



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Carlos A. Morales

Análisis en grafos

Analysis on Graphs

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2022

DIRIGIDO POR

Juan Carlos Fariña Gil
Manuel T. Flores Mederos

Juan Carlos Fariña Gil
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Manuel T. Flores Mederos
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis familiares y amigos el apoyo incondicional que me han brindado, en especial, a Marta Castejón. Además, quiero mostrar un especial agradecimiento a los profesores Don Juan Carlos Fariña Gil y Don Manuel Tomás Flores Mederos.

Carlos A. Morales
La Laguna, 13 de junio de 2022

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio sobre el operador de Laplace en grafos conexos, pesados y localmente finitos. Se introduce los conceptos de funciones sobre grafos, el operador de Markov, el operador de Laplace y su relación. Consideraremos el espacio de funciones armónicas, el problema de Dirichlet y las leyes de Kirchhoff. En un segundo Capítulo se presenta la identidad de Green. Se estudiará las propiedades principales del espectro del operador de Laplace y se establecerá acotaciones para el menor autovalor no trivial. Se introducen los grafos de Cayley y finalmente consideraremos el operador de Dirichlet-Laplace sobre grafos infinitos, el problema de Dirichlet y daremos un método iterativo (que recuerda a aquel usado en la prueba del Teorema del punto fijo de Banach) para su resolución debido a Jacobi.

Palabras clave: *Grafo pesado – Operador de Laplace – Operador de Dirichlet-Laplace – Funciones armónicas – Problema de Dirichlet – Constante de Cheeger.*

Abstract

In this work we present a study of the Laplace operator in connected, weighted and locally finite graphs. The concepts of functions on graphs, the Markov operator and Laplace operator and its relations are introduced. The space of harmonic functions and their relationship with Dirichlet's problem and Kirchhoff's laws will be presented. In the second Chapter, Green's identity is presented. The main properties of the spectrum of the Laplace operator are studied and bounds for the smallest non trivial eigenvalue will be given. Cayley graphs are introduced and finally, we will consider the Dirichlet-Laplace operator on infinite graphs, and we will give an iterative resolution method (that reminds the proof of the Banach fixed point Theorem) due to Jacobi.

Keywords: *Weighted graph – Laplace operator – Dirichlet-Laplace operator – Harmonic functions – Dirichlet's Problem – Cheeger's constant.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Funciones sobre grafos	1
1.1. Conceptos Previos	1
1.2. Funciones sobre grafos. Cadenas y cocadenas	4
1.2.1. Los operadores frontera y cofrontera	6
1.3. Cadenas de Markov	8
1.4. Funciones armónicas sobre grafos	10
1.5. El problema de Dirichlet	12
1.6. Las leyes de Kirchhoff y su relación con las funciones armónicas	15
2. Análisis en Grafos	19
2.1. La identidad de Green. Simetría del operador de Laplace	19
2.2. Espectro del operador de Laplace en grafos finitos	21
2.3. La constante de Cheeger	28
2.4. Grafos de Cayley	32
2.4.1. El espectro de la familia de grafos cíclicos	32
2.5. El operador de Dirichlet-Laplace	34
2.6. Resolución del problema de Dirichlet de forma iterativa.	39
Bibliografía	41
Lista de símbolos y abreviaciones	43
Poster	45

Introducción

En pocas ocasiones, en cualquier rama del conocimiento, puede establecerse una fecha concreta de inicio. Sin embargo, esto no sucede con la Teoría de Grafos, la cual, da comienzo con la resolución propuesta por Euler al famoso problema de los puentes de Königsberg en 1736. Otro problema conocido como la Conjetura de los Cuatro Colores guió e inspiró dicha teoría. En el año 1976 K. Appel y W. Haken resuelven la conjetura y este hecho marca un punto de inflexión en la historia de la Teoría de grafos ya que desde entonces, el tema ha experimentado un gran crecimiento, debido en gran medida a su papel como estructura esencial que sustenta las matemática aplicadas modernas. En particular las Ciencias de la Computación y la optimización combinatoria aprovechan y contribuyen a su desarrollo. Además, en un mundo donde la comunicación es de primordial importancia, la versatilidad de los grafos los convierten en herramientas indispensables en el diseño y análisis de redes de comunicación.

Si bien existe una gran cantidad de literatura matemática dedicada a las redes eléctricas finitas, las redes infinitas han recibido una atención creciente solo en las últimas dos décadas. La razón de esta atención es probablemente el creciente interés por los métodos discretos en todas las ramas de las matemáticas. En realidad, hay una fuerte indicación de que, al menos desde el punto de vista de la teoría del potencial, las redes infinitas son un modelo discreto de una variedad de Riemann no compacta, hecho que podemos ver de dos maneras: por un lado, los resultados en la teoría de clasificación de variedades de Riemann se han obtenido discretizando la variedad y argumentando sobre la red así obtenida, y por otro, hay varios resultados en la teoría del potencial sobre redes infinitas que son la contrapartida discreta de los resultados sobre las variedades de Riemann.

En este trabajo, apoyándonos en resultados clásicos vistos en el caso continuo, se estudiarán las principales propiedades de los autovalores del operador de Laplace sobre grafos conexos, pesados y localmente finitos, el cual, para las funciones u definidas sobre el conjunto de vértices de un grafo, se define como (ver Definición

1.4.1)

$$\Delta_{\mu} u(x) = u(x) - \sum_{y \sim x} P(x, y) u(y).$$

Este trabajo está dividido en dos capítulos. En el primero se introducen los conceptos de funciones sobre grafos, cadenas y cocadenas. A continuación, se definirá el núcleo de Markov sobre un grafo pesado y se establecerá su relación con el operador de Laplace. Finalmente, las últimas secciones de dicho capítulo se dedican a las funciones armónicas, el problema de Dirichlet y se mostrará como el uso de cadenas y cocadenas se utiliza para la modelización y resolución de circuitos eléctricos, mediante las leyes de Kirchhoff, y como éstas se relacionan a su vez con el problema de Dirichlet.

En el segundo capítulo se entra de lleno en el estudio de las principales propiedades de los autovalores de un grafo conexo, pesado y localmente finito. Se comienza estudiando la identidad de Green y, tras definir un producto interior adecuado, se demuestra la simetría del operador de Laplace. Acto seguido, se estudian las principales propiedades del espectro de Δ_{μ} sobre grafos finitos y se introduce la constante de Cheeger que permitirá establecer acotaciones sobre el menor de los autovalores no nulo. Se presentarán además los grafos construidos a partir de grupos abelianos, denominados grafos de Cayley y expondremos el cálculo de los autovalores de la familia de grafos cíclicos C_n . A continuación, se presenta el operador de Laplace para grafos infinitos cuyo conjunto de vértices sea a lo sumo numerable, localmente finito y pesado exponiéndose a continuación los principales resultados que verifican sus autovalores. La última sección estará dedicada a la resolución iterativa, mediante el método de Jacobi, del problema de Dirichlet.

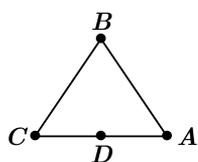
Funciones sobre grafos

En esta primera sección, se introducen los conceptos previos de grafo para el desarrollo de una teoría que permitirá la deducción de ciertas propiedades de los autovalores de operador de Laplace. Se definen los conceptos de funciones y cadenas sobre grafos. A continuación se tratarán las cadenas de Markov y sus respectivos núcleos, funciones armónicas y se considera el problema de Dirichlet sobre grafos. Finalmente, en la última sección, se establecerán las leyes de Kirchhoff y se mostrará su relación con las funciones armónicas ya estudiadas.

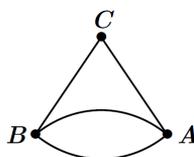
1.1. Conceptos Previos

Un grafo es un par ordenado $\Gamma = (V, E)$, donde V representará el conjunto de vértices, que será a lo sumo contable, mientras que el conjunto E representará el de aristas. Para indicar la presencia de la arista $\xi \in E$ que conecta los vértices $x, y \in V$ se utilizará la notación $\xi = [x, y]$ o $\xi = \{x, y\}$, y se dirá, además, que los vértices x e y son vecinos, que será denotado como $x \sim y$. A las aristas de tipo $x \sim x$ las denominaremos *lazos*. Cuando el número de aristas que incida en cada uno de los vértices sea finito diremos que el grafo es *localmente finito*.

Un grafo se dice *simple* si para cada par de vértices vecinos sólo existe una arista que los conecta y Γ no posee lazos (figura 1.1a), mientras que se dirá *multigrafo* (figura 1.1b) si para algún par de vértices vecinos cualesquiera $x, y \in V$, existe más de una arista que los conecta, o bien, el grafo contine lazos. Finalmente, cuando las aristas deban recorrerse en un sentido determinado diremos que el grafo es un *grafo dirigido*.



(a) Grafo simple



(b) Multigrafo

Figura 1.1: Ejemplos de grafos

Lema 1.1.1 *Dado un conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ existen un total de $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples. Además, existen un total de $\binom{n+1}{k}^{k-1}$ multigrafos con k aristas.*

DEMOSTRACIÓN. Dados los vértices $v_1, \dots, v_n \in V$ el número de aristas posibles viene dado por la expresión $\binom{n}{2}$. De aquí, los grafos que tienen exactamente k aristas son un total de $\binom{n}{k}$. Finalmente, sumando en k tenemos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^{\binom{n}{2}}$$

Teniendo en cuenta ahora que para la formación de multigrafos poseemos un total de $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$ aristas al añadir las que pueden formar lazos, el número total de multigrafos con k aristas vendrá dado por las combinaciones con repetición $CR_k^{\binom{n+1}{2}}$. ◀

Un camino sobre un grafo es una sucesión de vértices (x_0, \dots, x_l) tales que para cada vértice j de dicha sucesión existe la arista $x_j \sim x_{j+1}$ para $j = 0, \dots, l-1$ que los conecta. En este sentido diremos que los vértices x_0 y x_l están conectados, además, cuando el vértice final sea el vértice de partida diremos que el camino es *cerrado* o (si $l \geq 3$) un *ciclo*.

Se define la *longitud* de un camino como el número de aristas que lo componen. Si consideramos un camino γ que conecta los vértices x e y , la longitud de dicho camino lo denotaremos $\gamma(x, y)$. Finalmente, un grafo se dirá *conexo* si para cualquier par de vértices $x, y \in V$ existe un camino que los conecta.

Lema 1.1.2 *Supongamos que en un grafo $\Gamma = (V, E)$ con n vértices existe un camino que conecta dos vértices x_0 y x_l distintos. Entonces*

- a) *existe un camino entre x_0 y x_l que no repite vértices;*
- b) *existe un camino entre x_0 y x_l de longitud a lo sumo $n - 1$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un camino de longitud l conectando los vértices $u = x_0$ y $v = x_l$. El camino puede ser representado por la lista de vértices (x_0, x_1, \dots, x_l) donde, el hecho de existir algún vértice repetido, implicará que existen $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ con $i \neq j$ y $x_i = x_j$. De esta manera, eliminando de la lista la parte correspondiente a x_{i+1} y x_j seguimos obteniendo un camino que conecta los vértices x_0 y x_l . Repitiendo este proceso un número finito de veces para cada repetición que haya (pues la longitud del camino es finita) obtendremos un camino sin vértices repetidos como se afirma en a). La segunda es consecuencia directa de la primera. ◀

Se define el *grado de un vértice* como el número de vecinos que posee, es decir, si $x \in V$, entonces

$$\text{grado}(x) = \#\{y \in V : x \sim y\}.$$

Un grafo se dice *k-regular*, o simplemente *regular*, si el grado de cada vértice es k .

Proposición 1.1.3 *En todo grafo simple o multigrafo $\Gamma = (V, E)$ finito se verifica que*

$$\sum_{x \in V} \text{grado}(x) = 2|E|$$

DEMOSTRACIÓN. Considerando el hecho de que cada arista incrementará en una unidad los grados de los vértices que conecta, o lo que es lo mismo, contribuye en dos unidades a la suma total de todos los grados, la ecuación formulada por el teorema resulta evidente. ◀

En particular, como consecuencia de la proposición anterior tenemos

Corolario 1.1.4 *En todo grafo simple o multigrafo $\Gamma = (V, E)$ finito existe un número par de vértices con grados impares.*

Un grafo $\Gamma = (V, E)$ se dice *bipartito* si es posible realizar una partición del conjunto V en dos subconjuntos V_1 y V_2 de tal manera que no hayan vértices vecinos en ninguno de los subconjuntos. Mostramos a continuación una caracterización de grafos bipartitos.

Teorema 1.1.5 *Un grafo $\Gamma = (V, E)$ conexo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, supongamos que el grafo es bipartito y consideremos la partición de los vértices de $V = V_1 \cup V_2$. Sin pérdida de generalidad tomemos un vértice $x_0 \in V_1$ (para V_2 razonamos igual) y consideremos un ciclo de longitud k . Si el ciclo es la sucesión de vértices $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0)$, la condición de ser bipartito equivale a que el vértice etiquetado como x_1 necesariamente debe pertenecer a V_2 y, por el mismo argumento, $x_2 \in V_1$. Se deduce que las aristas que parten desde V_2 hasta V_1 ocupan los lugares pares y por tanto, para acabar en x_0 la longitud del camino debe ser par.

Recíprocamente, consideremos $x_0 \in V$ y separemos V en dos subconjuntos disjuntos de la siguiente manera:

$$V_1 = \{x \in V / \min \{\gamma(x_0, x)\} \text{ es par}\}$$

$$V_2 = \{x \in V / \min \{\gamma(x_0, x)\} \text{ es impar}\}$$

Evidentemente ambos subconjuntos son disjuntos y su unión es el total. Sólo debemos comprobar que no existen aristas entre vértices del mismo subconjunto. Sin pérdida de generalidad comprobemos que los vértices de V_1 no están conectados (razonaremos para V_2). Supongamos que, en efecto, los vértices $x_1, x_2 \in V_1$ fuesen vecinos. Entonces, considerando los caminos desde x_0 a x_1 , de longitud par, desde x_0 a x_2 , de longitud par, y la arista que conecta x_1 con x_2 , podemos establecer un ciclo sobre x_0 sin más que unir los caminos x_0 a x_1 , de x_1 a x_2 e, invirtiendo el camino original, de x_2 a x_0 . Sin embargo, el ciclo resultante es de longitud impar, lo que niega la hipótesis y por tanto, los vértices x_1 y x_2 no se encuentran conectados. ◀

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo y consideremos una función μ , no negativa, $\mu : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que el par (Γ, μ) es un *grafo pesado* si la función μ , la cual llamaremos *peso*, verifica

- $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ (condición de simetría).
- $\mu_{xy} > 0$ si y sólo si $x \sim y$, es decir, $\mu_{xy} = 0$ si $x \not\sim y$ (x no es vecino a y).

Un peso se dirá *simple* si sobre cada arista toma el valor uno (salvo, por supuesto, en el caso cuyo valor sea cero). Nótese además que todo peso induce una función real sobre los vértices de V dada por

$$\mu(x) = \sum_{y \sim x} \mu_{xy}$$

la cual denominaremos *peso del vértice* x .

Sea $\Gamma = (V, E)$ grafo. Un subconjunto X de E tal que para los vértices $x, y \in V$ se verifica que $[x, y] \in X$ si y sólo si $[y, x] \notin X$ se denomina *orientación*. Nótese que, dado un grafo simple no dirigido, si denotamos el conjunto de aristas E como

$$E = \{\{x, y\} / x, y \in V, x \sim y\}$$

una orientación X puede ser considerada como una aplicación $\Psi : E \rightarrow V$ tal que para cada $\zeta \in E$ se verifica que $\Psi(\zeta) \in \zeta$, indicando $\Psi(\zeta)$ el vértice origen de la dirección en la cual la arista debe ser recorrida.

1.2. Funciones sobre grafos. Cadenas y cocadenas

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Una función f definida sobre Γ es una función real (o compleja) definida sobre los vértices del grafo, esto es, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Al conjunto de todas las funciones definidas sobre Γ lo denotaremos como $\mathcal{F}(V)$.

Para cada $y \in V$ sea $\delta_y \in \mathcal{F}(V)$ definida por

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases} \quad (1.1)$$

Es evidente que cualquier función $f \in \mathcal{F}(V)$ se puede escribir

$$f = \sum_{y \in V} f(y) \delta_y \quad (1.2)$$

por lo que el conjunto de funciones $\{\delta_x\}_{x \in V}$ forman un sistema generador de $\mathcal{F}(V)$. Por otro lado, de tenerse la expresión

$$\sum_{x \in V} c_x \delta_x = 0,$$

evaluando el término de la izquierda sobre cada uno de los vértices, se tiene que cada constante c_x debe ser nula, por tanto, el conjunto $\mathcal{F}(V)$ posee estructura de espacio vectorial de dimensión igual al número de vértices del grafo. Diremos que una función expresada como en (1.2) representa una *0-cadena*.

Dada una orientación X sobre Γ , una *1-cadena* sobre Γ es una función real (o compleja) definida sobre el conjunto X que verifica

$$i(x, y) = -i(y, x), \text{ para cada } x \sim y.$$

Nótese que de la propia definición se desprende el hecho de que $i(x, x) = 0$ para cada lazo.

Fijemos una orientación X . Análogamente a las *0-cadenas*, consideremos las aplicaciones definidas sobre X como

$$\delta_B(D) = \begin{cases} 1, & B = D \\ 0, & B \neq D \end{cases} \tag{1.3}$$

de esta manera, toda *1-cadena* I puede ser escrita como

$$I = \sum_{B \in X} i(B) \delta_B$$

Nuevamente el conjunto de todas las *1-cadenas* posee estructura de espacio vectorial. Denotamos por \mathcal{C} al subespacio vectorial de todas las *1-cadenas* sobre Γ tales que

$$\sum_{y \sim x} |i(x, y)| < \infty, \text{ para todo } x \in V. \tag{1.4}$$

Nótese que cuando Γ es finito o localmente finito, la condición expresada en (1.4) se verifica trivialmente. Ya que este trabajo tiene como alcance los grafos que a lo sumo son localmente finitos, todas las *1-cadenas* consideradas satisfacen (1.4).

Consideremos el espacio \mathcal{C}^* dual del espacio vectorial \mathcal{C} . \mathcal{C}^* es un espacio vectorial de la misma dimensión que \mathcal{C} cuyos elementos son aplicaciones lineales $u: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Para cada $B \in X$ las aplicaciones definidas como

$$\chi_{\delta_B}(\delta_D) = \begin{cases} 1, & B = D \\ 0, & B \neq D \end{cases} \tag{1.5}$$

forman una base de \mathcal{C}^* , así, si $E \in \mathcal{C}^*$, podemos escribir E como

$$E = \sum_{B \in X} e(B) \chi_{\delta_B}.$$

A los elementos de \mathcal{C}^* los denominamos *1-cocadenas*.

De la misma forma que se procedió con el espacio vectorial de las *1-cadenas*, consideramos ahora el espacio vectorial de las *0-cadenas* dadas como en (1.2). A

los elementos de su espacio dual, esto es, el espacio vectorial de las funciones reales (complejas) lineales que toman valores sobre cada 0 – *cadena* los denominamos 0 – *cocadenas*. Examinando las 0 – *cocadenas*

$$\chi_{\delta_x}(\delta_y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \quad (1.6)$$

se tiene que las aplicaciones $\{\chi_{\delta_x}\}_{x \in V}$ forman una base del espacio de las 0 – *cocadenas*, por lo que toda 0 – *cocadena* u , puede expresarse como

$$u = \sum_{x \in V} u(x) \chi_{\delta_x}.$$

Denotando por \langle, \rangle la dualidad entre 1 – *cadena*s y 1 – *cocadena*s, se tiene

$$E(I) = \langle E, I \rangle = \sum_{B \in X} e(B) i(B). \quad (1.7)$$

Análogamente para 0 – *cadena*s y 0 – *cocadena*s, se tiene

$$u(j) = \langle u, j \rangle = \sum_{x \in V} u(x) j(x). \quad (1.8)$$

1.2.1. Los operadores frontera y cofrontera

Sea $I \in \mathcal{C}$ y consideremos el operador $\partial: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}(V)$ definido como

$$\partial I = \sum_{x \in V} \left(\sum_{y \sim x} I(x, y) \right) \delta_x. \quad (1.9)$$

Al operador ∂ lo denominamos *operador frontera*. Nótese que dicho operador es lineal, en efecto, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial(\alpha I + \beta J) &= \sum_{x \in V} \left(\sum_{y \sim x} \alpha I(x, y) + \sum_{y \sim x} \beta J(x, y) \right) \delta_x = \\ &= \alpha \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} I(x, y) \delta_x + \beta \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} J(x, y) \delta_x = \alpha \partial I + \beta \partial J. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\partial I(x)$ a la expresión $\sum_{y \sim x} I(x, y)$ para cada $x \in V$.

Dada una 0 – *cadena* i expresada como en (1.2), el operador frontera actuando sobre la 0 – *cadena* i es el valor real

$$\partial i = \sum_{x \in V} i(x).$$

Un *ciclo* es una $1 - \text{cadena}$ I tal que $\partial I = 0$. Nótese que esta nueva definición extiende el concepto de ciclo usual entendido como una sucesión de vértices donde el vértice final y el inicial coinciden. En este sentido, se entenderá por ciclo el dado por [5] como toda aquella cadena tal que la diferencia de sumas entre sus entradas y salidas es nulo en cada uno de sus vértices, como ocurre en la definición dada previamente.

Ejemplo 1.2.1 Consideremos el siguiente grafo orientado dado en la figura 1.2 y la $1 - \text{cadena}$ definida como $I = \delta_A + \delta_B + 2\delta_C + \delta_D + \delta_E$. Es evidente que $\partial I = 0$ y por tanto, I es un ciclo.

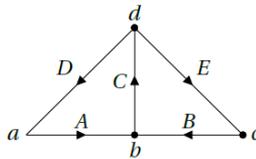


Figura 1.2: Ejemplo de ciclo sobre un grafo

Lema 1.2.2 Para cada $1 - \text{cadena}$ finita se tiene que $\partial\partial I = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una orientación X y sea $I \in \mathcal{C}$. Por definición del operador ∂ , cada una de las componentes $\partial I(x)$ de la $0 - \text{cadena}$ puede ser descompuesto como la diferencia entre la suma de valores de las aristas que salen de x y la suma de los valores de las aristas que entran en x . Aplicando de nuevo el operador frontera, basta observar que los términos se cancelan dos a dos. ◀

Dada una $0 - \text{cocadena}$ u , se define su *cofrontera* βu como la única $1 - \text{cocadena}$ que verifica

$$\langle \beta u, K \rangle = \langle u, \partial K \rangle, \quad \forall K \in \mathcal{C} \tag{1.10}$$

Al operador lineal β lo denominaremos *operador cofrontera*.

Proposición 1.2.3 El núcleo de β es unidimensional y está generado por la $0 - \text{cocadena}$

$$u = \text{Cte} \cdot \sum_{x \in V} \chi_x$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u una $0 - \text{cocadena}$ perteneciente al núcleo de β . Entonces, por (1.10) debe verificarse que

$$0 = \langle \beta u, K \rangle = \langle u, \partial K \rangle$$

para toda cadena $K \in \mathcal{C}$. En particular, si $B \in X$ es la arista $B = [x, y]$, considerando la cadena $K = \delta_B$, se tiene que $\partial K = \delta_x - \delta_y$ por lo que

$$\langle u, \delta_x \rangle = \langle u, \delta_y \rangle \quad (1.11)$$

para cualquier par vértices vecinos.

Ya que Γ es conexo, siempre podemos tomar una 1-cadena K tal que, $\partial K = \delta_{x_0} - \delta_{x_n}$, siendo x_0 y x_n los vértices inicial y final respectivamente. Así, por (1.11), se tiene que $\langle u, \delta_x \rangle$ es la constante dada por el enunciado para todo $x \in V$. Finalmente, si

$$u = \sum_{x \in V} c_x \chi_x$$

como cada $c_x = \langle u, \delta_x \rangle = cte$, se concluye el resultado enunciado. ◀

Proposición 1.2.4 Una 1-cocadena E es una cofrontera si, y sólo si $\langle E, Z \rangle = 0$ para todo ciclo finito Z .

DEMOSTRACIÓN. Si E es una cofrontera y u es 0-cocadena tal que $E = \beta u$, entonces, por (1.10) y aplicando la definición de ciclo se obtiene el resultado. Para demostrar el recíproco, fijemos $o \in V$. Por la conexidad de Γ , para cada vértice $x \in V$ existe una cadena K_x tal que $\partial K_x = \delta_x - \delta_o$. Sea u la 0-cadena definida como $\langle u, \delta_x \rangle = \langle E, K_x \rangle$. Por hipótesis u no depende de la elección de K_x , ya que, de si K'_x es 1-cadena con $\partial K'_x = \delta_x - \delta_o$, entonces $J_x = K_x - K'_x$ es un ciclo para todo $x \in V$, y por tanto

$$0 = \langle E, J_x \rangle = \langle u, \partial K_x - \partial K'_x \rangle = \langle u, \partial K_x \rangle - \langle u, \partial K'_x \rangle$$

así

$$\langle u, \partial K_x \rangle = \langle u, \partial K'_x \rangle.$$

Finalmente, para todo $x \in V$ se tiene que

$$\langle \beta u, K_x \rangle = \langle u, \partial K_x \rangle = \langle E, K_x \rangle.$$

Como las 1-cadenas K_x generan \mathcal{C} , concluimos que $\beta u = E$. ◀

1.3. Cadenas de Markov

Sea V un conjunto a lo sumo numerable. Una *cadena de Markov* es un proceso estocástico a tiempo discreto $\{0, \dots, n\}$ sobre V , al cual llamaremos espacio de estados, que satisface la propiedad de Markov, esto es,

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

es decir, la probabilidad de cada nuevo estado depende únicamente del estado inmediatamente anterior. Diremos que la cadena es *estacionaria* cuando la probabilidad de pasar de un estado cualquiera a otro permanece constante a lo largo del tiempo.

Un *núcleo de Markov* es una aplicación $P: V \times V \rightarrow [0, \infty)$ que verifica

$$\sum_{y \sim x} P(x, y) = 1, \quad (1.12)$$

para todo $x \in V$. Además, diremos que es un núcleo *reversible* si existe una función positiva μ sobre el espacio de estados tal que

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x). \quad (1.13)$$

Nótese que, si disponemos de un núcleo de Markov reversible, según la definición (1.13), la función $\mu_{xy} = \mu(x)P(x, y)$ es simétrica.

Dado (Γ, μ) un grafo conexo, pesado y localmente finito, según [2], siempre podemos construir, a partir de una función peso, un núcleo de Markov, que resultará reversible. En efecto, consideremos

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{\mu_{xy}}{\mu(x)}, & x \sim y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.14)$$

la cual verifica las propiedades dadas por (1.12) y (1.13), de aquí, es núcleo de Markov reversible. Nótese que cuando la función peso es simple, el núcleo de Markov queda definido como

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)}, & x \sim y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A la función $P(x, y)$ la denominamos *función de transición* mientras que, para grafos finitos, a la matriz $P = (\mu_{xy})_{x, y \in V}$ de tamaño $n \times n$, siendo $n = |V|$, la denominaremos *matriz estocástica*.

Supongamos que nos encontramos en un vértice x_0 y aleatoriamente según la función de transición pasamos a un nuevo vértice (o estado) x_1 . Repitiendo este proceso n veces tendremos una sucesión de variables aleatorias $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ a las cuales llamaremos *caminio aleatorio*.

Dado un camino aleatorio $\{X_0, \dots, X_n\}$ llamamos *función de transición en n pasos* a la función

$$P_n(x, y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x). \quad (1.15)$$

En la Teoría de Juegos la función de transición juega un valor central, ya que, fijado $x_0 \in V$, la función definida como $\nu_n(x) = P_n(x_0, x)$ es la distribución de la variable X_n .

Teorema 1.3.1 *La función de transición de probabilidad en n pasos es un núcleo de Markov. Además, se verifica la relación*

$$P_{n+1}(x, y) = \sum_{z \sim y} P_n(x, z)P(z, y) \quad (1.16)$$

DEMOSTRACIÓN. Demostremos (1.16) procediendo por inducción. Para el caso $n = 0$ el resultado es obvio. Supongamos cierto para n . Se tiene

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(x, y) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x) = \\
 &= \sum_{x_1, \dots, x_n \in V} \mathbb{P}(X_{n+1} = y, X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1 | X_0 = x_0) = \\
 &= \sum_{z \in V} \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in V} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = z) \mathbb{P}(X_n = z, \dots, x_1 = x_1 | X_0 = x) = \\
 &= \sum_{z \in V} P_n(x, z) P(z, y).
 \end{aligned}$$

Finalmente, sumando en $y \in V$ se tiene que

$$\sum_{y \in V} P_n(x, y) = \sum_{z \in V} \sum_{y \in V} P_{n-1}(x, z) P(z, y) = \sum_{z \in V} P_{n-1}(x, z) = 1 \quad \blacktriangleleft$$

Dado un grafo conexo, localmente finito y pesado (Γ, μ) , sobre el espacio vectorial $\mathcal{F}(V)$ de las funciones definidas sobre el grafo definimos el *operador de Markov* como

$$\begin{aligned}
 P : \mathcal{F}(V) &\rightarrow \mathcal{F}(V) \\
 u \rightarrow P(u)(x) &= \sum_{y \in V(x)} P(x, y) u(y).
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.4. Funciones armónicas sobre grafos

El objeto principal de estudio de este trabajo se centra en el estudio de los autovalores del operador de Laplace definido sobre grafos conexos, pesados y localmente finitos. Antes de definir el operador de Laplace sobre grafos, recordemos que en el caso continuo, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, para $k \geq 2$. Se define el operador de Laplace, Δ , $\Delta : \mathcal{C}^k(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}^{k-2}(\Omega)$ dado por

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Diremos que una función es *armónica* en Ω si se tiene la identidad $\Delta u = 0$ para todo $x \in \Omega$. Para el caso discreto, en particular para grafo, tenemos la siguiente definición

Definición 1.4.1 Sea (Γ, μ) grafo conexo, localmente finito y pesado. Al operador $\Delta_\mu : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ definido como

$$\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} f(y) - f(x), \quad \forall x \in V \tag{1.18}$$

lo denominamos *operador pesado de Laplace*.

De la definición de Δ_μ se desprende el hecho de que es lineal, en efecto, si tomamos $f, g \in \mathcal{F}(V)$ y $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_\mu(\lambda f + \sigma g)(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy}(\lambda f(y) + \sigma g(y)) - (\lambda f(x) + \sigma g(x)) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} f(y) - f(x) \right) + \sigma \left(\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} g(y) - g(x) \right) \\ &= \lambda \Delta_\mu f(x) + \sigma \Delta_\mu g(x). \end{aligned}$$

Para el núcleo considerado en (1.14), de (1.18) y (1.17) tenemos

$$\Delta_\mu = P - Id \tag{1.19}$$

donde Id es el operador identidad en $\mathcal{F}(V)$.

Una función $f \in \mathcal{F}(V)$ definida sobre un grafo pesado, conexo y localmente finito $\Gamma = (V, E)$ se dice *subarmónica* en V si $\Delta_\mu f \geq 0$, para todo $x \in V$, mientras que se dice *superarmónica* en V si $\Delta_\mu f \leq 0$ para todo $x \in V$. Una función se dirá *armónica* en V si es a la vez superarmónica y subarmónica, esto es, si $\Delta_\mu f = 0$.

Nótese por un lado que $f \in \mathcal{F}(V)$ sea armónica equivale a que $f \in Ker(\Delta_\mu)$. A lo largo de las próximas secciones se demostrará que $\lambda = 0$ es un autovalor simple del operador Δ_μ . Por otro lado si tomamos $f \in \mathcal{F}(V)$ tal que $f = c$, con c constante se tiene

$$\Delta_\mu c = \sum_{y \sim x} P(x, y)c - c = c \sum_{y \sim x} P(x, y) - c = c - c = 0$$

de donde se deduce que toda función constante es armónica asociada al autovalor $\lambda = 0$.

Sea $\Omega \subset V$ tal que $\Omega^c \neq \emptyset$, se define el conjunto de *vértices frontera*, o simplemente *frontera*, $\partial\Omega$ como

$$\partial\Omega = \{y \in \Omega^c \mid y \sim x \text{ para algún } x \in \Omega\}$$

Al conjunto de las funciones definidas sobre $\Omega \subset V$ lo denotaremos como $\mathcal{F}_\Omega(V)$.

Lema 1.4.2 (Principio del máximo (mínimo)) *Sea (Γ, μ) un grafo pesado, conexo y localmente finito conexo y $\Omega \subset V$ tal que $\Omega^c \neq \emptyset$. Entonces, para cualquier función $u : V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ subarmónica en Ω se tiene*

$$\max_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega^c} u,$$

y para cualquier función superarmónica

$$\inf_{\Omega^c} u \leq \min_{\Omega} u.$$

En consecuencia, si una función es armónica, entonces, sus valores máximos y mínimos se alcanzan en la frontera.

DEMOSTRACIÓN. Basta demostrar el lema para funciones subarmónicas. En efecto, sea $u \in \mathcal{F}(V)$, u subarmónica y supongamos que $\sup_{\Omega^c} u < \infty$ (si $\sup_{\Omega^c} u = \infty$ no habría nada que probar). Entonces, reemplazando u por $u + c$, con c constante adecuada, podemos asumir que $\sup_{\Omega^c} u = 0$.

Consideremos ahora

$$M = \max_{\Omega} u$$

y demosremos que $M \leq 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $M > 0$ y consideremos el conjunto

$$S = \{x \in V \mid u(x) = M\}$$

el cual verifica que $S \subset \Omega$, ya que el valor máximo de u es cero en Ω^c y $S \neq \emptyset$.

Como $\Delta_{\mu} u \geq 0$, entonces, para cualquier $x \in S$ se verifica

$$u(x) \leq \sum_{y \sim x} P(x, y) u(y) \leq \sum_{y \sim x} P(x, y) M = M. \quad (1.20)$$

Ahora bien, como $x \in S$, entonces $u(x) = M$ y, por tanto, en la expresión (1.20) debe verificarse que $u(y) = M$ para todo vértice $y \in V$ vecino del vértice x , por lo que el vértice y también pertenece al conjunto S . Consideremos ahora los vértices $x \in S \subset \Omega$ e $y \in \Omega^c$. Como el grafo $\Gamma = (V, E)$ es conexo, existe un camino que conecta los vértices x e y , así, si el camino es

$$x \sim x_1 \sim \dots \sim x_{k-1} \sim y$$

tenemos, por lo expuesto con anterioridad, que $x_1 \in S$ al ser x_1 vértice vecino de x . Repitiendo el proceso se tiene que $y \in S$, lo cual es una contradicción. ◀

1.5. El problema de Dirichlet

Se formula a continuación el problema de Dirichlet para el caso continuo, el cual consiste en encontrar una función incógnita $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega; \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En la definición del operador laplaciano Δ_{μ} sobre el espacio $\mathcal{F}(V)$, siendo V el conjunto de vértices de un grafo $\Gamma = (V, E)$ conexo localmente finito pesado, se demostró que un función era armónica si y sólo si era constante. Si $\Omega \subset V$ es un

conjunto finito tal que $\Omega^c \neq \emptyset$, entonces, es fácil comprobar que la armonicidad de las funciones constantes no se verifica, ya que, por propia definición del operador laplaciano, existirán vértices de Ω tales que alguno de sus vecinos no pertenecerán a Ω .

Definición 1.5.1 *Dado un grafo $\Gamma = (V, E)$ pesado, conexo, localmente finito, y $\Omega \subset V$ tal que $\Omega^c \neq \emptyset$, al problema de encontrar una función $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta_\mu u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega^c \end{cases} \quad (1.21)$$

donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones dadas, se le denomina problema de Dirichlet.

Nótese que la condición $\Delta_\mu u(x) = f(x)$ sólo se ve afectada por los valores de la función $g(x)$ en aquellos vértices de Ω que tengan algún vecino perteneciente a $\partial\Omega$. Por ello, el problema de Dirichlet dado por (1.21) puede ser planteado de forma equivalente cambiando la segunda condición por

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Teorema 1.5.2 *Consideremos el problema de Dirichlet dado por la definición 1.5.1. Entonces, si Ω es finito, para cualquier función $f, g \in \mathcal{F}(V)$ dadas, el problema planteado por (1.21) tiene una única solución.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos primero la unicidad suponiendo que existen dos funciones $u_1, u_2 \in \mathcal{F}(V)$ verificando las expresiones dadas por (1.21). Entonces, para la función $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ se tiene

$$\begin{cases} \Delta_\mu v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ v(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

esto es, la función $v(x)$ es armónica en Ω y aplicando ahora el lema 1.4.2, se tiene que $v \equiv 0$.

Demostremos la existencia para cualquier función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \Omega^c \rightarrow \mathbb{R}$. Para $x \in \Omega$, reescribiendo la ecuación $\Delta_\mu u(x) = f(x)$ y separando los términos de los vértices vecinos que pertenecen a $\partial\Omega$ de los que pertenecen a Ω se tiene

$$\sum_{y \sim x, y \in \Omega} P(x, y)u(y) - u(x) = f(x) - \sum_{y \sim x, y \in \partial\Omega} P(x, y)g(y)$$

donde $u(y) = g(y)$ para $y \in \partial\Omega$. Nótese que $\mathcal{F}_\Omega(V)$, al ser Ω finito (pongamos $|\Omega| = k$) es un espacio vectorial donde el conjunto $\{f_1, \dots, f_k\}$ de funciones de $\mathcal{F}_\Omega(V)$ definidas como

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}$$

forman una base, mientras que el operador $L : \mathcal{F}_\Omega(V) \rightarrow \mathcal{F}_\Omega(V)$ definido como

$$Lu(x) = \sum_{y \sim x, y \in \Omega} P(x, y)u(y) - u(x)$$

es lineal. Así, L es un operador lineal actuando sobre un espacio vectorial de dimensión finita, además, si $Lu = 0$, entonces se tiene que $u = 0$, por lo que el operador L es inyectivo.

Como L es un operador inyectivo actuando sobre espacios vectoriales de la misma dimensión se puede concluir que el operador L es biyectivo y, por tanto, es inversible de donde, denotando

$$h(x) = f(x) - \sum_{y \sim x, y \in \partial\Omega} P(x, y)g(y)$$

finalmente tenemos que la solución de (1.21) viene dada por $u = L^{-1}h$. ◀

Nótese que, si P representa la matriz asociada al operador de Markov del grafo $\Gamma = (V, E)$ y $\Omega \subset V$, en las condiciones del teorema anterior, podemos reetiquetar los vértices, o simplemente reordenar la matriz P de tal manera que, si $|\Omega| = k$, las primeras k entradas de la matriz P representen los valores asociados al núcleo de Markov de los vértices contenidos en Ω . Así, la matriz P puede ser descompuesta como

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

donde la matriz A actúa sobre los valores de la función objetivo $u = u(x)$ en los vértices de Ω mientras que B actúa sobre los valores de $\partial\Omega$ para los cuales se verifica que $u(x) = g(x)$. Así, podemos escribir, denotando por u, f y g el vector columna de los valores de la función incógnita en Ω y los de las funciones dadas respectivamente en los valores de Ω para f y $\partial\Omega$ para g

$$(A - I) \cdot u = f - B \cdot g$$

de donde concluimos que

$$u = (A - I)^{-1}f - (A - I)^{-1} \cdot B \cdot g. \quad (1.22)$$

Ejemplo 1.5.3 Consideremos el siguiente grafo sobre el cual la función peso μ es simple. Veamos a modo ilustrativo cómo resolver el problema de Dirichlet. Sea $\Omega = \{1, 3, 4\}$, por lo que $\partial\Omega = \{2, 5\}$. Planteemos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{\mu} u(x) = f(x); & x \in \Omega \\ u(x) = g(x); & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

donde las funciones f y g están definidas como $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. La matriz asociada al operador de Markov viene dada por

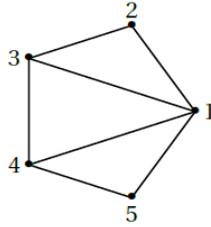


Figura 1.3: Grafo aplicado al problema de Dirichlet

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Reordenando los vértices de tal manera que las primeras entradas de la matriz P sean los valores sobre los vértices de Ω se tienen los siguientes bloques de matrices

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

mientras que los vectores columnas de las funciones prescritas son

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, aplicando (1.22) obtenemos los valores de u en Ω siendo $u(x) = g(x)$ cuando $x \in \Omega^c$. Se tiene

$$u^t = \left(\frac{29}{3} \quad \frac{55}{12} \quad \frac{109}{12} \right).$$

1.6. Las leyes de Kirchhoff y su relación con las funciones armónicas

En la precedente sección se tomará como definición de laplaciano el dado por

$$\mathcal{L} = 1 - P$$

el cual se denomina *operador de Laplace definido positivo*. Un circuito eléctrico puede ser modelado mediante el uso de cadenas y cocadenas. Las primeras, representarán

las intensidades del circuito, mientras que, las segundas los potenciales. Considerando el grafo $G = (V, E)$ obtenido al considerar como conjunto de vértices los nodos del circuito y como aristas las conexiones dadas por el circuito. La resistencia entre dos vértices vecinos $x, y \in V$ se denotará como $r(x, y)$. A la expresión $c(x, y) = r(x, y)^{-1}$ la denominaremos *conductancia* de la arista que conecta los vértices x e y , mientras que, a la expresión $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$ la denominaremos conductancia total del vértice x . Para modelar la intensidad se tomará la función $i : E \rightarrow \mathbb{R}$, la cual, verificará que $i(x, y) = -i(y, x)$ (lo cual implica que la intensidad sobre lazos es nula). Expresamos ahora las intensidades que circulan sobre el circuito como la 1-Cadena

$$I = \sum_{B \in X} i(B) \partial_B$$

Definimos finalmente el operador resistencia como $\mathcal{R}(I) = \sum_{B \in X} i(B) r(B) \chi_B$. En estas condiciones las leyes de Kirchhoff establecen

1. $\partial I + j = 0$
2. $\langle \mathcal{R}(I) - F, Z \rangle = 0$ para todo ciclo finito Z .

donde la 0-cadena j representa alguna acción exterior sobre algún nodo y F la 1-cocadena que representa acciones exteriores sobre el potencial.

Nótese que el operador \mathcal{R} es biyectivo y lineal, por tanto, podemos, por ser biyectivo, considerar la 1-cadena dada por $E = \mathcal{R}^{-1}(F)$ y, por ser lineal, se verificará además que $\mathcal{R}(I) - \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}(F)) = \mathcal{R}(I - E)$. Así, llamando $K = I - E$, se tiene que $\partial I = \partial K + \partial E$. Aplicando estas transformaciones a las leyes de Kirchhoff, llamando $i = \partial E + j$ y renombrando la 1-cadena K como I se tiene que

1. $\partial I + i = 0$
2. $\langle \mathcal{R}(I), Z \rangle = 0$ para todo ciclo finito Z .

Como $\mathcal{R}(I)$ es una 1-cocadena la cual verifica

$$\langle \mathcal{R}(I), Z \rangle = 0, \forall Z \text{ ciclo,}$$

en virtud del teorema 1.2.4 es la cofrontera de una 0-cocadena u , esto es, $\mathcal{R}(I) = \beta u$, y así, para $B \in X$ con $B = [x, y]$, al ser $u = \sum_{x \in V} u(x) \delta_x$ tenemos que

$$r(x, y) i(x, y) = \langle \mathcal{R}(I), \partial_B \rangle = \langle u, \delta_x - \delta_y \rangle = u(x) - u(y) \tag{1.23}$$

por lo que podemos expresar $i(x, y) = c(x, y)(u(x) - u(y))$ para cada par de vecinos $x \sim y$.

Si se sustituyen los valores obtenidos para $i(x, y)$ en función de los valores de u en la cadena I , y calculando ahora su frontera, según las leyes de Kirchhoff, para cada vértice $x \in V$ se deberá cumplir la ecuación

$$\sum_{y \sim x} c(x, y)(u(x) - u(y)) + i(x) = 0. \tag{1.24}$$

Definamos ahora

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{c(x, y)}{c(x)}, & x \sim y \\ 0, & x \not\sim y. \end{cases} \tag{1.25}$$

función que verifica que $\sum_{y \sim x} P(x, y) = 1$, por lo cual, es un núcleo de Markov. Dividiendo la expresión (1.24) por $c(x)$, y denotando por $f(x) = -i(x)c(x)^{-1}$ se obtiene la expresión.

$$u(x) - \sum_{y \in V(x)} P(x, y)u(y) = f(x). \tag{1.26}$$

Un caso que presenta especial interés por su relación en sí con los futuros conceptos, es el caso en el que la función $i(x)$ es nula, ya que, de serlo, debe ser, por (1.26)

$$u(x) - \sum_{y \sim x} P(x, y)u(y) = 0 \tag{1.27}$$

por lo que la función $u = u(x)$ definida sobre el conjunto de vértices V es una función armónica.

Ejemplo 1.6.1 Consideremos el siguiente circuito

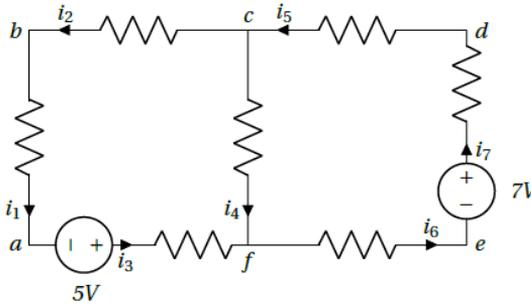


Figura 1.4: Ejemplo de modelización de circuito eléctrico

donde la orientación de las intensidades se ha tomado arbitrariamente y cada una de las resistencias tiene asignado el valor de 1 ohmio.

Sea la 1-cadena dada por $I = \sum_{k=1}^7 i_k \delta_k$, la cual modeliza las intensidades objetivo del circuito. Calculando ahora su frontera obtenemos la 0-cadena

$$\begin{aligned} \partial I = & (i_3 - i_1)\partial_a + (i_1 - i_2)\partial_b + (i_2 + i_4 - i_5)\partial_c + (i_5 - i_7)\partial_d \\ & + (i_7 - i_6)\partial_e + (i_6 - i_3 - i_4)\partial_f. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Por otro lado, la 1-cocadena F que representa los voltajes externos vendrá dada por

$$F = 5\chi_3 + 7\chi_7$$

mientras que el operador resistencia está definido como

$$\mathcal{R}(I) = i_1\chi_1 + i_2\chi_2 + i_3\chi_3 + i_4\chi_4 + i_5\chi_5 + i_6\chi_6 + i_7\chi_7$$

al ser todas las resistencias iguales a uno. Consideremos finalmente los ciclos definidos como

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_1 + \partial_2 + \partial_3 - \partial_4 \\ Z_2 &= \partial_4 + \partial_5 + \partial_6 + \partial_7 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la primera ley de Kirchhoff se tiene que, de ser $\partial I = 0$, en la expresión (1.28) deben ser cada una de las componentes de dicha 0-cadena nulas. Por otro lado, aplicando la segunda ley a cada uno de los ciclos se tiene, para el primero de ellos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(I) - F, Z_1 \rangle &= i_1 + i_2 + i_3 - 5 - i_4 = 0 \\ \langle \mathcal{R}(I) - F, Z_2 \rangle &= i_4 + i_5 + i_6 + i_7 - 7 = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

En resumen, se ha obtenido el siguiente sistema de ecuaciones expresado matricialmente como

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones vienen dadas por

$$i_1 = i_2 = i_3 = \frac{9}{5}, \quad i_4 = \frac{2}{5}, \quad i_5 = i_6 = i_7 = \frac{11}{5}.$$

Finalmente, para hallar la función potencial, utilizando (1.23), u vendrá dada por

$$u(a) = \frac{-16}{5} + \lambda, \quad u(b) = \frac{-7}{5} + \lambda, \quad u(c) = \frac{2}{5} + \lambda, \quad u(d) = \frac{13}{5} + \lambda, \quad u(e) = \frac{-11}{5} + \lambda, \quad u(f) = \lambda$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que la función u verifica

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{(\partial E)(x)}{c(x)}, \quad x \in \{a, b, c, d, e, f\}$$

donde $E = \mathcal{R}^{-1}(F)$, por lo que resolver el problema de Dirichlet sobre un grafo es equivalente a resolver un circuito eléctrico.

Análisis en Grafos

En el presente capítulo se estudia el espectro del operador de Laplace \mathcal{L} definido positivo, tanto para grafos finitos como infinitos, a lo sumo contable. Se comienza introduciendo la identidad de Green, la cuál será clave en la mayoría de los razonamientos presentados. A continuación, definiremos un producto interior sobre el espacio $\mathcal{F}(V)$ para proseguir con el estudio del espectro del operador de Laplace y las principales propiedades en grafos finitos. Se define a continuación los grafos de Cayley y, en particular, se presentará el cálculo del espectro del operador de Laplace para la familia de grafos cíclicos. Finalmente, se introducirá el operador de Dirichlet-Laplace, se establecerán acotaciones para el autovalor principal de dicho operador y se presentará el método de Jacobi para resolver el problema de Dirichlet.

2.1. La identidad de Green. Simetría del operador de Laplace

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo pesado, localmente finito y conexo. Para cualquier función $f \in \mathcal{F}(V)$ se define el *operador diferencia* para dos vértices cualesquiera $x, y \in V$ como

$$\nabla_{xy}f = f(y) - f(x).$$

De la definición del operador de Laplace y el operador diferencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}f(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} f(y)\mu_{xy} - f(x) = \sum_{y \sim x} P(x, y)f(y) - \sum_{y \sim x} P(x, y)f(x) \\ &= \sum_{y \sim x} P(x, y)(f(y) - f(x)) = \sum_{y \sim x} P(x, y) \cdot (\nabla_{xy}f). \end{aligned}$$

A continuación, se establece la *identidad de Green*, que será fundamental en la mayoría de razonamientos planteados a lo largo de este capítulo

Proposición 2.1.1 (Identidad de Green.) Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo pesado, localmente finito, conexo y $\Omega \subset V$ subconjunto no vacío finito. Entonces, para cualesquiera dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(V)$ se tiene

$$\sum_{x \in \Omega} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy} \quad (2.1)$$

En particular, si V es finito y $\Omega = V$, entonces, la expresión (2.1) resulta

$$\sum_{x \in V} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy}. \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathcal{F}(V)$ y $\Omega \subset V$ finito tal que $\Omega^c \neq \emptyset$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) &= \sum_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} f(y) - f(x) \right) g(x) \mu(x) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \left(\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} f(y) - \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \mu_{xy} f(x) \right) g(x) \mu(x) \\ &= \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in V} (f(y) - f(x)) g(x) \mu_{xy} \\ &= \sum_{x, y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (f(y) - f(x)) g(x) \mu_{xy} \end{aligned}$$

Nótese que en Ω se verifica

$$\sum_{x, y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \mu_{xy} = \sum_{x, y \in \Omega} (f(x) - f(y)) g(y) \mu_{xy}$$

por lo que tenemos las expresiones

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) &= \sum_{x, y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(x) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy} \\ &= - \sum_{x, y \in \Omega} (f(y) - f(x)) (-g(x)) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy} \\ \sum_{x \in \Omega} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) &= \sum_{x, y \in \Omega} (f(x) - f(y)) g(y) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy} \\ &= - \sum_{x, y \in \Omega} (f(y) - f(x)) g(y) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy} \end{aligned}$$

de donde sumando ambas expresiones y dividiendo entre dos se tiene que

$$\sum_{x \in \Omega} \Delta_{\mu} f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} + \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy}$$

y en particular, cuando $\Omega = V$, esto es, $\Omega^c = \emptyset$, la expresión anterior resulta ser

$$\sum_{x \in V} \Delta_\mu f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy}. \quad \blacktriangleleft$$

Recordemos que, dado un espacio vectorial Λ , un producto interior es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal.
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, para todo $x, y \in \Lambda$ (condición de simetría).
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida positiva, esto es, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo pesado, localmente finito y conexo. Dadas $f, g \in \mathcal{F}(V)$ como se puede comprobar fácilmente,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in V} f(x) g(x) \mu(x) \tag{2.3}$$

define producto interior en $\mathcal{F}(V)$.

Proposición 2.1.2 *El operador de la Laplace es simétrico respecto al producto (2.3), esto es*

$$\langle \Delta_\mu f, g \rangle = \langle f, \Delta_\mu g \rangle, \forall f, g \in \mathcal{F}(V). \tag{2.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $f, g \in \mathcal{F}(V)$, entonces, aplicando la identidad de Green, se tiene que

$$\langle \Delta_\mu f, g \rangle = \sum_{x \in V} \Delta_\mu f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} = \langle f, \Delta_\mu g \rangle \quad \blacktriangleleft$$

En lo que sigue, con el fin de que el espectro del operador de Laplace posea todos sus autovalores no negativos, se considerará, como procedimiento estándar al operador $\mathcal{L} = -\Delta_\mu$. Nótese que la identidad de Green se expresa como

$$\sum_{x \in \Omega} \mathcal{L} f(x) g(x) \mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} - \sum_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega^c} (\nabla_{xy} f) g(x) \mu_{xy}$$

2.2. Espectro del operador de Laplace en grafos finitos

En la sección anterior vimos que el operador de Laplace es simétrico sobre el espacio vectorial $\mathcal{F}(V)$. En esta sección, se estudian algunas propiedades que verifican sus autovalores.

Puesto que \mathcal{L} es simétrico, todos sus autovalores son reales. Así, teniendo en cuenta que para $c \in \mathcal{F}(V)$, con c constante, se verifica que $\mathcal{L}c = 0$, $\lambda = 0$ es un autovalor para el que cualquier función constante es una autofunción asociada.

Por otro lado, si $f \in \mathcal{F}(V)$ es una autofunción asociada al autovalor $\lambda = 0$. Aplicando la identidad de Green, se tiene que

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (f(y) - f(x))^2 \mu_{xy} = 0$$

y por tanto el valor de f en cualquier vértice $x \in V$ es igual a su valor en cada uno de sus vértices vecinos. Ya que en este trabajo se considerarán exclusivamente grafos conexos, dados cualesquiera dos vértices $x, y \in V$ podemos encontrar un camino

$$x \sim x_1 \sim \dots \sim x_{n-1} \sim y$$

que los conecta, y, en consecuencia, $f(x) = f(x_1) = \dots = f(y)$. Por tanto la función f es constante, por lo que $\lambda = 0$ es un autovalor simple del operador de Laplace.

Proposición 2.2.1 *Sea $\Gamma(V, E)$ un grafo pesado, finito y conexo. Consideremos \mathcal{L} operador de Laplace definido positivo. Entonces, si λ es autovalor de \mathcal{L} se verifica*

- (i) λ pertenece al intervalo $[0, 2]$, por lo que todos los autovalores son no negativos.
- (ii) Si $\lambda = 2$ es autovalor, entonces, Γ es bipartito.

DEMOSTRACIÓN. Sea λ autovalor de \mathcal{L} operador de Laplace. Entonces, por la identidad de Green, cualquier autofunción f asociada al autovalor λ tenemos que

$$\lambda \langle f, f \rangle = \langle \mathcal{L}f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy}$$

por lo que sus autovalores son, de hecho, mayores o iguales a cero. Para demostrar que los autovalores son menores o iguales a 2, usaremos el hecho de que

$$(f(x) - f(y))^2 \leq 2(f(x)^2 + f(y)^2). \quad (2.5)$$

De la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} \lambda \langle f, f \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy} \leq \sum_{x,y \in V} (f(x)^2 + f(y)^2) \mu_{xy} \\ &= 2 \sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x) = 2 \langle f, f \rangle \end{aligned}$$

y, por tanto, $\lambda \leq 2$, como afirma (i).

Si $\lambda = 2$ es autovalor, entonces, debe darse la igualdad en la desigualdad dada por (2.5), por tanto

$$f(x) + f(y) = 0$$

para cualesquiera vértices vecinos $x, y \in V$. Si f es una autofunción correspondiente, tal que $f(x) = 0$, entonces, de la expresión anterior, ha de ser $f(y) = 0$ para cualquier vértice vecino $y \in V$ de x , y puesto que el grafo se supone conexo, $f \equiv 0$, que contradice

el hecho de que f es autofunción. Así, cualquier autofunción f permite considerar la partición de V

$$V^+ = \{x \in V / f(x) > 0\} \quad \text{y} \quad V^- = \{x \in V / f(x) < 0\}$$

los cuales forman una partición sobre el conjunto de vértices V que verifica que el conjunto de aristas entre vértices de un mismo conjunto es vacío, y por tanto, es un grafo bipartito, como afirma (ii). ◀

Nótese que si el grafo es bipartito resultará que $\lambda = 2$ es también un autovalor de \mathcal{L} como se demostrará en la proposición 2.2.5.

De la simetría del operador de Laplace, sabemos que siempre podemos construir una base de autofunciones f_k ortonormales de tal manera que respecto a dicha base, la matriz asociada a \mathcal{L} es diagonal. Además, se tiene

Proposición 2.2.2 (El principio variacional) *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y un operador simétrico A sobre V con autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_n$. El cociente de Rayleigh definido en $V \setminus \{0\}$ como*

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \tag{2.6}$$

verifica, para todo $k = 1, \dots, N$

$$\lambda_k = \mathcal{R}(v_k) = \inf_{v \perp v_1, \dots, v_{k-1}} \mathcal{R}(v)$$

donde v_k es un autovector correspondiente a λ_k .

En particular, siempre podemos construir una base ortonormal de autofunciones.

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos la demostración dada por [1]. En efecto, consideremos el polinomio cuadrático homogéneo definido como

$$Q(u) = \langle Au, u \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j$$

y sea S_1 la esfera unidad en \mathbb{R}^n . Sean $\lambda_1 = \min\{Q(u)/u \in S_1\}$, y $u_1 \in S_1$ uno de los vectores donde se alcance dicho mínimo. Aplicando ahora la regla de los multiplicadores de Lagrange se tiene que $\nabla Q(u_1) = \sigma \nabla g(u_1)$ (siendo $g(u) = \|u\|^2 - 1$) para cierto $\sigma \in \mathbb{R}$. Como $\nabla Q(u) = 2Au$ y $\nabla g(u) = 2u$, tendremos que $Au_1 = \sigma u_1$, esto es, u_1 es un autovalor asociado a σ . Por otro lado,

$$\lambda_1 = Q(u_1) = \langle Au_1, u_1 \rangle = \sigma \langle u_1, u_1 \rangle = \sigma,$$

y u_1 es autovector asociado a λ_1 .

Sean ahora

$$S_2 = \{u \in S_1 / \langle u, u_1 \rangle = 0\},$$

$$\lambda_2 = \text{mín} \{Au / u \in S_2\}$$

y $u_2 \in S_2$ tal que $Q(u_2) = \lambda_2$. Como $S_2 \subset S_1$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$. De nuevo, por la regla de los multiplicadores, existen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla Q(u_2) = \sigma_1 \nabla g(u_2) + \sigma_2 \nabla g_2(u_2).$$

Como $\nabla g_2(u) = u_1$. Así, tenemos

$$2Au_2 = 2\sigma_1 u_2 + \sigma_2 u_1,$$

y puesto que

$$\langle 2Au_2, u_1 \rangle = 2\sigma_1 \langle u_2, u_1 \rangle + \sigma_2 \langle u_1, u_1 \rangle = \sigma_2$$

$$\langle 2Au_2, u_2 \rangle = 2\sigma_1 \langle u_2, u_2 \rangle + \sigma_2 \langle u_1, u_2 \rangle = 2\sigma_1,$$

tenemos que $\lambda_2 = Q(u_2) = \langle Au_2, u_2 \rangle = \sigma_1$. Como A es simétrica, se verifica que $\sigma_2 = \langle Au_2, u_1 \rangle = \langle u_2, \lambda_1 u_1 \rangle = 0$. Por tanto, u_2 es autovalor asociado a λ_2 . Continuando de esta forma, al ser V espacio vectorial finito podemos terminar el procedimiento con lo que se demuestra el resultado deseado. ◀

Hasta ahora, sabemos que el operador de Laplace \mathcal{L} para un grafo pesado, conexo y finito con $|V| = N$ es simétrico donde todos sus autovalores son no negativos comprendidos en $[0, 2]$, donde $\lambda = 0$ autovalor simple y $\lambda = 2$ autovalor que sólo encontraremos para grafos bipartitos. En lo que sigue ordenaremos los autovalores en orden creciente, esto es $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \dots \leq \lambda_{N-1} \leq 2$. Antes de probar las principales propiedades del espectro de \mathcal{L} se demuestran varios lemas que serán de utilidad más adelante.

Lema 2.2.3 *Sea $z \in V$ arbitrario, pero fijo y consideremos la función indicatriz $f = 1_{\{z\}}$. Entonces, $\mathcal{R}(f) \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, se tiene que

$$\langle f, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x) = \mu(z).$$

Por otro lado, aplicando la identidad de Green se tiene que

$$\langle \mathcal{L}f, f \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (f(y) - f(x))^2 \mu_{xy} = \sum_{y \neq z} (f(z) - f(y))^2 \mu_{zy} = \sum_{y \neq z} \mu_{zy} \leq \mu(z)$$

y de aquí el resultado deseado. ◀

Lema 2.2.4 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(V)$ funciones sobre V tales que $\mathcal{R}(f) \leq 1$, $\mathcal{R}(g) \leq 1$ y sus soportes sean disjuntos y tales que no existan aristas que conecten vértices entre dichos soportes. Entonces, $\mathcal{R}(f + g) \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que $(\mathcal{L}f)g \equiv 0$. En efecto, si $g(x) = 0$ el resultado es inmediato. Si $g(x) \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ y, además, al ser los soportes desconexos, $f(y) = 0$ para cada $y \sim x$. Así, tenemos que

$$\mathcal{L}f(x) = f(x) - \sum_{y \in V} P(x, y)f(y) = 0$$

por lo que $(\mathcal{L}f)g \equiv 0$. Utilizando ahora las igualdades $fg = (\mathcal{L}f)g = (\mathcal{L}g)f = 0$, se tiene

$$\langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + 2\langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle$$

y

$$\langle \mathcal{L}(f + g), f + g \rangle = \langle \mathcal{L}f, f \rangle + \langle \mathcal{L}g, g \rangle.$$

Aplicando la hipótesis ahora, tenemos que

$$\mathcal{R}(f + g) = \frac{\langle \mathcal{L}f, f \rangle + \langle \mathcal{L}g, g \rangle}{\langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle} \leq 1. \quad \blacktriangleleft$$

Proposición 2.2.5 *Sea (Γ, μ) un grafo finito, conexo y pesado con $|V| > 1$. Entonces*

a) *Se verifican las siguientes relaciones*

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1} \leq N \tag{2.7}$$

por lo que

$$\lambda_1 \leq \frac{N}{N-1}. \tag{2.8}$$

Además, si el grafo no tiene lazos, entonces

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1} = N \tag{2.9}$$

y así

$$\lambda_{N-1} \geq \frac{N}{N-1}. \tag{2.10}$$

b) *Si el grafo (Γ, μ) es completo y el peso μ es simple, entonces, $\lambda_k = \frac{N}{N-1}$ para $k = 1, \dots, N-1$.*

c) *Si (Γ, μ) no es completo, entonces $\lambda_1 \leq 1$.*

d) *Si (Γ, μ) es un grafo bipartito y λ es un autovalor de \mathcal{L} entonces $2 - \lambda$ es también un autovalor de \mathcal{L} con la misma multiplicidad que λ . En particular, $\lambda_{N-1} = 2$ es un autovalor simple de \mathcal{L} .*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad y por simplicidad en la notación, reetiquetemos los vértices del grafo Γ como $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Se tiene

- a) Sea $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$ base ortonormal de autofunciones, esto es, $\mathcal{L}f_k = \lambda_k f_k$, para todo $k = 0, \dots, N-1$. Respecto a esta base, la matriz asociada al operador \mathcal{L} es diagonal y su traza, teniendo en cuenta que $\lambda_0 = 0$, viene dada por

$$\text{tr}(\mathcal{L}_\mu) = \lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1} \quad (2.11)$$

Por otro lado, numeremos los vértices y consideremos la base de $\mathcal{F}(V)$ dada por las funciones como en (1.1). Evidentemente, para $f \in \mathcal{F}(V)$ se tiene que $f(i)$ son las componentes de dicha función respecto a la base considerada. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(i) &= f(i) - \sum_j P(i, j) f(j) = f(i) - P(i, i) f(i) - \sum_{j \neq i} P(i, j) f(j) \\ &= (1 - P(i, i)) f(i) - \sum_{j \neq i} P(i, j) f(j). \end{aligned}$$

Como puede observarse, la matriz de \mathcal{L} tiene como diagonal los elementos $1 - P(i, i)$. Se sigue que

$$\text{tr}(\mathcal{L}) = \sum_{i=0}^{N-1} (1 - P(i, i)) = N - \sum_{i=0}^{N-1} P(i, i) \leq N. \quad (2.12)$$

Comparando las expresiones dadas por (2.11) y (2.12) obtenemos la desigualdad (2.7). Además, (2.8) es consecuencia inmediata de (2.7) teniendo en cuenta que λ_1 es el menor de los autovalores positivos.

Supongamos que (Γ, μ) no posee lazos, entonces, en la expresión (2.12) los valores $P(i, i)$ son nulos para cualquier $i = 0, 1, \dots, N-1$ y por tanto hay igualdad en (2.7), que es precisamente la afirmación (2.9).

Finalmente, para probar (2.10) basta recordar que λ_{N-1} es el mayor de los autovalores en la expresión (2.9).

- b) Ya que las funciones constantes son autofunciones asociadas al autovalor cero, necesitamos construir $N-1$ funciones linealmente independientes tales que estén asociadas al autovalor $\lambda = \frac{N}{N-1}$. Para $k = 1, \dots, N-1$ consideremos las funciones

$$f_k(i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ -1, & i = k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

las cuales son trivialmente independientes. Se tiene

- Si $i = 0$, entonces

$$\mathcal{L}f_k(0) = f_k(0) - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq 0} f_k(j) = 1 + \frac{1}{N-1} = \frac{N}{N-1} = \frac{N}{N-1} f_k(0).$$

- Si $i = k$ entonces

$$\mathcal{L}f_k(k) = f_k(k) - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq k} f_k(j) = -1 - \frac{1}{N-1} = -\frac{N}{N-1} = \frac{N}{N-1} f_k(k).$$

- Si $i \neq 0, k$, entonces

$$\mathcal{L} f_k(i) = f_k(i) - \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} f_k(j) = 0 = \frac{N}{N-1} f_k(i).$$

Esto quiere decir que para cada $k = 1, \dots, N-1$ las funciones $\{f_k\}_{k \in \{1, \dots, N-1\}}$ son autovectores correspondientes al mismo autovector $\lambda = \frac{N}{N-1}$.

- c) Por el principio variacional sabemos que

$$\lambda_1 = \inf_{f \perp 1} \mathcal{R}(f)$$

por lo que, si encontramos un función $f \in \mathcal{F}(V)$, con $f \perp 1$ tal que $\mathcal{R}(f) \leq 1$ habremos terminado. Construiremos una función $f \in \mathcal{F}(V)$ tal que $1 \perp f$ y $\mathcal{R}(f) \leq 1$. Como el grafo no es completo, existirán dos vértices $z_0, z_1 \in V$ tales que $z_1 \sim z_2$. Consideremos la función

$$f(x) = c_1 1_{z_1} + c_2 1_{z_2}$$

donde las constantes c_1 y c_2 se toman arbitrariamente de tal manera que $f \perp 1$.

Aplicando los lemas (2.2.3) y (2.2.4), sabemos que $\mathcal{R}(c_i 1_{z_i}) \leq 1$, y, por construcción, los soportes de ambas funciones son disjuntos y no conexos, por lo que se obtiene que $\mathcal{R}(f) \leq 1$

- d) Ya que los autovalores del operador de Laplace están relacionados con los autovalores del operador de Markov mediante la expresión $\alpha = 1 - \lambda$, demostraremos esta proposición para su equivalente sobre el espectro del operador de Markov, esto es, si $\alpha = 1 - \lambda$ es autovalor del operador de Markov, entonces, $-\alpha = 1 - (2 - \lambda)$ es autovalor con la misma multiplicidad. Como el grafo es bipartito, existirá una partición del conjunto V en dos subconjuntos disjuntos V^+ y V^- tales que ninguno de los vértices de uno de esos subconjuntos es vecino de un vértice del mismo subconjunto. Consideremos f una autofunción asociada al autovalor α del operador de Markov. Definimos la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in V^+ \\ -f(x), & x \in V^- \end{cases}$$

Ahora bien, si $x \in V^+$, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} P g(x) &= \sum_{y \in V} P(x, y) g(y) = \sum_{y \in V^-} P(x, y) g(y) = - \sum_{y \in V^-} P(x, y) f(y) \\ &= -P f(x) = -\alpha f(x) = -\alpha g(x). \end{aligned}$$

mientras que para $x \in V^-$ se tiene

$$\begin{aligned} P g(x) &= \sum_{y \in V} P(x, y) g(y) = \sum_{y \in V^+} P(x, y) g(y) = \sum_{y \in V^+} P(x, y) f(y) \\ &= P f(x) = \alpha f(x) = -\alpha g(x). \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $-\alpha$ es autovalor. Finalmente, si m es la multiplicidad de α como autovalor de P , entonces, existirán m funciones f_1, \dots, f_m linealmente independientes asociadas al autovalor α . De la construcción anterior de g , existirán m funciones linealmente independientes asociadas al autovalor $-\alpha$, por lo que, si m' es la multiplicidad de $-\alpha$, se tendrá que $m' \geq m$. Aplicando ahora el mismo argumento pero para el autovalor $-\alpha$ concluimos que $m \geq m'$, lo que demuestra que $m = m'$. Finalmente, ya que $\lambda = 0$ es siempre autovalor, de la construcción de g se desprende que $\lambda = 2$ es autovalor del operador de Laplace. ◀

2.3. La constante de Cheeger

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo conexo, pesado y finito. Es evidente que cuando el número de vértices que posee V es elevado, encontrar sus autovalores puede resultar una tarea ardua. En esta sección se introduce la constante de Cheeger y se establecen acotaciones superiores e inferiores del autovalor λ_1 .

Dado $\Gamma = (V, E)$ un grafo conexo, pesado, localmente finito y $\Omega \subset V$ definimos su frontera de aristas como

$$\partial\Omega = \{\overline{xy} \in E \mid x \in \Omega, y \notin \Omega\}.$$

De esta forma, se define la constante de Cheeger de $\Gamma = (V, E)$ como

$$h = \inf_{\mu(\Omega) \leq \frac{1}{2} \mu(V)} \frac{\mu(\partial\Omega)}{\mu(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Proposición 2.3.1 (Acotación superior de λ_1 .) *Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo conexo, finito y pesado y λ_1 menor de sus autovalores positivos, entonces se tiene que*

$$\lambda_1 \leq 2h.$$

DEMOSTRACION. Sea $\Omega \subset V$, no vacío, donde el mínimo en (2.13) se alcanza. Consideremos ahora la función $f_a \in \mathcal{F}(V)$ definida como

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ -a, & x \notin \Omega \end{cases}$$

eligiendo $a = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega^c)}$ para que $\langle f_a, 1 \rangle = 0$.

Para demostrar esta proposición es suficiente demostrar que $\mathcal{R}(f_a, f_a)$ también es menor a $2h$ (por ser $f_a \perp 1$). Por un lado

$$\begin{aligned} \langle f_a, f_a \rangle &= \sum_{x \in V} f_a(x)^2 \mu(x) = \sum_{x \in \Omega} f_a(x)^2 \mu(x) + \sum_{x \in \Omega^c} f_a(x)^2 \mu(x) \\ &= \mu(\Omega) + a^2 \mu(\Omega^c) = (1 + a) \mu(\Omega). \end{aligned}$$

y por otro

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} f_a, f_a \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (f_a(x) - f_a(y))^2 \mu_{xy} = \sum_{x \in \Omega, y \in \Omega^c} (f_a(x) - f_a(y))^2 \mu_{xy} \\ &= (1 + a)^2 \sum_{x \in \Omega, y \in \Omega^c} \mu_{xy} = (1 + a)^2 \mu(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$\mathcal{R}(f_a, f_a) = \frac{\langle \mathcal{L} f_a, f_a \rangle}{\langle f_a, f_a \rangle} = \frac{(1 + a)^2 \mu(\partial\Omega)}{(1 + a) \mu(\partial\Omega)} = (1 + a) \frac{\mu(\partial\Omega)}{\mu(\Omega)} \leq 2h. \quad \blacktriangleleft$$

Hasta ahora, la proposición 2.3.1 proporciona una cota superior para el autovalor λ_1 . En sentido opuesto, desarrollaremos una serie de lemas con el fin de proporcionar una acotación inferior para dicho autovalor.

Lema 2.3.2 (Fórmula de Coarea.) *Dada una función real $f \in \mathcal{F}(V)$, consideramos para cualquier $t \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$\Omega_t = \{x \in V / f(x) > t\}.$$

Entonces se verifica que

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_\xi f| \mu(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\partial\Omega_t) dt \quad (2.14)$$

donde $|\nabla_\xi f| = |f(y) - f(x)|$ si $\xi = [x, y]$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, observemos que si $\xi \in \partial\Omega_t$ debe ser $y \in \Omega_t$ y $x \notin \Omega_t$, por lo que, debe ser $f(y) > t$ y $f(x) \leq t$ donde consecuentemente $t \in [f(x), f(y)] = I_\xi$, esto es $t \in I_\xi$. Así, se obtiene trivialmente que

$$|\nabla_\xi f| = |I_\xi|,$$

siendo $|I_\xi|$ la longitud del intervalo I_ξ . Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\mu(\partial\Omega_t) = \sum_{\xi \in \partial\Omega_t} \mu_\xi = \sum_{\xi \in E: t \in I_\xi} \mu_\xi = \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) 1_{I_\xi}(t)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\partial\Omega_t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) 1_{I_\xi}(t) dt = \sum_{\xi \in E} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\xi) 1_{I_\xi}(t) dt \\ &= \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} 1_{I_\xi}(t) dt = \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) |I_\xi| = \sum_{\xi \in E} \mu(\xi) |\nabla_\xi f|. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Lema 2.3.3 *Sea $f \in \mathcal{F}(V)$ una función no negativa tal que*

$$\mu(\{x \in V / f(x) > 0\}) \leq \frac{1}{2} \mu(V).$$

Entonces, se verifica

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_\xi f| \mu(\xi) \geq h \sum_{x \in V} f(x) \mu(x),$$

donde h es la constante de Cheeger.

DEMOSTRACIÓN. La hipótesis implica que el conjunto

$$\Omega_t = \{x \in V / f(x) > t\}$$

satisface, para $t \geq 0$, la condición $\mu(\Omega_t) \leq \frac{1}{2} \mu(V)$, y por definición $\mu(\partial\Omega_t) \geq h\mu(\Omega_t)$. Ahora la fórmula de coarea, implica que

$$\begin{aligned} |\nabla_\xi f \mu(\xi)| &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\partial\Omega_t) dt \geq h \int_0^{\infty} \mu(\Omega_t) dt = h \int_0^{\infty} \sum_{x \in \Omega_t} \mu(x) dt \\ &= h \sum_{x \in V} \mu(x) \int_0^{\infty} 1_{[0, f(x)]}(t) dt = h \sum_{x \in V} f(x) \mu(x). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Proposición 2.3.4 (Acotación inferior de λ_1 .) *Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo finito, localmente finito, conexo y pesado. Sea λ_1 como antes. Entonces, se verifica que*

$$\frac{h^2}{2} \leq \lambda_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea f una autofunción asociada al autovalor λ_1 . Sobre el conjunto de vértices V consideremos la siguiente partición

$$V^+ = \{x \in V / |f(x)| \geq 0\} \quad \text{y} \quad V^- = \{x \in V / f(x) < 0\}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu(V^+) \leq \mu(V^-)$ (si no fuese así bastaría cambiar los sentidos de las desigualdades que los definen), por lo que se obtiene que $\mu(V^+) \leq \frac{1}{2} \mu(V)$.

Definamos ahora la función

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$$

Aplicando ahora la identidad de Green, tenemos que

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy}$$

mientras que,

$$\lambda_1 \langle f, g \rangle = \lambda_1 \sum_{x \in V} f(x)g(x)\mu(x).$$

Así,

$$\lambda_1 \sum_{x \in V} f(x)g(x)\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy}.$$

Ahora bien, de la propia definición de la función $g(x)$ se obtiene que

$$(\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) = (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geq (g(y) - g(x))^2 = |\nabla_{xy} g|^2$$

y por tanto

$$\lambda_1 \geq \frac{\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g|^2 \mu(\xi)}{\sum_{x \in V} g^2(x)\mu(x)}. \tag{2.15}$$

Ahora, para concluir la demostración, bastará demostrar que

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g|^2 \mu(\xi) \geq \frac{h^2}{2} \sum_{x \in V} g^2(x)\mu(x).$$

Para ello, considerando la función g^2 , por el lema (2.3.3), resulta que

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g^2| \mu(\xi) \geq h \sum_{x \in V} g^2(x)\mu(x). \tag{2.16}$$

Ahora bien, desarrollando el lado izquierdo de la expresión y utilizando la desigualda de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g^2| \mu(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} |g^2(y) - g^2(x)| \mu(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} |g(y) - g(x)| \sqrt{\mu_{xy}} |g(y) + g(x)| \sqrt{\mu_{xy}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{x,y \in V} (g(x) - g(y))^2 \mu_{xy} \right) \frac{1}{2} \left(\sum_{x,y \in V} (g(x) + g(y))^2 \mu_{xy} \right) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g|^2 \mu(\xi) \sum_{x,y \in V} (g(x) + g(y))^2 \mu_{xy} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g|^2 \mu(\xi) \sum_{x \in V} g^2(x) \mu(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Aplicando ahora la expresión (2.16) tenemos

$$\left(2 \sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} g|^2 \mu(\xi) \right)^{1/2} \left(\sum_{x \in V} g^2(x) \mu(x) \right)^{1/2} \geq h \sum_{x \in V} g^2(x) \mu(x).$$

Finalmente, dividiendo por $(\sum_{x \in V} g^2(x) \mu(x))^{1/2}$, elevando al cuadrado y despejando, obtenemos el resultado deseado. ◀

2.4. Grafos de Cayley

Sea G un grupo abeliano y $S \subset G$ tal que S simétrico, esto es, $e \notin S$ y para todo $x \in S$ se verifica que $x^{-1} \in S$. Consideremos el grafo $\Gamma = (G, E)$ construido a partir de identificar cada elemento de G con un vértice de V y como conjunto de aristas las formadas al conectar vértices etiquetados como aquellos elementos de G que verifiquen la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in S \tag{2.17}$$

Al grafo $\Gamma = (V, E) = (G, S)$ se le denominará *grafo de Cayley del grupo G y generador S* .

Nótese que si $x \sim y$, debe ser $x \cdot y^{-1} \in S$, entonces, por ser S conjunto simétrico, se desprende que $(x \cdot y^{-1})^{-1} = y \cdot x^{-1} \in S$ con lo que $y \sim x$, esto es, los grafos de Cayley son grafos simples.

2.4.1. El espectro de la familia de grafos cíclicos

Sea $G = \mathbb{Z}_n$, $S = \{-1, +1\}$ y el grafo de Cayley $\Gamma = (\mathbb{Z}_n, S)$. Si los vértices $x, y \in V$ están conectados, entonces, de la relación de vecindad dada por (2.17) y la definición de S ha de verificarse que

$$x - y = 1 \text{ ó } x - y = -1$$

de donde se concluye que dichos vértices han de ser necesariamente consecutivos. Este tipo de grafos de Cayley se denominan conjuntamente *familia de grafos cíclicos* y, de manera general, se representa como C_n .

Para calcular el espectro del operador \mathcal{L} , que por la proposición 2.2.1 sabemos que está contenido en el intervalo $[0, 2]$, supongamos que λ es uno de sus autovalores y $f \in \mathcal{F}(V)$ una autofunción asociada a λ .

Se tiene así que

$$\mathcal{L}f(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(x+1) - \frac{1}{2}f(x-1) = \lambda f(x), \forall x \in \mathbb{Z} \quad (2.18)$$

de aquí, usando que λ es un autovalor de \mathcal{L} ,

$$f(x+1) - 2(1-\lambda)f(x) + f(x-1) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (2.19)$$

Para resolver la ecuación (2.19), teniendo en cuenta que si λ es autovalor asociado al operador de Laplace, entonces $\alpha = 1 - \lambda$ es autovalor del operador de Markov, consideraremos la función $f(x) = r^x$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} r^{x+1} - 2\alpha r^x + r^{x-1} &= 0 \\ r^2 - 2\alpha r + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

cuyas soluciones son $r = \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$.

Consideremos ahora $\theta \in [0, \pi)$ tal que $\alpha = \cos\theta$. Entonces, utilizando la identidad de Euler podemos escribir

$$\begin{aligned} r &= \alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2} = \cos\theta \pm i\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}, \end{aligned}$$

y podemos deducir que las funciones $f_1(x) = e^{i\theta x}$ y $f_2(x) = e^{-i\theta x}$ son soluciones de (2.20). De todas estas estas soluciones de la ecuación podemos seleccionar las dadas por

$$f_1(x) = \cos(\theta x) \text{ y } f_2(x) = \sin(\theta x)$$

Por otro lado, para que f_i esté bien definida, es necesario que, para $i = 1, 2$, se verifique

$$f_i(x) = f_i(x+n),$$

esto es, f debe ser periódica con periodo n . Para las soluciones tomadas, la condición de periodicidad implica que

$$(x+n)\theta - \theta x = 2\pi l, \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}.$$

de donde se obtiene que

$$\theta = \frac{2\pi l}{n}. \quad (2.21)$$

Nótese, que de la elección $\theta \in [0, \pi)$, se tiene que $l \in [0, n/2)$, y al ser los autovalores del operador de Markov dados según la expresión $\alpha = \cos\theta$, por (2.21)

$$\alpha = \cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad (2.22)$$

Esto se puede resumir en el siguiente lema:

Lema 2.4.1 *Sea C_n grafo perteneciente a la familia de grafos cíclicos. Entonces, los autovalores asociados al operador de Markov vienen dados por*

- *Si n es impar los autovalores son $\alpha = 1$ un autovalor simple y $\alpha = \cos \frac{2\pi l}{n}$ autovalores, para todo $l = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$.*
- *Si n es par los autovalores son $\alpha = \pm 1$ autovalores simples, y $\alpha = \cos \frac{2\pi l}{n}$ son autovalores dobles si para todo $l = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$.*

2.5. El operador de Dirichlet-Laplace

En lo que sigue, el grafo $\Gamma = (V, E)$ representará un grafo donde $|V|$ será a lo sumo contable, conexo, localmente finito y pesado.

Dado $\Omega \subset V$ finito, definimos el conjunto $\mathcal{F}_\Omega(V)$ como el conjunto de las aplicaciones reales definidas sobre Ω . Se define el *operador de Dirichlet-Laplace pesado* como

$$\mathcal{L}_\Omega f(x) = f(x) - \sum_{y \sim x} P(x, y) f(y) \tag{2.23}$$

donde f se extiende fuera de Ω tomando valor $f(x) = 0$ para todo $x \in \Omega^c$.

En general, dado $\Gamma = (V, E)$ grafo localmente finito, conexo, pesado y $\Omega \subset V$ finito, los autovalores de Ω como subconjunto de V serán diferentes a los valores de Ω como grafo finito en sí mismo. Por ejemplo, si consideramos \mathbb{Z}^2 como conjunto de vértices y $S = \{e_i, e_j, -e_i, -e_j\}$ como conjunto de aristas, tomando como $\Omega = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, por un lado se tiene que, como grafo en sí mismo, según el lema (2.4.1), Ω posee como autovalores a $\lambda = 0$ (simple), $\lambda = 2$ (simple), $\lambda = 1$ (doble), mientras que, por otro lado, aplicando el operador de Dirichlet-Laplace se tiene que, etiquetando sin pérdida de generalidad los vértices como $\{a, b, c, d\}$, los autovalores vendrán determinados como aquellos valores de λ para los cuales

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\Omega f(a) = f(a) - \frac{1}{4} f(b) - \frac{1}{4} f(c) = \lambda f(a) \\ \mathcal{L}_\Omega f(b) = f(b) - \frac{1}{4} f(a) - \frac{1}{4} f(d) = \lambda f(b) \\ \mathcal{L}_\Omega f(c) = f(c) - \frac{1}{4} f(a) - \frac{1}{4} f(d) = \lambda f(c) \\ \mathcal{L}_\Omega f(d) = f(d) - \frac{1}{4} f(b) - \frac{1}{4} f(c) = \lambda f(d) \end{cases}$$

tiene solución no trivial. Se observa que dicho sistema admite como soluciones para λ los valores, $\lambda = 1/2$ (simple), $\lambda = 3/2$ (simple) y $\lambda = 1$ (doble). Nótese que, no sólo los autovalores son diferentes según miremos el conjunto Ω como subconjunto de V o como grafo en sí, sino que en general, $\lambda = 0$ no es, en general, autovalor de Ω como subconjunto de V .

Análogamente al caso de grafos finitos, el operador de Dirichlet-Laplace posee la siguiente propiedad

Teorema 2.5.1 *Identidad de Green.* Sea $\Gamma = (V, E)$ grafo conexo, localmente finito y pesado y Ω subconjunto finito de V . Entonces, para cualesquiera dos funciones $f, g \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ se verifica la identidad de Green

$$\langle \mathcal{L}_\Omega f, g \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} \tag{2.24}$$

donde $\Omega_1 = \{x \in V / \gamma(x, \Omega) \leq 1\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ y extendidas tales que $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \Omega^c$. Aplicando el teorema (2.1.1) al operador definido positivo, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_\Omega f, g \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} - \sum_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_1^c} (\nabla_{xy} f)g(x) \mu_{xy} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy} \end{aligned}$$

donde el sumando $\sum_{x \in \Omega_1, y \in \Omega_1^c} (\nabla_{xy} f)g(x) \mu_{xy}$ se anula, ya que, considerando la suma únicamente entre vértices vecinos, si $y \in \Omega_1^c$, entonces, $x \in \Omega^c$ y se tiene que $g(x) = 0$. ◀

Corolario 2.5.2 *El operador de Dirichlet-Laplace es simétrico*

Nuevamente, como en el caso de grafos finitos, podemos definir el cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}(f) = \frac{\langle \mathcal{L}_\Omega f, f \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} f) \mu_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) \mu(x)}, \tag{2.25}$$

que al igual que para grafos finitos, colocando los autovalores del operador de Dirichlet-Laplace en Ω en orden creciente como $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_N(\Omega)$, admite el principio variacional, esto es

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{f \in \mathcal{F}_\Omega(V)} \mathcal{R}(f) \tag{2.26}$$

Nótese que en la expresión (2.25), las sumas pueden ser extendidas a todo V . Para el denominar, basta observar que $f(x) = 0$ para $x \in \Omega^c$, mientras que para el denominador, si $x \notin \Omega_1$ y además $y \sim x$, debe ser $y \in \Omega^c$, por lo que $f(x) = f(y) = 0$.

Teorema 2.5.3 *Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo infinito a lo sumo contable, localmente finito, conexo y pesado. Sea Ω subconjunto finito de V y \mathcal{L}_Ω el operador de Dirichlet-Laplace definido sobre el espacio $\mathcal{F}_\Omega(V)$. Entonces*

- a) $0 < \lambda_1(\Omega) \leq 1$.

b) $\lambda_1(\Omega) + \lambda_N(\Omega) \leq 2$. Consecuentemente

$$\text{Spec } \mathcal{L}_\Omega \subset [\lambda_1(\Omega), 2 - \lambda_1(\Omega)] \subset (0, 2).$$

c) $\lambda_1(\Omega)$ decrece cuando $|\Omega|$ crece.

DEMOSTRACIÓN.

- Para demostrar (a) consideremos $f \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ una autofunción asociada a $\lambda_1(\Omega)$. Por el principio variacional se tiene que

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f)^2 \mu_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) \mu(x)} \geq 0 \quad (2.27)$$

lo cual implica que $\lambda_1(\Omega) \geq 0$. Demostremos que $\lambda_1(\Omega) > 0$ procediendo por reducción al absurdo. Supongamos que $\lambda_1(\Omega) = 0$, sigue de (2.27) que $\nabla_{xy} f = 0$ para todos los pares de vértices vecinos, esto es, si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$. Fijemos un vértice $x \in \Omega$, como Ω es finito y V es infinito, el conjunto Ω^c es no vacío. Sea $y \in \Omega^c$, como Γ es conexo, existe un camino que conecta los vértices $x \in \Omega$ e $y \in \Omega^c$.

Sea k el menor entero tal que $x_k \in \Omega^c$. Como $x_{k-1} \in \Omega$ y $x_{k-1} \sim x_k$, se sigue que $x_k \in \Omega_1$ y así, podemos afirmar que

$$f(x_0) = \dots = f(x_{k-1}) = f(x_k).$$

Como $f(x_k) = 0$, se sigue que $f \equiv 0$ en Ω , lo cual, es absurdo ya que f es autofunción asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega)$. Se tiene $\lambda_1(\Omega) > 0$.

Para demostrar que $\lambda_1(\Omega) \leq 1$ consideremos la traza del operador de Dirichlet-Laplace. Se tiene

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_\Omega) = \lambda_1(\Omega) + \dots + \lambda_N(\Omega) \quad (2.28)$$

mientras que, en la base dada por las funciones $\{1_{\{x\}}\}_{x \in \Omega}$, la traza del operador de Dirichlet-Laplace se expresa como

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_\Omega) = \sum_{x \in \Omega} (1 - P(x, x)) \leq N \quad (2.29)$$

De las expresiones (2.28) y (2.29) se tiene

$$N \geq N\lambda_1(\Omega)$$

y por tanto $\lambda_1(\Omega) \leq 1$.

- Sea $f \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ una autofunción del operador de Dirichlet-Laplace asociada al autovalor $\lambda_N(\Omega)$. Por el principio variacional se tiene que

$$\lambda_N(\Omega) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} (\nabla_{xy} f) \mu_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) \mu(x)}.$$

Aplicando de nuevo el principio variacional a la función $|f|$, podemos escribir

$$\lambda_1(\Omega) \leq \mathcal{R}(|f|) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Omega_1} (\nabla_{xy}|f|)^2 \mu_{xy}}{\sum_{x \in \Omega} f^2(x) \mu(x)}.$$

Como

$$(\nabla_{xy}f)^2 + (\nabla_{xy}|f|)^2 = (f(x) - f(y))^2 + (|f(x)| - |f(y)|)^2 \leq 2(f(x)^2 + f(y)^2).$$

Se sigue que

$$\lambda_1(\Omega) + \lambda_N(\Omega) \leq \frac{\sum_{x,y \in V} (f(x)^2 + f(y)^2) \mu_{xy}}{\sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x)} = \frac{2 \sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x)}{\sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x)} = 2.$$

y por tanto, $\lambda_N(\Omega) \leq 2 - \lambda_1(\Omega)$.

- Cuando $|\Omega|$ crece, por el principio variacional, $\lambda_1(\Omega)$ claramente disminuye. ◀

Hasta ahora, en paralelo a como se procedió para grafos finitos, se introdujo la constante de Cheeger, la cual permitió establecer cotas, tanto superior como inferior, del primer autovalor no nulo del operador de Laplace \mathcal{L} . Análogamente, se introduce la constante de Cheeger para grafos infinitos la cual será utilizada para establecer una acotación inferior del autovalor $\lambda_1(\Omega)$.

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo localmente finito, conexo y pesado con $|V|$ a lo sumo numerable. Para cualquier subconjunto $\Omega \subset V$, definimos su constante de Cheeger como

$$h(\Omega) = \inf_{U \subset \Omega} \frac{\mu(\partial U)}{\mu(U)},$$

donde el ínfimo se toma sobre cualquier subconjunto U de Ω no vacío.

Lema 2.5.4 *Para cualquier función no negativa $f \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ se verifica la ecuación*

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_\xi f| \mu_\xi \geq h(\Omega) \sum_{x \in V} f(x) \mu(x). \tag{2.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la expresión (2.14) del lema del coarea tenemos que

$$\sum_{\xi} |\nabla_\xi f| \mu_\xi \geq \int_0^\infty \mu(U_t) dt,$$

donde $U_t = \{x \in V | f(x) > t\}$. Como $U_t \subset \Omega$, para cualquier $t > 0$, se obtiene que

$$\mu(\partial U_t) \geq h(\Omega) \mu(U_t),$$

y así

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f| \mu_{\xi} \geq h(\Omega) \int_0^{\infty} \mu(U_t) dt.$$

Ahora bien, como

$$\int_0^{\infty} \mu(U_t) dt = \sum_{x \in V} f(x) \mu(x)$$

con lo cual, de las dos expresiones anteriores obtenemos el resultado deseado. ◀

Para finalizar esta sección, introduciremos el teorema de la constante de Cheeger para grafos infinitos, que nos permitirá establecer una cota inferior del primer autovalor no nulo.

Teorema 2.5.5 (Teorema de la constante de Cheeger) *Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo conexo, localmente finito y pesado con $|V|$ a lo sumo contable. Entonces*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{2} h(\Omega)^2. \tag{2.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{F}_{\Omega}(V)$ una autofunción del operador de Dirichlet-Laplace asociada al autovalor $\lambda_1(\Omega)$. Por el principio variacional podemos escribir

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f|^2 \mu_{\xi}}{\sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x)}.$$

Por (2.30) aplicado a f^2 resulta que

$$\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f^2| \mu_{\xi} \geq h(\Omega) \sum_{x \in V} f(x)^2 \mu(x).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f^2| \mu(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |f^2(y) - f^2(x)| \mu(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} |f(y) - f(x)| \sqrt{\mu_{xy}} |f(y) + f(x)| \sqrt{\mu_{xy}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{x, y \in V} (f(x) - f(y))^2 \mu_{xy} \right) \frac{1}{2} \left(\sum_{x, y \in V} (f(x) + f(y))^2 \mu_{xy} \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f|^2 \mu(\xi) \sum_{x, y \in V} (f(x) + f(y))^2 \mu_{xy} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2 \sum_{\xi \in E} |\nabla_{\xi} f|^2 \mu(\xi) \sum_{x \in V} f^2(x) \mu(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones anteriores y dividiendo por $\left(\sum_{x \in V} f^2(x) \mu(x) \right)^{1/2}$ obtenemos el resultado deseado. ◀

2.6. Resolución del problema de Dirichlet de forma iterativa.

Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo localmente finito, pesado y conexo. Sea $\Omega \subset V$ finito y $\Omega \neq \emptyset$. El problema de Dirichlet para grafos infinitos, localmente finitos consiste en, dada una función $f \in \mathcal{F}_\Omega(V)$, encontrar una función $u \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ tal que

$$\mathcal{L}_\Omega u(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.32}$$

El método que se muestra a continuación, ideado por Jacobi, consiste en partir de una función $u_0 \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ (que generalmente suele tomarse como la función nula), y de manera iterativa construir una sucesión de funciones u_n como sigue

$$u_{n+1} = Pu_n + f.$$

Antes de estudiar la convergencia del método, se exponen resultados elementales sobre teoría de operadores, que muestran que el valor de la norma de un operador simétrico es igual al valor absoluto del máximo de sus autovalores. Dado un espacio vectorial V y un operador lineal $A : V \rightarrow V$, definimos su norma vectorial como

$$\|A\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}.$$

Lema 2.6.1 *Sea V espacio vectorial. Si A es un operador simétrico, entonces*

$$\|A\| = \max_{\alpha \in \text{spec } A} |\alpha|.$$

DEMOSTRACIÓN. Evaluando sobre $\|A\|^2$ se tiene

$$\|A\|^2 = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle Av, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\langle A^2 v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \tag{2.33}$$

donde podemos observar que el término de la derecha es el cociente de Rayleigh de el operador A^2 . Como los autovalores del operador A^2 son α^2 donde α autovalor de A , tenemos que

$$\|A\|^2 = (\max |\alpha|)^2,$$

de donde se deduce que

$$\|A\| = \max_{\alpha \in \text{Spec } A} |\alpha|. \quad \blacktriangleleft$$

Para finalizar, se presenta el teorema de convergencia del método de Jacobi. Pese a que no es el único método, véase [4], donde se presenta el método de las relajaciones, el método de Jacobi es útil por su simpleza en la implementación de algoritmos. Esencialmente, siguiendo la línea dada por [3], para utilizar el método de Jacobi, podemos plantear el problema de Dirichlet como en (2.32) y considerando la descomposición $1 - P$ podemos considerar el problema iterativo $u_{n+1} = Pu_n + f$, partiendo desde cualquier función $u_0 \in \mathcal{F}_\Omega(V)$. A este método se le conoce como el *método de Jacobi*.

Teorema 2.6.2 (Convergencia del método de Jacobi) *Consideremos el problema de Dirichlet dado en (2.32) y supongamos que $u_0 \in \mathcal{F}_\Omega(V)$. La sucesión $\{u_n\}$ construída recurrentemente*

$$u_{n+1} = Pu_n + f,$$

satisface

$$\|u_n - u\| \leq \alpha_1^n \|u\|$$

donde $\alpha_1 = 1 - \lambda_1(\Omega)$ y u es la solución de (2.32). Consecuentemente, $u_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que el operador $\mathcal{L}_\Omega = 1 - P$ del problema de Dirichlet dado por (2.32) verifica, por la proposición 2.5.3 que $0 \notin \text{Spec}\{\mathcal{L}_\Omega\}$ y por tanto, \mathcal{L}_Ω es invertible. Así, la solución del problema vendrá dada por

$$u(x) = \mathcal{L}_\Omega^{-1} f(x), \quad x \in \Omega$$

Considerando que para la función solución $u \in \mathcal{F}_\Omega(V)$ se debe verificar

$$u = Pu + f \tag{2.34}$$

y por hipótesis

$$u_{n+1} = Pu_n + f \tag{2.35}$$

restando las expresiones (2.35) y (2.34) se tiene la expresión

$$u_{n+1} - u = P(u_n - u), \tag{2.36}$$

de donde, aplicando normas, se tiene que

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \|P\| \|u_n - u\|. \tag{2.37}$$

Aplicando ahora la proposición 2.5.3, se tiene que

$$\text{spec } P \subset [\alpha_N, \alpha_1] \subset [-\alpha_1, \alpha_1] \subset (-1, 1)$$

lo cual implica que $\max |\alpha_k| = \alpha_1$.

Utizando ahora (2.37) y teniendo en cuenta que $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_1^n$ se tiene que

$$\|u_n - u\| \leq \alpha_1^n \|u_0 - u\| = \alpha_1^n \|u\|. \quad \blacktriangleleft$$

Bibliografía

- [1] Flores, Manuel y Sadarangani, Kishin. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. Universidad de La Laguna.
- [2] Grigoryan, Alexander. (2011). *Analysis on Graphs*. Universidad de Bielefeld.
- [3] Infante, Juan Antonio y Cabezas, José María. (1999). *Métodos numéricos*. Pirámide.
- [4] Snell, Laurie y Doyle, Peter. (2000). *Random walks and electric networks*.
- [5] Soardi, Paolo. (1994). *Potential Theory on Infinite Networks*. Springer-Verlag.

Lista de símbolos y abreviaciones

$\mathcal{F}(V)$	Espacio de las funciones sobre el conjunto V .
∂	Operador frontera.
β	Operador cofrontera.
P	Operador de Markov.
Δ_μ	Operador de Laplace pesado.
$\partial\Omega$	Conjunto frontera de vértices o aristas.
∇_{xy}	Operador diferencia.
\mathcal{R}	Operador Resistencia. Función cociente de Rayleigh.
\mathcal{L}	Operador de Laplace pesado definido positivo.
\mathcal{L}_Ω	Operador de Dirichlet-Laplace

Anlisis en grafos

Abstract

The objective of this work is to use results of mathematical analysis and linear algebra studied throughout the degree. Specifically, we will apply these concepts to weighted graphs whose set of vertices is, at most, countable, and which is also connected and locally finite. The concepts of harmonic functions, chains and cochains and the boundary and coboundary operators are defined over graphs and then we will discuss the Dirichlet's problem. In addition, we will model networks and we will show how Kirchhoff's laws relate to the Dirichlet problem. In the second chapter, we present the identity of Green and, helped by an inner product, we use this tools to deepen the study of the spectrum of the Laplace operator. Finally, we show the Jacobi's method to solve the Dirichlet's problem over every weighted, connected and locally finite graph.

1. Introduction

In this work, we have put our attention in some properties about the spectrum of the laplacian operator from a weighted, connected and locally finite graph (Γ, μ) . After introducing the necessary concepts, the Laplacian operator is defined and immediately afterwards the Dirichlet problem is proposed and solved, finally, the relationship between Kirchhoff's laws and the Dirichlet problem is showed.

Second section of this work deals with the study of the spectrum of Laplace's operator. Helped by Green's identity, we will prove that the laplacian operator is a symmetric operator, and so, we will extract the main properties of their eigenvalues, as well as find bounds for their main eigenvalue for weighted, connected, locally finite graphs.

2. Outline

First of all we start introducing the space $\mathcal{F}(V)$ and over it, the concepts of chains, cochains and the linear operators boundary and coboundary. After this, we introduce the Markov Kernel and Markov operator defined over a weighted, connected and locally finite graphs as follow

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{\mu_{xy}}{\mu(x)} & x \sim y \\ 0 & x \not\sim y. \end{cases}$$

We will define the harmonic functions as the functions $u \in \mathcal{F}(V)$ wich the laplacian operator defined as $\Delta_\mu = P - 1$, being P the Markov operator, verify $\Delta_\mu u = 0$. We establish and solve the Dirichlet problem stated as

$$\begin{cases} \Delta_\mu u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

where $\Omega \subset V$. To finish the first section, we show the relationship between modeling networks using Kirchhoff's laws and solve Dirichlet's problem.

3. Outline 2

SECOND section of this work enters fully into the study of the main properties of the spectrum of Laplace's operator. First of all we establish the Green's identity, which is defined over all V as

$$\sum_{x \in V} \Delta_\mu f(x) g(x) \mu(x) = -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (\nabla_{xy} f)(\nabla_{xy} g) \mu_{xy}.$$

Then, next to the definition of an inner product over $\mathcal{F}(V)$, we show how the defined positive laplacian operator $\mathcal{L} = -\Delta_\mu$ is a symmetric operator. From classical algebra and analysis results, we know that the spectrum of every symmetric linear operator is contained in \mathbb{R} , particularly, in the case of connected, finite weighted graphs, we will prove that his spectrum will be contained in the interval $[0, 2]$, and beyond this, $\lambda = 0$ always will be an eingevalue whereas $\lambda = 2$ would be an eingevalue only for bipartite graphs. We study the main properties of the spectrum of \mathcal{L} and we establish the Cheeger constant h , which will provide us with the necessary tool to establish bounds of the main eigenvalue λ_1 of each finite, weighted and connected graph.

We continue studying the spectrum of locally finite, weighted and connected graphs introducing the Cayley graphs which help us to establish graph structure over abelian groups. As example, we calculated the spectrum of the Cyclic family C_n . Next, the spectrum of Laplace's operator for locally finite, infinite, connected and weighted graphs is studied, which will turn out to be contained in $(0, 2)$. Again, we will establish boundaries over $\lambda_1(\Omega)$, that is, the minimum eigenvalue of the spectrum of laplacian operator are established, using Cheeger's constant. Finally, we establish the Dirichlet problem for infinite graphs as

$$\Delta_\Omega u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

and we will consider the iterative method proposed by Jacobi

$$u_{n+1}(x) = P u_n(x) + f(x), \quad x \in \Omega$$

for which its convergence to the solution of the problem will be demonstrated.

References

- [1] Flores, Manuel y Sadarangani, Kishin. (2013). *Cálculo diferencial e integral*. Universidad de La Laguna.
- [2] Grigoryan, Alexander. (2011). *Analysis on Graphs*. Universidad de Bielefeld.
- [3] Infante, Juan Antonio y Cabezas, José María. (1999). *Métodos numéricos*. Pirámide.
- [4] Snell, Laurie y Doyle, Peter. (2000). *Random walks and electric networks*.
- [5] Soardi, Paolo. (1994). *Potential Theory on Infinite Networks*. Springer-Verlag.