EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS II. MÓDULO II. OPTIMIZACIÓN.

GRADOS EN ECONOMÍA Y EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Domingo Israel Cruz Báez

Departamento de Economía Aplicada
y Métodos Cuantitativos

Universidad
de La Laguna

Actualizado a 9/02/2024

PRÓLOGO

La presente colección de problemas resueltos es una recopilación del material de prácticas correspondiente al segundo módulo (Optimización) de Matemáticas II, asignatura obligatoria de primer curso en los Grados en Economía y en Administración y Dirección de Empresas.

Esta publicación pretende ser una ayuda al alumnado de primer curso de los grados mencionados y espero que sepan aprovechar todos los ejercicios resueltos de este documento.

EJERCICIOS PROPUESTOS MÓDULO II. OPTIMIZACIÓN.

1. Una emisora de radio local ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la sintonizan entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660\text{-}231t + 27t^2\text{-}t^3$$

donde *t* indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana. ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de ciudadanos sintonizan la emisora a esas horas? ***Nota****: Observa cómo cambia la solución en función del intervalo.*

2. Supóngase que la función de ingreso $I(x) = -2x^2 + 60x$, y la función de coste $C(x) = 20x$ lo son del número de unidades producidas x. Hallar el valor de x que maximiza el beneficio $B(x) = I(x) - C(x)$.

3. Las funciones de ingreso $I(x)$ y la de coste $C(x)$ de una firma vienen dadas por:

$$I(x) = -\frac{11}{54}x^2 + \frac{235}{100}x - \frac{28}{27} \qquad 2 \leq x \leq 5$$

$$C(x) = (3/4)x + 1 \qquad 2 \leq x \leq 5$$

donde x es la producción en miles de unidades. Se pide hallar el valor de x que:

a) Minimiza el coste.

b) Maximiza el ingreso.

c) Maximiza el beneficio.

4. Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo mensual de 100.000 u.m. más una comisión que viene dada por la expresión $2660x - 0.2x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas. Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 20000 u.m. más otro de 500 u.m. por póliza contratada, calcula el número de pólizas que debe contratar para que su ganancia sea máxima.

5. Obtener los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $z = xy - x^2y - xy^2$ **b)** $z = x^3 + y^3 - 3xy$ **c)** $z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 24x + 4$ **d)** $z = (x - y + 1)^2$

6. Sea la función $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 3xz - \frac{131}{16}x + 4y - 9z + 1$. Comprobar que los puntos A($\frac{13}{4}, \frac{5}{8}, \frac{-3}{8}$) y B($\frac{9}{4}, \frac{1}{8}, \frac{9}{8}$) son puntos críticos de f. Analizar si son máximos o mínimos locales o globales.

7. Determinar y clasificar los extremos relativos de la función z en cada uno de los siguientes apartados:

a) $z = x^3 + xy^2 - 4x - 2y$ **b)** $e^x+e^y+e^z - (x+y) = 3$

c) $f(x,y,z) = x + 2y + yz - y^2 - x^2 - z^2$ **d)** $z = x^3 + x^2y - y^3 - 4y$

8. Clasificar los puntos críticos de las funciones estudiadas en la pregunta 5.

9. **a)** Hallar los óptimos de la función $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y)}$

b) Imponerle una restricción de forma que los puntos obtenidos en el apartado a) no sean admisibles

10. Sabiendo que la función de producción $z = z(x,y)$ de una empresa es (siendo x la aportación de capital e y la de mano de obra): $16z = 65 - 2(x\text{-}5)^2 \text{-}4(y\text{-}4)^2$,

los precios unitarios de los inputs (en situación de competencia perfecta) son 8 u.m. y 4 u.m. respectivamente y que el precio unitario del bien producido es 32 u.m., determinar el beneficio máximo.

Nota: *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

11. Las funciones de coste de un monopolista para sus dos fábricas son:

$$C_1 = 2q_1^2 + 4 \quad \text{y} \quad C_2 = 6q_2^2 + 8,$$

además se conoce que $p = 88 - 4Q$ y que $Q = q_1 + q_2$, donde C_i es el coste en cada fábrica i $(i = 1,2)$, p el precio del producto, Q la producción total y q_i la producción en cada fábrica $(i = 1,2)$. Hallar la producción que maximiza su beneficio, la cantidad que debe producir en cada fábrica y el precio que ha de poner para su producto. ***Nota:*** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

12. Una empresa distribuye su producción en tres mercados, siendo las funciones de demanda en cada uno de ellos las siguientes:

$$q_1 = 15 - 0.5p_1 \qquad q_2 = 10.5 - 0.25p_2 \qquad q_3 = 16 - 0.2p_3$$

donde q_i y p_i representan respectivamente la cantidad de producto *i* y el precio del producto *i*. Sabiendo que la función de costes viene dada por $C(q_1, q_2, q_3) = 32 + 10(q_1+q_2+q_3)$, calcula las producciones necesarias para maximizar el beneficio de la empresa. ***Nota:*** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

13. Una hoja de papel de forma rectangular debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de ser ambos de 2 cm. y los laterales de 1 cm. Calcular las dimensiones de la hoja de tal manera que el área de la misma sea mínima.

14. Se quiere construir una caldera cilíndrica de un volumen de 10 m^3. Los materiales de la pared lateral cuestan 20 u.m. por dm^2 y los del fondo y tapa a 30 u.m. por dm^2. Hallar el radio de la caldera para que el gasto sea mínimo.

15. Se va a cercar un campo rectangular de pasto a lo largo de la ribera de un río, sin que se requiera cerca a lo largo del río. Si el material para la cerca cuesta 20 u.m. el metro, determinar las dimensiones del campo de área máxima que puede cercarse con 20.000 u.m.

16. Las formas curvas de dos ríos en cierto tramo representan aproximadamente una parábola $y = x^2$ y una recta $x-y-2 = 0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos de cada curva hay que trazar dicho canal?

17. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si (a, b) es punto crítico de $f(x, y)$ y f''_{xx}, f''_{yy} son negativas en (a, b) entonces (a, b) es un máximo relativo de $f(x, y)$.

b) Si $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$ entonces (a, b) es siempre máximo relativo de $f(x, y)$.

c) Si f''_{xx}, f''_{yy} son positivas en (a, b) entonces (a, b) es un mínimo relativo de $f(x, y)$.

d) Si f es una función diferenciable en R^n, y x^* es un punto crítico de f que no es máximo global de f, entonces x^* es un punto de silla de f o bien un mínimo global de f .

e) El óptimo de una función con restricciones no puede coincidir con el óptimo de la misma función sin restricciones.

f) En un problema de optimización clásica con restricciones, los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada serán máximos o mínimos locales del problema.

g) En un problema de optimización clásica con restricciones, los puntos críticos de la función objetivo son candidatos a óptimos locales del problema.

18. Calcular los extremos de las siguientes funciones con las restricciones que se indican:

a) $\left.\begin{matrix} z = xy \\ x^2+y^2=8 \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} z = e^x+e^y \\ x+y=10 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} (x-1)^2+y^2 \\ y^2=4x \end{matrix}\right\}$ **d)** $\left.\begin{matrix} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x+y-2=0 \end{matrix}\right\}$ **e)** $\left.\begin{matrix} z=x^2+y^2 \\ x^2+y=1 \end{matrix}\right\}$

19. Estudiar los extremos de la función $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ si entre las variables x,y,z se cumple la condición $x^2+y^2+z^2=9$.

20. Hallar los extremos de la función $z = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ con la condición de que las variables x e y satisfagan la condición $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$ (Nota: Hacer el cambio $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$).

21. Determinar extremos relativos de la función $U = xy + xt + yt$ sabiendo que las variables verifican la restricción $xyt = 1$.

22. Determinar extremos relativos de la función $U = xyz$ sabiendo que las variables verifican la restricción $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$.

23. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) En el problema de optimizar $2x^3 + 6y^2 + 2z^3$ con las restricciones $x + y = 1$ y $x - z = 0$, sabiendo que todos los puntos factibles son regulares, el punto (0.5, 0.5, 0.5) es factible pero no verifica las condiciones de primer orden.

b) En la función $f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 24x + 75y + 7$ todos sus puntos críticos son puntos de silla.

c) El problema Opt.: $F(x,y) = y^3 - y + x$, sujeto a: $x+2y=2$, $y \leq 2$, $y > -3$, si se resuelve por el método de sustitución se obtiene que tiene dos máximos globales pero no tiene mínimo global.

d) La función $z=(x- y+3)^2$ posee infinitos mínimos globales.

e) El problema Min $z(x,y) = xy$ sujeto a la restricción $y = g(x)$, siendo $g(x)$ una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$ tal que $g(0)=0$ y $g'(0)=1$, posee un mínimo local en (0,0).

f) La función $z = x^4 + y^4 - 2y^2 - 2x^2 + 4xy$ posee tres puntos críticos, uno de los cuales es un máximo absoluto.

g) Sea f una función diferenciable definida sobre R^n y $D \subseteq R^n$ una región acotada. Si f tiene un máximo absoluto restringido a D en el punto $x = a$, entonces el máximo absoluto de f sin restricciones (es decir, en R^n) se alcanza también en $x = a$.

24. La función de utilidad de un consumidor es $U = 2\ln x+\ln y$ y su restricción presupuestaria es $M = 2x + 4y$ $(M > 0)$. Hallar los niveles de x e y que el consumidor debe asignar a fin de maximizar su utilidad. (Ten en cuenta que por la definición de U, se tiene que x e y toman valores positivos y que la globalidad del máximo local se puede confirmar por el método gráfico)

25. La función de producción de un fabricante es $Q=4K^{1/2}L^{1/2}$. Su función de costo es $C=2K+8L$. Determinar la combinación de K (capital) y L (mano de obra) para minimizar el costo a un nivel de producción $Q=32$. (Ten en cuenta que la restricción impone que K y L toman valores positivos y que la globalidad del mínimo local se puede confirmar por el método gráfico)

26. La función de producción de una empresa viene dada por $\mathrm{Q(L,K)} = 50\mathrm{L}^{2/3}\mathrm{K}^{1/3}$ donde L y K representan respectivamente el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y Q es el número de unidades elaboradas del producto. Sabiendo que los costos por unidad de mano de obra y capital empleados son de 100 u.m. y 300 u.m. respectivamente y que la empresa dispone de una cantidad de 45.000 u.m. para propósitos de producción que debe emplear en su totalidad, se pide:

a) Determinar, utilizando sólo las condiciones de primer orden, la combinación de mano de obra y de capital que la empresa deberá utilizar con objeto de maximizar su producción.

b) Demuestre que en este nivel de producción, el cociente de las productividades marginales de los factores es igual al cociente de sus costes unitarios.

27. Un fabricante de piezas para la industria de triciclos vende ruedas (donde x representa la cantidad de ruedas vendidas) por cada armazón (siendo y la cantidad de armazones). Sabiendo que la función de costes viene dada por:

$$C = x^2 + x \cdot y + y^2 + 190$$

y que las funciones de demanda son $x = 63 - 0.25p_x$, $y = 60 - 3p_y$ donde p_x y p_y representan los precios respectivos de las ruedas y armazones, determinar los niveles de producción que maximizan el beneficio, los niveles de precios óptimos y el beneficio máximo.

28. Determinada compañía elabora dos tipos de bienes A y B. Obtiene un beneficio que viene dado por: $B(x, y) = 2x^3 + y^3$, donde x e y son los números de unidades producidas de A y B, respectivamente. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir, están restringidos por la ecuación de transformación del producto dada por: $x^2 + y^2 = 100$. Hallar las cantidades de cada bien que deben producirse a fin de maximizar el beneficio, así como el beneficio máximo. **Nota:** Se sabe que el óptimo se puede obtener sin considerar las condiciones de no negatividad $x \geq 0, y \geq 0$.

29. Una empresa utiliza un único factor productivo en dos procesos distintos, cuyos rendimientos expresados en u.m. convenientes vienen dados por las expresiones $r_1(x_1) = 20x_1 - x_1^2$ y $r_2(x_2) = 10x_2 - x_2^2$, siendo x_i la cantidad del factor productivo empleada en el proceso i. La empresa dispone para el próximo periodo de planificación de 13 unidades de factor productivo que debe consumir en su totalidad. ¿Qué cantidad de factor productivo debe asignarse a cada uno de los procesos productivos para maximizar el rendimiento total? ¿Cuál es el rendimiento máximo que se puede obtener con esa disponibilidad de factor productivo? ¿Debería la empresa adquirir unidades adicionales del factor productivo al precio unitario de 5 u.m.? **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el máximo no satura las condiciones de no negatividad).*

30. Una empresa elabora un producto utilizando dos factores productivos (x=capital e y=mano de obra). La función de producción que relaciona la cantidad del bien producido (Q) con los factores productivos utilizados (x e y) es $Q(x, y) = 12x + y$. La función de costes de la empresa es $C(x, y) = 3x^2 + y^2$. **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el mínimo no satura las condiciones de no negatividad).*
a) ¿Cuáles son las cantidades de factores productivos que consiguen minimizar el coste de producir 49 unidades de producto?
b) ¿Será rentable producir una unidad más de producto, si el precio unitario de venta de éste fuese de 3 unidades monetarias?

31. Una compañía fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. El objetivo de la empresa es minimizar sus pérdidas, dadas por la función $P(x, y, z) = x^3 + 6yz$, siendo x, y, z las cantidades fabricadas de cada uno de esos productos. La compañía tiene dos contratos firmados. En uno de ellos se compromete a suministrar a un cliente 6 unidades en total de los dos primeros artículos. En el otro contrato se compromete a suministrar a un segundo cliente 2 unidades del tercer artículo. ¿Cuál es el mínimo nivel de pérdidas que se debe afrontar para cumplir con ambos contratos y cuáles deben ser las producciones que garantizan dicho nivel? La empresa se plantea una modificación de alguno de los dos contratos, porque no quiere mantener ese nivel de pérdidas. ¿Con qué cliente le recomendaríamos una renegociación? **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el mínimo no satura las condiciones de no negatividad).*

32. Estudiar los extremos de la función $U(x,y,z) = 4900x + 5200y + 4800z - 2x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2}$ sujeto a $x + y + z = 4999, x > 0, y > 0, z > 0.$

33. Un sujeto dispone de una renta monetaria de 30 u.m. que dedicará a la adquisición de cantidades por determinar de dos tipos de bienes B_1 y B_2. Se supone que la combinación (x,y) de la cantidad $x>0$ del tipo B_1 con la cantidad $y>0$ del tipo B_2 reporta al sujeto una utilidad $U(x,y)=\ln(xy^2)$. Los precios de los bienes del tipo B_1 y B_2 son respectivamente p y q. ¿Cuál será el plan de compra del sujeto si actúa racionalmente? (Ten en cuenta que por la definición de U, se tiene que x e y toman valores positivos y que la globalidad del máximo local se puede confirmar por el método gráfico)

34. Dada la función de producción $Q=f(L,K,T)=L^2+K^2+T^2$, sabiendo que los factores de producción (T =tierra, L =trabajo y K =capital) deben verificar las condiciones $L+K+T=6$, $L-K-T=1$, $0<K,T<5/2$, calcular los niveles mínimos de producción.

35. Se considera la función $f(x,y) = (x-y)^2$ sobre la región factible dada por $R = \{(x,y) \in R^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 1;\ y \geq (x-1)^2;\ y \leq 5\}$. Comprobar si los puntos $A(2,2)$ y $B(3/2,1/4)$ cumplen las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden. ¿Qué se puede concluir sobre la optimalidad de dichos puntos?

36. Calcular los óptimos de los siguientes problemas, indicando si fuera posible si se trata de un óptimo global:

a) $\left.\begin{array}{r} \max z = e^{-x} \\ \text{s.a.}: x \geq 0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} \max z = y - x \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 \leq 2 \\ -x^2 + y = 0 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} \max z = x^2 - 2y \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 = 16 \\ x + y \geq 4 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{r} \max z = x \\ \text{s.a.}: x^2 - y \leq 0 \\ x - y \geq -2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{rr} \min z = (x-4)^2 + (y-4)^2 & \\ \text{s.a.}: & x\text{-}3 \leq 0 \\ & x\text{-}y\text{-}2 \leq 0 \end{array}\right\}$ **f)** $\left.\begin{array}{r} \max z = x + 2y \\ \text{s.a.}: xy = 1 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ **g)** $\left.\begin{array}{r} \min\ (x\text{-}1)^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.a.}: x + y\text{-}2z^2 \leq 0 \end{array}\right\}$ **h)** $\left.\begin{array}{r} \max\ x + yz \\ \text{s.a.}: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \end{array}\right\}$

37. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El problema de Min $Q = x + 2y$ s. a: $x + y^2 = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ tiene 3 candidatos a mínimo que verifican las condiciones de Kuhn-Tucker.

b) El punto (0, 1) es un máximo local pero no global del problema de optimizar la función: $F(x,y)=-4x^2-2xy-y^2$ con las restricciones: $x^2+y^2\leq 4$; $x+y\geq 1$.

c) El punto $(6/5, 8/5)$ es candidato a mínimo del problema Opt. $x^2 + (y-1)^2$ s.a $\begin{array}{c} x^2 + y^2 \leq 6 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$.

d) Sea el problema de minimizar la función $f(x,y) = 4x(x-1) + 2y^2$ con las restricciones $x + 2y \leq 4$, $x + y \geq 1$, $(8x-3)^2 + (8y-6)^2 \geq 13$. Entonces dicho problema tiene en $x = -2$, $y = 3$ un mínimo global.

e) El problema $\left.\begin{array}{ll} \text{Opt} & x^2 + y^2 \\ \text{s.a} & (x-1)^2 + 4y^2 \leq 4 \\ & (x+1)^2 + 4y^2 \leq 4 \end{array}\right\}$ tiene un máximo local en $x = 0, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) En el problema Max $U(x,y,z) = x + yz$, sujeto a la condición $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, el punto (1,0,0) es un máximo local y global.

g) En la fabricación de dos tipos de herramientas de aluminio se dispone de **2** horas de trabajo y **6** Kg. de aluminio para la producción diaria. Para planificar la producción que maximiza el beneficio se ha planteado el siguiente problema de optimización:

maximizar $3x + y$, sujeto a: $\begin{array}{l} 2x + y \leq 2 \\ 3x + 2y \leq 6. \\ x, y \geq 0 \end{array}$ Sabiendo que lo óptimo es producir sólo 1 unidad al día del primer tipo de herramientas $(x = 1, y = 0)$, se puede estimar que **una** hora de trabajo disponible adicional incrementaría el beneficio óptimo en **una** u.m.

h) El problema Optimizar 4x+2y sujeto a $x^3 + 6y \leq 8$ posee un mínimo local en $(x, y) = (2{,}0)$.

i) Conocido que el punto $(x, y, z;\ \lambda_1, \lambda_2) = (2, 4, 2;\ 12, 24)$ minimiza la función $P(x, y, z)$ sujeta a las restricciones $x + y = 6, z = 2$,verificando las condiciones suficientes, y que el valor mínimo de P en ese punto es 56, podemos afirmar que es preferible una disminución del 6% en el valor de z a una disminución del 6% en el valor de $x + y$.

j) Si se resuelve por el método de sustitución el problema Opt.: F(x,y)=y^3–11y–x^2+20, sujeto a: 4+y=x^2, y<5, se obtiene que tiene al menos dos mínimos globales y al menos un máximo local, pero que no tiene máximo global (nótese que 4+y=x^2 debe ser $\geq$ 0).

k) Para la función de Lagrange asociada a un problema de optimización con una restricción de desigualdad (≤) se tiene la siguiente información:

(1,-1) es punto de Kuhn-Tucker, candidato a mínimo y $L''_{xx} = 52 - \mu$; $L''_{xy} = L''_{yx} = 0$; $L''_{yy} = 23 + y^4$.

Sin embargo, no podemos asegurar que (1,-1) sea mínimo global.

l) Dada la función $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y$, se verifica que su matriz Hessiana $HF(x, y)$ es semidefinida positiva para cualquier valor $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que F tiene un mínimo global.

38. Estudiar los óptimos de la función $z = x - y$ sujeto a las restricciones $y = (x - 3)^2$, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Estudiar cómo cambiarían los óptimos del problema si se modificara la primera restricción a $y \leq (x - 3)^2$.

39. Una fábrica produce cinturones y bolsos de cuero, obteniendo unos ingresos de $40x^2 + 100y^2$ u.m., siendo x e y el número de cinturones y bolsos producidos (respectivamente). Para producir cada bolso se necesitan 2 unidades de cuero y una hora de trabajo y para producir un cinturón se necesita una unidad de cuero y 2 horas de trabajo. Sabiendo que se dispone de 40 unidades de cuero y 50 horas de trabajo, averiguar cuántos cinturones y bolsos se deben producir para maximizar los ingresos. ¿Cuál es el ingreso máximo que se puede obtener con esa disponibilidad de cuero y mano de obra?

Nota: *Por el método gráfico resulta muy sencilla su resolución.*

40. A un editor se le han asignado **exactamente** 60.000 euros para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de euros en desarrollo e y miles en promoción, se venderán aproximadamente $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe invertir el editor en desarrollo y cuánto en la promoción para maximizar las ventas?

41. Sea $Q(x, y) = 40x + 60y - x^2 - 3y^2$ la función de producción de una empresa que produce un bien Q a partir de los factores productivos *X* e *Y*. Sabiendo que los precios unitarios de dichos factores son $p_x = 1$ u.m. y $p_y = 2$ u.m., calcular la cantidad de factores productivos que se han de utilizar para maximizar la producción, suponiendo unos costes no superiores a 26 u.m. Analizar la variación de la producción máxima si se puede invertir una unidad monetaria más en el proceso. ***Nota****: Se sabe que el máximo no satura las condiciones de no negatividad.*

42. La función de utilidad de un consumidor viene dada por $\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x}^2\mathrm{y}$ donde x e y son las cantidades a consumir de dos bienes diferentes. Se sabe que el precio unitario del primer bien es de 2 u.m, mientras que el segundo tiene un precio unitario de 4 u.m. y que el consumidor dispone, como máximo, de una renta M. Hallar los niveles de x e y que el consumidor debe asignar a fin maximizar su utilidad. ***Nota:*** *Se conoce que la utilidad se maximiza cuando se consume toda la renta en la adquisición de ambos bienes.*

43. El volumen de ventas de un detergente es función del número de anuncios en la prensa *x* y del número de minutos de propaganda en TV, *y*. Estadísticamente se ha estimado que la relación entre estas variables es

$$V=(x+2)(y+1)$$

Sabiendo que un anuncio en la prensa vale 20 u.m., un minuto en TV 50 u.m. y que el presupuesto para publicidad es de 2550 u.m., determinar la política publicitaria óptima. ***Nota****: se sabe que el máximo no satura las condiciones de no negatividad.*

44. La relación entre el importe de las ventas *S* y las cantidades *x* e *y* gastadas en dos medios de publicidad está dada por:

$$S=\frac{200x}{5+x}+\frac{100y}{10+y}$$

Sabiendo que el beneficio neto es la diferencia entre 1/5 de las ventas y el costo de la promoción y que el presupuesto para publicidad es de 25 u.m. (gastado en su totalidad), ¿cómo debe asignarse éste entre los dos medios para maximizar el beneficio neto?

45. Estudiar la globalidad de los óptimos del siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & F(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{s.a} & x+y\leq 1 \\ & x\geq 0 \\ & y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

46. Una empresa desea maximizar los ingresos que obtiene con la exportación de sus dos productos a un país vecino. El precio unitario al que vende el primer producto a dicho país depende de la cantidad de toneladas (x) exportadas al mismo y adopta la siguiente expresión p_1=100-x, mientras que el precio por tonelada del segundo producto es constante e igual a p_2 =50. Determinar la cantidad de toneladas que debe exportar de cada producto teniendo en cuenta que el país vecino ha puesto la condición de que a la cantidad de importaciones de esa empresa no debe ser mayor que 30 toneladas. **Nota:** *Con respecto a las condiciones de no negatividad se conoce que el óptimo no satura la restricción $x\geq 0$, es decir, no es activa.*

47. Sea la función de costes de una empresa $C(x,y)=-x+(y-1)^2+10$ donde *x* e *y* representan las cantidades de dos factores productivos A y B utilizados en la producción. La tecnología empleada permite alcanzar un nivel de producción *Q* dado por la función $Q(x,y)=x^2+(y-1)^2$. Se pide:

a) ¿Cuál será la elección óptima del empresario si su objetivo es determinar la combinación de factores (entendiendo que sólo se estudiará aquella combinación donde los dos factores sean estrictamente positivos), que minimizan el coste de la empresa para un nivel de producción de 9 unidades? ¿La elección hecha garantiza mínimo global? ¿Qué valor alcanza en dicho mínimo el coste de la empresa?

b) Tras haber conseguido una importante mejora en la productividad de la empresa, si el empresario se plantease aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuiría con ello sus costes? Razona la respuesta.

48. Una empresa produce un bien a partir de dos factores F_1 y F_2, según la función de producción dada por $P(x, y)= xy$, donde x e y son las cantidades utilizadas de dichos factores.

a) Determina las cantidades $(x, y \geq 0)$ de cada factor que deberá emplear la empresa si desea obtener 50 unidades del bien producido minimizando el nivel de contaminación generado por el proceso, que viene dado por $I(x,y)= 10x + 5y$ asumiendo que los dos factores productivos deben usarse.

b) Si el objetivo de la empresa es maximizar su producción con unos costes no superiores a 120 u.m., calcula las cantidades $(x, y \geq 0)$que se usarán de los factores productivos sabiendo que la función de costes es $C(x,y)=3x+2y$ asumiendo que los dos factores productivos deben usarse. ¿Cuál es esa producción máxima?

c) Respecto al apartado b), ¿cuál es aproximadamente la nueva producción máxima asociada a unos costes no superiores a 121 u.m.?

49. Una empresa produce tres productos en cantidades x, y, z. La función de costes es $C(x,y,z)=x^2+2x+y^2+2z+100$. A su vez, vende los productos en dos mercados con la siguiente estructura de demanda: $2x+8y+6z=204$; $2x+4y+2z=92$, donde los términos independientes representan la demanda de cada mercado. Sin considerar las restricciones de no negatividad de las variables ($x, y, z \geq 0$):

a) Calcula la producción que minimiza los costes.

b) Calcula el coste mínimo. ¿Es un mínimo global?

c) Si a la empresa le ofreciesen un aumento de dos unidades en la demanda de sólo uno de los mercados, ¿cuál de los dos mercados preferiría?¿Qué repercusión tendría aproximadamente?

50. Una empresa produce al año dos bienes A y B en las cantidades respectivas de x e y miles de unidades. La empresa se plantea minimizar los costes de producción, siendo 2€ los costes de producir mil unidades tanto del bien A como del B. La empresa está limitada en las cantidades que puede producir, estando dicha limitación representada por la condición $x^2 + y^2 = 4$**.** Por otra parte para cumplir con los compromisos adquiridos con sus clientes, la empresa estima que la producción tiene que verificar $2x + y \geq 4$. Se sabe además que se puede ignorar las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pues independientemente del objetivo planteado, de las restricciones dadas ya se deduce que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

a) Obtener los candidatos a mínimo y a máximo del problema de optimización cuya función objetivo es la función de costes, teniendo en cuenta las dos restricciones mencionadas.

b) Analiza el carácter de óptimo local y/o global de los candidatos obtenidos.

c) ¿Qué debería hacer la empresa para lograr la minimización de los costes? ¿A cuánto ascendería el coste óptimo? ¿Cuál es la peor solución que podría tomar la empresa (máximo coste global)?

d) Estima cuál sería el coste óptimo de la empresa si la restricción de demanda fuera $2x + y \geq 4.1$.

e) Confirmar mediante Hessiano Orlado que el máximo global obtenido es también local.

51. Una empresa produce dos bienes con costes unitarios de 10 u.m. y 20 u.m. Las demandas anuales x_1 y x_2 para los dos bienes son, respectivamente:

$$x_1 = p_2 - p_1\,;\; x_2 = 60 + p_1 - 3p_2$$

donde p_1 y p_2 representan los precios de los dos bienes. Sin considerar en la función lagrangiana cuando la utilices las condiciones de no negatividad ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$), se pide determinar:

a) Los precios que maximizan el beneficio de la empresa.

b) Las cantidades, x_1 y x_2, que hacen que el coste sea mínimo para un ingreso de 225 u.m. (Recomendación: Para resolverlo, dejar el planteamiento sólo en función de dos variables, aplicar el método de Lagrange y al resolver el sistema para obtener los candidatos, comenzar despejando λ (el multiplicador de Lagrange) en las ecuaciones e igualar dichas λ).

c) La variación que experimenta el coste mínimo del apartado anterior en caso de reducir el nivel de ingresos en 10 u.m.

52. Sea el problema: optimizar $z = x + 4y$

sujeto a

$xy \leq 1$

$x - y = 2$

$x \geq 0$

a) Escribir las condiciones de Kuhn- Tucker para este problema.

b) Sabiendo que se cumple la condición de regularidad, obtener todos los candidatos a óptimo.

c) Usando las condiciones de segundo orden identificar los máximos y mínimos locales del problema.

d) Sabiendo que la región factible es cerrada y acotada deducir si existen óptimos globales y en caso afirmativo identificarlos.

53. En una empresa se fabrican dos productos A y B en cantidades x e y respectivamente. Por la venta de cada unidad A se obtienen 3 euros y por cada unidad de B se obtienen 4 euros. La producción de la empresa ha de adaptarse a la restricción dada por:

$$9x^2 + 4y^2 \leq 18000.$$

Se plantea en estas condiciones el problema de maximizar los ingresos de la empresa en su forma más general (es decir, considerando $x \geq 0$, $y \geq 0$)

a) Sabiendo que el conjunto factible del problema anterior es cerrado y acotado (compacto), ¿qué se puede decir sobre la existencia de óptimos globales?

b) Se sabe que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad, es decir esas restricciones no son activas en el óptimo buscado.

b1) Calcular los candidatos a máximo.

b2) Utilizar las condiciones de segundo orden con la matriz Hessiana para determinar la solución del problema. ¿Cuáles son las unidades de A y B que se han de producir para maximizar el ingreso y cuál es el valor de ese ingreso máximo?

b3) Ratificar el resultado anterior con la matriz Hessiana Orlada.

c) Calcular (sin resolver el nuevo problema) en cuánto varían los ingresos máximos aproximadamente si la restricción de la producción de la empresa pasara a ser $9x^2 + 4y^2 \leq 18002$.

54. a) Resolver el problema de optimización de dos variables libres

(Problema A): Optimizar $z = x^2 + (y-3)^2$

b) Decidir si la solución obtenida resuelve el siguiente problema de optimización condicionada y en caso negativo, resolver este nuevo problema

(Problema B): Optimizar $z = x^2 + (y-3)^2$

s.a. $x + y = 1$

c) Decidir si la solución obtenida resuelve el siguiente problema de optimización condicionada y en caso negativo, resolver este nuevo problema

(Problema C): Optimizar $z = x^2 + (y-3)^2$

s.a. $x + y = 1$

$x, y \geq 0$

55. La función de coste total de una empresa (en euros) depende de las toneladas semanales producidas x e y de dos bienes, según la relación $C(x,y) = 18x^2 - xy + 12y^2$. Se sabe que la empresa debe producir como mínimo un total de 62 toneladas semanales entre ambos bienes. Nota: A la hora de construir la función de Lagrange no considerar las restricciones de no negatividad de las variables $(x, y \geq 0)$:

a) Plantea un modelo matemático que permita obtener la producción de mínimo coste que cumpla con los requisitos dados.

b) Sin resolver el modelo anterior, ¿es el conjunto factible acotado?; ¿se podría en consecuencia garantizar la existencia de óptimos (mínimo-máximo) globales?

c) Escribe las condiciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema y calcula la producción que minimiza los costes. ¿Se trata de un mínimo local o global? ¿Cuál es el coste mínimo que tendrá que asumir la empresa?

d) Confirmar mediante Hessiano Orlado el óptimo obtenido en el apartado anterior.

e) ¿Se puede estimar cuál sería el coste mínimo para la empresa si tuviera que incrementar su producción mínima en 1 unidad adicional?

56. Una fábrica produce un único producto empleando tres factores, siendo fijos tanto el precio de venta del producto, como los precios de compra de los factores. El beneficio obtenido por dicha empresa es:

$B(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - \frac{1}{2} x_2^2 + x_3 + 10$ miles de euros, donde x_1, x_2, x_3 representan el número de toneladas de las tres materias primas utilizadas en la producción. El contrato con el proveedor obliga a la empresa a consumir 2 toneladas al mes de la primera materia prima y a que las cantidades consumidas de las otras dos sean iguales.

a) Teniendo en cuenta las condiciones del contrato con el proveedor, calcular las cantidades de materias primas que debe comprar la empresa para maximizar sus beneficios y calcular el beneficio máximo. (No considerar las condiciones de no negatividad).

b) Si el proveedor admitiese suministrar más cantidad de la primera materia prima a un coste adicional de p1 miles de euros por tonelada, calcular el valor máximo de p1 que la empresa estaría dispuesta a pagar para que le fuese rentable recibir una tonelada más de dicha materia prima.

c) Confirmar por otro método el tipo de óptimo calculado.

57. Una empresa produce al año $Q(x, y) = x \cdot y$ miles de unidades de un bien, empleando las cantidades de x e y miles de unidades de los factores productivos capital y trabajo, respectivamente. Para cumplir con los compromisos adquiridos con sus clientes el próximo año, la producción tiene que ser de 8 mil unidades ($Q = 8$). La empresa se plantea como único objetivo para el próximo año minimizar los costes de producción, siendo 2 miles de € los costes de emplear mil unidades del factor capital, y 4 miles de € los costes de emplear mil unidades del factor trabajo. Además, la empresa está limitada en los factores productivos que puede emplear, estando dicha limitación representada por la condición $x + y \leq 9$. Se pide:

a) Plantear el modelo matemático de optimización asociado, que contemple como objetivo tanto maximizar como minimizar, incluyendo condiciones de no negatividad para las variables de decisión. Obsérvese que ni x ni y pueden anularse para que la producción pueda ser de 8 mil unidades.
b) Sabiendo que el problema cumple las condiciones de regularidad, resolverlo mediante el método de Lagrange y decidir qué tipo de soluciones obtienes a partir del estudio del Hessiano y/o Hessiano Orlado.
c) Sabiendo que la región factible es cerrada y acotada, decidir qué óptimos son globales.
d) ¿Cuál es la peor decisión (en el sentido de que llevaría a máximo coste) que podría tomar la empresa en función de su objetivo?
e) ¿Cuánto debe producir la empresa para lograr su objetivo? ¿A cuánto ascendería el coste óptimo? ¿Cómo quedaría aproximadamente dicho coste óptimo si se incrementase 500 unidades la producción (0,5 miles de unidades)?

58. Un inversor dispone de 14.000 € para invertir en su totalidad en tres activos diferentes de alta rentabilidad. Sabe que si invierte x,y, z miles de € en cada uno, se espera una rentabilidad del 50%, del 100% y del 150%, respectivamente. Sin embargo, cada una de estas inversiones tiene un cierto riesgo, que viene dado por $\mathrm{R}(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ (Se sabe que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad, por lo tanto no hace falta considerar $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

a) Encontrar cuánto debe invertir este individuo en cada uno de estos tres activos si desea minimizar el riesgo de esta operación y obtener una rentabilidad esperada de 15.000 €. **Sin emplear el método de sustitución,** ¿cuál es el riesgo que corre el inversor en esta situación?

b) Si el inversor está dudando si aumentar en 1000 € su presupuesto inversor ¿cuánto variará aproximadamente el riesgo mínimo en que se incurre? Responder sin resolver de nuevo el problema.
Y si el inversor se plantea en cambio rebajar su expectativa de rentabilidad en 1000€ ¿cuánto variará aproximadamente el riesgo mínimo incurrido? En consecuencia, ¿qué le resultaría de menor riesgo al inversor, aumentar su presupuesto inversor en 1000 € o rebajar su expectativa de rentabilidad en 1000 €? Responder sin resolver de nuevo el problema.

59. Una compañía petrolífera tiene que determinar cuántos barriles de petróleo va a extraer de los pozos que opera en los dos próximos años para maximizar los beneficios. Se sabe que si extrae x_1 millones de barriles durante el primer año, puede vender cada barril por $(40 - x_1)$ dólares siendo el coste total de extracción de x_1^2 millones de dólares. Durante el segundo año, si extrae x_2 millones de barriles el precio de venta por barril es de $(30- x_2)$ dólares y el coste total de extracción sería $2x_2^2$ millones de dólares. La empresa sólo tiene permiso para extraer un máximo de 10 millones de barriles cada dos años.

a) Plantear un problema de optimización que permita decidir la política óptima de extracción en los próximos dos años teniendo en cuenta las limitaciones descritas.

b) Sin resolver el problema planteado, ¿se puede garantizar la existencia de máximo global?

Sabiendo que se debe extraer petróleo los dos años, es decir el óptimo no satura las restricciones de no negatividad:

c) Escribe las condiciones de Kuhn-Tucker.

d) ¿Cuál es el máximo beneficio que puede lograr la empresa? ¿Cómo debe realizar la explotación de sus pozos en los próximos dos años para conseguirlo?

e) Debido a una política de contención de costes, el gerente desea limitar a un máximo de 70 millones de dólares el gasto realizado en tareas de extracción en el período considerado (dos años). **Sin resolver el nuevo problema**, razona si debería modificar su política de extracción.

60. Una empresa exporta un producto a tres países en cantidades x, y, z, respectivamente. La empresa tiene unos costes variables positivos de transporte de $\boldsymbol{x-y}$ u.m. por cada unidad del producto enviada al primer país, $\boldsymbol{3y-x-2z}$ u.m. por cada unidad enviada al segundo país y finalmente $\boldsymbol{4z-2y}$ u.m. por cada unidad transportada hasta el tercero. Además, la empresa ha calculado que sus costes fijos son de 800 u.m. Se sabe que en total exportará 1500 unidades. Se pide:

a) Formular el modelo matemático que permite obtener las cantidades que se exportarán a cada país si el objetivo de la empresa es minimizar sus costes totales de transporte. Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker para dicho problema.

b) Obtener la estrategia de exportación óptima que minimiza los costes totales de transporte sabiendo que la empresa exportará algo a cada uno de los tres países (no utilizar el método de sustitución)

c) Razonar, sin resolver, cuál sería el efecto sobre el coste mínimo global que tendría una disminución de 3 unidades en la cantidad total exportada.

61. Supongamos un monopolista que vende el único producto que fabrica en dos mercados (1 y 2). Y supongamos que no ser posible transferir el producto entre ambos mercados, por lo que en principio dicho monopolista puede fijar un precio diferente en cada uno de ellos. Supongamos que los precios y las cantidades demandadas en cada mercado son p_1 y q_1, p_2 y q_2 respectivamente los cuales se relacionan siguiendo las expresiones

$$p_1 = 100 - q_1; p_2 = 80 - q_2$$

Y la función de costes es $C = 6(q_1 + q_2)$. Se sabe que $q_1 > 0$ y $q_2 > 0$.

a) Plantea el problema optimización que nos permita saber cuánto debe vender el monopolista en cada mercado para maximizar su beneficio.

b) Si el mercado 1 absorbe a lo sumo 20 u de producto y el mercado 2 necesitara abastecerse como mínimo de 50 u., plantear el nuevo problema y resolverlo completamente. ¿Cuánto debe vender ahora, y a qué precios, el monopolista para seguir maximizando su beneficio? ¿Cómo ha afectado esta nueva circunstancia a su beneficio máximo?

c) Partiendo del apartado a), si no estuviera permitida la discriminación de precios, esto es, que es necesario legalmente fijar el mismo precio en ambos mercados ¿cómo habría que modificar el planteamiento inicial? ¿Cuánto debe vender ahora, y a qué precios, el monopolista para seguir maximizando su beneficio?

d) Partiendo del apartado c), si las autoridades del país 1 fijan un impuesto de t u.m. por cada unidad de producto vendido en el mercado 1, ¿cómo habría que modificar el planteamiento. Calcula de nuevo las cantidades a vender y precios para seguir maximizando beneficio. ¿Cuánto recibirá el gobierno por la vía de este impuesto?

62. (Programación lineal) Una Compañía Extractora de Carbón de Asturias opera con dos minas A y B. Extraer carbón en la mina A le cuesta a la compañía 3 Millones de u.m. diarios, mientras que en la B le cuesta 2 Millones de u.m. De cada mina se obtiene carbón de alta, mediana, y baja calidad. La mina A produce 2 Toneladas de carbón de alta calidad, 1 Ton. de mediana calidad, y 0,5 Ton. de baja calidad diariamente, mientras que la mina B produce al día 1 Ton. de cada una de las calidades. Sabiendo que la compañía ha contratado con sus clientes el abastecer, como mínimo, 14 Ton. de carbón de alta calidad, 10 Ton. de carbón de mediana calidad, y 6 Ton. de carbón de baja calidad al mes, se pide:

a) Formula el problema de optimización que permite conocer el número de días que esta empresa debe operar en cada mina para minimizar el coste al cual puede satisfacer sus obligaciones contractuales.

b) Comprueba que operar a 4 días/mes en la mina A y 6 días mes en la mina B satisface las condiciones de primer orden para ser una solución óptima. ¿Puedes afirmar que en efecto se trata de un óptimo local? ¿y global?

63. (Programación lineal) Una empresa de transporte de pasajeros opera una flota de barcos que ofrecen cruceros a lo largo del río. La flota incluye dos tipos de barcos, A y B. Los barcos de tipo A tienen 60 cabinas de lujo y 160 standard, mientras que los de tipo B tienen 80 cabinas de lujo y 120 standard. Además, la empresa tiene un acuerdo con una agencia de viajes por el que se ha comprometido a ofrecer, al menos, 360 cabinas de lujo y 680 standard para la próxima temporada estival. Cuesta 50000€ operar un barco de tipo A y 55000€ operar uno de tipo B durante ese periodo. Formular un modelo de optimización (incluyendo las condiciones de no negatividad) que ayude a la empresa a decidir cuántos barcos de cada tipo va a poner a disposición de la agencia de viajes. Resuelve el problema anterior, teniendo en cuenta que en la solución óptima se utilizan los dos tipos de barcos (es decir, *no se saturan las condiciones de no negatividad*). Finalmente, analiza gráficamente la solución de dicho problema.

64. (Programación lineal) La empresa *Rochas* produce el perfume *Rose Belle*. Este perfume requiere de químicos y trabajo para su producción. El proceso productivo puede realizarse mediante dos procesos distintos. El proceso A utiliza 1 unidad de trabajo y 2 unidades de químico para obtener 3 botellitas de perfume. El proceso B requiere 2 unidades de trabajo y 3 unidades de químico para producir 5 botellitas de perfume. Cada unidad de trabajo le cuesta a *Rochas* 10€ y cada unidad de químico le cuesta 15€, contando con una disponibilidad máxima de 200 unidades de trabajo y un máximo de 350 unidades de químico para este periodo de planificación. Debido a problemas de almacenamiento, la producción de *Rose Belle* no debe superar la demanda esperada. En ausencia de publicidad, *Rochas* se plantea dos opciones:

a) Considerar que puede vender un máximo de 1000 botellitas de perfume a un precio unitario de 30€. Para estimular la demanda de ese perfume *Rochas* puede contratar una modelo famosa a quien se le pagará 500€ la hora, hasta un máximo de 25 horas. Se estima que cada hora que la modelo trabaje para la empresa incrementará la demanda de *Rose Belle* en 200 botellitas.

b) Considerar que puede vender un máximo de 390 botellitas de perfume a un precio unitario de 30€. Para estimular la demanda de ese perfume *Rochas* puede contratar una modelo famosa a quien se le pagará 500€ la hora, hasta un máximo de 25 horas. Se estima que cada hora que la modelo trabaje para la empresa incrementará la demanda de *Rose Belle* en 40 botellitas.

Formula un modelo de optimización para cada opción que ayude a la empresa a decidir su estrategia y escribe las condiciones de optimalidad de primer orden para ese problema.

EJERCICIOS RESUELTOS MÓDULO II. OPTIMIZACIÓN.

1. Una emisora de radio local ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la sintonizan entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana. ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de ciudadanos sintonizan la emisora a esas horas? ***Nota****: Observa cómo cambia la solución en función del intervalo.*

Primero obtenemos los puntos críticos:

$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \rightarrow t_1 = 7, t_2 = 11$

$S''(t) = 54 - 6t \rightarrow S''(7) = 12 > 0 \rightarrow t_1 = 7$ mínimo local

$S''(t) = 54 - 6t \rightarrow S''(11) = -12 < 0 \rightarrow t_1 = 11$ máximo local

Vamos a obtener los máximos y mínimos globales aplicando el Teorema de Weiestrass:

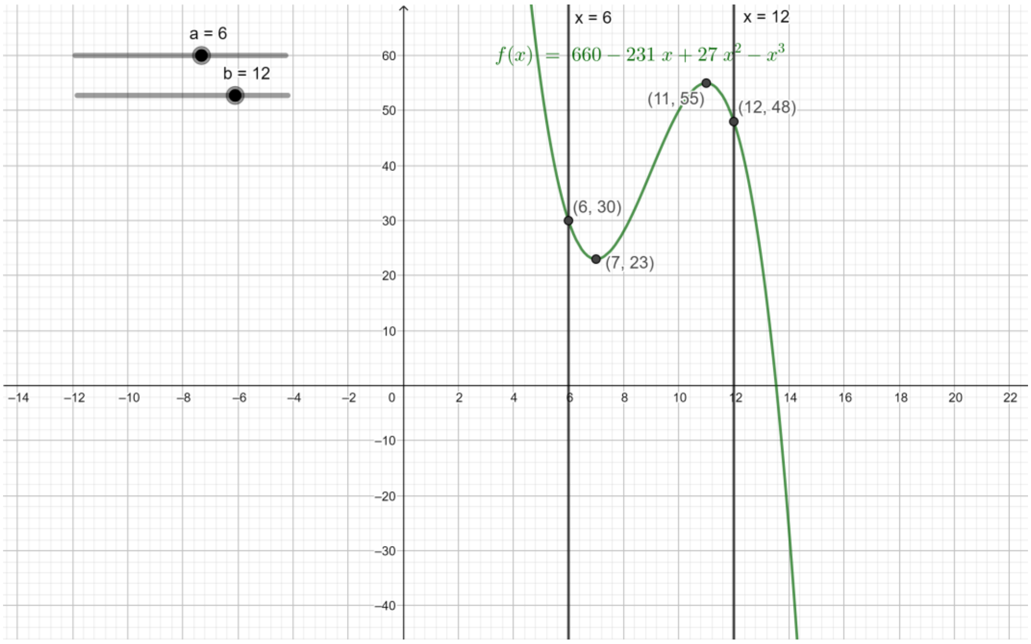
S continua $t \in [6,12]$

$S(6) = 30$

$S(7) = 23 \rightarrow t_1 = 7$ mínimo global

$S(12) = 48$

$S(11) = 55 \rightarrow t_2 = 11$ máximo global



Conéctate a: https://www.geogebra.org/classic/anwmzs35 y observa cómo cambiarán los resultados según se considere un intervalo diferente al dado inicialmente por el problema: $t \in [6, 12]$.

2. Supóngase que la función de ingreso $I(x) = -2x^2 + 60x$, y la función de coste $C(x) = 20x$ lo son del número de unidades producidas x. Hallar el valor de x que maximiza el beneficio $B(x) = I(x) - C(x)$.

El problema optimización será:

Maximizar $B(x) = -2x^2 + 60x - 20x = -2x^2 + 40x$

Condición de primer orden (puntos críticos):
$B'(x) = -4x + 40 = 0 \rightarrow x = 10$

Condiciones de segundo orden:
$B''(x) = -4 < 0$ (cóncava $\forall x$) $\rightarrow x = 10$ máximo global.

3. Las funciones de ingreso $I(x)$ y la de coste $C(x)$ de una firma vienen dadas por:

$$I(x) = -\frac{11}{54}x^2 + \frac{235}{100}x - \frac{28}{27} \qquad 2 \leq x \leq 5$$
$$C(x) = (3/4)x + 1 \qquad 2 \leq x \leq 5$$

donde x es la producción en miles de unidades. Se pide hallar el valor de x que:

a) Minimiza el coste.

b) Maximiza el ingreso.

c) Maximiza el beneficio.

---

a) La función $C(x) = \frac{3}{4}x + 1 \to C'(x) = \frac{3}{4} \to C$ creciente. Por tanto el mínimo es en $x = 2$.

b) $I'(x) = -\frac{22}{54}x + \frac{235}{100} = 0 \to x = \frac{1269}{220} = 5'76818$ (fuera del intervalo)

$x = 2 \to I(2) = \frac{769}{270} = 2'84815,$

$x = 5 \to I(5) = \frac{607}{108} = 5'62037 \to x = 5$ máximo global por Teorema de Weierstrass

c) Comprueba que maximizando $B(x) = -\frac{11x^2}{54} + \frac{8x}{5} - \frac{55}{27}$ obtienes como máximo $x = \frac{216}{55} = 3,927$

---

5. Optimizar los siguientes problemas:

a) $\boldsymbol{z = xy - x^2\,y - xy^2}$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y) = 0 \begin{array}{l}\nearrow \quad y = 0 \\ \searrow 2x + y = 1\end{array} \\ z'_y = x - x^2 - 2xy = x(1-x-2y) = 0 \begin{array}{l}\nearrow \quad x = 0 \\ \searrow x + 2y = 1\end{array}\end{array}\right\}$$

Combinando los casos obtenemos los puntos críticos: $(0,0), (1,0), (0,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Condiciones de segundo orden (signo d^2z) (signo de matriz Hessiana)

$$Hz(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$Hz(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -1 \neq 0 \to Hz(0,0)$ indefinida→ $(0,0)$ punto de silla.

$Hz(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -1 \neq 0 \to Hz(1,0)$ indefinida→ $(1,0)$ punto de silla.

$Hz(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = -2 < 0,\ \Delta_2 = -1 < 0 \to Hz(0,1)$ indefinida→ $(0,1)$ punto de silla.

$Hz\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \Delta_1 = -\frac{2}{3} < 0,\ \Delta_2 = \frac{1}{3} > 0 \to Hz\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ definida negativa→ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ máximo local.

c) $\boldsymbol{z = x^3 - 6xy + 3y^2 - 24x + 4}$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 3x^2 - 6y - 24 = 0 \\ z'_y = -6x + 6y = 0 \to y = x \end{array}\right\} \to \text{sustituyendo en la 1ªecuación: } 3x^2 - 6x - 24 = 0 \begin{array}{l}\nearrow \ x = 4 \to y = 4 \\ \searrow x = -2 \to y = -2\end{array}$$

Puntos críticos: $(4,4), (-2,-2)$.

Condiciones de segundo orden (signo d^2z) (signo de matriz Hessiana)

$Hz(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

$Hz(4,4) = \begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 24 > 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \to Hz(4,4)$ definida positiva $\to (4,4)$ mín. local.

$Hz(-2,-2) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = -108 < 0 \to Hz(-2,-2)$ indefinida$\to$ $(-2,-2)$ punto de silla.

d) $\boldsymbol{z = (x - y + 1)^2}$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$\left.\begin{array}{l} z'_x = 2(x - y + 1) = 0 \\ z'_y = -2(x - y + 1) = 0 \end{array}\right\} \to x - y + 1 = 0$ $\to$infinitos puntos críticos: $(x = a, y = a + 1)$, $a \in \mathbb{R}$

Condiciones de segundo orden (signo d^2z) (signo de matriz Hessiana)

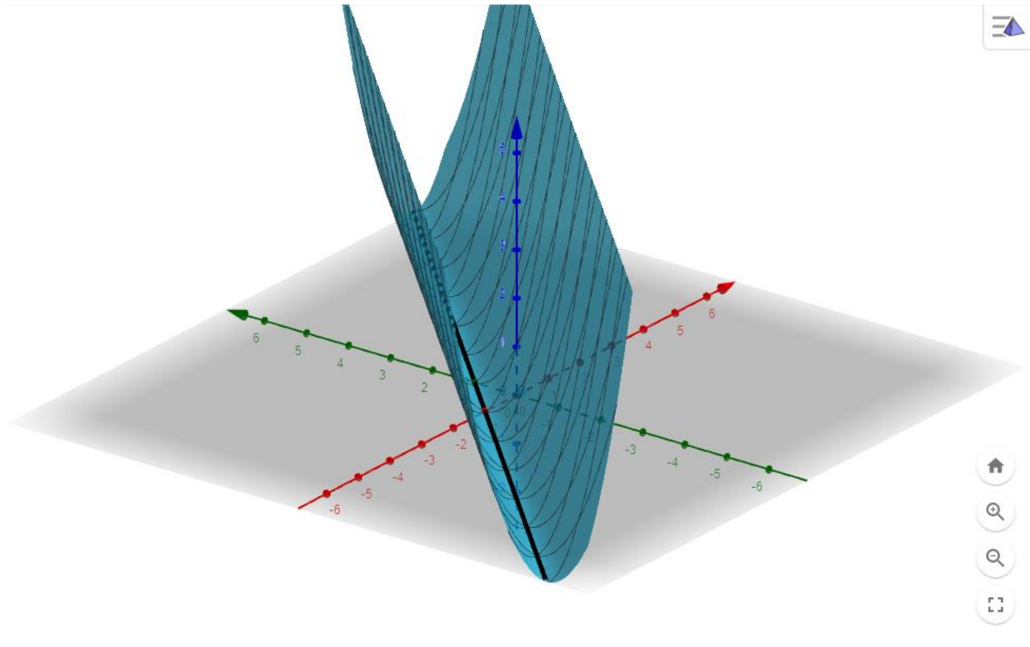
$Hz(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Resultado local:

$Hz(a, a+1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 0 \to Hz(a, a+1)$ semidefinida positiva $\to (a, a+1)$ caso dudoso.

Resultado global:

$Hz(a, a+1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 0 \to Hz(a, a+1)$ semidefinida positiva $\forall (x,y) \to$ $(a, a+1)$ infinitos mínimos globales$\Rightarrow$ $(a, a+1)$ infinitos mínimos locales (no estrictos)



6. Sea la función $f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+\ 2y^2+z^2-2xy+3xz-\frac{131}{16}x+4y-9z+1$. Comprobar que los puntos A$\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)$ y B$\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$ son puntos críticos de f. Analizar si son máximos o mínimos locales o globales.

El problema que nos plantean es:

Optimizar $f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+2y^2+z^2-2xy+3xz-\frac{131}{16}x+4y-9z+1$

Condiciones necesarias de primer orden (puntos críticos)

$f'_x=x^2-2y+3z-\dfrac{131}{16}=0$

$f'_y=4y-2x+4=0$

$f'_z=2z+3x-9=0$

Como en el ejercicio nos dan los posibles puntos críticos, solo tenemos que sustituir en el sistema de ecuaciones (no hará falta resolver el sistema). Sustituyendo nos da que los dos puntos son puntos críticos de f.

Condiciones suficientes de segundo orden (signo de d^2f) (signo matriz Hessiana)

$$Hf(x,y,z)=\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Caso 1. Punto crítico $\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)$

$$Hf\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)=\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=\frac{13}{2}>0 \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{13}{2} & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=\cdots=22>0 \\ \Delta_3=\begin{vmatrix} \frac{13}{2} & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\cdots=8>0 \end{array}\right\}\Rightarrow Hf\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right) \text{ es definida positiva } \left(d^2f\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right) \text{ es definida } +\right)$$

De tal forma que si $\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)$ es un punto crítico y la matriz Hessiana $Hf\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)$ es definida positiva se tiene que $\left(\frac{13}{4},\frac{5}{8},\frac{-3}{8}\right)$ es un mínimo local o relativo del problema.

Caso 2. Punto crítico $\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$

$$Hf\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)=\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=\frac{9}{2}>0 \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=\cdots=14>0 \\ \Delta_3=\begin{vmatrix} \frac{9}{2} & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\cdots=-8<0 \end{array}\right\}\Rightarrow Hf\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right) \text{ es indefinida } \left(d^2f\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right) \text{ es indefinida}\right)$$

De tal forma que si $\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$ es un punto crítico y la matriz Hessiana $Hf\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$ es indefinida se tiene que $\left(\frac{9}{4},\frac{1}{8},\frac{9}{8}\right)$ es un punto de silla del problema.

7. Determinar y clasificar los extremos relativos de la función f en cada uno de los siguientes apartados:

c) $f(x,y,z) = x + 2y + yz - y^2 - x^2 - z^2$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 1 - 2x = 0 \\ f'_y = 2 + z - 2y = 0 \\ f'_z = y - 2z = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} x = 1/2 \\ 2 + z - 2y = 0 \\ y = 2z \end{array}\right\} \to \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ punto crítico}$$

Condiciones de segundo orden (signo d^2f) (signo de matriz Hessiana)

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Resultado local:

$$Hf\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -6 < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} Hf(x,y,z) \text{ definida negativa} \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ punto crítico} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ máximo local de } f.$$

Resultado global:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} Hf(x,y,z) \text{ definida negativa } \forall (x,y,z) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ punto crítico} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ máximo global de } f \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ máximo local de } f.$$

9. a) Hallar los óptimos de la función $f(x,y) = (x+y)e^{-(x+y)}$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y) = e^{-(x+y)}(1-x-y) = 0 \\ f'_y(x,y) = e^{-(x+y)}(1-x-y) = 0 \end{array}\right\}$$

Entonces los puntos críticos serán todos los que verifican $x+y=1$.

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana)

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-(x+y)}(2-x-y) & -e^{-(x+y)}(2-x-y) \\ -e^{-(x+y)}(2-x-y) & -e^{-(x+y)}(2-x-y) \end{pmatrix}$$

$$f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy}$$

Si sustituimos la matriz Hessiana en los puntos críticos $(x+y=1)$ nos da:

$$Hf = \begin{pmatrix} -e^{-1} & -e^{-1} \\ -e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -e^{-1} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -e^{-1} & -e^{-1} \\ -e^{-1} & -e^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

¡Duda!

$d^2f(x,y) = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xx}dx\,dy + f''_{xx}(dy)^2 = f''_{xx}(dx+dy)^2 \leq 0$ semidefinida negativa. No se obtienen los óptimos relativos estrictos.

Por otro lado, si hacemos el cambio $x+y=u$.

Se trata de optimizar $f(u) = u\,e^{-u}$.

$f'(u) = (1-u)e^{-u} = 0$

Entonces $u=1$ punto crítico.

$f''(u) = (-2+u)e^{-u} \Rightarrow f''(1) < 0 \Rightarrow u=1$ máximo relativo estricto.

Pero en dos variables no será estricto. Tenemos máximos relativos en todo $x+y=1$**.**

10. Sabiendo que la función de producción $z=z(x,y)$ de una empresa es (siendo x la aportación de capital e y la de mano de obra): $16z = 65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2$,

los precios unitarios de los inputs (en situación de competencia perfecta) son 8 u.m. y 4 u.m. respectivamente y que el precio unitario del bien producido es 32 u.m., determinar el beneficio máximo. ***Nota:*** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

El ingreso total viene dado por $32z = 2(65 - 2(x-5)^2 - 4(y-4)^2) = 130 - 4(x-5)^2 - 8(y-4)^2$

Los costes totales por $8x+4y$

Por tanto la función de beneficio sería $B(x,y) = 130 - 4(x-5)^2 - 8(y-4)^2 - 8x - 4y$.

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} B'_x(x,y) = -8(x-5) - 8 = 0 \\ B'_y(x,y) = -16(y-4) - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es: $(x,y) = \left(4, \frac{15}{4}\right) = (4, 3'75)$

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana)

$HB(x,y) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -8 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} = 128 > 0 \\ \forall(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow HB(x,y) \text{ definida negativa } \forall(x,y) \Rightarrow$$

$(4, 3'75)$ es máximo global y el beneficio máximo se alcanza en $B\left(4, \frac{15}{4}\right) = \frac{157}{2} = 78'5$

11. Las funciones de coste de un monopolista para sus dos fábricas son:

$$C_1 = 2q_1^2 + 4 \text{ y } C_2 = 6q_2^2 + 8,$$

además, se conoce que $p = 88 - 4Q$ y que $Q = q_1 + q_2$, donde C_i es el coste en cada fábrica i ($i = 1,2$), p el precio del producto, Q la producción total y q_i la producción en cada fábrica ($i = 1,2$). Hallar la producción que maximiza su beneficio, la cantidad que debe producir en cada fábrica y el precio que ha de poner para su producto. ***Nota:*** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

$I = p \cdot Q = \big(88 - 4(q_1 + q_2)\big) \cdot (q_1 + q_2) = 88(q_1 + q_2) - 4(q_1 + q_2)^2$

$C = C_1 + C_2 = 2q_1^2 + 4 + 6q_2^2 + 8$

$B(q_1, q_2) = I - C$

$B(q_1, q_2) = 88(q_1 + q_2) - 4(q_1 + q_2)^2 - (2q_1^2 + 4 + 6q_2^2 + 8)$

$B(q_1, q_2) = 88q_1 + 88q_2 - 4q_1^2 - 8q_1q_2 - 4q_2^2 - 2q_1^2 - 4 - 6q_2^2 - 8$

Maximizar $B(q_1, q_2) = 88q_1 + 88q_2 - 6q_1^2 - 8q_1q_2 - 10q_2^2 - 12$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{array}{l} B'_{q_1}(q_1, q_2) = 88 - 12q_1 - 8q_2 = 0 \\ B'_{q_2}(q_1, q_2) = 88 - 8q_1 - 20q_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $(q_1, q_2) = (6, 2)$

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana)

$HB(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -20 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -12 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -20 \end{vmatrix} = 176 > 0 \\ \forall(q_1, q_2) \end{array}\right\} \Rightarrow HB(q_1, q_2) \text{ definida negativa } \forall(q_1, q_2) \Rightarrow$$

$(q_1, q_2) = (6, 2)$ es máximo global y el beneficio máximo se alcanza en $B(6,2) = \cdots = 340$.

En resumen la producción que maximiza el beneficio es $Q = 6 + 2 = 8$, cada fábrica produce 6 y 2 respectivamente y el precio para su producto será $p = 88 - 4Q = 56$ u.m.

12. Una empresa distribuye su producción en tres mercados, siendo las funciones de demanda en cada uno de ellos las siguientes:

$$q_1 = 15 - 0.5p_1, \quad q_2 = 10.5 - 0.25p_2, \quad q_3 = 16 - 0.2p_3 \qquad (*)$$

donde q_i y p_i representan respectivamente la cantidad de producto del mercado i y el precio del producto del mercado i. Sabiendo que la función de costes viene dada por: $C(q_1, q_2, q_3) = 32 + 10(q_1 + q_2 + q_3)$, calcula las producciones necesarias para maximizar el beneficio de la empresa. ***Nota:*** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas.*

Despejando los precios de (*) *obtenemos las funciones precio-demanda:*

$$p_1 = 30 - 2q_1 \; p_2 = 42 - 4q_2 \; p_3 = 80 - 5q_3$$

$I = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = (30 - 2q_1)q_1 + (42 - 4q_2)q_2 + (80 - 5q_3)q_3$

$C = 32 + 10(q_1 + q_2 + q_3),$

$B = I - C$

$B = (30 - 2q_1)q_1 + (42 - 4q_2)q_2 + (80 - 5q_3)q_3 - \big(32 + 10(q_1 + q_2 + q_3)\big)$

El problema que nos plantean es:

Maximizar $B(q_1, q_2, q_3) = 20q_1 - 2q_1^2 + 32q_2 - 4q_2^2 + 70q_3 - 5q_3^2 - 32$

Condiciones de primer orden (puntos críticos):

$$\left.\begin{aligned} B'_{q_1}(q_1, q_2, q_3) &= 20 - 4q_1 = 0 \\ B'_{q_2}(q_1, q_2. q_3) &= 32 - 8q_2 = 0 \\ B'_{q_3}(q_1, q_2. q_3) &= 70 - 10q_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Cuya solución es $(q_1, q_2, q_3) = (5, 4, 7)$

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana)

$$HB(q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} B''_{q_1q_1} & B''_{q_1q_2} & B''_{q_1q_3} \\ B''_{q_2q_1} & B''_{q_2q_2} & B''_{q_2q_3} \\ B''_{q_3q_1} & B''_{q_3q_2} & B''_{q_3q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 = -4 < 0 \\ &\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 32 > 0 \\ &\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -320 < 0, \forall (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} HB(q_1, q_2, q_3) \text{ definida negativa} \\ \forall (q_1, q_2, q_3) \end{matrix}\right\}$$

y como $(q_1, q_2, q_3) = (5, 4, 7)$ punto crítico, entonces $(q_1, q_2, q_3) = (5, 4, 7)$ es máximo global y el beneficio máximo se alcanza en $B(5, 4, 7) = \cdots = 327$.

17. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si (a, b) es punto crítico de $f(x, y)$ y f''_{xx}, f''_{yy} son negativas en (a, b) entonces (a, b) es un máximo relativo de $f(x, y)$.

Contraejemplo: $f(x, y) = -x^2 + 4xy - y^2$

Condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x, y) = -2x + 4y = 0 \\ f'_y(x, y) = 4x - 2y = 0 \end{array}\right. \quad \text{Punto crítico } (0,0)$$

Condiciones de segundo orden:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -8 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow Hf(0,0) \text{ indefinida} \rightarrow (0,0) \text{ punto de silla.}$$

$f''_{xx}(0,0) = -2 < 0$ y $f''_{yy}(0,0) = -2 < 0$, *pero* $(0,0)$ *es un punto de silla.*

b) Si $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$ entonces (a, b) es siempre máximo relativo de $f(x, y)$.

¡Faltan condiciones necesarias de segundo orden! $F(x, y) = x^2 + y^2$ tiene un mínimo en (0,0).

c) Si f''_{xx}, f''_{yy} son positivas en (a, b) entonces (a, b) es un mínimo relativo de $f(x, y)$.

Contraejemplo: $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$

Condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x, y) = 2x - 4y = 0 \\ f'_y(x, y) = -4x + 2y = 0 \end{array}\right. \quad \text{Punto crítico } (0,0)$$

Condiciones de segundo orden:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -8 < 0 \end{array}\right\} \rightarrow Hf(0,0) \text{ indefinida} \rightarrow (0,0) \text{ punto de silla.}$$

d) Si f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$, y x^* es un punto crítico de f que no es máximo global de f, entonces x^* es un punto de silla de f o bien un mínimo global de f .

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ tiene en (1,1) un punto crítico que es mínimo local, pero no global.

e) El óptimo de una función con restricciones no puede coincidir con el óptimo de la misma función sin restricciones.

Opt. $x^2 + y^2$, sujeto a $x = 0$ tiene como óptimo el mismo que sin restringir.

f) En un problema de optimización clásica con restricciones, los puntos críticos de la función Lagrangiana asociada serán máximos o mínimos locales del problema.

Opt. $x^3 + y^3$, sujeto a $y = x$ tiene como solución (0,0) y es un punto de silla.

Sin embargo, por Lagrange $\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x^3 + y^3 - \lambda(y - x)$ tendrá como punto crítico $(0,0)$ y no es máximo ni mínimo del problema.

g) En un problema de optimización clásica con restricciones, los puntos críticos de la función objetivo son candidatos a óptimos locales del problema.

Opt. $x^2 + y^2$ sujeto a $x = 1$ no tiene como candidato el $(0,0)$ (punto crítico de la función objetivo).

18. Calcular los extremos de las siguientes funciones con las restricciones que se indican:

a) $\left.\begin{matrix} z = x \cdot y \\ x^2 + y^2 = 8 \end{matrix}\right\}$ **b)** $\left.\begin{matrix} z = e^x + e^y \\ x + y = 10 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\left.\begin{matrix} z = (x-1)^2 + y^2 \\ y^2 = 4x \end{matrix}\right\}$ **d)** $\left.\begin{matrix} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x + y - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$ **e)** $\left.\begin{matrix} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y = 1 \end{matrix}\right\}$

---

a) Vamos a resolverlo por el Método de Lagrange teniendo en cuenta la **propiedad** que dice:
Todo óptimo relativo (máximo o mínimo relativo) de $\mathcal{L}$ es un óptimo (máximo o mínimo relativo) del problema condicionado. Nos planteamos, por tanto:

Optimizar $\mathcal{L}(x, y; \lambda) = x \cdot y - \lambda(x^2 + y^2 - 8)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos de $\mathcal{L}$)

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{L}'_x = y - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{matrix}\right\} \to \lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}\ (x \neq 0, y \neq 0) \to y^2 = x^2 \to x^2 + x^2 = 8 \to \cdots \to x = \pm 2, y = \pm 2$$

Nótese que si $x = 0$, de $\mathcal{L}'_x = y - 2\lambda x = 0$ sacamos $y = 0$ pero no se verifica la restricción (lo mismo con $y = 0$ pero con $\mathcal{L}'_y = x - 2\lambda y = 0$)

Por tanto los puntos críticos serán: $\left(2{,}2; \frac{1}{2}\right), \left(2, -2; -\frac{1}{2}\right), \left(-2{,}2; -\frac{1}{2}\right), \left(-2, -2; \frac{1}{2}\right)$

Condiciones de segundo orden (signo de $d^2\mathcal{L}$)

$$H\mathcal{L}(x, y; \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Para los puntos críticos $\left(2{,}2; \frac{1}{2}\right)$ y , $\left(-2, -2; \frac{1}{2}\right)$ tenemos:

$$H\mathcal{L}\left(x, y; \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta_1 = -1 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \forall (x, y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}\left(x, y; \tfrac{1}{2}\right) \text{ semidefinida negativa } \forall (x, y) \Rightarrow$$

los puntos críticos $(2, 2)$ y , $(-2, -2\ )$ son mínimos globales del problema condicionado.

Para los puntos críticos $\left(2, -2; -\frac{1}{2}\right)$ y , $\left(-2, 2; -\frac{1}{2}\right)$ tenemos:

$$H\mathcal{L}\left(x, y; -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \forall (x, y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}\left(x, y; -\tfrac{1}{2}\right) \text{ semidefinida positiva } \forall (x, y) \Rightarrow$$

los puntos críticos $(2, -2)$ y , $(-2{,}2\ )$ son máximos globales del problema condicionado.

c)

Optimizar $(x - 1)^2 + y^2$

Sujeta a: $y^2 - 4x = 0$

Optimización condicionada. Método de Lagrange.

Función de Lagrange o Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = (x - 1)^2 + y^2 - \lambda(y^2 - 4x)$$

Teniendo en cuenta la ***propiedad*** *que dice:*

Todo óptimo relativo (máximo o mínimo relativo) de $\mathcal{L}$ es un óptimo (máximo o mínimo relativo) del problema condicionado.

Nos planteamos, por tanto:

Optimizar $\boldsymbol{\mathcal{L}(x,y;\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda(y^2-4x)}$

Condiciones de primer orden (puntos críticos de $\mathcal{L}$)

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}'_x=2(x-1)+4\lambda=0\\ \mathcal{L}'_y=2y-2\lambda y=0\\ y^2-4x=0\end{array}\right\}$$

Una vez lo resolvemos obtendremos como punto crítico $(x_0,y_0;\lambda_0)=\left(0,0;\frac{1}{2}\right)$

Condiciones de segundo orden (signo de $d^2\mathcal{L}$) **(Teorema 2a. Matriz Hessiana)**

$$H\mathcal{L}(x,y;\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy}\\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2-2\lambda\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la matriz Hessiana el punto crítico tenemos (resultado local):

$$H\mathcal{L}\left(0,0;\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2-2\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=2>0\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2>0\end{array}\right\}\Rightarrow H\mathcal{L}\left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ definida positiva $\Rightarrow$ el punto crítico $\left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo local de $\mathcal{L}$ entonces por la ***propiedad*** de los óptimos de Lagrange***,*** $\left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ es un mínimo local del problema condicionado original.

Opcional *(en este caso, ya que basta el teorema de globalidad)*

Condiciones de segundo orden **(Teorema 2b. Hessiano Orlado** (¡resultado siempre local!))

(*signo de $d^2\mathcal{L}$ restringida a* $S=\left\{\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2:\left(h'_x,h'_y\right)\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0\right\}$)

Nótese que el subconjunto S es lo mismo que decir diferencial de h igual a cero.

Construimos el Hessiano Orlado:

$$B=HO(x,y;\lambda)=\begin{pmatrix}0 & W\\ -W^t & H\mathcal{L}(x,y;\lambda)\end{pmatrix}$$

Donde $W=\left(h'_x,h'_y\right)=(-4\,,2y)$

$$B=HO(x,y;\lambda)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2y\\ 4 & 2 & 0\\ -2y & 0 & 2-2\lambda\end{pmatrix}$$

Sustituyendo el punto crítico tenemos:

$$B=HO\left(0,0;\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Luego vemos el signo de la forma cuadrática restringida (matriz Hessiana restringida), teniendo en cuenta que hay que hacer los $N-m=2-1=1$ mayor determinante:

$$B_3=\left|HO\left(0,0;\frac{1}{2}\right)\right|=\begin{vmatrix}0 & -4 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\cdots=16>0$$

Entonces $H\mathcal{L}\left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ restringida a S es definida positiva entonces por el Teorema 2b tenemos que $(0,0)$ es un mínimo local del problema condicionado.

Condiciones de óptimo global. Teorema 4 en resumen general.

$$H\mathcal{L}(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Sabemos que $(x_0, y_0; \lambda_0) = \left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ es punto crítico de $\mathcal{L}$ entonces debemos mirar el signo de la matriz Hessiana: $H\mathcal{L}\left(x,y;\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{c} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}\left(x,y;\frac{1}{2}\right) \text{ definida positiva } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces si tenemos un punto crítico $(x_0, y_0; \lambda_0) = \left(0,0;\frac{1}{2}\right)$ y $H\mathcal{L}\left(x,y;\frac{1}{2}\right)$ definida positiva $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $(0,0)$ es el único mínimo global del problema condicionado original.

19. Estudiar los extremos de la función $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ si entre las variables x, y, z se cumple la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

La función de Lagrange será $\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

Comprueba que aplicando las condiciones de primer orden se obtienen como puntos críticos de Lagrange:

$$(x_1, y_1, z_1; \lambda_1) = \left(1,-2,2;\frac{1}{2}\right) \qquad (x_2, y_2, z_2; \lambda_2) = \left(-1,2,-2;-\frac{1}{2}\right)$$

Si ahora acudimos a las condiciones de segundo orden tendremos para el primer punto crítico:

$$H\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \to H\mathcal{L}\left(x,y,z;\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que $H\mathcal{L}\left(x,y,z;\frac{1}{2}\right)$ es definida negativa $\forall (x,y,z)$ y por tanto $\left(1,-2,2;\frac{1}{2}\right)$ máximo global.

Para el segundo punto crítico la matriz Hessiana queda:

$$H\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \to H\mathcal{L}\left(x,y,z;-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que $H\mathcal{L}\left(x,y,z;-\frac{1}{2}\right)$ es definida positiva $\forall (x,y,z)$ entonces $\left(-1,2,-2;-\frac{1}{2}\right)$ mínimo global

26. La función de producción de una empresa viene dada por $Q(L,K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$ donde L y K representan respectivamente el número de unidades de mano de obra y de capital utilizadas y Q es el número de unidades elaboradas del producto. Sabiendo que los costos por unidad de mano de obra y capital empleados son de 100 u.m. y 300 u.m. respectivamente y que la empresa dispone de una cantidad de 45.000 u.m. para propósitos de producción que debe emplear en su totalidad, se pide:

a) Determinar, utilizando sólo las condiciones de primer orden, la combinación de mano de obra y de capital que la empresa deberá utilizar con objeto de maximizar su producción.

b) Demuestre que en este nivel de producción, el cociente de las productividades marginales de los factores es igual al cociente de sus costes unitarios.

---

a) El planteamiento del problema es:

Maximizar $Q(L,K) = 50L^{2/3}K^{1/3}$

sujeto a $100L + 300K = 45.000$

Vamos a resolverlo por el Método de Lagrange:

Maximizar $\mathcal{L}(L,K;\lambda) = 50L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - \lambda(100L + 300K - 45.000)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos de $\mathcal{L}$)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}'_L = \dfrac{100}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 100\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_K = \dfrac{50}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}} - 300\lambda = 0 \\ 100L + 300K = 45.000 \end{array}\right\}$$

Despejamos e igualamos λ y nos queda $\lambda = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{3L^{\frac{1}{3}}} = \frac{L^{\frac{2}{3}}}{18K^{\frac{2}{3}}}$, es decir, $L = 6K$. Lo llevamos a la restricción y obtenemos como punto crítico $(L_0, K_0; \lambda_0) = \left(300{,}50; \frac{50^{\frac{1}{3}}}{3\,(300)^{\frac{1}{3}}}\right) = \left(300{,}50; \frac{1}{3 \cdot 6^{\frac{1}{3}}}\right)$

Por lo que según las condiciones de primer orden la combinación de mano de obra y capital que la empresa debería utilizar será: $(L,K) = (300{,}50)$ (faltaría confirmar que el punto obtenido es un máximo, pero según el enunciado en este caso se verificará)

27. Un fabricante de piezas para la industria de triciclos vende ruedas (donde x representa la cantidad de ruedas vendidas) por cada armazón (siendo y la cantidad de armazones). Sabiendo que la función de costes viene dada por:

$$C = x^2 + x \cdot y + y^2 + 190$$

y que las funciones de demanda son $x = 63 - 0.25p_x$, $y = 60 - \frac{1}{3}p_y$ donde p_x y p_y representan los precios respectivos de las ruedas y armazones, determinar los niveles de producción que maximizan el beneficio, los niveles de precios óptimos y el beneficio máximo.

Vamos a resolver el problema en función de cantidad de ruedas (x) y armazones (y), por lo que debemos de despejar p_x y p_y del sistema: $\left.\begin{array}{r} x = 63 - 0.25p_x \\ y = 60 - \frac{1}{3}p_y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} p_x = 252 - 4x \\ p_y = 180 - 3y \end{array}\right\}$

Sabemos que la función de beneficios viene dada por: $B = I - C$

¿Sabrías calcular la función de ingresos? $I(x, y) = x(252 - 4x) + y(180 - 3y)$

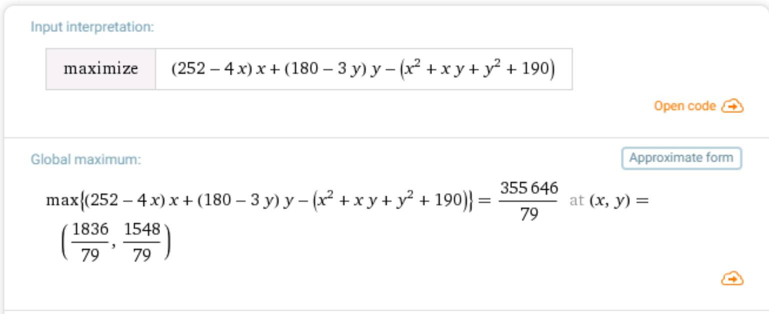
Por lo que la función de beneficios será:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= x(252-4x) + y(180-3y) - (x^2 + xy + y^2 + 190) \\ &= 252x - 5x^2 - xy + 180y - 190 - 4y^2 \end{aligned}$$

¿El problema estaría bien planteado de la siguiente forma?

Maximizar $B(x,y) = x(252-4x) + y(180-3y) - (x^2 + xy + y^2 + 190)$

Supongamos que estuviera bien planteado, si lo resolvemos la solución de nuestro problema de optimización libre será:



Luego, ***¿En qué hemos fallado a la hora de plantear el problema?***

28. Determinada compañía elabora dos tipos de bienes A y B. Obtiene un beneficio que viene dado por: $B(x,y) = 2x^3 + y^3$, donde x e y son los números de unidades producidas de A y B, respectivamente. Los números de unidades de los dos tipos que puede producir, están restringidos por la ecuación de transformación del producto dada por: $x^2 + y^2 = 100$. Hallar las cantidades de cada bien que deben producirse a fin de maximizar el beneficio, así como el beneficio máximo. **Nota:** Se sabe que el óptimo se puede obtener sin considerar las condiciones de no negatividad $x \geq 0, y \geq 0$.

Planteamiento (sin restricciones de no negatividad):

$$\text{Max. } B(x,y) = 2x^3 + y^3$$

$$\text{s.a } x^2 + y^2 = 100$$

Método de Lagrange:

Max. $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 2x^3 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2 - 100)$

Condiciones necesarias de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}'_x(x,y;\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y;\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$$

Al resolverlo se obtienen tres puntos críticos $(x,y,;\lambda)$ con sentido económico:

$(10{,}0;30)$, $\quad$ $(0{,}10;15)$, $\quad$ $(\sqrt{20}, 2\sqrt{20}; 3\sqrt{20})$

Condición suficiente de segundo orden:

1) Método de la matriz Hessiana

$$H\mathcal{L}(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 12x - 2\lambda & 0 \\ 0 & 6y - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Clasificando la matriz Hessiana para cada punto crítico resultará:

$\left(\sqrt{20}, 2\sqrt{20}; 3\sqrt{20}\right)$ es mínimo para $\mathcal{L}$, entonces es $\left(\sqrt{20}, 2\sqrt{20}\right)$ mínimo relativo para el P.C.

$(10{,}0;30)$ es punto de silla para $\mathcal{L}$, ¿entonces que podemos concluir para el P.C.?

$(0{,}10;15)$ es punto de silla para $\mathcal{L}$, ¿entonces que podemos concluir para el P.C.?

2) Método del Hessiano Orlado:

$$B = HO(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ -2x & 12x - 2\lambda & 0 \\ -2y & 0 & 6y - 2\lambda \end{pmatrix}$$

$(N = 2, M = 1 \Rightarrow N - M = 1\,)$

Caso $(\mathbf{10}, \mathbf{0}; \mathbf{30})$

$B_3 = |HO(10{,}0;30)| = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 \\ -20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{vmatrix} = \cdots = -24000 < 0 \Rightarrow$ Hessiana restringida en el punto es definida negativa $\Rightarrow$ $(10{,}0)$ es máximo relativo o local del problema condicionado.

Caso $(\mathbf{0}, \mathbf{10}; \mathbf{15})$

$B_3 = |HO(0{,}10;15)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & -30 & 0 \\ -20 & 0 & 30 \end{vmatrix} = \cdots = -12000 < 0 \Rightarrow$ Hessiana restringida en el punto es definida negativa $\Rightarrow$ $(0{,}10)$ es máximo relativo o local del problema condicionado.

¿Cuál es el máximo absoluto o global? ¿Podemos obtenerlo utilizando la caracterización de Matriz Hessiana? En caso negativo, ¿cómo obtenemos ese máximo global?

29. Una empresa utiliza un único factor productivo en dos procesos distintos, cuyos rendimientos expresados en u.m. convenientes vienen dados por las expresiones $r_1(x_1) = 20x_1 - x_1^2$ y $r_2(x_2) = 10x_2 - x_2^2$, siendo x_i la cantidad del factor productivo empleada en el proceso i. La empresa dispone para el próximo periodo de planificación de 13 unidades de factor productivo que debe consumir en su totalidad. ¿Qué cantidad de factor productivo debe asignarse a cada uno de los procesos productivos para maximizar el rendimiento total? ¿Cuál es el rendimiento máximo que se puede obtener con esa disponibilidad de factor productivo? ¿Debería la empresa adquirir unidades adicionales del factor productivo al precio unitario de 5 u.m.? **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el máximo no satura las condiciones de no negatividad).*

Planteamiento (sin restricciones de no negatividad):

Maximizar $R(x_1, x_2) = 20x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2$

sujeto a $x_1 + x_2 = 13$

Maximizar $\mathcal{L}(x_1, x_2; \lambda) = 20x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - \lambda(x_1 + x_2 - 13)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}'_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = 20 - 2x_1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 10 - 2x_2 - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 = 13 \end{array}\right\}$$

Si lo resolvemos tendremos a $(x_1, x_2; \lambda) = (9{,}4; 2)$ punto crítico.

Condiciones de segundo orden (global)

$H\mathcal{L}(x_1, x_2; \lambda) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow H\mathcal{L}(x_1, x_2; 2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}(x_1, x_2; 2)$ definida negativa $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $(9{,}4; 2)$ punto crítico$\Rightarrow$ $(9{,}4)$ máximo global $\Rightarrow R_{max} = R(9{,}4) = \cdots = 123$.

La empresa no debe adquirir unidades adicionales del factor productivo al precio unitario de 5 u.m. ya que $\lambda = 2$ y por tanto el precio unitario debería ser menor que 2.

30. Una empresa elabora un producto utilizando dos factores productivos (x=capital e y=mano de obra). La función de producción que relaciona la cantidad del bien producido (Q) con los factores productivos utilizados (x e y) es $Q(x,y) = 12x + y$. La función de costes de la empresa es $C(x,y) = 3x^2 + y^2$. **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el mínimo no satura las condiciones de no negatividad).*

a) ¿Cuáles son las cantidades de factores productivos que consiguen minimizar el coste de producir 49 unidades de producto?

b) ¿Será rentable producir una unidad más de producto, si el precio unitario de venta de éste fuese de 3 unidades monetarias?

Planteamiento (sin restricciones de no negatividad):

Minimizar $C(x,y) = 3x^2 + y^2$

Sujeto a $12x + y = 49$

Por el Método de Lagrange tenemos:

Minimizar $\mathcal{L}(x,y;\lambda) = 3x^2 + y^2 - \lambda(12x + y - 49)$

<u>Condiciones de primer orden (puntos críticos)</u>

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}'_x(x,y;\lambda) = 6x - 12\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y;\lambda) = 2y - \lambda = 0 \\ 12x + y = 49 \end{array}\right\}$$ Si lo resolvemos tendremos a $(x,y;\lambda) = (4,1;2)$ punto crítico.

<u>Condiciones de segundo orden (global)</u>

$$H\mathcal{L}(x,y;\lambda) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H\mathcal{L}(x,y;2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 6 > 0 \\ \Delta_2 = 12 > 0 \\ \forall (x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$H\mathcal{L}(x,y;2)$ definida positiva y $(4,1;2)$ punto crítico$\Rightarrow$ (4,1) mínimo global $\Rightarrow C_{min} = C(4,1) = \cdots = 49$

31. Una compañía fabrica una serie de productos, tres de los cuales son deficitarios. El objetivo de la empresa es minimizar sus pérdidas, dadas por la función $P(x,y,z) = x^3 + 6yz$, siendo x, y, z las cantidades fabricadas de cada uno de esos productos. La compañía tiene dos contratos firmados. En uno de ellos se compromete a suministrar a un cliente 6 unidades en total de los dos primeros artículos. En el otro contrato se compromete a suministrar a un segundo cliente 2 unidades del tercer artículo. ¿Cuál es el mínimo nivel de pérdidas que se debe afrontar para cumplir con ambos contratos y cuáles deben ser las producciones que garantizan dicho nivel? La empresa se plantea una modificación de alguno de los dos contratos, porque no quiere mantener ese nivel de pérdidas. ¿Con qué cliente le recomendaríamos una renegociación? **Nota:** *Resuelve el problema sin añadir las condiciones de no negatividad ya que se sabe que las variables no pueden ser negativas ni nulas (el mínimo no satura las condiciones de no negatividad).*

Planteamiento (sin restricciones de no negatividad):

Minimizar $F(x,y,z) = x^3 + 6yz$

sujeto a $\left.\begin{matrix} x + y = 6 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$

Vamos a resolverlo por el método de sustitución y el de Lagrange

1) Método de sustitución*:* $y = 6 - x, z = 2$

Resulta el problema:

Minimizar $f(x) = F(x, 6 - x, 2)$, es decir:

Minimizar $f(x) = x^3 - 12x + 72$

Condiciones de primer orden: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

Resolviendo obtenemos los puntos críticos $x_1 = 2, x_2 = -2$ (sin sentido económico)

Condiciones de segundo orden: $f''(x) = 6x$

Sustituyendo en el punto crítico con sentido económico nos queda

$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo relativo

Con respecto al problema original (teniendo en cuenta que $y = 6 - x, z = 2$):

$$(2,4,2) \text{ mínimo relativo}$$

¿Podrías concluir algo de globalidad?

2) Método de Lagrange.

Optimizar $\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = x^3 + 6yz - \lambda_1(x + y - 6) - \lambda_2(z - 2)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{L}'_x(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 0 \\ \mathcal{L}'_z(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 0 \\ x + y = 6 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtienen como puntos críticos:

$(x_0, y_0, z_0; \lambda_1, \lambda_2) = (2,4,2; 12,24)$,

$(x_1, y_1, z_1; \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (-2,8,2; 12,48)$ (sin sentido económico)

Condiciones de segundo orden (una opción: matriz Hessiana)

$$H\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}6x & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el único punto crítico con sentido económico:

$$H\mathcal{L}(2,4,2;12,24)=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

¿Cómo es la matriz Hessiana?, ¿puedes concluir algo para el problema condicionado?

Condiciones de segundo orden (otra opción: método Hessiano orlado, signo de la matriz Hessiana restringida)

$$B=B(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}0 & W\\ -W^T & H\mathcal{L}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 6x & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$N=3, M=2$ entonces $N-M=1$

¿Qué conclusión podemos sacar para el punto crítico $(2,4,2;12,24)$?

$B_5=|B|=12>0\rightarrow(2,4,2;12,24)$ es un mínimo local del problema condicionado.

¿Podrías concluir algo de globalidad?

Y si planteamos el problema con restricciones de desigualdad:

Minimizar $\boldsymbol{F(x,y,z)=x^3+6yz}$

sujeto a $\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x+y=6}\\ \boldsymbol{z=2}\\ \boldsymbol{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0}\end{array}\right\}$

En este último caso: *¿podrías concluir que $(2,4,2)$ es el único mínimo global?*

Supongamos ahora *La empresa se plantea una modificación de alguno de los dos contratos, porque no quiere mantener ese nivel de pérdidas. ¿Con qué cliente le recomendaríamos una renegociación?*

En este caso, podemos suponer que le interesa ***disminuir*** *la cantidad suministrada con respecto a uno de los dos contratos.*

Primera opción: Disminuir la cantidad del primer cliente.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=6\\ z=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=5\\ z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta k_1=-1\Rightarrow M^*-M\approx\lambda_1\Delta k_1=12\,(-1)=-12$$

Segunda opción: Disminuir la cantidad del segundo cliente:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=6\\ z=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=6\\ z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta k_2=-1\Rightarrow M^*-M\approx\lambda_2\Delta k_2=24\,(-1)=-24$$

Por tanto en el caso de disminuir la cantidad suministrada nos conviene hacerlo con respecto al segundo cliente, ya que con este último reducimos la pérdidas en aproximadamente 24 u.m.

32. Estudiar los extremos de la función $U(x,y,z) = 4900x + 5200y + 4800z - 2x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2}$ sujeto a $x + y + z = 4999, x > 0, y > 0, z > 0$.

Vamos a resolverlo por los métodos vistos en clase:

1) Método de sustitución:

$$z = 4999 - x - y$$

Resulta el problema:

Optimizar $V(x,y) = U(x,y,4999 - x - y)$, es decir:

Opt. $V(x,y) = 4900x + 5200y + 4800(4999 - x - y) - 2x^2 - y^2 - \frac{(4999-x-y)^2}{2}$

Condiciones de primer orden:

$$V_x' = \cdots = 5099 - 5x - y = 0$$

$$V_y' = \cdots = 5399 - x - 3y = 0$$

Cuya solución es: $(x_0, y_0) = (707{,}1564)$ punto crítico

Condiciones de segundo orden:

$$HV(x,y) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el punto crítico nos queda

$$HV(707{,}1564) = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -5 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = 14 > 0 \Rightarrow$Hessiana definida negativa ⇒ (707,1564) máximo local ⇒

$$z = 4999 - x - y = \cdots = 2728$$

Y por tanto (707,1564,2728) máximo local del problema condicionado original (P.C.).

- ¿Podrías concluir algo de globalidad?

- **Y si nos planteamos variar la restricción $x + y + z = 5000$, ¿podrías decir, sin resolver el nuevo problema, cuál el nuevo valor máximo de U?**

Optimizar $U(x,y,z) = 4900x + 5200y + 4800z - 2x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2}$
sujeto a $x + y + z = 5000$

2) Método de Lagrange.

Optimizar $U(x,y,z) = 4900x + 5200y + 4800z - 2x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2}$

sujeto a $x + y + z = 4999$

El problema quedaría:

Optimizar $\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = 4900x + 5200y + 4800z - 2x^2 - y^2 - \frac{z^2}{2} - \lambda(x + y + z - 4999)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}'_x(x,y,z;\lambda)=4900-4x-\lambda=0\\ \mathcal{L}'_y(x,y,z;\lambda)=5200-2y-\lambda=0\\ \mathcal{L}'_z(x,y,z;\lambda)=4800-z-\lambda=0\\ x+y+z=4999\end{array}\right\}$$

Despejando λ e igualando dos a dos resulta como punto crítico $(x_0,y_0,z_0;\lambda_0)=(707{,}1564{,}2728;2072)$

Condiciones de segundo orden (una opción: matriz Hessiana)

$$H\mathcal{L}(x,y,z;\lambda)=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el punto crítico:

$$H\mathcal{L}(707{,}1564{,}2728;2072)=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\Delta_1=-4<0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}-4&0\\0&-2\end{vmatrix}=8>0,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-8<0$$

La matriz Hessiana en el punto es definida negativa, entonces $(707{,}1564{,}2728;2072)$ es máximo relativo de la función de Lagrange $\mathcal{L}$ y por tanto $(707{,}1564{,}2728)$ es máximo relativo del P.C.

Condiciones de segundo orden (otra opción: método Hessiano orlado, signo de la matriz Hessiana restringida)

$$B=B(x,y,z;\lambda)=\begin{pmatrix}0&W\\-W^T&H\mathcal{L}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&-4&0&0\\-1&0&-2&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$N=3, M=1$ entonces $N-M=2$ mayores determinantes.

Punto crítico: $(707{,}1564{,}2728;2072)$

$$B=B(707{,}1564{,}2728;2072)=\begin{pmatrix}0&W\\-W^T&H\mathcal{L}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&-4&0&0\\-1&0&-2&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$B_3=\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&-4&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=\cdots=-6<0$$

$$B_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\-1&-4&0&0\\-1&0&-2&0\\-1&0&0&-1\end{vmatrix}=\cdots=14>0$$

En el punto crítico la matriz **Hessiana restringida** es definida negativa, entonces $(707{,}1564{,}2728)$ es un máximo relativo del problema condicionado.

¿Podríamos haber concluido un resultado global usando la Matriz Hessiana?

$(707{,}1564{,}2728;2072)$ punto crítico

$$H\mathcal{L}(x,y,z;2072)=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\Delta_1=-4<0, \Delta_2=\begin{vmatrix}-4&0\\0&-2\end{vmatrix}=8>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-8<0,\ \forall(x,y,z;2072)$$

La matriz Hessiana es definida negativa $\forall(x,y,z;2072)$, entonces $(707{,}1564{,}2728)$ es el **único máximo global** del problema condicionado original.

35. Se considera la función $f(x,y) = (x-y)^2$ sobre la región factible dada por $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 1;\ y \geq (x-1)^2;\ y \leq 5\}$. Comprobar si los puntos $A(2,2)$ y $B(3/2,1/4)$ cumplen las condiciones de optimalidad de primer y segundo orden. ¿Qué se puede concluir sobre la optimalidad de dichos puntos?

El problema de optimización es de programación no lineal con tres restricciones de desigualdad.

Maximizar $\mathcal{L}(x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = (x-y)^2 - \mu_1(-(x-1)^2 - (y-2)^2 + 1) - \mu_2(-y + (x-1)^2 + 1) - \mu_3(y-5)$

Condiciones de primer orden (puntos de Kuhn-Tucker)

$$\mathcal{L}'_x(x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = 2(x-y) - 2\mu_1\big(-2(x-1)\big) - \mu_2 2(x-1) = 0$$
$$\mathcal{L}'_y(x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = -2(x-y) - 2\mu_1\big(-2(y-2)\big) + \mu_2 - \mu_3 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 1 \to -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 1 \leq 0$$
$$y \geq (x-1)^2 \to -y + (x-1)^2 \leq 0$$
$$y \leq 5$$
$$\mu_1(-(x-1)^2 - (y-2)^2 + 1) = 0$$
$$\mu_2(-y + (x-1)^2) = 0$$
$$\mu_3(y-5) = 0$$

$$(x,y) = (2,2) \to \left.\begin{array}{c} 4\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \\ \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1(-1+1) = 0 \to \forall\mu_1 \\ \mu_2(-2+1) = 0 \to \mu_2 = 0 \to \mu_1 = 0 \\ \mu_3(2-5) = 0 \to \mu_3 = 0 \end{array}\right\} \to (x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = (2,2;0,0,0) \text{ candidato a máximo y a mínimo}$$

$$(x,y) = \left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4}\right) \to \left.\begin{array}{c} 2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) - 2\mu_1\left(-2\left(\frac{3}{2}-1\right)\right) - \mu_2 2\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{5}{2} + \mu_1 - \mu_2 = 0 \to \mu_2 = \frac{5}{2} \\ -2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) - 2\mu_1\left(-2\left(\frac{1}{4}-2\right)\right) + \mu_2 - \mu_3 = -\frac{5}{2} - 7\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ \mu_1\left(-\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 - \left(\frac{1}{4}-2\right)^2 + 1\right) = -\frac{37}{16}\mu_1 = 0 \to \mu_1 = 0 \\ \mu_2\left(-\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2\right) = 0 \to \forall\mu_2 \\ \mu_3\left(\frac{1}{4}-5\right) = 0 \to \mu_3 = 0 \end{array}\right\} \to \left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4};0,\tfrac{5}{2},0\right) \text{ candidato a máximo}$$

Condiciones de segundo orden

$$H\mathcal{L}(x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \begin{pmatrix} 2+4\mu_1-2\mu_2 & -2 \\ -2 & 2+4\mu_1 \end{pmatrix}$$

$(2,2;0,0,0)$ candidato a máximo y a mínimo

$$H\mathcal{L}(x,y;0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \forall(x,y) \end{array}\right\} \to \text{Semidefinida positiva } \forall(x,y) \to (2,2) \text{ mínimo global.}$$

$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4};0,\frac{5}{2},0\right)$ candidato a máximo

$$H\mathcal{L}\left(x,y;0,\tfrac{5}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -3 < 0 \\ \Delta_2 = -10 < 0 \end{array}\right\} \to \text{Indefinida} \to \text{DUDA del problema condicionado.}$$

Hessiano Orlado

$$g(x,y) = -y + (x-1)^2, \quad B(x,y;\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \begin{pmatrix} 0 & W \\ -W^t & H\mathcal{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(x-1) & -1 \\ -2(x-1) & 2+4\mu_1-2\mu_2 & -2 \\ 1 & -2 & 2+4\mu_1 \end{pmatrix}$$

$$B = B\left(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4};0,\tfrac{5}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2(3/2-1) & -1 \\ -2(3/2-1) & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

La matriz $H\mathcal{L}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4};0,\frac{5}{2},0\right)$ restringida es definida negativa, entonces $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{4};0,\frac{5}{2},0\right)$ máximo local.

39. Una fábrica produce cinturones y bolsos de cuero, obteniendo unos ingresos de $40x^2 + 100y^2$ u.m., siendo x e y el número de cinturones y bolsos producidos (respectivamente). Para producir cada bolso se necesitan 2 unidades de cuero y una hora de trabajo y para producir un cinturón se necesita una unidad de cuero y 2 horas de trabajo. Sabiendo que se dispone de 40 unidades de cuero y 50 horas de trabajo, averiguar cuántos cinturones y bolsos se deben producir para maximizar los ingresos. ¿Cuál es el ingreso máximo que se puede obtener con esa disponibilidad de cuero y mano de obra?

Supongamos que planteamos el problema sin añadir las condiciones de no negatividad.

$\text{Max.}\, I(x,y) = 40x^2 + 100y^2$

sujeto a $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 40 \\ 2x + y = 50 \end{array}\right\}$

Si lo resolvemos por sustitución, despejamos en el conjunto factible $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 40 \\ 2x + y = 50 \end{array}\right\}$ y obtenemos que sólo hay un punto factible, concretamente, $(x,y) = (20,10)$. Por tanto la función de ingreso tendría máximo y mínimo global en ese punto. *¿Te parece correcta esta afirmación?*

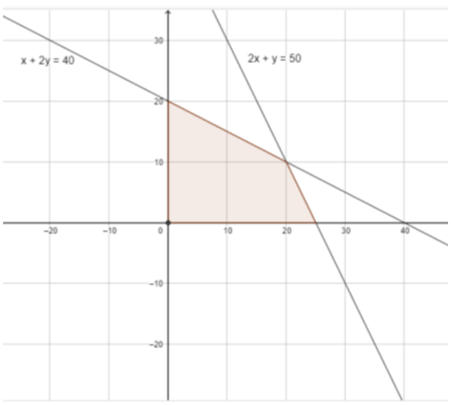
A continuación lo planteamos de una forma más realista añadiendo todas las condiciones:

$\text{Max.}\, I(x,y) = 40x^2 + 100y^2$

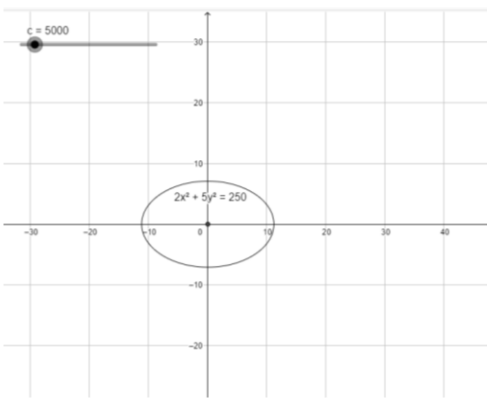
sujeto a $\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

Vamos a resolverlo utilizando el método gráfico (https://www.geogebra.org/m/KmSejK7F)

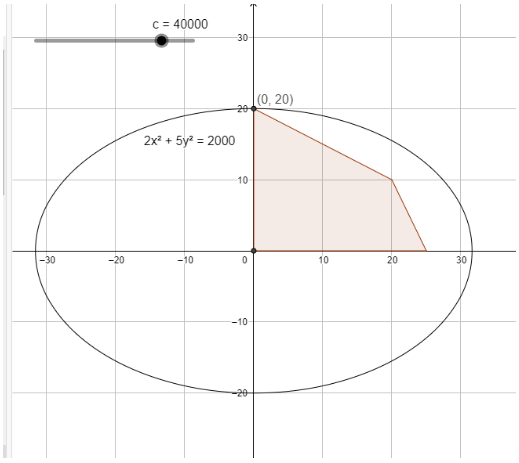
El conjunto factible será:



Y las curvas de nivel nos darán elipses.



Utiliza el enlace GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/KmSejK7F) para **desmentir** que el punto $(x,y) = (20{,}10)$ es el máximo buscado y demostrar que la solución del problema es $(x,y) = (0{,}20)$ y los ingresos máximos son de $I_{max} = 40.000$ u.m.

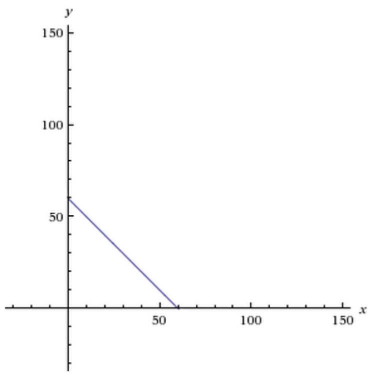


40. A un editor se le han asignado **exactamente** 60.000 euros para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x miles de euros en desarrollo e y miles en promoción, se venderán aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe invertir el editor en desarrollo y cuánto en la promoción para maximizar las ventas?

El problema planteado de forma completa sería incluyendo las condiciones de no negatividad:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Max.} & F(x,y) = 20x^{3/2}y \\ \text{s.a} & x + y = 60 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{o de forma equivalente} \quad \left.\begin{array}{ll} \text{Max.} & F(x,y) = 20x^{3/2}y \\ \text{s.a} & x + y - 60 = 0 \\ & -x \leq 0 \\ & -y \leq 0 \end{array}\right\}$$

En este caso el conjunto factible es:



Como vemos es cerrado, acotado y no vacío. Además, como la función objetivo es continua en el conjunto factible, podemos aplicar el Teorema de Weierstrass para concluir que existen máximo y mínimo globales.

La función de Lagrange vendría dada por:

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda,\mu_1,\mu_2) = 20x^{3/2}y - \lambda(x+y-60) - \mu_1(-x) - \mu_2(-y)$$

Resolviendo las condiciones de Kuhn-Tucker obtendremos los siguientes puntos críticos de Kuhn-Tucker con sus correspondientes valores en la función objetivo:

- $(36, 24;\ 4320, 0, 0) \longmapsto F(36,24) = 103680$
- $(60, 0;\ 0, 0, 0) \longmapsto F(60,0) = 0$
- $\left(0, 60;\ 0, 0, -2400\sqrt{15}\right) \longmapsto F(0,60) = 0$

De forma que podemos concluir que $(x,y) = (36,24)$ es el máximo global buscado.

42. La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x,y)=x^2y$ donde x e y son las cantidades a consumir de dos bienes diferentes. Se sabe que el precio unitario del primer bien es de 2 u.m, mientras que el segundo tiene un precio unitario de 4 u.m. y que el consumidor dispone, como máximo, de una renta M. Hallar los niveles de x e y que el consumidor debe asignar a fin maximizar su utilidad. ***Nota:*** *Se conoce que la utilidad se maximiza cuando se consume toda la renta en la adquisición de ambos bienes.*

Maximizar $U(x,y)=x^2y$

Sujeto a $\begin{array}{c} 2x+4y=M \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}$

Maximizar $\mathcal{L}(x,y;\mu)=x^2y-\lambda(2x+4y-M)-\mu_1(-x)-\mu_2(-y)$

Condiciones de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}'_x(x,y;\lambda,\mu_1,\mu_2)=2xy-2\lambda+\mu_1=0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y;\lambda,\mu_1,\mu_2)=x^2-4\lambda+\mu_2=0 \\ 2x+4y=M \\ \mu_1(-x)=0 \\ \mu_2(-y)=0 \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \end{array}\right\}$$

Obtendremos los siguientes puntos críticos de Kuhn-Tucker: $\left(0,\frac{M}{4};0{,}0{,}0\right)$ candidato a máximo y a mínimo, $\left(\frac{M}{3},\frac{M}{12};\frac{M^2}{36},0{,}0\right)$ candidato a máximo y $\left(\frac{M}{2},0;0{,}0,-\frac{M^2}{4}\right)$ candidato a mínimo.

Condiciones de segundo orden (Matrix Hessiana)

$$H\mathcal{L}(x,y;\lambda,\mu_1,\mu_2)=\begin{pmatrix}2y & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}\Rightarrow H\mathcal{L}\left(\frac{M}{3},\frac{M}{12};\frac{M^2}{36},0{,}0\right)=\begin{pmatrix}\frac{M}{6} & 0\\ 0 & \frac{2M}{3}\end{pmatrix}\quad \left.\begin{array}{l}\Delta_1=\frac{M}{6}>0\\ \Delta_2=\frac{M^2}{9}>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{M}{3},\frac{M}{12};\frac{M^2}{36},0{,}0\right)$$

mínimo local de Lagrange$\Rightarrow\left(\frac{M}{3},\frac{M}{12}\right)$ mínimo local del problema condicionado.

Además, por el Teorema de Weiestrass podemos concluir que es el único mínimo global. *¿Sabrías demostrarlo?*

45. Estudiar la globalidad de los óptimos del siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Opt.} & F(x,y)=x^2+y^2 \\ & \\ \text{s.a} & x+y\leq 1 \\ & x\geq 0 \\ & y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

La función de Lagrange vendría dada por:

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3)=x^2+y^2-\mu_1(x+y-1)-\mu_2(-x)-\mu_3(-y)$$

Si resolvemos las condiciones de Kuhn-Tucker nos saldrán los siguientes puntos:

- $(0{,}0;0{,}0{,}0)$
- $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1{,}0{,}0\right)$
- $(1{,}0;2{,}0{,}2)$
- $(0{,}1;2{,}2{,}2)$

Además, sabemos que tiene un conjunto factible cerrado, acotado y no vacío:

Por otra parte, como la función objetivo es continua podemos aplicar el Teorema de Weirstrass y afirmar que existen máximos y mínimos globales a elegir entre los puntos de Kuhn-Tucker (sabemos que las funciones son suficientemente diferenciables y que no existen puntos no regulares).

Para ello podemos mirar los valores en la función objetivo:

$$(0,0;\ 0,0,0)\longmapsto F(0,0)=0$$
$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\ 1,0,0\right)\longmapsto F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$
$$(1,0;\ 2,0,2)\longmapsto F(1,0)=1$$
$$(0,1;\ 2,2,2)\longmapsto F(0,1)=1$$

Como estamos en las condiciones del Teorema de Weierstrass podemos mirar el que toma el menor valor y los que toman el mayor valor y afirmar que:

- El $(0,0)$ es el mínimo global
- El $(1,0)$ y el $(0{,}1)$ son máximos globales.
- Del punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ no podemos afirmar nada (podríamos intentar utilizar las condiciones de segundo orden, para saber si es un óptimo local, pero no es lo que nos pide el problema).

46. Una empresa desea maximizar los ingresos que obtiene con la exportación de sus dos productos a un país vecino. El precio unitario al que vende el primer producto a dicho país depende de la cantidad de toneladas (x) exportadas al mismo y adopta la siguiente expresión p_1=100-x, mientras que el precio por tonelada del segundo producto es constante e igual a p_2 =50. Determinar la cantidad de toneladas que debe exportar de cada producto teniendo en cuenta que el país vecino ha puesto la condición de que a la cantidad de importaciones de esa empresa no debe ser mayor que 30 toneladas. **Nota:** *Con respecto a las condiciones de no negatividad se conoce que el óptimo no satura la restricción $x \geq 0$, es decir, no es activa.*

Maximizar $(100-x)x+50y=-x^2+100x+50y$
Sujeto a:
$x+y \leq 30$
$x \geq 0$ (no activa)
$y \geq 0$

De forma equivalente tenemos:

Maximizar $-x^2+100x+50y$
Sujeto a:
$x+y \leq 30$
$-x \leq 0$ (no activa)
$-y \leq 0$

Maximizar $\mathcal{L}(x,y;\mu_1,\mu_2)=-x^2+100x+50y-\mu_1(x+y-30)-\mu_2(-y)$

Condiciones de Kuhn-Tucker (primer orden)

i)

$\mathcal{L}'_x(x,y;\mu_1,\mu_2)=-2x+100-\mu_1=0$ (1)

$\mathcal{L}'_y(x,y;\mu_1,\mu_2)=50-\mu_1+\mu_2=0$ (2)

ii)

$x+y \leq 30$ (3)

$x \geq 0$

$y \geq 0$

iii)

$\mu_1(x+y-30)=0$ (4)

$\mu_2(-y)=0$ (5)

iv) $\mu_1,\mu_2 \geq 0$ (candidato a máximo)

Si resolvemos las condiciones (se recomienda empezar por (4) y (5)) obtenemos los puntos de Kuhn-Tucker:
$(50{,}0;0,-50)$ $(25{,}5;50{,}0)$ $(30{,}0;40,-10)$

¿Cuáles son candidatos a máximo? $(25{,}5;50{,}0)$. ¿Por qué?

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana evaluada en el punto->resultado local)

$$H\mathcal{L}(25{,}5;50{,}0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= -2<0\\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}(25{,}5;50{,}0) \text{ semidefinida negativa} \Rightarrow \text{DUDA problema original.}$$

Condiciones de segundo orden (Hessiano Orlado->siempre resultado local)

$B = \begin{pmatrix} 0 & W \\ -W^t & H\mathcal{L} \end{pmatrix}$

$(25{,}5; 50{,}0)$ candidato a máximo y vemos que $\mu_1 \neq 0$ luego la primera restricción es activa:

$h(x,y) = x + y - 30 \leq 0 \Rightarrow W = (h'_x \quad h'_y) = (1 \quad 1)$

Luego la matriz Orlada (siempre en el punto correspondiente) nos queda:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N = 2$ variables y $q = 1$ restricciones activas⇒ únicamente tenemos que hacer $N - q = 1$ el menor principal mayor

$B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = -2 < 0 \Rightarrow H\mathcal{L}(25{,}5; 50{,}0)$ **restringida** es definida negativa⇒ $(25{,}5)$ es máximo local del problema condicionado.

¿Globalidad? *Teorema de Weierstrass o Matriz Hessiana*

Condiciones de segundo orden (Matriz Hessiana sin evaluar en el punto)

$H\mathcal{L}(x,y; 50{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{c} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \forall (x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow H\mathcal{L}(x,y; 50{,}0)$ semidefinida negativa $\forall (x,y)$ y $(25{,}5; 50{,}0)$ candidato a máximo ⇒ $(25{,}5)$ máximo global del problema original.

La cantidad de toneladas que debe exportar de primer producto es 25 y del segundo producto es 5 y el ingreso máximo en ese caso es de $I(25, 5)$ =2125 u.m.

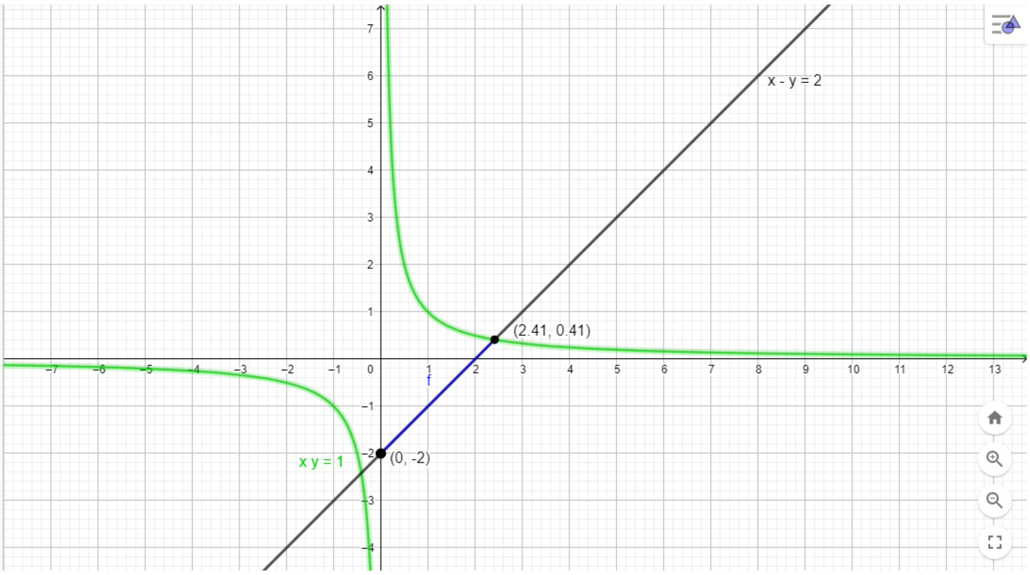
52. Sea el problema:

optimizar $\quad z = x + 4y$
sujeto a:
$x \cdot y \leq 1$
$x - y = 2$
$x \geq 0$

a) Escribir las condiciones de Kuhn- Tucker para este problema.
b) Sabiendo que se cumple la condición de regularidad, obtener todos los candidatos a óptimo.
c) Usando las condiciones de segundo orden identificar los máximos y mínimos locales del problema.
d) Sabiendo que la región factible es cerrada y acotada deducir si existen óptimos globales y en caso afirmativo identificarlos.

Como ayuda: si resuelves el problema obtendrás como puntos de K-T: $(0, -2)$ y $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$

Representando la región factible tenemos (en color azul):



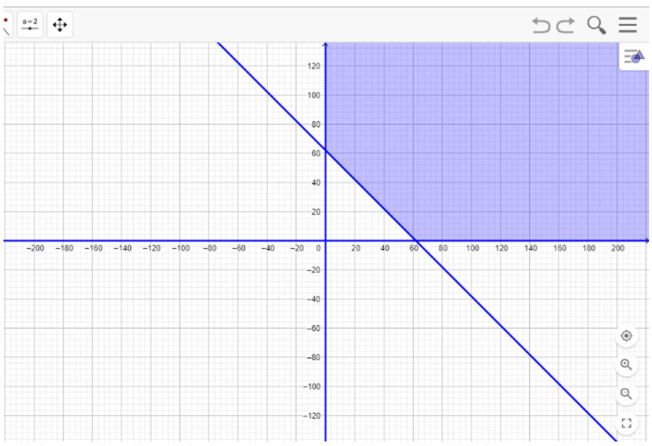
¿Se encuentra el problema en las condiciones del Teorema de Weierstrass?

55. La función de coste total de una empresa (en euros) depende de las cantidades producidas x e y de dos bienes, según la relación $C(x, y) = 18x^2 - xy + 12y^2$. Se sabe que la empresa debe producir como mínimo un total de 62 unidades semanales.
a) Plantea un modelo matemático que permita obtener la producción de mínimo coste que cumpla con los requisitos dados.
b) Sin resolver el modelo anterior, ¿es el conjunto factible acotado?; ¿se podría en consecuencia garantizar la existencia de óptimos (mínimo-máximo) globales?

El problema matemático que permite obtener la producción de mínimo coste es:

Minimizar $18x^2 - xy + 12y^2$
sujeto a: $x + y \geq 62$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Observando una parte de la representación gráfica del conjunto factible (situada a la derecha), ¿se encuentra el problema en las condiciones del Teorema de Weierstrass?



58. Un inversor dispone de 14.000 € para invertir en su totalidad en tres activos diferentes de alta rentabilidad. Sabe que si invierte x,y, z miles de € en cada uno, se espera una rentabilidad del 50%, del 100% y del 150%, respectivamente. Sin embargo, cada una de estas inversiones tiene un cierto riesgo, que viene dado por $R(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ (Se sabe que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad, por lo tanto no hace falta considerar $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

a) Encontrar cuánto debe invertir este individuo en cada uno de estos tres activos si desea minimizar el riesgo de esta operación y obtener una rentabilidad esperada de 15.000 €. **Sin emplear el método de sustitución,** ¿cuál es el riesgo que corre el inversor en esta situación?

b) Si el inversor está dudando si aumentar en 1000 € su presupuesto inversor ¿cuánto variará aproximadamente el riesgo mínimo en que se incurre? Responder sin resolver de nuevo el problema. Y si el inversor se plantea en cambio rebajar su expectativa de rentabilidad en 1000€ ¿cuánto variará aproximadamente el riesgo mínimo incurrido? En consecuencia, ¿qué le resultaría de menor riesgo al inversor, aumentar su presupuesto inversor en 1000 € o rebajar su expectativa de rentabilidad en 1000 €? Responder sin resolver de nuevo el problema.

---

a) Planteamiento:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } R(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \\ &\text{sujeto a :} \quad x + y + z = 14 \\ &\qquad\qquad\quad 0.5x + y + 1.5z = 15 \end{aligned}$$

El problema nos pide resolver el problema utilizando el Método de Lagrange:

Optimizar $\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - \lambda_1(x + y + z - 14) - \lambda_2(0.5x + y + 1.5z - 15)$

Condiciones necesarias de primer orden (puntos críticos)

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}'_x(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 4x - \lambda_1 - 0.5\lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_y(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \mathcal{L}'_z(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = 6z - \lambda_1 - 1.5\lambda_2 = 0 \\ x + y + z = 14 \\ 0.5x + y + 1.5z = 15 \end{array}\right\}$$

Como se puede observar, resulta un sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 4x - \lambda_1 - 0.5\lambda_2 = 0 \\ 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 6z - \lambda_1 - 1.5\lambda_2 = 0 \\ x + y + z = 14 \\ 0.5x + y + 1.5z = 15 \end{array}\right\}$$

Si lo resolvemos por el método de Gauss obtenemos como solución: $(x_0,y_0,z_0;\lambda_1,\lambda_2) = (2{,}8{,}4; 0{,}16)$

Condiciones suficientes de segundo orden (una opción: matriz Hessiana)

$$H\mathcal{L}(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $(2{,}8{,}4; 0{,}16)$ es punto crítico:

$$H\mathcal{L}(x,y,z;0{,}16) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0, \ \forall (x,y,z;0{,}16)$$

La matriz Hessiana es definida positiva $\forall (x,y,z;0{,}16)$, entonces $(2{,}8{,}4;0{,}16)$ es el **único mínimo global** del problema condicionado original.

b) $x + y + z = 14 \to x + y + z = 15 \to \Delta k_1 = 1$

$$R^*_{\min} - R_{\min} \approx \lambda_1 \cdot \Delta k_1 \approx 0$$

$0.5x + y + 1.5z = 15 \to 0.5x + y + 1.5z = 14 \to \Delta k_2 = -1$

$$R^*_{\min} - R_{\min} \approx \lambda_2 \cdot \Delta k_2 \approx -16$$

Por tanto, será mejor rebajar la expectativa de rentabilidad.

64. La empresa *Rochas* produce el perfume *Rose Belle*. Este perfume requiere de químicos y trabajo para su producción. El proceso productivo puede realizarse mediante dos procesos distintos. El proceso A utiliza 1 unidad de trabajo y 2 unidades de químico para obtener 3 botellitas de perfume. El proceso B requiere 2 unidades de trabajo y 3 unidades de químico para producir 5 botellitas de perfume. Cada unidad de trabajo le cuesta a *Rochas* 10€ y cada unidad de químico le cuesta 15€, contando con una disponibilidad máxima de 200 unidades de trabajo y un máximo de 350 unidades de químico para este periodo de planificación. Debido a problemas de almacenamiento, la producción de *Rose Belle* no debe superar la demanda esperada. En ausencia de publicidad, *Rochas* se plantea dos opciones:

a) Considerar que puede vender un máximo de 1000 botellitas de perfume a un precio unitario de 30€. Para estimular la demanda de ese perfume *Rochas* puede contratar una modelo famosa a quien se le pagará 500€ la hora, hasta un máximo de 25 horas. Se estima que cada hora que la modelo trabaje para la empresa incrementará la demanda de *Rose Belle* en 200 botellitas.

b) Considerar que puede vender un máximo de 390 botellitas de perfume a un precio unitario de 30€. Para estimular la demanda de ese perfume *Rochas* puede contratar una modelo famosa a quien se le pagará 500€ la hora, hasta un máximo de 25 horas. Se estima que cada hora que la modelo trabaje para la empresa incrementará la demanda de *Rose Belle* en 40 botellitas.

Formula un modelo de optimización para cada opción que ayude a la empresa a decidir su estrategia.

---

x =número de veces que se utiliza el proceso A

y =número de veces que se utiliza el proceso B

z =número de horas de modelo contratadas

a) Maximizar $30(3x+5y)-10(x+2y)-15(2x+3y)-500z=50x+85y-500z$

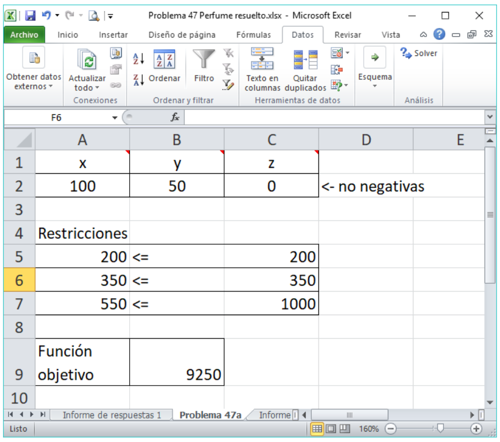
Sujeto a:

$x+2y\leq 200$

$2x+3y\leq 350$

$3x+5y\leq 1000+200z$

$x,y,z\geq 0$



	A	B	C	D
1	x	y	z	
2	100	50	0	<- no negativas
3				
4	Restricciones			
5	200	<=	200	
6	350	<=	350	
7	550	<=	1000	
8				
9	Función objetivo	9250		

b) Maximizar $30(3x+5y)-10(x+2y)-15(2x+3y)-500z=50x+85y-500z$

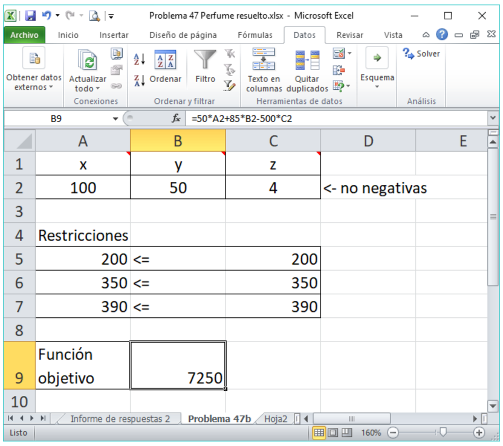
Sujeto a:

$x+2y\leq 200$

$2x+3y\leq 350$

$3x+5y\leq 390+40z$

$x,y,z\geq 0$



=50*A2+85*B2-500*C2

	A	B	C	D
1	x	y	z	
2	100	50	4	<- no negativas
3				
4	Restricciones			
5	200	<=	200	
6	350	<=	350	
7	390	<=	390	
8				
9	Función objetivo	7250		