



**Universidad
de La Laguna**

Máster Universitario en Modelización e
Investigación Matemática, Estadística y
Computación 2020/2021

Trabajo Fin de Máster

**Operadores Integrodiferenciales
y Aplicaciones**

Autor: Francisco Javier Reyes Sánchez

Tutora: Dra. Begoña Barrios Barrera

San Cristóbal de La Laguna, a 6 de septiembre de 2021

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Abstract	VI
1 Introducción	1
2 El operador Laplaciano fraccionario	5
2.1 Caminos aleatorios y núcleos integrales	5
2.2 Núcleos y símbolos de Fourier	10
2.3 El operador Laplaciano fraccionario	11
2.4 Relación con la ecuación del calor	13
2.5 Algunas propiedades básicas del operador Laplaciano fraccionario .	15
2.6 Discretización del operador	22
3 Problema de extensión del operador Laplaciano fraccionario	28
3.1 Introducción al problema	28
3.2 Núcleo de Poisson	30
3.3 Relación con el Laplaciano fraccionario	33
4 Problema del Obstáculo	35
4.1 Breve incursión en el Cálculo de Variaciones	38
4.1.1 Derivada débil	38
4.1.2 Espacios de Sobolev	39
4.1.3 El espacio H^s y el operador Laplaciano fraccionario	45
4.2 Construcción de la solución	47
4.2.1 Existencia y unicidad	47
4.2.2 Continuidad	50
4.3 Discretización del problema	58
5 Conclusiones	61
A Espacios funcionales	63
A.1 Espacios de Schwartz	63
A.2 Espacios de Hölder	64

B Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales	68
B.1 La ecuación de Laplace	68
B.1.1 Solución Fundamental de la ecuación de Laplace	68
B.2 La ecuación del calor	69
B.2.1 Solución Fundamental de la ecuación del calor	69
B.2.2 Semigrupo del calor	72
C Conceptos del Análisis de Fourier	73
C.1 Igualdad de Parseval e identidad de Plancherel	73
C.2 Núcleos de sumabilidad	75
D Códigos	77
D.1 Funciones F, G y sus derivadas	77
D.2 Funciones peso	78
D.3 Discretización del operador Laplaciano Fraccionario	78
D.4 Problema del obstáculo	79

Índice de figuras

1.1	Movimiento Browniano.	2
2.1	Vuelo de Levy.	6
2.2	Discretización de $(-\Delta)^s u(x)$ con w^T	26
3.1	Proyección de la solución del problema de extensión.	29
3.2	Problema de extensión para el Laplaciano fraccionario.	33
4.1	Diagrama problema del obstáculo.	35
4.2	Esquema de la free boundary.	38
4.3	Función $\Gamma_\lambda(x)$	51
4.4	Conjuntos Ω y Ω_0	55
4.5	Aproximación a la solución problema de obstáculo.	59

Agradecimientos

Especialmente a mi tutora, la Doctora Begoña Barrios Barrera, por su guía, tiempo y dedicación en el desarrollo de esta memoria. Así como su consejo a lo largo de este año.

A mi familia y amigos, por su constante apoyo y cariño.

Resumen

Las ecuaciones integro-diferenciales reciben su nombre porque involucran operadores integrales que son generadores de operadores diferenciales. Este tipo de ecuaciones se encuentran de manera natural en nuestro entorno y con ellas se modelan muchos fenómenos de la naturaleza. Además, dada la no localidad de estos operadores, tienen una conexión directa con los procesos estocásticos con saltos. Estos últimos, cuya enorme utilidad radica en la capacidad de modelar el comportamiento futuro, son de gran interés en finanzas, física o ingeniería.

En este trabajo estudiamos de manera particular el operador Laplaciano fraccionario, considerado el ejemplo canónico de operador integro-diferencial. La no localidad del operador es su característica principal y repercute en las numerosas propiedades y características que derivaremos. Destacaremos, de forma especial, la propiedad de extensión de Caffarelli y Silvestre que ayuda en muchos casos a solventar el “problema” de la no localidad.

Por último, prestaremos especial interés al ejemplo clásico de problema de frontera libre: el Problema del Obstáculo. Abordaremos el caso no local y probaremos la existencia y unicidad de su solución, así como un primer resultado de regularidad, siendo necesario contextualizar el problema y presentar la base matemática teórica necesaria, la cual se engloba dentro del Cálculo de Variaciones. Se complementa este estudio con una simulación numérica del mismo para un obstáculo particular.

Abstract

Integro-differential equations get their name because they involve integral operators that are generators of differential operators. This type of equation appears naturally in our environment, for example in the migratory movement of certain species of birds. In addition, given the non-locality of these operators, there is a direct connection between them and stochastic processes. These processes, whose enormous utility lies in the ability to model the future behavior, are of great interest in finance, physics or engineering.

In this work we study the fractional Laplacian operator, considering the canonical example of non-local integro-differential operators and fractional diffusions. The non-locality of the operator is its main characteristic and affects numerous properties that we derive. We will especially highlight, the extension property of Caffarelli and Silvestre that helps in many cases to solve the “problem” of the non-locality.

Finally, we pay special attention to the classic example of a free boundary problem: the Obstacle Problem. We will study the non-local case and we will prove the existence and uniqueness of its solution, as well as a first result of regularity, for which it will be necessary that we contextualize the problem and present the necessary theoretical mathematical basis, which is included within the Calculus of Variations. This study is complemented with a numerical simulation of the problem with a particular obstacle.

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo pretende ser un primer acercamiento a la teoría que estudia los operadores integro-diferenciales y sus aplicaciones. Las integrales singulares y los operadores no locales (especialmente los fraccionarios) se empezaron a estudiar en los años 70 por lo que son un tema clásico en el análisis armónico [23], la teoría de operadores [29] y la probabilidad [25]. Pero no es hasta los comienzos de la pasada década cuando (debido principalmente a sus conexiones con numerosos fenómenos del mundo real) se retoma el interés en ellos y en desarrollar una teoría completa de las ecuaciones que los involucran. En efecto, los operadores no locales surgen en una infinidad de problemas de relevante importancia, en investigación matemática podemos encontrarlos en problemas de frontera libre clásicos como el problema de Signorini [7] o el problema del obstáculo, para el que reservamos el último capítulo de este trabajo. Desde un punto de vista probabilístico, los operadores integro-diferenciales están relacionados con los procesos de Lévy, cuyo caso más simple es el Movimiento Browniano (ver Figura 1.1). En otros fenómenos de la naturaleza aparecen por ejemplo en el movimiento migratorio de grandes aves [31] o en los patrones de caza de depredadores marinos como tiburones, atunes, marlines o peces luna [21]. En ecología brindan una base matemática rigurosa que permite separar comportamientos evolucionados e innatos de las influencias ambientales, y esto a su vez ayuda a estudiar la eficiencia de la búsqueda de recursos en entornos inciertos [27]. En física aparecen, por ejemplo, en el estudio de la mecánica de fluidos [34] y en finanzas, como veremos algo más en detalle, juegan un papel fundamental en la valoración de derivados.

En la actualidad el desarrollo de esta teoría conforma una rama de investigación matemática muy activa y consolidada, dentro de la cual se considera al Dr. Luis Caffarelli, Premio Wolf 2012, Universidad de Austin (Texas), y al Dr. Alessio Figalli, Medalla Fields 2018, ETH (Zürich), como sus referentes. A principios de los 2000, el primer autor, comenzó a desarrollar dicha teoría con herramientas analíticas, y sus resultados son muy valorados por cualquier especialista en Análisis Matemático y Ecuaciones en Derivadas Parciales.

En la primera sección del Capítulo 2 aprovecharemos la relación comentada con la teoría de la probabilidad para describir en detalle cómo a partir un problema físico-probabilístico, que podemos modelizar mediante un vuelo de Lévy, aflora un

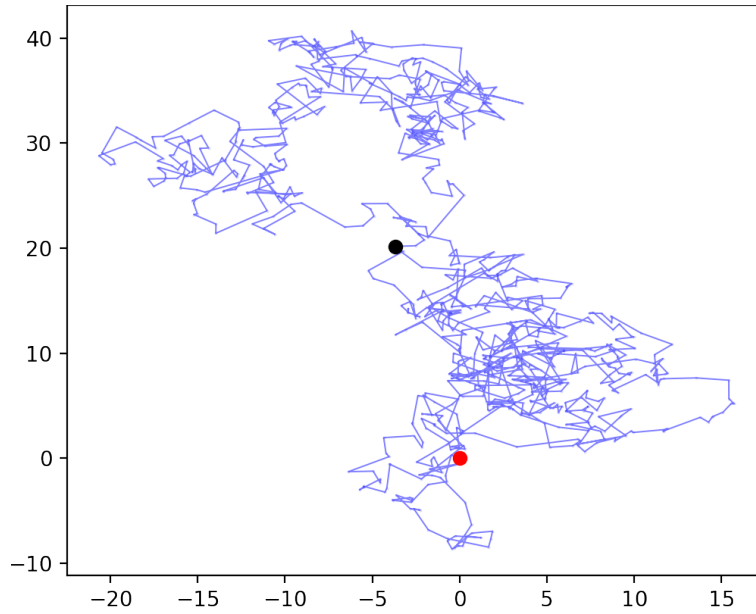


Figura 1.1: Movimiento Browniano.

núcleo integral singular. Posteriormente explicamos cómo podemos representar este núcleo singular mediante su símbolo de Fourier, lo cual nos llevará de forma natural hacia el ejemplo canónico de operador integro-diferencial no local, el Laplaciano fraccionario definido como la siguiente integral singular con valor principal

$$(-\Delta)^s u(x) := \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \text{VP} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy \quad s \in (0, 1), \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{A}(n, s)$ es una constante de normalización cuyo valor se detalla en las primeras secciones de esta memoria. El objetivo final del capítulo es el estudio de este operador, deducir y probar algunas de sus definiciones equivalentes y propiedades fundamentales como son: la propiedad de semigrupo, la de homogeneidad, su comportamiento con los espacio de regularidad Hölder C^α , su signo en puntos de máximo o mínimo, el principio de comparación y el principio (débil y fuerte) del máximo. Cerraremos el capítulo presentando, con referencia a las pruebas de convergencia y estabilidad, un método numérico basado en diferencias finitas que nos permitirá discretizar el operador (1.1) y que será fundamental para la última sección de este trabajo.

El Capítulo 3 está enfocado en la presentación de una herramienta analítica moderna comúnmente llamada extensión de Caffarelli y Silvestre para (1.1), en honor a los autores que la dieron a conocer en 2007, (ver [11]). La extraordinaria utilidad de esta técnica radica en que nos permite pasar de un problema no local a uno local “pagando” con tener que aumentar una dimensión el espacio de estudio. De manera esquemática, esto supone que si tenemos una función

$$u^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

que resuelve el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_x u^* + \frac{1-2s}{y} u_y^* + u_{yy}^* = 0, & x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \\ u^*(x, 0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Demostremos que una perturbación de la derivada normal de u^* nos proporciona, salvo constante, el valor del operador Laplaciano fraccionario de su traza; es decir

$$(-\Delta)^s u(x) \approx \lim_{y \rightarrow 0} y^{1-2s} u_y^*(x, y). \quad (1.3)$$

Lo fundamental detrás del desarrollo que veremos es que los autores pensaron en (1.2) como la extensión armónica de u en $2 - 2s$ dimensiones más, por este motivo es habitual encontrar que algunos artículos en lugar de nombrarla como extensión de Caffarelli y Silvestre, utilizan el término extensión s -armónica. A partir de la idea anterior, usando un argumento de conjugación y una elegante determinación del núcleo de Poisson, estableceremos la solución fundamental del problema (1.2).

Por último, una buena parte de esta memoria está dedicada al Capítulo 4, donde nos centraremos en el ya mencionado problema del obstáculo no local que, como veremos, está muy relacionado con matemática financiera. Estudiaremos las propiedades de un funcional de energía bajo ciertas restricciones de regularidad. En un primer lugar presentaremos el problema clásico, cuando el operador es el Laplaciano, cuyo funcional Dirichlet asociado está definido como

$$\mathcal{D}(u) = \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Dedicaremos gran parte del capítulo a estudiar el caso no local. Para ello será necesario introducir brevemente algunos conceptos fundamentales del Cálculo de Variaciones, teoría en la que han trabajado algunos de los mejores matemáticos del siglo XIX y XX, como E. de Giorgi, premio Wolf en 1990, que resolvió el 19º problema de Hilbert de manera completamente independiente a J. Nash. Veremos que el problema del obstáculo fraccionario tiene solución tras estudiar ciertas características del funcional de energía no local

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy,$$

donde $u \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$, siendo $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev fraccionario que se estudiará en detalle en dicho capítulo. Motivados por el resultado clásico de Luis Caffarelli [8] que probó que si trabajamos dentro del conjunto cerrado y convexo $K = \{u \in H^1(\mathcal{D}) : u|_{\partial\mathcal{D}} = f(x), u \geq \varphi\}$, la solución del problema del obstáculo local es única, demostraremos que dentro del conjunto cerrado y convexo $M = \{w \in H_0^s(\mathbb{R}^n) : w \geq \varphi \text{ en } \mathbb{R}^n\}$, la solución del problema no local existe y es única. Por último nos extenderemos en probar con detalle la continuidad de dicha solución, propiedad que requerirá el uso de varias herramientas analíticas de manera cuidadosa.

Finalmente se plantea un esquema iterativo que aprovecha la discretización vista en el Capítulo 2 para abordar numéricamente el problema del obstáculo fraccionario, el cuál consideramos que, además de ser de interés teórico, podría tener aplicabilidad al mundo de la matemática financiera. Dicho método numérico se implementa en Python cuyos códigos se muestran en el Anexo D por completitud de esta memoria.

Comentamos además que, a lo largo de este trabajo se incluyen distintas figuras originales, con las que se pretende mejorar la comprensión de los conceptos estudiados y los resultados obtenidos.

Capítulo 2

El operador Laplaciano fraccionario

La importancia de los núcleos integrales, o kernels integrales (K), es de sobra conocida, ya que son las funciones que caracterizan a una transformada integral. Por ejemplo, en el caso de la transformada de Fourier $K = e^{iwt}/\sqrt{2\pi}$ nos permite transformar señales entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.

$$T(f(t)) = \int K \cdot f(t)dt.$$

El objetivo de este primer apartado es presentar la estrecha relación que podemos encontrar entre los paseos aleatorios con saltos arbitrarios y los operadores integrales con núcleos integrales singulares [30]. Además estudiaremos algunas propiedades del ejemplo canónico de este tipo de operador que serán cruciales para el desarrollo de los siguientes capítulos de esta memoria. La mayoría de estos resultados pueden encontrarse en [6, 14, 28, 35].

2.1 Caminos aleatorios y núcleos integrales

Dado que trabajaremos en un contexto físico-aleatorio, será necesario definir la longitud del salto de nuestra partícula, así como las dos funciones de probabilidad, dependientes del tiempo e independientes entre sí, que recogen la expectativa de posición y de dirección de salto respectivamente.

Para comenzar, tomemos una función par $K : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$,

$$K(y) = K(-y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

que es núcleo de sumabilidad en \mathbb{Z}^n , esto es,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} K(k) = 1. \tag{2.1}$$

Además, fijemos una longitud de salto $h > 0$ y consideremos el camino aleatorio discreto cuyos nodos viven en la cuadrícula $h\mathbb{Z}^n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en cualquier instante de tiempo τ , la partícula puede saltar

de un punto cualquiera de $h\mathbb{Z}^n$ a otro punto de la misma malla y podemos asociar a este fenómeno una probabilidad. De este modo, la probabilidad de que una partícula salte de $hk \in h\mathbb{Z}^n$ a $h\tilde{k} \in h\mathbb{Z}^n$ se puede tomar como

$$K(k - \tilde{k}) = K(\tilde{k} - k).$$

Es importante recalcar que, como se verá analíticamente más adelante, el camino que hemos definido, al contrario que el paseo aleatorio estándar, puede realizar de manera ocasional (con reducida probabilidad) grandes saltos (veáse la Figura 2.1, nótese la escala y frecuencia de saltos en contraposición a la Figura 1.1).

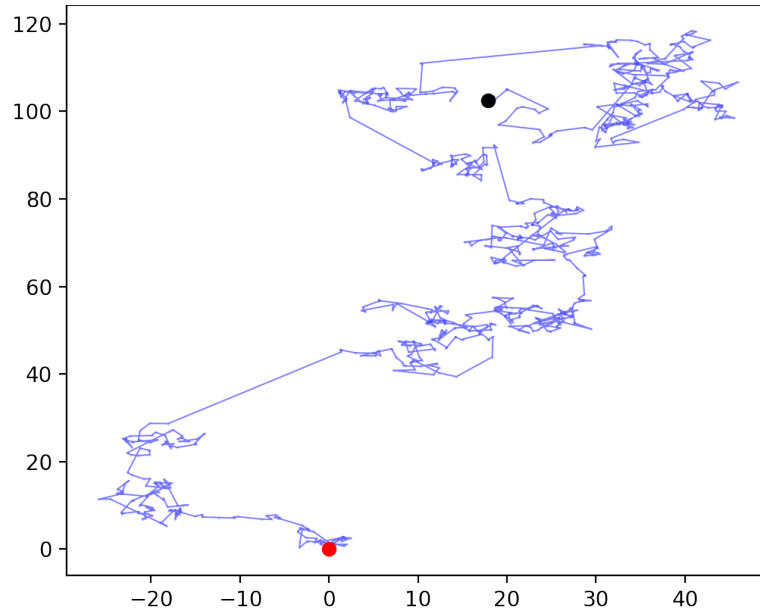


Figura 2.1: Vuelo de Levy.

Por otro lado, la partícula puede encontrarse en cualquier punto de la malla, por lo que necesariamente debemos asociar una probabilidad a dicha posición. Por ello, llamaremos $u(x, t)$ a la probabilidad de que nuestra partícula esté en $x \in h\mathbb{Z}^n$ en el instante $t \in \tau\mathbb{Z}^n$. De este modo, $u(x, t + \tau)$ denota la suma de probabilidades de las posibles posiciones $x + hk$ en las que la partícula puede estar en el tiempo t ponderadas por la probabilidad de saltar de $x + hk$ a x , esto es,

$$u(x, t + \tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} K(k)u(x + hk, t).$$

Además, por (2.1)

$$u(x, t + \tau) - u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} K(k)(u(x + hk, t) - u(x, t)) \quad (2.2)$$

Es interesante estudiar el proceso aleatorio descrito anteriormente fijando la unidad de tiempo $\tau = h^{2s}$ y tomando K el núcleo homogéneo definido como

$$K(y) = \begin{cases} \frac{C(n, s)}{|y|^{n+2s}}, & y \neq 0, s \in (0, 1), \\ 0, & y = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde $C(n, s)$ denota la constante

$$C(n, s) = \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{-(n+2s)}}.$$

Tal y como lo hemos definido, es claro que $\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} K(y) = 1$ y además se tiene que, para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{K(y)}{\tau} &= \frac{C(n, s)}{h^{2s}|y|^{n+2s}}, \\ h^n K(hy) &= h^n \frac{C(n, s)}{|hy|^{n+2s}} = \frac{C(n, s)}{h^{2s}|y|^{n+2s}}. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos la siguiente igualdad,

$$\frac{K(y)}{\tau} = h^n K(hy). \quad (2.4)$$

Usando la equivalencia anterior, y de (2.2), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{K(k)}{\tau} (u(x + hk, t) - u(x, t)) \\ &= h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} K(hk) (u(x + hk, t) - u(x, t)) \\ &= h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Psi(hk, x, t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo $\Psi(y, x, t) = K(y)(u(x + y, t) - u(x, t))$.

Observemos que, en (2.5) el término de la izquierda se asemeja a un cociente incremental mientras que el de la derecha parece ser una suma de Riemann, este hecho nos lleva a tomar límites cuando $\tau = h^{2s} \rightarrow 0^+$. Es decir, cuando la unidad temporal se hace infinitamente pequeña tenemos que

$$\partial_t u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(y, x, t) dy,$$

esto es,

$$\partial_t u(x, t) = C(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x + y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy. \quad (2.6)$$

Nótese que, hemos partido de un camino aleatorio que puede experimentar saltos arbitrarios, siendo la probabilidad de dar saltos pequeños mayor que la de observar saltos grandes, y al centrarnos en el estudio de su límite hemos obtenido una

integral singular, en $y = 0$, con un núcleo homogéneo y par.

Nos centramos ahora en estudiar si dicha integral singular está bien definida, hecho que será crucial para el correcto desarrollo de esta memoria. Lo primero que observamos es que, a pesar de la singularidad, cuando $s \in (0, 1)$ y u es suficientemente buena, suave y acotada, la integral en (2.6) está bien definida como valor principal cerca del origen, esto es,

$$VP \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

En efecto, nótese que si $y \neq 0$, $\frac{1}{|y|^{n+2s}} \in \mathcal{C}^\infty$ y

$$\int_{B_r} \frac{\nabla u(x, t) \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy = 0, \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

dado que se está integrando el gradiente de u contra una función impar en un dominio de integración simétrico alrededor del origen.

Por ese motivo, podemos escribir la integral singular de (2.6), como valor principal cerca del cero ya que

$$VP \int_{B_1} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy = VP \int_{B_1} \frac{u(x+y) - u(x) - \nabla u(x)y}{|y|^{n+2s}},$$

es convergente. En efecto, aplicando el Teorema del Valor Medio con respecto a la variable espacial en dos ocasiones, podemos acotar el numerador,

$$\begin{aligned} |u(x+y, t) - u(x, t) - \nabla u(x, t)y| &\leq |\nabla u(w, t)y - \nabla u(x, t)y| \\ &\leq |\nabla u(w, t) - \nabla u(x, t)| \cdot |y| \\ &\leq |\mathcal{H}u(z, t)| \cdot |y|^2 \\ &\leq \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \cdot |y|^2, \quad w, z \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Siendo \mathcal{H} la matriz Hessiana usual,

$$\mathcal{H}(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el integrando queda acotado por

$$\begin{aligned} I_1 = VP \int_{B_1} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy &\leq \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_{B_1} \frac{dy}{|y|^{n-2+2s}} \\ &= \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n-1} d\rho}{|\rho|^{n-2+2s}} \\ &= \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_0^1 \frac{d\rho}{|\rho|^{2s-1}} < \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, es claro que por ser una función acotada y $2s > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} \frac{dy}{|y|^{n+2s}} \\
 &= \int_1^\infty \frac{\rho^{n-1} d\rho}{|\rho|^{n+2s}} \\
 &= \int_1^\infty \frac{d\rho}{|\rho|^{2s+1}} < \infty.
 \end{aligned}$$

Luego la integral en (2.6)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy = I_1 + I_2,$$

está bien definida.

Aunque ya hemos visto que la integral en (2.6) está bien definida como valor principal, si por ejemplo $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es también interesante escribir la integral de (2.6) como un cociente diferencial de segundo orden, ya que esto nos permite quitar el valor principal de la definición de la integral. Para ello debemos observar que, tomando $\tilde{y} = -y$ tenemos que (2.6) equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x - \tilde{y}) - u(x)}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y}, \quad (2.7)$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x+y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) + u(x-y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es decir, podemos escribir la integral regular de (2.6) como la mitad del cociente diferencial de segundo orden $u(x+y) - u(x-y) - 2u(x)$ factorizado por el núcleo definido en (2.3). Cabe mencionar que esta representación nos permite dar sentido a la integral a pesar de su singularidad en el cero, ya que aplicando el desarrollo de Taylor hasta orden 2 tenemos

$$\begin{aligned}
 u(x) &\approx u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^T \mathcal{H}u(0) x \\
 u(x+y) &\approx u(0) + \nabla u(0) \cdot (x+y) + \frac{1}{2} (x+y)^T \mathcal{H}u(0) (x+y) \\
 u(x-y) &\approx u(0) + \nabla u(0) \cdot (x-y) + \frac{1}{2} (x-y)^T \mathcal{H}u(0) (x-y).
 \end{aligned}$$

Por lo que es claro que

$$\left| \frac{u(x+y, t) + u(x-y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} \right| \leq \frac{\|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \cdot |y|^2}{|y|^{n+2s}} \leq \frac{\|\mathcal{H}u\|_{L^\infty}}{|y|^{n-2+2s}},$$

teniéndose así que, si por ejemplo $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, (2.8) es integrable cerca del origen.

Concluimos de este modo que,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= C(n, s) \cdot VP \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) - u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{C(n, s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y, t) + u(x-y, t) - 2u(x, t)}{|y|^{n+2s}} dy, \end{aligned}$$

con $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Núcleos y símbolos de Fourier

En este apartado veremos cómo representar el núcleo integral visto antes en términos de los símbolos de Fourier. Como hemos hecho hasta ahora, tomemos una función u suficientemente buena, digamos $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, el camino aleatorio con saltos de longitud arbitraria que estudiamos en la anterior sección nos ha llevado a considerar integrales de la forma

$$\mathcal{L}u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy, \quad (2.9)$$

siendo \mathcal{L} un operador lineal, por lo que tiene perfecto sentido buscar su símbolo de Fourier. Esto es, si definimos la transformada de Fourier de u como

$$\mathcal{F}[u](w) \equiv \widehat{u}(w) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iwx} u(x) dx,$$

buscamos la función Φ que satisface la expresión

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}^{-1}(\Phi(\mathcal{F}u)) \iff \mathcal{F}(\mathcal{L}u) = \Phi(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi), \quad (2.10)$$

con $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Luego,

$$\begin{aligned} \Phi(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) &= \mathcal{F} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)) K(y) dy \right) (\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))(\xi)) K(y) dy, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el Teorema de Fubini-Tonelli en la segunda igualdad.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x+y)](w) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw(x+y)} u(x) dx = \frac{e^{-iwy}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw(x)} u(x) dx \\ &= e^{-iwy} \mathcal{F}[u(x)](w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x-y)](w) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw(x-y)} u(x) dx = \frac{e^{iwy}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw(x)} u(x) dx \\ &= e^{iwy} \mathcal{F}[u(x)](w), \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(\xi)(\mathcal{F}u)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\xi y} + e^{-i\xi y} - 2)(\mathcal{F}u)(\xi)K(y)dy \\ &= (\mathcal{F}u)(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} (2 \cos(\xi y) - 2)K(y)dy \\ &= 2(\mathcal{F}u)(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(\xi y) - 1)K(y)dy\end{aligned}$$

Se concluye así que

$$\Phi(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} (\cos(\xi y) - 1) K(y)dy < 0. \quad (2.11)$$

2.3 El operador Laplaciano fraccionario

El hecho de haber encontrado el multiplicador de Fourier del operador integro diferencial nos permitirá relacionar $\partial_t u$ con el llamado operador Laplaciano fraccionario, que se puede introducir de manera natural en el contexto del análisis de Fourier. En efecto, como

$$\partial_j u = \mathcal{F}^{-1} (i\xi_j(\mathcal{F}u)),$$

es claro que,

$$-\Delta u(x) := - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^2(\mathcal{F}u))(x), \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n$$

de lo que, de manera natural

Definición 2.1 Sean $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, 1)$. Definimos el operador Laplaciano fraccionario en \mathbb{R}^n como

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u))(x). \quad (2.12)$$

Una vez hemos dado una primera definición para el operador Laplaciano fraccionario, veamos su relación con los operadores integrales singulares. Con este objetivo, comencemos probando que el símbolo de Fourier del operador integral visto en (2.6) es, salvo una constante que debemos determinar (ver (2.15)), el mismo que el de $(-\Delta)^s$. Esto es,

$$|\xi|^{2s} = \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi y)}{|y|^{n+2s}} dy. \quad (2.13)$$

Para ello consideremos la función

$$\mathcal{J}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi y)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

y demostraremos en primer lugar que es rotacionalmente invariante, esto es

$$\mathcal{J}(\xi) = \mathcal{J}(|\xi|e_1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Para $n = 1$, el dominio de la integral anterior es la recta real y, dado que el coseno es una función par, es trivial que $\mathcal{J}(\xi) = \mathcal{J}(-\xi)$. Si $n \geq 2$, tomemos una rotación \mathcal{R} para la cual

$$\mathcal{R}(|\xi|e_1) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

y denotemos por \mathcal{R}^T su transpuesta. Luego, sustituyendo $\tilde{y} = \mathcal{R}^T y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\mathcal{R}(|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot (\mathcal{R}^T y))}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos((|\xi|e_1) \cdot \tilde{y})}{|\tilde{y}|^{n+2s}} d\tilde{y} \\ &= \mathcal{J}(|\xi|e_1), \end{aligned}$$

como queríamos ver. Por otro lado, obsérvese que, si $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{|\zeta_1|^2}{|\zeta|^{n+2s}} \leq \frac{1}{|\zeta|^{n-2+2s}}$$

cerca de $\zeta = 0$, luego la integral

$$\mathcal{A}(n, s) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta \quad (2.15)$$

es finita y positiva.

Como consecuencia de (2.14), (2.15) y sustituyendo $\zeta = |\xi|y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\xi) &= \mathcal{J}(|\xi|e_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi y_1)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\frac{\zeta}{|\xi}|^{n+2s}} d\zeta \\ &= |\xi|^{2s} \mathcal{A}(n, s). \end{aligned}$$

Queda probado así (2.13), es decir

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u)(\xi) = \left(\frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi y)}{|y|^{n+2s}} dy \right) (\mathcal{F}u)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, tomando $K(y) = \frac{1}{|y|^{n+2s}}$ en (2.9) y según lo visto al final de la sección anterior ((2.10)-(2.11)), tenemos que

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s u)(\xi) = -\frac{1}{2\mathcal{A}(n, s)} \mathcal{F} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right) (\xi).$$

De donde, por (2.8) concluimos que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u &= \frac{1}{2\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Concluimos la sección afirmando entonces que, por (2.6)

$$\partial_t u(x, t) = -C(n, s)\mathcal{A}(n, s)(-\Delta)^s u(x, t), \quad (2.17)$$

esto es, la densidad de probabilidad de un camino aleatorio con saltos en todo el espacio viene dada en términos del operador no local $(-\Delta)^s$.

2.4 Relación con la ecuación del calor

Hasta el momento no nos hemos parado a estudiar el valor de la constante $\mathcal{A}(n, s)$, en esta sección veremos que éste se puede derivar de la estrecha relación entre el operador Laplaciano fraccionario y la ecuación del calor. Comenzamos recordando la siguiente propiedad de la función Gamma.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.18)$$

Sea $\lambda > 0$, aplicando integración por partes a la propia definición se tiene que

$$\begin{aligned} -s\Gamma(-s) &= \Gamma(1-s) \\ &= \int_0^{+\infty} \tau^{-s} e^{-\tau} d\tau \\ &= - \int_0^{+\infty} \tau^{-s} \frac{d}{d\tau} (e^{-\tau} - 1) d\tau \\ &= -s \int_0^{+\infty} \tau^{-s-1} (e^{-\tau} - 1) d\tau \\ &\stackrel{\tau \equiv \lambda t}{=} -s\lambda^{-s} \int_0^{+\infty} t^{-s-1} (e^{-\lambda t} - 1) dt, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\lambda^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty t^{-s-1} (e^{-\lambda t} - 1) dt. \quad (2.19)$$

La arbitrariedad de λ nos induce, al tomar formalmente $\lambda = -\Delta$, a la siguiente definición del Laplaciano fraccionario en términos de la solución de la ecuación clásica del calor (ver (B.6)).

Lema 2.2 (*Definición de Bochner, [22]*). Sean $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < s < 1$, el operador Laplaciano fraccionario puede definirse como

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty (e^{-t(-\Delta)} u(x) - u(x)) \frac{dt}{t^{1+s}}, \quad (2.20)$$

donde $e^{-t(-\Delta)}$ denota al clásico semigrupo del calor generado por $-\Delta$ (ver (B.2.2)).

Demostración: Veamos en primer lugar, utilizando la transformada de Fourier, que la integral anterior está acotada, En efecto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |e^{-t(-\Delta)}u(x) - u(x)| \frac{dt}{t^{1+s}} &\leq \mathcal{C}_{n,s} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |(e^{-t|\xi|^2} - 1)\widehat{u}(\xi)e^{ix\xi}| d\xi \frac{dt}{t^{1+s}} \\ &\stackrel{t=\frac{w}{|\xi|^2}}{=} \mathcal{C}_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |e^{-w} - 1| |\widehat{u}(\xi)| |\xi|^{2s} \frac{dw}{w^{1+s}} d\xi \\ &= \mathcal{C}_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)| |\xi|^{2s} d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Repitiendo entonces los cálculos anteriores en (2.19), por el Teorema de Fubini, la expresión de la función Gamma $\Gamma(-s) = \int_0^{+\infty} \tau^{-s-1}(e^{-\tau} - 1)d\tau$ y por (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^\infty (e^{-t(-\Delta)}u(x) - u(x)) \frac{dt}{t^{1+s}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi) |\xi|^{2s} e^{-ix\xi} d\xi \\ &= (-\Delta)^s u(x). \end{aligned}$$

□

Realizando a continuación un estudio detallado de la expresión (2.20) encontraremos un valor explícito para la constante $\mathcal{A}(n, s)$ dada en (2.15). Para ello tomemos una función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\widehat{V(x, t)}(\xi) := e^{-|\xi|^2 t} \widehat{u}(\xi). \quad (2.21)$$

De esta definición es claro que

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{V(x, t)}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{V(x, t)}(\xi) \\ \widehat{V(x, 0)}(\xi) = \widehat{u}(\xi) \end{cases} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} \partial_t V(x, t) = \Delta V(x, t), \\ V(x, 0) = u(x). \end{cases} \quad (2.22)$$

Lo que nos permite afirmar que, siguiendo la notación de semigrupos, $V(x, t) := e^{-t(-\Delta)}u(x)$ es la solución del problema de Cauchy de la ecuación del calor con dato inicial $u(x)$ planteado en (2.22).

Sabemos (ver (B.15)) que

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) u(x - y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} u(x - y) dy, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde Φ es el núcleo de Gauss (ver (B.11)).

De (2.16) y usando la propiedad (B.10) de Φ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} t^{-s-1}(V(x, t) - u(x))dt &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t^{-s-1}E(y, t) (u(x - y) - u(x)) dydt \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{-s-1}e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} (u(x - y) - u(x)) dydt \\
 &\stackrel{\tau=\frac{|y|^2}{4t}}{=} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau^{n/2}(4\tau)^{s+1} (u(x - y) - u(x))}{4\tau^2(\pi|y|^2)^{n/2}|y|^{2s}e^\tau} dyd\tau \\
 &= -\frac{2^{2s}}{\pi^{n/2}}\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)\mathcal{A}(n, s)(-\Delta)^s u(x).
 \end{aligned}$$

Por tanto de (2.19) obtenemos que

$$\mathcal{A}(n, s) = -\frac{\pi^{n/2}\Gamma(-s)}{2^{2s}\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)} = \frac{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)}{2^{2s}s\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}. \quad (2.24)$$

Obsérvese que con los cálculos anteriores (ver(2.19) y (2.24)) hemos dado una prueba alternativa a la presentada en [6] Lemma 3.1.3. del siguiente

Corolario 2.3

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos \zeta_1}{|\zeta|^{n+2s}} d\zeta = \frac{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)}{2^{2s}s\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}, \quad 0 < s < 1, n \in \mathbb{N}. \quad (2.25)$$

2.5 Algunas propiedades básicas del operador Laplaciano fraccionario

Atendiendo a las secciones previas de este capítulo, sabemos que el operador Laplaciano fraccionario puede definirse mediante (2.12) o (2.16), siempre que las funciones sean suficientemente regulares. Haciendo uso de éstas definiciones podemos demostrar algunas propiedades básicas.

Proposición 2.4 *Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos que*

1. *Propiedad inmediata derivada de la definición: $(-\Delta)^1 = (-\Delta)$, $(-\Delta)^0 = Id$.*
2. *Propiedad de semigrupo: $(-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2} = (-\Delta)^{s_1+s_2}$.*
3. *Conmutación con traslaciones: $[(-\Delta)^s u(\cdot + w)](x) = [(-\Delta)^s u](x + w)$, $w \in \mathbb{R}^n$.*
4. *Homogeneidad $2s$: $[(-\Delta)^s u(\lambda \cdot)](x) = \lambda^{2s}[(-\Delta)^s u](\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
5. *Si para dos funciones $u, v \in \mathcal{S}$ definimos el producto interior:*

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx,$$

entonces

$$\langle (-\Delta)^s u, v \rangle = \langle u, (-\Delta)^s v \rangle.$$

Demostración: Veámoslo en orden.

1. Inmediato por la definición (2.12). Si se quiere demostrar usando la fórmula puntual de la integral singular (2.16), apta para funciones menos regulares, debemos estudiar el comportamiento asintótico de $\mathcal{A}(n, s)$ (véase sección 4 de [15]).
2. Tomando la definición que involucra la transformada de Fourier (2.12) tenemos que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{s_1} \circ (-\Delta)^{s_2} &= \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s_1} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s_2} \mathcal{F}u(\xi))) (\xi)) \\ &= \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s_1} (|\xi|^{2s_2} \mathcal{F}u(\xi))) \\ &= \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s_1+2s_2} \mathcal{F}u(\xi)) \\ &= (-\Delta)^{s_1+s_2} \end{aligned}$$

3. En este caso, por la definición puntual del operador, dada en (2.16), tenemos que

$$\begin{aligned} [(-\Delta)^s u(\cdot + w)](x) &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+w) - u(y+w)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+w) - u(y+w)}{|(x+w) - (y+w)|^{n+2s}} dy \\ &= [(-\Delta)^s u](x+w) \end{aligned}$$

4. Del mismo modo que antes, por la definición (2.16), tenemos que

$$\begin{aligned} [(-\Delta)^s u(\lambda \cdot)](x) &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\lambda x) - u(\lambda y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} |\lambda|^{2s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\lambda x) - u(\lambda y)}{|(\lambda x) - (\lambda y)|^{n+2s}} \lambda^n dy \\ &= |\lambda|^{2s} [(-\Delta)^s u](\lambda x) \end{aligned}$$

5. Tomando de nuevo la definición del operador Laplaciano fraccionario mediante su símbolo de Fourier (2.12), y conciderando en dos ocasiones la identidad de Plancherel (C.3) tenemos

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)^s u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)) \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}v(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi) \mathcal{F}v(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(\xi) |\xi|^{2s} \mathcal{F}v(\xi) d\xi \tag{2.26} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{F}u(\xi)) \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s} \mathcal{F}v(\xi)) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) (-\Delta)^s v(x) dx \\ &= \langle u, (-\Delta)^s v \rangle \quad \square \end{aligned}$$

Nótese que teniendo en cuenta la definición local (2.16), y si la función u es suficientemente buena, podemos acotar el operador. Esto es

Proposición 2.5 *Si $u \in \mathcal{C}^{2s+\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o $u \in C^{1,2s+\alpha-1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$), existe $C_{n,s,\alpha} > 0$ tal que*

$$|(-\Delta)^s u(x)| \leq C_{n,s,\alpha},$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, escribimos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= \frac{1}{\mathcal{A}(n,s)} \left[VP \int_{B_r} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy \right] \\ &:= \frac{I_1 + I_2}{\mathcal{A}(n,s)}. \end{aligned}$$

Para la primera integral veamos la regularidad Hölder de la función. Consideremos en primer lugar el caso $s < 1/2$. Entonces

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| VP \int_{B_r} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \leq \int_{B_r} \frac{|u(x+y) - u(x)|}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \int_{B_r} \frac{\|u\|_{\mathcal{C}^{2s+\alpha}} |y|^{2s+\alpha}}{|y|^{n+2s}} dy \\ &\leq \eta(n) \|u\|_{\mathcal{C}^{2s+\alpha}} \int_0^r \frac{\rho^{n-1} \rho^{2s+\alpha} d\rho}{|\rho|^{n+2s}} \\ &\leq \frac{\|u\|_{\mathcal{C}^{2s+\alpha}} \eta(n) r^\alpha}{\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

donde $\eta(n) := |\partial B(0,1)|$ denota el volumen de la esfera unidad en \mathbb{R}^n .

Para el caso $s > 1/2$ usando que la integral está dada en valor principal se tiene

$$\begin{aligned} \left| VP \int_{B_r} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| &= \left| VP \int_{B_r} \frac{u(x) - u(x+y) - \nabla u(x) \cdot y}{|y|^{n+2s}} dy \right| \\ &\leq \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_{B_r} \frac{dy}{|y|^{n-2+2s}} \\ &= \eta(n) \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_0^r \frac{\rho^{n-1} d\rho}{|\rho|^{n-2+2s}} \\ &= \eta(n) \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} \int_0^r \frac{d\rho}{|\rho|^{2s-1}} \\ &= \frac{\eta(n) \|\mathcal{H}u\|_{L^\infty} r^{2-2s}}{2-2s} < \infty. \end{aligned}$$

Para estimar I_2 es suficiente con tener en cuenta que la función está acotada, en efecto

$$\begin{aligned}
 |I_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \leq 2\|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{dy}{|y|^{n+2s}} \\
 &= 2\|u\|_{L^\infty} \eta(n) \int_r^\infty \frac{\rho^{n-1} d\rho}{|\rho|^{n+2s}} \\
 &= 2\|u\|_{L^\infty} \eta(n) \int_r^\infty \frac{d\rho}{|\rho|^{2s+1}} \\
 &= \frac{\|u\|_{L^\infty} \eta(n)}{sr^{2s}} < \infty.
 \end{aligned}$$

De este modo tenemos que

$$|(-\Delta)^s u(x)| \leq |I_1| + |I_2| \leq \infty.$$

como queríamos ver. □

Recogemos ahora algunas propiedades más interesantes, cuyas pruebas involucran únicamente a la representación mediante la integral singular. Nótese que la hipótesis, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, puede relajarse tanto en la proposición anterior como en las que presentamos a continuación, a $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^{n+2s}} dx < +\infty \right\}. \quad (2.27)$$

La primera de estas propiedades podría verse como una versión más simple del principio fuerte del máximo, el cual veremos en la Proposición 2.9.

Proposición 2.6 Sean $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que:

1. $u(x_0) = 0$,
2. $u \in \mathcal{C}^{2s+\varepsilon}$ (o $u \in \mathcal{C}^{1,2s+\varepsilon-1}$ si $s > \frac{1}{2}$) para $\varepsilon > 0$ en un entorno de x_0 ,
3. $u \geq 0$ en \mathbb{R}^n .

Entonces se tiene que

$$(-\Delta)^s u(x_0) \leq 0.$$

De hecho $(-\Delta)^s u(x_0) = 0$ sí, y sólo si, $u \equiv 0$.

Demostración: Sabiendo que $u(x_0) = 0$, $u(y) \geq 0$ y usando la definición bajo integral singular podemos obtener la acotación del operador en x_0 , esto es

$$(-\Delta)^s u(x_0) = \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0) - u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy \leq 0.$$

Por otro lado, de la expresión anterior, es claro que $(-\Delta)^s u(x_0) = 0$ sí, y sólo si $u(y) = u(x_0) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, es decir la función u debe ser idénticamente nula. □

De este modo, dadas dos funciones suficientemente regulares, gracias al resultado anterior y a la linealidad del operador se tiene el siguiente

Corolario 2.7 Sean $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que:

1. $u(x_0) = v(x_0)$,
2. $u, v \in \mathcal{C}^{2s+\varepsilon}$ (o $u, v \in \mathcal{C}^{1,2s+\varepsilon-1}$ si $s > \frac{1}{2}$) para $\varepsilon > 0$ en un entorno de x_0 ,
3. $u \geq v$ en \mathbb{R}^n .

Luego se tiene que

$$(-\Delta)^s u(x_0) \leq (-\Delta)^s v(x_0).$$

De hecho $(-\Delta)^s u(x_0) = (-\Delta)^s v(x_0)$ sí, y sólo si, $u \equiv v$.

Demostración: Aplíquese la proposición anterior a la función $w := u - v$. □

A continuación estudiaremos los Principios débil y fuerte del Máximo. Además, veremos cómo interacciona el operador con los espacios Hölder (ver (A.2)).

Proposición 2.8 (*Principio Débil del Máximo*) Sea $u \in \mathcal{C}^{2s+\beta}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $(-\Delta)^s u \geq 0$ en Ω y $u \geq 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ entonces $u \geq 0$ en Ω .

Demostración: Veámoslo por reducción al absurdo, supongamos que existe $x^* \in \Omega$ tal que la función u alcanza su valor mínimo $u(x^*)$ y que éste es negativo. Dado que $u(y) \geq 0$ si $y \notin \Omega$ y de la definición de mínimo, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq (-\Delta)^s u(x^*) &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\Omega} \frac{u(x^*) - u(y)}{|x^* - y|^{n+2s}} dy + \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\Omega^c} \frac{u(x^*) - u(y)}{|x^* - y|^{n+2s}} dy \\ &< \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\Omega} \frac{u(x^*) - u(y)}{|x^* - y|^{n+2s}} dy \leq 0. \end{aligned}$$

Que es una contradicción provocada por suponer que en el punto mínimo u se hace negativa. Por lo tanto $u(x^*) \geq 0$ de donde $u \geq 0$ en Ω . □

Proposición 2.9 (*Principio Fuerte del Máximo*) Sea $u \in \mathcal{C}^{2s+\beta}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si tenemos que $(-\Delta)^s u \geq 0$ en Ω y $u \geq 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ entonces $u > 0$ en Ω , a menos que $u \equiv 0$ en Ω .

Demostración: Obsérvese que, por el resultado anterior, $u \geq 0$ en todo \mathbb{R}^n . Luego, si u no es estrictamente positiva en Ω , debe existir un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Por lo que, por (2.16) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq (-\Delta)^s u(x_0) &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_0) - u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $u(y) \leq 0$ en \mathbb{R}^n , pero como $u \geq 0$ en todo \mathbb{R}^n . Concluimos que u debe ser idénticamente nula en \mathbb{R}^n , tal y como queríamos demostrar. □

De los últimos resultados mostrados podríamos entrever que, si exigimos ciertas condiciones a nuestra función, seríamos capaces de conocer en mayor detalle a nuestro operador, esto es, si está acotado o cómo es su signo. A continuación exigiremos que la función esté en un espacio de Hölder, es decir que sea k veces derivable y cuyas derivadas sean Hölder continuas de parámetro γ , con $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < \gamma < 1$. Además, también se puede ver que el hecho de aumentar la derivabilidad de la función implica cierta regularidad del operador [6]. En nuestro caso exigiremos que la función sea Hölder continua, no exigiremos su derivabilidad, de este modo podemos probar que

Proposición 2.10 *Sea $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, con $\alpha \in (0, 1]$ y $\alpha > 2s > 0$, entonces $(-\Delta)^s u \in \mathcal{C}^{0,\alpha-2s}$ y*

$$[(-\Delta)^s u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha-2s}} \leq C_{n,s,\alpha} [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}},$$

donde $C_{n,s,\alpha} > 0$ es una constante que depende de n, s y α .

Demostración: En primer lugar observamos que como $0 < 2s < \alpha \leq 1$, se tiene que $s < \frac{1}{2}$, por lo que el operador está bien definido. Tomemos dos puntos y un $r > 0$ fijo pero arbitrario. Es claro que

$$\begin{aligned} & |(-\Delta)^s u(x_1) - (-\Delta)^s u(x_2)| = \\ & \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \left| VP \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x_1) - u(x_1 + y) - u(x_2) + u(x_2 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \leq I_1 + I_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \left| VP \int_{B_r} \frac{u(x_1) - u(x_1 + y) - u(x_2) + u(x_2 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \\ I_2 &= \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{u(x_1) - u(x_1 + y) - u(x_2) + u(x_2 + y)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \end{aligned}$$

Como $\alpha - 2s > 0$, usando que $|u(x_i) - u(x_i + y)| \leq [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} |y|^\alpha$ con $i = 1, 2$, se sigue que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{B_r} \frac{2[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} |y|^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{\eta(n)}{\mathcal{A}(n, s)} \int_0^r \frac{2[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \rho^\alpha}{\rho^{n+2s}} \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{2\eta(n)[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} r^{\alpha-2s}}{(\alpha - 2s)\mathcal{A}(n, s)}. \end{aligned}$$

Para estimar I_2 empleamos que $|u(x_1 + y) - u(x_2 + y)| \leq [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} |x_1 - x_2|^\alpha$. Luego

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} \frac{2[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} |x_1 - x_2|^\alpha}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= \frac{\eta(n)}{\mathcal{A}(n, s)} \int_r^\infty \frac{2[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} |x_1 - x_2|^\alpha}{\rho^{n+2s}} \rho^{n-1} d\rho \\ &\leq \frac{2\eta(n)[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} r^{-2s} |x_1 - x_2|^\alpha}{(-2s)\mathcal{A}(n, s)} \\ &\leq \frac{2\eta(n)[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} r^{-2s} |x_1 - x_2|^\alpha}{2s\mathcal{A}(n, s)}. \end{aligned}$$

Escogiendo $r = |x_1 - x_2|$ tenemos que

$$\begin{aligned} |(-\Delta)^s u(x_1) - (-\Delta)^s u(x_2)| &\leq \left(\frac{1}{\alpha - 2s} + \frac{1}{2s} \right) \frac{2\eta(n)}{\mathcal{A}(n, s)} [u]_{C^{0, \alpha}} |x_1 - x_2|^{\alpha - 2s} \\ &\leq \frac{\alpha}{s} \left(\frac{1}{\alpha - 2s} \right) \frac{\eta(n)}{\mathcal{A}(n, s)} [u]_{C^{0, \alpha}} |x_1 - x_2|^{\alpha - 2s}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos que

$$[(-\Delta)^s u]_{C^{0, \alpha - 2s}} \leq C_{n, s, \alpha} [u]_{C^{0, \alpha}}.$$

siendo $C_{n, s, \alpha} = \frac{\alpha}{s} \left(\frac{1}{\alpha - 2s} \right) \frac{\eta(n)}{\mathcal{A}(n, s)}$. □

Cerramos la sección con un Teorema tipo Liouville que sigue de [14].

Teorema 2.11 *Sea $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\langle (-\Delta)^s u, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

con $0 < s < 1$. Entonces necesariamente u es afín, además cuando $s \leq \frac{1}{2}$, u se reduce a una constante.

Demostración: Obsérvese que por hipótesis $(-\Delta)^s u = 0$, en sentido débil. Teniendo en cuenta que el operador Laplaciano fraccionario es autoadjunto (punto 5 de la Proposición 2.4) y (2.12), esto es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) (-\Delta)^s \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s} \mathcal{F}\psi)(x) dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Por otro lado, como $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ en particular u es una función temperada, luego es Lebesgue integrable y por tanto admite transformada de Fourier. Luego hemos obtenido que

$$\langle \mathcal{F}u, \phi \rangle = 0, \quad \text{para cualquier } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{2.29}$$

En efecto, para $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, la función $\phi(\xi)/|\xi|^{2s} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo que debe existir una función $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(\psi)(\xi) = \phi(\xi)/|\xi|^{2s}$. De donde por (2.28), tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}u, \phi \rangle &= \langle \mathcal{F}u, |\xi|^{2s} \mathcal{F}\psi \rangle \\ &= \langle u, \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s} \mathcal{F}\psi) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{2s} \mathcal{F}\psi)(x) dx = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

De (2.29) deducimos que el soporte de $\mathcal{F}u$ es únicamente el $\{0\}$, luego, siguiendo la definición del soporte de una distribución, $\mathcal{F}u$ debe ser una combinación finita de deltas de Dirac y sus derivadas. Esto nos lleva a afirmar que necesariamente u es un polinomio, probando así el enunciado, ya que los únicos polinomios que viven en $\mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ son las constantes y las funciones afines. A partir de la definición

(2.27) es claro que cuando $s \leq \frac{1}{2}$, necesariamente u es constante. □

Es claro que con hipótesis más restrictivas, como $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^{2s+\beta}(\mathbb{R}^n)$ con $\beta > 0$, otros resultados de tipo Liouville podrían ser obtenidos. Por ejemplo, a partir del resultado anterior, si restringimos la naturaleza de u tenemos el siguiente

Corolario 2.12 *Sea $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\langle (-\Delta)^s u, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

con $0 < s < 1$. Entonces necesariamente u es constante.

2.6 Discretización del operador

Como sabemos el Laplaciano fraccionario es el operador prototípico en modelización de difusiones no locales, estas difusiones tienen un gran interés en física e ingeniería, por ello el desarrollo de métodos numéricos robustos y eficientes es sumamente necesario. Lo cierto es que en la práctica se emplean una gran diversidad de métodos que, en su mayoría, no han sido estudiados bajo las herramientas modernas del análisis numérico, y su precisión, convergencia o estabilidad general es aún desconocida. Dedicaremos el final de este primer capítulo a presentar el modelo de Yanghong Huang y Adam Oberman [32] para una dimensión ($n = 1$) basado en diferencias finitas. La elección del mismo se debe principalmente a que los autores estudian y prueban detalladamente su precisión, al menos con soluciones suaves, y su convergencia en el problema extendido de Dirichlet. Esto último nos permitirá, en el Capítulo 4, afrontar numéricamente el problema del obstáculo (ver Sección 4.3).

Como es habitual en la aproximación numérica, se busca aproximar el operador mediante una convolución discreta entre los valores de una función conocida, u , y una serie de pesos, w , a determinar. Esto es, queremos discretizar el Laplaciano fraccionario como

$$(-\Delta_h)^s u(x_i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u(x_i) - u(x_{i-j})) w_j, \quad (2.31)$$

donde $i \in \mathbb{Z}$, w_j son pesos positivos y h es el tamaño del paso. Para encontrar los pesos anteriores trabajaremos con la definición del operador como integral singular en \mathbb{R} vista en (2.16). Además, será fundamental separar en dicha definición la parte singular (I_1) y la denominada “cola” (I_2). Esto es

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u(x) &= \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \left[VP \int_{|y| \leq h} \frac{u(x) - u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy + \int_{|y| > h} \frac{u(x) - u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy \right] \\ &:= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

con $\mathcal{A}(n, s)$ definido como en (2.24) y $0 < h \ll 1$.

Nótese que esta idea se emplea en numerosas ocasiones a lo largo de la presente memoria. En primer lugar, y como ya hemos visto, el núcleo que define al operador Laplaciano fraccionario es par, por lo que siguiendo lo visto en (2.8) podemos reescribir la integral I_1 como el cociente diferencial de segundo orden

$$I_1 = \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(\int_{-h}^h \frac{2u(x) - u(x+y) - u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy \right), \quad (2.32)$$

que ya no precisa ser integrado en valor principal si u es regular.

Sin pérdida de generalidad supongamos ahora que $u \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$, de este modo podemos determinar su polinomio de Taylor hasta cuarto orden. Esto es

$$u(x \pm y) = u(x) \pm u'(x)y + \frac{y^2}{2}u''(x) \pm \frac{y^3}{6}u'''(x) + \frac{y^4}{24}u^{iv}(x).$$

Sustituyendo esta expresión en (2.32) tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(-u''(x) \int_0^h \frac{y^2}{y^{1+2s}} dy - u^{iv}(x) \frac{1}{12} \int_0^h \frac{y^4}{y^{1+2s}} dy \right) \\ &\approx \frac{-1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(\frac{h^{2-2s}}{2-2s} u''(x) + \frac{u^{iv}(x)}{12} \frac{h^{4-2s}}{4-2s} \right). \end{aligned}$$

Obsérvese que si $h < 0,1$ el segundo sumando es de orden menor a 10^{-4} , por lo que lo asumiremos como parte del error de aproximación. Además, sustituyendo $u''(x)$ por su equivalente en diferencias finitas centradas nos queda la expresión final

$$I_1 \approx \frac{-1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(\frac{u(x+h) - 2u(x) - u(x-h)}{(2-2s)h^{2s}} \right),$$

que podemos discretizar como

$$I_1(x_i) \approx \frac{-1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(\frac{2u(x_i) - u(x_{i+j}) - u(x_{i-j})}{(2-2s)h^{2s}} \right).$$

En cuanto a I_2 , aproximaremos el integrando mediante un polinomio interpolador a escoger (\mathcal{P}), esto es

$$\mathcal{P}(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (u(x_i) - u(x_{i-j})) P_j(y - x_j).$$

De este modo tenemos que

$$I_2 \approx \int_{|y|>h} \frac{\mathcal{P}(y)}{|y|^{1+2s}} dy = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (u(x_i) - u(x_{i-j})) \int_{|y|>h} \frac{P_j(y - x_j)}{|y|^{1+2s}} dy,$$

de donde únicamente quedaría por conocer los pesos

$$w_j := \int_{|y|>h} \frac{P_j(y - x_j)}{|y|^{1+2s}} dy.$$

En [32] se presentan con detalle dos formas para determinar los pesos anteriores, por un lado se propone emplear un interpolador lineal con la ventaja de que no

se necesita exigir más regularidad a u . Además su estudio, desarrollo e implementación posterior es más sencilla. Por otro lado, muestran un enfoque algo más ambicioso que conlleva trabajar con un polinomio cuadrático, esto aumenta la precisión del método numérico notablemente, pero también dificulta algunos aspectos teóricos como la convergencia.

Tras probar una serie de resultados técnicos y propiedades de los propios pesos, los autores los definen como

$$w_j^T := \begin{cases} h^{-2s} \left(\frac{1}{(2-2s)\mathcal{A}(1,s)} - F'(1) + F(2) - F(1) \right), & j = \pm 1, \\ h^{-2s} (F(j+1) - 2F(j) + F(j-1)), & j \neq \pm 1. \end{cases}$$

$$w_j^Q := \begin{cases} h^{-2s} \left(\frac{1}{(2-2s)\mathcal{A}(1,s)} - G''(1) - \frac{G'(3)+3G'(1)}{2} + G(3) - G(1) \right), & j = \pm 1, \\ 2h^{-2s} (G'(j+1) + G'(j-1) - G(j+1) + G(j-1)), & j = \pm 2, \pm 4 \dots, \\ h^{-2s} \left(-\frac{G'(j+2)+6G'(j)+G'(j-2)}{2} + G(j+2) - G(j-2) \right), & j = \pm 3, \pm 5 \dots. \end{cases}$$

donde w^T y w^Q denotan a los pesos asociados a la aproximación lineal y cuadrática respectivamente. Las funciones $F(t)$ y $G(t)$ vienen dadas por

$$F(t) := \begin{cases} \frac{|t|^{1-2s}}{(2s-1)2s\mathcal{A}(1,s)}, & s \neq \frac{1}{2}, \\ -\frac{\log |t|}{\mathcal{A}(1,s)}, & s = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$G(t) := \begin{cases} \frac{|t|^{2-2s}}{(2-2s)(2s-1)2s\mathcal{A}(1,s)}, & s \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{t-t \log |t|}{\mathcal{A}(1,s)}, & s = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observación: Dado que el objetivo de esta memoria no es entrar en detalle en estos aspectos, remitimos al lector interesado en la justificación detallada de dichas definiciones a las secciones 2 y 3 de [32]. De hecho, en los ejemplos numéricos que presentaremos a lo largo de este trabajo, empleamos únicamente la opción lineal en contraposición al citado artículo. No obstante, en el Apéndice D se presentan los códigos originales de ambas aproximaciones por completitud y para el interés del lector.

Una vez se han determinado los pesos se podría pensar que el objetivo está cumplido. Nada más lejos de la realidad, ya que la discretización del operador vista en (2.31) involucra una suma infinita. Esto significa que en la práctica ésta debe truncarse hasta un valor finito M , de tal manera que

$$(-\Delta_h)_M^{\alpha/2} u_i = \sum_{j=-M}^M (u_i - u_{i-j}) w_j. \quad (2.33)$$

Sin embargo, este procedimiento acumula errores significativos debido al lento decaimiento de la convolución de $u(x_i)$ y los pesos $w_j \approx j^{-1-2s}$ (ver Sección 3.3 de [32]). De nuevo, para sortear este problema debemos volver a la definición como integral singular (2.16), esta vez separando la “cola” en dos partes, esto es

$$(-\Delta)^s u(x) := I_1 + I_2 - I_3,$$

siendo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \int_{|y| \leq L_W} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{1+2s}} dy, \\ I_2 &= \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \int_{|y| > L_W} \frac{u(x)}{|y|^{1+2s}} dy, \\ I_3 &= \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \int_{|y| > L_W} \frac{u(x+y)}{|y|^{1+2s}} dy, \end{aligned}$$

y $L_W = Mh$. Es claro que la primera de las integrales se puede aproximar mediante la suma truncada (2.33), es decir

$$I_1 \approx \sum_{j=-M}^M (u_i - u_{i-j}) w_j.$$

En cuanto a I_2 , nótese que la integral es en la variable y , por lo que dada la paridad del núcleo, queda completamente determinada por

$$I_2 = \frac{2u(x)}{\mathcal{A}(1, s)} \int_{L_W}^{\infty} \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy = \frac{u(x)}{s\mathcal{A}(1, s)L_W^{2s}}.$$

Hasta el momento no hemos tenido en cuenta las posibles limitaciones en el dominio, y parece razonable que dicha información repercuta totalmente en la parte de la “cola”, donde u tiene grados de libertad. Lo cierto es que esto depende totalmente del problema con el que estamos trabajando, por lo que supongamos que u es suficientemente buena, esto es que decae como $|y|^{-\beta}$, con $\beta > 0$, a partir de un L tal que $L_W \geq 2L$, un rápido estudio asintótico nos dice que

$$\begin{aligned} u(y) &\approx u(L)L^\beta |y|^{-\beta}, \quad \text{cuando } y \rightarrow \infty, \\ u(y) &\approx u(-L)L^\beta |y|^{-\beta}, \quad \text{cuando } y \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Por lo que si llevamos esto a las dos partes en las que podemos dividir I_3 ,

$$I_3 = \frac{1}{\mathcal{A}(1, s)} \left(\int_{L_W}^{\infty} \frac{u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy + \int_{-L_W}^{-\infty} \frac{u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy \right),$$

nos queda que

$$\begin{aligned}
 \int_{L_W}^{\infty} \frac{u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy &= u(-L)L^\beta \int_{L_W}^{\infty} \frac{|x-y|^{-\beta}}{|y|^{1+2s}} dy \\
 &= \frac{u(-L)L^\beta}{(2s+\beta)L_W^{2s+\beta}} \cdot {}_2F_1\left(\beta, 2s+\beta; 2s+\beta+1; \frac{x}{L_W}\right), \\
 \int_{-L_W}^{-\infty} \frac{u(x-y)}{|y|^{1+2s}} dy &= \frac{u(L)L^\beta}{(2s+\beta)L_W^{2s+\beta}} \cdot {}_2F_1\left(\beta, 2s+\beta; 2s+\beta+1; -\frac{x}{L_W}\right).
 \end{aligned}$$

donde ${}_2F_1$ denota a la función hipergeométrica Gaussiana, cuyas propiedades son conocidas.

Con el desarrollo anterior hemos conseguido un método de discretización para el operador Laplaciano fraccionario suponiendo que la función a la que aplica es suficientemente buena. Como ejemplo ilustrativo, y empleando la opción lineal, lo aplicamos para la función

$$u(x) = (1+x^2)^{-(1-2s)/2},$$

con lo que obtenemos una aproximación acorde a la siguiente representación gráfica.

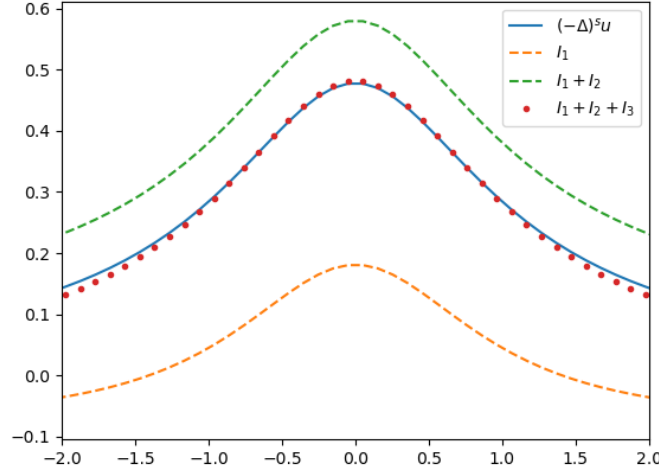


Figura 2.2: Discretización de $(-\Delta)^s u(x)$ con w^T .

Nótese que en la Figura 2.2 comparamos el resultado con la expresión analítica del Laplaciano fraccionario de u , esto es

$$(-\Delta)^s u(x) = 2^{2s} \Gamma\left(\frac{1+2s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right)^{-1} (1+x^2)^{-(1+2s)/2},$$

(véase [24]).

El output mostrado en la figura 2.2 se ha obtenido tras tomar $L = 2$, $s = 0,2$ y $h = 0,1$ como inputs para los códigos que hemos construido en el Apéndice D.

Capítulo 3

Problema de extensión del operador Laplaciano fraccionario

Hasta ahora hemos estudiado las propiedades básicas del operador Laplaciano fraccionario, sin embargo no hemos sido muy conscientes de los posibles problemas que la propiedad de no localidad intrínseca del operador puede ocasionar, como por ejemplo que dicho operador no mantiene el soporte de las funciones o que no hay una regla de Leibniz para el producto que sea sencilla de manejar. Nuestro próximo objetivo es estudiar una herramienta analítica para este operador, conocida como la “extensión de Caffarelli y Silvestre” (ver [11]), que permitirá localizar los problemas a cambio de trabajar en un espacio extendido. Esta herramienta permite pasar de un problema de condiciones de contorno tipo Dirichlet a un problema de condiciones de contorno tipo Neumann en una dimensión superior.

3.1 Introducción al problema

La necesidad de localizar el problema nace de la propia definición del operador (2.16), y es que para evaluar éste en un punto, se nos exige conocer su comportamiento en todo el dominio. Por otro lado, si suponemos que $u \in C^{2s+\beta}(\Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ está definida como

$$u(x) := \begin{cases} u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

nótese que si tomamos un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, la función se anula en dicho punto pero sin embargo

$$(-\Delta)^s u(x_0) = \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\Omega} \frac{u(x_0) - u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy = \frac{1}{\mathcal{A}(n, s)} \int_{\Omega} \frac{-u(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy < 0.$$

Es decir el operador $(-\Delta)^s$ no mantiene el soporte de las funciones, propiedad que puede generar muchas dificultades en el estudio de los Problemas de Cauchy asociados al operador. Otra dificultad generada es que la fórmula del producto es mucho más complicada que en el caso clásico con el operador Laplaciano. En efecto,

$$(-\Delta)^s(uv)(x) = u(x)(-\Delta)^s v(x) + v(x)(-\Delta)^s u(x) + B(u, v),$$

siendo $B(u, v) := \frac{1}{A(n,s)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dy$ una forma bilineal.

Todo esto deriva en que probar la existencia o regularidad de soluciones en este tipo de problemas no locales es, en ocasiones, muy complicado. Por ello es necesario disponer de herramientas que localicen al operador y nos permitan resolver un problema local, la llamada “extensión de Caffarelli y Silvestre” pertenece a este elenco. Con ella podemos localizar el problema pagando con una dimensión más y pasando de condiciones tipo Dirichlet a condiciones tipo Neumann. Para explicar dicha herramienta, consideremos

$$\begin{cases} \Delta u^*(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^+, \\ u^*(x, 0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

siendo u, u^* funciones regulares y acotadas.

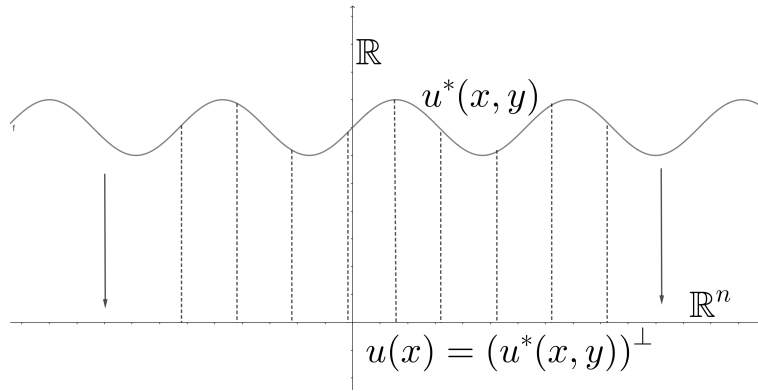


Figura 3.1: Proyección de la solución del problema de extensión.

Sea T el operador definido como $T : u^*(x, 0) \rightarrow -\partial_y u^*(x, 0)$. Es importante destacar que T es un operador positivo, ya que por la identidad de Green y teniendo en cuenta $\partial_n = -\partial_y$ en \mathbb{R}_+^n se tiene

$$\begin{aligned} \langle Tu^*, u^* \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u^*(x, 0)(-\partial_y u^*(x, 0)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \cancel{-u^*(x, y)\Delta u^*(x, y)} + |\nabla u^*(x, y)|^2 dx dy \geq 0. \end{aligned}$$

Sabiendo esto, si aplicamos el operador T dos veces sobre u^* tenemos que

$$\begin{aligned} (T \circ T)u^*(x, 0) &= T^2 u^*(x, 0) = (-\partial_y)(-\partial_y)u^*(x, 0) = \partial_{yy} u^*(x, 0) \\ &= -\Delta_x u^*(x, 0) \\ &= -\Delta u(x). \end{aligned}$$

Dado que T es un operador positivo, formalmente hemos demostrado que

$$T(u(x)) = -\partial_y u^*(x, 0) = (-\Delta)^{1/2} u(x).$$

Esto es, la derivada normal de la proyección sobre el eje $y = 0$, es decir, la derivada normal de la traza, es precisamente la raíz cuadrada del operador Laplaciano de dicha traza.

Siguiendo la idea anterior, de que T relaciona un operador local (derivada normal) con uno no local $(-\Delta)^{1/2}$, nos preguntamos ahora si podemos generalizar esta propiedad al caso $s \neq \frac{1}{2}$, es decir al caso $0 < s < 1$ general. Esto es, ¿podemos encontrar un problema similar a (3.1) de manera que cierta derivada con respecto a la variable y sea el Laplaciano fraccionario s de la traza de su solución? Para ello consideraremos que u^* es una función radial en $1 + a$ “dimensiones” adicionales, siendo $a \in (-1, 1)$ un valor que tomamos posteriormente. De este modo, teniendo en cuenta la expresión del Laplaciano en coordenadas polares radiales (ver (B.1)), el problema extendido análogo a (3.1) que queremos resolver será

$$\begin{cases} \Delta_x u^*(x, y) + \frac{a}{y} u_y^*(x, y) + u_{yy}^*(x, y) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^+, \\ u^*(x, 0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Nótese que el operador $L_a u^*(x, y) := \Delta_x u^*(x, y) + \frac{a}{y} u_y^*(x, y) + u_{yy}^*(x, y)$, del problema anterior, puede escribirse como

$$\operatorname{div}(y^a \nabla u^*) = 0, \quad (3.3)$$

es decir, buscamos soluciones tales que el flujo del campo $y^a \nabla u^*$ sea nulo en todo punto, y diremos que u^* es la extensión de u .

Dado que nuestro objetivo principal es obtener una relación entre $(-\Delta)^s u$ y la derivada normal de dicha función, nos centraremos en encontrar una solución fundamental para (3.2), esto es un núcleo de Poisson, usando algunas propiedades fundamentales del problema.

3.2 Núcleo de Poisson

Con lo que hemos visto hasta ahora, nos proponemos encontrar un núcleo de Poisson P_a de (3.2), esto es una función que cumpla

$$\begin{cases} L_a P_a(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ P_a(x, 0) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

De este modo la solución de (3.2) será de la forma

$$u^*(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_a(x - \varepsilon, y) u(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Ya que claramente

$$u^*(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{P_a(x - \varepsilon, 0)}_{\delta_0(x-\varepsilon)} u(\varepsilon) d\varepsilon = u(x),$$

y $L_a u^*(x, y) = 0$.

Para determinar la extensión de $P_a(x, y)$ usaremos la idea previa de que podemos identificar el operador L_a con el Laplaciano de una función en $n + a + 1$ “dimensiones”. Por tanto teniendo en cuenta (B.1) y considerando $n - 1 + a > 1$, sabemos que

$$\Phi_a(x, y) = \frac{\eta(n + 1 + a)}{|(x, y)|^{n-1+a}}, \quad (3.4)$$

es la solución fundamental de $L_a = 0$.

Obsérvese, como era de esperar, que Φ_a no nos vale como núcleo de Poisson, puesto que cuando proyectamos esta solución sobre \mathbb{R}^n no obtenemos la función delta de Dirac ya que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \Phi_a(x, y) = \frac{\eta(n + 1 + a)}{|x|^{n-1+a}},$$

(véase también (B.5)).

Pero si estudiamos detenidamente la función Φ_a observamos que si la derivamos respecto del parámetro extendido y multiplicamos por $-y^a$, cuando $y \rightarrow 0$ obtenemos, salvo constantes, la función δ_0 . En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} -y^a \partial_y \Phi_a(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} y^a \frac{y(n-1+a)\eta(n+1+a)}{|(x, y)|^{n+1+a}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^{1+a}(n-1+a)\eta(n+1+a)}{|(x, y)|^{n+1+a}} \\ &= (n-1+a)\eta(n+1+a)\delta_0(x), \end{aligned}$$

Esto nos motiva a pensar que un posible candidato a función $P_a(x, y)$ es $w(x, y) := -y^a \partial_y \Phi_a(x, y)$, que cumple $w(x, 0) = \delta_0(x)$. Sin embargo, ¿es cierto que $w(x, y)$ satisface (3.2)? Observamos que de hecho w es solución de la ecuación conjugada a (3.2). En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta_x w - \frac{a}{y} w_y + w_{yy} &= -y^a \left(\partial_y \Delta_x \Phi_a + \frac{(-a^2 + a(a-1))\partial_y \Phi_a}{y^2} + \frac{a\partial_y^2 \Phi_a}{y} + \partial_y^3 \Phi_a \right) \\ &= -y^a \left(\partial_y \Delta_x \Phi_a - \frac{a^2}{y^2} \partial_y \Phi_a + \frac{a}{y} \partial_y^2 \Phi_a + \partial_y^3 \Phi_a \right) \\ &= -y^a \partial_y \left(\Delta_x \Phi_a + \frac{a}{y} \partial_y \Phi_a + \partial_y^2 \Phi_a \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con $-1 < a < 1$, donde hemos usado que Φ_a es solución de (3.2).

Bajo estas consideraciones y teniendo en cuenta esta propiedad de conjugación podemos entonces definir

$$P_a(x, y) := -y^{-a} \partial_y \Phi_{-a}(x, y) = \frac{M(n, a) y^{1-a}}{|(x, y)|^{n+1-a}}, \quad (3.5)$$

donde $M(n, a) = (n - 1 - a)\eta(n + 1 - a)$.

Claramente (3.5) es solución de (3.2), ya que Φ_{-a} es solución de la ecuación conjugada $L_{-a} = 0$ y, bajo el mismo razonamiento de conjugación anterior, concluimos que $P_a(x, y) = -y^{-a} \partial_y \Phi_{-a}(x, y)$ es solución de (3.2) y cumple $P_a(x, 0) = \delta_0(x)$. Nótese además que,

$$P_a(x, y) = \frac{M(n, a) y^{1-a}}{|(x, y)|^{n+1-a}} = \frac{M(n, a)}{y^n \left(1 + \left|\frac{x}{y}\right|^2\right)^{\frac{n+1-a}{2}}} = \frac{M(n, a)}{y^n} \tilde{P}_a\left(\frac{x}{y}\right),$$

con $\tilde{P}_a(z) := \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$. Con esta reparametrización y con cambios de variable adecuados, primero $z = \frac{x}{y}$ y después $\rho = \tan(\xi)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} P_a(x, y) dx &= \frac{M(n, a)}{y^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}_a\left(\frac{x}{y}\right) dx \\ &= M(n, a) \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}_a(z) dz \\ &= M(n, a) \int_0^\infty \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} d\rho \\ &= M(n, a) \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-1}(\xi)}{(1+\tan^2(\xi))^{\frac{n-1-a}{2}}} d\xi \\ &= M(n, a) B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{-a}{2}\right) := \tilde{M}(n, a), \end{aligned}$$

donde B es la función especial beta definida como $B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

Luego si, redefinimos P_a como

$$P_a(x, y) := \frac{1}{\tilde{M}(n, a)} \frac{y^{1-a}}{|(x, y)|^{n+1-a}}, \quad (3.6)$$

obtenemos el núcleo de Poisson de (3.2) que además cumple $\int_{\mathbb{R}^n} P_a(x, y) dx = 1$ propiedad que será imprescindible para establecer, a continuación, la relación que existe entre cierta derivada normal de la solución de (3.2) y el Laplaciano fraccionario s de su traza.

Obsérvese además que, por la Proposición C.4, P_a dado en (3.6) es un núcleo de sumabilidad cuando $y \rightarrow 0$. Por lo que en particular, se obtiene que $P_a(x, 0) = \delta_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, como ya sabíamos (ver Teorema C.5).

3.3 Relación con el Laplaciano fraccionario

Una vez hemos encontrado una solución fundamental para el problema (3.2), volvamos a nuestro objetivo inicial; encontrar $u^*(x, y)$ y saber si alguna derivada de su traza tiene relación con el operador $(-\Delta)^s$. Para ello, teniendo en cuenta $\int_{\mathbb{R}^n} P_a(x, y) dx = 1$, observamos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} y^a u_y^*(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} y^a \frac{u^*(x, y) - u^*(x, 0)}{y - 0} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} y^{a-1} \int_{\mathbb{R}^n} P_a(x - \varepsilon, y) (u(\varepsilon) - u(x)) d\varepsilon \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} y^{a-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\tilde{M}(n, a)} \frac{y^{1-a}}{|(x - \varepsilon, y)|^{n+1-a}} (u(\varepsilon) - u(x)) d\varepsilon \\
 &= \frac{1}{\tilde{M}(n, a)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\varepsilon) - u(x)}{|\varepsilon - x|^{n+1-a}} d\varepsilon \\
 &= -\frac{1}{\tilde{M}(n, a)} (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} u(x).
 \end{aligned}$$

Por tanto, tomando $a = 1 - 2s$ concluimos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} -y^a u_y^*(x, y) = \frac{1}{\tilde{M}(n, a)} (-\Delta)^s u(x), \tag{3.7}$$

tal y como queríamos demostrar.

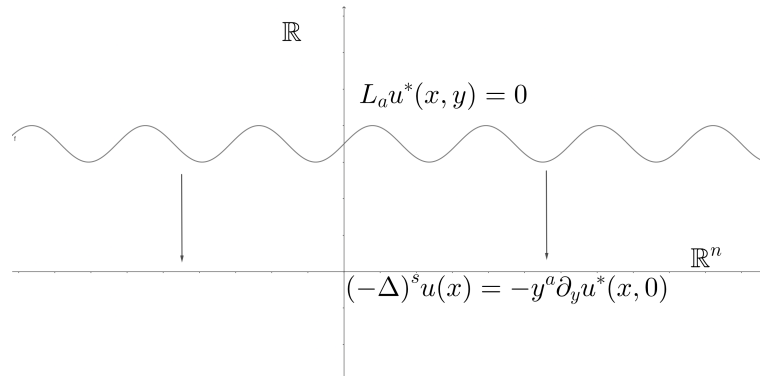


Figura 3.2: Problema de extensión para el Laplaciano fraccionario.

Observación: Aunque no es el objetivo principal de esta memoria, además por motivos de tiempo y espacio no podríamos ilustrarlo correctamente, comentamos que la ventaja de trabajar con la extensión de Caffarelli y Silvestre es clara por construcción, de hecho, en el trabajo donde se presenta, los mismos autores la emplearon para probar las estimaciones de Harnack para u^* (y por tanto para u). Para este fin tuvieron que apoyarse en la teoría general de ecuaciones elípticas degeneradas desarrollada previamente por Fabes, Jerison, Kenig y Serapioni en [17]. Otro ejemplo de su utilidad podría ser [12] donde se emplea la caracterización (1.3), a través de la EDP local, con el fin de obtener estimaciones de regularidad en el problema del obstáculo para el operador Laplaciano fraccionario, técnica que continúa

empleándose en la actualidad en el estudio de la frontera libre ([2, 3]). Destacamos también que existe una identificación directa entre el Laplaciano fraccionario definido mediante la extensión y el operador fraccionario de Paneitz, siendo este último importante en la teoría de dispersión de ondas [13].

Capítulo 4

Problema del Obstáculo

El problema del obstáculo, que es el ejemplo canónico de los problemas llamados de frontera libre, nace del estudio del concepto de elasticidad y el interés en encontrar las ecuaciones que modelan cómo se deforma una membrana elástica que es empujada por un objeto, denominado en este contexto como obstáculo y denotado comúnmente por φ .

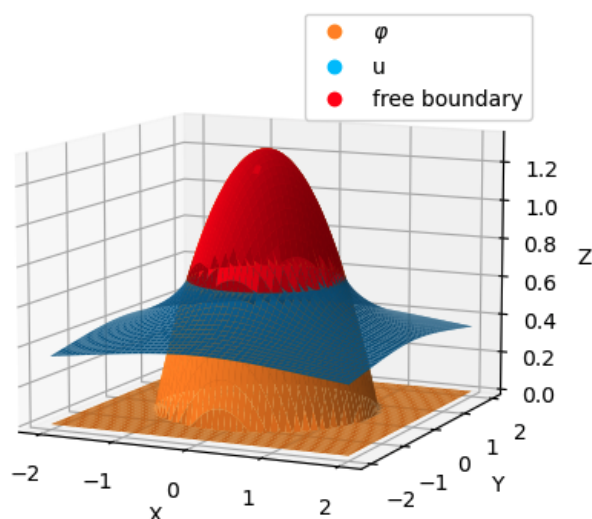


Figura 4.1: Diagrama problema del obstáculo.

La función resultante u , cuyo gráfico representa la forma de la membrana, tiene ciertas características importantes, como que en las zonas donde no toca al obstáculo es la solución de una ecuación en derivadas parciales, mientras que en las zonas en las que sí hay contacto es una supersolución de la misma ecuación. Una propiedad fundamental que se deduce de lo anterior es que la membrana siempre se mantiene por encima del obstáculo, es decir que $u \geq \varphi$ en todo el dominio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u(x) = f, \text{ si } u(x) > \varphi(x), \\ \Delta u(x) \geq f, \quad x \in \Omega, \\ u(x) \geq \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

El problema del obstáculo se ha estudiado de manera teórica en el llamado Cálculo de Variaciones, ya que la solución del mismo se puede obtener minimizando un funcional en una clase de funciones (véase por ejemplo [18]). La naturaleza de este razonamiento puede construirse, siguiendo [33], mediante un problema físico que, como ya comentamos antes, tiene como objetivo determinar la posición de una membrana elástica que se identifica con el gráfico de una función u en un dominio Ω , condicionada en la frontera del dominio por una función $g(x)$ con $x \in \partial\Omega$, ya que sin esta condición el problema no estaría bien planteado, y sujeta a la acción de una fuerza transversal $f(x)$ con $x \in \Omega$. La posición final de la membrana es aquella que minimiza la energía potencial, la cuál queda determinada no sólo por la fuerza transversal, sino también por el trabajo realizado al desplazar, o estirar, la membrana. Como estamos suponiendo que ésta es elástica, el trabajo realizado es proporcional a la diferencia de las áreas encerradas bajo la membrana inicial y la estirada. La constante de proporcionalidad se asocia con la tensión superficial, que, sin pérdida de generalidad podemos tomar como 1. Por lo tanto, la energía potencial de la membrana es

$$E(u) = \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} - 1 \right) dx + \int_{\Omega} f(x)u(x)dx.$$

Como sabemos que para s pequeño tenemos que $\sqrt{1+s} \approx 1 + \frac{1}{2}s + \dots$, podemos aproximar la energía potencial anterior por

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} f(x)u(x)dx,$$

siempre que $|\nabla u(x)|$ sea pequeño. El objetivo será por tanto minimizar $E(u)$ en el conjunto de funciones que le dan sentido al funcional y cumplan que están por encima del obstáculo ($u(x) \geq \varphi(x)$ en Ω). Cabe destacar que en estos problemas interesa conocer también la regularidad y composición de la llamada frontera libre $\Gamma = \partial\{u > \varphi\} \cup \mathbb{R}^n$ pero que dicho estudio, sumamente delicado, se sale de los objetivos de este trabajo.

En el ámbito financiero, el problema (4.1) se puede derivar bajo el contexto de un problema de control estocástico conocido como “Optimal Stopping Problem”. Esto es, consideremos un producto financiero, típicamente derivados, cuyo precio podemos modelar mediante un camino aleatorio (movimiento browniano), X_t , definido dentro de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y sea una función $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, que nos establece el payoff de dicho producto. De este modo, si detenemos el camino aleatorio en un tiempo t , podemos conocer si la función φ nos reporta ganancias o pérdidas

en ese mismo instante. Por lo tanto, podríamos estar interesados en encontrar la estrategia que maximiza este payoff, es decir determinar en qué instante debemos parar el proceso para maximizar φ . Se puede probar (ver Apéndice B de [18]) que este máximo satisface el problema del obstáculo (4.1).

La lógica anteriormente descrita es equivalente a la que sigue una estrategia de inversión basada en operar con derivados del tipo European Options, si en su lugar se desea emplear American Options se deberá considerar un proceso de Lévy no continuo, por la posibilidad de dar saltos grandes (ver Sección 2.1), en lugar del movimiento browniano. Nótese que, la relación entre estos problemas financieros y los operadores vistos en esta memoria se basa en que, en el contexto del cálculo estocástico, el operador Laplaciano es lo que se conoce como generador infinitesimal del movimiento browniano, del mismo modo que el operador Laplaciano fraccionario lo es de un proceso de Lévy (véase por ejemplo [1]).

Por lo tanto, además del propio interés teórico, desde un punto de vista de las aplicaciones tiene perfecto sentido, y motivación, estudiar el problema del obstáculo para el operador Laplaciano fraccionario. Para comenzar tomamos $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto, a la que llamaremos obstáculo y consideraremos el problema no local

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\Delta)^s u(x) = 0, \text{ si } u(x) > \varphi(x), \\ (-\Delta)^s u(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x) \geq \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Adaptando las ideas del caso clásico que expusimos anteriormente, el objetivo de este capítulo será estudiar el problema del obstáculo fraccionario. Veremos que podemos obtener la solución del mismo minimizando un funcional determinado y que ésta es única y continua (ver Sección 4.2).

Antes de comenzar queremos destacar brevemente que este tipo de problema conforma la base fundamental de la teoría sobre regularidad para problemas de frontera libre. Siguiendo la notación anterior es claro que en el problema del obstáculo hay dos regiones bien diferenciadas, la primera de ellas corresponde a la zona de contacto $\{u = \varphi\}$, donde u es supersolución de la EDP que gobierna el problema, y la segunda a la región $\{(-\Delta)^s u = 0\}$, donde u es solución de dicha EDP. Otro problema de gran interés que se sale de los objetivos de esta memoria, es conocer bien cómo es el conjunto, generalmente llamado frontera libre o free boundary (ver Figura 4.2), que separa ambas regiones así como determinar su regularidad y clasificar sus puntos (regulares o singulares).

Esta corriente de investigación fue iniciada y desarrollada para el caso de $(-\Delta)$ principalmente por el Dr Luis Caffarelli [9] en lo que ahora es una obra clási-

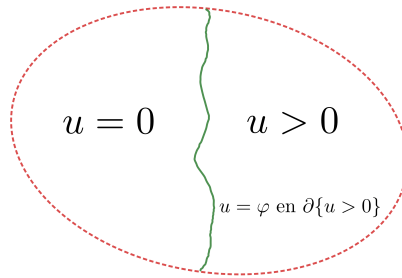


Figura 4.2: Esquema de la free boundary.

ca. En ella estableció por primera vez la completa regularidad de la frontera libre ($\partial\{u > 0\} \in C^\infty$), en entornos de puntos no singulares, para el problema del obstáculo. Siendo éste, uno de los principales resultados por los que obtuvo el Premio Wolf en 2012 y el Premio Shaw en 2018.

4.1 Breve incursión en el Cálculo de Variaciones

Para motivar el desarrollo de esta sección recordemos que cuando nos enfrentamos a una ecuación diferencial, ordinaria o en derivadas parciales, lo ideal sería obtener su solución de manera explícita. En algunos casos podemos calcular dicha solución, por ejemplo si la ecuación es la del calor (véase B.2), aunque esto no es lo común. De hecho en muchos casos ni siquiera se puede asegurar la existencia de soluciones clásicas, por ello se introduce el concepto de soluciones débiles. Surge así la famosa teoría del Cálculo de Variaciones cuya idea principal consiste en identificar el operador diferencial (o pseudo-diferencial en el caso del Laplaciano fraccionario) con la derivada de un determinado funcional (que se llama de “energía”) de manera que las soluciones de la ecuación sean los puntos críticos del funcional.

En la siguiente sección presentaremos los conceptos de derivada débil, espacio de Sobolev (clásico y fraccionario) y mostraremos la relación de éste último con el operador Laplaciano fraccionario.

4.1.1 Derivada débil

Podemos pensar en el concepto de derivada débil como una generalización del de derivada clásica. El objetivo principal que se busca con esta nueva definición es que cualquier función, sin más que ser localmente integrable, sea firme candidata a poder derivarse, débilmente, un número infinito de veces y que este concepto nos permita intercambiar libremente las derivadas parciales. Es evidente que relajar la definición de derivada clásica repercute en una mayor facilidad a la hora de encontrar soluciones a algunas ecuaciones en derivadas parciales, y de hecho supone un nuevo camino para buscar soluciones clásicas, ya que partiendo de una regularidad débil podríamos demostrar a posteriori una regularidad más general.

Tomemos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, donde $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ denota al espacio de funciones test de soporte compacto en Ω . La clásica fórmula de integración por partes quedaría como

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(x) dx. \quad (4.3)$$

Observamos que el lado izquierdo de la identidad anterior tiene sentido si f es localmente integrable. Es cierto que si $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ el término $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ no tiene un significado obvio. La definición de derivada débil resuelve este problema afirmando que si existe una función g , localmente integrable, para la cual la fórmula (4.3) es válida entonces $g = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ en sentido débil.

Generalizando esta idea se tiene la siguiente

Definición 4.1 Sean $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ y $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. Decimos que $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ es la α -derivada débil de f y escribimos $D^\alpha f = g$ si

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \quad (4.4)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, donde $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ y $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$.

Nótese cómo el concepto de derivada débil está llamado a extender al concepto clásico de derivada, tal y como llega a desprenderse de su propia definición. En efecto, se dispone del siguiente resultado cuya demostración es una aplicación inmediata de la fórmula clásica de integración por partes.

Lema 4.2 Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ un multi-índice tal que $|\alpha| \leq k \in \mathbb{N}$. Entonces las α -derivadas clásica y débil de f en Ω existen y coinciden.

4.1.2 Espacios de Sobolev

La noción de derivada clásica da pie a definir los espacios $C^k(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, constituidos por aquellas funciones de clase C^k en Ω cuyas derivadas, en sentido clásico, son todas acotadas hasta el orden k -ésimo, además de continuas. La consideración de derivadas débiles acotadas en $L^p(\Omega)$, en lugar de derivadas clásicas acotadas para la norma uniforme, serán las que nos conduzcan al concepto de espacio de Sobolev.

Definición 4.3 Dados $1 \leq p < +\infty$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se define el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones que pertenecen al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ y cuyas derivadas en sentido débil verifican $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \leq k$. Esto es,

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall |\alpha| \leq k\}. \quad (4.5)$$

Se define entonces su norma como

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f|^p \right)^{1/p}.$$

Observamos que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ está bien definida ya que se verifica

1. $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}$,
2. $\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = 0$ si y sólo si $u = 0$,
3. Por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u + D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

No sólomente se cumple que las derivadas débiles satisfacen las reglas usuales sino que además los espacios de Sobolev tienen una estructura matemática buena. En particular se tiene el siguiente

Teorema 4.4 *Los espacios de Sobolev $(W^{k,p}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W^{k,p}})$ donde $k \in \mathbb{Z}_+$ y $1 \leq p < +\infty$ son espacios de Banach.*

Demostración: Sabemos que la norma está bien definida, veamos que el espacio es completo. Tomemos $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada $|\alpha| \leq k$, $\{D^{\alpha} u_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dado que $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$, es un espacio completo existe $u_{\alpha} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$D^{\alpha} u_m \rightarrow u_{\alpha} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n)$$

para cada $|\alpha| \leq k$. En particular, si $\alpha = (0, \dots, 0) = \tilde{0}$

$$u_m \rightarrow u_{\tilde{0}} := u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n)$$

Veamos que $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, $D^{\alpha} u = u_{\alpha}$ con $|\alpha| \leq k$.

Sea $\phi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u D^\alpha \phi dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_m D^\alpha \phi dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u_m \phi dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha \phi dx. \end{aligned}$$

Luego, dado que $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$, hemos probado que $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, como queríamos ver. \square

Nótese que si $k = 0$ entonces $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, si $p = 2$, escribamos $H^k(\mathbb{R}^n) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$, dado que H^k es un espacio de Hilbert. Además, del mismo modo que en el caso de los espacios de Lebesgue, tenemos que los espacios de Sobolev están encajados recursivamente, esto es

Proposición 4.5 *Para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ y para todo $1 \leq p < +\infty$*

$$W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n). \quad (4.6)$$

Mostramos a continuación una serie de resultados clásicos sobre espacios de Sobolev que nos permiten afirmar cuándo la inclusión de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^{p^*}(\Omega)$ es continua y compacta. Nótese que denotaremos $p^* = \frac{np}{n-p}$ al llamado exponente conjugado de Sobolev de p , o exponente crítico de Sobolev.

Teorema 4.6 (*Desigualdad Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*) *Sea $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante $C_{p,n}$, que depende de p y n , tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.7)$$

para toda función $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Teniendo en cuenta el resultado anterior se puede establecer una desigualdad similar a (4.7) en dominios acotados “suficientemente buenos”. Esto es, se tiene el siguiente

Teorema 4.7 (*Embedding de Sobolev*) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $\partial\Omega \in C^1$. Fijemos $1 \leq p < n$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $u \in L^{p^*}(\Omega)$ y se verifica*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_{p,n,\Omega} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (4.8)$$

donde $p \in [1, p^*]$ y para cierta constante $C_{p,n,\Omega}$ depende de p, n y Ω .

Conviene recordar que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$, la desigualdad anterior es cierta únicamente con el término gradiente en el lado derecho incluso si $\partial\Omega \notin C^1$. En efecto, por densidad existe una sucesión $\{u_n\}_n \subset C_0^\infty(\Omega)$, tal que

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Extendiendo estas funciones a todo el espacio, esto es

$$\bar{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in K_n \\ 0, & x \notin K_n, \end{cases}$$

donde $K_n = \text{supp}(u_n)$ claramente $\bar{u}_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego por el Teorema 4.7 tenemos que

$$\|u\|_{L^{p^*}(K_n)} = \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p(K_n)}.$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

y, teniendo en cuenta la desigualdad de Hölder,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,n} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.9)$$

donde $1 \leq q \leq p^*$.

La expresión (4.9) se conoce como la desigualdad de Poincaré y es importante recordar que, como hemos dicho, es válida incluso si $\partial\Omega \notin \mathcal{C}^1$. Este resultado será esencial para nuestro estudio, puesto que nos permitirá demostrar la existencia y unicidad del minimizador de energía en el problema del obstáculo (Teorema 4.19).

Además, de la misma se deduce que para las funciones de soporte compacto, la seminorma de Gagliardo, $[\cdot]_{W^{1,p}(\Omega)}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Por completitud comentamos que (4.9) se puede adaptar al caso en el que la función no es de soporte compacto en Ω . En tal caso debemos “pagar” con una constante como muestra el siguiente

Teorema 4.8 (*Desigualdad de Poincaré*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado, conexo y abierto, cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase \mathcal{C}^1 y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una constante $C_{p,n,\Omega}$ tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{p,n,\Omega} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (4.10)$$

para toda función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, donde $(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dy$ es la media de u sobre Ω .

Ya hemos visto cómo los espacios de Sóbolev están incluidos de manera continua en los espacios de Lebesgue L^p . Veamos ahora cuándo dichas inclusiones son compactas. Para ello conviene recordar la siguiente

Definición 4.9 (*Inclusión compacta*) Sean X, Y dos espacios métricos, decimos que $X \subset\subset Y$ (X está incluido compactamente en Y), si la inclusión $X \rightarrow Y$ es continua esto es, $\|x\|_Y \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$, y además, para toda sucesión acotada $\{x_n\}_n$ en X , existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_j$ convergente en Y ($\{x_n\}_n$ es precompacta en Y).

Teorema 4.10 (*Rellich-Kondrachov*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado, cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase \mathcal{C}^1 y $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \quad (4.11)$$

donde $1 \leq q < p^*$.

Obsérvese que claramente también tenemos

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

incluso si $\partial\Omega \notin \mathcal{C}^1$, con $1 \leq q < p^*$.

Nos centramos ahora en estudiar generalizaciones de los espacios de Sobolev cuando el índice de regularidad k deja de ser un entero no negativo y puede tomar valores reales. Los espacios de Sobolev fraccionarios (o potenciales) $W^{s,p}$ con $s \geq 0$ serán esenciales en el estudio de problemas donde aparece el Laplaciano fraccionario.

Definición 4.11 Sea $s \in (0, 1)$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Para todo $1 \leq p < +\infty$, definimos el espacio de Sobolev fraccionario como

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{n}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \quad (4.12)$$

esto es, un espacio de Banach entre el espacio $L^p(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$, dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.13)$$

donde el término

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.14)$$

se conoce como seminorma de Gagliardo de u .

Es claro que, debido a que nuestro operador $(-\Delta)^s$ está bien definido para $0 < s < 1$, centraremos nuestro interés en los espacios de Sobolev $W^{s,p}$ para $0 < s < 1$. Sin perjuicio de lo anterior conviene resaltar que la Definición 4.11 no puede extenderse para $s > 1$. En efecto se tiene el siguiente resultado obtenido por H. Brezis en [5]. En dicho texto se prueba un enunciado más general (Theorem 2) que da pie al resultado que nos interesa para funciones en espacios de Sobolev fraccionarios.

Teorema 4.12 (*H. Brezis, Corolally 4 de [5]*) Sean $1 \leq p \leq +\infty$ y $0 < s < 1$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (1 - s) [u]_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \frac{K_{p,n}}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p,$$

con $K_{p,n}$ una constante que depende de n y p .

El resultado anterior, establece que la seminorma $[u]_{W^{s,p}}^p$ cuando $s \rightarrow 1^+$ converge a la seminorma $[u]_{W^{1,p}}^p$. Por tanto si la definición de los espacios $W^{s,p}(\Omega)$ pudiera extenderse para $s \geq 1$ se tendría que las únicas funciones de $W^{1,p}(\Omega)$ serían las funciones constantes, y en general sabemos que no es así.

Vale la pena notar que, como en el caso clásico, el espacio $W^{s',p}$ está continuamente incluido en $W^{s,p}$ cuando $s \leq s'$, como se indica en el siguiente resultado.

Proposición 4.13 *Sean $1 \leq p \leq +\infty$ y $0 < s \leq s' < 1$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces*

$$\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

para una constante adecuada $C = C_{n,p,s} \geq 1$. En particular,

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Como cabría esperar, en el caso fraccionario también son ciertos los enunciados equivalentes a los Teoremas 4.6, 4.7 y 4.10 en este contexto. En primer lugar se tiene el siguiente

Teorema 4.14 *(Desigualdad Gagliardo-Nirenberg-Sobolev fraccionaria) Sean $s \in (0, 1)$ y $1 \leq p < \infty$ tal que $sp < n$. Entonces para toda función, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, medible y de soporte compacto, existe una constante positiva $C_{n,p,s}$ tal que,*

$$\|u\|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^n)}^p \leq C_{p,n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy < +\infty, \quad (4.15)$$

donde $p_s^* = \frac{np}{n-sp}$ es el exponente crítico de Sobolev s -fraccionario.

A la hora de enunciar el equivalente fraccionario del Teorema 4.7 utilizaremos que todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y de clase $\mathcal{C}^{0,1}$, es lo que se conoce como un dominio de extensión de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (véase Sección 5 de [15]). En dichos dominios de extensión se tiene el siguiente

Teorema 4.15 *(Embedding de Sobolev fraccionario) Sean $s \in (0, 1)$ y $1 \leq p < \infty$ tal que $sp < n$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio de extensión de $W^{s,p}(\Omega)$. Entonces para todo $u \in W^{s,p}(\Omega)$ existe una $C_{p,n,s,\Omega}$, dependiendo de p, n, s y Ω , tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,n,s,\Omega} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \quad (4.16)$$

para todo $p \leq 1 \leq p_s^* = \frac{np}{n-sp}$. Esto es, $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente incluido en el espacio $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p_s^*]$.

Como era de esperar también se tienen resultados de compacidad asociados a los espacios $W^{s,p}(\Omega)$ como muestra el siguiente

Teorema 4.16 (*Rellich-Kondrachov fraccionario*) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio de extensión de $W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ y $s \in (0,1)$. Entonces

$$W^{s,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \quad (4.17)$$

donde $1 \leq q < p^*$.

Además, $W_0^{s,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, donde $1 \leq q < p^*$, incluso si Ω no es un dominio de extensión, siendo

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) : u = 0 \text{ c.t.p. } \mathbb{R}^n \setminus \Omega\} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}}$$

4.1.3 El espacio H^s y el operador Laplaciano fraccionario

A partir de ahora nos centramos en el caso $p = 2$ para el que, al igual que en el caso clásico, se tiene que $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, cuyo producto interior se define como

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle u, v \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

siendo $H_0^s(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}}$.

Este espacio, está estrictamente relacionado con el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ como veremos a continuación. Para ello veamos una definición alternativa para los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$ vía la transformada de Fourier dada por

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (4.18)$$

Obsérvese que el conjunto anterior, al contrario que el dado en (4.13), tiene sentido para todo número real $s \geq 1$.

Veamos que las definiciones dadas en (4.5), para $p = 2$ y $\Omega = \mathbb{R}^n$, y (4.18) son equivalentes usando la expresión del operador Laplaciano fraccionario vista en (2.12).

Proposición 4.17 Sea $s \in (0,1)$. El espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ definido en (4.12) coincide con $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ definido en (4.18). En particular, para toda $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2\mathcal{A}(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi,$$

donde $\mathcal{A}(n, s)$ está dada como en (2.15).

Demostración: Por Fubini y la identidad de Plancherel (C.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
 [u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(z + y) - u(y)|^2}{|z|^{n+2s}} dz dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u(z + y) - u(y)}{|z|^{\frac{n+2s}{2}}} \right|^2 dy \right) dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n+2s}{2}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \mathcal{F} \left(\frac{u(z + \cdot) - u(\cdot)}{|z|^{\frac{n+2s}{2}}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi z} - 1|}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi dz \\
 &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|1 - \cos(\xi)z|}{|z|^{n+2s}} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dz d\xi \\
 &= 2\mathcal{A}(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Como se quería ver. □

Nótese que en la prueba anterior ha sido fundamental estar en el caso $p = 2$ ya que de manera general no podemos pasar del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ al $L^q(\mathbb{R}^n)$, con $p \neq q$, vía la transformada de Fourier. Atendiendo al resultado anterior es clara la relación entre el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ y el espacio de Sobolev fraccionario $H^s(\mathbb{R}^n)$. En efecto tenemos la siguiente

Proposición 4.18 *Sea $s \in (0, 1)$ y $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Luego*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2 = 2\mathcal{A}(n, s) \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (4.19)$$

donde $\mathcal{A}(n, s)$ está definida como en (2.15).

Demostración: Teniendo en cuenta la Definición (2.1) y la Proposición 4.17, por Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \|\mathcal{F}((-\Delta)^{s/2}u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= \|\xi|^s \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{A}(n, s)^{-1} [u]_{H^s(\mathbb{R}^n)}^2
 \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. □

4.2 Construcción de la solución

Tal y como comentamos en la introducción de este capítulo, nuestro objetivo es construir una solución u continua del problema

$$(-\Delta)^s u(x) = 0, \text{ si } u(x) > \varphi(x), \quad (4.20a)$$

$$(-\Delta)^s u(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.20b)$$

$$u(x) \geq \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.20c)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = 0. \quad (4.20d)$$

De hecho, probaremos que para cada función φ existe una única solución para dicho problema que minimiza el llamado funcional de energía

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy, \quad (4.21)$$

en el conjunto de todas las funciones $u \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$ que cumplan $u \geq \varphi$ (ver Teorema 4.19).

4.2.1 Existencia y unicidad

Observamos en primer lugar que si u es mínimo de (4.21), cumple (4.20a). En efecto, sea u un mínimo local de J y $v \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces formalmente

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(u + \varepsilon v) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y) + \varepsilon v(x) - \varepsilon v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon^2 |v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varepsilon (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right). \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y)) v(x)}{|x - y|^{n+2s}} dx dy + \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(y) - u(x))}{|y - x|^{n+2s}} dx dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx. \end{aligned}$$

Luego, haciendo cálculos semejantes a (2.26) llegamos a que

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x) (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x) dx. \end{aligned}$$

Por lo que, si u es mínimo del funcional (4.21) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) (-\Delta)^s u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x) (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x) dx = 0, \quad (4.22)$$

para todo $v \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$, lo que nos proporciona el concepto de solución débil (o de energía) ya que de (4.22), como $v \in H_0^s(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}}$, podríamos escribir

$$(-\Delta)^s u(x) = 0$$

en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, si u fuese suficientemente regular. Nótese además que las integrales en (4.22) están bien definidas, puesto que $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x), (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ por ser u, v funciones de $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Nuestro objetivo por tanto, será demostrar que el mínimo de (4.21) existe y es único en el conjunto de funciones donde nos interesa encontrar la solución, esto es, en aquellas del espacio de Sobolev que están por encima del obstáculo.

Teorema 4.19 (*Existencia y unicidad del mínimo*) Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe un único mínimo de (4.21) sobre $M = \{w \in H_0^s(\mathbb{R}^n) : w \geq \varphi \text{ en } \mathbb{R}^n\}$.

Demostración: Nótese que $M \neq \emptyset$, ya que en particular $\varphi \in M$. Por lo tanto podemos definir

$$\theta_0 := \inf_{w \in M} J(w).$$

Tomemos una sucesión de funciones $\{v_k\}$ minimizantes, esto es

- $v_k \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$,
- $v_k \geq \varphi$ en \mathbb{R}^n ,
- $J(v_k) \rightarrow \theta_0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Esto es, $[v_k]_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}$ está uniformemente acotada, por lo que, por el Teorema 4.14, la sucesión $\{v_k\}$ está uniformemente acotada en $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ y por tanto, por el Teorema de Rellich-Kondrachov fraccionario (Teorema 4.16) converge vía subsucesiones a una función v en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y lo hace de manera débil en $H_0^s(\mathbb{R}^n)$.

Veamos que este v es un mínimo de (4.21) en M . En efecto, por la semicontinuidad inferior de la norma, se tiene que

$$J(v) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(v_{k_j}) = \theta_0.$$

Además, dado que $v_{k_j} \geq \varphi$ en \mathbb{R}^n y $v_k \rightarrow v$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $v \geq \varphi$ en \mathbb{R}^n . Esto es, hemos probado la existencia de un mínimo v que pertenece a M .

La unicidad del mínimo se tiene por la estricta convexidad del funcional (4.21) y el hecho de que M también lo es. Veamos en primer lugar esto, que M es un conjunto convexo, para ello tomemos $u, v \in M$ y probemos que una combinación convexa de ambas funciones es un elemento de M . Sea $0 < \lambda < 1$. Es claro que

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_0^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \lambda u \in H_0^s(\mathbb{R}^n), \\ v \in H_0^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (1 - \lambda)v \in H_0^s(\mathbb{R}^n), \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda u + (1 - \lambda)v \in H_0^s(\mathbb{R}^n).$$

Además, también se tiene que

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \geq \lambda\varphi + (1 - \lambda)\varphi \geq \varphi,$$

por lo que concluimos que M es convexo. Por último, veamos que el funcional J definido en (4.21) es convexo en todo su dominio. Sean $0 < \lambda < 1$ y $u, v \in H_0^s(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\lambda(u(x) - u(y)) + (1 - \lambda)(v(x) - v(y))|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^2 |u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 - \lambda)^2 |v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \\ &= \lambda^2 J(u) + (1 - \lambda)^2 J(v) \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{n+2s}} dx dy \right) \end{aligned}$$

Ahora veamos que en general tenemos que

$$\lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(ab) \leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2. \quad (4.23)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(ab) &\leq \lambda a^2 + (1 - \lambda)b^2 \\ (\lambda^2 - \lambda)a^2 + (\lambda^2 - \lambda)b^2 - 2(\lambda^2 - \lambda)(ab) &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)(a - b)^2 &\leq 0, \end{aligned}$$

lo cual es cierto puesto que $0 < \lambda < 1$, y además la desigualdad es estricta si $a \neq b$. Denotando entonces

$$\begin{aligned} a &:= u(x) - u(y), \\ b &:= v(x) - v(y), \end{aligned}$$

por (4.23) concluimos que

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v). \quad (4.24)$$

Luego J es convexo, por lo que como comentamos anteriormente, su mínimo en M , conjunto convexo, es único. En efecto, supongamos que existe otro mínimo, $\bar{v} \in M$, tal que $v \neq \bar{v}$. Sea $0 < \lambda < 1$ y consideremos una combinación convexa $w := \lambda v + (1 - \lambda)\bar{v} \in M$. Por la estricta convexidad de J , vista en (4.24), tenemos que

$$J(w) < \lambda J(v) + (1 - \lambda)J(\bar{v}) = \lambda J(v) + (1 - \lambda)J(v) = J(v),$$

lo cual contradice que v es un mínimo de J en M concluyendo así la unicidad.

Con todo esto, se ha demostrado que el mínimo del funcional de energía J existe y es único. Esto es, hemos encontrado una función que cumple ser s -armónica (4.20a), (4.20c) y (4.20d). \square

Nuestro objetivo ahora es demostrar que u satisface (4.20b). En efecto se tiene el siguiente

Teorema 4.20 *Si u es mínimo de J , definido en (4.21), entonces $(-\Delta)^s u \geq 0$.*

Demostración: Sean $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $h \geq 0$ y $t > 0$. Es claro que $u + th$ queda por encima del obstáculo φ y, por tanto, como u es mínimo de J , $\|u + th\|_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}^2 \geq \|u\|_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}^2$, es decir $\langle u, u \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)} \leq \langle u + th, u + th \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}$. Luego

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \langle u, th \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)} + \langle th, th \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)} \\ &= 2t \langle u, h \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)} + t^2 \langle h, h \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)} \\ &= 2t \langle u(x), (-\Delta)^s h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + t^2 \langle h, h \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Como $t > 0$ obtenemos

$$0 \leq 2 \int u(x) (-\Delta)^s h(x) \, dx + t \langle h, h \rangle_{H_0^s(\mathbb{R}^n)},$$

de donde, tomando límites cuando $t \rightarrow 0^+$, se sigue que

$$\int u(x) (-\Delta)^s h(x) \, dx = \int h(x) (-\Delta)^s u \, dx \geq 0,$$

para cualquier h función test no negativa. Por tanto $(-\Delta)^s u \geq 0$ en sentido débil (o de energía). \square

4.2.2 Continuidad

En este apartado abordaremos finalmente el estudio de la continuidad de la solución del problema del obstáculo. Parece razonable afrontar este punto partiendo de la solución fundamental del operador Laplaciano clásico, esto es $\Phi(x) = \frac{C}{|x|^{n-2s}}$

donde C es una constante. Sin embargo, es evidente que $\Phi(x)$ tiene una singularidad en el origen, por lo que resulta poco práctico abordar este estudio con ella. Pese a esto, podemos sortear dicha singularidad tomando un paraboloides, $\Gamma(x) \in \mathcal{C}^{1,1}$, que coincide con $\Phi(x)$ fuera de la bola unidad centrada en el origen.

Generalizando esta definición de Γ_1 , tomemos ahora $\lambda > 0$ y denotemos por $\Gamma_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^{n-2s}}\Gamma\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ al paraboloides que coincide con $\Phi(x)$ fuera de la bola centrada en el origen de radio λ .

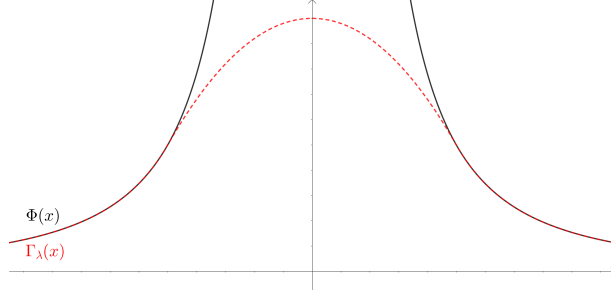


Figura 4.3: Función $\Gamma_\lambda(x)$.

Igual que antes es claro que la función $\Gamma_\lambda(x) \in \mathcal{C}^{1,1}$ y que dados $\lambda_1 \leq \lambda_2$ se tiene que $\Gamma_{\lambda_1} \geq \Gamma_{\lambda_2}$. Como veremos, esta familia de paraboloides resultará fundamental para probar la continuidad de la solución del problema del obstáculo (ver Proposición 4.29).

En lo que resta de texto, tomemos convenientemente la siguiente notación

$$\gamma_\lambda := (-\Delta)^s \Gamma_\lambda, \quad (4.25)$$

para el que $\gamma_1 := (-\Delta)^s \Gamma$.

Veamos en primer lugar que la estrategia que hemos planteado antes es buena idea, es decir, que al aplicar el operador Laplaciano fraccionario a Γ_λ obtenemos buenas propiedades. En efecto, tenemos la siguiente

Proposición 4.21 *La función γ_1 es no negativa e integra 1 en \mathbb{R}^n .*

Demostración: Por la regularidad de Γ sabemos que podemos calcular $(-\Delta)^s \Gamma$ usando la definición vista en (2.16). Entonces, si $x_0 \notin B_1$, como $\Gamma(x_0) = \Phi(x_0)$ y, por construcción, $\Gamma(x) \leq \Phi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \Gamma(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(x_0) - \Gamma(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy \\ &> \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x_0) - \Phi(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy = 0, \end{aligned}$$

dado que Φ es la solución fundamental.

Por otro lado, si $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$ entonces existe un x_1 y una constante positiva δ tales que $\Phi(x - x_1) + \delta$ toca superiormente a Γ en x_0 . Entonces,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s \Gamma(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(x_0) - \Gamma(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy \\ &> \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x_0 - x_1) - \Phi(y - x_1)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy = 0, \end{aligned}$$

ya que $(-\Delta)^s (\Phi(x_0 - x_1)) = 0$.

Nótese que en $x_0 = 0$ el paraboloido Γ alcanza su máximo absoluto, por lo que tenemos que

$$(-\Delta)^s \Gamma(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(x_0) - \Gamma(y)}{|x_0 - y|^{n+2s}} dy > 0,$$

dado que el numerador es positivo. Concluimos así que $(-\Delta)^s \Gamma$ es una función no negativa.

Por último veamos que el área que encierra es 1, para ello utilizaremos que $\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s \Phi(x) dx = 1$. En efecto, por ser Φ solución fundamental tenemos que

$$(-\Delta)^s \Phi(x) = \delta_0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s \Phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0 dx = 1.$$

Sea ahora $\eta(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}^n$, una función suave cuyo soporte está en B_2 , tal que $\eta(x) = 1, x \in B_1$, y denotemos $\eta_R(x) = \eta\left(\frac{x}{R}\right)$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s \Gamma(x) dx - 1 &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s \Gamma(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^s \Phi(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \langle (-\Delta)^s \Gamma - (-\Delta)^s \Phi, \eta_R \rangle \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \langle \Gamma - \Phi, (-\Delta)^s \eta_R \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $(-\Delta)^s \eta_R$ se va a cero sobre compactos cuando $R \rightarrow \infty$. □

A continuación enunciamos y demostramos algunas de las propiedades fundamentales de la familia γ_λ , y que serán de gran utilidad más adelante.

Proposición 4.22 *Para cualquier λ fijo, la función $\gamma_\lambda(x)$ decae como $\frac{1}{|x|^{n+2s}}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.*

Demostración: Para $|x|$ suficientemente grande sabemos que $\Gamma_\lambda(x) = \Phi(x)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma_\lambda(x) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &= (-\Delta)^s \Phi(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y) - \Gamma_\lambda(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \end{aligned}$$

Ya que $\Phi - \Gamma_\lambda$ es una función de soporte compacto y sabemos que $x \notin \text{sop}(\Phi - \Gamma)$ y por tanto $\frac{1}{|x-y|} \approx \frac{1}{|x|}$. Esto nos permite concluir que $\gamma_\lambda(x) \approx \frac{1}{|x|^{n+2s}}$ tal y como queríamos. \square

Proposición 4.23 *La familia de funciones γ_λ es una aproximación de la identidad cuando $\lambda \rightarrow 0$, en el sentido de que*

$$(u * \gamma_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\gamma_\lambda(x-y)dy \rightarrow u(x) \text{ c.t. cuando } \lambda \rightarrow 0.$$

para toda $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ dado en (2.27)

Demostración: Nótese que

$$u(\cdot)\gamma_\lambda(x-\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.26}$$

por la Proposición 4.22 y la hipótesis $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, como hemos visto en la Proposición 4.21, $\gamma_1 > 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma_1(x)dx = 1$. Luego, aplicando la Proposición C.4, tenemos que γ_λ es un núcleo de sumabilidad ya que

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda(x) &= (-\Delta)^s \Gamma_\lambda(x) \\ &= (-\Delta)^s \left(\frac{1}{\lambda^{n-2s}} \Gamma\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^n} ((-\Delta)^s \Gamma)\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \gamma_1\left(\frac{x}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Nótese que como $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma_1(x)dx = 1$, también en cierto que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_\lambda(x)dx &= \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_1(z) dz = 1. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$u(x) - (u * \gamma_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(x-y)) \gamma_\lambda(y)dy, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\gamma_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y (4.26), existe un δ suficientemente pequeño, tal que

$$|I_1| := \left| \int_{|y| \leq \delta} (u(x) - u(x-y)) \gamma_\lambda(y)dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 I_2 &:= \int_{|y|>\delta} (u(x) - u(x-y)) \gamma_\lambda(y) dy \\
 &= \int_{|y|>\delta} (u(x) - u(x-y)) \frac{1}{\lambda^n} \gamma_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy \\
 &= \int_{|z|>\frac{\delta}{\lambda}} (u(x) - u(x-\lambda z)) \gamma_1(z) dz.
 \end{aligned}$$

de donde es evidente que, tomando λ suficientemente pequeño

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deducimos entonces que

$$u(x) - (u * \gamma_\lambda)(x) \longrightarrow 0,$$

cuando $\lambda \longrightarrow 0$, como se quería ver. □

Recordemos que nuestro principal objetivo en esta sección es probar la continuidad de la solución de (4.2). Para ello conviene trabajar primero con el concepto de semicontinuidad y sus propiedades derivadas. Por este motivo recogemos la siguiente

Definición 4.24 *Sea una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diremos que f es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) en x_0 si*

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \left(f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \right).$$

Como continuación natural, diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) en un conjunto $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$ si es semicontinua superiormente (resp. inferiormente) en todo $x_0 \in \Omega$. Veamos ahora que dado un conjunto abierto, las funciones s -superarmónicas son, en particular, semicontinuas inferiormente.

Proposición 4.25 *Sea una función $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $(-\Delta)^s u \geq 0$ en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces, u es semicontinua inferiormente en Ω y*

$$u(x_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \gamma_\lambda(x - x_0) dx$$

para todo $x_0 \in \Omega$ y $\lambda \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Demostración: Sea $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$. Si tomamos $r > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$ tenemos que la función $\Gamma_{\lambda_2} - \Gamma_{\lambda_1}$ es no negativa, suave y tiene su soporte en $B_r(x_0)$. Luego si $(-\Delta)^s u \geq 0$ en $B_r(x_0)$, entonces

$$\langle (-\Delta)^s u, \Gamma_{\lambda_2}(x - x_0) - \Gamma_{\lambda_1}(x - x_0) \rangle \geq 0.$$

Como el operador Laplaciano fraccionario es autoadjunto tenemos que

$$\langle u, (-\Delta)^s \Gamma_{\lambda_2}(x - x_0) - (-\Delta)^s \Gamma_{\lambda_1}(x - x_0) \rangle \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\langle u, \gamma_{\lambda_2}(x - x_0) \rangle \geq \langle u, \gamma_{\lambda_1}(x - x_0) \rangle.$$

Tomemos $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ y sea $r = \text{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$. Si $r > \lambda_1 > \lambda_2 > 0$ entonces

$$u * \gamma_{\lambda_2}(x_0) \geq u * \gamma_{\lambda_1}(x_0), \quad x_0 \in \Omega_0. \quad (4.28)$$

Luego, $\{u * \gamma_{\lambda_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y además por la Proposición 4.23, γ_λ aproxima a la identidad, esto es que $u * \gamma_\lambda \rightarrow u$, en casi todo punto, cuando $\lambda \rightarrow 0$. Finalmente, como para cada λ , $u * \gamma_\lambda$ es continua y la Proposición 4.23 tenemos que u es el límite de una sucesión creciente de funciones continuas. Esto significa que u , posiblemente modificando u en un conjunto de medida cero, es semicontinua inferiormente.

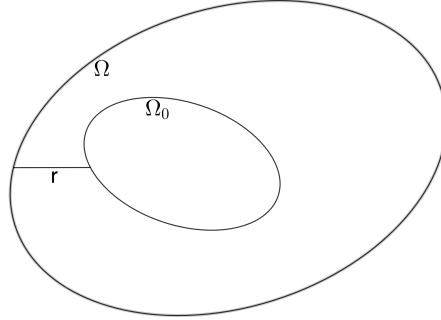


Figura 4.4: Conjuntos Ω y Ω_0 .

Nótese además que cuando $\lambda_2 \rightarrow 0$ en (4.28), obtenemos una propiedad importante de las supersoluciones del operador Laplaciano fraccionario que reemplaza la propiedad de la media del operador Laplaciano clásico, esto es

$$u * \gamma_\lambda \leq u \quad \text{c.t.p } x \in \Omega_0, \quad (4.29)$$

con λ suficientemente pequeño. □

Nótese ahora que, según lo probado en el Teorema 4.20, tenemos el siguiente

Corolario 4.26 *Si u es mínimo de J , definido en (4.21), entonces u es semicontinuo inferiormente y el conjunto $\{u > \varphi\}$ es abierto.*

Demostración: Por el Teorema 4.20 sabemos que $(-\Delta)^s u \geq 0$ por lo tanto, aplicando la Proposición 4.25, u es semicontinua inferiormente. Veamos ahora que $\{u > \varphi\}$ es abierto, sabemos que u es semicontinua inferiormente por lo que en particular u es semicontinua inferiormente en $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : u > \varphi\}$. Esto es que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $u(x_0) - \varepsilon \leq u(x)$, para todo $x \in B_\delta(x_0)$. Dado que $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : u > \varphi\}$, es claro entonces que

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x).$$

Y como φ es continua en todo \mathbb{R}^n , podemos tomar adecuadamente $\tilde{\delta} > 0$ tal que $\varphi(x_0) - \varepsilon > \varphi(x)$ si $x \in B_{\tilde{\delta}}(x_0)$. Luego $u(x) \geq \varphi(x)$ para $x \in B_{\min\{\delta, \tilde{\delta}\}}(x_0)$, esto es, $\{u > \varphi\}$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . \square

De manera similar se puede obtener la Proposición 4.25 para subsoluciones, esto es

Proposición 4.27 *Dada una función $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$. Si $(-\Delta)^s u \leq 0$ en un conjunto abierto Ω entonces, u es semicontinua superiormente en Ω y*

$$u(x_0) \leq \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \gamma_\lambda(x - x_0) dx$$

para todo $x_0 \in \Omega$ y $\lambda \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

Con todo lo visto hasta ahora podemos concluir directamente el siguiente

Corolario 4.28 *Dada una función $u \in \mathcal{L}^s(\mathbb{R}^n)$, tal que $(-\Delta)^s u = 0$ en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces u es continua en Ω y $u * \gamma_\lambda(x_0) = u(x_0)$ para cualquier $x_0 \in \Omega$ y $\lambda \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$.*

Por último tenemos el resultado que nos permitirá probar la continuidad de u ,

Proposición 4.29 *Sea $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $(-\Delta)^s u \geq 0$. Si $u|_E$ es continua, siendo $E = \text{sop}((-\Delta)^s u)$ un conjunto cerrado, entonces u es continua en \mathbb{R}^n .*

Demostración: Procedemos por contradicción, supongamos que u no es continua en \mathbb{R}^n , esto es que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $x_k \rightarrow x_0$, $k \rightarrow \infty$, tal que $u(x_k) \not\rightarrow u(x_0)$, $k \rightarrow \infty$. Necesariamente tenemos que

1. $x_0 \in E$, ya que si $x_0 \notin E$ tendríamos que u es s -armónica en un entorno de $x_0 \in E^c$ y por el Corolario 4.28, u sería continua en dicho entorno.
2. $x_k \notin E$, al menos para algún k , ya que si $x_k \in E$, para todo k , entonces $u(x_k) \rightarrow u(x_0)$ cuando $k \rightarrow \infty$, ya que por hipótesis u es continua en E . Luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_k \notin E$, para todo k .

Tomemos el $y_k \in E$ más cercano a x_k en E , tal que $y_k \rightarrow x_0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Dado que u es continua en E , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} u(y_k) = u(x_0)$, hecho que nos llevará a una contradicción. Para ello denotamos por $\lambda_k = |x_k - y_k| = \text{dist}(x_k, E)$, de donde es claro que $\lambda_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Consideremos

$$c_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\gamma_1(x + e)}{\gamma_1(x)},$$

donde e es un vector unidad. Por la unicidad del ínfimo tenemos que c_0 es único, pero además nótese que por la Proposición 4.21 tenemos que $\gamma_1 > 0$ por lo que $c_0 > 0$, y podemos concluir que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(x+e)}{\gamma_1(x)} = 1$. Nótese que en este razonamiento, por simetría de γ_1 , el valor de c_0 no depende del vector e . Tomemos a conveniencia $e = \frac{x_k - y_k}{\lambda_k}$, por (4.27) y por ser c_0 ínfimo, tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k) &= \frac{1}{\lambda_k^n} (\gamma_1(X + e) - c_0 \gamma_1(X)) \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

denotando por $X = \frac{x - x_k}{\lambda_k}$. Luego, por la Proposición 4.25 para $u(y_k)$ y el Corolario 4.28 para $u(x_k)$, tenemos que

$$\begin{aligned} u(y_k) &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_{\lambda_k}(x - y_k) u(x) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k) u(x) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k)) u(x) dx \\ &\geq c_0 u(x_k) + I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{B_{\sqrt{\lambda_k}}(y_k)} (\gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k)) u(x) dx \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\sqrt{\lambda_k}}(y_k)} (\gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k)) u(x) dx \end{aligned}$$

Empecemos estimando I_1 . Dado que u es semicontinua inferiormente, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $u(x) - u(x_0) \geq -\varepsilon$, para todo $x \in B_\delta(x_0)$. En particular tendremos que $u(x + y_k) - u(x_0) \geq -\varepsilon_k$ para cualquier $x \in B_{\sqrt{\lambda_k}}(y_k)$ y con $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

Además, recordemos que $\lambda_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por otro lado $\gamma_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^n} \gamma_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ y $\int \gamma_1 dx = 1$, por lo que si tomamos $z = \frac{x - y_k}{\lambda_k}$ y $e = \frac{y_k - x_k}{\lambda_k}$,

$$\begin{aligned} \int_{B_{\sqrt{\lambda_k}}(y_k)} (\gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k)) dx &= \int_{B_{\lambda_k^{-1/2}}(0)} (\gamma_1(z) - c_0 \gamma_1(z + e)) dz \\ &\geq 1 - c_0 - \tilde{\varepsilon}_k, \end{aligned}$$

para $\tilde{\varepsilon}_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, ya que $B_{\sqrt{\lambda_k^{-1}}}(0) \rightarrow \emptyset$ cuando $k \rightarrow \infty$. Luego por (4.30) y la desigualdad anterior se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &\geq (1 - c_0 - \tilde{\varepsilon}_k) (u(x_0) - \varepsilon_k) \\ &= (1 - c_0) u(x_0) - \tilde{\varepsilon}_k u(x_0) - \varepsilon_k (1 - c_0 - \tilde{\varepsilon}_k). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ahora para I_2 , usando de nuevo (4.30), tenemos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &\geq -\|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\sqrt{\lambda_k}}(y_k)} (\gamma_{\lambda_k}(x - y_k) - c_0 \gamma_{\lambda_k}(x - x_k)) dx \\
 &\geq -\|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\lambda_k^{-1/2}}(0)} (\gamma_1(z) - c_0 \gamma_1(z + e)) dz \\
 &\geq -\tilde{\varepsilon}_k \|u\|_{L^\infty},
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

ya que, en el límite, la integral anterior está soportada en un conjunto de medida nula.

Sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.31) nos queda que

$$u(y_k) \geq c_0 u(x_k) + (1 - c_0)u(x_0) - \varepsilon_k(1 - c_0 + \tilde{\varepsilon}_k) - 2\tilde{\varepsilon}_k \|u\|_{L^\infty}$$

donde tanto $\tilde{\varepsilon}_k$ como ε_k convergen a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Pero es una contradicción ya que $u(y_k) \rightarrow u(x_0)$ y por la semicontinuidad inferior

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_k) = a > u(x_0),$$

con $a > 0$. □

Corolario 4.30 *La solución del problema (4.2) es continua.*

Demostración: Se sigue aplicando, gracias al Corolario 4.26, la Proposición 4.29 con $E = \text{sop}((-\Delta)^s u) = \{u = \varphi\}$. □

4.3 Discretización del problema

Como última sección de este capítulo, y aprovechando la discretización vista en el Capítulo 2, parece razonable intentar plantear un modelo que nos permita aproximar la solución de problemas en los que aplique el operador Laplaciano fraccionario. En el caso del problema del obstáculo (4.2) en una dimensión, podemos partir de que la solución u del problema satisface

$$\text{mín}(u(x) - \varphi(x), (-\Delta)^s u(x)) = 0,$$

o lo que es lo mismo, es un estado estable de la ecuación de evolución

$$u_t(x) + \text{mín}(u(x) - \varphi(x), (-\Delta)^s u(x)) = 0.$$

De esta última expresión podemos inferir el siguiente esquema iterativo

$$u_j^{k+1}(x) = u_j^k(x) - \Delta t \text{mín}\left(u_j^k(x) - \varphi_j(x), [(-\Delta)^s u(x)^k]_j\right), k, j \in \mathbb{Z}, \tag{4.34}$$

cuya convergencia a la única solución del problema está bien fundamentada en [32]. De hecho, si el esquema comienza con la condición inicial $u_j^0 = \varphi_j$, u_j^k crece

en k para cada j .

Con este esquema afrontamos el problema del obstáculo

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = 0, & \text{si } u(x) > \varphi(x), \\ (-\Delta)^s u(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x) \geq \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

tomando como obstáculo a la función

$$\varphi(x) = 2^{-2s} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-2s}{2}\right) (1 - (1-2s)x^2)_+.$$

Al igual que hicimos en la Sección 2.6, esta elección es meramente práctica ya que la solución del problema es bien conocida

$$u(x) = \begin{cases} 2^{-2s} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-2s}{2}\right) (1 - (1-2s)x^2), & |x| \leq 1, \\ 2^{-2s} \frac{\Gamma\left(\frac{1-2s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-2s}{2}\right)}{\Gamma(s) \Gamma\left(\frac{5-2s}{2}\right)} |x|^{2s-1} {}_2F_1\left(\frac{1-2s}{2}, 1-s; \frac{5-2s}{2}; \frac{1}{|x|^2}\right), & |x| > 1, \end{cases}$$

(véase por ejemplo [4]).

Siguiendo el esquema construido en (4.34) hemos diseñado un código en Python, expuesto en D.4, que hemos ejecutado tomando como parámetros iniciales: $L = 4$, $s = 0.2$, $h = 0.1$ y $\Delta t = h^{2s}/2$. De este modo hemos obtenido una buena aproximación a la solución del problema (véase la Figura 4.5).

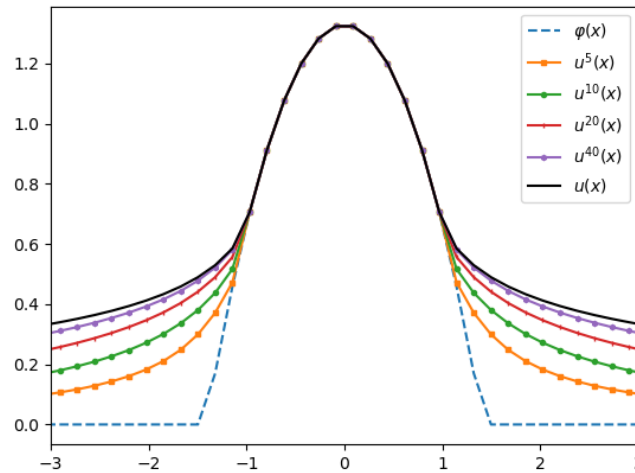


Figura 4.5: Aproximación a la solución problema de obstáculo.

Nótese que en la figura anterior se muestran varias soluciones intermedias del proceso, lo que nos permite comprobar que la solución de este esquema aumenta conforme lo hace el parámetro k y converge a su solución analítica, tal y como era de esperar.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de esta memoria el operador Laplaciano fraccionario ha sido claramente el protagonista, nos hemos apoyado en él para dejar constancia de la facilidad con la que los operadores integro-diferenciales se manifiestan en múltiples escenarios de la ciencia. Hemos dedicado gran parte del primer capítulo a presentar diferentes definiciones de dicho operador que nos permiten entender su naturaleza y su carácter no local. Además hemos visto que, al igual que las ecuaciones elípticas clásicas, el operador Laplaciano fraccionario tiene buenas propiedades: regularidad, principio del máximo, resultados de tipo Liouville, etc. Para la prueba de estas propiedades ha sido fundamental tener a nuestra disposición varias definiciones del operador.

Hemos querido destacar especialmente la propiedad de extensión del operador Laplaciano fraccionario, para la que hemos destinado el Capítulo 3, ya que con esta herramienta podemos sortear la principal característica del operador y localizarlo, a costa de aumentar en una dimensión el estudio. En la práctica, trabajar en el problema extendido nos permite probar algunas propiedades de estas ecuaciones integro-diferenciales con argumentos puramente locales. En relación a esto último, pese a habernos centrado en su brillante construcción, somos conscientes de que la aplicabilidad de la extensión de Caffarelli y Silvestre en la matemática actual es notoria y, de hecho, es uno de los puntos en los que tenemos interés en profundizar en trabajos futuros.

La motivación inicial que nos ha llevado a estudiar este tipo de operadores es su vinculación con el sector financiero, y especialmente, con los problemas originados en la gestión de opciones americanas. En la práctica es habitual abordar los problemas que involucran la toma de decisiones con derivados empleando herramientas de probabilidad y procesos estocásticos. Es por ello que nos interesa estudiar este tipo de problemas con técnicas modernas y bajo el marco teórico del análisis matemático. En esta línea, se ha presentado y estudiado la versión no local de un problema de frontera libre clásico: El Problema del Obstáculo, cuya identificación más cercana con el mundo financiero es el “Stopping Problem” de opciones americanas. Conviene resaltar que en esta memoria sólo hemos abordado la existencia, unicidad y regularidad de la solución para el caso elíptico, quedando de manifiesto la exigencia requerida en cada una de estas pruebas y que es debida, principalmente, a la dificultad que supone trabajar con operadores integro-diferenciales.

Finalmente, destacamos que el estudio del problema parabólico puede verse como la continuación natural del trabajo realizado en el Capítulo 4, de hecho es el análogo directo del “Stopping Problem” mencionado antes, ya que éste conlleva una evolución temporal en el precio del activo subyacente que el problema elíptico no contempla. Además, desde un punto de vista matemático, y en contraste con el caso elíptico, se tienen muy pocos resultados teóricos del problema parabólico no local cuya regularidad de la solución fue probada en 2013 por el Dr. Luis Caffarelli y el Dr. Alessio Figalli en [10]. Por lo tanto, cualquier avance que aporte a la construcción de una teoría robusta sería muy bien recibido por la comunidad investigadora en EDP's y Cálculo de Variaciones.

Apéndice A

Espacios funcionales

En este primer apéndice presentamos las definiciones de los espacios de funciones que hemos empleado a lo largo de este trabajo y algunas de sus propiedades más fundamentales. Para los espacios de Schwartz nos hemos basado en las definiciones y propiedades presentadas en [20] y [26], mientras que para los espacios de Hölder nos hemos centrado en la sección 5.1. de [16].

A.1 Espacios de Schwartz

El espacio de Schwartz o espacio de funciones de decrecimiento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definido sobre el espacio euclídeo \mathbb{R}^n es el conjunto de funciones definido como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta : \|f\|_{\alpha, \beta} < \infty\},$$

donde α y β son multi-índices y la norma viene definida a partir de la norma del supremo como

$$\|f\|_{\alpha, \beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_m}^{\alpha_m} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \dots \partial x_{j_k}^{\beta_k}} \right|,$$

siendo α_i, β_j enteros positivos que satisfacen

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = |\alpha|, \quad \sum_{j=1}^k \beta_j = |\beta|.$$

Algunas de las propiedades más relevantes de estos espacios son:

- \mathcal{S} es un espacio de Fréchet sobre los números complejos \mathbb{C}
- Por la regla de Leibniz se sigue que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es cerrado bajo la multiplicación punto a punto, es decir, si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $h(x) := f(x)g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- La transformada de Fourier es un automorfismo lineal acotado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

- Para todo $p \in [1, \infty)$, se tiene que $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Siendo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial formado por las funciones medibles en \mathbb{R}^n y

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

En particular, cualquier función de \mathcal{S} es una función acotada.

A.2 Espacios de Hölder

Los espacios de Hölder, que denotamos con \mathcal{C}^α , completan los “huecos” entre los espacios de clase \mathcal{C}^k , donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{Z}^+$ que son espacios de funciones k veces derivables con derivadas acotadas y que, de hecho, pueden ser normados por

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty = \sum_{|\alpha| \leq k} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}} \right\|_\infty,$$

siendo α_i enteros positivos satisfaciendo que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = |\alpha|.$$

Para dar una definición formal de estos espacios, debemos primero definir los conceptos de función Hölder continua y seminorma de Hölder. Tomemos $\gamma \in (0, 1]$, un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz en Ω , esto es

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad (\text{A.1})$$

con $x, y \in \Omega$ y $C \in \mathbb{R}$. Es bien conocido que (A.1) implica la continuidad de u , de hecho implica su continuidad uniforme. De esta idea surge la definición de continuidad Hölder, diremos que una función u es Hölder continua con parámetro γ si verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^\gamma. \quad (\text{A.2})$$

Nótese que para $\gamma = 1$ tenemos la condición de Lipschitz.

Llamaremos seminorma de Hölder de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma}, \quad (\text{A.3})$$

y se define entonces la norma de Hölder como

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\bar{\Omega})},$$

siendo $\|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})}$

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|,$$

y $\overline{\Omega}$ la clausura de Ω . Podemos entonces dar la definición formal de espacios de Hölder como sigue

Definición A.1 *Se define el espacio de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, con $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < \gamma < 1$, como el conjunto de todas aquellas funciones $u \in C^k(\overline{\Omega})$ cuya norma*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \quad (\text{A.4})$$

es finita. Esto es

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty \right\},$$

Es decir, el espacio de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste en todas aquellas funciones u k -veces derivables y cuyas derivadas k -ésimas son Hölder continuas con exponente γ . Además, dada la linealidad de la norma (A.4), se puede probar el siguiente

Teorema A.2 *El espacio de funciones $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, con $k \in \mathbb{Z}^+$ y $0 < \gamma < 1$, es un espacio de Banach.*

Demostración: Veamos que toda sucesión u_n de Cauchy converge en el espacio de Hölder. Nótese que la norma de Hölder es la suma de la norma en $C^k(\overline{\Omega})$ y la condición de Hölder de parámetro $\gamma \in (0, 1)$ para las derivadas k -ésimas, por lo que podemos dividir la prueba centrandonos en estos dos sumandos por separado.

En primer lugar, dado que la norma en $C^k(\overline{\Omega})$ está bien definida y que el espacio es completo, tenemos que en particular toda sucesión de Cauchy converge a un elemento de $C^k(\overline{\Omega})$.

En cuanto al segundo sumando, veamos que bajo la condición de Hölder el espacio es de Banach. Para ello fijemos el multi-índice α como $|\alpha| = k$ y definamos

$$v := D^\alpha u \quad \text{y} \quad v_n := D^\alpha u_n$$

para reducir notación. Luego, para $x \neq y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} &= \frac{|v(x) - v_m(x) + v_m(x) - v_m(y) + v_m(y) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \\ &= \frac{|v(x) - v_m(x)|}{|x - y|^\gamma} + \frac{|v_m(x) - v_m(y)|}{|x - y|^\gamma} + \frac{|v_m(y) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \end{aligned}$$

con $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. Es claro que el primer y el tercer sumando podemos hacerlos tan pequeños como queramos sin más que escoger el m suficientemente grande, dado que $v_m \rightarrow v$ uniformemente. El segundo sumando está acotado independientemente de m si $x \neq y$ dado que la sucesión u_n es de Cauchy, por lo tanto acotada, en la norma de Hölder. De todo esto tenemos que

$$\frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\gamma} \leq M_\alpha, \quad \text{con } x \neq y. \quad (\text{A.5})$$

Esto demuestra que, para todo multi-índice α de orden k , $u \in C^k(\overline{\Omega})$. En efecto, por construcción de u , tenemos

$$\sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{C(\overline{\Omega})} < \infty.$$

Además, (A.5) implica que para un multi-índice fijo α de orden k , tenemos

$$[D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq M_\alpha < \infty.$$

Por lo que tenemos la acotación para todo el sumatorio

$$\sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \sum_{|\alpha|=k} M_\alpha < \infty,$$

y para la norma de Hölder

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

esto es $u \in C^k(\overline{\Omega})$.

Por último, tenemos que probar que $u_n \rightarrow u$ en $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$. Por construcción de u , tenemos ya que $u_n \rightarrow u$ en $C^k(\overline{\Omega})$, luego sólo nos queda ver que en la seminorma de Hölder para las k -ésimas derivadas. Usando la notación anterior tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{|(v - v_m)(x) - (v - v_m)(y)|}{|x - y|^\gamma} &= \frac{|v(x) - v_m(x) - v(y) + v_m(y)|}{|x - y|^\gamma} \\ &= \frac{|\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) - v_m(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(y) + v_m(y)|}{|x - y|^\gamma} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|v_k(x) - v_m(x) - v_k(y) + v_m(y)|}{|x - y|^\gamma} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(v_k - v_m)(x) - (v_k - v_m)(y)|}{|x - y|^\gamma}. \end{aligned}$$

Este último límite puede hacerse tan pequeño como se quiera independientemente de $x \neq y$ sin más que escoger un $v_n \rightarrow v$ en la seminorma de Hölder. Dado que hay un número finito de multi-índices (o equivalentemente, derivadas k -ésimas) que considerar, podemos concluir que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

como queríamos probar. □

Otras propiedades relevantes de estos espacios se recogen en la siguiente

Proposición A.3

1. $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$.
2. $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}^{\alpha_0}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1$.

3. Si $0 < \alpha < 1$ y u es constante. Entonces $u \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.
4. Si $0 < \alpha < 1$ y u es un polinomio. Entonces $u \notin \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.
5. Si $u \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ puede ser modificado sobre un conjunto de medida nula para que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Apéndice B

Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Siguiendo principalmente el Capítulo 2 de [16] presentamos algunos de los resultados básicos fundamentales que hemos utilizado en los capítulos 2 y 3 de la presente memoria.

B.1 La ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace es el ejemplo más simple de ecuación diferencial en derivadas parciales elíptica y viene dado por

$$\Delta u(x) = 0, \tag{B.1}$$

donde $\Delta(x) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(x) = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u = \nabla^2 u$ es el operador de Laplace actuando sobre una función real u al menos dos veces diferenciable y ∇ es el operador gradiente. Una generalización directa de este tipo de ecuación es

$$\Delta u(x) = f(x), \tag{B.2}$$

conocida como ecuación de Poisson, donde $f(x)$ es una función dada.

B.1.1 Solución Fundamental de la ecuación de Laplace

El objetivo de esta sección es encontrar la solución fundamental de (B.1). Para ello buscaremos soluciones que sean radiales, es decir que tengan la forma

$$u(x) = v(r),$$

donde $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ y v es tal que $\Delta u = 0$. En primer lugar nótese que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

Luego,

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r},$$

$$u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, y por tanto

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

De este modo $\Delta u = 0$ si y solo si

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Observamos que si $v' \neq 0$, se tiene que

$$\left(\log(v') \right)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

luego $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ para cierta constante a . Consecuentemente si $r > 0$, tenemos

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c, & (n = 2), \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & (n \geq 3), \end{cases}$$

con b y c constantes.

El desarrollo anterior motiva a la siguiente

Definición B.1 *La función radial*

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\eta(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & (n \geq 3), \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

definida para $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, es la solución fundamental de la ecuación de Laplace donde $\eta(n)$ denota el volumen de la bola unidad en \mathbb{R}^n , esto es $\eta(n) = |B(0, 1)| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

Recordemos que una solución fundamental $\Phi \in C^{2s+\beta} \cap L^\infty$ de un operador diferencial en derivadas parciales T verifica la ecuación no homogénea

$$T\Phi = \delta_0(x), \quad (\text{B.5})$$

siendo $\delta_0(x)$ la función delta de Dirac en el origen.

B.2 La ecuación del calor

B.2.1 Solución Fundamental de la ecuación del calor

Consideremos el problema de valores iniciales homogéneo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nuestro objetivo es encontrar la solución fundamental y para ello buscamos soluciones que sean invariantes frente a cambios de escala, es decir autosemejantes,

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$. Haciendo $\lambda = t^{-1}$ y definiendo $v(x) := u(x, 1)$ tenemos que,

$$u(x, t) = t^{-\alpha} v(t^{-\beta} x),$$

de (B.6) deducimos que u es solución autosemejante si v satisface

$$-\alpha t^{-(\alpha+1)} v(t^{-\beta} x) + \beta t^{-\alpha} t^{-(\beta+1)} x \cdot v'(t^{-\beta} x) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(t^{-\beta} x) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Si definimos $y := t^{-\beta} x$ y tomamos $\beta = \frac{1}{2}$ para eliminar la dependencia en t de la expresión anterior que queda reducida a

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot v' + \Delta v = 0. \quad (\text{B.8})$$

Exigimos ahora que v sea una función radial, es decir $v(y) = w(|y|)$ con $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ obtenido así de (B.8) que

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$

para $r = |y|$. Tomando $\alpha = \frac{n}{2}$, esto implica que

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' = 0.$$

Esto es

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$$

para una constante $a \in \mathbb{R}$. Si suponemos que el $\lim_{r \rightarrow \infty} w = 0$ y $\lim_{r \rightarrow \infty} w' = 0$, entonces $a = 0$, luego

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = 0.$$

Por lo tanto,

$$w = b e^{-\frac{r^2}{4}}, \quad (\text{B.9})$$

para cierta $b \in \mathbb{R}$.

Luego $u(x, t) = \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ resuelve el problema (B.6). Exigiendo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = 1, \quad (\text{B.10})$$

usando lo conocido de la integral Gaussiana, se obtiene que $b = (\frac{1}{4\pi})^{n/2}$.

Este desarrollo motiva la siguiente

Definición B.2 *La función*

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

es la solución fundamental, o núcleo de Gauss, de la ecuación del calor. Esto es

$$\begin{cases} \Phi_t(x, y) - \Delta\Phi(x, y) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \Phi(x, 0) = \delta_0(x) & \text{en } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

siendo $\delta_0(x)$ la función delta de Dirac de \mathbb{R}^n en el origen.

Nótese que la función anterior tiene una singularidad en el origen. Además, por como se ha construido, es una función radial en la variable x y el área que encierra bajo su gráfica es igual a 1.

A partir de la solución fundamental (B.11) podemos obtener la solución al problema de Cauchy, tanto en el caso homogéneo como en el no homogéneo. En el primero de ellos, consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Cuya solución viene dada por la convolución entre la solución fundamental y el dato inicial.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Observamos que es claro que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. Además puede demostrarse que $\lim_{(x,t) \rightarrow (x^*, 0)} u(x, t) = g(x^*)$ para cada $x^* \in \mathbb{R}^n$ siempre que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En el caso del problema de Cauchy no homogéneo necesitaremos utilizar el conocido principio de Duhamel para, a partir de la solución de (B.12), construir la solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

que viene dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Para mayor detalle, de como se obtienen los resultados anteriores, consúltese por ejemplo [16].

B.2.2 Semigrupo del calor

Consideremos el problema de difusión del calor planteado en (B.6). A la familia de operadores lineales, $\{e^{-t(-\Delta)}\}_{t \geq 0}$, que asocian cada valor del dato inicial $u(x, 0)$ con la solución u del problema (B.6), se le denomina semigrupo del calor generado por el operador $(-\Delta)$. O simplemente semigrupo del calor.

La función dada en (B.13) puede escribirse entonces como

$$u(x, t) := e^{-t(-\Delta)}u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

que cumple, formalmente,

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_t e^{-t(-\Delta)}u_0(x) = \Delta e^{-t(-\Delta)}u_0(x) = \Delta u(x, t), & x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}^+, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t(-\Delta)}u_0(x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Además, la familia de operadores $\{e^{-t(-\Delta)}\}_{t \geq 0}$ satisface la propiedad de semigrupo, esto es

$$e^{-t_1(-\Delta)}(e^{-t_2(-\Delta)}u) = e^{-(t_1+t_2)(-\Delta)}u, \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

Apéndice C

Conceptos del Análisis de Fourier

C.1 Igualdad de Parseval e identidad de Plancherel

Para la redacción de este apéndice se han seguido las notas [19]. En lo que sigue necesitaremos la conocida como desigualdad de Bessel, que nos da información de los coeficientes de $h \in H$, siendo H un espacio de Hilbert, respecto a una colección ortonormal.

Proposición C.1 *Sea H un espacio con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $e_1, e_2, \dots, e_n \in H$ es una colección finita de vectores ortonormales y E es el subespacio generado por ella. Entonces, para todo $h \in H$*

$$\sum_{k=1}^n \hat{h}(k)^2 \leq \|h\|^2$$

donde $\hat{h}(k) = \langle h, e_k \rangle$ con igualdad si, y sólo si, $h \in E$.

Demostración: Existe un único $e_h \in E$ tal que $h - e_h \perp E$. La unicidad es inmediata: si $e_h, \bar{e}_h \in E$ son tales que $h - e_h, h - \bar{e}_h \perp E$ entonces $e_h - \bar{e}_h = ((h - e_h) - (h - \bar{e}_h)) \in E \cap E^\perp = \{0\}$, por lo que $e_h = \bar{e}_h$. Puesto que $e_h = \sum_j h_j e_j$ y $h - e_h \in E^\perp$ para cada $k = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\langle h, e_k \rangle = \langle e_h, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n h_j \delta_{kj} = h_k$$

ya que los vectores e_j son ortonormales. Esto quiere decir que $e_h = \sum_k \hat{h}(k) e_k$ y por el Teorema de Pitágoras

$$\|h\|^2 \geq \|e_h\|^2 = \sum_{k=1}^n \hat{h}(k)^2$$

según queríamos demostrar. Además, obsérvese que la igualdad en esta desigualdad es equivalente a que $h = e_h \in E$.

Por tanto, si $S = \{e_k\}_{k \geq 1} \subset H$ es una familia ortonormal (no necesariamente finita) se tendrá

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}(k)^2 \leq \|h\|^2 \quad (\text{C.1})$$

para todo $h \in H$. En particular la serie (C.1) es convergente. En este sentido, una familia ortonormal S se dice que forma un sistema completo si para todo $h \in H$ se da la igualdad en (C.1). Es inmediato observar que un sistema es completo si el único $h \in H$ que es ortonormal a S ($h \perp e_k$ para todo $k \geq 1$) es $h = 0$. Cuando este sea el caso, la igualdad

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}(k)^2 \quad (\text{C.2})$$

se conoce como **igualdad de Parseval**. La versión polarizada de (C.2)

$$\langle h, \bar{h} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}(k) \hat{\bar{h}}(k) \quad (\text{C.3})$$

es la **identidad de Plancherel**. Para ver que (C.2) es equivalente a (C.3) procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \langle h, \bar{h} \rangle &= \frac{1}{2} (\|h + \bar{h}\|^2 - \|h\|^2 - \|\bar{h}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((\hat{h}(k) + \hat{\bar{h}}(k))^2 - \hat{h}(k)^2 - \hat{\bar{h}}(k)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \hat{h}(k) \hat{\bar{h}}(k) \end{aligned}$$

es decir, (C.2) implica (C.3). Para el recíproco basta tomar $h = \bar{h}$.

Veamos ahora la identidad de Plancherel en el caso continuo, que es la usada en esta memoria. Para ello debemos tener en cuenta la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier.

Teorema C.2 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y se verifica la denominada identidad de Plancherel*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{C.4})$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos por Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx,$$

y tomando $g = \overline{\hat{f}}$, se tiene que

$$\hat{g}(x) = \overline{\hat{f}(x)} = \overline{\hat{f}(-x)} = \overline{\hat{f}}(x).$$

Por la densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier extiende a $L^2(\mathbb{R}^n)$ manteniendo la igualdad de normas. \square

La identidad de Plancherel nos indica que la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

C.2 Núcleos de sumabilidad

Definición C.3 Diremos que la función $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un núcleo de sumabilidad cuando $y \rightarrow 0$ si satisface que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} P(x, y) dx = 1, \quad y \in \mathbb{R},$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} |P(x, y)| dx \leq C, \quad y \in \mathbb{R}, C > 0,$
3. $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} P(x, y) dx = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \delta > 0.$

Proposición C.4 Sea $P(z) \geq 0$, si $\int_{\mathbb{R}^n} P(z) = 1$, entonces $P_y(x) = \frac{1}{y^n} P\left(\frac{x}{y}\right)$ con $y \in \mathbb{R}^+$, es núcleo de sumabilidad cuando $y \rightarrow 0$.

Demostración: Veamos que $P_y(x)$ cumple las propiedades de la definición anterior. Como las dos primeras propiedades se cumplen de manera trivial, para probar la tercera fijemos $\delta > 0$. Es claro que

$$\int_{|x| > \delta} P_y(x) dx = \int_{|z| > \frac{\delta}{y}} P(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} P(z) \chi_{|z| > \frac{\delta}{y}} dz,$$

con $P(z) \chi_{|z| > \frac{\delta}{y}} \leq P(z) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $y > 0$. Ahora, por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} P_y(x) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{|z| > \frac{\delta}{y}} P(z) \chi_{|z| > \frac{\delta}{y}} dz = 0.$$

Luego $P_y(x)$ es núcleo de sumabilidad, como queríamos probar. \square

Usando las tres propiedades de la definición se demuestra el siguiente resultado, de gran utilidad en el estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y que en particular nos dice que $P(x, 0) = \delta_0(x)$.

Teorema C.5 Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $P(x, y)$ núcleo de sumabilidad cuando $y \rightarrow 0$. Entonces

$$\lim_{y \rightarrow 0} (P(\cdot, y) * f)(x_0) = f(x_0)$$

siendo f una función continua en x_0 y acotada.

Demostración: Fijamos un $\varepsilon > 0$ y buscamos un $\tilde{\delta} > 0$ tal que se tiene (C.5). Como por la primera propiedad de la definición tenemos que $P(x, y)$ integra 1, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) - (P(\cdot, y) * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P(s, y)ds - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-s)P(s, y)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-s))P(s, y)ds, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por la continuidad de f sabemos que existe $\delta > 0$ de modo que si $|s| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x-s)| < \frac{\varepsilon}{2C},$$

siendo C la constante que aparece en la segunda propiedad de la Definición C.3.

Luego, considerando la segunda propiedad que define al núcleo de sumabilidad, si denotamos por $K = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - (P(\cdot, y) * f)(x) \right| &\leq \int_{B_\delta} |f(x) - f(x-s)| |P(s, y)| ds \\ &\quad + \int_{B_\delta^c} |f(x) - f(x-s)| |P(s, y)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2C} \int_{B_\delta} |P(s, y)| ds + K \int_{B_\delta^c} |P(s, y)| ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2C} + K \int_{B_\delta^c} |P(s, y)| ds. \end{aligned}$$

Por tanto tomando $\tilde{\delta} := \delta_0\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)$, siendo δ_0 el asociado a $\frac{\varepsilon}{2K}$, de la tercera propiedad que define al núcleo de sumabilidad se concluye que

$$\left| f(x) - (P(\cdot, y) * f)(x) \right| < \varepsilon, \text{ siempre que } |y| < \tilde{\delta} \quad (\text{C.5})$$

tal y como queríamos. □

Apéndice D

Códigos

En el presente apéndice recogemos los códigos originales, construidos en Python, de las principales funciones con las que, a partir de los contenidos teóricos desarrollados en [32], hemos construido las aproximaciones numéricas presentadas en las Secciones 2.6 y 4.3. Para ello se han empleado las librerías habituales en este tipo de desarrollo: numpy, scipy y matplotlib. Nótese que el orden de presentación respeta el establecido en las correspondientes secciones de esta memoria. Además, es importante señalar que la notación sufre la siguiente modificación $\alpha = 2s$.

D.1 Funciones F, G y sus derivadas

```
1 def function_F(t):
2     if alpha==1:
3         return -C*np.log(abs(t))
4     else:
5         return (C/(alpha*(alpha-1)))*abs(t)**(1-alpha)
6
7 def function_derivada_F(t):
8     if alpha==1:
9         return -C/t
10    else:
11        return (-C/alpha)*abs(t)**(-alpha)
12
13 def function_G(t):
14     if alpha==1:
15         return C*(t-t*np.log(abs(t)))
16    else:
17        return (C/(alpha*(alpha-1)*(2-alpha)))*abs(t)**(2-alpha)
18
19 def function_derivada_G(t):
20     if alpha==1:
21         return -C*np.log(abs(t))
22    else:
23        return (C/(alpha*(alpha-1)))*abs(t)**(1-alpha)
```

```

24
25 def function_derivada_segunda_G(t):
26     if alpha==1:
27         return -C/t
28     else:
29         return C/(alpha)*abs(t)**(-alpha)

```

D.2 Funciones peso

```

1 #----- Funcion peso para la interpolacion lineal -----
2 def function_wT(t):
3     if (t==1)or(t==-1):
4         return (h**(-alpha))*(C/(2-alpha)-function_derivada_F(1)
5                 +function_F(2)-function_F(1))
6     else:
7         return (h**(-alpha))*(function_F(t+1)-2*function_F(t)
8                 +function_F(t-1))
9
10 #----- Funcion peso para la interpolacion cuadratica -----
11 def function_wQ(t):
12     if (abs(t)==1):
13         return (h**(-alpha))*((C/(2-alpha))
14                                -function_derivada_segunda_G(1)
15                                -((function_derivada_G(3)
16                                +3*function_derivada_G(1))/2)+function_G(3)
17                                -function_G(1))
18     else:
19         if (abs(t) % 2 == 0):
20             return (h**(-alpha))*(2*(function_derivada_G(t+1)
21                                     +function_derivada_G(t-1)-function_G(t+1)
22                                     +function_G(t-1)))
23
24         else:
25             return (h**(-alpha))*(-(function_derivada_G(t+2)
26                                     +6*function_derivada_G(t)
27                                     +function_derivada_G(t-2))/2)+function_G(t+2)
28                                     -function_G(t-2))

```

D.3 Discretización del operador Laplaciano Fraccionario

```

1 def Fractional_Laplacian_discrete(function_U,alpha,C,x0,xL,M):

```

```

2 # ----- Discretizacion de la variable espacial -----
3 dx = (xL - x0)/(M - 1)
4
5 # ----- Construccion del mallado y limites de integracion -----
6 xspan = np.linspace(x0, xL, M)
7 Lw=M*h
8
9 # ----- Inicializacion de matrices solucion-----
10 U = np.zeros(M)
11 U2 = np.zeros(M)
12 U3 = np.zeros(M)
13
14 # ---- Construccion de la aproximacion -----
15 for i in range(1,M-1):
16     tail=0
17
18     # ----- Integral (I) -----
19     for t in range(-M,M+1):
20         if (i-t<0)or(i-t>=M):
21             tail+=0
22             tail+=0
23         else:
24             tail+=(function_U(xspan[i])-function_U(xspan[i-t]))*
25                 function_wT(t)
26             tail+=0
27     U2[i]=tail
28
29     # ----- Integral (I)+(II) -----
30     U3[i]=U2[i]+(2*C/(alpha*(xspan[-1]**alpha)))*function_U(
31         xspan[i])
32
33     # ----- Integral (I)+(II)+(III) -----
34     U[i]=U3[i]-((C*function_U(xspan[0])*xspan[-1]**(1-alpha))/
35         xspan[-1])*hyp2f1(1-alpha, 1, 2, xspan[i]/xspan[-1])-((C*
36         function_U(xspan[-1])*xspan[-1]**(1-alpha))/xspan[-1])*
37         hyp2f1(1-alpha, 1, 2, -xspan[i]/xspan[-1]))
38
39     return U,xspan,U2,U3

```

D.4 Problema del obstáculo

```

1 #----- Datos iniciales -----
2 t0=0
3 tf=10
4 deltat=(h**alpha)/2

```

```
5 num=round((tf-t0)/deltat)
6
7 #----- Definicion del obstaculo -----
8 obstacle=2**(-alpha)*np.pi**(-0.5)*gamma((1-alpha)/2)*gamma((4-
   alpha)/2)*(1-(1-alpha)*xspan**2)
9 obstacle[obstacle<0] = 0
10
11 #----- Metodo iterativo -----
12 sol_obs_problem=np.zeros((xspan.size,num))
13 sol_obs_problem[:,t0]=obstacle
14 F_L=np.zeros((xspan.size,num))
15 for i in range(0,num-1):
16     F_L[:,i]=Fractional_Laplacian_discrete(sol_obs_problem[:,i],
   alpha,C,x0,xL,M)[0]
17     for j in range(0,M):
18         sol_obs_problem[j,i+1]=sol_obs_problem[j,i]-deltat*min(
   sol_obs_problem[j,i]-obstacle[j],F_L[j,i])
```


Bibliografía

- [1] D. APPLEBAUM: *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2009.
- [2] B. BARRIOS, A. FIGALLI, AND X. ROS-OTON: *Free boundary regularity in the parabolic fractional obstacle problem*. *Comm. Pure Appl. Math.* 71, no. 10, 2129–2159. MR 3861075, 2018.
- [3] B. BARRIOS, A. FIGALLI, AND X. ROS-OTON: *Global regularity for the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian*. arXiv:1506.04684, 2018.
- [4] P. BILER, C. IMBERT, G. KARCH: *Barenblatt profiles for a nonlocal porous medium equation*. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(11-12):641–645, 2011.
- [5] H. BREZIS: *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- [6] C. BUCUR, E. VALDINOCCHI: *Nonlocal diffusion and applications*. In book series: *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*, volume 20, Springer, Heidelberg 2016.
- [7] L. CAFFARELLI: *Further regularity for the Signorini problem*. *Communications in Partial Differential Equations*, 4:9, 1067-1075, 1979.
- [8] L. CAFFARELLI: *The Obstacle Problem Revisited*. *The Journal of Fourier Analysis and Applications* 4, 383–402, 1998.
- [9] L. CAFFARELLI: *The regularity of free boundaries in higher dimensions*. *Acta Math.* 139, 155-184, 1977.
- [10] L. CAFFARELLI, A. FIGALLI: *Regularity of solutions to the parabolic fractional obstacle problem*. *J. Reine Angew. Math.* 680, 191–233, 2013.
- [11] L. CAFFARELLI, L. SILVESTRE: *An extension problem related to the fractional Laplacian*. *Comm. Part. Diff. Eqs.*, 32, 1245-1260, 2007.
- [12] L. CAFFARELLI, S. SALSA, L. SILVESTRE: *Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian*. *Invent. Math.* 171:425–461, 2008.

-
- [13] S. A. CHANG, M.M. GONZÁLEZ: *Fractional Laplacian in conformal geometry*. Advances in Mathematics 226 (2): 1410–1432, 2011.
- [14] W. CHEN, L. D’AMBROSIO, Y. LI: *Some Liouville theorems for the fractional Laplacian*. Nonlinear Analysis 121, 370–381, 2015.
- [15] E. DI NEZZA, G. PALATUCCI, E. VALDINOCCHI: *Hitchhiker’s guide to the fractional Sobolev spaces*. Bull. Sci. math, 136, 521–573, 2012.
- [16] L.C. EVANS: *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [17] E.B. FABES, C.E. KENIG, R.P. SERAPIONI: *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*. Communications in Partial Differential Equations, 7(1), 77–116, 1982.
- [18] X. FERNÁNDEZ, X. ROSS-OTON: *Regularity Theory for Elliptic PDE*. Mathematics Subject Classification. Zurich, 2010.
- [19] M. FLORES: *Ecuaciones Diferenciales II: Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden*. Notas de clase, Universidad de La Laguna, 2016.
- [20] L. HÖRMANDER: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. 2nd ed, Springer-Verlag, 1990.
- [21] N.E. HUMPHRIES, N. QUEIROZ, J. RM DYER, N.G. PADE, M.K. MUSYL, K.M. SCHAEFER, D.W. FULLER, J.M. BRUNNSCHWEILER, J.D.R. DOYLE, K. THOMAS: *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*. Nature, 465(7301):1066–1069, 2010.
- [22] M. KWAŚNICKI: *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*. Wrocław University of Technology., 2015.
- [23] N. S. LANDKOF: *Foundations of modern potential theory*. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [24] E. LIEB: *Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities*. Annals of Mathematics, Second Series, 118, n^o. 2: 349-74, 1983.
- [25] S. A. MOLCHANOV, E. OSTROVSKII: *Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes*. Theory Probab. Appl. 14, 128-131, 1969.
- [26] M. REED, B. SIMON: *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis I*. Academic Press, 1980.
- [27] A. REYNOLDS, C. RHODES: *The Lévy flight paradigm: random search patterns and mechanisms*. . Ecology, 90(4):877–887, 2009.

-
- [28] L. SILVESTRE: *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*. PhD thesis, The University of Texas at Austin, 2005.
- [29] E. M. STEIN: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- [30] E. VALDINOCCHI: *From the Long Jump to the Fractional Laplacian*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. n^o49, 2009. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 52, no. 6, 2014, pp. 3056–3084., www.jstor.org/stable/24512230. Accessed 16 July 2021.
- [31] G.M. VISWANATHAN, V. AFANASYEV, S.V. BULDYREV, E.J. MURPHY, P.A. PRINCE, H. EUGENE STANLEY: *Lévy flight search patterns of wandering albatrosses*. Nature, 381(6581):413–415, 1996.
- [32] H. YANGHONG, A. OBERMAN.: *Numerical Methods for the Fractional Laplacian: A Finite Difference-Quadrature Approach*. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Numerical Analysis (SIAM), 52(6), 3056–3084, 2014, Nueva Zelanda.
- [33] N. WOLANSKI: *Introducción a los Problemas de Frontera Libre*. Cursos y seminarios de matemática, Universidad de Buenos Aires, 2007.
- [34] W.A. WOYCZYŃSKI: *Lévy processes in the physical sciences*. In Lévy processes, pages 241–266. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [35] R. ZHUO, W. CHEN, X. CUI, Z. YUAN: *A Liouville Theorem for the Fractional Laplacian*. eprint arXiv:1401.7402, 2014.