que, en particular, debe existir una sucesión de puntos (z_n) en el disco unidad tal que $|z_n| \to 1$ y $\varphi(z_n) \to 0$, $n \to \infty$. Claramente, esto es absurdo.

Demostración. Como hemos mencionado, trivialmente se demuestra que las rotaciones inducen isometrías en el espacio de Bloch. Supongamos que C_φ es una isometría en $\mathcal{B}$ inducida por un símbolo φ que no es una rotación. El lema 3.8 garantiza que $\varphi(0) = 0$.

Las aplicaciones φ_a dadas por (1.1) satisfacen

$$||\varphi_a||_{\mathcal{B}} = |\varphi(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)|\varphi_a'(z)| = |a| + \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right) = |a|+1.$$

Como

$$\begin{aligned}
||\varphi_a\circ\varphi||_{\mathcal{B}} &= |\varphi_a(\varphi(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)|\varphi'(z)||\varphi_a'(\varphi(z))| \\
&= |a| + \sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi^*(z)|\left(1-|\varphi(z)|^2\right)|\varphi_a'(\varphi(z))| \\
&= |a| + \sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi^*(z)|\left(1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2\right) \\
&\le |a|+1 = ||\varphi_a||_B,
\end{aligned}$$

se sigue

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi^*(z)|\left(1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2\right) = 1. \tag{3.3}$$

Los valores $|\varphi^*(z)|$ y $(1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2)$ están siempre acotados por 1, y el supremo (3.3) no puede alcanzarse en ningún punto $z\in\mathbb{D}$ puesto que, si fuera así, tendríamos que $|\varphi^*(z)|=1$ y por tanto, φ sería un automorfismo, caso ya excluido.

Por consiguiente, existe una sucesión $(z_n)\subset\mathbb{D}$ tal que $|\varphi^*(z_n)|\to 1$ y a la vez $(1-|\varphi_a(\varphi(z))|^2)\to 1$, es decir, $\varphi(z_n)\to a$ cuando $n\to\infty$.

Además, es trivial, por continuidad de $|\varphi^*|$ en el disco unidad, que la sucesión (z_n) no puede acumularse en el interior del disco unidad (en ese caso tendríamos de nuevo que φ es un automorfismo, proposición 1.18); y por tanto $|z_n|\to 1$ cuando $n\to\infty$.

Veamos ahora la suficiencia de (M) para las autoaplicaciones φ que fijan el origen y no son rotaciones. Para una función arbitraria f en $\mathcal{B}$, tenemos la siguiente desigualdad

$$||f\circ\varphi||_B = |f(\varphi(0))| + s(f\circ\varphi) \le |f(0)| + s(f) = ||f||_{\mathcal{B}}.$$

Para probar la otra desigualdad necesitamos considerar dos posibles casos:

(1) El supremo que define a la seminorma $s(f)$ es alcanzado en algún punto de $a\in\mathbb{D}$.
(2) $s(f) = \lim_{n\to\infty}(1-|a_n|)\,|f'(a_n)|$, para alguna sucesión $(a_n)\subset\mathbb{D}$ tal que $|a_n|\to 1$.

Primero, comprobemos (1). Sea $a\in\mathbb{D}$ tal que $s(f) = |f'(a)|(1-|a|^2)$. Entonces, como se cumple la propiedad (M) se tiene que existe una sucesión (z_n) con $|z_n|\to 1$, $\varphi(z_n)\to a$ y $|\varphi^*(z_n)|\to 1$, $n\to\infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
||f\circ\varphi||_{\mathcal{B}} &= |f(\varphi(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi^*(z)|\left(1-|\varphi(z)|^2\right)|f'(\varphi(z))| \\
&\ge |f(0)| + \lim_{n\to\infty}|\varphi^*(z_n)|\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)|f'(\varphi(z_n))| \\
&= |f(0)| + |\left(1-|a|^2\right)||f'(a)| = ||f||_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

Caso (2). Por la propiedad (M) y por la continuidad de la función $(1-|z|^2)\,|f'(z)|$, en cada punto a_n y para todo n, podemos encontrar un punto z_n tal que

$$\left|\left(1-|a_n|^2\right)|f'(a_n)| - \left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)|f'(\varphi(z_n))|\right| \le \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |\varphi^*(z_n)| > 1-\frac{1}{n}.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
||f \circ \varphi||_B &= |f(\varphi(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi^*(z)| \left(1 - |\varphi(z)|^2\right) |f'(\varphi(z))| \\
&\geq |f(0)| + \limsup_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) |f'(\varphi(z_n))| \right) \\
&\geq |f(0)| + \limsup_{n\to\infty} \left(\left(1 - |a_n|^2\right) |f'(a_n)| - \frac{1}{n} \right) = ||f||_{\mathcal{B}} .
\end{aligned}
$$

□

El siguiente teorema muestra la existencia de autoaplicaciones que satisfacen la propiedad (M): los productos de Blaschke delgados definidos en la sección 1.1.

Teorema 3.10. *Todo producto de Blaschke delgado B satisface la condición (M). Consecuentemente, todo operador de composición C_φ inducido por un producto de Blaschke delgado tal que $B(0) = 0$ es una isometría en el espacio de Bloch.*

Demostración. Sea B un producto de Blaschke delgado con $B(0) = 0$. Para $a \in \mathbb{D}$, definamos $B_a = \varphi_a \circ B$. Como se ha mencionado en la sección 1.1, B_a es un conjunto de Blaschke delgado. Además, es obvio que $B = \varphi_a \circ B_a$.

Sean (w_n) los ceros de B_a. Entonces, se cumple que $B(w_n) = \varphi_a(B_a(w_n)) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, además, por la regla de la cadena para la derivada hiperbólica,

$$
|B^*(w_n)| = |\varphi_a^*(B_a(w_n))| \cdot |B_a^*(w_n)| = |B_a^*(w_n)| \to 1.
$$

□

En el espacio pequeño de Bloch se comprueba trivialmente que las rotaciones inducen operadores de composición isométricos. Como muestra el siguiente teorema, serán las únicas autoaplicaciones que lo verifiquen. Reiteramos que este resultado no se recoge ni en el artículo [10] ni en [11].

Teorema 3.11. *Sea φ una autoaplicación del disco. Entonces el operador de composición C_φ es una isometría en el espacio pequeño de Bloch si y solo si φ es una rotación.*

Demostración. Supongamos que C_φ es una isometría y φ no es una rotación (como se ha mencionado, es trivial comprobar que las rotaciones inducen operadores de composición isométricos en $\mathcal{B}_0$). Siendo C_φ un operador acotado en $\mathcal{B}_0$ y puesto que la función identidad $I \in \mathcal{B}_0$, se tiene que $C_\varphi(I) = \varphi \in \mathcal{B}_0$. Por el lema 3.8, tenemos que $\varphi(0) = 0$. Además, usando los mismos argumentos que en la demostración del teorema 3.9, se sigue que φ debe cumplir la condición (M). En particular, debe cumplirse que para alguna sucesión (z_n) tal que $|z_n| \to 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = 0$ y

$$
\lim_{n\to\infty} |\varphi^*(z_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varphi'(z_n)\,(1 - |z_n|^2)\,|}{1 - |\varphi(z_n)|^2} = 1 . \tag{3.4}
$$

Por tanto,

$$
\lim_{n\to\infty} |\varphi'(z_n) \left(1 - |z_n|^2\right)| = 1 .
$$

Esto contradice la condición de que $\varphi \in \mathcal{B}_0$ y, por consiguiente, las únicas autoaplicaciones que inducen operadores de composición que mantiene invariante la distancia son las rotaciones en el disco unidad.

□

Conclusiones

Los resultados recogidos en los dos últimos capítulos de este Trabajo de Fin de Grado hacen referencia a la continuidad de los operadores de composición y a los operadores de composición isométricos en los espacios considerados en el capítulo 1: los espacios de Hardy, los espacios de Bergman con peso estándar, el espacio de Bloch y el espacio pequeño de Bloch. En cada uno de los espacios mencionados, las técnicas utilizadas para demostrar el resultado han sido diferentes. Todas ellas basadas en las características propias de las funciones en los espacios.

También se han presentado algunas estimaciones para la norma de este tipo de operadores y, en algunos casos, el valor exacto, aunque el valor de la norma de un operador de composición solo se conoce cuando consideramos los espacios de Bloch cociente, como se ha explicado en la sección 2.3.1. Podría ser interesante considerar en el futuro el problema de calcular la norma en los “verdaderos” espacios de Bloch.

Como también se mencionaba anteriormente, se ha procurado recoger las referencias apropiadas a las demostraciones de los teoremas mencionados en esta memoria, incluyendo los detalles en aquellas que no son tan fáciles de obtener de la literatura con la confianza de que este Trabajo de Fin de Grado pueda ser útil para que el posible lector interesado disponga de una introducción detallada a las cuestiones consideradas.

Hemos explicado que no se considera el problema de caracterizar a los operadores de composición que son compactos en estos espacios. Este es un resultado conocido. Más concretamente, en cuanto al espacio de Bloch se refiere, el resultado se recoge en [13]. En el libro [19], se caracteriza la compacidad de los operadores de composición en los espacios de Bergman. Para ello, es necesario introducir el concepto de **derivada angular** y los teoremas relacionados como el teorema de Juliá-Carathéodory. El resultado concreto es el siguiente.

Teorema 3.12. *Sea C_φ un operador continuo en el espacio de Bergman A^p, $1 \leq p < 1$. Entonces, C_φ es compacto si y solo si φ no tiene derivada angular en ningún punto de la circunferencia unidad.*

No existe una caracterización tan clara para los espacios de Hardy en términos de la derivada angular, aunque sí existen condiciones necesarias y suficientes para la compacidad de un operador de composición en estos espacios.

Toda esta teoría sobre la compacidad de operadores de composición está siendo estudiada por el autor de esta memoria, como continuación del trabajo realizado.

Como conclusiones finales, podemos reiterar los operadores de composición y el estudio de sus propiedades requieren de las técnicas propias de la teoría de funciones holomorfas en el disco unidad. Son objetos que relacionan de manera natural la teoría de operadores con esta otra teoría del análisis complejo, lo que hace que el estudio de los operadores de composición requiera de conocimientos sobre ambas disciplinas. Esta característica de la teoría de los operadores de composición ha proporcionado, en particular, al autor del trabajo, la posibilidad de aprender distintos resultados de Análisis Matemático como los presentados en esta memoria. También, se han reforzado las ganas de seguir aprendiendo otros teoremas de esta área de las Matemáticas en el futuro pues, como decíamos antes, quedan muchas cuestiones por estudiar (y por resolver).

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (3ª ed.). International Series in Pure and Applied Mathematics, New York, 1978.

[2] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[3] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*. Pure and Applied Mathematics, New York-London, 1970.

[4] P. L. Duren y A. Schuster, *Bergman Spaces*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[5] P. Gorkin y R. Mortini, Value distribution of interpolating Blaschke products. *J. London Math. Soc.* **72** (2005), 151–168.

[6] T. Hosokawa y S. Ohno, Topological structures of the sets of composition operators on the Bloch spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **314** (2006), 736–748.

[7] K. Madigan y A. Matheson, Compact composition operators on the Bloch space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 2679–2687.

[8] I. Marrero, *Espacios de Hilbert*. OCW-ULL, Universidad de La Laguna, 2011-12.

[9] M. J. Martín y D. Vukotić, Isometries of some classical function spaces among the composition operators. *Contemp. Math.* **393** (2006), 133–138.

[10] M. J. Martín y D. Vukotić, Isometries of the Bloch space among the composition operators. *Bull. Lond. Math. Soc.* **39** (2007), 151–155.

[11] M. J. Martín y D. Vukotić, Hyperbolic geometry and norms of some composition operators on the Bloch space. En preparación.

[12] A. Montes-Rodríguez, The Pick-Schwarz lemma and composition operators on Bloch spaces. International Workshop on Operator Theory (Cefalù, 1997). *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* **56** (1998), pp. 167–170.

[13] A. Montes-Rodríguez, The essential norm of a composition operator on Bloch spaces. *Pacific J. Math.* **188** (1999), 339–351.

[14] L. Morales, *Ceros de las Funciones Holomorfas*. Trabajo Fin de Grado, Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna, 2019.

[15] A. Nordgren, Composition operators, *Canadian J. Math.* **20** (1968), 442–449.

[16] M. P. Rodríguez Batista, *La derivada Schwarziana*. Trabajo Fin de Grado, Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna. Defensa prevista para septiembre de 2021.

[17] P. Rodríguez Flóres, *Operadores Compactos*. Trabajo Fin de Grado, Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna, 2021.

[18] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3ª ed.). McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[19] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*. Universitext: Tracts in Mathematics, New York, 1993.

Composition operators in classical spaces of analytic functions

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Aridane Rodríguez Moreno
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101158242@ull.edu.es

Abstract

This Bachelor Thesis summarizes different results on composition operators acting on different classical spaces of analytic functions in the unit disk. Concretely, on the Hardy spaces, the Bergman spaces, as well as on the Bloch space (and the little Bloch space).

1. Composition operators

Let φ be a holomorphic function on the unit disk such that $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. The composition operator $\mathbb{C}_\varphi$ with symbol φ is defined by

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi\,,$$

where f is a analitic function on $\mathbb{D}$.

2. Analytic function spaces

The analytic function f in the unit disk $\mathbb{D}$ belongs to

- The space H^∞, if

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\,.$$

- The Hardy space H^p, $1 \le p < \infty$ if

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} < \infty\,.$$

- The weighted Bergman space A^p_α, $1 \le p < \infty$, $\alpha > -1$, if

$$\|f\|_{A^p_\alpha} = (\alpha+1)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p\,(1-|z|^2)^\alpha\, dA(z)\right)^{1/p} < \infty\,.$$

- The Bloch space $\mathcal{B}$, if

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2) < \infty\,.$$

- The closed subspace $\mathcal{B}_0$ of $\mathbb{B}$, called the little Bloch space, if f belongs to the Bloch space and

$$\lim_{|z|\to 1} |f'(z)|(1-|z|^2) = 0\,.$$

Theorem. *The spaces of analytic functions mentioned are Banach spaces with the norms provided.*

3. Continuity of composition operators

Let φ be a holomorphic function on the unit disk such that $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Theorem. *The composition operator C_φ is bounded on H^p for all $1 \le p < \infty$, on A^p_α for all $1 \le p < \infty$ and for all $\alpha > -1$, and on the Bloch space.*

C_φ is bounded on the little Bloch space if and only if $\varphi \in \mathbb{B}_0$.

4. Norms

For a given point $a \in \mathbb{D}$, let φ_a denote the automorphism of the unit disk defined by

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{1}$$

Given a composition operator C_φ, the following theorems hold.

Theorem. *The norm of C_φ acting on the Hardy space H^p, $1 \le p < \infty$ satisfies:*

$$1 \le \|C_\varphi\| \le \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{1/p}\,.$$

If φ_a equals an automorphism of the form (1), then

$$\|C_{\varphi_a}\| = \left(\frac{1+|\varphi_a(0)|}{1-|\varphi_a(0)|}\right)^{1/p} = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/p}\,.$$

Theorem. *The norm of C_φ acting on the Bergman space A^p, $1 \le p < \infty$, satisfies:*

$$1 \le \|C_\varphi\| \le \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{2/p}\,.$$

Also,

$$\|C_{\varphi_a}\| = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{2/p}\,.$$

Theorem. *The norm of C_φ acting on $\mathcal{B}$ (and on $\mathcal{B}_0$, if $\varphi \in B_0$) is subject to the bounds*

$$1 \le \|C_\varphi\| \le \max\{1, \rho(0,\varphi(0)) + \|\varphi^*\|\}\,,$$

where $\rho(0,\varphi(0))$ denotes the hyperbolic distance between the origin and $\varphi(0)$ and

$$\|\varphi^*\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)(1-|z|^2)|}{1-|\varphi(z)|^2}\,.$$

Moreover,

$$\|C_{\varphi_a}\| = \rho(0,a) + 1\,.$$

5. Isometric composition operators

The composition operator C_φ is an isometry

- In H^p if and only if φ is inner and fixes the origin.
- In A^p_α (or in $\mathcal{B}_0$) if and only if φ is a rotation.
- In $\mathcal{B}$ if and only if either φ is a rotation or φ fixes the origin and satisfies that for all $a \in \mathbb{D}$ there exists a sequence $z_n \subset \mathbb{D}$ such that $z_n \to 1$ and with

$$\varphi(z_n) \to a \quad \text{and} \quad \varphi^*(z_n) \to 1\,, \quad \text{as} \quad n \to \infty\,.$$

Theorem. *Let B be a thin Blaschke product that fixes the origin. Then C_B is an isometric composition operator on $\mathcal{B}$.*

References

[1] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[2] M. J. Martín y D. Vukotić, Isometries of some classical function spaces among the composition operators. *Contemp. Math.* **393** (2006), 133–138.

[3] M. J. Martín y D. Vukotić, Isometries of the Bloch space among the composition operators. *Bull. Lond. Math. Soc.* **39** (2007), 151–155.

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3ª ed.). McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[5] J. H. Shapiro,*Composition Operators and Classical Function Theory*. Universitext: Tracts in Mathematics, New York, 1993.

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de Septiembre, 2021