EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS II. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

GRADOS EN ECONOMÍA Y EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Domingo Israel Cruz Báez

Departamento de Economía Aplicada
y Métodos Cuantitativos

Universidad de La Laguna

Actualizado a 9/02/2024

PRÓLOGO

El alumnado de los primeros cursos de la Facultad de Economía y Empresa se encuentra con diversos problemas a la hora de afrontar la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La presente colección de ejercicios resueltos es una recopilación del material de prácticas que se les facilita. Por lo que espero que les sea de especial ayuda en los temas correspondientes de Matemáticas II, asignatura obligatoria de primer curso en los Grados en Economía y en Administración y Dirección de Empresas, así como en otras asignaturas de los grados mencionados.

EJERCICIOS PROPUESTOS TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Determine la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=5 \\ y+x-z=-2 \\ -z+2y+x=3 \end{array}\right\}$

2. Dado el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=4 \\ -x+3y-z=1 \end{array}\right\}$, razone si los siguientes sistemas son equivalentes:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+2z=3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} z+2x-y=4 \\ -z-x+3y=1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} -x-y+z=4 \\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right\}$.

3. Resuelva el sistema lineal: $\left.\begin{array}{r} 24.35x+13.26y=31.25 \\ 65.38x+35.6y=63.28 \end{array}\right\}$. A continuación resuelva también el sistema: $\left.\begin{array}{r} 24.35x+13.25y=31.25 \\ 65.38x+35.6y=63.28 \end{array}\right\}$ y compare las soluciones. ¿En qué se distinguen? ¿cómo es posible que suceda esto?

4. Discutir y resolver, en caso de que sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y-3z=4 \\ -3x-5y+4z=1 \\ 4x+7y-5z=2 \\ x+2y-2z=1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x+y+2z+3t=5 \\ 4x+y+3z+3t=-2 \\ 8x+2y+3z+6t=17 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} -x+y-2z-t=0 \\ 2x-y+z-2t=2 \\ x+2y-z+t=-3 \\ 3x+4y-3z-t=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ x+5y-4z=-1 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=-4 \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=2 \\ 3x+y-z=3 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} x+z+t=1 \\ y+z-t=1 \\ y+z-2t=2 \\ 2x+4y+6z-4t=8 \end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 12x-2y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{r} 3x+y-z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \\ 2x+8y+4z=0 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-4z=1 \\ 3x-y=11 \\ y+z=6 \\ 2y-z=1 \end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=2 \\ 2x-y-z=9 \\ x+4y-5z=1 \end{array}\right\}$

5. Un agente de bolsa debe comprar 1530 acciones entre las de la empresa Papas S.L. y las de la empresa Helados S.L.; cada acción de Papas S.L. cuesta 345€ y de Helados S.L. 875€. El agente de bolsa dispone de 874.470€ ¿Cuántas acciones podría comprar de cada empresa?

6. Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a 45 euros y otros a 36 euros, obteniendo de la venta 3105 euros ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

7. Un grupo de amigos está jugando a los chinos con monedas de 10 y 20 céntimos. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 1.10€. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

8. Un orfebre tiene dos lingotes: el primero contiene 540 gramos de oro y 60 gramos de cobre, y el segundo 400 gramos de oro y 100 gramos de cobre. ¿Qué cantidad deberá tomar de cada uno de ellos para formar otro lingote que pese 640 gramos y cuya ley sea 0,825 (1gr. de lingote tiene 82,5% de oro y 17,5% de cobre)?

9. Halla las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será sólo el doble.

10. Hace un año la edad de un padre era 3 veces mayor que la del hijo, pero dentro de 13 años no tendrá más que el doble. ¿Cuál es la edad del padre y del hijo?

11. Un alumno tiene monedas en ambas manos; si pasa 2 de la derecha a la izquierda, tendrá el mismo número de monedas en ambas manos y si en lugar de 2, pasa 3 monedas de la izquierda a la derecha, tendrá en la derecha el doble número de monedas que en la izquierda. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?

12. Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Tiene en total 100 habitaciones y 174 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

13. En un corral entre cerdos y patos, se cuentan 19 cabezas y 60 patas. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

14. ¿Cuántos litros de leche con 35% de grasa ha de mezclarse con leche de 4% de grasa para obtener 20 litros de leche con 25% de grasa?

15. Por la mezcla de 8 kg. de café con 2 kg. de achicoria se han pagado 13'24€. Calcula el precio del kg. de café y del kg. de achicoria, sabiendo que si se mezclase 1 kg. de cada clase costaría la mezcla 1'82€.

16. Una persona dispone de 20000 euros para invertir en bonos, fondos de inversión y acciones. La rentabilidad media de esos activos es de un 6%, 10% y 12%, respectivamente. El inversor quiere que un 30% del total de su capital se invierta en acciones y que se alcance una rentabilidad final del 9%. ¿Cuánto ha de invertir en cada uno de esos activos financieros?

17. (*Aplicación de soluciones no negativas*) Una empresa de análisis estadístico obtiene que la condición de equilibrio para el precio de tres bienes del mercado relacionados entre sí, podría venir determinada por uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 5x-y-z &= 10 \\ -x+4y-8z &= 12 \\ -x-2y+5z &= 8 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x-2y-3z &= 1 \\ -x+y-z &= 3 \\ -3x-y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

siendo x, y, z los precios de estos tres productos. Suponiendo que los dos sistemas tienen solución, sin resolver los sistemas, ¿podrías decir con cuál sistema nos debemos quedar?

18. Supongamos dos bienes relacionados, en un mercado de competencia perfecta (es decir, los precios de mercado no los determinan los fabricantes sino que el precio de mercado), cuyas respectivas funciones de demanda y oferta vienen dadas de manera lineal como sigue:

$$\left.\begin{aligned} Q_{d1} &= 20-2p_1+4p_2 \\ Q_{s1} &= 35+3p_1-2p_2 \end{aligned}\right\} \text{ y } \left.\begin{aligned} Q_{d2} &= 20+5p_1-3p_2 \\ Q_{s2} &= 45-7p_1+5p_2 \end{aligned}\right\}$$

Encuentre los valores de equilibrio de las variables consideradas.

19. La condición de equilibrio para el precio de tres bienes del mercado relacionados entre sí, queda determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 22p_1-p_2-p_3 &= 30 \\ -p_1+8p_2-2p_3 &= 42 \\ -p_1-2p_2+5p_3 &= 10 \end{aligned}\right\},$$

siendo p_1, p_2 y p_3 los precios de estos tres productos. Calcúlense los precios de equilibrio para estos tres bienes de tres formas diferentes.

20. Estúdiese la compatibilidad de los sistemas en las incógnitas x, y, z ó t, que a continuación se describen en función de los valores que pueden tomar los parámetros que en ellos aparecen. Resuélvanse aquellos que sean compatibles.

a) $$\left.\begin{aligned} 2x-z &= a \\ 3x-2z &= 1 \\ y+z &= 6 \\ 2x+y-4z &= a \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x+2y+kz &= k \\ x+4y+k\,z &= 6+k \\ x-8y+k^2z &= -6 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} ax+y+z &= 0 \\ x+3y+z &= 0 \\ 3x+10y+4z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

d) $$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x-2y &= 1 \\ 2x-y+z &= 2a \\ -3x+3y-z &= 6-4a \end{aligned}\right\}$$

e) $$\left.\begin{aligned} x+ky+kz &= 1 \\ kx+ky+z &= 1 \\ x+k^2y+z &= k \end{aligned}\right\}$$

f) $$\left.\begin{aligned} x+2y-3z &= 0 \\ 2x+5y-6z &= 1 \\ x-y-3z &= a \end{aligned}\right\}$$

g) $$\left.\begin{aligned} a^2x+y+z &= 3 \\ x+a^2y+z &= 4-a \\ x+y+a^2z &= 2+a^2 \end{aligned}\right\}$$

h) $$\left.\begin{aligned} x+y+z+t &= 1 \\ x+ay+z+t &= 1 \\ x+y+a^2z+t &= 1 \\ x+y+z+a^3t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

i) $$\left.\begin{aligned} x+y+z+t &= 1 \\ -ax+y+z+t &= 2 \\ x-ay+z+t &= 3 \\ x+y+z-at &= 4 \end{aligned}\right\}$$

j) $\left.\begin{array}{r} 7x+5y=2 \\ 5x+my=13 \end{array}\right\}$ **k)** $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+mz=3 \end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{array}\right\}$ **n)** $\left.\begin{array}{r} x+ay=1 \\ y-z=2 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ **ñ)** $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=2a \\ x-2y=1 \\ -3x+3y-z=b \end{array}\right\}$

o) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{array}\right\}$ **p)** $\left.\begin{array}{r} x+by+az=1 \\ ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \end{array}\right\}$ **q)** $\left.\begin{array}{r} (m+2)x+y+z=m-1 \\ mx+(m-1)y+z=m-1 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{array}\right\}$

21. Demuestre si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & a & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & -4 \end{array}\right)$ sólo es compatible cuando $a = 0, \forall b$

b) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces el sistema $2X=AX+C$ tiene solución única y es no negativa, ya que el sistema propuesto cumple la condición de Hawkins Simon

c) El sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} 2x-5y+az=-2 \\ x+4y+z=b \\ 3x-y+2z=1 \end{array}\right.$ es un sistema incompatible si y sólo si $a=1, b=3$.

22. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 6 & a+1 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué dirías de la compatibilidad del sistema lineal $AX=0$? Resolverlo en los casos que sea compatible.

b) Para algún valor de a, elegir un $B \neq 0$ tal que $AX=B$ sea compatible determinado y resolver dicho sistema.

23. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, los siguientes sistemas en función de los valores reales de los parámetros a, b y/o c:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ (b-2)x+(a-4)y-2z=-2 \\ (a+b)x+(a+2)y+z=a+1 \\ (2b-a)x+(2a-2)y-z=-a-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+3z+2t=a \\ 3x+y+7z+5t=b \\ x+y+z+at=2-b \\ 2x-y+8z+5t=4a-1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-t=1 \\ 4x+(a+4)y-z+2t=3 \\ -2x-y+(b-1)z-t=-1 \\ 4x-ay+(2-b)z+2t=3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} (a+1)x+2y+z=0 \\ y+z+t=b \\ -z+t=b+1 \\ ax+y+t=0 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=0 \\ 5x+(a+1)y+2z=2b \\ (a-1)x+(a-2)y-z=3b \\ (a+6)x+2ay+2z=5b \end{array}\right\}$

24. Sea la tabla de intercambio entre dos industrias:

	I	II	Demanda final	Producción total
I	40	90		200
II	20	45		180
Inputs primarios				
Inputs totales	200	180		

a) Determine la máxima demanda final que puede ser alcanzada por la industria en la situación actual.

b) Construya la matriz de coeficientes técnicos.

c) Demuestre que la economía es productiva.

d) Halle el nivel de producción de las industrias I, II necesario para alcanzar una demanda final en el futuro de 80 y 130, respectivamente.

25. Dada la matriz de coeficientes técnicos de una economía con dos sectores de producción $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ y que tiene como demanda final del consumidor $D = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$

a) ¿Podríamos construir la tabla de relaciones intersectoriales con únicamente estos datos?

b) Estúdiese si la economía generada por A es productiva.

26. Sea la matriz I/O $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.65 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.0 & 0.0 & 0.15 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que genera una economía productiva.

b) Calcule la matriz de intercambios sectoriales si la producción total de cada sector viene dada por la matriz: $\mathbf{X}^t = \begin{pmatrix} 200 & 320 & 250 & 430 \end{pmatrix}$.

c) ¿Cuál será la demanda final máxima que se puede alcanzar con esta situación?

27. Utilice el método de Hawkins-Simon para deducir si las siguientes matrices son productivas:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$ **b)** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$.

28. Consideremos la matriz I/O **B** del ejercicio anterior y el vector de demanda $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 400 & 300 & 100 & 200 \end{pmatrix}^t$. Calcúlese el vector de producción total necesario para satisfacer dicha demanda final utilizando las operaciones con matrices particionadas por bloques. (Sugerencia: utilícese la regla de Cramer en sus dos formas: multiplicación por la matriz de coeficientes inversa o mediante el cálculo directo de determinantes).

29. Consideremos la tabla de transacciones industriales en una economía dividida en tres sectores productivos, expresada en millones de euros:

Output / Input	1	2	3	Demanda final	Producción total
1. Agrario y Pesquero	75	160	0	65	300
2. Industrial	48	64	80	448	640
3. Servicios	30	160	100	210	500
Inputs primarios	147	256	320		

a) Calcule la matriz **A** de coeficientes técnicos.

b) Halle la matriz inversa de Leontief y razone, a partir de ella, si la matriz **A** genera una economía productiva. Ratifíquese la respuesta utilizando la condición de Hawkins-Simon.

c) Halle, para cada sector, los requerimientos del único input primario (trabajo) por unidad producida.

d) Calcule los niveles de producción total necesarios en cada sector para alcanzar una demanda final de: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 70 & 500 & 200 \end{pmatrix}^t$.

e) Halle, suponiendo que los requerimientos de inputs primarios por unidad se mantienen constantes, la cantidad de este input por sector necesaria para producir los niveles de producción total resultantes en el apartado d).

30. La tabla I/O de una Economía agregada en tres sectores productivos viene dada, en millones de euros, por la siguiente tabla:

Output / Input	1	2	3	Demanda final	Producción total
1. Agrario y Pesquero	176	494	54	311	1035
2. Industrial	221	2105	458	3349	6133
3. Servicios	68	450	376	2946	3840
Inputs primarios	570	3084	2952		
Inputs totales	1035	6133	3840		

a) Calcule la matriz **A** de coeficientes técnicos.

b) Calcule, en caso de que sea posible, la matriz inversa de Leontief.

c) Compruebe si la matriz **A** genera una economía productiva.

d) Pronostique cómo debe comportarse cada sector productivo total para abastecer una demanda final proyectada de 400, 3500 y 3000 millones de euros, respectivamente.

31. Supongamos una economía dividida en tres sectores cuya matriz tecnológica es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

expresando inputs (compras) en columnas y outputs (ventas) en filas.

a) Explique el significado de los elementos a_{11}, y a_{23}.

b) Demuestre de dos formas distintas que para cualquier vector de demandas finales **D**$\geq$0 fijado, existe un vector de producción **P**$\geq$0 que satisface dichas demandas finales.

c) ¿Cuánto debe producir cada sector para satisfacer una demanda final de 10, 20 y 10 unidades, respectivamente?

d) ¿Cuál es la matriz de intercambios sectoriales necesarios para la producción del apartado c)?

32. Sea la matriz de coeficientes técnicos: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$.

a) Estúdiese si la economía generada por **A** es productiva.

b) Obtenga los intercambios sectoriales necesarios para producir 300, 300 y 250 u. de cada sector. ¿Cuál es la máxima demanda final que pueden satisfacer los sectores en esta situación?

c) Analícese la existencia de solución no negativa para el sistema: $2\mathbf{X}=\mathbf{AX}+\mathbf{C}$, siendo $\mathbf{C}\in M_{3\times 1}(\mathrm{R})$, **C**≥0.

33. La Consejería de Pesca proporciona tres tipos de alimentos a tres especies de peces protegidas que habitan en un lago. Cada pez de la especie 1 consume por día un promedio de una unidad de alimento A, 1 unidad de alimento B y 2 del alimento C. Los de la especie 2, 3 unidades del alimento A, 4 del B y 5 del C. Y los de la tercera especie, consumen cada semana 14 unidades del alimento A, 7 unidades del B y 35 del C. Cada semana se vierten en el lago 25.000 unidades del alimento A, 20.000 del alimento B y 55.000 del alimento C. Suponiendo que toda la comida se consume, ¿cuántos ejemplares de cada especie pueden convivir en el lago? ¿Y si se vierten 15.000 unidades del A, 10.000 del B y 35.000 del C?

34. Una empresa produce tres productos A, B y C, los que procesa en tres máquinas. El tiempo (en horas) requerido para procesar una unidad de cada producto por las tres máquinas está dado por:

	A	B	C
Máquina 1	3	1	1
Máquina 2	2	0	2
Máquina 3	5	1	2

Si el tiempo disponible de cada máquina es de 500 horas, 300 horas y 700 horas respectivamente, ¿cuántas unidades de cada producto deberían producirse con objeto de emplear las máquinas todo el tiempo disponible?

35. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

36. Una empresa fabrica tres productos A, B, C que deben pasar por tres secciones (I, II, III). En la tabla se recogen los tiempos de fabricación que se requiere para producir una unidad de cada producto y el tiempo necesario de trabajo requerido en la sección II. Calcular el número total de unidades a producir de cada producto y el tiempo de trabajo necesario que se requiere en las secciones I y III para que el problema tenga solución, sabiendo que la sección III requiere el doble de tiempo que la sección I.

Sección	Producto			Tiempo de trabajo
	A	B	C	
I	2	2	2	
II	2	3	3	210
III	3	4	4	

37. Una pequeña compañía constructora ofrece tres tipos de casas. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de cemento, 2 unidades de madera para puertas y ventanas y 5 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades, respectivamente, de cemento, de madera para puertas y ventanas, y de madera para estructuras. Si cada mes la compañía dispone de 150 unidades de cemento, 100 unidades de madera para puertas y ventanas y 250 unidades de madera para estructuras, calcular el número de diferentes tipos de casas que la compañía podrá construir a la semana si usa todos los materiales disponibles.

38. Supongamos una carpintería que utiliza 10 tablones de madera para hacer un banco, 5 para hacer un taburete y 8 para hacer una silla. Además, cada banco necesita 6 horas completas de trabajo, cada taburete 8h y cada silla 5h. Si hoy dispone de 200 tablones y de mano de obra para cubrir 150h de trabajo en conjunto ¿cuántas piezas de cada tipo debe construir si se desea utilizar la totalidad de tablones, no tener a nadie parado durante la jornada y no dejar ninguna pieza sin terminar?

39. Una persona dedicada a la fabricación de artículos navideños produce bolas, tiras de luces y estrellas luminosas. En la producción de una unidad de cada artículo utiliza varios recursos en las cantidades que se indican en la tabla siguiente:

	Bolas	Tiras	Estrellas
Cable eléctrico (metros)	-	2	2
Bombillas (unidades)	-	4	1
Plástico (bloques)	1	2	5
Papel brillante (hojas)	2	4	4

Además, sabe que para poder vender los adornos, la producción de bolas debe duplicar el total de tiras y estrellas.

Actualmente, en su almacén tiene 500 metros de cable, 1000 bombillas, 1000 bloques de plástico y 800 hojas de papel. Al consultar con su proveedor habitual, éste le indica que le puede suministrar 2000 hojas de papel brillante y cualquier número M de bombillas, siempre y cuando adquiera también 2M metros de cable y 7M bloques de plástico. ¿Qué pedido de bombillas hará el empresario, para llevar a cabo el proceso productivo sin que sobre ningún recurso? ¿Cuál será su producción en esas circunstancias?

40. Los dueños de un restaurante han decidido renovar el mobiliario (mesas y sillas) del comedor y te han pedido asesoramiento. Se desea instalar mesas de tres tamaños: las más pequeñas, con 4 asientos cada una, otras de tamaño mediano con un número de asientos sin decidir y las más grandes con 12 asientos. Se desea que, en total, haya 60 mesas con capacidad para 260 comensales (asientos). Se ha calculado que el coste de cada mesa pequeña (con sus respectivos asientos) será de 100€, el coste de cada mesa mediana será de unos 20€ por cada asiento y cada mesa grande costará 180€. Se ha pensado en invertir exactamente 6200€. ¿Cuántas mesas de cada tipo deben encargarse?

41. Una refinería de petróleo puede destilar tres tipos de crudo: uno de Arabia, otro de Venezuela y otro de México. De cada barril de crudo se obtienen tres productos destilados: keroseno, gasolina y gas-oil en las siguientes proporciones:

	Gasolina	**Keroseno**	**Gas-oil**
Arabia	0.3	0.6	0.1
México	0.7	0.2	0.1
Venezuela	0.3	0.6	0.1

La empresa de refinamiento ha firmado un contrato con una empresa de distribución para suministrar 8000 barriles de gasolina, 2000 barriles de gas-oil y una cantidad K (a determinar) de barriles de keroseno.

a) Plantear un modelo matemático que permita obtener el número de barriles que se deben destilar de cada crudo si se desea cumplir el contrato, sin que sobre ningún barril.

b) Determinar los posibles valores de K que permiten cumplir el contrato.

c) Encontrar el número de barriles a destilar de cada tipo de crudo, para todos los valores de K obtenidos en el apartado anterior.

42. Una empresa fabrica tres productos (A,B,C) que deben pasar por tres secciones diferentes de fabricación (Secciones 1, 2 y 3). El tiempo total de fabricación (100%) de cada producto se distribuye en las tres secciones de acuerdo a los siguientes datos: El producto A pasa el 30% de su tiempo de fabricación en la Sección 1, el 60% en la Sección 2 y el 10% en la Sección 3. Análogamente, el producto B pasa el 70%, 20% y 10% en cada sección respectivamente. Y sabemos que el Producto C pasa el 30% en la Sección 1, pero aún no sabemos cuánto deberá pasar en las secciones 2 y 3. Llamemos a la porción de tiempo que deberá pasar en la Sección 2 y b a la correspondiente a la Sección 3 ($a,b \geq 0$). La empresa va a contratar personal para trabajar 16000 horas en la Sección 1, 4000 horas en la Sección 3 y una cantidad $H>0$ en la Sección 2 que aún no se ha determinado.

- **i.** Sabiendo que cada unidad de los productos (A,B,C) necesita 200 horas para su fabricación, plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad que se puede fabricar de cada producto para llevar a cabo la producción sin que queden horas de trabajo ociosas.
- **ii.** Estudiar la compatibilidad matemática del sistema en función de los posibles valores de a, b, H.
- **iii.** Resolverlo en caso de que sea compatible indeterminado
- **iv.** Expresar la solución al problema económico planteado, explicando el significado de cada uno de los resultados obtenidos.

EJERCICIOS DE EXÁMENES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Junio 2016 (primer llamamiento) Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\begin{cases} a\,x + y + 2z = 1 \\ 2a\,x + a\,y + 2z = 1 \\ 4a\,x + (a+1)y + 4z = b + 2 \\ 3a\,x + a\,y + 2z = b + 1 \end{cases}$$

Junio 2016 (segundo llamamiento) Una empresa elabora tres productos distintos A, B y C de un kilo de peso cada uno. El producto A requiere de su peso un 40% de chocolate y un 10% de leche, el producto B requiere un 25% de chocolate y un 25% de leche, mientras que C requiere un 20% de chocolate y un 30% de leche. Sabemos que la empresa tiene un stock de 114 kilos de chocolate y una cantidad "k" indeterminada de leche (kg.). **a)** Formular y resolver un sistema de ecuaciones lineales, definiendo las variables que intervienen, para determinar las posibilidades de producción que tiene la empresa con los productos A, B y C si decide consumir todo el stock disponible.

Julio 2016. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 5x + (a+2)y + 2z = 2b \\ ax + (a\text{-}1)y\text{-}z = 3b \\ (a+7)x + (2a+2)y + 2z = 5b \end{cases}$$

Septiembre 2016. Estudiar y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de los parámetros a y M.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + (a+1)y + 5z = 2 \\ 3x + (4a+3)y + (a^2 + 15)z = M + 4 \\ x + (3a+1)y + (a^2 + 9)z = M \end{cases}$$

Junio 2017 (primer llamamiento). Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ 3x + 2y + 4z + at = 6b \\ x + 4y + bz + t = 16 \end{cases}$$

a) Resuélvelo para $a = b = 3$, si fuera compatible.
b) Estudia para qué valores de los parámetros a y b es compatible.
c) Resuelve todos los casos que sean compatibles si $b = \text{-}2$.

Junio 2017 (segundo llamamiento) En una carpintería se producen cuatro modelos de mesa de madera (A, B, C y D). Se dispone diariamente de 20 horas de trabajo y un presupuesto de 133 €, pudiéndose contratar cada día una cantidad arbitraria H de horas de trabajo extra a un coste de 5 € por hora que se detraerán del presupuesto disponible. El coste unitario de las mesas de tipo A y C es de 3 €, siendo el coste de cada mesa de los tipos B y D de 4 € por unidad. Cada mesa de tipo D requiere 2 horas para su producción, mientras que las de tipo A y B necesitan un 50% más de tiempo, y el tiempo requerido para producir cada mesa de tipo C está aún por determinar (a). Con el fin de cubrir las previsiones de demanda, se deben construir el doble de mesas de tipo D que del resto. Sabiendo que cada día se desea construir 15 mesas en total, se pide:

- **a)** Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el número de mesas que hay que fabricar para cumplir todos los requisitos, para valores arbitrarios de H y a.
- **b)** Analizar la compatibilidad del sistema anterior según los valores de H y a.
- **c)** Si a = 2, estudiar cuántas mesas se deben producir y cuántas horas extra hay que contratar para que se pueda llevar a cabo dicha producción, teniendo en cuenta que tanto el número de mesas como el número de horas extra deben ser cantidades enteras y no negativas.
- **d)** Si a = 3, obtener todas las decisiones posibles que puede tomar la carpintería respecto a la fabricación de mesas, teniendo en cuenta la coherencia lógica de las soluciones.

Julio 2017. Una compañía elabora tres productos que han de procesarse en un departamento. Cada mes se dispone de 2300 horas de trabajo y 9200 kilos de materias primas. Las necesidades de horas de trabajo por unidad de producto son 5, 3 y 6 respectivamente. Por su parte, las de kilos de materias primas por unidad son 20 para el primer producto, 12 para el segundo y una cantidad a pendiente de determinar para el tercer producto. La producción mensual combinada de los 3 productos ha de ser de 600 unidades. Se pide obtener las combinaciones de los tres productos que permiten un total aprovechamiento de los recursos y cubrir el objetivo de producción. Para ello, hay que plantear el sistema de ecuaciones, discutirlo según el parámetro a y resolverlo, cuándo sea posible. Además, debes añadir, si fuera necesario, qué condiciones se deben cumplir para que la solución tenga sentido económico.

Septiembre 2017. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{c} x + y + a \cdot z = 1 \\ (a-1)x + a \cdot z = 1 \\ a \cdot x + y + 4a \cdot z = b + 2 \\ (a-2)x - y + 2a \cdot z = b \end{array}\right\}$$

Junio 2018 (primer llamamiento) Una empresa fabrica cuatro tipos de envases de plástico (mini, pequeño, mediano y grande) de los cuales desea producir un total de 100 unidades diarias. Los costes de producción son, respectivamente, 1, 2, 4 y 4 u.m. por unidad producida, y los precios de venta son 4 u.m. para cada envase mini, 5 para cada envase pequeño y p u.m. para cada envase mediano o grande (siendo p una cantidad por determinar). Conociendo la previsión de demanda, la empresa quiere fabricar un 50% más de los envases menores (mini y pequeño) que de los de mayor tamaño (medianos y grandes). El presupuesto disponible (M) aún no ha sido asignado, pero se debe consumir en su totalidad, y se desea que los ingresos por venta asciendan exactamente a 500 u.m.

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuántos envases de plástico de cada tipo se deben producir con las condiciones descritas.

b) Discutir el sistema anterior según los valores de p, M.

c) Si se asignara un presupuesto de 240 u.m. diarias para la producción, ¿cuál tendría que ser el precio de venta de los envases medianos y grandes para poder efectuar la producción? ¿Cuáles serían en ese caso las posibilidades de producción (con sentido económico)?

Junio 2018 (segundo llamamiento) La universidad tiene entre sus planes construir un aulario en un terreno disponible suficientemente grande y debe tomar una decisión sobre número y tipo de aulas a construir y presupuesto a invertir. Ya se ha decidido construir tres tipos de aulas, las más pequeñas de 20 puestos, otras medianas cuyo número de puestos no se ha decidido aún (digamos $\boldsymbol{a > 0}$) y las grandes del doble de puestos que las medianas. Se desea que en total haya 60 aulas con capacidad para 1300 estudiantes. Se ha calculado que la inversión necesaria para la construcción de cada aula pequeña será de 40 miles de euros, de cada una de las medianas 1600€ por cada puesto disponible y de cada una de las grandes un 50% más que el coste de un aula mediana, lo que incluye todos los servicios adicionales propios de un aulario moderno. Se ha pensado en invertir un presupuesto de 2480 miles euros y una vez que se decida se debe gastar todo. ¿Cuántas aulas de cada tipo deben construirse?

Julio 2018. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + a\,z = 0 \\ (2a-2)x + a\,z = 1 \\ (2a-1)x + y + (3a + 1)z = 2b + 1 \\ (2a-3)x - y + (a + 1)z = 2b + 1 \end{array}\right\}$$

Septiembre 2018. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{c} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ 2x + (1 + a)y - (a + 7)z = 4a + b \\ x + (1 + a)y - (a + 6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - b \end{array}\right\}$$

Junio 2019 (primer llamamiento) a) Discutir la compatibilidad y resolver según los valores de los parámetros a y b el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} x + 2y + z = 1 \\ x + (a + 1)y + (2a - 2)z = b + 2 \\ -2x + (a - 5)y + (a - 3)z = -2 \\ -x + (2a - 4)y + (a - 1)z = -b - 2 \end{array}\right\}$$

Junio 2019 (segundo llamamiento) a) Discutir la compatibilidad y resolver según los valores de los parámetros a y b el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + y + az = 1 \\ 2x + ay + 3az = b - 1 \\ -4x + (1 - 3a)y - 8az = 4 - 3b \\ 2x + ay + 2az = 1 \end{array}\right\}$$

Julio 2019. a) Clasificar completamente el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de a

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + a\,t = a \\ 3x + (a + 4)y + 3z + 2at = 4a \\ (a + 4)x + (2a + 3)y + (a + 4)z - at = 2a \end{array}\right\}$$

Y resolverlo cuando sea compatible.

Septiembre 2019. Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2a \cdot y + 4z + 7t = 0 \\ x + 2z + 3t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x - y + b \cdot z + (a + b)t = 2 \\ x - y + z + 2t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Clasificarlo completamente, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de a y b.

b) Resolverlo cuando sea compatible.

Junio 2021 (primer llamamiento) Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b.

$$\left.\begin{array}{l} ax + (a + 1)z = 1 \\ (a + 1)x + y + (4a + 4)z = b + 1 \\ x + y + (a + 1)z = 1 \\ (a - 1)x - y + (2a + 2)z = b - 1 \end{array}\right\}$$

Luego resuelve todos los compatibles indeterminados.

Junio 2021 (segundo llamamiento) Sea el siguiente sistema, donde *a* y *b* son parámetros reales:

$$\begin{cases}(a+1)x+y+\ 2z=0\\ x+y+az=b-2\\ ax+(a+3)z=1\\ 2x+2y-z=b-3\end{cases}$$

- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema tenga solución única.
- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema no tenga solución.
- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema tenga infinitas soluciones y calcularlas.

Julio 2021. Clasificar completamente el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de los parámetros a, b, y resolviéndolo, cuando tenga solución, para $a=-1$ y $a=-2$:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+2z+t=0\\ (a+2)y+az+2t=1\\ 2x-ay+5z+(b+1)t=a\\ -x-(a+3)y-z+(b-2)t=a\end{array}\right\}$$

Septiembre 2021. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y+2z=3\\ x+(a+2)y+6z=3\\ 3x+(4a+6)y+(a^2+18)z=b+7\\ x+(3a+2)y+(a^2+10)z=b+1\end{array}\right\}$$

Resolver los casos en que sea compatible.

Junio 2022 (primer llamamiento) Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b.

$$\left.\begin{array}{l}(a-2)x+ay-z=b+2\\ (-a-1)y+(a+1)z=3a+2b\\ (-a-1)y+(a^2-1)z=ba+2a+2\\ (-2a-2)y+(a^2+a)z=ba+5a+2b+2\end{array}\right\}$$

Resolver cuando sea compatible.

Junio 2022 (segundo llamamiento) Una empresa fabrica cuatro artículos A, B, C y D, en cuya producción intervienen trabajadores especializados y no especializados. Para elaborar una unidad del artículo A se requieren 2 horas de ambos tipos de mano de obra, y justo el doble por cada unidad del artículo B. La elaboración de cada unidad de los artículos C y D requiere 7 y 1 hora de mano de obra especializada, respectivamente. El tiempo de mano de obra no especializada necesario para cada unidad del artículo C es una cantidad *p* aún por determinar, y se sabe que una unidad del artículo D requiere una hora más (*p*+1) de trabajo no especializado. La plantilla actual de la empresa cuenta con 20 trabajadores no especializados con contratos de 6 horas diarias, pero se desconoce cuántas horas de mano de obra especializada hay disponibles al día (*N*). Las previsiones de demanda recomiendan que la mitad de la producción total sea de artículos de tipo A, y que la producción del artículo C sea un 25% menor que la producción del artículo D.

a) Plantear un sistema de ecuaciones que permita conocer qué cantidades se deben elaborar de los cuatro artículos.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema anterior según los valores de los parámetros *p*, *N*.

Resolver el sistema cuando *p*=3, y encontrar todas las soluciones con sentido económico (cantidades no negativas y enteras) e interpretarlas.

Julio 2022. Se tiene un sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, para ciertas matrices $A \in \mathcal{M}_4, B \in \mathcal{M}_{4\times 1}$, del que se ha obtenido un sistema equivalente cuya matriz ampliada es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & m & -2 \\ 0 & 1-m^2 & m-1 & -2 & 3m+b \\ 0 & m^2-1 & -m & m+2 & -3m-1 \end{array}\right)$$

Estudiar para qué valores de los parámetros tiene solución dicho sistema y obtener la solución del sistema en el caso $m = 0, b = -1$.

Septiembre 2022. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros m y b:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3z + 2t = m \\ 3x + y + 7z + 5t = b \\ x + y + z + mt = 2 - b \\ 2x - y + 8z + 5t = 4m - 1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema siempre que sea posible.

Mayo 2023. Clasificar el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + a\,t = a \\ 3x + (a+4)y + 3z + 2at = 4a \\ (a+4)x + (2a+3)y + (a+4)z - at = 2a \end{array}\right\}$$

Resolverlo cuando sea compatible

Junio 2023. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\begin{array}{c} 2x + y + z = 0 \\ 5x + (a+2)y + 2z = 2b \\ ax + (a-1)y - z = 3b \\ (a+7)x + (2a+2)y + 2z = 5b \end{array}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determine la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ y&=0 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\left.\begin{aligned} 3x-y+z&=5\\ y+x-z&=-2\\ -z+2y+x&=3 \end{aligned}\right\}$

Recuerda ordenar las incógnitas para obtener:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ -2\\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Dado el sistema: $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=4\\ -x+3y-z&=1 \end{aligned}\right\}$, razone si los siguientes sistemas son equivalentes:

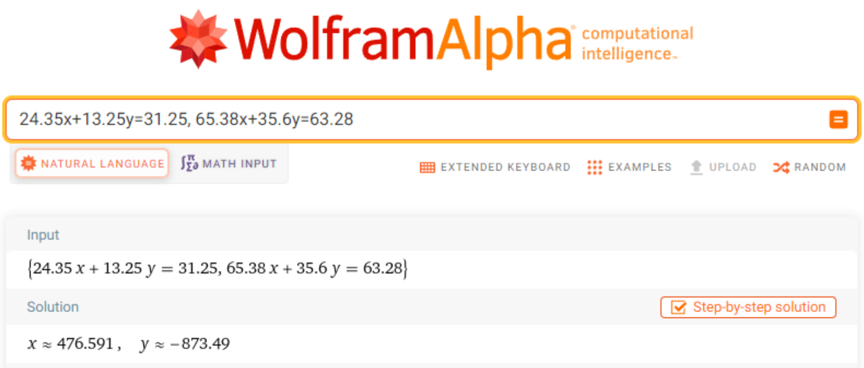
a) $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=4\\ 3x-4y+2z&=3 \end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} z+2x-y&=4\\ -z-x+3y&=1 \end{aligned}\right\}$ **c)** $\left.\begin{aligned} -x-y+z&=4\\ 2x+3y-z&=1 \end{aligned}\right\}$

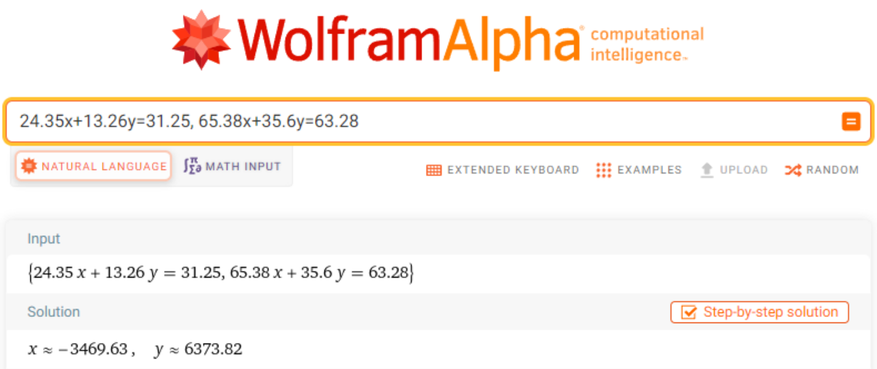
El sistema a) sí es equivalente ya que $2^{\text{a}}\text{ ecuación} = 1^{\text{a}}\text{ ecuación} - (2^{\text{a}}\text{ ecuación})$

El sistema b) también es equivalente ya que se ha intercambiado la tercera columna de posición.

El sistema c) no es equivalente ya que sólo se han intercambiado los dos elementos de la primera columna.

3. Resuelva el sistema lineal: $\left.\begin{aligned} 24.35x+13.26y&=31.25\\ 65.38x+35.6y&=63.28 \end{aligned}\right\}$. A continuación resuelva también el sistema: $\left.\begin{aligned} 24.35x+13.25y&=31.25\\ 65.38x+35.6y&=63.28 \end{aligned}\right\}$ y compare las soluciones. ¿En qué se distinguen? ¿cómo es posible que suceda esto?





Discutir y resolver, en caso de que sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones:

4a) $$\left.\begin{aligned} 2x+4y-3z&=4\\ -3x-5y+4z&=1\\ 4x+7y-5z&=2\\ x+2y-2z&=1 \end{aligned}\right\}$$

Es un sistema no homogéneo (o completo).

La matriz ampliada es: $A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -3 & 4\\ -3 & -5 & 4 & 1\\ 4 & 7 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

i) Por determinantes.

Discusión:

Rango $A=?$

Calculamos el determinante de la submatriz de A que resulta quitando última fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3\\ -3 & -5 & 4\\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix}=\cdots=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango } A=3$$

Rango $A^*=?$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 4\\ -3 & -5 & 4 & 1\\ 4 & 7 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\cdots=0 \Longrightarrow \text{Rango } A^*<4$$

Pero como ya conocemos una submatriz de A^* de orden 3 con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3\\ -3 & -5 & 4\\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango } A^*=3$$

Luego tenemos:

$\text{Rango } A=\text{Rango } A^*=3=\text{número de incógnitas} \Longrightarrow S.C.D.$ (solución única)

Resolución (Regla de Cramer):

Rango $A^*=3 \Longrightarrow$ 3 filas linealmente independientes$\Longrightarrow$ 3 ecuaciones linealmente independientes (L.I.). ¿Qué ecuación quitamos?, ¿por qué?

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y-3z&=4\\ -3x-5y+4z&=1\\ 4x+7y-5z&=2\\ \cancel{x+2y-2z}&\cancel{=1} \end{aligned}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -3\\ 1 & -5 & 4\\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3\\ -3 & -5 & 4\\ 4 & 7 & -5 \end{vmatrix}}=\cdots=-\frac{11}{1}=-11$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ -3 & 1 & 4\\ 4 & 2 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ -3 & -5 & 4\\ 4 & 7 & -5\end{vmatrix}}=\cdots=\frac{8}{1}=8$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4 & 4\\ -3 & -5 & 1\\ 4 & 7 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4 & -3\\ -3 & -5 & 4\\ 4 & 7 & -5\end{vmatrix}}=\cdots=\frac{2}{1}=2$$

Solución única: $x=-11, y=8, z=2.$

ii) Gauss (operaciones elementales)

Discusión: Rango $A=?$ Rango $A^*=?$

(Ya sabemos que se pueden estudiar de distintas formas, véase otra forma en la nota del final)

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -3 & 4\\ -3 & -5 & 4 & 1\\ 4 & 7 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{\text{Cambiamos primera}\\ \text{fila por cuarta fila}}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 1\\ -3 & -5 & 4 & 1\\ 4 & 7 & -5 & 2\\ 2 & 4 & -3 & 4\end{array}\right)\underset{\substack{F2\to F2+3*F1\\ F3\to F3-4*F1\\ F4\to F4-2*F1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{F3\to F3+F2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\underset{\substack{F4\to F4-F3\\ \text{(F4 es igual a F3)}}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \textit{3 filas L.I. (3 ecuaciones L.I.)}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{Rango } A=\text{Rango } A^*=3=\text{número de incógnitas}\Longrightarrow S.C.D.$$

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r}x+2y-2z=1\\ y-2z=4\\ z=2\end{array}\right\}\Longrightarrow y-2z=4\Longrightarrow y=2\cdot z+4\overset{z=2}{=}2\cdot 2+4=8$$

Y por último, despejando en la primera:

$x=1-2y+2z\underset{y=8,\ z=2}{=}1-2\cdot 8+2\cdot 2=-11\Longrightarrow$ Solución: $x=-11, y=8, z=2.$

Nota: *Otra forma de estudiar rango de A y de A^* (sin cambiar filas):*

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -3 & 4\\ -3 & -5 & 4 & 1\\ 4 & 7 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\underset{\substack{F2\to 2*F2+3*F1\\ F3\to F3-2*F1\\ F4\to 2*F4-F1}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -3 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 14\\ 0 & -1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{array}\right)\underset{F3\to 2*F3+F2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -3 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{array}\right)\underset{F4\to F4+F3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 4 & -3 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 14\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

4b) $\left.\begin{array}{r} 4x+y+2z+3t=5 \\ 4x+y+3z+3t=-2 \\ 8x+2y+3z+6t=17 \end{array}\right\}$

Sistema no homogéneo (o completo).

Vamos a realizarlo sólo por Gauss (operaciones elementales)

Discusión (*lo vamos a discutir cambiando columnas, aunque también se podría hacer sin cambiarlas*):

Rango A =? Rango A^* =?

$$A^*=\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & -2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 & 17 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{\text{Cambiamos la columna de las}\\ x \text{ por la columna de las } y}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 17 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{F2 \to F2 - F1 \\ F3 \to F3 - 2*F1}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right) \end{array} \underset{F3 \to F3 + F2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} y & x & z & t & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango } A = 2 = \text{Rango } A^* < 4 = \text{número de incógnitas}$
$\Longrightarrow S.C.I.$ *(infinitas soluciones) con* $4-2=2$ *incógnitas libres.*

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{c} y+4x+2z+3t=5 \\ z=-7 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 5-4x-2z-3t = 5-4x-2\cdot(-7)-3t \Longrightarrow$$

Infinitas soluciones: $y = 19-3t-4x$, $z=-7$, t, x incógnitas libres.

4c) $\left.\begin{array}{r} -x+y-2z-t=0 \\ 2x-y+z-2t=2 \\ x+2y-z+t=-3 \\ 3x+4y-3z-t=1 \end{array}\right\}$

Sistema no homogéneo (o completo).

Vamos a realizarlo sólo por Gauss (operaciones elementales)

Discusión:

Rango $A =$? Rango $A^* =$?

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F2\to F2+2*F1 \\ F3\to F3+F1 \\ F4\to F4+3*F1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{F3\to F3-3*F2 \\ F4\to F4-7*F2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & -13 \end{array}\right) \underset{F4\to F4-2*F3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ A tiene 3 filas linealmente independientes y A^*tiene 4 filas L.I. $\Longrightarrow$

$$\text{Rango A} = 3 \neq 4 = \text{Rango A}^* \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible (no tiene solución)}$$

Alternativamente, lo podríamos ver con el sistema equivalente, ya que cuarta fila del sistema equivalente nos da:

$0 = 5$ *¡que es un absurdo!* $\Longrightarrow$ *Sistema Incompatible (S.I.)*

4f) $\left.\begin{aligned} 2x+y-z&=1\\ x+y+z&=2\\ 3x+y-z&=3\end{aligned}\right\}$

Es un sistema no homogéneo (o completo).

La matriz ampliada es: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3\end{array}\right)$

Vamos a discutirlo y resolverlo por determinantes y por Gauss

a) Determinantes

Discusión:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix} = \cdots = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango A=Rango $A^* = 3$ =nº incóg.⟹S.C.D.

Resolución (Regla de Cramer):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}} = \cdots = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}} = \cdots = \frac{-3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}} = \cdots = \frac{3}{2}$$

Solución única: $x = 2, y = -3/2, z = 3/2.$

b) Gauss

Discusión:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -3\\ 0 & -2 & -4 & -3\end{array}\right) \sim$$

Cambiamos primera fila por segunda fila

$F2 \to F2 - 2*F1$
$F3 \to F3 - 3*F1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{array}\right)$$ ⟹*3 filas L.I. (3 ecuaciones L.I.)* ⟹

$F3 \to F3 - 2*F2$

Rango A = Rango $A^* = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ S.C.D.

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -y-3z=-3 \\ 2z=3 \end{array}\right\} \Longrightarrow z=\frac{3}{2} \rightarrow \cdots y=-\frac{3}{2} \rightarrow \cdots \rightarrow x=2$$

Por tanto la única solución es: $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$

4h) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 12x-2y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$

Es un sistema homogéneo (siempre tiene la solución trivial, $x=0, y=0, z=0$).

La matriz ampliada es: $A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 12 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Vamos a discutir y resolverlo por determinantes y por Gauss.

Por determinantes.

Discusión: Al ser un sistema homogéneo $\text{Rango } A=\text{Rango } A^*$

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 12 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\cdots=2 \neq 0 \Longrightarrow$$

$\text{Rango } A=\text{Rango } A^*=3=\text{número de incógnitas} \Longrightarrow S.C.D.$ (solución única)

Al ser un sistema homogéneo, tiene la solución trivial y además es un sistema compatible determinado, es decir, que tiene solución única, luego la solución es: $x=0, y=0, z=0$.

b) Por Gauss (operaciones elementales)

Discusión: Al ser un sistema homogéneo: $\text{Rango } A=\text{Rango } A^*$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 12 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F2 \rightarrow F2-12*F1 \\ F3 \rightarrow F3-F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{F3 \rightarrow 14*F3-3*F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

3 filas L.I. (3 ecuaciones L.I.) $\Longrightarrow$ $\text{Rango } A=\text{Rango } A^*=3=\text{nº incóg.} \Longrightarrow S.C.D.$

Vamos a resolverlo, aunque no haga falta en este caso:

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ -14y+10z=0 \\ -2z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \cdots \rightarrow z=0, y=0, x=0$$

4j) $\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \\ 2x+8y+4z=0 \end{array}\right\}$

Es un sistema homogéneo (siempre tiene solución).

La matriz ampliada es: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right)$

Vamos a discutir y resolverlo por Gauss (operaciones elementales)

Discusión:

Al ser un sistema homogéneo: $\text{Rango } A = \text{Rango } A^*$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{Cambiamos primera} \\ \text{fila por segunda fila}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F3 \to F3 - 3*F1 \\ F4 \to F4 - 2*F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{F3 \to F3 - F1 \\ F4 \to F4 - 2*F2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ $\Longrightarrow$*2 filas* L.I. (2 *ecuaciones* L.I.*)* $\Longrightarrow$

$\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = 2 < 3 = \text{nº de incógnitas} \Longrightarrow \text{S.C.I.}$ con 1 incógnita libre

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = -z \Longrightarrow x = -3y - z \overset{y=-z}{=} \cdots = 2z$$

Por tanto la solución es: $\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \\ z \text{ libre} \end{cases}$

17. (*Aplicación de soluciones no negativas*) Una empresa de análisis estadístico obtiene que la condición de equilibrio para el precio de tres bienes del mercado relacionados entre sí, podría venir determinada por uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x-y-z=10 \\ -x+4y-8z=12 \\ -x-2y+5z=8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ -x+y-z=3 \\ -3x-y+z=1 \end{array}\right\}$$

siendo x, y, z los precios de estos tres productos. Suponiendo que los dos sistemas tienen solución, sin resolver los sistemas, ¿podrías decir con cuál sistema nos debemos quedar?

Podemos utilizar el **Teorema de existencia de soluciones no negativas**:

Sea $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}$ donde $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times 1}$, $\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n$, $F=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times 1}$, siendo $\boldsymbol{e_{ij}\le 0, i\ne j}$, $i,j=1,2,\dots,n$, y además $f_i\ge 0$, $\forall i=1,\dots,n$.

Entonces el sistema $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}$ tiene solución no negativa $\boldsymbol{X}\ge\boldsymbol{0}$ $(x_i\ge 0,\forall i=1,\dots,n)$ para cualquier $\boldsymbol{F}\ge\boldsymbol{0}$ $(f_i\ge 0,\forall i=1,\dots,n)$ si y sólo si $\boldsymbol{E}$ verifica las condiciones de Hawkins-Simons.

Dado que las matrices de coeficientes cumplen la condición: $e_{ij}\le 0, i\ne j, i,j=1,2,3$ y que $\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ son matrices no negativas, bastará con comprobar si las matrices de coeficientes cumplen las condiciones de Hawkins-Simons:

$$E=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\to\Delta_1=5>0,\Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=\cdots=19>0,\Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -8 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}=25>0$$

Por lo tanto la matriz de coeficientes del primer sistema **cumple** las condiciones del teorema y por tanto el sistema tiene solución no negativa.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\to\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=\cdots=-1<0,\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-20<0$$

La matriz de coeficientes del segundo sistema **no cumple** las condiciones del teorema y por tanto el sistema tiene alguna componente de la solución negativa.

A la vista de los resultados anteriores, ¿podrías decir con que sistema nos debemos quedar?

20 a). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros (a, b, k):

$$\left.\begin{aligned} 2x-z&=a\\ 3x-2z&=1\\ y+z&=6\\ 2x+y-4z&=a \end{aligned}\right\}$$

Solución: *Discusión*

$$A^*=\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&a\\3&0&-2&\vdots&1\\0&1&1&\vdots&6\\2&1&-4&\vdots&a\end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Fila 2}\to 2*\text{Fila 2-3*Fila 1}\\ \text{Fila 4}\to\text{Fila 4-Fila 1}}}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&a\\0&0&-1&\vdots&2-3a\\0&1&1&\vdots&6\\0&1&-3&\vdots&0\end{pmatrix}\underset{\text{Cambiamos 2ª fila por 4ª fila}}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&a\\0&1&-3&\vdots&0\\0&1&1&\vdots&6\\0&0&-1&\vdots&2-3a\end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{Fila 3}\to\text{Fila 3-Fila 2}}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&a\\0&1&-3&\vdots&0\\0&0&4&\vdots&6\\0&0&-1&\vdots&2-3a\end{pmatrix}\underset{F4\to 4*F4+F3}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&a\\0&1&-3&\vdots&0\\0&0&4&\vdots&6\\0&0&0&\vdots&14-12a\end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de A es 3 ya que hay 3 filas L.I.

Sin embargo, el rango de la matriz ampliada depende de $14-12a$, ya que si $14-12a=0\to a=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$ tendríamos también 3 filas L.I. en A^*. Luego:

Primer caso: Si $a\neq\frac{7}{6}$. Entonces el rango $A=3\neq 4=$rango A^* y por tanto el sistema es incompatible

Segundo caso: Si $a=\frac{7}{6}$

La matriz equivalente queda:

$$\begin{pmatrix}2&0&-1&\vdots&7/6\\0&1&-3&\vdots&0\\0&0&4&\vdots&6\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}$$ → Por tanto, tenemos que el rango $A=3=$rango $A^*=3$=número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

La resolución por sistema equivalente sería:

$$\left.\begin{aligned} 2x-z&=7/6\\ y-3z&=0\\ 4z&=6 \end{aligned}\right\}\to\text{obtenemos } z=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\to y=\frac{9}{2}\to\cdots\to x=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

20 b). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros (a, b, k):

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+kz=k \\ x+4y+k\,z=6+k \\ x-8y+k^2z=-6 \end{array}\right\}$$

Solución:

Discusión

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & k \\ 1 & 4 & k & \vdots & 6+k \\ 1 & -8 & k^2 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Fila 2}\to\text{Fila 2-Fila 1} \\ \text{Fila 3}\to\text{Fila 3-Fila 1}}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & k \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & -10 & k^2-k & \vdots & -6-k \end{pmatrix} \underset{\text{F3}\to\text{F3+5*F2}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & \vdots & k \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & k^2-k & \vdots & 24-k \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{vmatrix} = 2(k^2-k)=0 \to$ Cuyas raíces son $k=0$ y $k=1$.

Primer caso: Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{vmatrix} = 2(k^2-k) \neq 0$, tenemos que el rango $A=3=$rango $A^*=$ número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado. Si lo resolvemos la solución vendrá dada por

$$x=\frac{k^2-6k-18}{k-1}, y=3, z=\frac{24-k}{k^2-k}$$

Segundo caso: Si $k=0$ la matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 24 \end{pmatrix} \to$ De donde podemos concluir que es un sistema incompatible ya que:

rango $A=2 \neq 3=$rango A^* o teniendo en cuenta que en la última ecuación $0 \neq 24$.

Tercer caso: Si $k=1$ la matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 23 \end{pmatrix} \to$ De donde podemos concluir que es un sistema incompatible ya que:

rango $A=2 \neq 3=$rango A^* o teniendo en cuenta que en la última ecuación $0 \neq 23$.

20 c). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros (a, b, k):

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{array}\right\}$$

Solución:

Discusión

Por determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \cdots = 2a = 0 \rightarrow a = 0.$$

Primer caso: $a \neq 0 \rightarrow$ rango A $\underset{\text{Por ser un sistema homogéneo}}{=}$rango $A^* = 3$ =número de incógnitas→Sistema compatible determinado y

al ser homogéneo, la única solución es la trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

Segundo caso: $a = 0 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, entonces: rango A $\overset{\text{Por ser un sistema homogéneo}}{=}$rango $A^* = 2 < 3$ =nº de incógnitas, entonces es un sistema compatible indeterminado con una incógnita libre.

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ x+3y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cuya solución es } y=-z, x=2z,\ z \text{ incógnita libre.}$$

Por Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 10 & 4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Cambiamos F1 por F2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ a & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 10 & 4 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F2 \rightarrow F2 - a*F1 \\ F3 \rightarrow F3 - 3*F1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-3a & 1-a & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Cambiamos F2 por F3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-3a & 1-a & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{F3 \rightarrow F3-(1-3a)*F2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1-3a & 1-a & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2a & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 2a = 0 \rightarrow a = 0$$

Primer caso: $a \neq 0$

Si a es distinto de cero se tiene que:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = 2a \neq 0 \rightarrow$ rango A =rango $A^* = 3$ =número de incógnitas→Sistema compatible determinado y al ser homogéneo, la única solución es la trivial $x = 0, y = 0, z = 0$.

Segundo caso: $a = 0$

La matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ De tal forma que: rango A =rango $A^* = 2 < 3$ =nº de incógnitas, entonces es un sistema compatible indeterminado con una incógnita libre.

Resolución (sistema equivalente):

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cuya solución es } y=-z, x=2z,\ z \text{ incógnita libre.}$$

20 d). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros (a, b, k):

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ x-2y=1 \\ 2x-y+z=2a \\ -3x+3y-z=6-4a \end{array}\right\}$$

Solución: *Discusión*

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 2a \\ -3 & 3 & -1 & \vdots & 6-4a \end{pmatrix} \underset{\substack{F2\to F2-F1 \\ F3\to F3-2*F1 \\ F4\to F4+3*F1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 6 & 2 & \vdots & 24-4a \end{pmatrix} \underset{\substack{F3\to F3-F2 \\ F4\to F4-2*F2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2a-7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 14-4a \end{pmatrix}$$

$$\underset{F4\to F4+2*F3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2a-7 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de A es 2 ya que hay 2 filas L.I.

Sin embargo, el rango de la matriz ampliada depende de $2a-7$, ya que si $2a-7=0 \to a=\frac{7}{2}$ tendríamos también 2 filas L.I. en A^*. Luego:

Primer caso: Si $a \neq \frac{7}{2}$. Entonces el rango $A=2 \neq 3=$rango A^* y por tanto el sistema es incompatible

Segundo caso: Si $a=\frac{7}{2}$

La matriz equivalente queda:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to$ Por tanto, tenemos que el rango $A=$rango $A^*=2<3$=número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 incógnita libre.

La resolución por sistema equivalente sería:

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ -3y-z=-5 \end{array}\right\}$ →despejando obtenemos $z=5-3y,\ x=1+2y,\ \ y$ libre.

20 e). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro k:

$$\left.\begin{array}{r} x+ky+kz=1 \\ kx+ky+z=1 \\ x+k^2y+z=k \end{array}\right\}$$

Nota: Para sacar los casos necesitas recordar que la solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$ es $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Solución: *Discusión*

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & 1 \\ k & k & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & k^2 & 1 & \vdots & k \end{pmatrix} \underset{\substack{F2\to F2-k*F1 \\ F3\to F3-F1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & 1 \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 & \vdots & 1-k \\ 0 & k^2-k & 1-k & \vdots & k-1 \end{pmatrix} \underset{F3\to F3+F2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & 1 \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 & \vdots & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = (k-k^2)\cdot(2-k-k^2)=0 \to \left.\begin{array}{r} (k-k^2)=0 \\ (2-k-k^2)=0 \end{array}\right\} \to$$

$$\left.\begin{array}{r} k=0,\ k=1 \\ k=1, k=-2 \end{array}\right\} \to \text{Luego las raíces son } k=0,\ k=1, k=-2.$$

Primer caso: Si $k\neq 0$, $k\neq 1$, $k\neq -2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 \end{vmatrix} = (k-k^2)\cdot(2-k-k^2)\neq 0,$

Por tanto tenemos que el rango $A=3=$rango $A^*=$ número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

Resolución (matriz equivalente)

La matriz equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & 1 \\ 0 & k-k^2 & 1-k^2 & \vdots & 1-k \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{ y el sistema sería } \left.\begin{array}{l} x+ky+kz=1 \\ (k-k^2)y+(1-k^2)z=1-k \\ (2-k-k^2)z=0 \end{array}\right\} \to$$

despejando obtenemos $z=0, y=\frac{1-k}{k-k^2}=\frac{1}{k}$ $, x=0$.

Segundo caso: Si $k=0$ la matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to$ De donde podemos concluir que es un sistema incompatible ya que por sistema equivalente de la segunda y tercera ecuación $z=1,\ \ 2z=0$..

Tercer caso: Si $k=1$ la matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to$ Por tanto, tenemos que el rango $A=$rango $A^*=\ 1<3$=número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado con 2 incógnitas libres, con las soluciones: $z=-x-y+1$, siendo x e y libres.

Cuarto caso: Si $k=-2$ la matriz equivalente es:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -6 & -3 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to$ Por tanto, tenemos que el rango $A=$rango $A^*=\ 2<3$=número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 incógnita libre, con las soluciones: $z=-1-2y, x=-1-2y,$ siendo y libre.

20 ñ). Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de los parámetros (a, b)

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=2a \\ x-2y=1 \\ -3x+3y-z=b \end{array}\right\}$$

Solución: *Discusión*

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 2a \\ 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ -3 & 3 & -1 & \vdots & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 6 & 2 & \vdots & b+18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b+4a-6 \end{pmatrix}$$

$F2 \to F2 - 2 * F1$
$F3 \to F3 - F1$
$F4 \to F4 + 3 * F1$

$F3 \to F3 - F2$
$F4 \to F4 + 2 * F2$

Entonces rango de A es 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Sin embargo, el rango de la matriz ampliada no puede ser 4 ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & b+4a-6 \end{vmatrix} = 0$$

Los casos los sacaremos por filas linealmente dependientes, es decir, la tercera fila con $7-2a=0$ y/o la cuarta fila con $b+4a-6=0$. De la tercera obtenemos $a=7/2$ y sustituyendo en la cuarta $b=-8$.

Luego los casos serían:

Primer caso: Si $a = 7/2$ y $b = -8$, la matriz equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$ $\to$ entonces el rango A =rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Resolución (matriz equivalente)

El sistema equivalente $\left.\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ -3y-z=-5 \end{array}\right\}$ tiene las soluciones: $z = 5-3y, \quad x = 1+2y, \ y$ libre.

Segundo caso: Si $a \neq 7/2$ y $b = -8$, la matriz equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -14+4a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$F4 \to F4 + 2 * F3$

Rango $A = 2 \neq 3$ =rango A^*

¡¡Sistema incompatible!!

Tercer caso: Si $a = 7/2$ y $b \neq -8$, la matriz equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b+8 \end{pmatrix}$$ $\to$ entonces rango $A = 2 \neq 3$ =rango A^*, sistema incompatible.

Cuarto caso: Si $a \neq 7/2$ y $b \neq -8$, la matriz equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b+4a-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -3 & -1 & \vdots & 2a-12 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 7-2a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$F4 \to (7-2a) * F4 - (b+4a-6) * F3$
Fijarse que lo podemos hacer ya que $(7-2a) \neq 0$

Rango $A = 2 \neq 3$ =rango A^*

¡¡Sistema incompatible!!

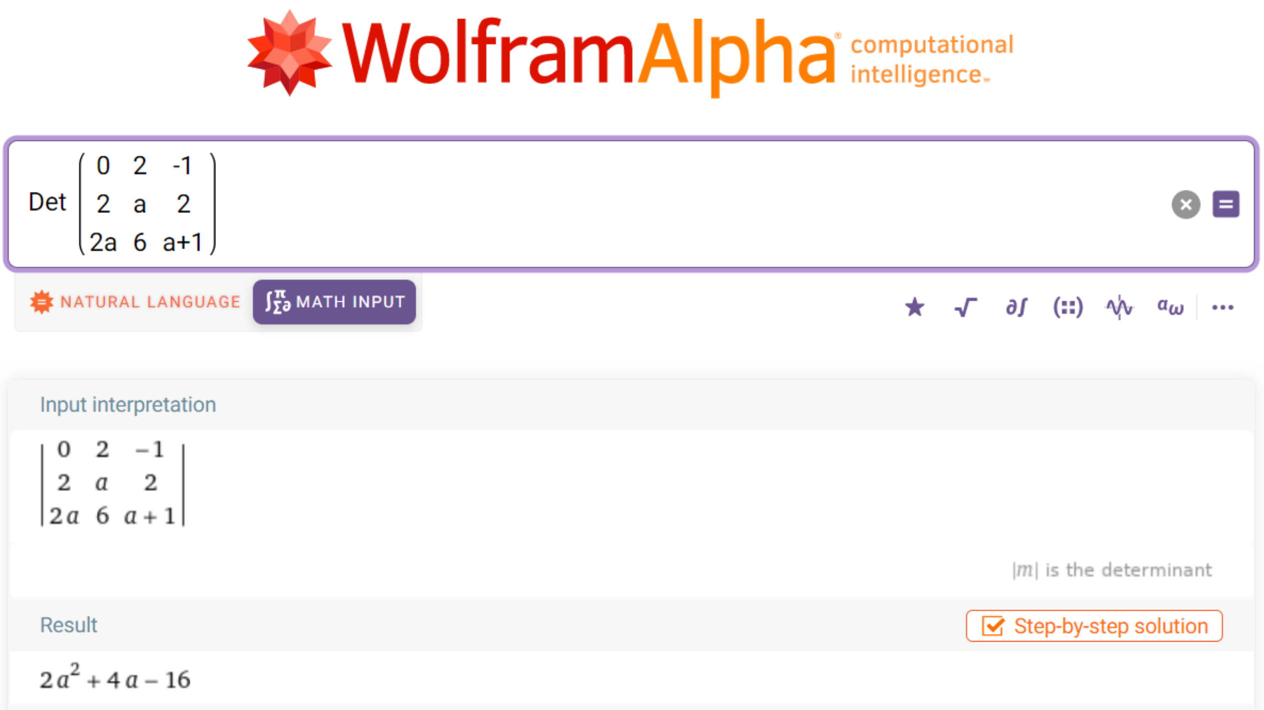
22. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 6 & a+1 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué dirías de la compatibilidad del sistema lineal $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}$? Resolverlo en los casos que sea compatible.

b) Para algún valor de a, elegir un $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$ sea compatible determinado y resolver dicho sistema.

---

a) Vamos a estudiar el rango de $\mathbf{A}$ por determinantes:



$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 6 & a+1 \end{vmatrix} = \cdots = 2a^2 + 4a - 16 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos como soluciones $a = -4$ y $a = 2$.

Por tanto, como el sistema $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{0}$ es un sistema homogéneo, tenemos que si $a \neq -4$ y $a \neq 2$ el $|\mathbf{A}| \neq 0$ y entonces tenemos un sistema homogéneo compatible determinado. ¿Sabrías decir cuál es la solución en este caso?

A continuación, comprueba que:

i) En el caso $a = -4$ es un sistema compatible indeterminado y su solución será:

$x = 0, z = 2y,$ siendo y la incógnita libre.

ii) En el caso $a = 2$ también es un sistema compatible indeterminado y su solución será:

$x = -3y, z = 2y,$ siendo y la incógnita libre.

23. c) Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, los siguientes sistemas en función de los valores reales de los parámetros a, b:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-t=1 \\ 4x+(a+4)y-z+2t=3 \\ -2x-y+(b-1)z-t=-1 \\ 4x-ay+(2-b)z+2t=3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & x & y & z & t & & & \\ A^*= & \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 4 & a+4 & -1 & 2 & \vdots & 3 \\ -2 & -1 & b-1 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & -a & 2-b & 2 & \vdots & 3 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{\text{Fila 2} \to \text{Fila 2} - 2*\text{Fila 1} \\ \text{Fila 3} \to \text{Fila 3} + \text{Fila 1} \\ \text{Fila 4} \to \text{Fila 4} - 2*\text{Fila 1}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 & \vdots & 0 \\ 4 & -a-2 & 2-b & 4 & \vdots & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\text{F4} \to \text{F4} + \text{F2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-b & 8 & \vdots & 2 \end{array}\right) \underset{\text{F4} \to \text{F4} + \text{F3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(a+2)\cdot(b-1)\cdot 6$$

El determinante se hace cero cuando $b=1$ ó $a=-2$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán:

i) $b \neq 1$ *y* $a \neq -2$; **ii)** $b=1$; **iii)** $a=-2$

Discusión:

Primer caso: $a \neq -2$ y $b \neq 1$.

En este caso $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot(a+2)\cdot(b-1)\cdot 6 \neq 0$, entonces:

Rango $A=4=$Rango A^* =número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $b = 1$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & a+2 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{F4} \to \mathrm{F4} + 3 * \mathrm{F3}$

De la cuarta ecuación obtenemos inmediatamente que en este caso es un S.I.

Tercer caso: $a = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b-6 & \vdots & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4b-6 & \vdots & b-1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{F3} \to \mathrm{F3} + (b-1) * \mathrm{F2}$

Cambiamos tercera fila por cuarta fila
¿por qué hacemos esto?

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4b-6 & \vdots & b-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 3-b \end{pmatrix}$$

$\mathrm{F3} \to \mathrm{F3}/2$
¿es necesario este paso?

$\mathrm{F4} \to 3 * \mathrm{F4} - (4b-6) * \mathrm{F3}$

Por lo que obtenemos dos subcasos.

Subcaso I: $a = -2$ y $b \neq 3$, que si lo discutes obtendrás S.I.

Subcaso II: $a = -2$ y $b = 3$. En este otro, si lo discutes obtendrás S.C.I. con 1 incógnita libre.

La resolución de los casos compatibles queda como ejercicio.

24. Sea la tabla de intercambio entre dos industrias:

	I	II	Demanda final	Producción total
I	40	90		200
II	20	45		180
Inputs primarios				
Inputs totales	200	180		

a) Determine la máxima demanda final que puede ser alcanzada por la industria en la situación actual.

b) Construya la matriz de coeficientes técnicos.

c) Demuestre que la economía es productiva.

d) Halle el nivel de producción de las industrias I, II necesario para alcanzar una demanda final en el futuro de 80 y 130, respectivamente.

---

a) Utilizando las hipótesis del Modelo de Leontief podemos rellenar los datos que faltan:

	I	II	Demanda final	Producción total
I	40	90	70	200
II	20	45	115	180
Inputs primarios	140	45		
Inputs totales	200	180		

b) Podemos calcular la matriz de Coeficientes técnicos con la fórmula:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{40}{200} & \frac{90}{180} \\ \frac{20}{200} & \frac{45}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

c) Para demostrar que la economía es productiva vamos a comprobar que $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq 0$.

La matriz de Leontief sabemos que es $\mathbf{I} - \mathbf{A}$:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

La inversa de Leontief existe ya que:

$$|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}75 \end{vmatrix} = \cdots = 0{,}55 \neq 0$$

Y empleando la fórmula $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{I}-\mathbf{A}|}\left((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{adj}\right)^t$ tenemos que la matriz inversa de Leontief viene dada:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1{,}364 & 0{,}909 \\ 0{,}182 & 1{,}455 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la economía es productiva.

d) Supongamos que la demanda final cambia a $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 80 \\ 130 \end{pmatrix}$ y nos piden que calculemos la nueva producción total.

Ya sabemos que debemos resolver el sistema de Leontief:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales que sabemos resolverlo perfectamente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 227{,}29 \\ 203{,}71 \end{pmatrix}$$

O también podemos resolver el sistema utilizando la inversa de Leontief $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}364 & 0{,}909 \\ 0{,}182 & 1{,}455 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 130 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 227{,}29 \\ 203{,}71 \end{pmatrix}.$$

25. Dada la matriz de coeficientes técnicos de una economía con dos sectores de producción $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ y que tiene como demanda final del consumidor $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$:

a) ¿Podríamos construir la tabla de relaciones intersectoriales con únicamente estos datos?

b) Estúdiese si la economía generada por $\mathbf{A}$ es productiva.

---

a) ¿Podríamos construir la tabla de relaciones intersectoriales con únicamente estos datos?

	I	II	Demanda final	Producción total
I			40	
II			60	
Inputs primarios				
Inputs totales				

Concretamente, conociendo la matriz $\mathbf{A}$ y la demanda final $\mathbf{D}$, ¿podemos hallar la producción total $\mathbf{X}$?

La respuesta es afirmativa y podemos utilizar cualquiera de las dos ecuaciones siguientes:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D}$$

Vamos a utilizar la segunda. Para ello vemos que la matriz de Leontief en este caso es:

$$\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Y su determinante es: $|\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}5 \end{vmatrix} = \cdots = 0{,}28 \neq 0$.Por tanto, existe la inversa de Leontief, que podemos calcular por la fórmula de adjuntos y obtener (redondeando con tres decimales):

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1{,}786 & 1{,}429 \\ 1{,}071 & 2{,}857 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la producción total es (redondeando en este caso con tres decimales):

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1{,}786 & 1{,}429 \\ 1{,}071 & 2{,}857 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 157{,}143 \\ 214{,}286 \end{pmatrix}$$

Datos que podemos añadir a la tabla:

	I	II	Demanda final	Producción total
I			40	157,143
II			60	214,286
Inputs primarios				
Inputs totales	157,143	214,286		

Con los datos que conocemos ahora:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 157{,}14 \\ 214{,}29 \end{pmatrix},$$

¿podemos hallar cualquier x_{ij}, teniendo en cuenta que $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{\mathbf{X}_j}$?

Si, como $x_{ij} = a_{ij} \cdot \mathbf{X}_j$

Tenemos que (redondeando a tres decimales)

$$x_{11} = a_{11} \cdot \mathbf{X_1} = 0{,}2 \cdot 157{,}143 = 31{,}429 \qquad x_{12} = a_{12} \cdot \mathbf{X_2} = 0{,}4 \cdot 214{,}286 = 85{,}714$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot \mathbf{X_1} = 0{,}3 \cdot 157{,}143 = 47{,}143 \qquad x_{22} = a_{22} \cdot \mathbf{X_2} = 0{,}5 \cdot 214{,}286 = 107{,}143$$

Luego tabla nos queda:

	I	II	Demanda final	Producción total
I	31,429	85,714	40	157,143
II	47,143	107,143	60	214,286
Inputs primarios	78,571	21,429		
Inputs totales	157,143	214,286		

36. Una empresa fabrica tres productos A, B, C que deben pasar por tres secciones (I, II, III). En la tabla se recogen los tiempos de fabricación que se requiere para producir una unidad de cada producto y el tiempo necesario de trabajo requerido en la sección II. Calcular el número total de unidades a producir de cada producto y el tiempo de trabajo necesario que se requiere en las secciones I y III para que el problema tenga solución, sabiendo que la sección III requiere el doble de tiempo que la sección I.

Sección	Producto			Tiempo de trabajo
	A	B	C	
I	2	2	2	
II	2	3	3	210
III	3	4	4	

Solución:

El tiempo de trabajo en la sección I será el que lo pongamos como un parámetro a y en la sección III, como se requiere el doble de tiempo que en la sección I, el tiempo de trabajo de la sección III será $2a$:

Sección	Producto			Tiempo de trabajo
	A	B	C	
I	2	2	2	a
II	2	3	3	210
III	3	4	4	$2a$

Si denotamos por:

$x =$número de unidades producidas del producto A
$y =$número de unidades producidas del producto B
$z =$número de unidades producidas del producto C

El sistema de ecuaciones lineales que nos queda es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+2z=a \\ 2x+3y+3z=210 \\ 3x+4y+4z=2a \end{array}\right\}$$

Discusión del sistema (Teorema de Rouche-Frobenius):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & a \\ 2 & 3 & 3 & 210 \\ 3 & 4 & 4 & 2a \end{array}\right) \underset{F2 \to F2 - F1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 210-a \\ 0 & 2 & 2 & a \end{array}\right) \underset{F3 \to F3 - 2*F2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 210-a \\ 0 & 0 & 0 & 3a-420 \end{array}\right)$$

Entonces rango $A = 2$ (2 filas L.I.)

rango $A^* = ?$

Si $3a - 420 = 0 \to a = \frac{420}{3} = 140$ (tiempo de trabajo en sección I es de 140 horas).

Dos casos:

a) Si $a \neq 140 \Longrightarrow 3$ filas L. I. en $A^* \Longrightarrow$ Rango $A^* = 3 \neq 2 =$ Rango $A \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 140 \Longrightarrow$ la matriz del sistema equivalente queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 140 \\ 0 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A^* = 2 < 3 = \text{número de incógnitas} \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (S.C.I.) con 1 incógnita libre.

Resolución (caso compatible): $a = 140$

Sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 2z = 140 \\ y + z = 70 \end{array}\right\}$$

Por Gauss nos quedaría como solución matemática:

$$y = 70 - z,\ \ x = 0,\ \ z \text{ incógnita libre.}$$

¿Solución económica?

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ por ser número de unidades producidas de los tres productos.

$y = 70 - z \geq 0 \to 70 \geq z$

Luego la solución con sentido económico sería:

$y = 70 - z,\ x = 0,\ 0 \leq z \leq 70.$

40. Los dueños de un restaurante han decidido renovar el mobiliario (mesas y sillas) del comedor y te han pedido asesoramiento. Se desea instalar mesas de tres tamaños: las más pequeñas, con 4 asientos cada una, otras de tamaño mediano con un número de asientos sin decidir y las más grandes con 12 asientos. Se desea que, en total, haya 60 mesas con capacidad para 260 comensales (asientos). Se ha calculado que el coste de cada mesa pequeña (con sus respectivos asientos) será de 100€, el coste de cada mesa mediana será de unos 20€ por cada asiento y cada mesa grande costará 180€. Se ha pensado en invertir exactamente 6200€. ¿Cuántas mesas de cada tipo deben encargarse?

Solución:

Las incógnitas serán:

x =número de mesas pequeñas (con 4 asientos)

y =número de mesas medianas (con k asientos)

z =número de mesas grandes (con 12 asientos)

El sistema de ecuaciones que modeliza el problema es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 4x+k\cdot y+12z=260 \\ 100x+20k\cdot y+180z=6200 \end{array}\right\}$$

Discusión:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 4 & k & 12 & 260 \\ 100 & 20k & 180 & 6200 \end{array}\right) \underset{\text{F2}\to\text{F2}-4*\text{F1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & k-4 & 8 & 20 \\ 10 & 2k & 18 & 620 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{F3}\to\text{F3}-10\text{F1}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & k-4 & 8 & 20 \\ 0 & 2k-10 & 8 & 20 \end{array}\right) \end{array} \underset{\text{Cambiamos segunda columna por tercera}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 8 & k-4 & 20 \\ 0 & 8 & 2k-10 & 20 \end{array}\right) \end{array} \underset{\text{F3}\to\text{F3}-\text{F2}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 8 & k-4 & 20 \\ 0 & 0 & k-6 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Para obtener los casos lo mejor es hallar el determinante de la matriz de coeficientes e igualar a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & k-4 \\ 0 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 8(k-6)=0 \to k=6$$

Dos casos:

a) $k \neq 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & k-4 \\ 0 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 8(k-6) \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A = 3 = \text{Rango } A^*$ =número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado (solución única)

b) $k=6 \Rightarrow$ la matriz del sistema equivalente queda:

$x \quad z \quad y$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 60\\ 0 & 8 & 2 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 8\end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow$ Rango A =Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado 1 incógnita libre (S.C.I.)

Resolución:

Caso a): $k \neq 6$

Matriz del sistema equivalente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 60\\ 0 & 8 & k-4 & 20\\ 0 & 0 & k-6 & 0\end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z+y=60\\ 8z+(k-4)y=20\\ (k-6)y=0\end{array}\right\} \rightarrow \text{Cuya solución es:}$$

$$x = \frac{115}{2} = 57'5\,, \quad y = 0, \qquad z = \frac{5}{2} = 2'5$$

¿Tiene sentido "económico"?

Caso b): $k = 6$

Matriz del sistema equivalente:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 60\\ 0 & 8 & 2 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z+y=60\\ 8z+2y=20\end{array}\right\} \rightarrow \text{Cuya solución es:}$$

$$x = 50+3z, \qquad y = 10-4z, \quad z\ libre\ (z \in \mathbb{R})$$

Para que esta solución matemática tenga sentido "económico" debemos imponer las condiciones de no negatividad: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

De tal forma que nos quedará:

$$\left.\begin{array}{l} x = 50+3z\\ y = 10-4z\\ 0 \leq z \leq 2'5\end{array}\right\} \rightarrow \text{Finalmente podemos deducir que únicamente tendremos tres casos con sentido:}$$

$$(x,y,z) = (50{,}10{,}0);\ (x,y,z) = (53{,}6{,}1);\ (x,y,z) = (56{,}2{,}2)$$

EJERCICIOS DE EXAMEN RESUELTOS

Junio 2016 (primer llamamiento). Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\begin{cases} a\,x + y + 2z = 1 \\ 2a\,x + a\,y + 2z = 1 \\ 4a\,x + (a+1)y + 4z = b + 2 \\ 3a\,x + a\,y + 2z = b + 1 \end{cases}$$

$$A^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2a & a & 2 & \vdots & 1 \\ 4a & a+1 & 4 & \vdots & b+2 \\ 3a & a & 2 & \vdots & b+1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 2 & a & 2a & \vdots & 1 \\ 4 & a+1 & 4a & \vdots & b+2 \\ 2 & a & 3a & \vdots & b+1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 0 \\ 0 & a-1 & 2a & \vdots & b \\ 0 & a-1 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix} \sim$$

Cambiamos primera columna por tercera columna (aunque podríamos hacerlo directamente por tener la columna 1 todos múltiplos de a

Fila 2 → Fila 2 − Fila 1

Fila 3 → Fila 3 − 2 ∗ Fila 1

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 0 \\ 0 & a-1 & 2a & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)a = 0$$

F4 = F3 ó F4 → F4 − F3

F3 → F3 − F2

El determinante se hace cero cuando $a = 1$ ó $a = 0$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán: **i)** $a \neq 0$ y $a \neq 1$; **ii)** $a = 0$; **iii)** $a = 1$.

Discusión:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)a \neq 0$, entonces: Rango $A = 3$.

¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de b? ***No,*** el Rango $A^* = 3$, $\forall b \in \mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A = 3$ =Rango A^* =número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $a = 0$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array}$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de b:

Subcaso I): $a = 0$ y $b \neq 0$.

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A = 2 \neq 3$ =Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a = 0$ y $b = 0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

→Tenemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. → Rango A =Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Tercer caso: $a = 1$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \underset{F3 \to F3 - F2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array}$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de b:

Subcaso I): $a = 1 \; y \; b \neq 0.$

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A = 2 \neq 3 =$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a = 1 \; y \; b = 0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

→Por tanto A y A^* tienen 2 filas L.I. →Rango $A =$Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Resolución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq 1, \forall b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{matrix} 2z + y + a\,x = 1 \\ (a-1)y + a\,x = 0 \\ a\,x = b \end{matrix}\right\}$$

Cuya solución es: $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{-a\,x}{a-1} = \frac{-b}{a-1}$, $z = \frac{1}{2}(1 - a\,x - y) = \frac{1}{2} + \frac{b}{2(a-1)} - \frac{b}{2} = \cdots = \frac{a-1+2b-b\,a}{2(a-1)}$

Segundo caso II) $a = 0 \; y \; b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{matrix} 2z + y = 1 \\ -y = 0 \end{matrix}\right\} \to \text{Cuya solución es: } z = 1/2, y = 0, x \text{ libre}$$

Tercer caso II) $a = 1 \; y \; b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es } \left.\begin{matrix} 2z + y + x = 1 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \to$$

Cuya solución es: $x = 0, y = 1 - 2z, z$ libre

Junio 2016 (segundo llamamiento) Una empresa elabora tres productos distintos A, B y C de un kilo de peso cada uno. El producto A requiere de su peso un 40% de chocolate y un 10% de leche, el producto B requiere un 25% de chocolate y un 25% de leche, mientras que C requiere un 20% de chocolate y un 30% de leche. Sabemos que la empresa tiene un stock de 114 kilos de chocolate y una cantidad "k" indeterminada de leche (kg.).

a) Formular y resolver un sistema de ecuaciones lineales, definiendo las variables que intervienen, para determinar las posibilidades de producción que tiene la empresa con los productos A, B y C si decide consumir todo el stock disponible.

Solución:

x=número de unidades de A

y=número de unidades de B

z=número de unidades de C

El sistema de ecuaciones que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{r} 0.4x+0.25y+0.2z=114 \\ 0.1x+0.25y+0.3z=k \end{array}\right\}$$

O lo que es lo mismo

$$\left.\begin{array}{r} 40x+25y+20z=11400 \\ 10x+25y+30z=100k \end{array}\right\}$$

Vemos con Wolfram Alpha que tiene **solución** para todo k:

Input interpretation:

solve	$40x+25y+20z=11\,400$ $10x+25y+30z=100k$	for	x, y

Result:

$$x=\frac{1}{3}(-10k+z+1140) \text{ and } y=\frac{4}{3}(4k-z-114)$$

Julio 2016. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 5x+(a+2)y+2z=2b \\ ax+(a-1)y-z=3b \\ (a+7)x+(2a+2)y+2z=5b \end{cases}$$

$$A^*=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 5 & a+2 & 2 & \vdots & 2b \\ a & a-1 & -1 & \vdots & 3b \\ a+7 & 2a+2 & 2 & \vdots & 5b \end{pmatrix} \end{array} \underset{\text{Cambiamos primera columna por tercera columna}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z & y & x & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & a+2 & 5 & \vdots & 2b \\ -1 & a-1 & a & \vdots & 3b \\ 2 & 2a+2 & a+7 & \vdots & 5b \end{pmatrix} \end{array} \underset{\substack{\text{Fila 2} \to \text{Fila 2} - 2*\text{Fila 1} \\ \text{Fila 3} \to \text{Fila 3} + \text{Fila 1} \\ \text{Fila 4} \to \text{Fila 4} - 2*\text{Fila 1}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & a & a+2 & \vdots & 3b \\ 0 & 2a & a+3 & \vdots & 5b \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{\substack{F3 \to F3 - F2 \\ F4 \to F4 - 2*F2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & a+1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & -a-1 & \vdots & -b \end{pmatrix} \underset{F4 \to F4 + F3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & a+1 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1)=0$$

El determinante se hace cero cuando $a=0$ ó $a=-1$.

Discusión:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) \neq 0$, entonces: Rango $A=3$.

¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de b? ***No,*** el Rango $A^*=3$, $\forall b \in \mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A=3$ =Rango A^* =número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $a=0$

Sustituyendo en la matriz equivalente quedaría:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z & y & x & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \underset{F3 \to F3 - F2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -b \end{pmatrix}$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de b:

Subcaso I): $a=0$ *y* $b \neq 0$.

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A=2 \neq 3$ =Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a=0$ *y* $b=0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z & y & x & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ →Tenemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. → Rango A =Rango $A^*=2<3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Tercer caso: $a = -1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array}$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de b:

Subcaso I): $a = -1 \; y \; b \neq 0.$

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A = 2 \neq 3 =$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a = -1 \; y \; b = 0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
→Observamos que A y A^* tienen 2 filas L.I. →Rango $A =$Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Resolución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq -1, \; \forall b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 1 & \vdots & 2b \\ 0 & 0 & a+1 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} z + y + 2x = 0 \\ a\,y + x = 2b \\ (a+1)\,x = b \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $x = \frac{b}{(a+1)}, \;\; y = \frac{(2b-x)}{a} = \cdots = \frac{(2a+1)b}{a(a+1)}, \;\; z = -y - 2x = \cdots = -\frac{b(4a+1)}{a(a+1)}$.

Segundo caso II) $a = 0 \; y \; b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} z + y + 2x = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Cuya solución es: } x = 0, z = -y, \; y$$
libre.

Tercer caso II) $a = -1 \; y \; b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} z + y + x = 0 \\ -y + x = 0 \end{array}\right\} \text{ Cuya solución es: } y = x, z = -3x, \; x$$
libre

Septiembre 2016 Estudiar y resolver, cuando sea posible, el siguiente sistema en función de los parámetros a y M.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+(a+1)y+5z=2 \\ 3x+(4a+3)y+(a^2+15)z=M+4 \\ x+(3a+1)y+(a^2+9)z=M \end{cases}$$

Solución:

Primer caso:

$a \neq 0$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$, para todo $M \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

$a=0,\ M \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

$a=0,\ M=2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Tercer caso:

$a=2,\ M \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

$a=2,\ M=2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Cuarto caso:

$a=-2, M \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

$a=-2,\ M=2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Input interpretation:

solve

$x+y+z=2$
$x+(a+1)\,y+5\,z=2$
$3\,x+(4\,a+3)\,y+(a^2+15)\,z=M+4$
$x+(3\,a+1)\,y+(a^2+9)\,z=M$

Results:

$M=2$ and $y=-\frac{2}{3}(x-2)$ and $z=\frac{2-x}{3}$ and $a=-2$

Open code

$M=2$ and $y=2-x$ and $z=0$ and $a=0$

$M=2$ and $y=4-2x$ and $z=x-2$ and $a=2$

$x=\frac{-2a^3+aM+6a-4M+8}{4a-a^3}$ and

$y=-\frac{4(M-2)}{a(a^2-4)}$ and $z=\frac{M-2}{a^2-4}$ and $a^3 \neq 4a$

Junio 2017 (primer llamamiento). Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} x+y+z+t=6 \\ 3x+2y+4z+at=6b \\ x+4y+bz+t=16 \end{cases}$$

a) Resuélvelo para $a=b=3$, si fuera compatible.

b) Estudia para qué valores de los parámetros a y b es compatible.

c) Resuelve todos los casos que sean compatibles si $b=-2$.

---

b)

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & a & 6b \\ 1 & 4 & b & 1 & 16 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{Fila 2}\to\text{Fila 2-3*Fila 1} \\ \text{Fila 3}\to\text{Fila 3-Fila 1}}}{\approx} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & a-3 & \vdots & 6b-18 \\ 0 & 3 & b-1 & 0 & \vdots & 10 \end{array}\right) \underset{\text{Fila 3}\to\text{Fila 3+3*Fila 2}}{\approx} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & a-3 & \vdots & 6b-18 \\ 0 & 0 & b+2 & 3a-9 & \vdots & 18b-44 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & a-3 & \vdots & 6b-18 \\ 0 & 0 & b+2 & 3a-9 & \vdots & 18b-44 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b+2 \end{vmatrix} = -(b+2)=0$$

El determinante se hace cero cuando $b=-2$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán: **i)** $b\neq -2$; **ii)** $b=-2$.

Discusión:

Primer caso: $b\neq -2,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b+2 \end{vmatrix} = -(b+2)\neq 0$, entonces: Rango $A=3$.

¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de a? ***No,*** el Rango $A^*=3$, $\forall a\in\mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A=3=$Rango $A^*<4=$número de incógnitas → Sistema compatible indeterminado 1 incógnita libre.

Segundo caso: $b=-2$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & a-3 & \vdots & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-9 & \vdots & -80 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & 0 & 3a-9 \end{vmatrix} = -(3a-9)=0\to a=3.$$

El determinante se hace cero cuando $a=3$.

Subcaso I): $b=-2$ *y* $a\neq 3$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & 0 & 3a-9 \end{vmatrix} = -(3a-9)\neq 0$ →Rango $A=3=$ Rango $A^*<4=$número de incógnitas → Sistema compatible indeterminado 1 incógnita libre.

Subcaso II) $b=-2$ *y* $a=3$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -80 \end{array}\right)$ →La tercera ecuación del sistema equivalente nos da sistema incompatible: $0\neq -80$

Otra forma: A tiene 2 filas L.I. y A^* tiene 3 filas L.I. → Rango $A=2\neq 3=$Rango A^* ⇒Sistema incompatible

a) Resuélvelo para $a=b=3$, si fuera compatible.

*Este caso está incluido en el **Primer caso** del apartado* b), *por lo que sabemos que será un sistema compatible indeterminado con una incógnita libre.*

Del apartado b) sabemos que la matriz equivalente nos quedará:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El sistema equivalente será: } \left.\begin{aligned} x+y+z+t=6 \\ -y+z=0 \\ 5z=10 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Cuya solución es: $x = 2 - t,\ y = 2,\ z = 2,\ t$ libre.

c) Resuelve todos los casos que sean compatibles si $b = -2$

2. Subcaso I): $b = -2$ *y* $a \neq 3$.

Del apartado b) sabemos que la matriz equivalente nos quedará:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 0 & -1 & 1 & a-3 & \vdots & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 3a-9 & \vdots & -80 \end{pmatrix} \rightarrow \text{El sistema equivalente será: } \left.\begin{aligned} x+y+z+t=6 \\ -y+z+(a-3)t=-30 \\ (3a-9)t=-80 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Cuya solución es: $t = -\frac{80}{3a-9}, y = \frac{10}{3} + z,\ x = \frac{8}{3} + \frac{80}{3a-9} - 2z,\ z$ libre.

Junio 2017 (segundo llamamiento) En una carpintería se producen cuatro modelos de mesa de madera (A, B, C y D). Se dispone diariamente de 20 horas de trabajo y un presupuesto de 133 €, pudiéndose contratar cada día una cantidad arbitraria H de horas de trabajo extra a un coste de 5 € por hora que se detraerán del presupuesto disponible. El coste unitario de las mesas de tipo A y C es de 3 €, siendo el coste de cada mesa de los tipos B y D de 4 € por unidad. Cada mesa de tipo D requiere 2 horas para su producción, mientras que las de tipo A y B necesitan un 50% más de tiempo, y el tiempo requerido para producir cada mesa de tipo C está aún por determinar (a). Con el fin de cubrir las previsiones de demanda, se deben construir el doble de mesas de tipo D que del resto. Sabiendo que cada día se desea construir 15 mesas en total, se pide:

- **a)** Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el número de mesas que hay que fabricar para cumplir todos los requisitos, para valores arbitrarios de H y a.
- **b)** Analizar la compatibilidad del sistema anterior según los valores de H y a.
- **c)** Si a = 2, estudiar cuántas mesas se deben producir y cuántas horas extra hay que contratar para que se pueda llevar a cabo dicha producción, teniendo en cuenta que tanto el número de mesas como el número de horas extra deben ser cantidades enteras y no negativas.
- **d)** Si a = 3, obtener todas las decisiones posibles que puede tomar la carpintería respecto a la fabricación de mesas, teniendo en cuenta la coherencia lógica de las soluciones.

Solución:

x=número de mesas tipo A

y=número de mesas tipo B

z=número de mesas tipo C

t=número de mesas tipo D

El sistema de ecuaciones que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z+t=15 \\ 3x+4y+3z+4t=133-5H \\ 3x+3y+a\,z+2t=20+H \\ t=2(x+y+z) \end{array}\right\}$$

O lo que es lo mismo

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z+t=15 \\ 3x+4y+3z+4t=133-5H \\ 3x+3y+a\,z+2t=20+H \\ 2x+2y+2z-t=0 \end{array}\right\}$$

Primer caso:

$a \neq 3, \forall H \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

$a=3, H \neq 15 \Rightarrow$ S.I.

$a=3, H=15 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Input interpretation:

solve
$$\begin{array}{l} x+y+z+t=15 \\ 3x+4y+3z+4t=133-5H \\ 3x+3y+a\,z+2t=20+H \\ 2x+2y+2z-t=0 \end{array}$$

Results:

$H=15$ and $t=10$ and $y=3$ and $z=2-x$ and $a=3$

Open code

$t=10$ and $x=\dfrac{a(5H-73)-16H+234}{a-3}$ and $y=78-5H$ and $z=\dfrac{H-15}{a-3}$ and $a\neq 3$

Julio 2017 Una compañía elabora tres productos que han de procesarse en un departamento. Cada mes se dispone de 2300 horas de trabajo y 9200 kilos de materias primas. Las necesidades de horas de trabajo por unidad de producto son 5, 3 y 6 respectivamente. Por su parte, las de kilos de materias primas por unidad son 20 para el primer producto, 12 para el segundo y una cantidad a pendiente de determinar para el tercer producto. La producción mensual combinada de los 3 productos ha de ser de 600 unidades. Se pide obtener las combinaciones de los tres productos que permiten un total aprovechamiento de los recursos y cubrir el objetivo de producción. Para ello, hay que plantear el sistema de ecuaciones, discutirlo según el parámetro a y resolverlo, cuándo sea posible. Además, debes añadir, si fuera necesario, qué condiciones se deben cumplir para que la solución tenga sentido económico.

Solución:

x=número de unidades producidas del primer producto

y=número de unidades producidas del segundo producto

z=número de unidades producidas del tercer producto

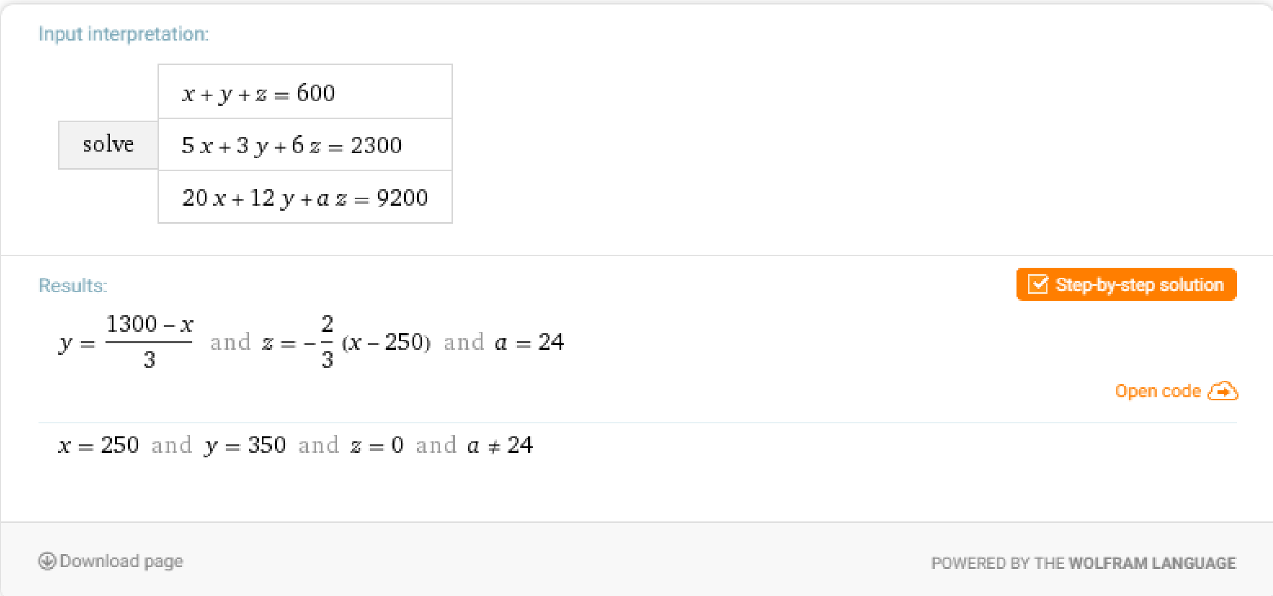
El sistema de ecuaciones que nos piden es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 5x+3y+6z=2300 \\ 20x+12y+a\,z=9200 \end{array}\right\}$$

A la hora de discutir el sistema obtendremos:

Primer caso: $a \neq 24$ ⇒S.C.D.

Segundo caso: $a = 24$ ⇒S.C.I. 1 libre



Septiembre 2017. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+a\cdot z=1 \\ (a-1)x+a\cdot z=1 \\ a\cdot x+y+4a\cdot z=b+2 \\ (a-2)x-y+2a\cdot z=b \end{array}\right\}$$

$$A^*=\begin{array}{c} x \quad\quad y \quad\quad z \quad\quad\quad\quad \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ a-1 & 0 & a & \vdots & 1 \\ a & 1 & 4a & \vdots & b+2 \\ a-2 & -1 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{array}{c} y \quad\quad x \quad\quad z \quad\quad\quad\quad \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 1 \\ 1 & a & 4a & \vdots & b+2 \\ -1 & a-2 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & 3a & \vdots & b+1 \\ 0 & a-1 & 3a & \vdots & b+1 \end{pmatrix} \sim$$

Cambiamos primera columna por segunda columna

Fila 3 → Fila 3 − Fila 1
Fila 4 → Fila 4 + Fila 1

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & 3a & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = (a-1)\cdot 2a = 0$$

F4 → F4 − F3 ó como son iguales se elimina

F3 → F3 − F2

El determinante se hace cero cuando $a=1$ ó $a=0$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán: **i)** $a\neq 0$ *y* $a\neq 1$*;* **ii)** $a=0$*;* **iii)** $a=1$.

Discusión:

Primer caso: $a\neq 0$ y $a\neq 1,\ \forall b\in\mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = (a-1)\cdot 2a\neq 0$, entonces: Rango $A=3$.

¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de b? ***No,*** el Rango $A^*=3$, $\forall b\in\mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A=3=$Rango $A^*=$número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $a=0$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\begin{array}{c} y \quad\quad x \quad\quad z \quad\quad\quad \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix}\end{array}$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de b:

Subcaso I): $a=0$ *y* $b\neq 0$*.*

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A=2\neq 3=$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a=0$ *y* $b=0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} y \quad\quad x \quad\quad z \quad\quad\quad \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$ →Observamos que A y A^* tienen 2 filas L.I. → Rango $A=$Rango $A^*=2<3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Tercer caso: $a = 1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \underset{\boxed{F3 \to F3 - 2 * F2}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b-2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de $b - 2$:

Subcaso I): $a = 1$ *y* $b \neq 2.$

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A = 2 \neq 3$ =Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a = 1$ *y* $b = 2$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

→Vemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. →Rango A =Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Resolución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\forall b \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & a-1 & a & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x + a\,z = 1 \\ (a-1)x + a\,z = 1 \\ 2a\,z = b \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $z = \frac{b}{2a}$, $x = \frac{1 - a\,z}{a-1} = \frac{1 - \frac{b}{2}}{a-1} = \frac{2-b}{2(a-1)}$, $y = 1 - x - a\,z = 1 - \frac{(2-b)}{2(a-1)} - \frac{b}{2} = \frac{2a - 4 + 2b - a\,b}{2(a-1)}$

Segundo caso II) $a = 0$ *y* $b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x = 1 \\ -x = 1 \end{array}\right\} \to \text{Cuya solución es: } x = -1, y = 2, z \text{ libre}$$

Tercer caso II) $a = 1$ *y* $b = 2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \to \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x + z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \to \text{Cuya solución es: } z = 1, x = -y,\ y \text{ libre}$$

Junio 2018 (primer llamamiento) Una empresa fabrica cuatro tipos de envases de plástico (mini, pequeño, mediano y grande) de los cuales desea producir un total de 100 unidades diarias. Los costes de producción son, respectivamente, 1, 2, 4 y 4 u.m. por unidad producida, y los precios de venta son 4 u.m. para cada envase mini, 5 para cada envase pequeño y p u.m. para cada envase mediano o grande (siendo p una cantidad por determinar). Conociendo la previsión de demanda, la empresa quiere fabricar un 50% más de los envases menores (mini y pequeño) que de los de mayor tamaño (medianos y grandes). El presupuesto disponible (M) aún no ha sido asignado, pero se debe consumir en su totalidad, y se desea que los ingresos por venta asciendan exactamente a 500 u.m.

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuántos envases de plástico de cada tipo se deben producir con las condiciones descritas.

b) Discutir el sistema anterior según los valores de p, M.

c) Si se asignara un presupuesto de 240 u.m. diarias para la producción, ¿cuál tendría que ser el precio de venta de los envases medianos y grandes para poder efectuar la producción? ¿Cuáles serían en ese caso las posibilidades de producción (con sentido económico)?

Solución:

x=número de envases mini que se fabrican

y=número de envases pequeños que se fabrican

z=número de envases medianos que se fabrican

t=número de envases grandes que se fabrican

El sistema de ecuaciones que nos piden es:

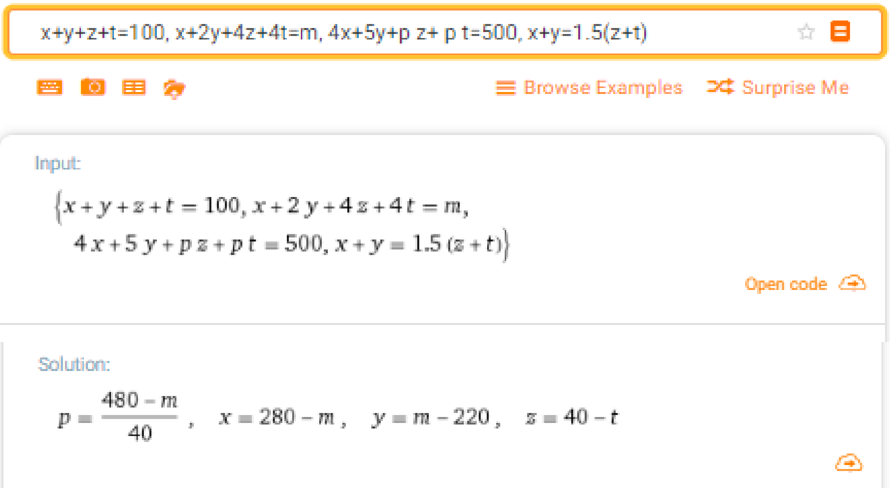
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=100 \\ x+2y+4z+4t=M \\ 4x+5y+p\cdot z+p\cdot t=500 \\ x+y=1{,}5\cdot(z+t) \end{array}\right\}$$

Primer caso:

$p \neq \frac{1200-2{,}5M}{100}, \forall M \Rightarrow$ S.I.

Segundo caso:

$p = \frac{1200-2{,}5M}{100}, \forall M \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Junio 2018 (segundo llamamiento) La universidad tiene entre sus planes construir un aulario en un terreno disponible suficientemente grande y debe tomar una decisión sobre número y tipo de aulas a construir y presupuesto a invertir. Ya se ha decidido construir tres tipos de aulas, las más pequeñas de 20 puestos, otras medianas cuyo número de puestos no se ha decidido aún (digamos $\boldsymbol{a > 0}$) y las grandes del doble de puestos que las medianas. Se desea que en total haya 60 aulas con capacidad para 1300 estudiantes. Se ha calculado que la inversión necesaria para la construcción de cada aula pequeña será de 40 miles de euros, de cada una de las medianas 1600€ por cada puesto disponible y de cada una de las grandes un 50% más que el coste de un aula mediana, lo que incluye todos los servicios adicionales propios de un aulario moderno. Se ha pensado en invertir un presupuesto de 2480 miles euros y una vez que se decida se debe gastar todo. ¿Cuántas aulas de cada tipo deben construirse?

Solución:

x=número de aulas pequeñas a construir

y=número de aulas medianas a construir

z=número de aulas grandes a construir

a=número de puestos en aulas medianas

El sistema de ecuaciones que nos piden es:

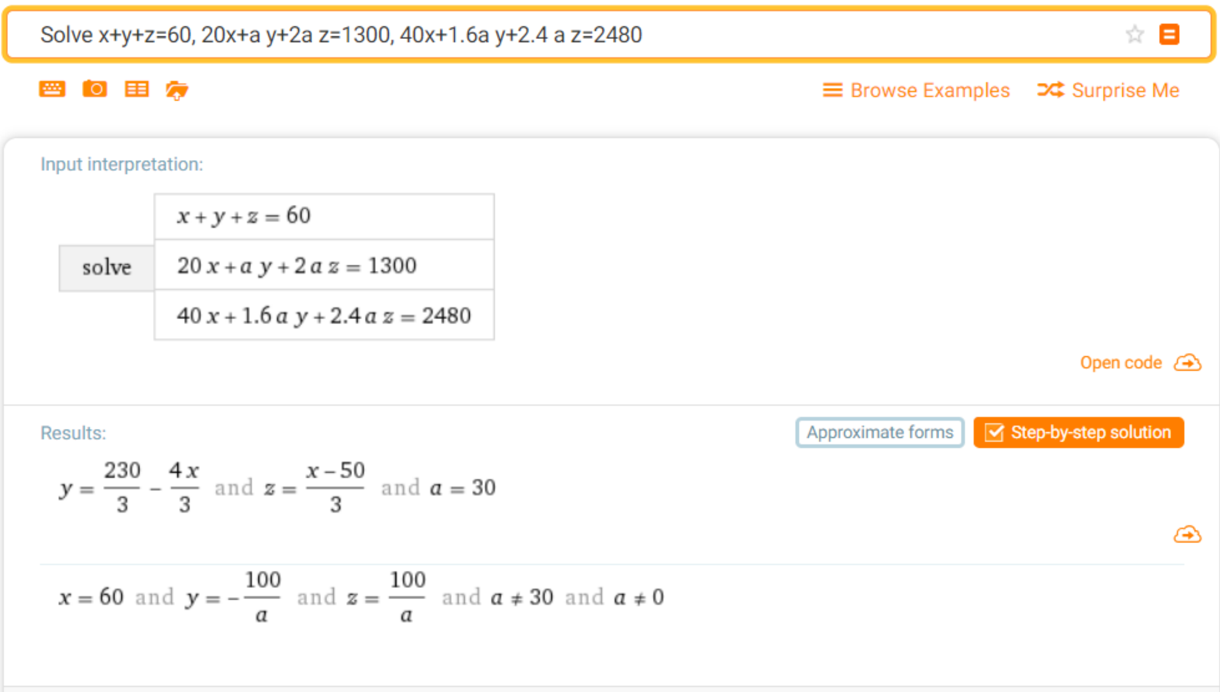
$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 20x+a\cdot y+2a\cdot z=1300 \\ 40x+1{,}6\,a\cdot y+2{,}4\,a\cdot z=2480 \end{array}\right\}$$

Primer caso:

$a \neq 30 \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

$a = 30 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.



Julio 2018. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+a\,z=0 \\ (2a-2)x+a\,z=1 \\ (2a-1)x+y+(3a+1)z=2b+1 \\ (2a-3)x-y+(a+1)z=2b+1 \end{array}\right\}$$

$$A^*=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 2a-2 & 0 & a & 1 \\ 2a-1 & 1 & 3a+1 & 2b+1 \\ 2a-3 & -1 & a+1 & 2b+1 \end{array}\right) \end{array} \underset{\text{Cambiamos primera columna por segunda columna}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-2 & a & 1 \\ 1 & 2a-1 & 3a+1 & 2b+1 \\ -1 & 2a-3 & a+1 & 2b+1 \end{array}\right) \end{array} \underset{\substack{\text{Fila 3} \to \text{Fila 3} - \text{Fila 1} \\ \text{Fila 4} \to \text{Fila 4} + \text{Fila 1}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-2 & a & 1 \\ 0 & 2a-2 & 2a+1 & 2b+1 \\ 0 & 2a-2 & 2a+1 & 2b+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\text{F4} \to \text{F4} - \text{F3 ó como son iguales se elimina}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-2 & a & 1 \\ 0 & 2a-2 & 2a+1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{F3} \to \text{F3} - \text{F2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2a-2 & a & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2a-2 & a \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (2a-2)\cdot(a+1)=0$$

El determinante se hace cero cuando $a=1$ ó $a=-1$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán: **i)** $a \neq 1$ *y* $a \neq -1$; **ii)** $a=1$; **iii)** $a=-1$.

Discusión:

Primer caso: $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2a-2 & a \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (2a-2)\cdot(a+1) \neq 0$, entonces: Rango $A=3$.

*¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de b? **No,*** el Rango $A^*=3$, $\forall b \in \mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A=3=$Rango $A^*=$número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $a=1$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2b \end{array}\right) \end{array} \underset{\text{F3} \to \text{F3} - 2*\text{F2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2b-2 \end{array}\right)$$

Vemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de $2b-2$:

Subcaso I): $a=1$ *y* $b \neq 1$.

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A=2 \neq 3=$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a=1$ *y* $b=1$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$ →Observamos que A y A^* tienen 2 filas L.I. → Rango $A=$Rango $A^*=2<3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Tercer caso: $a=-1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2b \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de $2b$:

Subcaso I): $a = -1$ *y* $b \neq 0$.

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A = 2 \neq 3 =$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a = -1$ *y* $b = 0$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ →Vemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. →Rango $A =$Rango $A^* = 2 < 3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Resolución:

Primer caso: $a \neq 1$ y $a \neq -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 0 \\ 0 & 2a-2 & a & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & \vdots & 2b \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x + a\,z = 0 \\ (2a-2)x + a\,z = 1 \\ (a+1)\,z = 2b \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $z = \frac{2b}{(a+1)}$, $x = \frac{1-a\,z}{(2a-2)} = \frac{1-\frac{2ab}{(a+1)}}{2a-2} = \frac{a+1-2ab}{2(a^2-1)}$, $y = -x - a\,z = \cdots = \frac{-a-1+6ab-4a^2b}{2(a^2-1)}$

Segundo caso II) $a = 1$ *y* $b = 1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x + z = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $y = -1 - x, z = 1$, x libre

Tercer caso II) $a = -1$ *y* $b = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \text{El sistema equivalente es: } \left.\begin{array}{r} y + x - z = 0 \\ -4x - z = 1 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $z = -1 - 4x, y = -1 - 5x$, x libre

Septiembre 2018. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{c} x+ay-7z=4a-1 \\ 2x+(1+a)y-(a+7)z=4a+b \\ x+(1+a)y-(a+6)z=3a+1 \\ ay-6z=3a-b \end{array}\right\}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & a & -7 & \vdots & 4a-1 \\ 2 & 1+a & -a-7 & \vdots & 4a+b \\ 1 & 1+a & -a-6 & \vdots & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & \vdots & 3a-b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -7 & \vdots & 4a-1 \\ 0 & 1-a & -a+7 & \vdots & -4a+b+2 \\ 0 & 1 & -a+1 & \vdots & -a+2 \\ 0 & a & -6 & \vdots & 3a-b \end{pmatrix} \sim$$

Fila 2 → Fila 2 − 2 ∗ Fila 1
Fila 3 → Fila 3 − Fila 1

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -7 & \vdots & 4a-1 \\ 0 & 1 & -a+1 & \vdots & -a+2 \\ 0 & 1-a & -a+7 & \vdots & -4a+b+2 \\ 0 & a & -6 & \vdots & 3a-b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -7 & \vdots & 4a-1 \\ 0 & 1 & -a+1 & \vdots & -a+2 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & \vdots & b-a-a^2 \\ 0 & 0 & -6-a+a^2 & \vdots & -b+a+a^2 \end{pmatrix}$$

Cambiamos segunda fila por tercera fila, ¿por qué?

$F3 \to F3-(1-a)*F2$
$F4 \to F4-a*F2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -7 & \vdots & 4a-1 \\ 0 & 1 & -a+1 & \vdots & -a+2 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & \vdots & b-a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & a & -7 \\ 0 & 1 & -a+1 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 \end{vmatrix} = 6+a-a^2$$

$F4=-F3$

El determinante se hace cero cuando: $6+a-a^2=0$, es decir, $a=3$ ó $a=-2$.

Los casos que tenemos que **discutir** inicialmente serán: **i)** $a\neq 3$ *y* $a\neq -2$; **ii)** $a=3$; **iii)** $a=-2$.

Discusión:

Primer caso: $a\neq 3$ y $a\neq -2$, $\forall b\in\mathbb{R}$.

En este caso $\begin{vmatrix} 1 & a & -7 \\ 0 & 1 & -a+1 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 \end{vmatrix}=6+a-a^2\neq 0$, entonces: Rango $A=3$.

¿El rango de la matriz ampliada depende del valor de b? ***No,*** el Rango $A^*=3$, $\forall b\in\mathbb{R}$, por tanto:

Rango $A=3$ =Rango A^* =número de incógnitas → Sistema compatible determinado (S.C.D.)

Segundo caso: $a=3$

La matriz del sistema equivalente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & \vdots & 11 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b-12 \end{pmatrix}$$

Observamos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de $b-12$:

Subcaso I): $a=3$ *y* $b\neq 12$.

En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A=2\neq 3$ =Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a=3$ *y* $b=12$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & \vdots & 11 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ →Vemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. → Rango A =Rango $A^*=2<3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Tercer caso: $a=-2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & b-2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que A tiene 2 filas L.I. y que A^* depende del valor de $b-2$:

Subcaso I): $a=-2$ *y* $b\neq 2$.

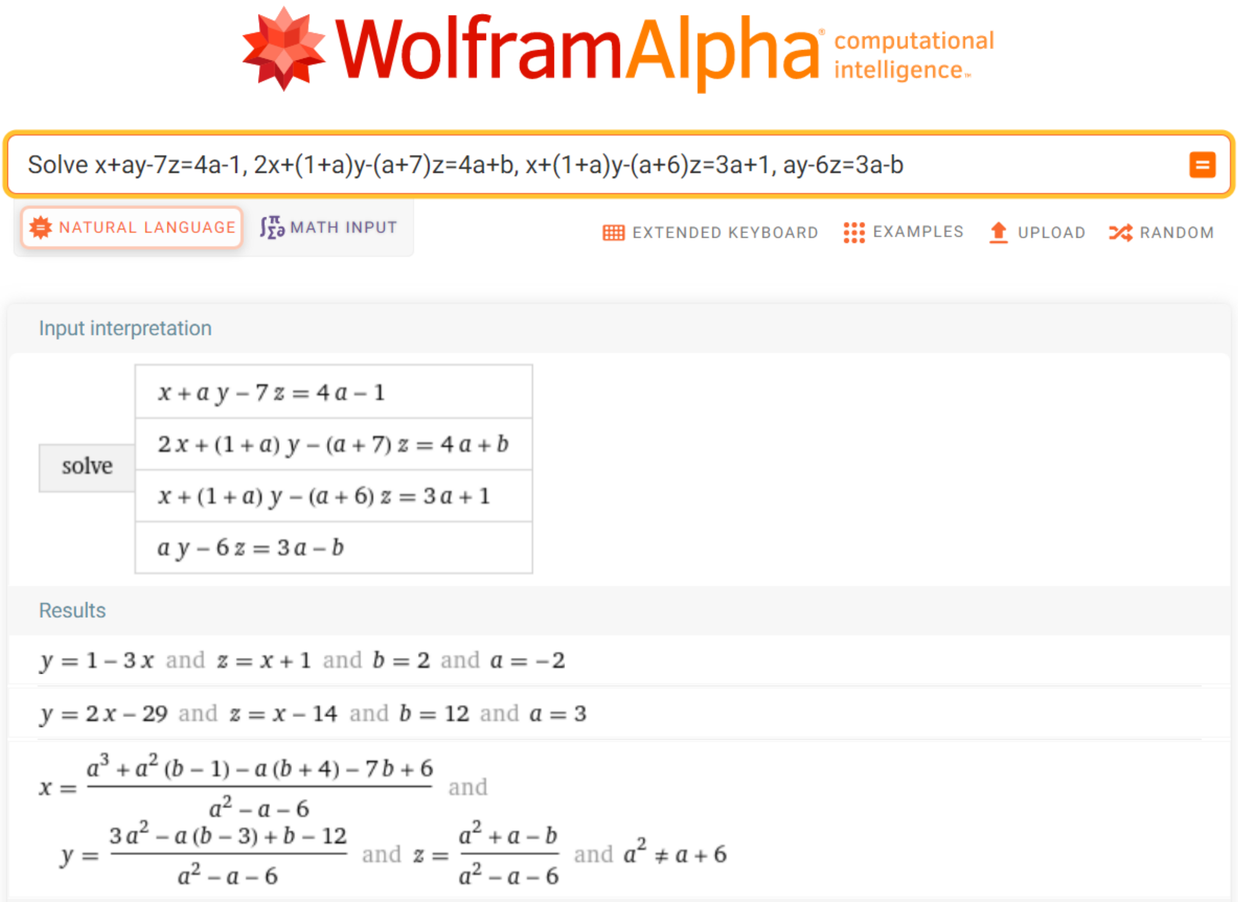
En este subcaso A^* tiene 3 filas L.I.→Rango $A=2\neq 3=$Rango A^* →Sistema incompatible (S.I.)

Subcaso II) $a=-2$ *y* $b=2$

En este subcaso la matriz A^* queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$ →Vemos que A y A^* tienen 2 filas L.I. →Rango $A=$Rango $A^*=2<3$=número de incógnitas⇒Sistema compatible indeterminado con 1 incógnita libre. (S.C.I. 1 libre)

Resolución con Wolfram Alpha:



Junio 2019 (primer llamamiento) a) Discutir la compatibilidad y resolver según los valores de los parámetros a y b el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+(a+1)y+(2a-2)z=b+2 \\ -2x+(a-5)y+(a-3)z=-2 \\ -x+(2a-4)y+(a-1)z=-b-2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Primer caso: $a \neq 1$ y $a \neq 2, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

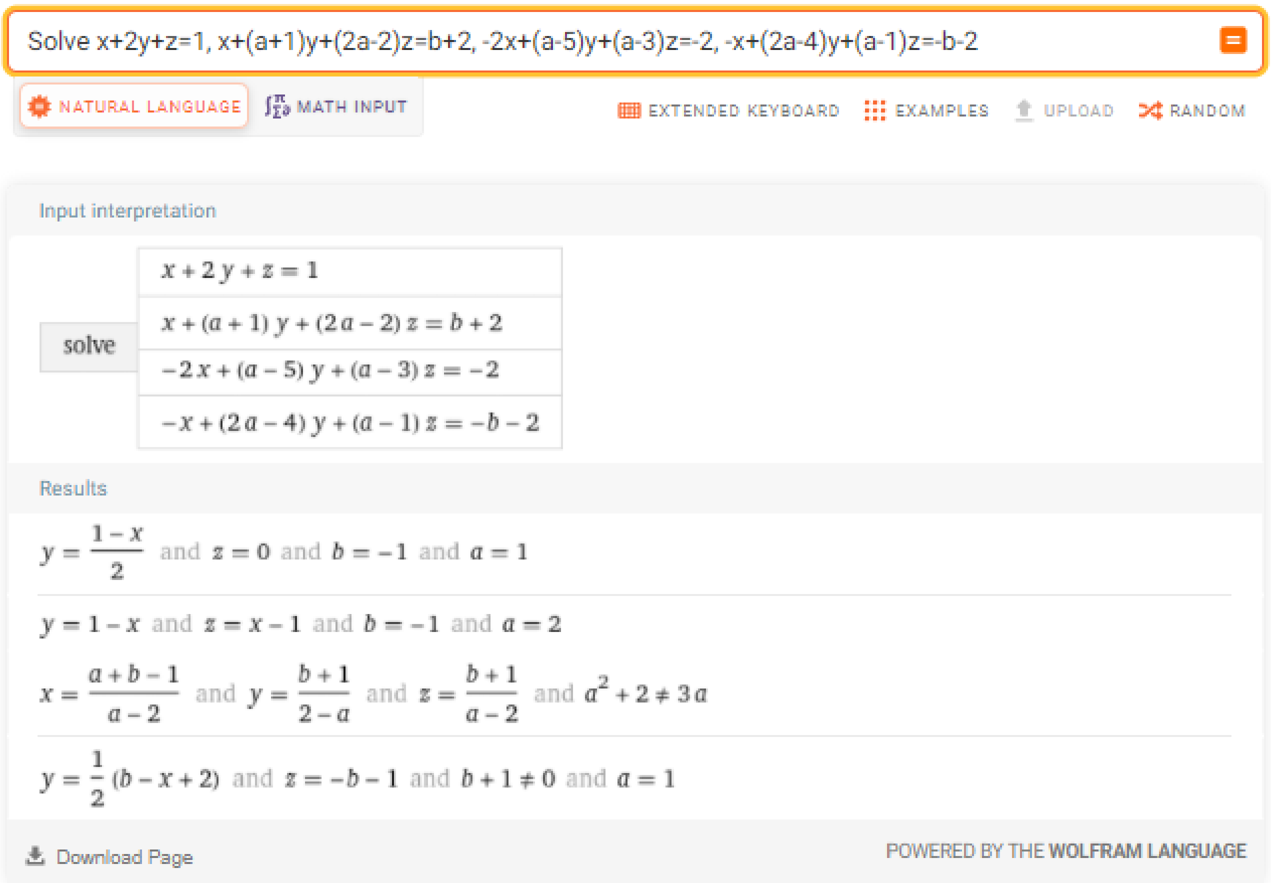
Segundo caso:

i) $a = 2, b = -1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $a = 2, b \neq -1 \Rightarrow$ S.I.

Tercer caso:

$a = 1, \forall b \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Junio 2019 (segundo llamamiento) a) Discutir la compatibilidad y resolver según los valores de los parámetros a y b el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+az=1 \\ 2x+ay+3az=b-1 \\ -4x+(1-3a)y-8az=4-3b \\ 2x+ay+2az=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq 1, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

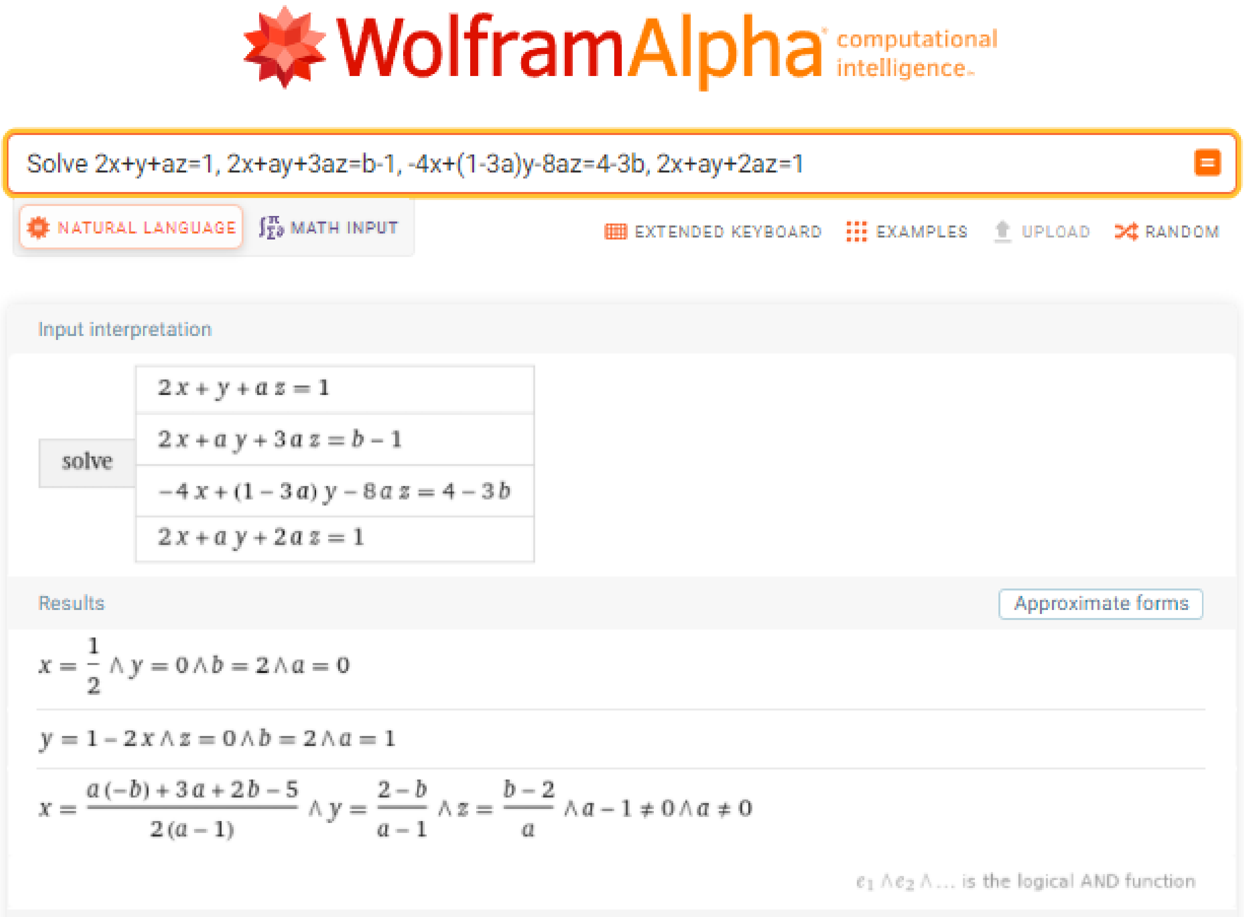
i) $a = 0, b = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $a = 0, b \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

Tercer caso:

i) $a = 1,\ b = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $a = 1,\ b \neq 2 \Rightarrow$ S.I.



Julio 2019. a) Clasificar completamente el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de a

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+a\,t=a \\ 3x+(a+4)y+3z+2at=4a \\ (a+4)x+(2a+3)y+(a+4)z-at=2a \end{array}\right\}$$

Y resolverlo cuando sea compatible.

Solución:

Primer caso:

$a\neq 0, a\neq -2$ y $a\neq -3 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Segundo caso:

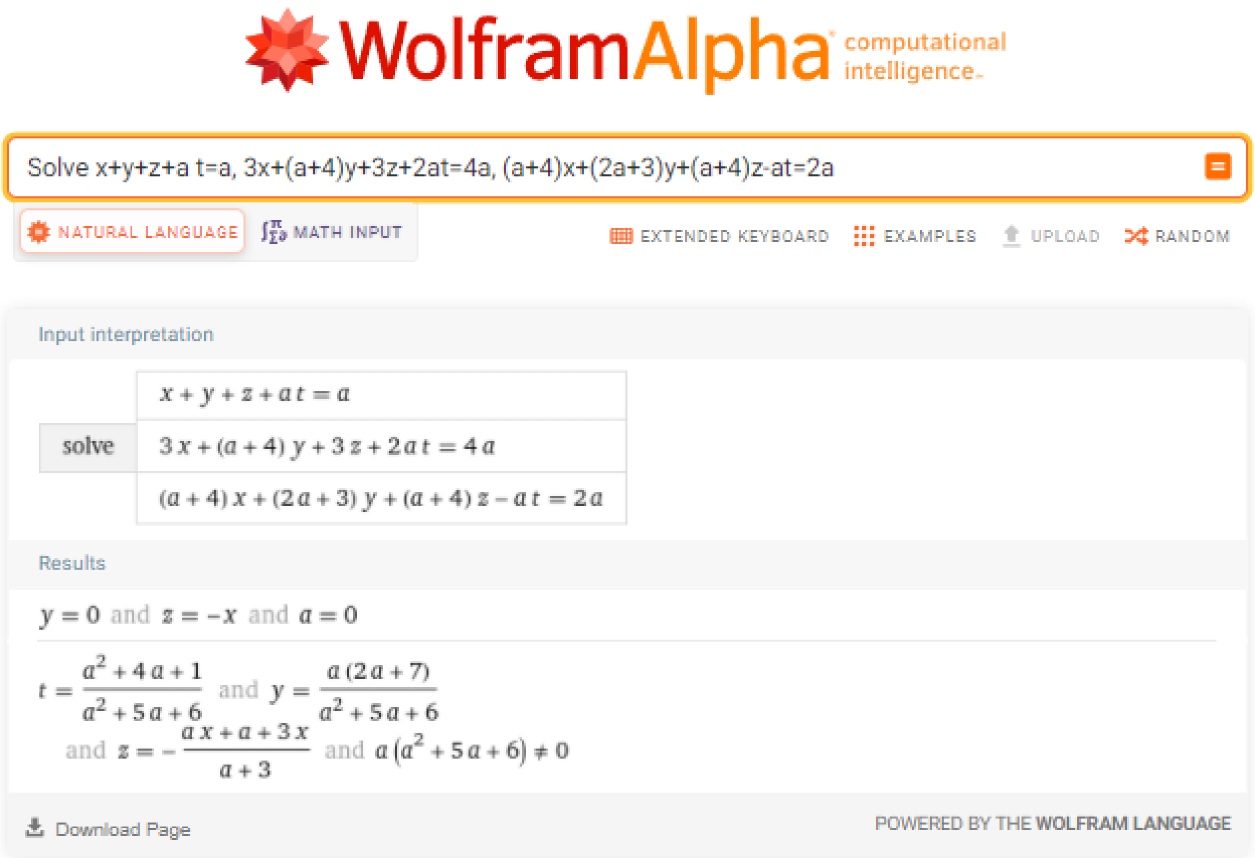
$a=0 \Rightarrow$ S.C.I. 2 incógnitas libres

Tercer caso:

$a=-2 \Rightarrow$ S.I.

Cuarto caso:

$a=-3 \Rightarrow$ S.I.



Septiembre 2019. Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2a \cdot y + 4z + 7t = 0 \\ x + 2z + 3t = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x - y + b \cdot z + (a+b)t = 2 \\ x - y + z + 2t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Clasificarlo completamente, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de a y b.

b) Resolverlo cuando sea compatible.

Solución:

Primer caso: $a \neq -1$ y $a \neq 1, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

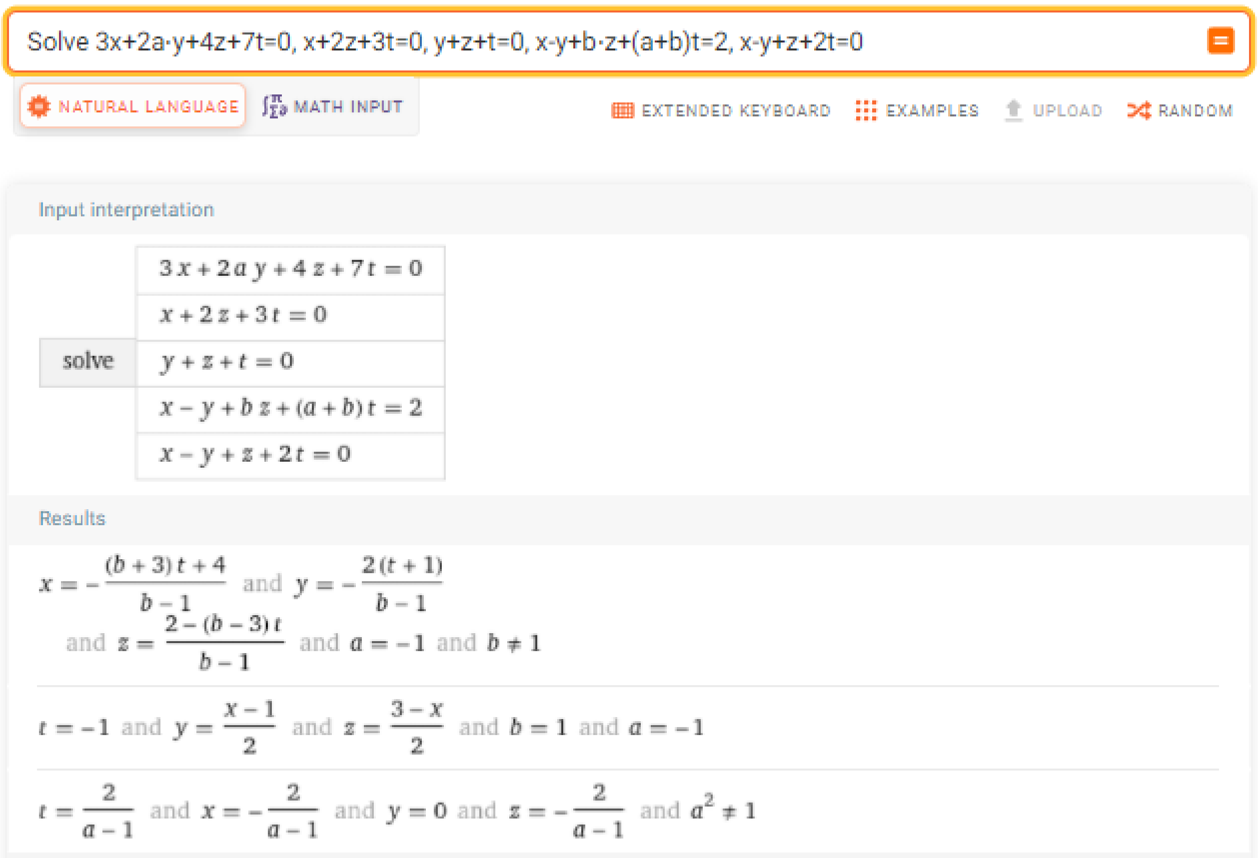
i) $a = -1, b \neq 1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $a = -1, b = 1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Tercer caso:

$a = 1,\ \forall b \Rightarrow$ S.I.

WolframAlpha computational intelligence.



Junio 2021 (primer llamamiento) Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b.

$$\left.\begin{array}{l} ax+(a+1)z=1 \\ (a+1)x+y+(4a+4)z=b+1 \\ x+y+(a+1)z=1 \\ (a-1)x-y+(2a+2)z=b-1 \end{array}\right\}$$

Luego resuelve todos los compatibles indeterminados.

Solución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq -1, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso: $a=0$

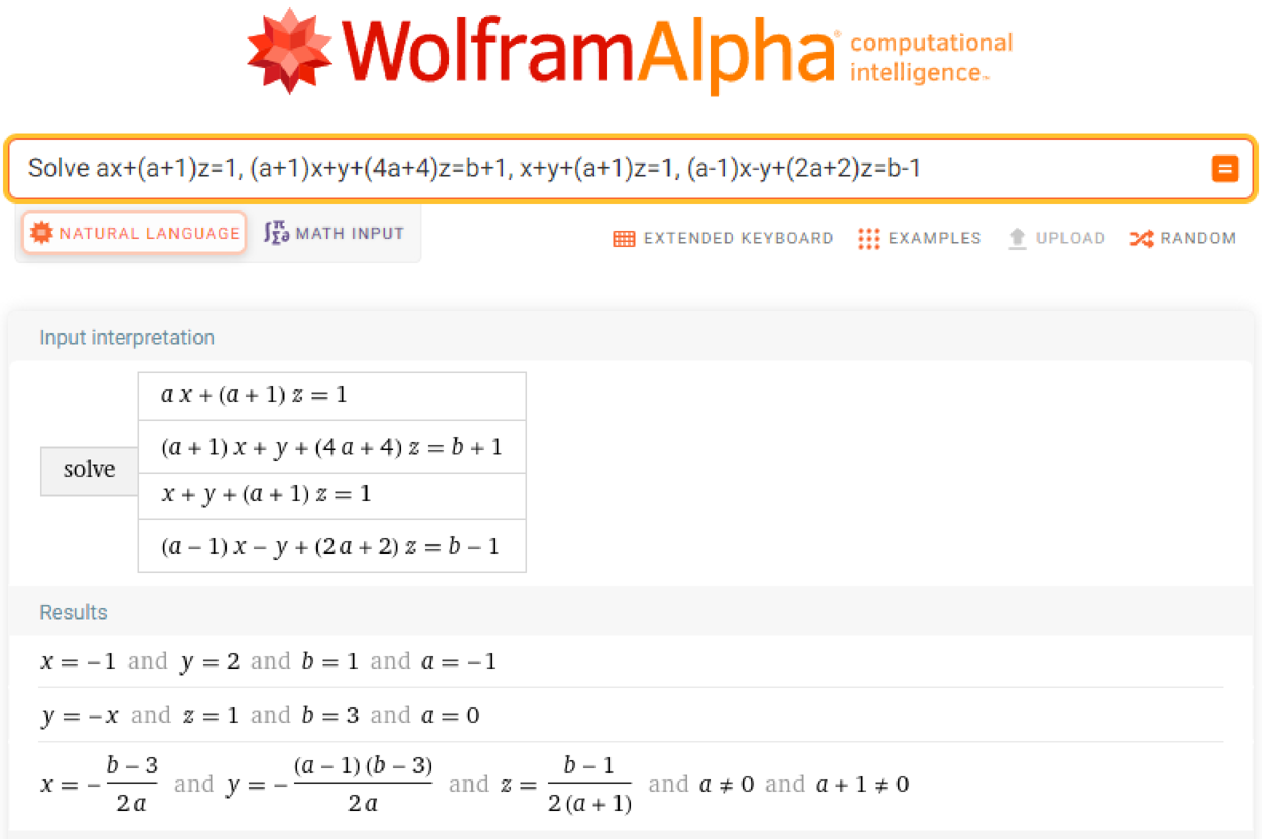
i) $a=0, b\neq 3 \Rightarrow$ S. I.

ii) $a=0, b=3 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Tercer caso: $a=-1$

i) $a=-1, b\neq 1 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a=-1, b=1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Junio 2021 (segundo llamamiento) Sea el siguiente sistema, donde *a* y *b* son parámetros reales:

$$\begin{cases}(a+1)x+y+\ 2z=0\\ x+y+az=b-2\\ ax+(a+3)z=1\\ 2x+2y-z=b-3\end{cases}$$

- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema tenga solución única.
- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema no tenga solución.
- Determina las condiciones sobre *a* y *b* para que el sistema tenga infinitas soluciones y calcularlas.

Solución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq -\frac{1}{2}, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso: $a = 0$

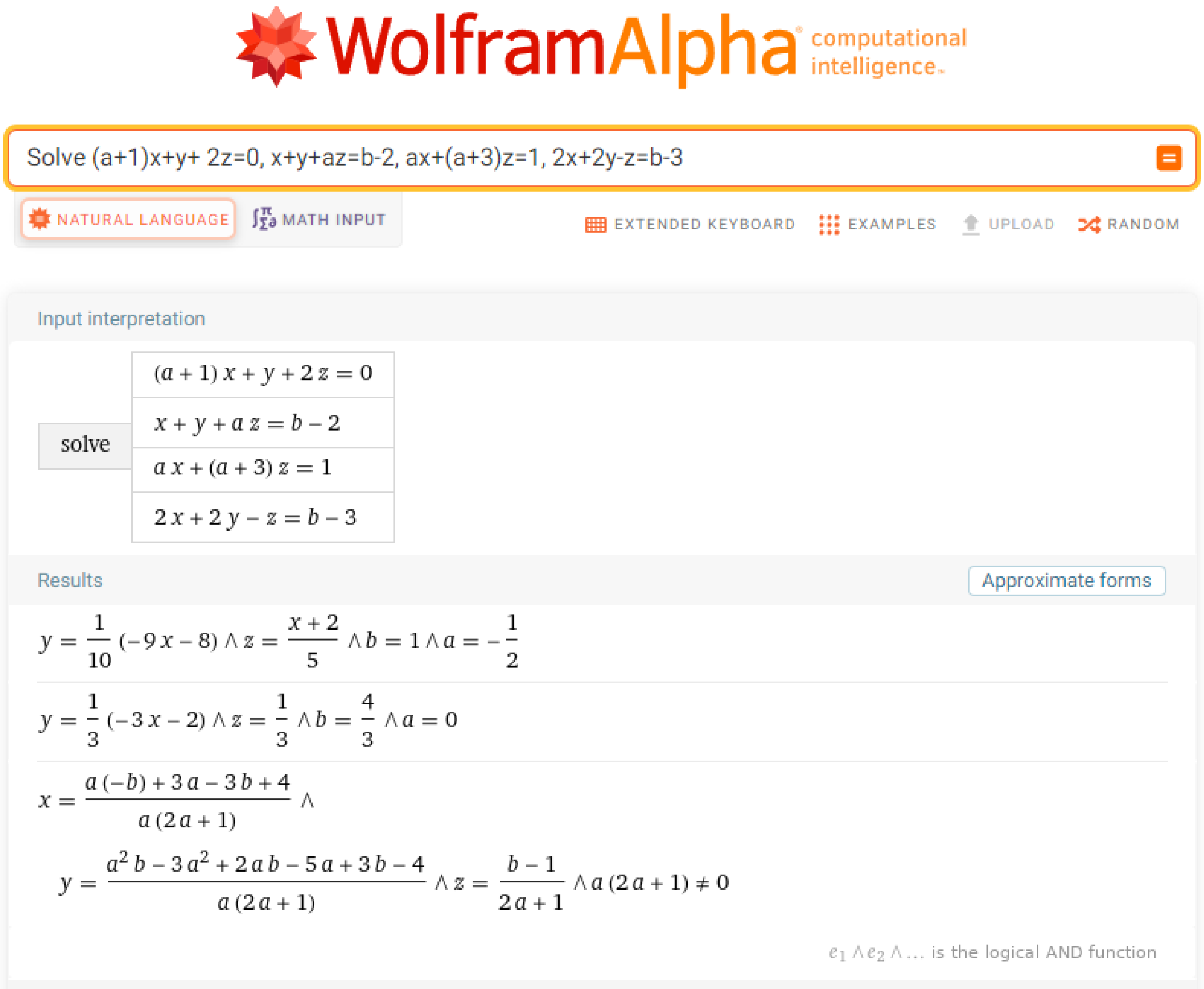
i) $a = 0, b \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ S. I.

ii) $a = 0, b = \frac{4}{3} \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Tercer caso: $a = -\frac{1}{2}$

i) $a = -\frac{1}{2}, b \neq 1 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a = -\frac{1}{2}, b = 1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Julio 2021. Clasificar completamente el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales de los parámetros a, b, y resolviéndolo, cuando tenga solución, para $a = -1$ y $a = -2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z + t = 0 \\ (a+2)y + az + 2t = 1 \\ 2x - ay + 5z + (b+1)t = a \\ -x - (a+3)y - z + (b-2)t = a \end{array}\right\}$$

Solución:

Primer caso: $a \neq -2$ y $a \neq -1, \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso: $a = -1$

i) $a = -1, b \neq -1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $a = -1, b = -1 \Rightarrow$ S.C.I. 2 incógnitas libres

Tercer caso: $a = -2$

i) $a = -2, b = 0 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a = -2, b \neq 0 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

WolframAlpha computational intelligence.

Solve x+y+2z+t=0, (a+2)y+az+2t=1, 2x-ay+5z+(b+1)t=a, -x-(a+3)y-z+(b-2)t=a

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

solve
$x + y + 2z + t = 0$
$(a+2)y + az + 2t = 1$
$2x - ay + 5z + (b+1)t = a$
$-x - (a+3)y - z + (b-2)t = a$

Results

$y = \frac{1}{3}(-5t - x + 2)$ and $z = \frac{1}{3}(t - x - 1)$ and $b = -1$ and $a = -1$

$x = \frac{a^2(-(t+1)) + a(bt - 6) + 4(b+1)t - 5}{a^2 + 3a + 2}$ and $y = \frac{-a^2 + a(b-1)t - 2t + 1}{a^2 + 3a + 2}$ and $z = \frac{a - (b+1)t + 1}{a+1}$ and $a^2 + 3a + 2 \neq 0$

$t = -\frac{3}{2b}$ and $y = \frac{9}{2b} - x + 1$ and $z = -\frac{b+3}{2b}$ and $a = -2$ and $b \neq 0$

$t = 0$ and $y = \frac{2-x}{3}$ and $z = \frac{1}{3}(-x - 1)$ and $a = -1$ and $b + 1 \neq 0$

Septiembre 2021. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=3 \\ x+(a+2)y+6z=3 \\ 3x+(4a+6)y+(a^2+18)z=b+7 \\ x+(3a+2)y+(a^2+10)z=b+1 \end{array}\right\}$$

Resolver los casos en que sea compatible.

Solución:

Primer caso: $a \neq 0,\ a \neq 2$ y $a \neq -2,\ \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso: $a = 0$

i) $a = 0,\ \ b \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a = 0,\ \ b = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Tercer caso: $a = 2$

i) $a = 2,\ \ b \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a = 2,\ \ b = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Cuarto caso: $a = -2$

i) $a = -2,\ \ b \neq 2 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a = -2,\ \ b = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

WolframAlpha computational intelligence.

Solve x+2y+2z=3, x+(a+2)y+6z=3, 3x+(4a+6)y+(a^2+18)z=b+7, x+(3a+2)y+(a^2+10)z=b+1

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

solve
$x+2y+2z=3$
$x+(a+2)y+6z=3$
$3x+(4a+6)y+(a^2+18)z=b+7$
$x+(3a+2)y+(a^2+10)z=b+1$

Results

$y = 1-\frac{x}{3}$ and $z = \frac{3-x}{6}$ and $b = 2$ and $a = -2$

$y = \frac{3-x}{2}$ and $z = 0$ and $b = 2$ and $a = 0$

$y = 3-x$ and $z = \frac{x-3}{2}$ and $b = 2$ and $a = 2$

$x = \frac{3a^3-2a(b+4)+8(b-2)}{a(a^2-4)}$ and $y = -\frac{4(b-2)}{a(a^2-4)}$ and $z = \frac{b-2}{a^2-4}$ and $a^3 \neq 4a$

Junio 2022 (primer llamamiento) Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros a y b.

$$\left.\begin{array}{l}(a-2)x+ay-z=b+2\\(-a-1)y+(a+1)z=3a+2b\\(-a-1)y+(a^2-1)z=ba+2a+2\\(-2a-2)y+(a^2+a)z=ba+5a+2b+2\end{array}\right\}$$

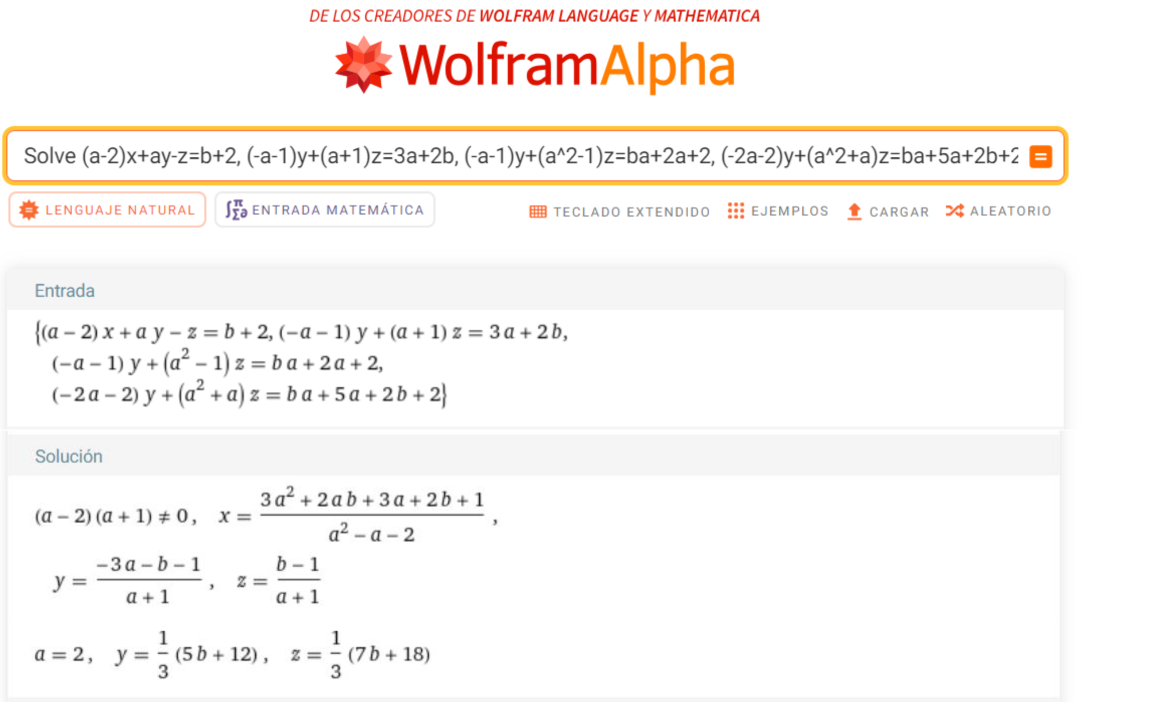
Resolver cuando sea compatible.

Solución:

Primer caso: $a \neq -1,\ a \neq 2,\ \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso: $a = -1 \Rightarrow$ S.I.

Tercer caso: $a = 2 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Junio 2022 (segundo llamamiento) Una empresa fabrica cuatro artículos A, B, C y D, en cuya producción intervienen trabajadores especializados y no especializados. Para elaborar una unidad del artículo A se requieren 2 horas de ambos tipos de mano de obra, y justo el doble por cada unidad del artículo B. La elaboración de cada unidad de los artículos C y D requiere 7 y 1 hora de mano de obra especializada, respectivamente. El tiempo de mano de obra no especializada necesario para cada unidad del artículo C es una cantidad p aún por determinar, y se sabe que una unidad del artículo D requiere una hora más $(p+1)$ de trabajo no especializado. La plantilla actual de la empresa cuenta con 20 trabajadores no especializados con contratos de 6 horas diarias, pero se desconoce cuántas horas de mano de obra especializada hay disponibles al día (N). Las previsiones de demanda recomiendan que la mitad de la producción total sea de artículos de tipo A, y que la producción del artículo C sea un 25% menor que la producción del artículo D.

a) Plantear un sistema de ecuaciones que permita conocer qué cantidades se deben elaborar de los cuatro artículos.

b) Estudiar la compatibilidad del sistema anterior según los valores de los parámetros p, N.

c) Resolver el sistema cuando $p = 3$, y encontrar todas las soluciones con sentido económico (cantidades no negativas y enteras) e interpretarlas.

Solución:

x= número de artículos tipo A

y= número de artículos tipo B

z= número de artículos tipo C

t= número de artículos tipo D

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y+7z+t=N \\ 2x+4y+p\cdot z+(p+1)\cdot t=120 \\ x=\dfrac{x+y+z+t}{2} \\ z=0.75\cdot t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+4y+7z+t=N \\ 2x+4y+p\cdot z+(p+1)\cdot t=120 \\ x-y-z-t=0 \\ z-0.75\cdot t=0 \end{array}\right\}$$

Primer caso:

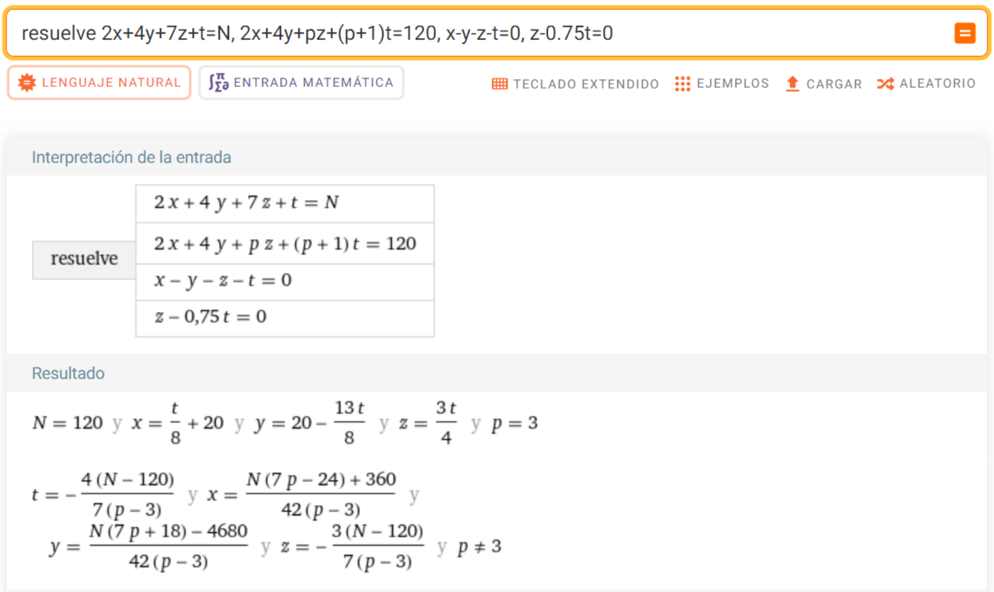
$p \neq 3, \forall N \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso I:

$p=3,\ N \neq 120 \Rightarrow$ S.I.

Segundo caso II:

$p=3,\ N=120 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre



Julio 2022. Se tiene un sistema de ecuaciones $A \cdot X = B$, para ciertas matrices $A \in \mathcal{M}_4, B \in \mathcal{M}_{4\times 1}$, del que se ha obtenido un sistema equivalente cuya matriz ampliada es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & m & -2 \\ 0 & 1-m^2 & m-1 & -2 & 3m+b \\ 0 & m^2-1 & -m & m+2 & -3m-1 \end{array}\right)$$

Estudiar para qué valores de los parámetros tiene solución dicho sistema y obtener la solución del sistema en el caso $m = 0, b = -1$.

Solución:

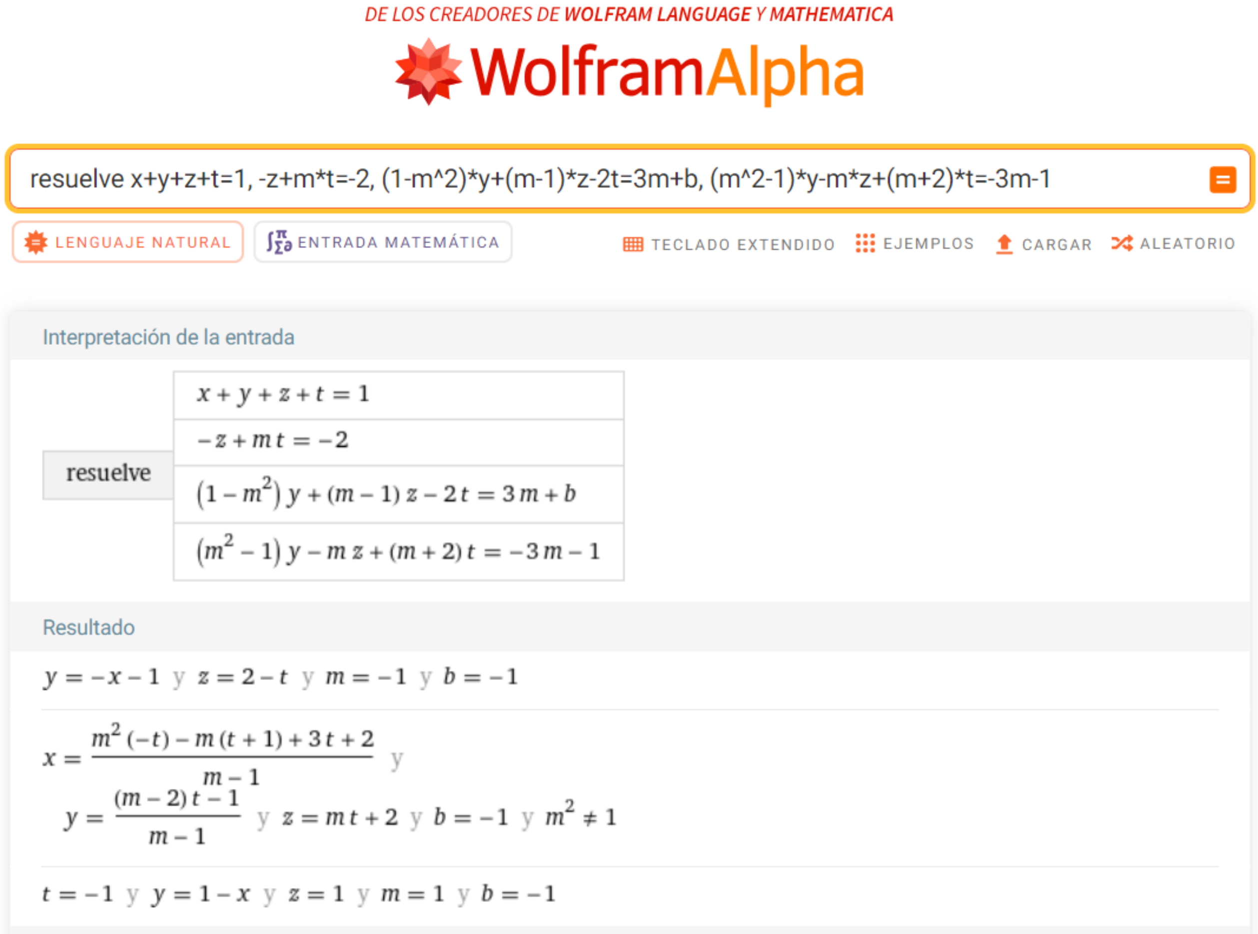
Primer caso: $b \neq -1 \Rightarrow$ S.I.

Segundo caso: $b = -1$:

i) $m \neq 1$ y $m \neq -1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $m = 1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

iii) $m = -1 \Rightarrow$ S.C.I. 2 incógnitas libres



Caso particular $m = 0, b = -1$

$x = -2 - 3t,$
$y = 1 + 2t,$
$z = 2,$

t libre.

Septiembre 2022. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema en función de los valores de los parámetros m y b:

$$\left.\begin{array}{r} x+3z+2t \quad = m \\ 3x+y+7z+5t = b \\ x+y+z+mt \ = 2-b \\ 2x-y+8z+5t = 4m-1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema siempre que sea posible.

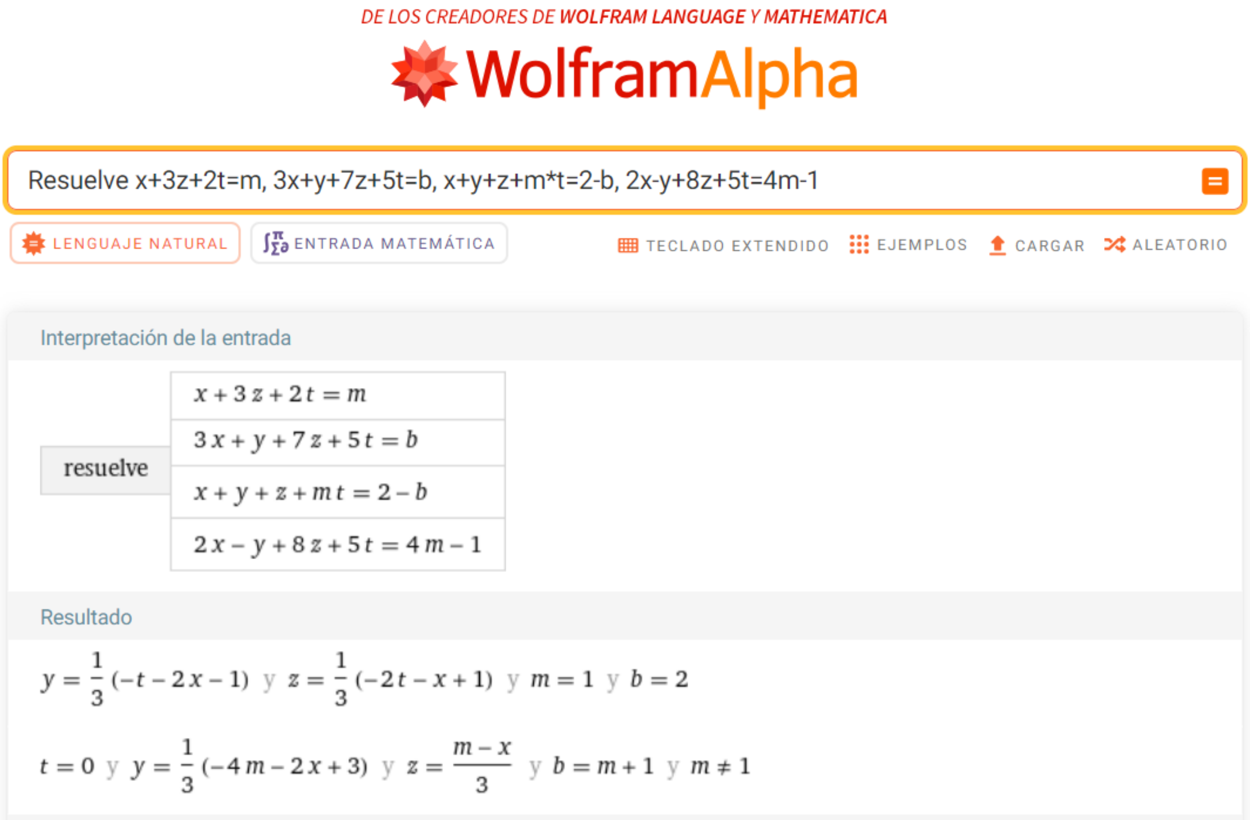
Solución:

Primer caso: $b-m-1 \neq 0 \Rightarrow$ S.I.

Segundo caso: $b-m-1=0$ $(b=m+1)$:

i) $m \neq 1 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

ii) $m=1 \Rightarrow$ S.C.I. 2 incógnitas libres



Mayo 2023. Clasificar el siguiente sistema lineal, estudiando su compatibilidad en función de los valores reales del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+a\,t=a \\ 3x+(a+4)y+3z+2at=4a \\ (a+4)x+(2a+3)y+(a+4)z-at=2a \end{array}\right\}$$

Resolverlo cuando sea compatible

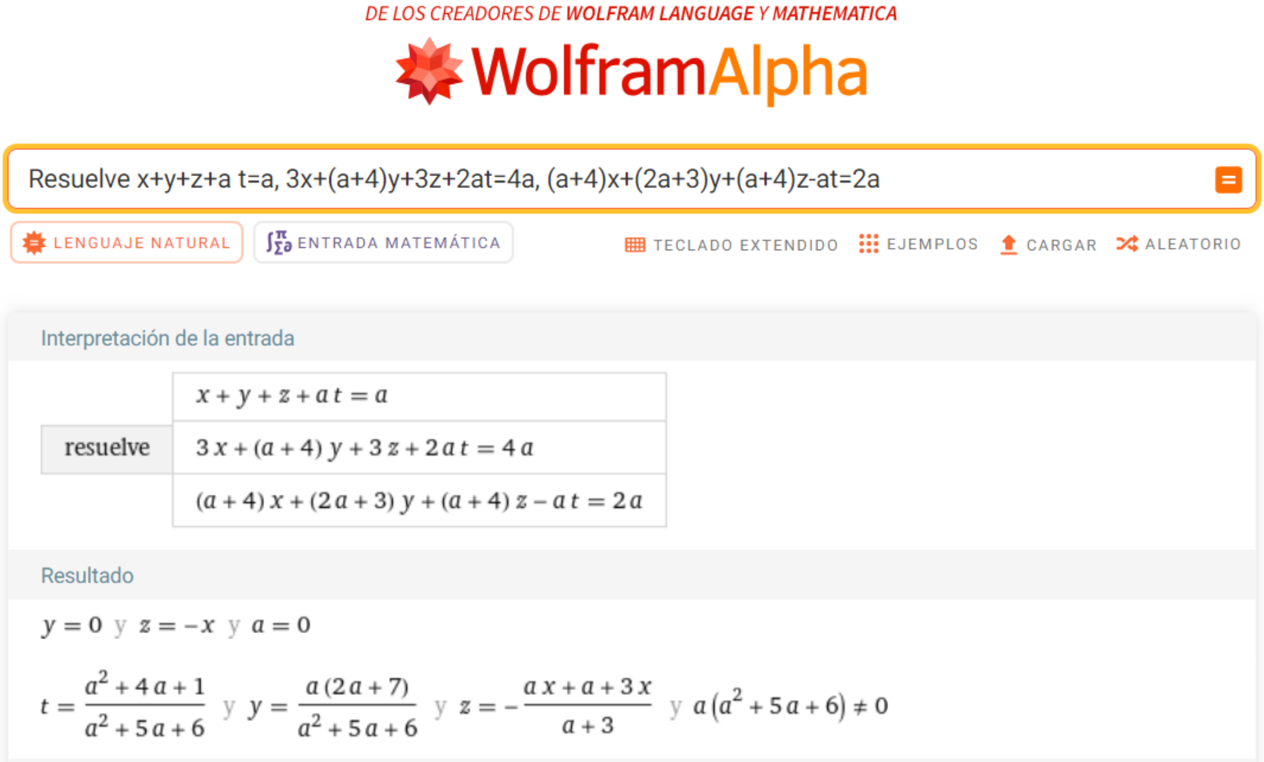
Solución:

Primer caso: $a \neq 0, a \neq -2$ y $a \neq -3 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre

Segundo caso: $a = 0 \Rightarrow$ S.C.I. 2 incógnitas libres

Tercer caso: $a = -2 \Rightarrow$ S.I.

Cuarto caso: $a = -3 \Rightarrow$ S.I.



Junio 2023. Estudiar la compatibilidad y resolver, cuando corresponda, el siguiente sistema en función de los valores reales de los parámetros *a* y *b*:

$$\begin{gathered} 2x+y+z=0 \\ 5x+(a+2)y+2z=2b \\ ax+(a-1)y-z=3b \\ (a+7)x+(2a+2)y+2z=5b \end{gathered}$$

Solución:

Primer caso: $a \neq 0$ y $a \neq -1,\ \forall b \Rightarrow$ S.C.D.

Segundo caso:

i) $a=0,\ b \neq 0 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a=0,\ b=0 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre.

Tercer caso:

i) $a=-1,\ b \neq 0 \Rightarrow$ S.I.

ii) $a=-1,\ b=0 \Rightarrow$ S.C.I. 1 incógnita libre